UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JOSÉ EDNALDO DE ARAÚJO FILHO

PRODUTO EDUCACIONAL:
SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO) PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

FORTALEZA
2019

JOSÉ EDNALDO DE ARAÚJO FILHO

PRODUTO EDUCACIONAL:

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO) PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

FORTALEZA

2019

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Os cursos de mestrado profissional tiveram início com a finalidade de proporcionar uma resposta às demandas mais específicas da sociedade, por ter profissionais que assumem as qualificações próprias adequadas para que sejam capazes de atuar no âmbito do trabalho (BARROS; VALENTIM; MELO, 2005; FISCHER, 2005; FISCHER; ANDRADE, 2003), no qual essas qualificações são o que o mestrado *stricto sensu*, na modalidade acadêmica, e a especialização *lato sensu* não foram capazes de criar (RIBEIRO, 2005), além da demanda dos alunos que o procuram por ter conhecimentos melhores para colocar em ação, de forma mais direta, a teoria científica à prática do seu cotidiano.

O mestrado profissional (MP) se diferencia do mestrado acadêmico (MA) pela obrigatoriedade da construção de um produto educacional que deverá ser aplicado em espaços formais ou informais de ensino.

Sobre o produto educacional, Moreira e Nardi (2009, p. 4), afirmam:

> O mestrando deve desenvolver, por exemplo, uma nova estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino para determinados conteúdos, um aplicativo, um ambiente virtual, um texto, enfim, um processo ou produto, de natureza educacional, e implementá-lo em condições reais de sala de aula, ou de espaços não formais ou informais de ensino, relatando os resultados dessa experiência. (MOREIRA; NARDI, 2009, p. 4)

Para a Capes, o produto educacional “trata-se de um relato de experiência de implementação de estratégias ou produtos de natureza educacional, visando a melhoria do ensino em uma área específica do conhecimento” (CAPES, 2012, p. 2).

O produto educacional aqui apresentado é resultado da utilização da Teoria das Situações Didáticas (TSD), como metodologia de ensino, em problemas da primeira e segunda fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), referentes ao conteúdo de Geometria Plana. Nesse sentido, desejamos que essas situações fundamentadas na TSD sirvam de apoio para os professores de Matemática do Ensino Médio, tornando-as aulas olímpicas ou apenas contexto olímpico, diferenciadas através das tecnologias.

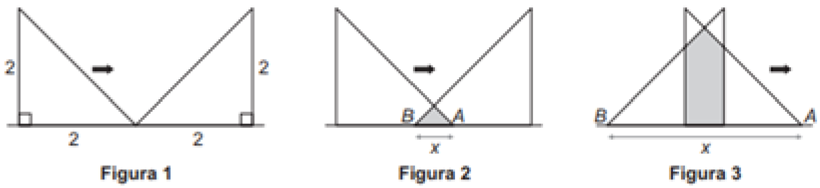
Dessa forma, estarão presentes nesse produto oito situações envolvendo problemas da OBMEP, que contemplarão a TSD e o uso do *software* Geogebra.

1.1 Situação Didática Olímpica 1 (SDO 1)

Conhecimentos prévios: semelhança de triângulos, área de um triângulo e gráfico de uma função quadrática.

Figura 1 – Problema - Prova OBMEP 2009 - 2ª fase, questão 5.

Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.



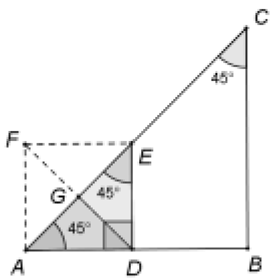
Para cada x no intervalo [0,4], seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

Fonte: elaborada pelo autor.

Ação: nessa fase, devemos observar quais as decisões tomadas pelo discente ao ter contato com o problema olímpico. O aluno deverá perceber que o triângulo ABC é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado e D é um ponto qualquer no lado AB. Fazendo DE perpendicular a AB, o triângulo ADE também é retângulo de lados iguais, sua área é igual à metade da área do quadrado ADEF e a área do triângulo ADG será igual a ¼ da área do quadrado ADEF.

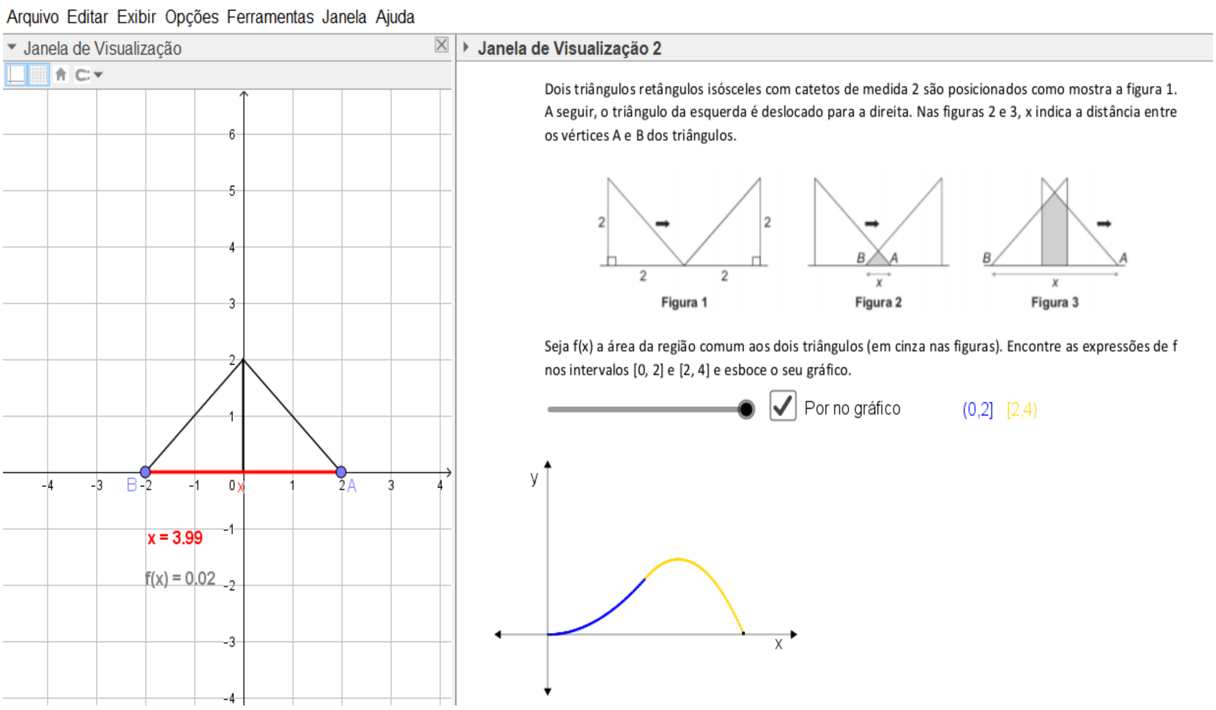
Figura 2 – Problema abordado na OBMEP 2009.



Fonte: elaborada pelo autor.

Formulação: nessa etapa é que os modelos matemáticos começam a se apresentar. O professor deverá introduzir as construções geométricas feitas com o auxílio do Geogebra que facilitará a visualização dos estudantes.

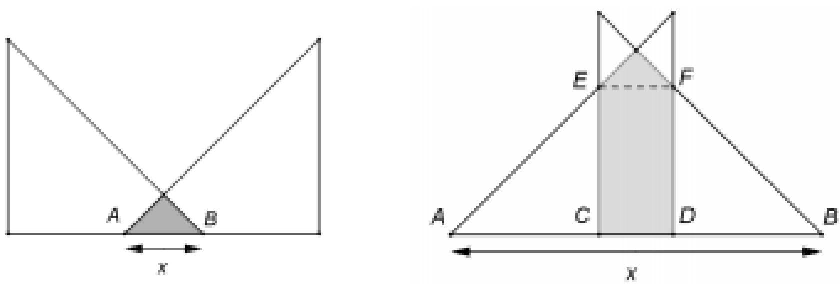
Figura 3 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 1.



Fonte: elaborada pelo autor.

Para valores de x tais que 0 ≤ x ≤ 2, a figura formada pela sobreposição dos triângulos é o triângulo em cinza que pode ser visualizado na figura abaixo, em que f(x) = x2/4 para 0 ≤ x ≤ 2. Quando 2 < x ≤ 4, a figura é um pentágono que também podemos visualizar na imagem a seguir:

Figura 4 – Problema abordado na OBMEP 2009.



Fonte: elaborada pelo autor.

Temos então AC + CD = 2 = BD + CD, em que:

$$4 = \underbrace{AC + BD + CD}_{x} + CD = x + CD\,,$$

Ou seja, CD = 4 – x; logo AC = BD = 2 – (4 – x) = x – 2. Vemos assim que o pentágono pode ser decomposto em um retângulo CDFE de base 4 – x e altura CE = AC = x – 2 e um triângulo isósceles de hipotenusa 4 – x. Segue que, para 2 < x ≤ 4, temos:

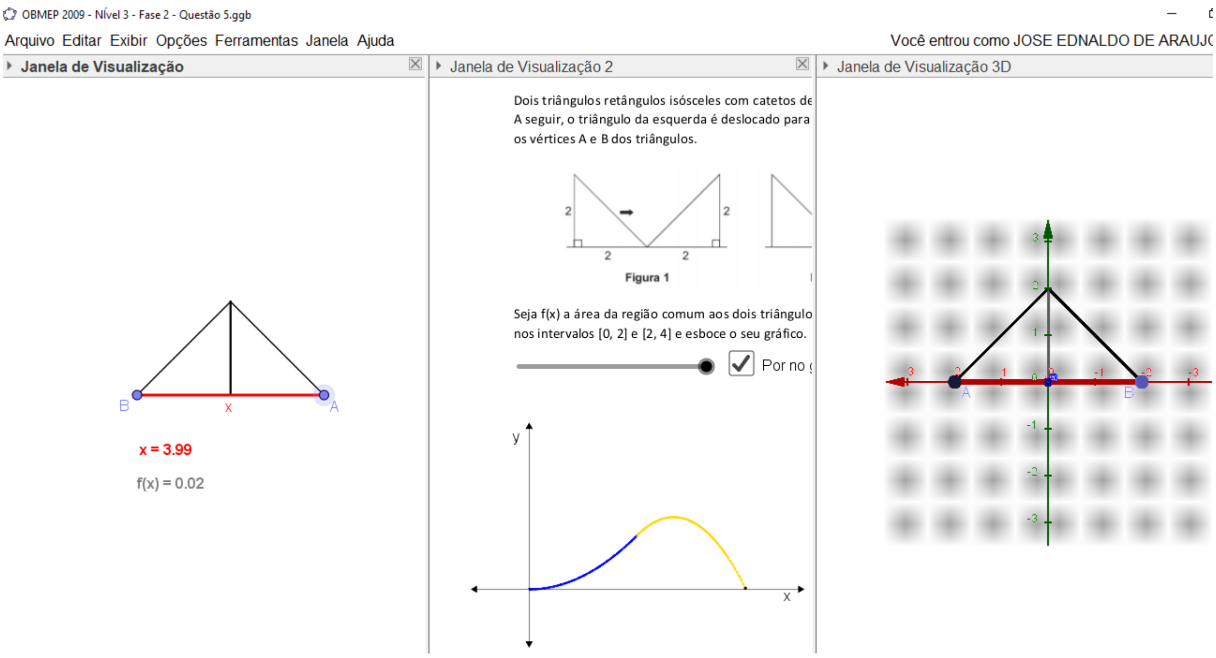
$$f(x) = \underbrace{(4-x)(x-2)}_{\text{área do retângulo}} + \underbrace{\frac{(4-x)^2}{4}}_{\text{área do triângulo}} = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4.$$

Notamos que esta última expressão também assume o valor 1 para x = 2. Em resumo, temos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{3}{4}x^2 + 4x - 4 \text{ se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Percebemos também que f(4) = 0. O gráfico de f está esboçado a seguir:

Figura 5 – Representação gráfica.



