



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

EFRAIM NAASSOM HELEM DANTAS RODRIGUES

COLORAÇÃO K -IMPRÓPRIA GULOSA

FORTALEZA

2020

EFRAIM NAASSOM HELEM DANTAS RODRIGUES

COLORAÇÃO K -IMPRÓPRIA GULOSA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Ciência da Computação

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Cláudia Linhares Sales

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R612c Rodrigues, Efraim Naassom Helem Dantas.

Coloração k -imprópria gulosa / Efraim Naassom Helem Dantas Rodrigues. – 2020.

61 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2020.

Orientação: Profa. Dra. Cláudia Linhares Sales.

1. Coloração gulosa. 2. Coloração defectiva. 3. Coloração Imprópria. 4. Cografos. 5. Programação matemática. I. Título.

CDD 005

EFRAIM NAASSOM HELEM DANTAS RODRIGUES

COLORAÇÃO K -IMPRÓPRIA GULOSA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Ciência da Computação

Aprovada em: 06/03/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Cláudia Linhares Sales (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof.^a Dr.^a Ana Karolinnna Maia de Oliveira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Tibérius de Oliveira e Bonates
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vinicius Fernandes dos Santos
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

À minha amada esposa, Mônica Andressa, por sua dedicação e paciência. Muitas mulheres procedem virtuosamente, mas tu a todas sobrepujas.
À nossa filha, Cecília, nosso primeiro rebento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por Sua infinita graça e bondade.

À minha amada esposa por todo o cuidado, suporte, compreensão, e capacidade de deixar meus dias mais alegres. À minha filha por nos ter trazido grande alegria e estímulo. Aos meus pais, Núbia e João Rodrigues que formaram quem sou e me educaram com amor e disciplina. Aos meus irmãos, Eliaquim e Ellen Dayane, por me servirem de inspiração em vários momentos.

À minha orientadora, Cláudia Linhares Sales, por sua dedicação, paciência e serenidade em me ensinar e me guiar durante o processo de produção deste trabalho.

Ao Tibénius Bonates por sua destreza com o ensino e por seus sábios conselhos que me acompanham desde a graduação.

À Universidade Federal do Ceará e à Secretaria de Tecnologia da Informação por terem me permitido trabalhar em regime de afastamento parcial das minhas atividades funcionais para a execução das atividades acadêmicas do mestrado.

“Soli Deo Gloria”

RESUMO

Uma coloração dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é própria se vértices adjacentes recebem cores diferentes. Estudamos neste trabalho uma relaxação desse problema, chamada de coloração k -imprópria, onde, dado um inteiro positivo k , a cor de um vértice qualquer pode ser compartilhada com até k de seus vizinhos. Uma vez que a coloração própria é uma coloração 0-imprópria, a coloração k -imprópria é igualmente um problema difícil, podendo-se, analogamente, abordar o problema através do uso de heurísticas. Neste trabalho, introduzimos a versão k -imprópria da heurística de coloração gulosa de grafos. Como se faz habitualmente, o estudo aqui almejava estimar o pior desempenho dessa heurística. Além de introduzir o conceito de Número de Grundy k -impróprio, generalizamos o conceito de t -átomo, estudamos o parâmetro em árvores binomiais e cografos, e apresentamos formulações de programação por restrições e programação inteira, não apenas para a coloração gulosa imprópria, mas também para o Número de Grundy clássico, preenchendo um vácuo naquele estudo.

Palavras-chave: Coloração gulosa. Coloração defectiva. Coloração imprópria. Árvores binomiais. Cografos. Programação matemática.

ABSTRACT

A vertex coloring of a graph $G = (V, E)$ is proper if adjacent vertices have distinct colors. In this work, we study a relaxation of this problem, called k -improper coloring, in which, given a positive integer k , each vertex can share its color with at most k neighbors. Since the proper coloring problem is a 0-improper coloring, this relaxation is as difficult as the classic coloring problem, and thus it can be approached by the means of heuristics. Here, we introduce the k -improper version of the greedy coloring heuristic. As usual, we aim to estimate the worst case of this heuristic. Besides introducing the k -improper Grundy Number, we generalized the concept of t -atoms as well as we investigated the k -improper Grundy Number for binomial trees and cographs, and presented mathematical programming formulations for the improper and proper Grundy Number (fulfilling a gap in this study).

Keywords: Greedy coloring. Defective coloring. Improper coloring. Binomial trees. Cographs. Mathematical programming.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	NOTAÇÕES E TERMINOLOGIA	14
2.1	Conceitos básicos em teoria dos grafos	14
2.2	Coloração de vértices	16
2.3	Grafos livres de P_4	18
2.4	Programação matemática	19
2.5	Programação por restrições	20
3	COLORAÇÃO IMPRÓPRIA	22
3.1	Definição	22
3.2	Resultados conhecidos	23
3.2.1	<i>Grafos planares e periplanares</i>	24
3.2.2	<i>Grafos (m, k)-coloríveis únicos e χ_k-minimais</i>	24
3.2.3	<i>Grafos livres de triângulos</i>	25
3.2.4	<i>Grafos complementares</i>	26
3.2.5	<i>Complexidade</i>	28
4	COLORAÇÃO GULOSA k -IMPRÓPRIA	29
4.1	Resultados gerais	30
4.2	t -átomos k -impróprios	31
4.3	Árvores binomiais	33
4.4	Grafos livres de P_4	34
4.4.1	<i>União completa de grafos completos e vazios</i>	37
4.4.2	<i>União completa de um grafo completo e um grafo vazio</i>	39
4.4.3	<i>União completa entre um grafo obtido pela união de cliques disjuntas e um grafo vazio</i>	40
4.4.4	<i>União completa de grafos de obtidos pela união de cliques disjuntas</i>	41
4.4.5	<i>União completa de cografos quaisquer</i>	43
5	FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS	52
5.1	Coloração gulosa própria	52
5.1.1	<i>Formulação de programação por restrições</i>	52
5.1.2	<i>Formulação de programação inteira</i>	53

5.2	Coloração gulosa k-imprópria	54
5.2.1	<i>Formulação de programação por restrições</i>	54
5.2.2	<i>Formulação de programação inteira</i>	55
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	58
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros estudos sobre coloração remetem ao clássico problema de coloração de mapas. Nesse problema, as regiões de um mapa são coloridas de forma que áreas vizinhas sejam coloridas com cores distintas. Investigando o menor número de cores necessárias para colorir um mapa, Francis Guthrie propôs a Conjectura das Quatro Cores (MACKENZIE, 2004). A conjectura, hoje teorema (APPEL; HAKEN, 1989), afirmava que no máximo quatro cores seriam necessárias para colorir as regiões de qualquer mapa de forma que duas regiões adjacentes não compartilhassem a mesma cor.

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma coloração é uma atribuição de rótulos (habitualmente chamados de cores) aos vértices do grafo. Uma coloração é dita própria se vértices adjacentes são coloridos com cores diferentes. O problema de coloração de vértices é amplamente estudado graças à variedade de aplicações práticas. Além do problema de coloração de mapas, problemas de agendamento, de alocação de registradores, e de atribuição de frequências a antenas de telecomunicações podem ser modelados como problemas de coloração de grafos.

O problema clássico de coloração consiste em determinar o menor número de cores m necessárias para que um grafo admita uma coloração própria com m cores, m é chamado de *número cromático*. O número cromático de algumas classes de grafos pode ser determinado em tempo polinomial, mas, em geral, determinar o número cromático de um grafo é um problema NP-difícil (KARP, 1972).

O algoritmo guloso de coloração é uma estratégia de coloração de vértices considerando uma ordem dos mesmos, de forma que, uma cor i é atribuída a um vértice v na ordem se i é a menor cor que não está presente em nenhum dos vértices vizinhos de v já coloridos. O número guloso próprio de um grafo $G = (V, E)$, ou simplesmente número de Grundy de G , é o maior inteiro m tal que existe uma ordem de $V(G)$ que, quando usada como entrada, leva o algoritmo guloso a retornar uma coloração com m cores.

O tempo de resolução e qualidade de uma solução são fatores determinantes na resolução de problemas como o de agendamento ou de alocação de registradores. Por isso, obter boas soluções em tempo hábil é fundamental. A comparação entre os números cromático e guloso pode ser usada para verificar a qualidade de soluções retornadas por algum algoritmo.

No problema de alocação de frequências a antenas de transmissão, as estações são dispostas em uma região para garantir que os usuários estejam conectados em toda a área. A sobreposição de sinais pode atrapalhar a recepção de um sinal através da geração de ruídos.

Alguns equipamentos toleram ruídos até um certo limite. Esse problema pode ser visto como uma coloração de vértices k -imprópria.

A coloração k -imprópria é uma relaxação do problema de coloração própria onde a cor de um vértice qualquer pode ser compartilhada com no máximo k vizinhos. Determinar se um grafo $G = (V, E)$ admite uma coloração k -imprópria com m cores é um problema NP-completo (COWEN *et al.*, 1997).

Neste trabalho, estudamos a heurística de coloração k -imprópria gulosa. Como se faz habitualmente, o estudo aqui almejava estimar o pior desempenho dessa heurística. Além de introduzir o conceito de Número de Grundy k -impróprio, generalizamos o conceito de t -átomo, estudamos o Número de Grundy k -impróprio em árvores binomiais e cografos e apresentamos formulações de programação por restrições e programação inteira, não apenas para a coloração gulosa imprópria, mas também para o Número de Grundy clássico, preenchendo um vácuo naquele estudo.

Mais especificamente, definimos t -átomos k -impróprios e provamos que a existência de um t -átomo k -impróprio é condição necessária e suficiente para que o número de Grundy k -impróprio seja pelo menos t . O conceito de t -átomo em colorações gulosas próprias foi introduzido por Zaker (2006).

Para árvores binomiais, determinamos o valor exato do número de Grundy 1-impróprio nessa classe.

Para os cografos, determinamos o valor do número de Grundy k -impróprio em cografos desconexos. Além disso, formulamos uma conjectura para o valor desse parâmetro em cografos conexos e provamos a validade da conjectura para $k = 1$ e $k = 2$. Uma vez que, na conjectura, o Número de Grundy k -impróprio é expresso através de uma recorrência, com o objetivo de obter o valor exato do parâmetro, investigamos casos especiais de cografos conexos tais como aqueles obtidos por: união completa de dois grafos completos; união completa de dois grafos vazios, união completa de um grafo completo e um vazio; e união completa de grafos formados pela união disjunta de cliques.

Neste trabalho, propomos formulações em programação matemática dos problemas de coloração gulosa própria e imprópria. Apresentamos uma formulação de programação por restrição e uma de programação inteira para cada problema. As formulações do problema de coloração gulosa imprópria deram suporte aos estudos teóricos empreendidos neste trabalho.

Este documento está organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta a

terminologia utilizada e os conceitos necessários para a compreensão do texto. No Capítulo 3, a definição do problema de coloração imprópria e os resultados conhecidos são apresentados. O Capítulo 4 é dedicado à introdução e ao estudo do número de Grundy k -impróprio, onde os resultados teóricos obtidos neste trabalho são apresentados. O Capítulo 5 é um trabalho em colaboração com o Professor Tibérius Bonates. Neste, formulações em programação matemática dos problemas de coloração gulosa própria e imprópria são apresentadas. Este texto é concluído no Capítulo 6, com o resumo dos resultados e problemas em aberto.

2 NOTAÇÕES E TERMINOLOGIA

2.1 Conceitos básicos em teoria dos grafos

Um *grafo* $G = (V, E)$ é formado por um par de conjuntos: de *vértices* $V(G)$, ou simplesmente V , onde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, e de *arestas* $E(G)$, ou simplesmente E , onde $E \subseteq V \times V$. A cardinalidade de V é a *ordem* de G , denotado por $n(G)$ ou n , enquanto que a cardinalidade de E é o tamanho de G , denotado por $m(G)$ ou m .

A aresta $\{u, v\}$ pode ser denotada por uv . Se $uv \in E$, então os vértices u e v são *adjacentes* e *extremidades* de uv . Se um vértice é uma das extremidades de uma aresta, dizemos que a aresta *incide* no vértice. Duas arestas são *adjacentes* se elas possuem uma extremidade em comum. Se uma aresta possui duas extremidades iguais, então essa aresta é chamada de *laço*. Se duas arestas incidem nas mesmas extremidades u e v , então elas são chamadas de *arestas múltiplas*. Um grafo G é dito *simples* quando finito e não possui laços nem arestas múltiplas. Apenas grafos simples são abordados neste trabalho, incluindo as definições que seguem.

Um vértice $u \in V$ é *vizinho* de v se u e v são adjacentes. A *vizinhança* $N_G(v)$ de um vértice v é conjunto de todos os vizinhos de v , e o *grau* de v é definido por $d_G(v) = |N_G(v)|$. A *vizinhança de um conjunto* $S \subseteq V$ é a união das vizinhanças de todos os vértices nesse conjunto, i.e. $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$. Quando estiver claro no texto, as notações $N(v)$ e $d(v)$ serão empregadas sem especificar o grafo. O menor e maior grau dos vértices de G são denotados por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$, respectivamente.

Um *isomorfismo* de um grafo G simples para um grafo H simples é uma bijeção $f : V(G) \rightarrow V(H)$ de forma que $uv \in E(G)$ se, e somente se, $f(u)f(v) \in E(H)$. Um grafo G é dito *isomorfo a* H se existe um isomorfismo de G para H .

Um grafo H é um *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$. Se $E(H) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$, H é um *subgrafo induzido* de G . Se G não tem um subgrafo isomorfo a H , então G é *livre* de H . Um subgrafo de um grafo G é *gerador* se contém todos os vértices de G e *próprio* se for diferente de G .