Fonte: elaborada pelo autor.

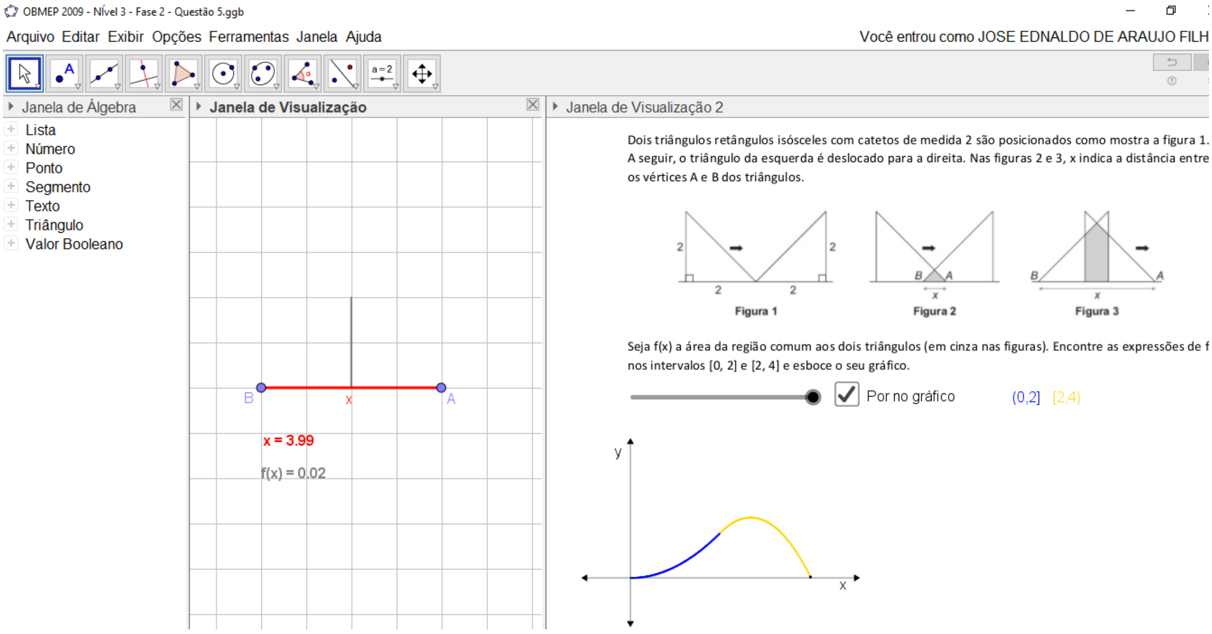
A observação direta do gráfico mostra que o valor máximo da função no intervalo [0,2] é f(2) = 1. Resta analisar a função no intervalo [2,4]. Vamos considerar a função quadrática g(x) = -3/4 x2 + 4x – 4 definida para todo x real; ela é da forma f(x) = ax2 + bx + c com a = -3/4, b =4 e c= -4. Como a<0, ela assume um valor máximo para x = -b/2a = 8/3 e seu valor nesse ponto é 4/3. Uma vez que 8/3 pertence ao intervalo [2,4], segue que o máximo de f nesse intervalo é 4/3, e como 4/3 >1, conclui-se que esse é o valor máximo de f no intervalo [0,4].

Validação: espera-se que haja as discussões sobre o que foi feito, comprovando suas soluções, bem como identificando os conceitos utilizados, tais como área do triângulo, área do retângulo e construção do gráfico de uma função quadrática.

Institucionalização: o professor formaliza todo o processo realizado pelos alunos. Deverá enfatizar o conteúdo que foi utilizado, mesmo não sendo algo novo para os discentes, mas que está sendo visto através de outra óptica, sobre o ponto de vista de um problema olímpico.

Comandos no Geogebra: para a construção apresentada, devemos iniciá-la com o comando “Controle deslizante” e criar um número v que sofrerá variação no intervalo [-4,2]. Em seguida, criar com o comando “Ponto” o ponto A (v,0) e um ponto B (-2,0) sobre o eixo das abscissas.

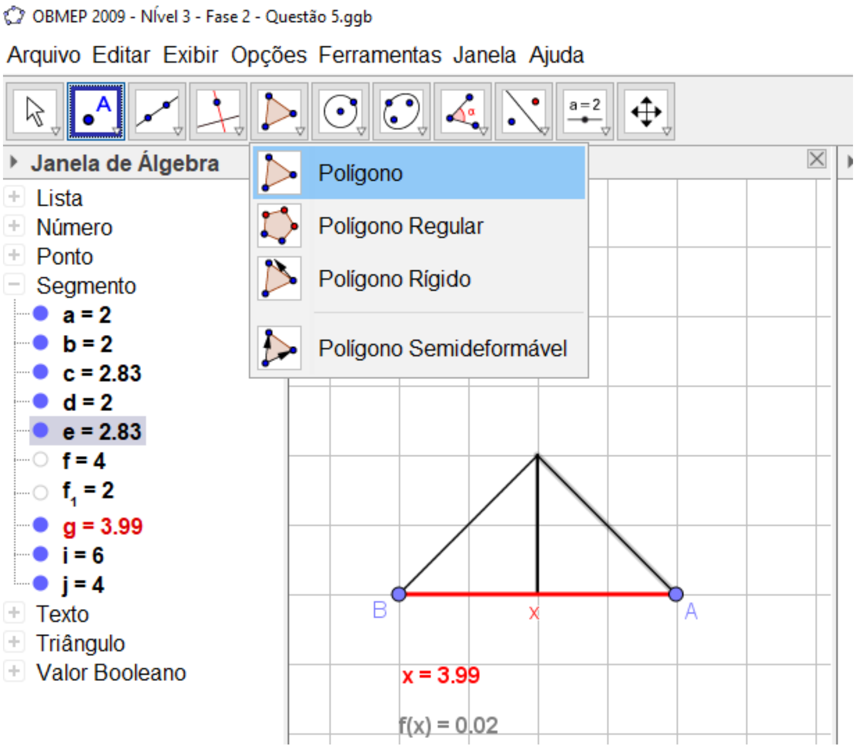
Figura 6 – Representação da construção no software Geogebra na SDO 1.



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, inserir dois novos pontos, C(0,0) e D(0,2), e com ajuda da função “Polígono”, desenhar o triângulo BCD como mostra a figura abaixo:

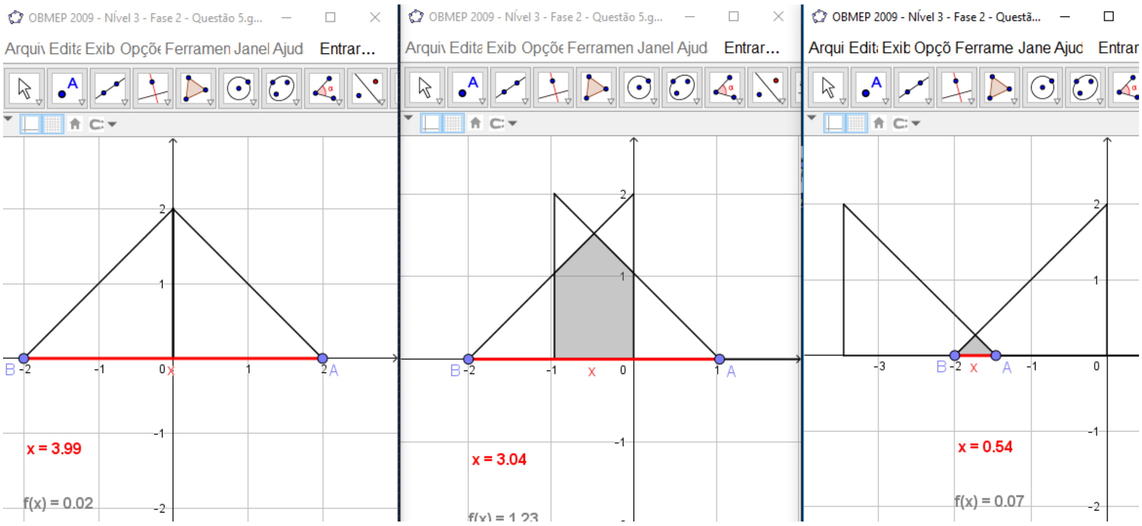
Figura 7 – Representação da construção no software Geogebra na SDO 1.



Fonte: elaborada pelo autor.

Depois, criar um segmento unindo os pontos A e B através do comando “Segmento” no Geogebra, finalizando a construção.

Figura 8 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 1.

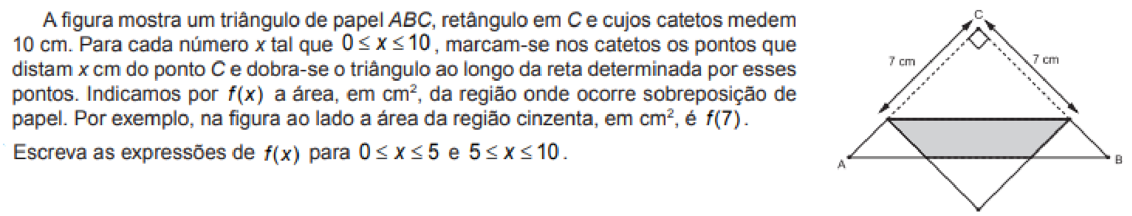


Fonte: elaborada pelo autor.

1.2 Situação Didática Olímpica 2 (SDO 2)

Conhecimentos prévios: área do triângulo e conceito de domínio de uma função.

Figura 9 – Problema - Prova OBMEP 2013 - 2ª fase, questão 4.


A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número *x* tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam *x* cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm², é $f(7)$.

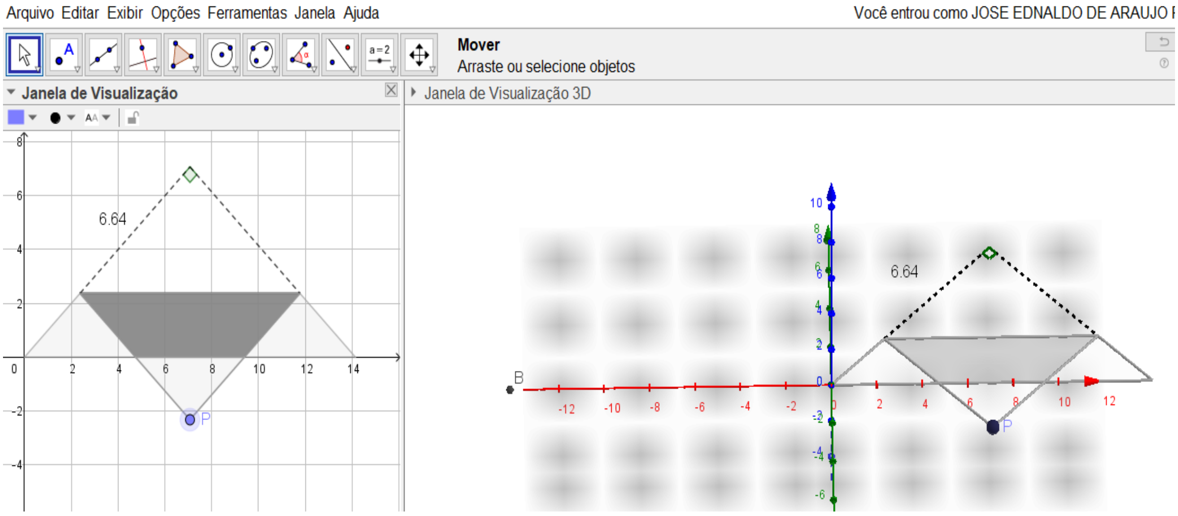
Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.

Fonte: elaborada pelo autor.

Ação: ao ter acesso à questão, o aluno de imediato olha para a área poligonal como sendo apenas a área do trapézio, pois imagina ser uma região fixa. Para calcular f(2), f(5) e f(7), o estudante precisa perceber a nova figura formada para cada valor de f(x) e calcular o valor solicitado como sendo metade da área do quadrado formado, com exceção de f(7), que dará pela metade da diferença de dois quadrados, um de lado 7 e outro de lado 4. O professor deverá mostrar de forma interativa a área em diversas posições, fazendo uso da construção realizada no Geogebra, visando contribuir na compreensão dos alunos.

Formulação: o professor poderá auxiliar, realizando a interatividade da figura, averiguando os valores de cada x, fazendo o aluno conjecturar o modelo que deverá descrever a área, conforme a imagem:

Figura 10 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 2.



Fonte: elaborada pelo autor.

Com o auxílio da construção feita no Geogebra, espera-se que os alunos identifiquem que a área do triângulo fica totalmente sobreposta quando $x^2/2$, ou seja, quando $0 \leq x \leq 5$. Com a variação do valor de x para $5 \leq x \leq 10$, a área será dada por x^2. É preciso que o discente consiga identificar as medidas DF e FC', com os valores 10-x e 2x-10, respectivamente. Para o cálculo da área sobreposta, temos as seguintes situações:

$$x^2/2, \text{ quando } 0 \leq x \leq 5$$

$$x^2/2 - (2x-10)^2/2, \text{ quando } 5 \leq x \leq 10 \text{ ou ainda}$$

$$(x^2 - 4x^2 + 40x - 100)/2 \text{ que corresponde a } (-3x^2 + 40x - 100)/2 \text{ para } 5 \leq x \leq 10.$$

Validação: o aluno deverá provar e comprovar seus resultados, através da discussão dos resultados sobre o que foi feito na etapa anterior para que a resposta seja validada. Após a discussão, o discente verifica que, sem o conhecimento de função com a discriminação de domínio e área de triângulo, sua constatação não seria possível.

Institucionalização: é onde acontece a formalização da solução. Cabe ao professor organizar as informações pensadas e escritas pelos discentes e sintetizar as respostas, reforçando os conhecimentos usados.

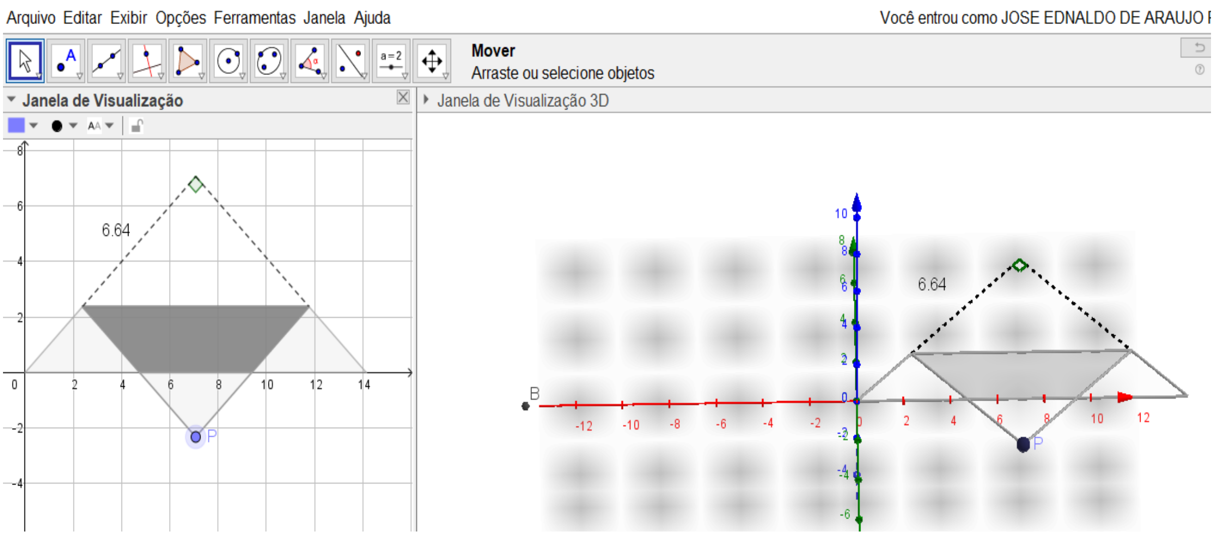
Área do Triângulo:

A = (b x h)/2, em que b é a base do triângulo e h a altura.

Conceito de Domínio, conforme Iezzi e Murakami (1977): seja f: A → B uma função, chamamos de domínio o conjunto D dos elementos x ϵ A para os quais existe y ϵ B tal que (x,y) ϵ f.

Construção no Geogebra: a construção do triângulo será baseada na opção dos “segmentos com comprimento fixo”, devido à figura ser isósceles e reto. Construímos um segmento AC, em seguida, um segmento CB de forma que tenham o mesmo comprimento.

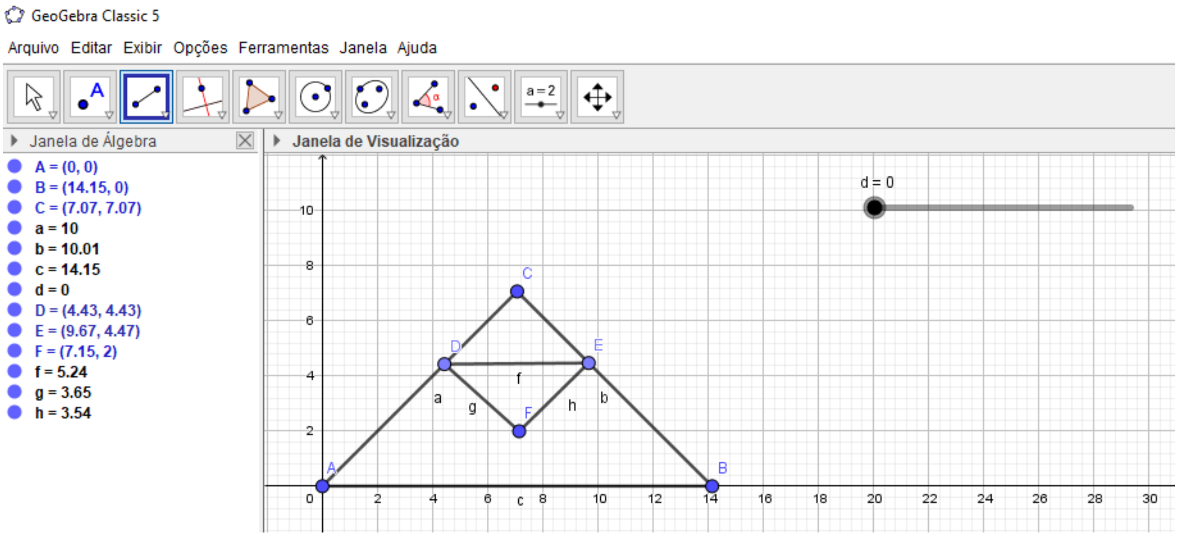
Figura 11 – Representação da construção no software Geogebra na SDO 2.



Fonte: elaborada pelo autor.

Usando o comando “Reta”, identificamos qual reta passa por cada segmento e marcamos um ponto em cada cateto que esteja associado a um fator de variação que definiremos através do comando “controle deslizante”, em que o valor deve variar de 0 até a abscissa do ponto C. Nesse caso, um ponto será (d,d), em que d será o nome do controle deslizante, e o outro será ((100 – 5sqrt(2) d) / (5sqrt(2)),d). Após a criação dos pontos, excluímos as retas e criamos um segmento entre os pontos D e E. Em seguida, usamos o comando “Reflexão em relação a uma reta” em relação ao ponto C e o segmento DE.

Figura 12 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 2.

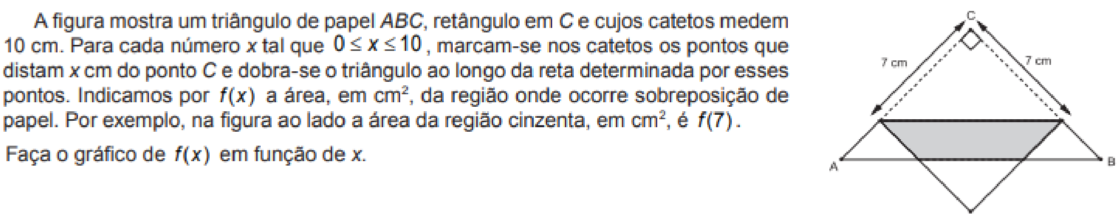


Fonte: elaborada pelo autor.

1.3 Situação Didática Olímpica 3 (SDO 3)

Conhecimentos prévios: gráfico de uma função.

Figura 13 – Problema - Prova OBMEP 2013 - 2ª fase, questão 4.


A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número *x* tal que $0 \le x \le 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam *x* cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm², é $f(7)$.