Um grafo é dito *trivial* se o conjunto de vértices contém apenas um vértice e *vazio* se o conjunto de arestas é vazio. O *complemento* de um grafo G , denotado por \overline{G} , é um grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e, para todo par de vértices $u, v \in V$, $u \neq v$, $uv \in E(\overline{G})$ se, e somente se, $uv \notin E(G)$.

Um grafo $G = (V, E)$ tal que $\forall u, v \in V$, $uv \in E$ é dito *completo de ordem* n e denotado

por K_n . Uma *clique* de cardinalidade n é um conjunto de vértices em G que induz um grafo completo K_n . Um *conjunto independente* ou *estável* $S \subseteq V(G)$ é um conjunto de vértices que induz um grafo vazio. A cardinalidade da maior clique em um grafo G é representada por $\omega(G)$ enquanto que a cardinalidade do maior conjunto independente de G é representado por $\alpha(G)$.

Uma k -*partição* de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em k subconjuntos de forma que não há arestas entre quaisquer dois vértices de uma mesma parte. Uma *bipartição* de um grafo G é uma 2-partição de G . Se G admite uma bipartição, então é chamado de *bipartido*. Dada uma bipartição de um grafo G em dois subconjuntos X e Y , se todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y , então G é um *grafo bipartido completo*.

Um *caminho* $P = \langle v_1, \dots, v_p \rangle$ em um grafo G é uma sequência de vértices distintos onde $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{p-1}, v_p)\} \subseteq E(G)$. Os vértices v_1 e v_p são as *extremidades* de P enquanto que v_2, \dots, v_{p-1} são *vértices internos* de P . Um caminho qualquer de tamanho p é representado por P_p . Dois vértices estão *conectados* se existe pelo menos um caminho entre eles. Um grafo G é *conexo* se existe pelo menos um caminho entre quaisquer dois vértices distintos. Caso contrário, o grafo é desconexo.

Um *ciclo* $C = \langle v_1, \dots, v_p \rangle$ em um grafo G é um caminho onde as extremidades são iguais, *i.e.* $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{p-1}, v_p), (v_p, v_1)\} \subseteq E(G)$. Um ciclo de ordem 3 é chamado de *triângulo*. Um grafo G é *acíclico* se G é livre de ciclos. Se G é acíclico, então ele é uma *floresta*.

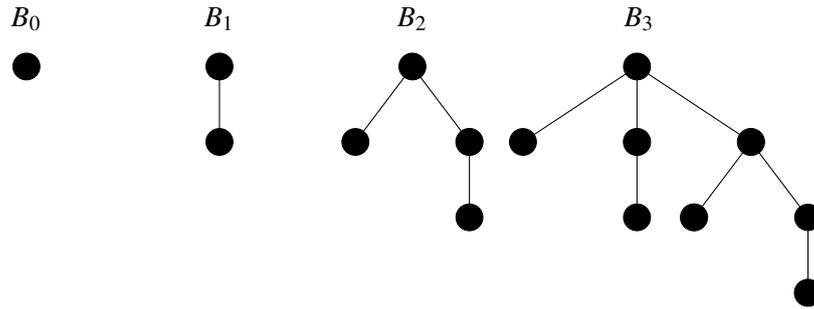
Se G é acíclico e conexo, então ele é uma *árvore*. Um vértice de grau 1 em uma árvore é chamado de *folha*. Uma *árvore enraizada* é uma árvore onde um vértice r é escolhido como *raiz*. Alternativamente, o vértice raiz de uma árvore T é representado por $r(T)$. Para cada vértice v de uma árvore enraizada, seja $P(v)$ o único caminho de r a v . O *pai* de v é o seu vizinho em $P(v)$ enquanto que seus *filhos* são seus outros vizinhos.

Uma *árvore binomial* é uma árvore enraizada definida como se segue (CORMEN *et al.*, 2009).

Definição 2.1 (Árvore binomial). *A árvore binomial B_n é construída recursivamente da seguinte forma:*

$$B_i = \begin{cases} \text{um vértice,} & \text{se } i = 0. \\ \text{uma árvore com raiz } r \text{ cujos filhos são } B_0, \dots, B_{i-1}, & \text{se } i > 0. \end{cases}$$

Figura 1 – Exemplos de árvores binomiais

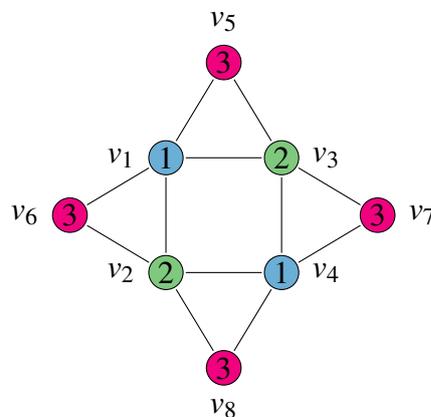


A árvore binomial B_0 consiste de um grafo trivial. De maneira análoga, a árvore binomial B_n consiste da união disjunta de duas árvores B_{n-1} com a adição de uma aresta conectando as suas raízes. A raiz de uma árvore binomial B_n é denotada por $r(B_n)$. Uma árvore binomial de ordem n é formada por 2^n vértices. Observe que o maior grau de uma árvore B_n é n .

2.2 Coloração de vértices

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma coloração, ou m -coloração, é uma função $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Os valores de $\{1, 2, \dots, m\}$ são chamados de *cores*. Uma m -coloração é uma partição dos vértices de G em subconjuntos $S = \{S_1, \dots, S_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, de V . A *classe de cor* S_i é o conjunto de vértices que são coloridos com a cor i . Uma coloração é *própria* se vértices adjacentes são coloridos com cores diferentes, ou seja, se toda aresta de G incide em vértices em classes de cor diferentes. Como cada vértice recebe apenas uma cor, S é uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes. O grafo G é dito *m -colorável* se G admite uma m -coloração própria. A Figura 2 mostra um exemplo de coloração própria.

Figura 2 – Exemplo de coloração própria



O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor número m tal que G

admite uma m -coloração própria. Determinar o número cromático de um grafo G é um problema NP-difícil (GAREY; JOHNSON, 1979). Lund e Yannakakis (1994) mostraram que existe $\varepsilon > 0$ tal que não existe algoritmo aproximativo com fator n^ε para determinar o número cromático de um grafo a menos que $P = NP$.

Teorema 2.2 (Brooks (1941)). *Seja G um grafo conexo tal que G não é um grafo completo ou um ciclo ímpar. Então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Observe que cada vértice v tem no máximo Δ vizinhos e, com isso, v possui em sua vizinhança no máximo Δ cores distintas. Portanto, $\Delta + 1$ cores são suficientes para colorir todos os vértices de um grafo G . Brooks (1941) provou (ver Teorema 2.2) que no máximo Δ cores são suficientes para colorir um grafo quando este não for um grafo completo ou um ciclo ímpar.

Dada uma ordenação $\theta = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ dos vértices de G , um algoritmo de coloração *online* atribui cores aos vértices de G seguindo a ordem θ . Ao atribuir uma cor a um vértice v_i , as arestas ligando v_i a vértices em $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ e suas cores são conhecidas. Uma vez atribuída, a cor de um vértice não é modificada pelo algoritmo.

Seja c uma coloração própria de G . Seja $S \subseteq V(G)$ uma clique em G . Como $uv \in E(G)$ para todos $u, v \in S$, então pelo menos $|S|$ cores serão necessárias para colorir S e conseqüentemente G .

Dado um grafo $G = (V, E)$, observe que $1 \leq \chi(G) \leq n$ são limites triviais para $\chi(G)$. Quando o limite superior é alcançado, cada vértice requer uma cor diferente. Por outro lado, o limite inferior é alcançado quando $|E| = 0$. Pela definição de $\alpha(G)$, $|S_i| \leq \alpha(G)$ para cada $i \in \{1, \dots, \chi(G)\}$. Com isso, observe que $n(G) \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ e, portanto, $\chi(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)}$.

Algoritmo 1: Algoritmo Guloso de Coloração Própria

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e ordem $\theta = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ sobre $V(G)$

Saída: Coloração própria c de G

início

para $i = 1, \dots, n$ **faça**

$c(v_i) = k$, tal que $k \in \{1, \dots, n\}$ é a menor cor não utilizada em

$N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$

fim

fim

Uma forma natural de colorir um grafo G é atribuir, vértice a vértice, a menor cor que não está presente em sua vizinhança já colorida. O Algoritmo 1, conhecido por algoritmo guloso de coloração ou simplesmente guloso, descreve essa estratégia intuitiva de coloração

de vértices. O Algoritmo 1 tem como entrada um grafo G e uma ordenação de seus vértices. Seguindo a ordem, o algoritmo atribui a cada vértice $v \in V$ a menor cor não atribuída a nenhum de seus vizinhos que o precedem.

Em uma coloração de G com m classes de cores $\{S_1, \dots, S_m\}$, um vértice $v \in S_i$ é um *vértice de Grundy*, ou *vértice guloso*, se v é adjacente a pelo menos um vértice na classe de cor S_j , para cada $j < i$.

Definição 2.3 (Coloração Gulosa). *Uma coloração de Grundy ou Coloração Gulosa é uma coloração onde cada vértice $v \in V$ é um vértice guloso.*

Todas as colorações geradas pelo Algoritmo 1 são colorações gulosas. Além disso, é possível observar que uma coloração é gulosa se, e somente se, a mesma puder ser obtida a partir do algoritmo guloso de coloração.

O *número de Grundy* ou *número guloso*, denotado por $\Gamma(G)$, consiste no maior número de cores que podem ser empregadas pelo algoritmo guloso. Isto é, $\Gamma(G)$ é o maior inteiro m tal que G admite uma m -coloração de Grundy.

O número de Grundy foi primeiramente definido no contexto de grafos direcionados com aplicação a jogos por Grundy (1939). Acredita-se que esse parâmetro foi apresentado pela primeira vez no contexto de coloração de grafos em (CHRISTEN; SELKOW, 1979). A complexidade desse problema foi questionada em (JENSEN; TOFT, 1995) e respondida por Goyal e Vishwanathan (1997), que mostraram que o problema de determinar o número de Grundy é NP-completo para grafos quaisquer.

O algoritmo guloso pode ser utilizado como um algoritmo de Coloração *Online*. A versão de Coloração *Online* que utiliza o algoritmo guloso é chamada Coloração *First-Fit*, denotada por FF . Denota-se por $FF(G)$, o comportamento do pior caso da coloração FF em um grafo G . Um objeto de estudo da coloração FF é a determinação de limites para $FF(G)$. Entretanto, observe que $FF(G) = \Gamma(G)$. A Coloração Gulosa pode ser considerada uma Coloração *Offline* uma vez que toda a informação do grafo e todas as ordens dos vértices do grafo podem ser analisadas.

2.3 Grafos livres de P_4

Os grafos livres de P_4 são chamados de *cografos*. Essa classe de grafos foi introduzida em (LERCHS, 1971) e (LERCHS, 1972) onde suas propriedades estruturais foram exploradas.

Um algoritmo de tempo $O(n^2)$ para reconhecer um cografo foi apresentado em (STEWART, 1978). Uma série de caracterizações e representações de cografos pode ser encontrada em (CORNEIL *et al.*, 1981).

A união disjunta (\cup) é a operação que une os conjuntos de vértices e de arestas de dois grafos G_1 e G_2 . A união completa (+) é a operação que une dois grafos G_1 e G_2 conectando cada par de vértices $\{u, v\}$ onde $u \in V(G_1)$ e $v \in V(G_2)$. A operação de união completa $G_1 + G_2$ corresponde a $\overline{\overline{G_1} \cup \overline{G_2}}$.

Corneil *et al.* (1981) mostraram que um cografo pode ser definido recursivamente como segue:

- O grafo trivial é um cografo;
- Se G_1 e G_2 são cografos, então o grafo $G = G_1 \cup G_2$ é um cografo;
- Se G_1 e G_2 são cografos, então o grafo $G = G_1 + G_2$ é um cografo.

Além disso, Corneil *et al.* (1981) mostraram que todo cografo pode ser obtido a partir de um conjunto de operações finitas de união disjunta e união completa feitas a um grafo trivial.

2.4 Programação matemática

Dado um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, uma formulação matemática que descreve S pode ser usada para obter diferentes elementos do conjunto S . Dada uma função f de S em \mathbb{R} , um problema de minimização consiste em determinar o menor valor que f admite em S , isto é, determinar $z = \min\{f(x) : x \in S\}$. A função f é chamada de função objetivo do problema enquanto que o conjunto S é chamado de conjunto de soluções viáveis.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $d \in \mathbb{R}$. A equação da forma $a^\top x = d$ é linear e o conjunto de vetores x que a satisfazem é chamado de *hiperplano*. A inequação da forma $a^\top x \leq d$ também é linear e o conjunto de vetores x que a satisfazem é chamado de *semiespaço*. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é linear se ela pode ser representada na forma $f(x) = c^\top x$, para algum $c \in \mathbb{R}^n$.

Um *poliedro* é um conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ definido pela interseção de um número finito de semiespaços, ou seja, P é da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, 1 \leq i \leq m\}$. Dada uma função linear $f(x) = c^\top x$ e um poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$, um *problema ou programa linear* de minimização é definido como sendo $\min\{f(x) : x \in P\}$. As equações lineares $a_i^\top x \leq b_i$ que descrevem P são chamadas de *restrições*. Comumente, considera-se que $x \geq 0$ são restrições de P .

Um *problema ou programa linear inteiro* de minimização é um programa linear em

que $x \in \mathbb{Z}_+^n$, ou seja, $z = \min\{f(x) : x \in P, x \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz cuja i -ésima linha é o vetor a_i^\top , e $b \in \mathbb{R}^m$ o vetor em que a i -ésima entrada é b_i , $1 \leq i \leq m$. A matriz A é chamada de matriz de coeficientes das restrições. O vetor b é chamado de termos independentes das restrições e c de vetor de coeficientes da função objetivo.