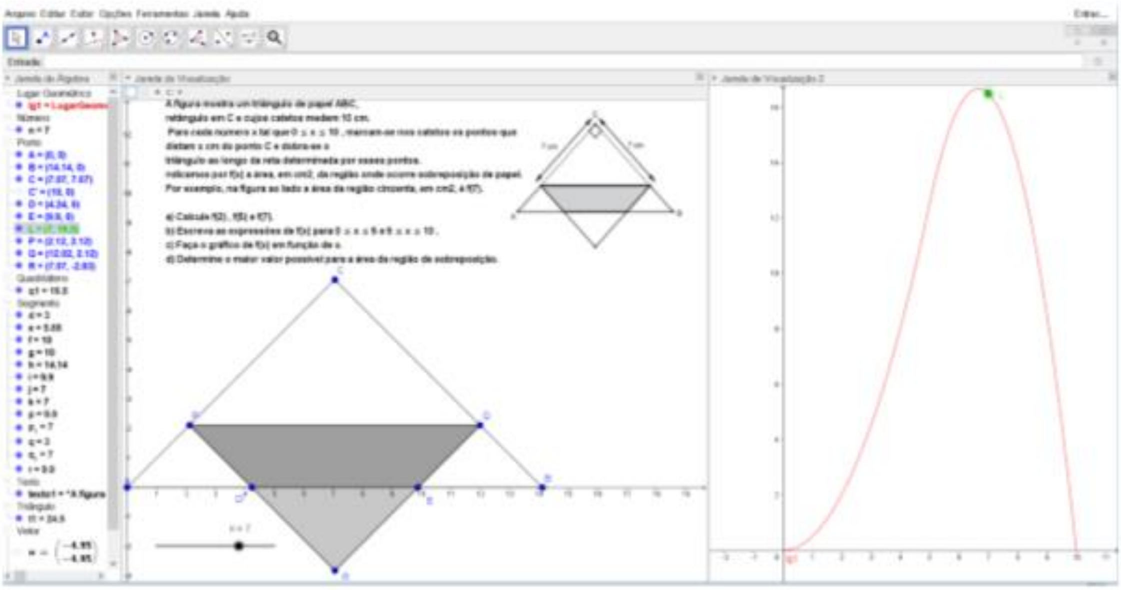
Faça o gráfico de $f(x)$ em função de *x*.

Fonte: elaborada pelo autor.

Ação: dando continuidade e aproveitando a Situação Olímpica anterior, cabe ao estudante conjecturar e representar graficamente a função solicitada obedecendo ao domínio informado. Deverá, de acordo com seus conhecimentos prévios, determinar as raízes e vértices da função.

Formulação: utilizando a fórmula de Bháskara, o aluno deverá identificar as raízes da função. Observamos primeiro que -1/2 ($3x^2$ – 40x +100) = -1/2 (3x-10)(x-10). Essa fatoração pode ser obtida a partir das raízes de $3x^2$ – 40x +100, que são 10/3 e 10. Quando $0 < x \leq 5$, o maior valor de $f(x) = ½ x^2$ é $f(5) = 25/2$. Por outro lado, quando $5 < x < 10$, o maior valor de $f(x) = -1/2 (3x-10)(x-10)$ é atingido no vértice da parábola, cuja abscissa é o ponto médio das raízes, ou seja, é $1/2 (10/3 + 10) = 20/3$. Temos $f(20/3) = 50/3$. Como $f(5) = 25/2 < 50/3 = f(20/3)$, o maior valor possível da área de sobreposição é 50/3.

Figura 14 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 3.



Fonte: elaborada pelo autor.

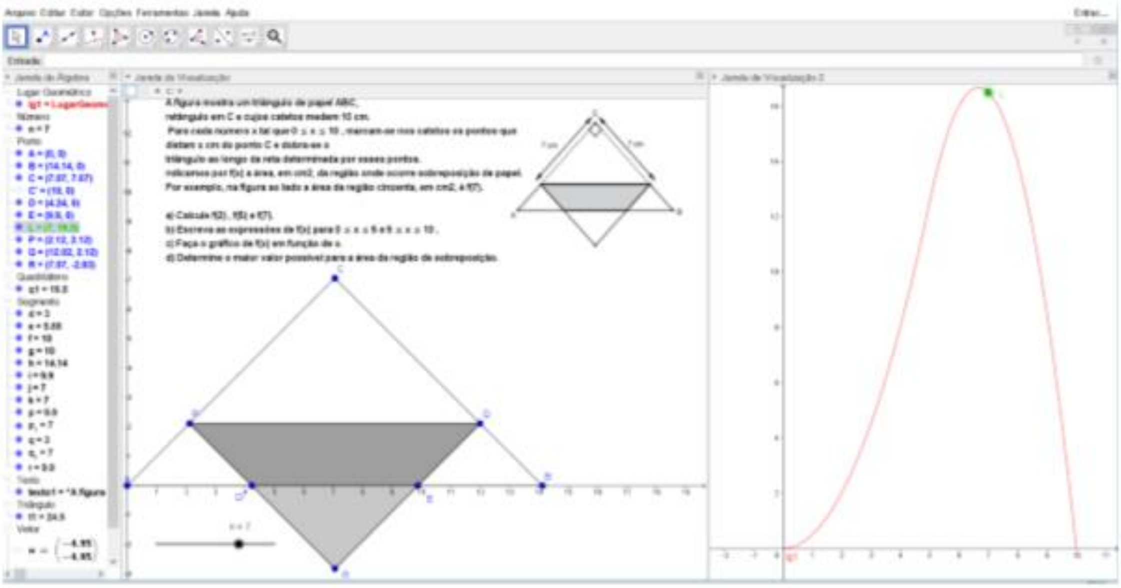
Validação: a argumentação nessa fase é dada no posicionamento dos estudantes com relação aos valores encontrados do vértice da função.

Institucionalização: deverá ser realizada a organização das informações conjecturadas pelos aprendizes e resolvido o problema pelo professor, de forma que sejam esclarecidas as dúvidas que ainda restam dos discentes. O conceito abordado neste problema é o vértice da função.

Definição de vértice: o ponto V $(-b/2a, -\Delta/4a)$ é chamado vértice da parábola da função quadrática.

Construção no Geogebra: usando o “Campo de entrada”, inserimos as duas funções, descrevendo o intervalo em que cada uma está definida através do comando “Função [função, valor inicial de x, valor final de x]”.

Figura 15 – Representação da construção no software Geogebra da SDO 3.

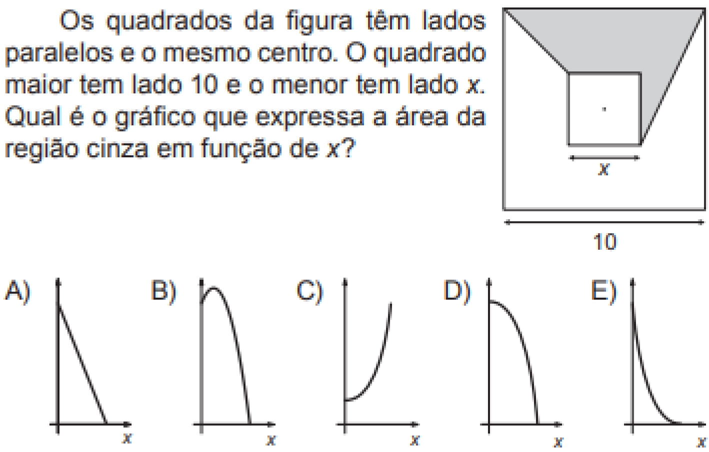


Fonte: elaborada pelo autor.

1.4 Situação Didática Olímpica 4 (SDO 4)

Conhecimentos prévios: área do triângulo e equação do 2º grau.

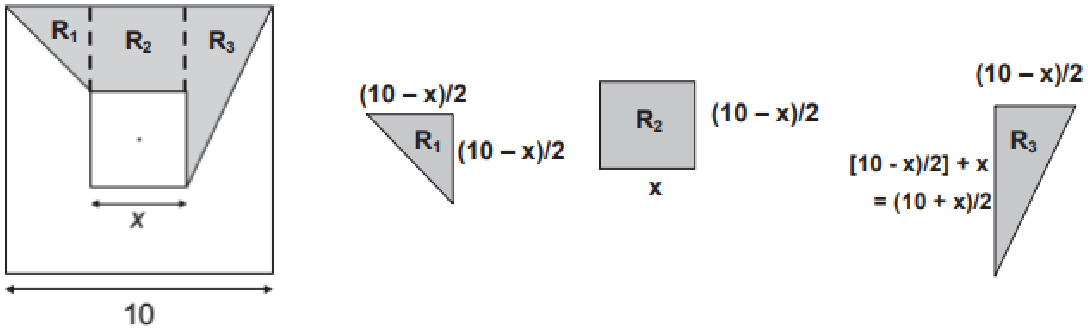
Figura 16 – Problema - Prova OBMEP 2016 - 1ª fase, questão 11.



Fonte: elaborada pelo autor.

Ação: o professor exibirá a questão original extraída do site da OBMEP. Os alunos deverão discutir no grupo e verificar que a questão possui como fator limite um quadrado de lado 10. Espera-se que o estudante consiga dividir a área cinza em três partes, indicadas na figura abaixo:

Figura 17 – Problema abordado na OBMEP 2016.



Fonte: elaborada pelo autor.

Formulação: com o auxílio da construção feita no *software* e o estímulo por parte do professor, a área da figura deverá ser prevista com a seguinte lógica de resolução:

$$A(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10-\mathrm{x}}{2}\right)^2 + \mathrm{x}\cdot\left(\frac{10-\mathrm{x}}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10-\mathrm{x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{10+\mathrm{x}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{10-\mathrm{x}}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{10-\mathrm{x}}{4}\right) + \mathrm{x} + \left(\frac{10+\mathrm{x}}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{2}(x-10)\cdot(x+5)$$

O grupo de alunos deverá determinar a expressão da área em função da variável ‘x’ e compreender que se trata de uma parábola com concavidade voltada para baixo, com raízes $x_1 = -5$ e $x_2 = 10$ e abscissa do vértice:

$$\mathrm{x}_v = \frac{-5+10}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Validação: nessa fase, a mediação do professor é de suma importância, no sentido de não permitir que os dados e conjecturas produzidas não sejam errôneos e interfiram na fase final e evolução do grupo. O docente deverá estimular a identificação de todos os teoremas e definições matemáticas.

Institucionalização: será a formalização da solução, de forma organizada e escrita pelos discentes, reforçando os conhecimentos utilizados.

Área do Triângulo:

A = (b x h)/2, em que: b é a base do triângulo e h a altura.

Equação do 2º Grau, gráfico e vértice: uma equação de 2º Grau é toda e qualquer equação com uma incógnita que é expressa da seguinte forma: $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Para encontrarmos as raízes da equação, podemos fazer uso da Fórmula de Bháskara:

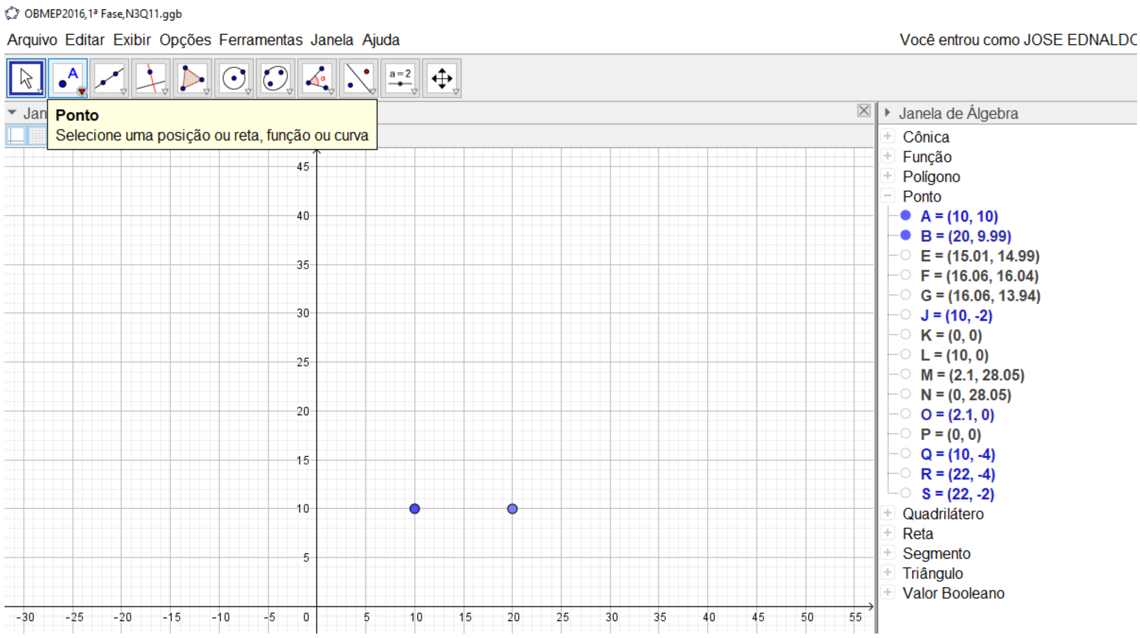
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a.c}}{2^a}$$

As coordenadas do vértice podem ser obtidas com a utilização das seguintes fórmulas:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \qquad y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

Construção no Geogebra: inicialmente, criamos os pontos A (10,10) e B (20, 9,99), na opção “Ponto” do *software*, como mostra a figura abaixo:

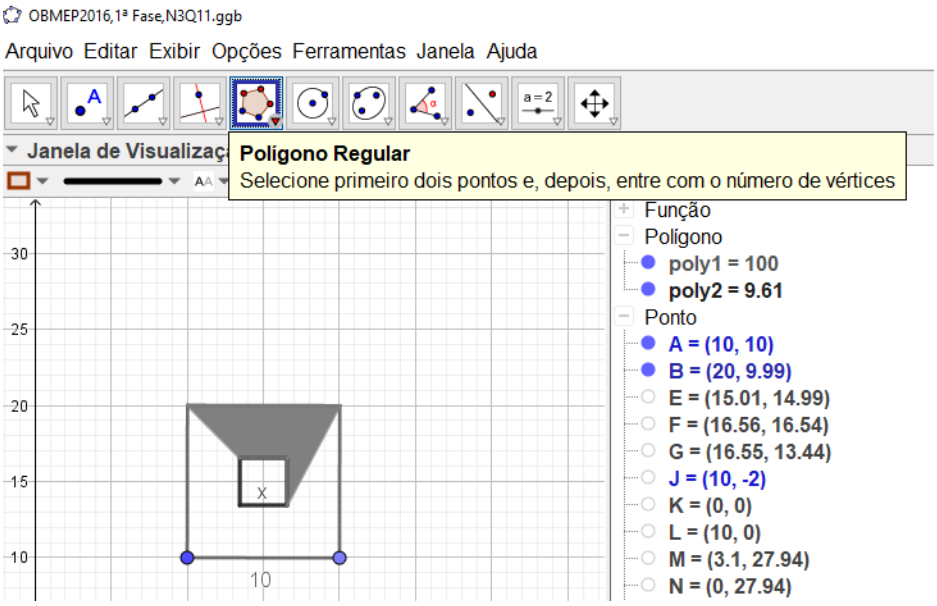
Figura 18 – Representação da construção no software Geogebra na SDO 4.



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, construímos dois polígonos regulares com a função no aplicativo, selecionando os pontos, e determinamos a quantidade de vértices:

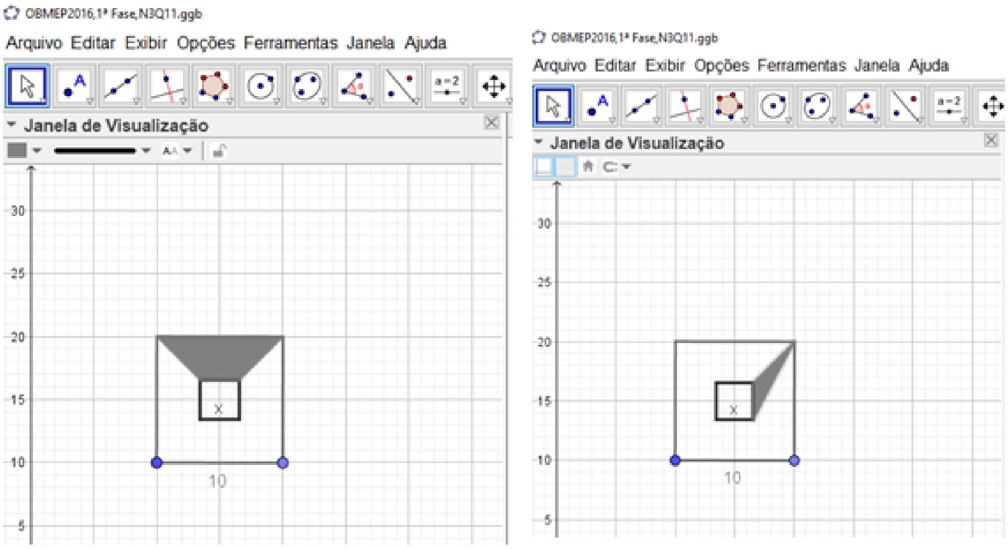
Figura 19 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 4.



Fonte: elaborada pelo autor.

Realizamos a construção de duas regiões, esperando que fique claro aos aprendizes que se trata de um quadrilátero e um triângulo que serão alterados ao variarmos o polígono interno.

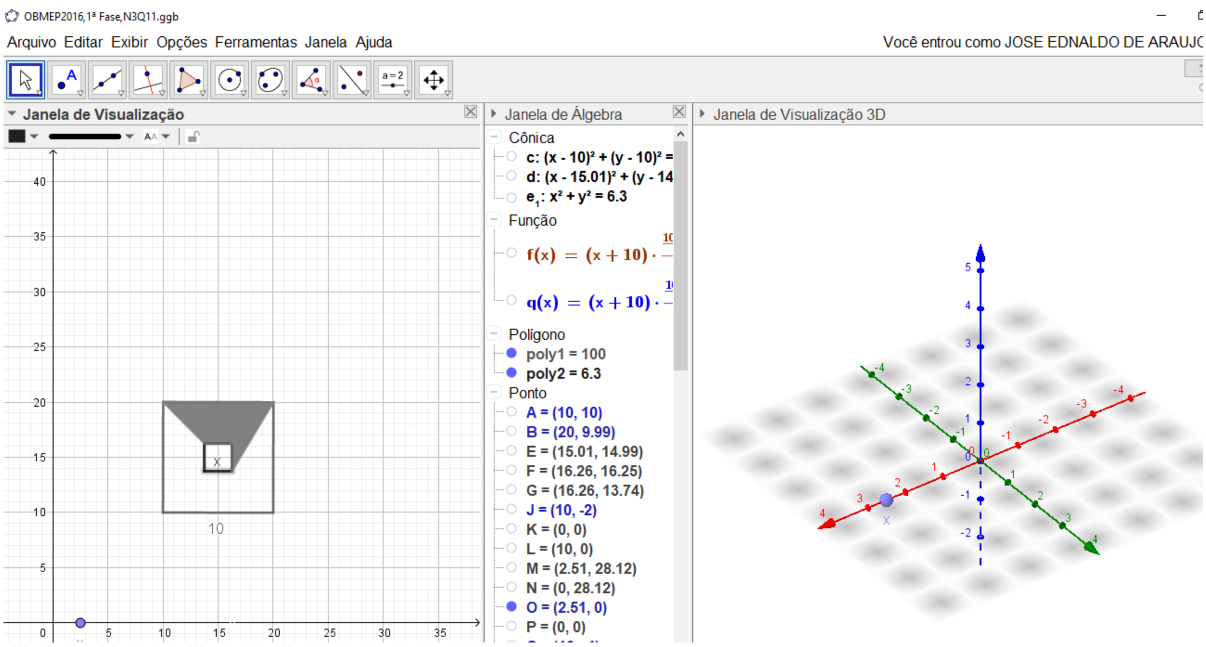
Figura 20 – Representação da construção no software Geogebra na SDO 4.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na opção controle deslizante, criar uma nova variável “x” que possa variar no intervalo 0 ≤ x ≤ 10.

Figura 21 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 4.



Fonte: elaborada pelo autor.

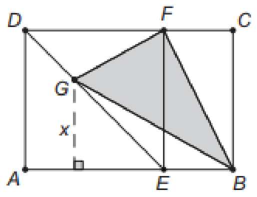
1.5 Situação Didática Olímpica 5 (SDO 5)

Conhecimentos prévios: área do triângulo e ponto médio.

Figura 22 – Problema - OBMEP na escola, 2014, questão 2.

Na figura ao lado, *AEFD* é um quadrado e o retângulo *ABCD* tem lados $AB = 3$ e $AD = 2$. Seja *G* um ponto qualquer do segmento *DE* e *x* a distância de *G* ao segmento *AB*.

Calcule a área do triângulo *BFG* quando *G* é o ponto médio do segmento *DE*.



Fonte: elaborada pelo autor.

Ação: inicialmente, o aluno deverá ter uma noção de ponto médio do segmento da figura. Ao associar o ponto G ao ponto médio do segmento DE, teremos B(3,0), F(2,2) e G(1,1) como coordenadas do triângulo BFG.