Um problema linear inteiro de minimização pode ser representado da forma a seguir.

$$\min f(x) = c^\top x \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a: } Ax \leq b \quad (2.2)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (2.3)$$

2.5 Programação por restrições

A notação e os conceitos apresentados nesta seção são baseados em (ROSSI *et al.*, 2006) e (DECHTER, 2003). *Programação por restrições* é um paradigma de programação. Um problema de satisfação de restrições (PSR), assim como em um problema de programação linear inteira, tem como componentes variáveis de decisão, seus domínios, e restrições definidas sobre estas variáveis. As restrições são regras que impõem condições aos valores que uma variável pode assumir. No entanto, diferentemente do caso de programação linear inteira, existe uma grande variedade na forma como as restrições podem ser expressas ou codificadas.

Um PSR de domínio finito, também chamado de *rede de restrições de domínio finito*, consiste de uma tupla $P = (X, D, C)$ com $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ sendo uma sequência de variáveis de decisão, $D = \langle D_1, \dots, D_n \rangle$ sendo uma sequência de domínios, e $C = \{C_1, \dots, C_t\}$ sendo um conjunto de restrições definidas sobre X . Assumimos que cada domínio D_i é um conjunto finito e que $x_i \in D_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Associamos a cada restrição $C_j \in C$ o conjunto $\text{vars}(C_j) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, que é chamado de *escopo* de C_j . Se $\text{vars}(C_j) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$, então $C_j \subseteq D_{i_1} \times \dots \times D_{i_k}$. Em outras palavras, C_j define um conjunto de tuplas válidas para certo subconjunto das variáveis.

Tipicamente, uma restrição é representada não por meio de uma enumeração de suas tuplas válidas, mas de maneira implícita. Como exemplo, tomemos a restrição $C_j = \text{all-different}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, a qual exige que todas as variáveis em seu escopo assumam valores distintos. C_j tem seu conjunto de tuplas válidas representado implicitamente por meio dos emparelhamentos de um grafo bipartido definido sobre $\text{vars}(C_j) \cup \left(\bigcup_{r=1}^k D_{i_r} \right)$ que tem cardinalidade $|\text{vars}(C_j)|$. Nesse emparelhamento, as extremidades das arestas na partição definida sobre

$\left(\bigcup_{r=1}^k D_{i_r}\right)$ representam o valor que cada variável em $\text{vars}(C_j)$ assume.

Uma solução $s \in D_1 \times \cdots \times D_n$ de um PSR é uma instanciação das variáveis X que satisfaz $s[\text{vars}(C_j)] \in C_j$, para todo $j \in \{1, \dots, t\}$, onde $s[I]$, com $I \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, é a tupla obtida selecionando-se apenas as componentes de s correspondentes aos elementos de I . Um PSR pode ter uma, várias, ou nenhuma solução. As tarefas sobre um PSR são determinar se existe uma solução, achar uma ou todas as soluções, descobrir se uma instanciação parcial das variáveis pode ser estendida a uma solução completa, e achar uma solução ótima relativa a uma função de custo.

A resolução de um problema de satisfação de restrições se dá através da aplicação de algoritmos de processamento que são divididos em duas categorias: busca e inferência. Algoritmos de busca são caracterizados por buscas *backtracking* aprimoradas. Algoritmos de inferência são implementados através de uma variedade de métodos de manutenção de consistência. Um algoritmo de manutenção de consistência define condições sob as quais é possível afirmar que uma variável x_i não assume certo valor $v \in D_i$ em nenhuma solução do PSR. A aplicação alternada de fixação de variáveis e algoritmos de manutenção de consistência permite a enumeração completa das soluções de um PSR.

Dada uma variável x_i que indica a qualidade de uma solução, o processo de enumeração das soluções pode ser incorporado a um esquema de *branch-and-bound* com o intuito de obter uma solução ótima. Toda vez que uma nova solução for encontrada, uma restrição sobre x_i pode ser adicionada ao PSR de forma que soluções futuras sejam melhores e o espaço de busca seja reduzido. Se não existe solução satisfazendo a última restrição adicionada, então a última solução encontrada é ótima.

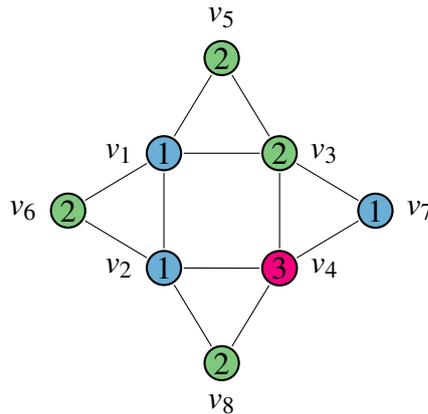
3 COLORAÇÃO IMPRÓPRIA

3.1 Definição

Um grafo G é dito (m, k) -colorível se seus vértices podem ser coloridos com m cores de forma que cada vértice é adjacente a, no máximo, k vizinhos coloridos com sua mesma cor. Alternativamente, uma (m, k) -coloração pode ser vista como uma partição de V em m classes de cores na qual cada classe de cor induz um subgrafo onde o grau máximo não excede k . Se um grafo G é (m, k) -colorível, então dizemos que G possui uma (m, k) -coloração ou uma coloração k -imprópria com m cores.

Uma coloração k -imprópria é uma generalização da coloração própria e foi primeiramente apresentada em (ERDŐS; HAJNAL, 1967). Note que uma coloração própria é uma coloração 0-imprópria. A Figura 3 apresenta um exemplo de coloração 1-imprópria.

Figura 3 – Exemplo de coloração 1-imprópria



O número cromático k -impróprio de um grafo G , denotado por $\chi_k(G)$, é o menor m para qual G é (m, k) -colorível. Um grafo G é dito (m, k) -colorível único se todas as (m, k) -colorações de G produzem as mesmas classes de cores. Dado um grafo G , se $\chi_k(G') < \chi_k(G)$ para cada subgrafo próprio G' de G , então G é dito *minimal quanto ao número k -cromático* ou χ_k -minimal. Se G é χ_k -minimal onde $\chi_k(G) = m$ então G é dito (m, k) -minimal. Um grafo $(m, 0)$ -minimal é chamado de m -crítico.

Um subconjunto S de $V(G)$ é chamado de k -dependente se este induz um subgrafo de G com grau no máximo k , i.e. $|N(v) \cap S| \leq k$ para todo $v \in S$. O número k -dependente, representado por $\alpha_k(G)$, indica a cardinalidade do maior conjunto k -dependente em G . Observe que um conjunto 0-dependente é, simplesmente, um conjunto independente, ou seja $\alpha^0(G)$ é

o mesmo que $\alpha(G)$. Esse parâmetro foi investigado em (ANDREWS; JACOBSON, 1985), (FRICK, 1993), (FRICK; HENNING, 1994), (HOPKINS; STATON, 1986), (MADDOX, 1988b), e (MADDOX, 1988a).

Observe que um grafo admite uma m -coloração k -imprópria se seus vértices podem ser particionados em m partes onde cada uma é k -dependente. Resultados sobre o problema do conjunto máximo k -dependente podem ser encontrados em (FINK; JACOBSON, 1985) e (DJIDJEV *et al.*, 1992).

Primeiramente apresentado em (COWEN *et al.*, 1986), a *impropriedade* de um vértice v_i é o número que indica a quantidade de vizinhos que estão coloridos com a mesma cor de v_i . O conceito de impropriedade é usado para auxiliar no processo de atribuição da menor cor disponível a ser usada para colorir v_i . Um grafo G é (m, k) -colorível se seus vértices podem ser coloridos com m cores onde a impropriedade de cada vértice não ultrapassa k .

Com relação a uma coloração k -imprópria, um vértice v está *saturado* quando sua impropriedade é igual a k . Um vértice saturado não admite que nenhum vizinho a mais seja colorido com sua cor. Na Figura 3 é possível identificar que o vértice v_2 tem impropriedade 1, o que significa que ele compartilha a sua cor com um vizinho (o vértice v_1). Desta forma é possível identificar se um vértice está saturado e se ele pode compartilhar sua cor com mais um vizinho. Dizemos que uma cor é *saturada em um conjunto de vértices* se pelo menos um vértice do conjunto colorido com a cor é saturado.

3.2 Resultados conhecidos

O problema de coloração k -imprópria teve suas primeiras aplicações apresentadas no contexto de grafos planares em (COWEN *et al.*, 1986). Se um grafo G é (m, k) -colorível, então ele também é (m_1, k_1) -colorível para todo par onde $(m_1, k_1) \geq (m, k)$, onde $(a, b) \geq (c, d)$ significa que $a \geq c$ e $b \geq d$.

Teorema 3.1. *Seja G um grafo com grau máximo Δ . Então $\chi_k(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta+1}{k+1} \right\rceil$.*

Para coloração própria, o maior grau de um grafo G é um limite superior para o número cromático de G , se G não for completo ou ciclo ímpar. O resultado do Corolário 3.1 foi obtido de maneira independente em (LOVÁSZ, 1966) e (HOPKINS; STATON, 1986).

3.2.1 Grafos planares e periplanares

Se um grafo G pode ser desenhado, ou em outras palavras admite uma representação gráfica, no plano, de forma que não há cruzamento de arestas, então G é dito planar. Observe que o desenho no plano de um grafo planar finito define regiões, chamadas de faces, onde uma delas é uma face infinita. Se G , planar, admite uma representação gráfica onde todos os vértices pertencem à face infinita, então G é dito periplanar.

A coloração imprópria de grafos planares e periplanares foi primeiramente estudada em (COWEN *et al.*, 1986), onde o Teorema das Quatro Cores foi generalizado. Cowen *et al.* (1986) mostraram que não existe inteiro k em que todo grafo planar é $(1, k)$ ou $(2, k)$ -colorível e que existem grafos planares que não são $(3, 1)$ -colorível. Mostraram também que todo grafo planar é $(3, 2)$ -colorível. Finalmente, com isso e o Teorema das Quatro Cores, provaram que grafos planares são (m, k) -coloríveis se, e somente se, ou $(m, k) \geq (3, 2)$ ou $(m, k) \geq (4, 0)$.

Teorema 3.2 (Cowen *et al.* (1986)). *Todo grafo planar é $(4, 1)$ -colorível.*

O Teorema 3.2 é uma consequência do Teorema das Quatro Cores tendo em vista que, se todo grafo planar é $(4, 0)$ -colorível, então também o é $(4, 1)$ -colorível. Entretanto, esse resultado foi obtido sem assumi-lo.

Teorema 3.3 (Cowen *et al.* (1986)). *Todo grafo periplanar é $(2, 2)$ -colorível.*

Os grafos periplanares são (m, k) -coloríveis se, e somente se, $(m, k) \geq (2, 2)$ ou $(m, k) \geq (3, 0)$. O fato de que todo grafo periplanar é 3-colorível segue do Teorema das Quatro Cores. Cowen *et al.* (1986) mostraram que existe um grafo periplanar que não é $(2, 1)$ -colorível. Então, com o Teorema 3.3, os limites inferiores para grafos periplanares são estabelecidos.

3.2.2 Grafos (m, k) -coloríveis únicos e χ_k -minimais

Os resultados apresentados nessa seção foram obtidos por Frick e Henning (1994). Dentre outros, foram obtidos resultados sobre grafos (m, k) -coloríveis únicos e χ_k -minimais.

Teorema 3.4 (Frick e Henning (1994)). *Sejam $m \geq 2$ e $k \geq 1$ inteiros e G um grafo (m, k) -colorível único. Então $|G| \geq m(k + 2) - 1$.*

Seja G um grafo (m, k) -colorível único, a relação entre a quantidade de cores m , a impropriedade k e sua ordem foi estudada em (FRICK; HENNING, 1994). O Teorema 3.4

apresenta a ordem mínima de um grafo para que este seja (m, k) -colorível único. Além disso, é mostrado que existe um grafo (m, k) -colorível único de ordem $m(k + 2) - 1$ para $(m, k) \geq (2, 1)$. Este resultado leva a um algoritmo que gera os grafos (m, k) -coloríveis únicos para $(m, k) \geq (2, 1)$.

Teorema 3.5 (Frick e Henning (1994)). *Sejam $m \geq 2$ e $k \geq 0$ inteiros. Então existe um grafo (m, k) -colorível único que também é (m, l) -colorível único para cada inteiro l com $0 \leq l \leq k$.*

O Teorema 3.5 tem como resultado a construção de um grafo (m, k) -colorível que tem a propriedade de ser (m, l) -colorível para cada l onde $0 \leq l \leq k$.

Teorema 3.6 (Frick e Henning (1994)). *Para cada inteiro $k \geq 0$, o grafo estrela $K_{(1, k+1)}$ é o único grafo minimal $(2, k)$ -colorível.*

O único grafo minimal $(2, 0)$ -colorível é o grafo completo K_2 . O Teorema 3.6 é uma generalização desse resultado.

Teorema 3.7 (Frick e Henning (1994)). *Sejam $m \geq 2$ e $k \geq 0$, e seja G um grafo (m, k) -minimal. Então, $\delta(G) \geq m - 1$, e esse limite é o melhor possível.*

O Teorema 3.7 apresenta um limite inferior com respeito ao menor grau de um grafo (m, k) -minimal.

3.2.3 Grafos livres de triângulos

Um grafo G é dito livre de triângulo se G é livre de K_3 . Em (SIMANIHURUK *et al.*, 1997b), $f(m, k)$ é definido como a menor ordem de um grafo G livre de triângulos de forma que $\chi_k(G) = m$.