Formulação: essa etapa é dada pela algebrização pelos modelos matemáticos que deverão se apresentar. O professor deverá inserir na discussão a construção feita no Geogebra que facilitará a percepção dos alunos na resolução da questão. Na interação com o aplicativo, o aluno percebe que os pontos H e I são os pés das perpendiculares traçadas por G aos lados AB e CD. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos BCG, BHG e FIG, os discentes percebem que BF = BG = $\sqrt{5}$ e FG = $\sqrt{2}$. Denotando por M o ponto médio de FG, segue que BM é a altura do triângulo BFG relativo ao lado FG. Aplicado mais uma vez, o Teorema de Pitágoras nos mostra que BM = $3/\sqrt{2}$. Logo:

Área do Triângulo BFG = ½ FG . BM = ½ . $\sqrt{2}$. $3/\sqrt{2}$ = 3/2

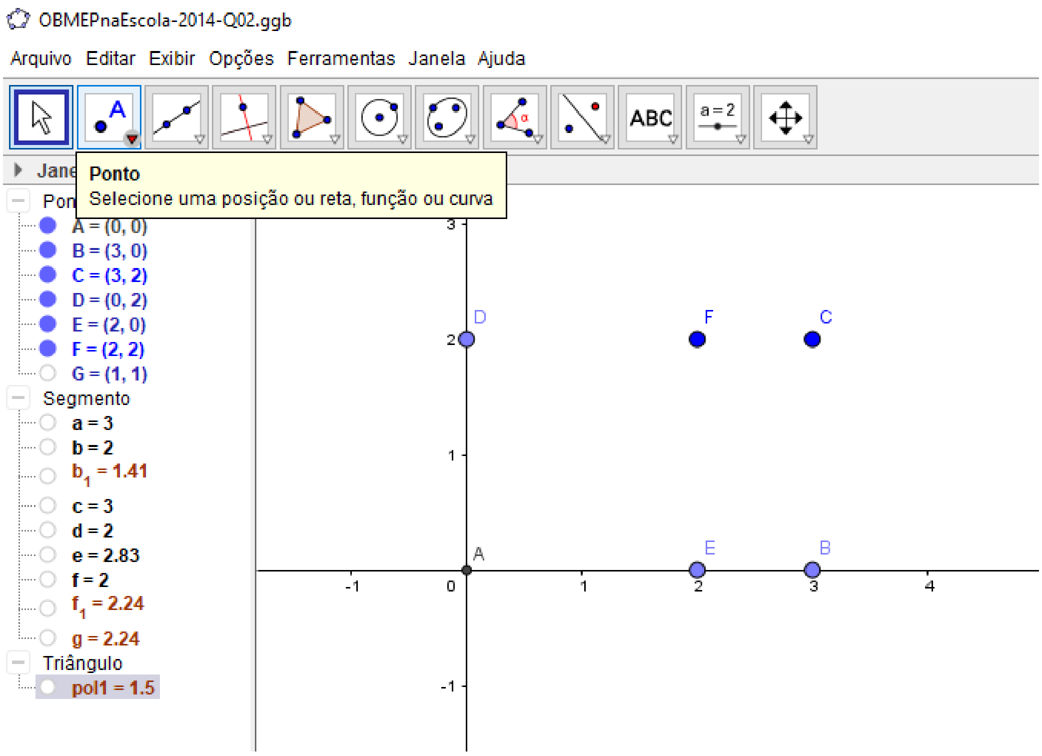
Validação: o aluno deve provar e comprovar seus resultados, apresentando e discutindo o que foi feito, para que assim as dúvidas existentes sejam esclarecidas e valide sua resposta. O aluno percebe que sem o conhecimento básico de ponto médio e área de triângulo a sua constatação não seria possível.

Institucionalização: o professor retoma o controle da situação didática e “fixa convencionalmente o estatuto cognitivo do saber” (ALMOULOUD, 2008, p. 40).

O docente poderá rever o conceito de ponto médio e área do triângulo. Após essa fase, o saber é incorporado e estará disponível na resolução de problemas matemáticos.

Construção no Geogebra: para iniciarmos a construção, ativamos o comando “Ponto” na barra de ferramentas e criamos os pontos A(0,0), B(3,0), C(3,2), D(0,2) e F(2,2) como mostram as figuras abaixo:

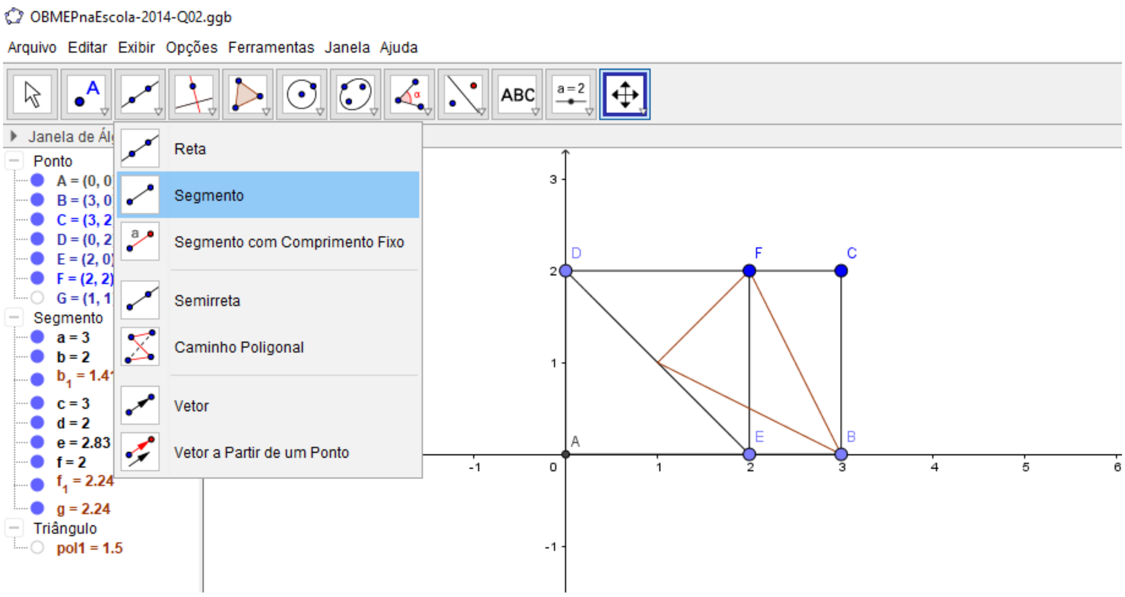
Figura 23 – Representação da construção no software Geogebra da SDO 5.



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, com a opção “Segmento”, como mostra a figura abaixo, construímos os seguintes seguimentos: AB, BC, CD, DA, DE e EF, com os valores 3; 2; 3; 2; 2,83 e 2, respectivamente.

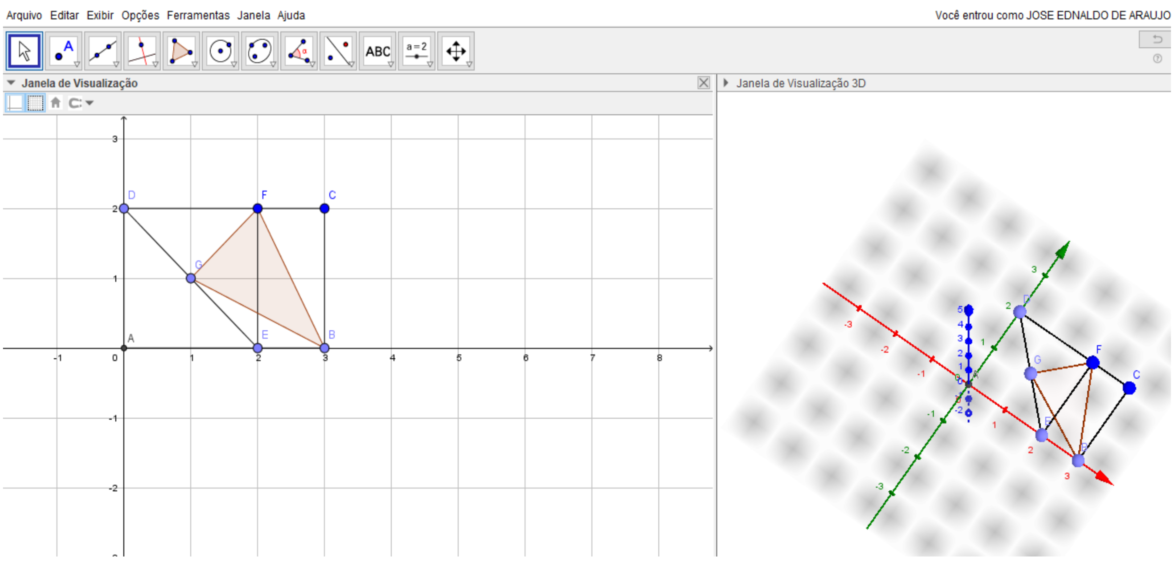
Figura 24 – Representação da construção no software Geogebra na SDO 5.



Fonte: elaborada pelo autor.

Dando continuidade à construção, criamos um Ponto G(1,1) sobre o segmento DE e, ativando a função “Polígono” no Geogebra, criamos o triângulo GFB.

Figura 25 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 5.



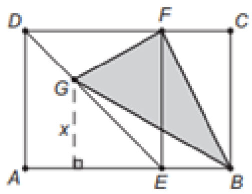
Fonte: elaborada pelo autor.

1.6 Situação Didática Olímpica 6 (SDO 6)

Conhecimentos prévios: definição de domínio de uma função e seu gráfico.

Figura 26 – Problema - OBMEP na escola, 2014, questão 2.

Na figura ao lado, *AEFD* é um quadrado e o retângulo *ABCD* tem lados $AB = 3$ e $AD = 2$. Seja *G* um ponto qualquer do segmento *DE* e *x* a distância de *G* ao segmento *AB*.



Qual é o domínio da função *f* ?

Desenhe o gráfico da função *f*.

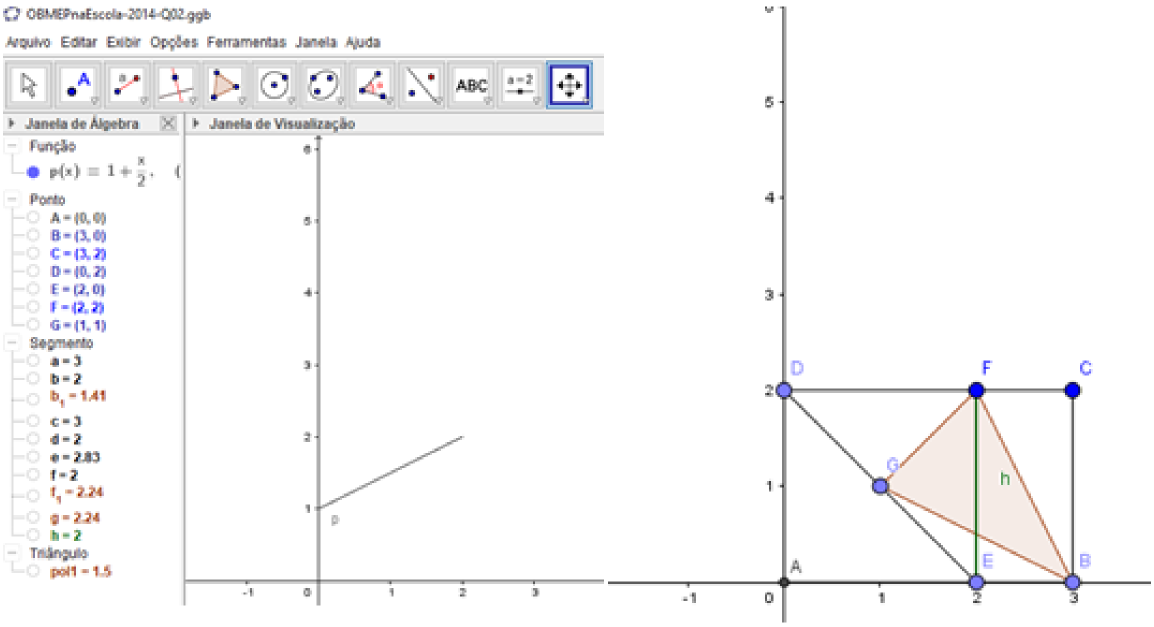
Fonte: elaborada pelo autor.