Lema 3.8 (Simanihuruk *et al.* (1997a)). *Seja G um grafo livre de triângulos de ordem $n \geq 7$. Se $\alpha_1(G) \geq n - 3$ então $\chi_1(G) \leq 2$.*

Lema 3.9 (Simanihuruk *et al.* (1997b)). *Seja $G = (V, E)$ um grafo livre de triângulos de ordem 8. Então $\chi_1(G) \leq 2$.*

Simanihuruk *et al.* (1997b) também mostraram a construção de um grafo livre de triângulos de ordem 9 em que $\chi_1(G) = 3$. Com isso e o Lema 3.9, chega-se ao Teorema 3.10.

Teorema 3.10 (Simanihuruk *et al.* (1997b)). *A menor ordem de um grafo G livre de triângulos em que $\chi_1(G) = 3$ é 9, ou seja, $f(3, 1) = 9$.*

Teorema 3.11 (Simanihuruk *et al.* (1997b)). *Para qualquer inteiro $m \geq 4$, $f(m, 1) \geq m^2$.*

O Lema 3.9 e o Teorema 3.11 implicam o Corolário a seguir.

Corolário 3.12 (Simanihuruk *et al.* (1997b)). *Seja $m \geq 3$. Se G é um grafo livre de triângulos com $|V| \leq k^2 - 1$, então $\chi_1(G) \leq k - 1$.*

Além disso, a caracterização dos grafos livres de triângulos de ordem 9, cujo número 1-cromático é 3, é um importante resultado apresentado em (SIMANIHURUK *et al.*, 1997b).

Teorema 3.13 (Simanihuruk *et al.* (1997b)). *A menor ordem de um grafo G livre de triângulos com $\chi_1(G) = 4$ é pelo menos 17.*

Usando as provas dos Teoremas 3.11 e 3.13, o seguinte corolário é obtido.

Corolário 3.14 (Simanihuruk *et al.* (1997b)). *Para qualquer inteiro $m \geq 5$, $f(m, 1) \geq m^2 + 1$.*

Em (MYCIELSKI, 1955), a construção de um grafo m -cromático livre de triângulos com $2^m - 2^{m-2} - 1$ vértices, para $m \geq 2$, é apresentada. Isso significa que $f(m, 0) \leq 2^m - 2^{m-2} - 1$. Com relação a um limite inferior, Chvátal (1974) provou que $f(4, 0) = 11$ e que $f(m, 0) \geq \binom{m+2}{2} - 4$ para $m \geq 4$.

Teorema 3.15 (Simanihuruk *et al.* (1997b)). *Para qualquer inteiro positivo n , existe um grafo G livre de triângulos com $\chi_1(G) = n$.*

Uma construção de um grafo livre de triângulos 1-cromático é apresentada na prova do Teorema 3.15 em (SIMANIHURUK *et al.*, 1997b).

Teorema 3.16 (Simanihuruk *et al.* (1997b)). $17 \leq f(4, 1) \leq 28$.

Do Teorema 3.13 e uma argumentação sobre o Teorema 3.15, Simanihuruk *et al.* (1997b) chegam aos limites apresentados no Teorema 3.16.

3.2.4 Grafos complementares

Dado um grafo G , o problema de coloração de grafos complementares ou problema *Nordhaus-Gaddum* consiste em explorar os limites para $\chi_k(G) + \chi_k(\overline{G})$ e $\chi_k(G) \cdot \chi_k(\overline{G})$, ou seja, da soma e multiplicação do número cromático de grafos complementares. Esse problema foi primeiramente apresentado no contexto de coloração própria de vértices em (NORDHAUS; GADDUM, 1956).

Teorema 3.17 (Simanihuruk *et al.* (1997a)). *Seja G um grafo livre de triângulos de ordem n . Então, $\chi_1(G) + \chi_1(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2$.*

Apresentado em (SIMANIHURUK *et al.*, 1997a), o Lema 3.8 é usado com outros resultados intermediários para provar o Teorema 3.17.

Teorema 3.18 (Maddox (1988b)). *Se G ou \overline{G} é livre de triângulos, então $\chi_k(G) + \chi_k(\overline{G}) \leq 5 \left\lceil \frac{n}{3k+4} \right\rceil$.*

Para grafos livres de triângulos, o Teorema 3.18 foi obtido por Maddox (1988b). Esse resultado foi melhorado para $6 \left\lceil \frac{n}{9} \right\rceil$ quando $k = 1$. Outras classes de grafos foram estudadas:

Teorema 3.19 (Achuthan *et al.* (1996)). *Seja G um grafo livre de P_4 de ordem n . Então, $\chi_1(G) + \chi_1(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$.*

A seguinte inequação $\chi_k(G) + \chi_k(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{n-1}{k+1} \right\rceil$ foi sugerida como conjectura para qualquer grafo G em (MADDOX, 1988b). O resultado do Teorema 3.19 confirma a conjectura quando $k = 1$.

Teorema 3.20 (Achuthan *et al.* (1996)). *Seja G um grafo de ordem n . Então, $\chi_k(G) + \chi_k(\overline{G}) \leq \frac{2n+2k+4}{k+2}$.*

Achuthan *et al.* (1996) mostraram que a conjectura apresentada em (MADDOX, 1988b) não é válida para todos os grafos. Isso foi possível através da construção de grafos de ordem n em que $\chi_k(G) + \chi_k(\overline{G}) = \left\lceil \frac{n-1}{k+1} \right\rceil + 3$. Além disso, um limite superior fraco para $\chi_k(G) + \chi_k(\overline{G})$, onde $k \geq 1$, é apresentado no Teorema 3.20.

Teorema 3.21 (Achuthan *et al.* (1998)). *Se G é um grafo livre de P_4 , então $\chi_k(G) + \chi_k(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{n-1}{k+1} \right\rceil$.*

Os grafos construídos em (ACHUTHAN *et al.*, 1996), para mostrar que a conjectura de Maddox (1988b) não é válida, possuem P_4 como subgrafos induzidos. Então Achuthan *et al.* (1998), no Teorema 3.21, mostraram que a conjectura de Maddox (1988b) é válida para grafos livres de P_4 .

Teorema 3.22 (Achuthan *et al.* (1998)). *Para um grafo G de ordem n , $\chi_1(G) + \chi_1(\overline{G}) \leq \frac{2n+4}{3}$.*

O Teorema 3.22 apresenta um limite superior para $\chi_1(G) + \chi_1(\overline{G})$.

3.2.5 Complexidade

Determinar se um grafo G admite uma $(2, 0)$ -coloração é equivalente a determinar se G é bipartido e, portanto, pode ser decidido em tempo polinomial. Em (COWEN, 1993), foi mostrado que, em geral, o problema de $(2, 1)$ -coloração é NP-completo. Em uma extensão desse resultado, Cowen *et al.* (1997) mostraram que o problema de decidir se um grafo é $(2, k)$ -colorível é NP-completo mesmo para grafos planares.

Teorema 3.23 (Cowen *et al.* (1997)). *(i) Para qualquer positivo inteiro k , decidir se um grafo planar é $(2, k)$ -colorível é NP-completo.*
(ii) Decidir se um grafo planar é $(3, 1)$ -colorível é NP-completo.

Teorema 3.24 (Cowen *et al.* (1997)). *O problema de decidir se um grafo G é (m, k) -colorível é NP-completo para qualquer $m \geq 3$ e $k \geq 0$.*

Para grafos gerais, o Teorema 3.24 é uma generalização dos resultados sobre complexidade do problema de coloração própria e foi obtido em (COWEN *et al.*, 1997). Além disso, foi demonstrado que o problema de decidir se um grafo de grau máximo $2(k + 1)$ é $(2, k)$ -colorível é NP-difícil.

Teorema 3.25 (Cowen *et al.* (1997)). *Para qualquer constante de impropriedade k , existe um $\varepsilon > 0$ de forma que não há algoritmo polinomial que pode aproximar o número cromático k -impróprio com fator n^ε a menos que $P = NP$.*

Uma redução do problema de coloração próprio e o resultado obtido por Lund e Yannakakis (1994) levaram ao Teorema 3.25.

4 COLORAÇÃO GULOSA k -IMPRÓPRIA

Em uma coloração k -imprópria com m classes de cor S_1, \dots, S_m , um vértice $v \in S_i$ é chamado de *vértice de Grundy k -impróprio*, ou *vértice guloso k -impróprio*, se v é proibido de ser colorido com a cor da classe S_j , para cada $j < i$. Um vértice v é proibido de receber uma cor j , se v é adjacente a pelo menos $k + 1$ vértices na classe de cor j ou se v é adjacente a um vértice saturado nessa classe de cor.

Definição 4.1 (Coloração Gulosa Imprópria). *Uma coloração de Grundy imprópria, ou Coloração gulosa imprópria, é uma coloração onde cada vértice $v \in V$ é um vértice guloso impróprio.*

A seguir, apresentamos uma generalização do Algoritmo 1 (Algoritmo Guloso de Coloração Própria). A heurística gulosa de coloração imprópria tem como entrada uma ordem θ dos vértices $V(G)$ que será utilizada no processo de atribuição de cores. No Algoritmo 1, a escolha da cor a ser atribuída a um vértice v_i se dá através de uma averiguação feita na vizinhança de v_i . No contexto de coloração k -imprópria, é possível que a atribuição de uma cor j seja permitida para um vértice v_i (ele tem menos de k vizinhos coloridos com j), mas que esta atribuição viole a impropriedade de um vizinho já colorido com j . Por isso, o processo de atribuição de cores em uma coloração k -imprópria deve ser aprimorado.

Na verificação da atribuição de uma cor a um vértice v_i , uma cor j não deve ser atribuída a v_i se há em sua vizinhança pelo menos $k + 1$ vértices coloridos com esta cor ou se existe em sua vizinhança pelo menos um vértice saturado com a cor j . A heurística gulosa de coloração k -imprópria é apresentada no Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Algoritmo Guloso de Coloração k -imprópria

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, ordem $\theta = v_1, v_2, \dots, v_n$ sobre $V(G)$ e inteiro k

Saída: Coloração k -imprópria c de G

início

para $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ **faça**

$c(v) = j$, com j sendo a menor cor tal que j não aparece em mais que k vizinhos de v e a impropriedade de seus vizinhos coloridos com j é menor que k

fim

fim

Todas as colorações geradas pelo Algoritmo 2 são gulosas impróprias e respeitam a impropriedade de cada vértice. O maior número de cores utilizadas nessas colorações, considerando todas as ordens possíveis de $V(G)$, define o número de Grundy k -impróprio de G ou $\Gamma^k(G)$.

Mais precisamente, $\Gamma^k(G)$ é o maior inteiro l tal que G admite uma coloração k -imprópria gulosa com l cores. Este trabalho estuda limites superiores de algumas classes de grafos específicas como árvores binomiais e grafos livres de P_4 .

4.1 Resultados gerais

Lema 4.2. *Seja G um grafo qualquer, então $\Gamma^k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$.*

Demonstração. Suponha que, por absurdo, $\Gamma^k(G) > \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$. Seja u um vértice colorido com a cor $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil + 1$. A existência de u implica que existe uma classe de cor i , $i < \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil + 1$, com menos de $k+1$ vértices. Como u não pode receber a cor i e não existem $k+1$ vértices com a cor i que pudessem ser adjacentes a u , isso implica que existe v colorido com i , $uv \in E(G)$, tal que v possui k vizinhos com a cor i . Ora, isso implica que a classe de cor i tem pelo menos $k+1$ vértices, uma contradição. \square

O Lema 4.2 apresenta um limite superior trivial para o número de Grundy k -impróprio e conseqüentemente para o número cromático k -impróprio de um grafo G . Esse limite é justo para grafos completos. Observe que quando uma coloração gulosa k -imprópria usar esses números de cores, ela é necessariamente ótima.

Proposição 4.3. *Se $\Gamma^k(G) = \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$, então existem pelo menos $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil - 1$ vértices de grau pelo menos $k+1$.*

Demonstração. Suponha que, por absurdo, existam no máximo $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil - 2$ vértices de grau pelo menos $k+1$. Logo há pelo menos duas classes de cores, i e j , com $i < j$, sem nenhum vértice de grau pelo menos $k+1$. Considere u colorido com j . Como u não pode receber a cor i , então ou u tem $k+1$ vizinhos de cor i , um absurdo, ou u é vizinho de um vértice v com cor i tal que v já possui k vizinhos da cor i , um absurdo, pois junto com u , v teria pelo menos $k+1$ vizinhos. \square

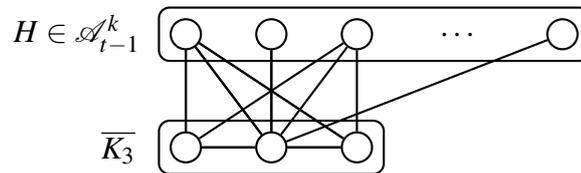
Considere uma coloração k -imprópria gulosa de um grafo $G = (V, E)$ e seja $C \subset V(G)$ uma classe de cor. Se C possui um subconjunto dominante $C' \subseteq C$, ou seja, cada vértice de $V(G) \setminus C'$ possui um vizinho em C' , e cada vértice de C' tem impropriedade k , então dizemos que C é um conjunto *rígido*. Ao longo do texto, muitas vezes nos referiremos ao fato de C ser um conjunto rígido para as cores superiores à cor de C na coloração gulosa k -imprópria. Em outras palavras, a existência de C proíbe a cor de C para quaisquer vértices que seguem C na ordem de aplicação do algoritmo guloso.

4.2 t -átomos k -impróprios

Nesta seção, nós generalizamos os resultados sobre t -átomos apresentados em (ZAKER, 2006). Para um inteiro k fixo, considere a família \mathcal{A}_t^k , $t = 1, 2, 3, \dots$, cujos elementos são t -átomos k -impróprios. As famílias \mathcal{A}_t^k são definidas recursivamente da seguinte forma:

- $\mathcal{A}_1^k = \{K_1\}$
- Um elemento $G \in \mathcal{A}_t^k$ é obtido a partir de um elemento $H \in \mathcal{A}_{t-1}^k$ da seguinte forma: Se $|V(H)| < k + 1$ faça $m = k + 1$, senão faça $m = l$, $k + 1 \leq l \leq |H|(k + 1)$ e considere o grafo $\overline{K_m} \cup H$ que deverá ser conexo ao final do processo a seguir.
 1. $\forall v_i \in H$, escolher $F_i \subseteq \overline{K_m}$ com $|F_i| = k + 1$;
 2. acrescentar arestas no subgrafo induzido por $\{v_i\} \cup F_i$ satisfazendo as duas condições:
 - a) $\forall x_i \in F_i$, $d_{F_i}(x_i) \leq k$;
 - b) o grafo induzido por $\{v_i\} \cup F_i$ é conexo, tem pelo menos $k + 1$ arestas e caso v_i não seja vizinho de todo $x_j \in F_i$, então $\exists x_j \in F_i$, vizinho de v_i com $d_{F_i}(x_j) = k$.

Figura 4 – Exemplo de construção de um t -átomo 2-impróprio onde m é fixado em 3.



A Figura 4 apresenta um exemplo de construção de um t -átomo k -impróprio onde $k = 2$. Veja que o conjunto F_i é o mesmo para cada $v_i \in H$ uma vez que $m = k + 1$. Além disso, todos os vértices de H obedecem as regras estabelecidas para a construção de um t -átomo k -impróprio.

Observe que o número guloso k -impróprio do grafo $\overline{K_m} \cup H$ é superior ao de H em pelo menos uma unidade uma vez que o estável $\overline{K_m}$ pode ser colorido com uma cor e essa é proibida de ser usada em H . Portanto, pela construção de um t -átomo k -impróprio, o número guloso k -impróprio de um t -átomo k -impróprio é pelo menos t .

Teorema 4.4. *Dado um grafo G , $\Gamma^k(G) \geq t$ se, e somente se, G contém um t -átomo k -impróprio.*

Demonstração. Seja H um t -átomo k -impróprio de G . Pela construção de um t -átomo k -impróprio, pode-se checar facilmente que H pode ser colorido k -impropriamente com t cores. Logo, $\Gamma^k(G) \geq t$, pois H é subgrafo de G . Agora considere um grafo G com $\Gamma^k(G) \geq t$. Vamos

provar por indução em t que G contém um t -átomo k -impróprio. Sejam C_1, C_2, \dots, C_t as classes de cores da coloração k -imprópria gulosa de G com t cores. Uma classe de cor C_i , $1 \leq i \leq t$, consiste dos vértices coloridos com a cor i . Se considerarmos $H = G \setminus C_1$, então obviamente $\Gamma^k(H) \geq t - 1$. Concluimos, por hipótese de indução, que H contém um $(t - 1)$ -átomo k -impróprio F . Pela definição de t -átomos k -impróprios, todo vértice em F colorido com uma cor c , $c > 1$, tem pelo menos $k + 1$ vizinhos em C_1 ou é vizinho de um vértice de C_1 que tem pelo menos k outros vizinhos em C_1 . Logo, é possível obter um t -átomo através da exclusão de vértices em C_1 ou arestas entre F e C_1 , se necessário, em G . \square

A seguir, investigamos a ordem de um t -átomo k -impróprio e mostramos que determinar se $\Gamma^k(G) \geq t$ pode ser resolvido em tempo polinomial.

Teorema 4.5. *Um t -átomo k -impróprio tem no máximo $(k + 2)^{t-1}$ vértices.*

Demonstração. Dados t e k inteiros, a ordem de um elemento da família \mathcal{A}_t^k é maximizada se, a cada passo de sua construção, o tamanho do estável $\overline{K_m}$ é maximizado. Seja H um elemento de uma família \mathcal{A}_i^k , $i \in \{1, \dots, t\}$. Dessa forma, para cada vértice de H , $k + 1$ vértices são adicionados a cada iteração i . Seja $f(t, k)$ uma função que retorna a ordem do maior t -átomo k -impróprio construído como descrito. Veja que podemos expressar $f(t, k)$ como a função de recorrência $f(t, k) = f(t - 1, k) + f(t - 1, k)(k + 1)$. As manipulações algébricas a seguir nos levam ao resultado como reclamado.

$$\begin{aligned} f(t, k) &= f(t - 1, k) + f(t - 1, k)(k + 1) \\ &= f(t - 1, k)(1 + (k + 1)) \\ &= f(t - 1, k)(k + 2) \\ &= (k + 2)^{t-1} \end{aligned}$$

\square

O número de t -átomos k -impróprios de uma família \mathcal{A}_t^k é da ordem de $2^{(k+2)^{(t-1)}}$, ou seja é finito a depender de t e k .

Corolário 4.6. *Para qualquer grafo G e um inteiro t fixo, determinar se $\Gamma^k(G) \geq t$ pode ser resolvido em tempo polinomial.*

Demonstração. Para determinar se existe uma coloração de Grundy k -imprópria com t cores, procuramos diretamente por um t -átomo k -impróprio em G . É possível determinar em tempo

$O(n^p)$ se um grafo fixo com p vértices é um subgrafo de um grafo de ordem n . Pelo Teorema 4.5, um t -átomo k -impróprio é da ordem de $(k+2)^{t-1}$. Portanto, para pesquisar um t -átomo em G são necessários $O(n^{(k+2)^{t-1}})$ passos. \square

4.3 Árvores binomiais

Nesta seção, determinaremos o número de Grundy 1-impróprio para árvores binomiais. Dada uma árvore binomial B_n , é sabido que $\Gamma(B_n) = n + 1$ como foi mostrado em (HEDETNIEMI *et al.*, 1982). Uma ordem de coloração de coloração dos vértices será chamada de *binomial* se a ordem dos vértices de B_n é obtida da seguinte forma: inclui-se todos os vértices da subárvore B_0 , em seguida de B_1 , e assim sucessivamente, até B_{n-1} , sendo finalizada com a raiz de B_n , com os os vértices de cada subárvore B_i sendo apresentados também em ordem binomial.

Teorema 4.7. *Dada uma árvore binomial B_n , $\Gamma^1(B_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ para $n \geq 0$, e existe uma coloração 1-imprópria gulosa de B_n que atribui a cor $\Gamma^1(B_n)$ à raiz de B_n .*

Demonstração. A prova se dá por indução em n .

- *Caso base:* Para $n \in \{0, 1, 2\}$, é fácil de ver que $\Gamma^1(B_0) = 1$, $\Gamma^1(B_1) = 1$ e $\Gamma^1(B_2) = 2$, e que uma coloração 1-imprópria ótima atribui a maior cor à raiz de B_i , $i = 0, 1, 2$. Observe que essas colorações podem ser obtidas usando a ordem binomial de B_i .
- *Hipótese de indução:* Assuma que $\Gamma^1(B_k) = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$ vale para $k < n$, e que existe uma coloração 1-imprópria ótima atribuindo a maior cor à raiz de B_k .
- *Passo da indução:*

Note que $r(B_n)$, a raiz de B_n , é vizinha de n outras raízes de árvores binomiais isomorfas a B_0, B_1, \dots, B_{n-1} . Considere agora uma ordem binomial dos vértices de B_n e assuma, por hipótese de indução, que as subárvores B_0, B_1, \dots, B_{n-1} estão otimamente coloridas, com $\left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil$ cores, $i = 1, \dots, n-1$, e com a maior cor ocorrendo em suas respectivas raízes. Analisaremos dois casos.

Caso 1: n é par

Isso significa que $r(B_0), r(B_1), \dots, r(B_{n-1})$ receberam as cores $1, 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Nesse caso, $r(B_{n-1})$ e $r(B_{n-2})$ terão sido coloridos com uma mesma cor. Logo, $r(B_n)$ pode ser colorido gulosamente com a cor $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$, como queríamos provar.

Caso 2: n é ímpar

Novamente, $r(B_0), r(B_1), \dots, r(B_{n-1})$ receberam as cores $1, 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Nesse caso, $r(B_{n-1})$ e $r(B_{n-2})$ terão cores distintas e a cor de $r(B_{n-1})$ ocorre uma única vez na vizinhança de $r(B_n)$. Temos que provar que essa cor pode ser atribuída a $r(B_n)$. Para tanto, temos que provar que $r(B_{n-1})$ não está saturado. Ocorre que a subárvore enraizada em $r(B_{n-1})$ possui também, pela definição recursiva de árvores binomiais, um vizinho já colorido que é a raiz de uma subárvore isomorfa a B_{n-2} , sendo este o vértice que possui a maior cor em sua vizinhança. Como a cor de $r(B_{n-2})$ é distinta da cor de $r(B_{n-1})$, $r(B_{n-1})$ não está saturado para a cor $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ que é igual a $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$.

Esses dois casos completam a prova do Teorema. □

4.4 Grafos livres de P_4

Lembramos ao leitor ou leitora que um grafo sem P_4 induzido é dito livre de P_4 ou cografo. Christen e Selkow (1979) determinaram o número de Grundy de um cografo G , obtido a partir da união completa ou disjunta de grafos G_1 e G_2 , em função dos números de Grundy de G_1 e G_2 , como segue:

- $\Gamma(G) = \max\{\Gamma(G_1), \Gamma(G_2)\}$, se $G = G_1 \cup G_2$;
- $\Gamma(G) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)$, se $G = G_1 + G_2$.

Quando não especificado de outra maneira, considere r e s as ordens de G_1 e G_2 , respectivamente, onde $r \leq s$.

O Teorema que segue trata do número de Grundy k -impróprio de cografos desconexos.

Teorema 4.8. *Seja $G = G_1 \cup G_2$. Então $\Gamma^k(G) = \max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\}$.*

Demonstração. Provaremos que $\Gamma^k(G) \geq \max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\}$ e $\Gamma^k(G) \leq \max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\}$ e o resultado segue.

1. $\Gamma^k(G) \leq \max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\}$

Dada uma coloração de Grundy k -imprópria de G com $\Gamma^k(G)$ cores, a necessidade de uma cor $\max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\} + 1$ só seria justificada se novas arestas fossem adicionadas em G_1 ou em G_2 ou entre G_1 e G_2 . Uma vez que a união disjunta não cria novas arestas, então $\Gamma^k(G)$ não pode ser maior que $\max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\}$.

2. $\Gamma^k(G) \geq \max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\}$

Como a união das colorações gulosas de G_1 e G_2 com $\Gamma^k(G_1)$ e $\Gamma^k(G_2)$ cores, respectivamente, é uma coloração gulosa k -imprópria de G com $\max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\}$ cores, o limite inferior está provado.

Sejam θ_1 e θ_2 ordens do algoritmo guloso que usam, respectivamente, $\Gamma^k(G_1)$ cores em G_1 e $\Gamma^k(G_2)$ cores em G_2 . Observe que G_1 e G_2 não compartilham vértices e nem arestas em G . Não existe uma ordem que usa mais que $\max\{\Gamma^k(G_1), \Gamma^k(G_2)\}$, então usar as ordens θ_1 e θ_2 para colorir G_1 e G_2 produz uma coloração com $\Gamma^k(G)$ cores. \square

Considerando a união completa de cografos, os estudos empreendidos permitiram formular a conjectura que segue. Para enunciá-la considere a seguinte definição. Sejam G_1 e G_2 cografos, e $G = G_1 + G_2$. Seja R um subgrafo de G tal que $G \setminus R$ possui o maior número possível de K_{k+1} 's que interceptam G_1 e G_2 (ao mesmo tempo). Entre todas as escolhas possíveis para $G - R$, considere aquela em que R maximiza $\Gamma^k(R)$.

Conjectura 4.9. *Sejam G_1 e G_2 cografos, $G = G_1 + G_2$, $G \setminus R$ e R tais como descritos acima. Então $\Gamma^k(G) = \Gamma^k(G \setminus R) + \Gamma^k(R)$.*

Observe que cada clique K_{k+1} que intercepta G_1 e G_2 forma um conjunto rígido em uma coloração k -imprópria gulosa de G , o que proibirá a sua cor para qualquer outro vértice de G . Dessa forma, cada K_{k+1} é potencialmente colorido com uma classe cor. Por outro lado, $k + 1$ vértices é a menor cardinalidade possível para qualquer conjunto rígido de G . Portanto, a intuição na formulação da conjectura advém do entendimento de que o maior número de cores pode ser obtido através da construção de um número máximo de conjuntos rígidos, cada qual de menor cardinalidade possível, a fim de deixar o maior número possível de vértices descoloridos, e, em seguida, colorir de forma ótima o grafo restante.

Na formulação da conjectura, a compreensão da apresentação dos conjuntos rígidos é também importante.

Lema 4.10. *Seja $G = G_1 + G_2$, onde G_1 e G_2 são cografos quaisquer. Seja L um conjunto rígido em uma coloração k -imprópria de G . Se L é formado pela união completa de uma clique K e um conjunto estável S , com $|S| > 1$, então $|L| = k + 1$ e K é um conjunto dominante.*

Demonstração. Suponha que L seja colorido com a cor i . Observe que cada vértice u de K possui impropriedade k , logo $N(u)_L = K \setminus \{u\} \cup S$ possui cardinalidade k . Portanto $|L| = k + 1$. Como a impropriedade de cada vértice em S é $|K| < k$, para que cor i esteja impedida em $G \setminus L$,

é preciso que qualquer outro vértice de G colorido com i viole a impropriedade de um vértice de K . Logo K é um conjunto dominante. \square

Na seção 4.4.5, provamos a Conjectura 4.9 para quaisquer cografos nos casos $k = 1$ e $k = 2$. As subseções que seguem tratam de uniões completas de subclasses de cografos. Alguns dos resultados lá contidos serão usados nas provas parciais da conjectura para os casos citados.