Ação: momento marcado pela busca do aprendiz de alguma estratégia para a resolução da questão apresentada pelo professor. Nesse problema, esperamos que o discente perceba inicialmente que o Domínio da função deverá ser associado à variação dos valores do Ponto G e tenha uma noção de localização de pontos no sistema cartesiano.

Formulação: de acordo com Almouloud (2007, p. 38), nessa etapa “o aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais”. Utilizando os seus conhecimentos prévios sobre Domínio de uma Função e localização de pontos no plano cartesiano, o aluno deverá observar, com o auxílio da construção no Geogebra, que os valores de x atribuídos ao ponto G varia de 0 (quando G coincide com E) a 2 (quando G coincide com D). Logo, o domínio de f é o intervalo [0,2].

Para a construção do gráfico, percebe-se que a distância de G à reta BF varia linearmente com x (podemos observar, por exemplo, que EG varia linearmente com x e que a distância de G a BF varia linearmente com EG). Como a base BF é fixa, a área do triângulo BFG também varia linearmente com x. Portanto, f é da forma $f(x) = ax + b$. Como $f(0) = 1$ e $f(2) = 2$, temos $a = ½$ e $b = 1$. Logo, $f(x) = 1 + x/2$.

Figura 27 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 6.



Fonte: elaborada pelo autor.

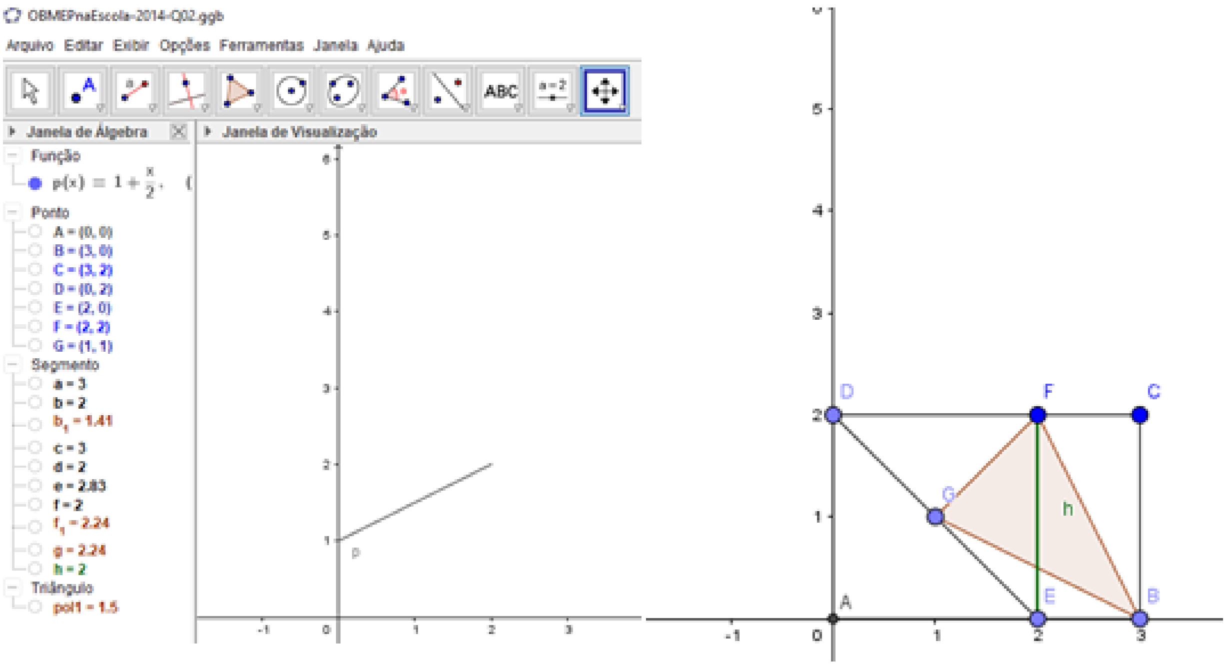
Validação: esperamos que o discente retrate todo o conhecimento usado na resolução do problema, destacando os conceitos que ele considera importante, tais como domínio e gráfico de uma função de 1º grau.

Institucionalização: nessa etapa, devemos deixar claros os conhecimentos que foram utilizados na solução da questão:

a) Função afim: uma função f: R→R chama-se função polinomial do 1º grau ou função afim quando existem dois números reais a e b, tal que f(x) = ax + b, para todo x ϵ R. O gráfico de uma função afim representa uma reta. Como dois pontos são necessários para determinar uma reta, escolhemos dois valores distintos para x e calculamos os correspondentes valores de y.

Construção no Geogebra: usando o "Campo de entrada", inserimos a função f descrevendo o intervalo em que está definida através do comando "Função [função, valor inicial de x, valor final de x]". O objetivo é tornar perceptível ao aluno o intervalo do domínio da função e a construção do gráfico. A imagem resultante pode ser visualizada abaixo:

Figura 28 – Representação da construção no software Geogebra na SDO 6.



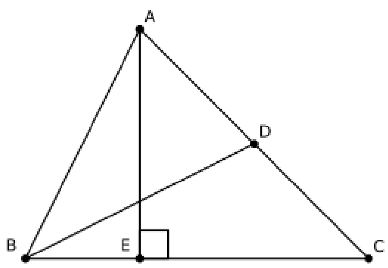
Fonte: elaborada pelo autor.

1.7 Situação Didática Olímpica 7 (SDO 7)

Conhecimentos prévios: ponto médio, semelhança de triângulos e segmentos paralelos.

Figura 29 – Problema - OBMEP 2015 - Banco de questões.

Na figura abaixo, $AD = DC$, $AE = BD$, $\angle AEC = 90^\circ$. Determine o valor do ângulo $\angle CBD$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Ação: nesse problema, esperamos que o aluno perceba que o ponto D é o ponto médio do segmento AC da figura. O discente deverá ter a noção de segmentos paralelos e semelhança de triângulos.

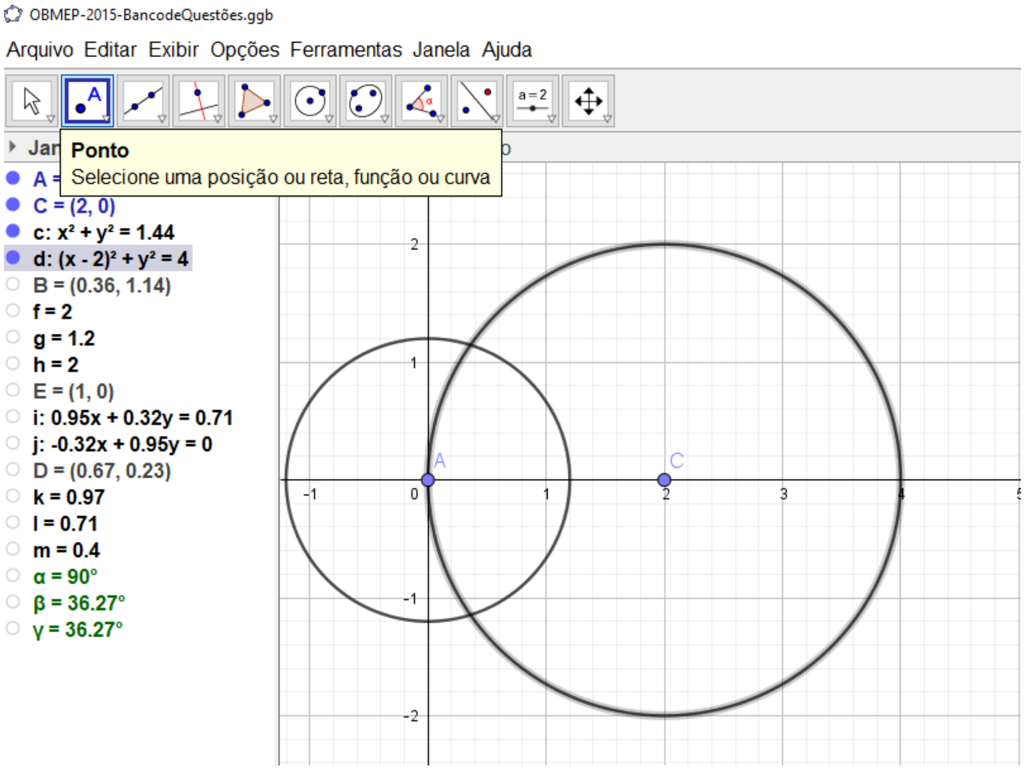
Formulação: com a troca de informações entre os participantes da turma e interação com o problema olímpico, o aluno deverá observar e, como D é o ponto médio e o segmento DF é paralelo ao segmento AE, concluir que DF é a base média do triângulo AEC com respeito à base AE. Portanto, se AE = 2x, então DF = AE/2 = x. Aplicando a fórmula sen = cateto oposto/ hipotenusa, temos: x/2x = ½ e consequentemente a medida do ângulo procurado é 30º.

Validação: o aluno deverá validar o modelo criado, explicando aos demais colegas da turma, de forma a esclarecer as dúvidas que ainda possam existir, para que concordem e validem a proposta apresentada.

Institucionalização: o professor deverá retomar a atenção da turma e tirar possíveis dúvidas, caso algum aluno ainda precise. Segundo Almouloud (2008, p. 40), “depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os outros alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-se assim disponível para a utilização na resolução de problemas matemáticos”.

Construção no Geogebra: para essa construção utilizamos, inicialmente, o comando “Ponto” e construímos os pontos A (0,0) e C (2,0), ambos localizados no Eixo X. Em seguida, criamos um círculo com centro em A e raio 1,2 e um círculo d com centro em C e raio igual a 2. Geramos um ponto B, sendo este a interseção de c e d.