Lema 4.11. *Seja $G = G_1 + G_2$, onde G_1 e G_2 são cografos quaisquer. Para $k = 1$, todo conjunto rígido L que intercepta G_1 e G_2 é isomorfo ao K_2 .*

Demonstração. Seja L um conjunto rígido qualquer de C , uma coloração gulosa 1-imprópria ótima de G . Se L intercepta G_1 e G_2 , L contém um K_2 . Observe que uma cor qualquer i atribuída a esse K_2 não pode ser usada em qualquer outro vértice de G_1 ou G_2 , pois os vértices da clique tem ambos impropriedade 1 e cada outro vértice de G é adjacente a pelo menos um deles. Logo, L é isomorfo ao K_2 e isso encerra a prova. \square

Lema 4.12. *Seja $G = G_1 + G_2$, onde G_1 e G_2 são cografos quaisquer. Para $k = 2$, todo conjunto rígido L que intercepta G_1 e G_2 é isomorfo ao K_3 ou ao $K_{2,2}$ ou ao P_3 , onde o vértice de grau 2 do P_3 é universal.*

Demonstração. Seja L um conjunto rígido qualquer de C , uma coloração gulosa 2-imprópria ótima de G que intercepta G_1 e G_2 . Suponha que L contém uma aresta de G_1 ou G_2 . Logo, L contém um K_3 que intercepta G_1 e G_2 . Novamente, observe que uma cor qualquer i atribuída a esse K_3 não pode ser usada em qualquer outro vértice de G_1 ou G_2 , pois os três vértices da clique tem impropriedade 2 e cada outro vértice de G é adjacente a pelo menos um deles. Logo, L é isomorfo ao K_3 . Suponha agora que L não contém qualquer aresta em G_1 ou G_2 . Portanto L é bipartido, com uma partição em G_1 e uma outra partição em G_2 . Seja u um vértice de L com impropriedade 2. Como L não contém arestas de uma mesma partição, u tem 2 vizinhos v, w não adjacentes na outra partição que também pertence a L . Se u for universal, L é isomorfo ao P_3 . Se u não for universal, então um de v ou w , ou ambos tem impropriedade k e portanto um outro vizinho z , além de u , em L . Logo, como L não possui arestas em G_1 ou G_2 , esse conjunto u, v, w, z induz um $K_{2,2}$, com u e z em G_1 e v e w em G_2 , ou vice-versa. Como qualquer outro vértice G é adjacente a um dos vértices desse $K_{2,2}$, L é isomorfo ao $K_{2,2}$ e isso encerra a prova. \square

4.4.1 União completa de grafos completos e vazios

Nesta seção, abordamos classes de cografos conexos extremais com respeito ao número de arestas e usaremos esses resultados para provar a Conjectura 4.9 para o caso $k = 1$.

Teorema 4.13. *Sejam G_1 e G_2 grafos completos e $G = G_1 + G_2$ com $|V(G)| = n$. Então $\Gamma^k(G) = \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$.*

Demonstração. O grafo G é um grafo completo da ordem de $|G_1| + |G_2|$. Neste caso, todos os vértices estão conectados e independente da ordem escolhida o limite superior $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$ é alcançado. Isso porque cada classe de cor, exceto a maior cor, será um conjunto rígido com exatamente $k + 1$ vértices. \square

Lema 4.14. *Sejam G_1 e G_2 grafos vazios, $G = G_1 + G_2$ e $r = s$. Então, para $k \geq 1$, $\Gamma^k(G) = \left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil$.*

Demonstração. Observe que, quando G_1 e G_2 são vazios, o resultado da união completa é um grafo bipartido completo. Um vértice v qualquer pode estar proibido de receber uma cor i em duas situações. Caso tenha mais que k vizinhos coloridos com a cor i (e isso implica ter mais que k vértices coloridos com a cor i na partição oposta) ou tenha em sua vizinhança um vértice saturado colorido com a cor i (e isso implica ter k vértices coloridos com a cor i em sua própria partição). Uma ordem que alterna k vértices de uma partição com k vértices da outra partição satura sucessivamente $2k$ vértices do grafo com cada cor i utilizada. Isso impede que a cor i seja usada no restante do grafo. Logo essa ordem utiliza $\left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil$ cores para colorir G , e pelos argumentos apresentados esse número é máximo. \square

Teorema 4.15. *Sejam G_1 e G_2 grafos vazios, $G = G_1 + G_2$, $r < s$, e $t = \left\lceil \frac{r}{k} \right\rceil$. Então, para $k \geq 1$, $\Gamma^k(G) = t + \delta$ onde*

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{se } s > kt, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Seja $H \subseteq G$, com r vértices em cada partição. Pelo Lema 4.14, $\Gamma^k(H) = \left\lceil \frac{2r}{2k} \right\rceil = \left\lceil \frac{r}{k} \right\rceil = t$. Considere então uma coloração k -imprópria ótima de H com t cores. Observe que todos os vértices de G_1 estão coloridos. Se $s \leq kt$, como não há $k + 1$ vizinhos de qualquer vértice não colorido de G_2 com a cor t , todos os vértices de G_2 não coloridos podem receber a cor t , e isso encerra o primeiro caso. Caso $s > kt$, observe que todos os vértices de G_1 estão saturados com as

cores 1 a t . Além disso, todos os vértices de G_2 que receberam as cores 1 a $t - 1$ estão saturados. Os $s - kt$ vértices não coloridos de G_2 não podem assumir cor menor ou igual a t , pois isso viola a propriedade de vértices de G_1 . Ao mesmo tempo, é possível atribuir a cor $t + 1$ a todos eles. Como a cor $t + 1$ não ocorre em G_1 e G_2 é vazio, ela pode ser usada em todos os vértices ainda não coloridos de G_2 . Isso encerra a prova. \square

Observe que os dois valores obtidos nos teoremas precedentes, embora façam uso de notação distinta, diferem em, no máximo, uma unidade.

Usamos o fato de que o parâmetro Γ^k é monotônico com respeito a subgrafos, ou seja, $\Gamma^k(H) \leq \Gamma^k(G)$ para todo $H \subseteq G$, para extrair resultados para a união completa de quaisquer cografos, considerando o caso $k = 1$.

Teorema 4.16. *Sejam G_1 e G_2 cografos, com $r = s$, e $G = G_1 + G_2$. Então, $\Gamma^1(G) = r = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.*

Demonstração. Observe que o grafo $G = G_1 + G_2$ com $r = s$, possui como subgrafo gerador o cografo obtido pela união completa de dois grafos vazios com o mesmo número de vértices. Logo, como a inclusão de arestas só pode incrementar o número de Grundy 1-impróprio, temos que pelo Lema 4.14, $\Gamma^1(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Porém, pelo Lema 4.2, esse valor é exatamente o limite superior de qualquer grafo quando $k = 1$. Portanto, o teorema está provado. \square

A seguir apresentamos um limite inferior de $\Gamma^1(G)$ para grafos G obtidos a partir da união completa entre dois cografos com números de vértices distintos.

Teorema 4.17. *Sejam G_1 e G_2 cografos, com $r < s$, e $G = G_1 + G_2$. Então, $\Gamma^1(G) \geq r + 1$.*

Demonstração. Novamente, observe que o grafo $G = G_1 + G_2$ possui como subgrafo gerador o cografo obtido pela união completa de dois grafos vazios, cada um com o mesmo número de vértices de G_1 e G_2 , respectivamente. Então, como o acréscimo de arestas apenas pode incrementar o número de Grundy 1-impróprio de G , pelo Teorema 4.15, o número de Grundy 1-impróprio de G é pelo menos $r + 1$. \square

Usando o Teorema 4.16 obtemos o teorema a seguir, que consiste na prova da Conjectura 4.9 para $k = 1$.

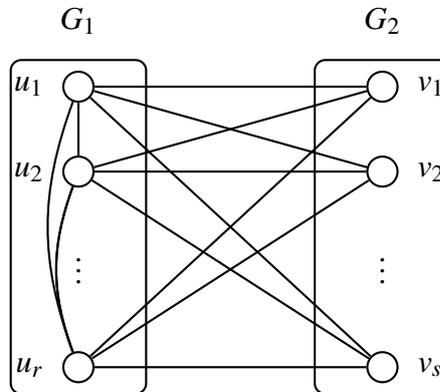
Teorema 4.18. *Sejam G_1 e G_2 cografos quaisquer, com $r \leq s$ e $G = G_1 + G_2$. Seja $R \subseteq G_2$ tal que $|V(R)| = s - r$ e $\Gamma^1(R)$ é máximo. Então, $\Gamma^1(G) = r + \Gamma^1(R)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.16, é possível colorir qualquer subgrafo induzido de G tomando r vértices de G_1 e r vértices de G_2 de maneira ótima com r cores. Como cada vértice de G_1 recebe uma cor distinta, essa coloração não pode ser melhorada a não ser maximizando a coloração dos $s - r$ vértices restantes de G_2 , que é representada pelo termo $\Gamma^1(R)$. \square

4.4.2 União completa de um grafo completo e um grafo vazio

Seja $G = G_1 + G_2$, onde G_1 é um grafo completo de ordem r e G_2 é um grafo vazio de ordem s .

Figura 5 – União completa de um grafo completo e um estável.



A Figura 5 mostra como se dá a união completa de G_1 e G_2 . Nesta subseção, não há hipótese sobre a relação de grandeza entre r e s .

Teorema 4.19. *Sejam G_1 um grafo completo e G_2 um grafo vazio e $G = G_1 + G_2$. Então $\Gamma^k(G) = \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$, se $s \leq rk$ ou $\Gamma^k(G) = r + 1$, caso contrário.*

Demonstração. Considere o Lema 4.10. Para quaisquer tamanhos de cliques contidos em G_1 e conjuntos estáveis contidos em G_2 , de forma que a soma de suas cardinalidades seja $k + 1$, forme conjuntos rígidos descritos no Lema 4.10. Seja H um subgrafo de G formado pelo maior número possível desses conjuntos rígidos. Se $G \setminus H$ não possui vértices de G_2 , então considere o grafo H' , como descrito a seguir. Se não há em $G \setminus H$ cliques de tamanho $k + 1$, faça $H' = H$. Caso contrário, forme H' pela união de H com o maior número possível de cliques de tamanho $k + 1$ de $G \setminus H$. Considere agora o grafo $G \setminus H'$. Se esse grafo não é vazio, ele é um grafo completo com menos de $k + 1$ vértices e uma cor é suficiente para colorir os vértices ainda não coloridos. A coloração produzida usa $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$. Se esse grafo é vazio, a coloração de G está completa com exatamente $\frac{n}{k+1}$ cores. Em ambos os casos, o teorema está provado.

Se $G \setminus H$ não possui vértices de G_1 , o fato de que H é máximo implica que, ou $s > kr$ e cada vértice de G_1 recebeu uma cor distinta; ou $s \leq kr$ e $G \setminus H$ tem no máximo k vértices. No primeiro caso, $r + 1$ cores colorem G e no segundo caso, $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$ cores colorem G , visto que em ambos os casos uma cor é suficiente para colorir os vértices ainda não coloridos de $G \setminus H$.

Agora suponha que $G \setminus H$ possui vértices de G_1 e G_2 . Como não é possível formar conjuntos rígidos como aqueles descritos no Lema 4.10, pois H é máximo, $G \setminus H$ possui no máximo k vértices. Portanto, uma cor é suficiente para colorir os vértices ainda não coloridos de G . A coloração produzida usa $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$ e isso encerra a prova do teorema. \square

4.4.3 União completa entre um grafo obtido pela união de cliques disjuntas e um grafo vazio

O Teorema abaixo é exatamente a prova da Conjectura 4.9 para a classe de grafo no enunciado. Para perceber isso, basta ver que as s cliques formam conjuntos rígidos que interceptam G_1 e G_2 e que o grafo $R \subset G_1$ é um grafo de cliques de tamanho máximo k , pela definição de G_2 , e portanto pode ser colorido com uma única cor.

Teorema 4.20. *Seja $G = G_1 + G_2$, onde $G_1 = \{K_d^1 \cup K_d^2 \cup \dots \cup K_d^p\}$ e G_2 é um grafo vazio. Se $p \geq s$ e $d = k$, então $\Gamma^k(G) = s + \delta$ onde*

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{se } p > s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Observe que existe $H \subseteq G$ consistindo de s cliques de ordem $k + 1$ formadas por uma clique de tamanho k em G_1 e um vértice em G_2 . Essas cliques requerem cores distintas, uma vez que se uma cor i for usada para colorir uma clique de ordem $k + 1$, ela fica proibida de ser usada no restante do grafo. Caso $p = s$, essa coloração k -imprópria usa s cores e o limite superior é alcançado, uma vez que $n = sk + s$ e $\Gamma^k(G) = \left\lceil \frac{s+sk}{k+1} \right\rceil = s$.

Caso $p > s$, observe que os vértices em $V(G) \setminus V(H)$ podem ser coloridos com uma cor adicional. Recorde que para que uma cor $i < \Gamma^k(G)$ seja usada e proibida no restante do grafo G , deve existir pelo menos um vértice em cada partição com a cor i . Quando isso não acontece, todos os vértices de G_1 ou de G_2 podem ser coloridos com a cor i . Então no máximo s cores podem ser saturadas em G e, logo, $\Gamma^k(G) = s + 1$. \square

Teorema 4.21. *Seja $G = G_1 + G_2$, onde $G_1 = \{K_d^1 \cup K_d^2 \cup \dots \cup K_d^p\}$ e G_2 é um grafo vazio. Se $p < s$ e $d = k$, então $\Gamma^k(G) = p + 1$.*

Demonstração. Observe que existe $H \subseteq G$ consistindo de p cliques de ordem $k + 1$ formadas por uma clique de tamanho k em G_1 e um vértice em G_2 . Observe que cada clique de H requer uma cor e que os vértices em $V(H) \cap V(G_1)$ estão todos saturados e, portanto, uma cor adicional é suficiente para colorir o restante dos vértices não coloridos em $V(H) \cap V(G_2)$. \square

De forma análoga ao teorema que lhe precede, o Teorema acima é exatamente a prova da Conjectura 4.9 para a classe de grafo no enunciado. Para perceber isso, basta ver que as p cliques formam conjuntos rígidos que interceptam G_1 e G_2 e que o grafo $R \subset G_2$ é um grafo vazio, pois G_2 é um grafo vazio, e portanto pode ser colorido com uma única cor.

4.4.4 União completa de grafos de obtidos pela união de cliques disjuntas

Sejam G_1 e G_2 grafos formados pela união disjunta de p e q cliques, respectivamente, todas de mesma ordem. Logo, escreveremos $G_1 = \{K^1 \cup K^2 \cup \dots \cup K^p\}$ e $G_2 = \{K^1 \cup K^2 \cup \dots \cup K^q\}$. Seja $G = G_1 + G_2$.

Vamos analisar o comportamento do número de Grundy k -impróprio no caso onde todas as cliques são isomorfas ao K_2 , para diferentes valores de k . Para $k = 1$ e $r = s$, note que o Teorema 4.16 é válido. De forma análoga, o Teorema 4.18 aplica-se ao caso $r < s$. Entretanto, no teorema abaixo, determina-se o valor exato do parâmetro.

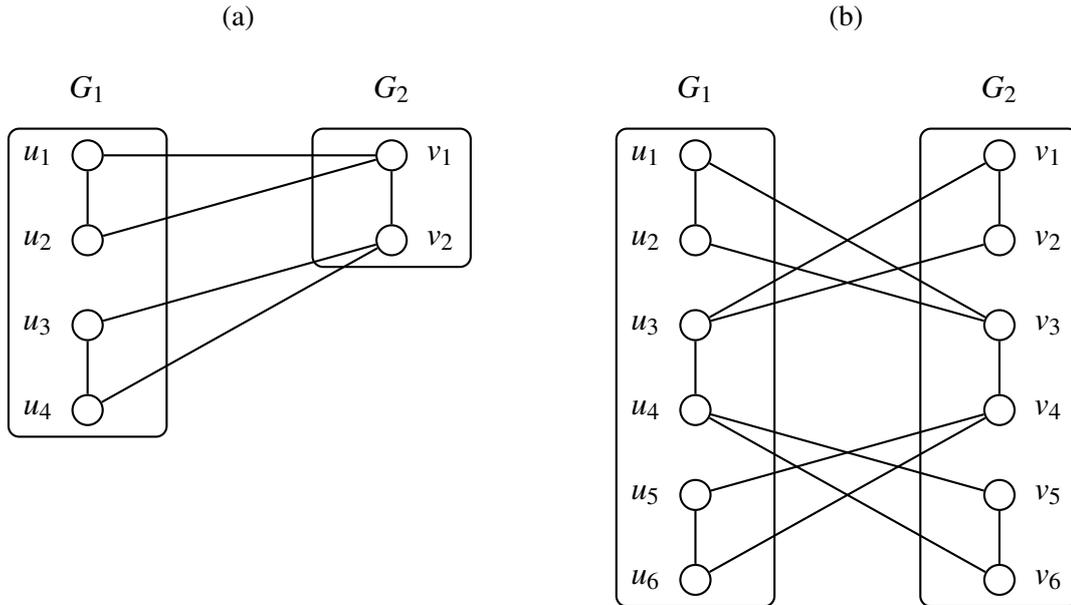
Teorema 4.22. *Seja $G = G_1 + G_2$ um cografo onde $G_1 = \{K_2^1 \cup K_2^2 \cup \dots \cup K_2^p\}$, $G_2 = \{K_2^1 \cup K_2^2 \cup \dots \cup K_2^q\}$, com $p < q$. Então $\Gamma^1(G) = r + 1$.*

Demonstração. Começamos por observar que cada cor i utilizada em um vértice de G_1 e um vértice de G_2 torna-se proibida para todos os outros vértices. Dessa forma, para um vértice v qualquer em $V(G_2)$, é possível proibir no máximo r cores. Seja o subgrafo H de G induzido por r vértices de G_1 e r vértices de G_2 . Note que, pelo Teorema 4.16, $\Gamma^k(H) = r$. Veja que r cores ficam proibidas de ser usadas nos vértices não coloridos em G_2 e, portanto, todos podem ser coloridos com a cor $r + 1$ uma vez que não é possível saturar a cor $r + 1$ nesse conjunto de vértices. Isso encerra a prova do Teorema. \square

No restante dessa seção, examinamos o número 2-impróprio de Grundy nos grafos $G = G_1 + G_2$ onde $G_1 = \{K_2^1 \cup K_2^2 \cup \dots \cup K_2^p\}$, $G_2 = \{K_2^1 \cup K_2^2 \cup \dots \cup K_2^q\}$. Vamos considerar diferentes valores de r e s , de maneira que a coloração proposta sature todos os vértices de G . Observe primeiro que é possível saturar um conjunto de vértices, se esse conjunto tiver

pelo menos três vértices, com interseção não vazia com $V(G_1)$ e com $V(G_2)$. Diremos que um conjunto com essas características é um **conjunto útil**. Além disso, observe também que como $|V(G_1)|$ e $|V(G_2)|$ são múltiplos de dois, então só podemos encontrar conjuntos onde todos os vértices estão saturados quando $|V(G)|$ for um múltiplo de dois e de três, ou seja, $|V(G)|$ deve ser múltiplo de 6. Essas duas observações serão levadas em conta no que se segue.

Figura 6 – Cliques presentes na união completa de dois grafos formados por união de K_2 .



Teorema 4.23. *Seja $G = G_1 + G_2$, onde $G_1 = \{K_2^1 \cup K_2^2 \cup \dots \cup K_2^p\}$, $G_2 = \{K_2^1 \cup K_2^2 \cup \dots \cup K_2^q\}$.*

Para $k = 2$ tem-se

$$\Gamma^k(G) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{r+s}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{r+s \bmod 6}{3} \right\rceil, & \text{se } q \leq 2p, \\ r+1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Considere um conjunto de vértices com duas cliques de G_i e uma clique de $G_{(i+1) \bmod 2}$, com $i \in \{1, 2\}$. Pelas observações feitas previamente, esse conjunto contém exatamente dois conjuntos úteis (ver o exemplo na Figura 6a). Caso $q \leq 2p$, considere H um subgrafo de G induzido por conjuntos de vértices de cardinalidade seis tais como descritos acima, construído de forma a minimizar a diferença entre $V(H) \cap V(G_1)$ e $V(H) \cap V(G_2)$ (a Figura 6b exemplifica tal escolha). É possível colorir H com $\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor 2$ cores. Observe que todos os vértices já estão saturados de forma que não há possibilidade de adicionar uma cor em H sem liberar uma das cores já utilizadas para uso nos vértices ainda não coloridos. Além disso, observe que a cardinalidade de $V(G) \setminus V(H)$ pode ser dois ou quatro. Se $|V(G) \setminus V(H)| = 2$, então uma cor adicional é suficiente para colorir esses vértices. Para $|V(G) \setminus V(H)| = 4$, temos que $p = q$ e,

portanto, ainda há um conjunto útil não colorido. Logo, duas cores adicionais são necessárias e suficientes para colorir o resto do grafo. Nos dois casos, essa última cor não está saturada. Esse número está refletido no termo $\left\lceil \frac{n \bmod 6}{3} \right\rceil$.

Caso $q > 2p$, note que, usando a coloração descrita anteriormente, é possível construir r conjuntos úteis disjuntos contendo precisamente um vértice de G_1 e uma clique de G_2 . Isso nos permite usar r cores e isso é o melhor possível para qualquer coloração 2-imprópria gulosa restrita a G_1 , tendo em vista que todos os vértices de G_1 estão saturados, e possuem cores distintas. Para os $s - 2r$ vértices ainda não coloridos de G_2 , uma nova cor é suficiente e necessária. Essa coloração é ótima visto que o número de cores é igual ao número máximo de conjuntos úteis em G mais um. \square

4.4.5 União completa de cografos quaisquer

Nesta seção estudamos o número guloso 2-impróprio de um cografo qualquer obtido a partir da união completa de dois cografos. Diremos que um conjunto rígido L é um conjunto saturado e que a sua cor é uma cor saturada. Ademais, cada vértice de L que tem impropriedade k será chamado de vértice saturado. Como L é um conjunto dominante (não necessariamente minimal), observe que se L for colorido com i , a cor i não pode ser usada para colorir qualquer outro vértice de $V(G) \setminus L$. Considere agora a seguinte definição:

Definição 4.24. *Dado um grafo $G = G_1 + G_2$, onde G_1 e G_2 são cografos quaisquer, defina R como sendo um subgrafo de G tal que $G \setminus R$ é o maior subgrafo de G que pode ser fatorado com K_3 's que interceptam G_1 e G_2 , e $\Gamma^2(R)$ é máximo.*

Observe que pela definição acima, R não possui K_3 's que interceptam G_1 e G_2 . Como R é um cografo, R é bipartido ou R está contido inteiramente em G_1 ou G_2 .

Nesta seção, provaremos a Conjectura 4.9 para $k = 2$. Ou seja, mostraremos que $\Gamma^2(G) = \Gamma^2(G \setminus R) + \Gamma^2(R)$. A ideia da prova é que a coloração ótima pode ser obtida colorindo inicialmente todos os K_3 's, que interceptam as partições G_1 e G_2 , cada um com uma cor distinta, e, em seguida, o restante do grafo de forma ótima. Para facilitar a compreensão da prova, introduziremos uma notação. Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria. Dizemos que um K_3 que intercepta G_1 e G_2 é **bom** se ele é monocromático e um K_3 que intercepta as duas partições e não é monocromático é dito **defeituoso**.

Pelo Lema 4.12, em um cografo, para $k = 2$, qualquer conjunto rígido possui no

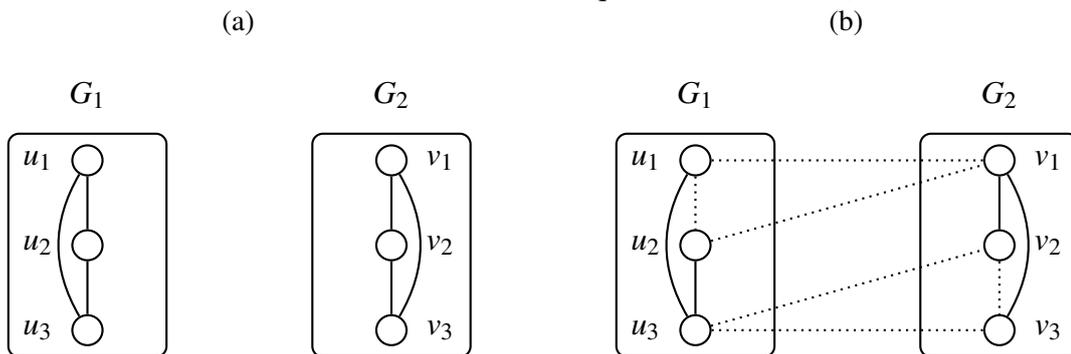
mínimo três vértices e no máximo quatro vértices, onde as cores saturadas por três vértices induzem um K_3 ou um P_3 e as saturadas por quatro vértices induzem um $K_{2,2}$. Como um conjunto rígido que contém um P_3 , também possui um vértice universal, isso implica a existência de vértices em G_1 e G_2 produz necessariamente K_3 's bons ou defeituosos. Essa observação nos permite basear a prova na existência desses tipos de K_3 's.

Lema 4.25. *Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria ótima com m cores e l K_3 's bons. Então existe uma coloração C' gulosa 2-imprópria ótima onde as l primeiras classes de cores são formadas por K_3 's bons.*

Demonstração. Se todas as classes de cores são K_3 bons, então a coloração C' é a própria coloração C . Dada a coloração C , seja $L = \{L_1, \dots, L_l\}$ um conjunto em que cada elemento é uma classe de cor que induz um K_3 bom. Para cada $i = 1, \dots, l$, faça a classe de cor i de C ser colorida com a cor de L_i . Em seguida, considere, na ordem de C , uma a uma, as classes de cores de C que não estão em L e complete a coloração C' , usando as cores $l + 1, \dots, m$, nessa ordem. \square

Doravante, considere uma coloração gulosa 2-imprópria C onde todos os K_3 's bons recebem as menores cores. Pelo lema anterior, essa coloração existe. Observe que, considerando C , G pode possuir K_3 's defeituosos. Os K_3 's defeituosos podem ser bicromáticos ou tricromáticos. Vamos examinar primeiro o caso onde há K_3 's defeituosos bicromáticos.

Figura 7 – Classes de cores com cardinalidade três que induzem dois K_3 defeituosos.