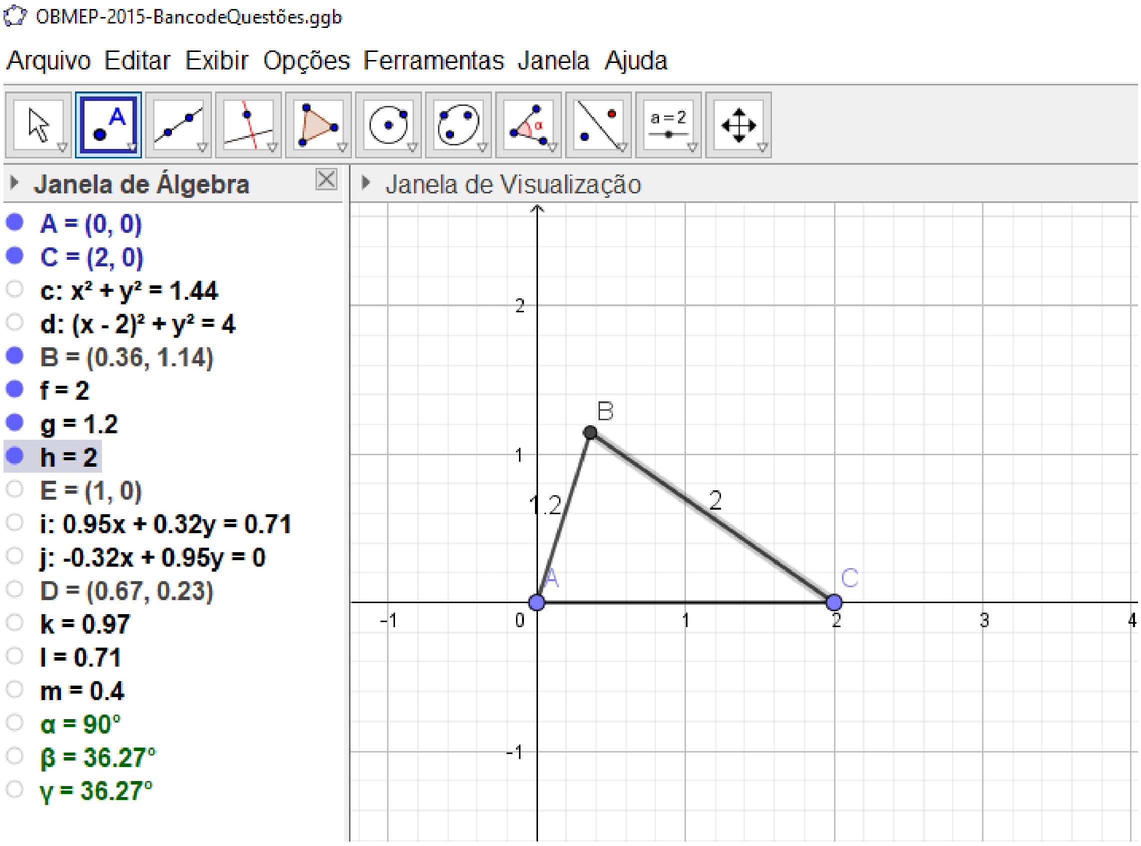
Figura 30 – Representação da construção no software Geogebra da SDO 7.



Fonte: elaborada pelo autor.

Concebemos os segmentos f de valor 2, ligando os pontos A e C. O segmento g, unindo os pontos A e B, e um terceiro, unindo os pontos B e C, que podemos visualizar na figura a seguir:

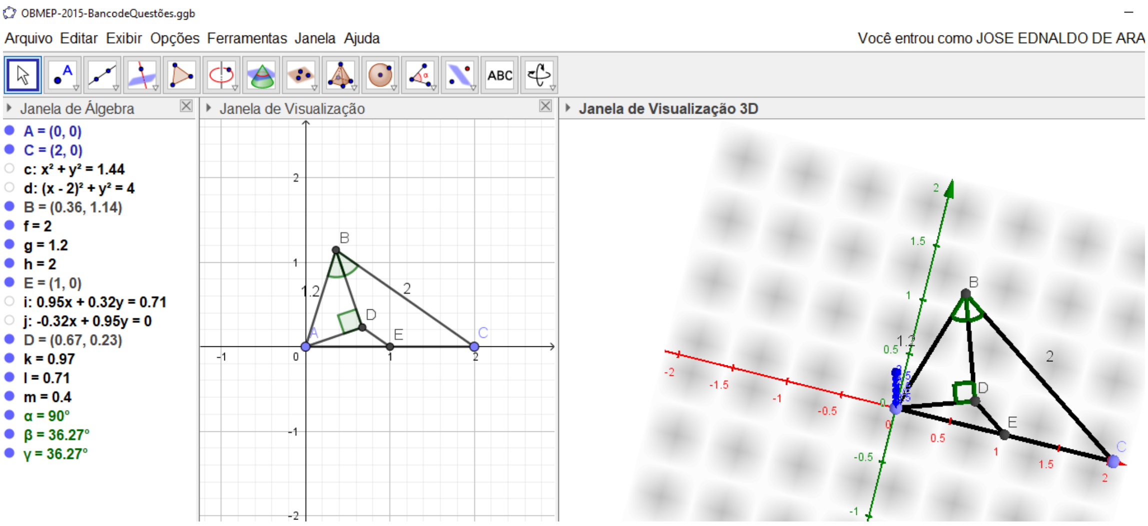
Figura 31 – Representação da construção no software Geogebra da SDO 7.



Fonte: elaborada pelo autor.

Marcamos o ponto médio do segmento AC, nomeando por E (1,0); traçamos a bissetriz de A, B e C, gerando a reta i; traçamos uma reta j que passe pelo ponto A e seja perpendicular a i. A construção final pode ser observada a seguir:

Figura 32 – Representação do software Geogebra empregada na SDO 7.



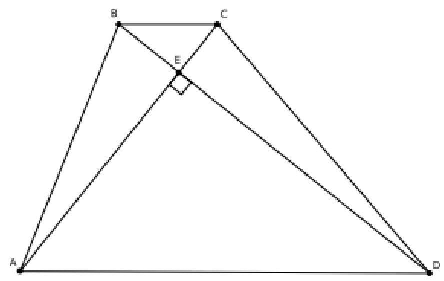
Fonte: elaborada pelo autor.

1.8 Situação Didática Olímpica 8 (SDO 8)

Conhecimentos prévios: semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras.

Figura 33 – Problema - OBMEP 2015 - Banco de questões.

No desenho abaixo, $ABCD$ é um trapézio e suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Além disso, $BC = 10$ e $AD = 30$.



a) Determine a razão entre os segmetos BE e ED.

b) Encontre o valor do comprimento dos segmentos EC, AE e ED em função do comprimento de $BE = x$.

Fonte: elaborada pelo autor.

Ação: esperamos que o aprendiz use a proporção de segmentos e semelhança de triângulos para iniciar a solução da questão. O professor terá que ficar atendo ao início da solução, pois resolver problemas de geometria nem sempre é fácil. Caso os alunos apresentem dificuldades, o docente poderá ajudar no início da resolução.

Formulação: essa fase é marcada pelas descrições, verbais ou escritas, que os alunos devem realizar durante a situação apresentada. Os alunos deverão perceber que, como os segmentos BE e AD são paralelos, EBC = EDA e BCE = CAD. Consequentemente, os triângulos BEC e EAD são semelhantes e BE/ED = BC/AD = 10/30 = 1/3. Analogamente, podemos mostrar que EC/AE = 1/3.

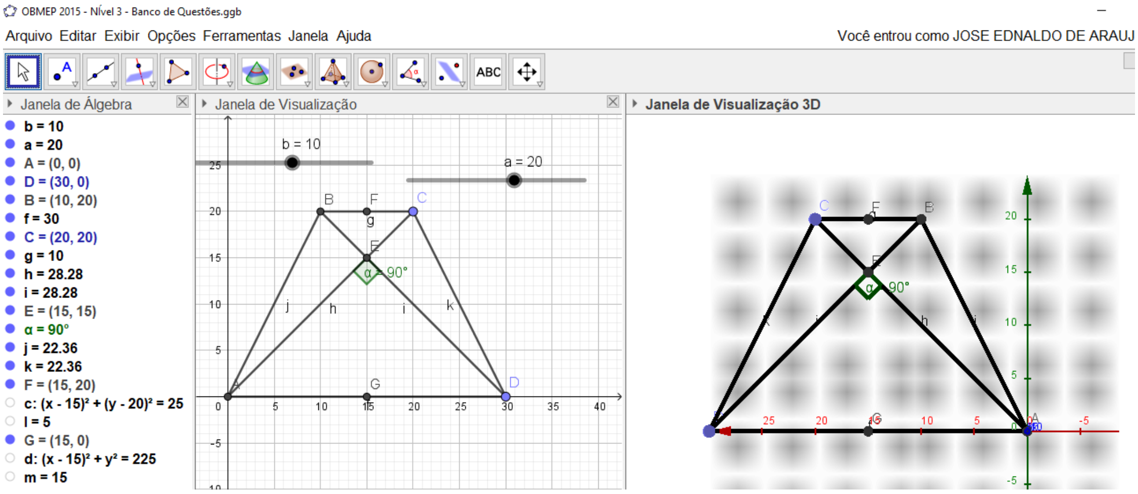
Para o cálculo dos segmentos AE e ED, sabemos que ED = 3BE = 3x. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo BEC, temos $(EC)^2 = (BC)^2 – (BE)^2 = 100 – x^2$ e, consequentemente, EC = √(100 – x2). Como EC/AE = 1/3, segue que $AE = 3\sqrt{(100 – x^2)}$.

Validação: o aprendiz deverá afirmar o que o fez chegar à solução final, apresentada na etapa anterior. Esperamos que ele destaque os segmentos paralelos e a semelhança dos triângulos na conclusão do problema.

Institucionalização: o professor deverá organizar as informações escritas pelos alunos e resolver a problemática enfatizando os conceitos de semelhança de triângulo e Teorema de Pitágoras.

Construção no Geogebra: descrevemos os comandos que permitirão a construção da situação olímpica apresentada. Deve-se criar os números a e b associados a um controle deslizante com incremento 1. Em seguida, criar os prontos A (0,0) na interseção do Eixo x e Eixo Y e B (b,a). Dando continuidade à construção, marcar o segmento f (AD), em que f = 30. Criar os seguintes segmentos: g(BC), g = 10; h(A,C), h = 29 e i(B,D), i = 27.5. Marcar o ângulo α entre os pontos A, E e D e, com a função “ponto médio atividade”, criar o ponto F (16,20) e G (15,0), gerando a construção como mostra a figura a seguir:

Figura 34 – Representação da construção no software Geogebra da SDO 8.



Fonte: elaborada pelo autor.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; DE QUEIROZ, Cileda; COUTINHO, Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62. Acesso em: 20 mar. 2017.

BARROS, E. C.; VALENTIM, M. C.; MELO, M. A. A. O debate sobre o mestrado profissional na Capes: trajetória e definições. **RBPG:** Brasília, DF, v.2, n.4, p. 124-138, jul., 2005.

CAPES. **Relação de Cursos Recomendados e Reconhecidos**. 2012. p. 72.

FISCHER, T.; ANDRADE, C. Opportunities and risks in training managers – a narrative of the Brazilian experience with professional master's programs. *In:* BUSINESS EDUCATION AND EMERGING MARKET ECONOMIES: TRENDS AND PROSPECTS CONFERENCE, 2003, Georgia, EUA. **Anais […]**, Georgia, 2003.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar. V.1. 3ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

MOREIRA, Marco Antônio; NARDI, Roberto. O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos. **RBECT**, Curitiba, v. 2, n.3, p. 1-9, set./dez., 2009.

RIBEIRO, Renato Janine. O mestrado Profissional na Política Atual da Capes. **RBPG:** Brasília, DF, v. 2, n. 4, p. 8-15, jul. 2005.