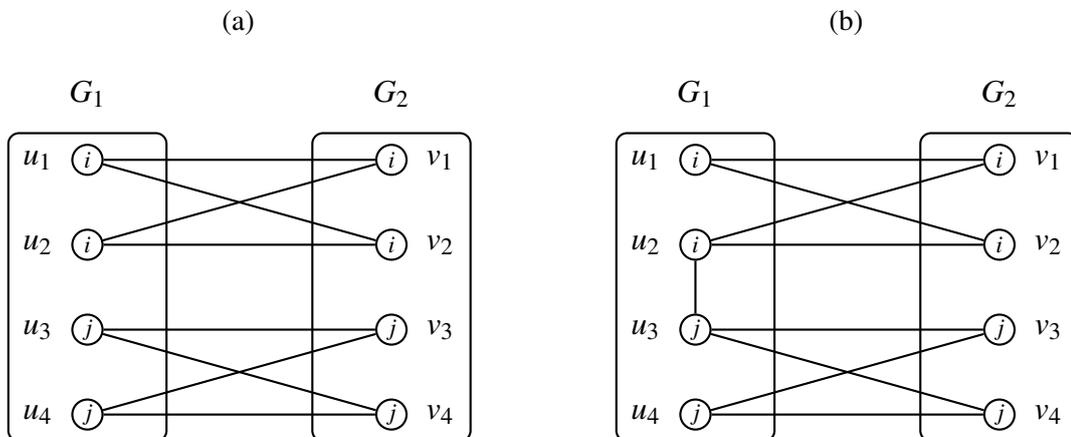


Lema 4.26. *Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria ótima com m cores onde os K_3 's bons recebem as menores cores $1, \dots, l$. Suponha que existem d K_3 's defeituosos, bicromáticos segundo C , coloridos com cores superiores a l . Suponha adicionalmente que todas as cores que colore esses K_3 's induzem elas mesmas K_3 's. Então existe uma coloração C' gulosa 2-imprópria ótima onde as $l + d$ primeiras classes de cores são formadas por K_3 's bons.*

Demonstração. Seja $D = \{D_1, \dots, D_d\}$ o conjunto dos K_3 's defeituosos. Considere D_1 e sejam i e j as cores que colorem D_1 , com $l < i < j$. Como as classes de cores i e j são conjuntos rígidos que induzem K_3 's defeituosos, elas não interceptam G_1 e G_2 ao mesmo tempo. Porém, como D_1 intercepta G_1 e G_2 , podemos assumir sem perda de generalidade que a classe i está contida em G_1 e que a classe j está contida em G_2 (Figura 7a). Na Figura 7b é possível observar que essas classes induzem dois K_3 defeituosos.

Seja K_3^1 um K_3 defeituoso induzido pelos vértices u_1, u_2 , e v_1 e K_3^2 outro induzido por u_3, v_2 , e v_3 . Veja que, se atribuirmos as cores i e j para K_3^1 e K_3^2 , podemos transformar esses dois K_3 's defeituosos em dois K_3 's bons. Considere agora a seguinte coloração C' obtida a partir de C . As primeiras l cores se mantêm, porém atribua as cores $l+1$ e $l+2$ aos novos K_3 's bons, descolorindo os vértices que estavam anteriormente nessas classes. Em seguida, considere, na ordem de C , uma a uma, as classes de cores restantes de C , ou seja $\{l+1, l+2, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$, recolorindo-as com as cores $l+3, \dots, m$, nessa ordem. Observe que esse procedimento pode ser aplicado a todo elemento de D , obtendo-se dessa forma uma coloração C' como anunciada. \square

Figura 8 – Classes de cores com cardinalidade quatro que induzem dois K_3 defeituosos.



Doravante, podemos assumir que C é uma coloração gulosa 2-imprópria onde todos os K_3 's bons recebem as menores cores e sem K_3 's defeituosos bicromáticos tais que as duas cores que os colorem induzem elas mesmas K_3 's.

Lema 4.27. *Seja C a coloração gulosa 2-imprópria ótima com m cores apresentada no Lema 4.26, onde os K_3 's bons recebem as menores cores $1, \dots, l$. Suponha que existem d K_3 's defeituosos, bicromáticos segundo C , coloridos com cores superiores a l . Suponha adicionalmente que todas as cores que colorem esses K_3 's induzem elas mesmas $K_{2,2}$'s. Então existe uma coloração*

C' gulosa 2-imprópria ótima onde as $l + d$ primeiras classes de cores são formadas por K_3 's bons.

Demonstração. Seja $D = \{D_1, \dots, D_d\}$ o conjunto dos K_3 's defeituosos. Considere D_1 e sejam i e j as cores que colorem D_1 , com $l < i < j$. Como as classes de cores i e j são conjuntos rígidos que induzem $K_{2,2}$'s, as duas classes de cores interceptam G_1 e G_2 . A Figura 8a apresenta um subgrafo com duas classes de cores de cardinalidade quatro. A classe de cor i é formada pelos vértices u_1, u_2, v_1 , e v_2 e a j por u_3, u_4, v_3 , e v_4 . Um K_3 defeituoso que existe em um grafo induzido por esses vértices não pode incluir dois vértices de uma mesma classe de cor em uma mesma partição uma vez que a coloração desse conjunto de vértices não seria 2-imprópria. Com isso, se há um K_3 defeituoso, este deve incluir dois vértices de classes de cores distintas em uma mesma partição (Figura 8b). Observe que os vértices u_2, u_3 , e qualquer um de G_2 (suponha v_1) induzem um K_3 defeituoso. Note também que os vértices u_2, u_3 , e v_1 formam um K_3 que intercepta G_1 e G_2 . Os vértices u_1, u_4, v_2 , e v_3 formam um $K_{2,2}$ e também são saturados. Logo a partir de C , podemos obter a coloração C' , onde as classes de cores $1, \dots, l$ são iguais às de C , a cor $l + 1$ colore u_2, u_3 , e v_1 ; a cor $l + 2$ colore u_1, u_4, v_2 , e v_3 . Em seguida, considere, na ordem de C , uma a uma, as classes de cores restantes de C , ou seja $\{l + 1, l + 2, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$, recolorindo-as com as cores $l + 3, \dots, m$, nessa ordem, e por último colorindo v_4 , que receberá uma entre as $|C|$ cores, visto que C era ótima. Observe que esse procedimento pode ser aplicado a todo elemento de D , obtendo-se dessa forma uma coloração C' como anunciada.

□

A partir de agora, podemos assumir que C é uma coloração gulosa 2-imprópria onde todos os K_3 's bons recebem as menores cores e sem K_3 's defeituosos bicromáticos tais que as duas cores que os colorem induzem elas mesmas 2 K_3 's ou 2 $K_{2,2}$'s. A seguir, examinamos um dos casos onde há K_3 's defeituosos tais que as duas classes de cores que os colorem induzem um K_3 e $K_{2,2}$.

Lema 4.28. *Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria ótima com m cores obtida pela aplicação dos Lemas 4.25, 4.26 e 4.27, onde os K_3 's bons recebem as menores cores $1, \dots, l$. Suponha que existem d K_3 's defeituosos, bicromáticos segundo C , coloridos com cores superiores a l . Suponha adicionalmente que todas as cores que colorem esses K_3 's induzem elas mesmas um K_3 e um $K_{2,2}$, onde a cor do K_3 é menor do que a cor do $K_{2,2}$. Então existe uma coloração C' gulosa 2-imprópria ótima onde as $l + d$ primeiras classes de cores são formadas por K_3 's bons.*

Demonstração. Seja $D = \{D_1, \dots, D_d\}$ o conjunto dos K_3 's defeituosos. Considere D_1 e sejam i e j as cores que colorem D_1 , com $l < i < j$. Logo, a cor i colore um K_3 , que podemos, sem perda de generalidade assumir que está contido em G_1 . A Figura 9a apresenta um subgrafo com as classes de cores i e j . Como a classe de cor i é um conjunto rígido para os vértices que lhe sucedem na ordem de C , os vértices u_4 e u_5 devem ter pelo menos um vizinho da classe de cor i . Uma aresta formada por u_4 (ou u_5) e qualquer outro vértice da cor i é suficiente para induzir dois K_3 's defeituosos. Suponha que essa aresta seja a que incide nos vértices u_4 e u_3 (Figura 9b).

Observe que os vértices u_1, u_2, u_3, u_4, v_1 , e v_2 induzem dois K_3 's defeituosos. Seja K_3^1 o K_3 defeituoso induzido por u_1, u_2 , e v_1 e K_3^2 o K_3 defeituoso induzido por u_3, u_4 , e v_2 . Se atribuirmos as cores i e j para K_3^1 e K_3^2 , podemos transformar dois K_3 defeituosos em K_3 bons. Quanto ao vértice u_5 , este pode ser colorido com a última cor. Observe que para obter a coloração C' , os novos K_3 's bons podem ser coloridos com as cores $l+1$ e $l+2$. Em seguida, considere, na ordem de C , uma a uma, as classes de cores restantes de C , ou seja $\{l+1, l+2, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$, recolorindo-as com as cores $l+3, \dots, m$, nessa ordem, e por último colorindo u_5 , que receberá uma entre as $|C|$ cores, visto que C era ótima. Observe que esse procedimento pode ser aplicado a todo elemento de D , obtendo-se dessa forma uma coloração C' como anunciada.

□

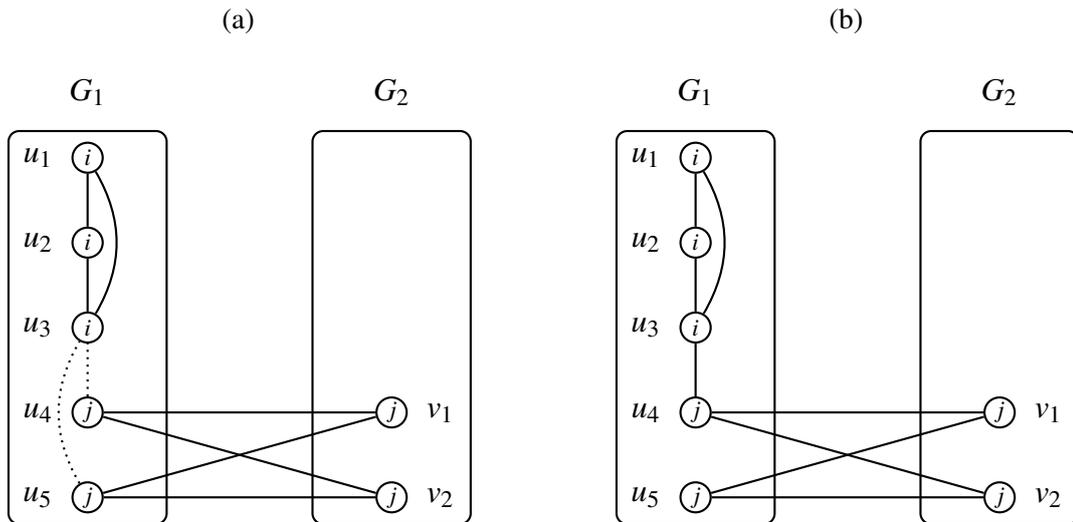
Antes de examinar o caso em que existem K_3 's defeituosos bicromáticos coloridos com classes de cores de que induzem um K_3 e um $K_{2,2}$, vamos examinar como se apresentam as classes de cores que induzem K_3 's inteiramente contidos em um de G_1 ou G_2 .

Lema 4.29. *Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria ótima obtida pela aplicação dos Lemas 4.25, 4.26, 4.27 e 4.28, onde os K_3 's bons recebem as menores cores $1, \dots, l$. Suponha que existe um K_3 defeituoso, bicromático segundo C , colorido com as cores i e j maiores do que l , tal que a cor i induz um K_3 contido em G_1 (ou G_2) e tal que existe vértice colorido j , $j > i$, em G_2 (ou G_1). Então, j é a maior cor de C e existe uma coloração C' gulosa k -imprópria de G onde as $l+1$ primeiras cores são formadas por $l+1$ K_3 's bons.*

Demonstração. Considere as classes de cores i e j tais quais definidas no enunciado. Sejam u_1, u_2 e u_3 os vértices de G_1 (sem perda de generalidade) coloridos com a cor i . Seja v_1 um vértice de G_2 colorido com a cor j . Suponha que j não é a maior cor de C . Logo, j induz um conjunto rígido com respeito ao grafo induzido pelas classes de cores superiores a j , incluindo a classe de cor j . Como não existem mais K_3 's defeituosos entre duas classes de cores que induzem K_3 's, a

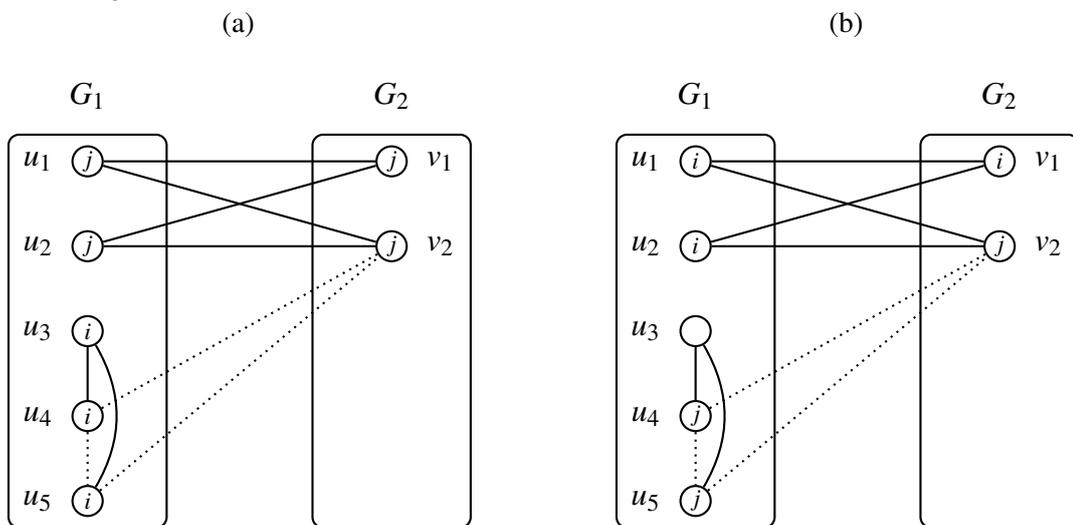
classe de cor j induz um $K_{2,2}$. Porém, esse tipo de K_3 defeituoso também já foi tratado no Lema 4.28 e portanto não ocorre em C . Logo, j é a maior cor de C . Podemos então recolorir v_1 com a cor i e u_3 com a cor j . Observe que a classe de cor i tornou-se um K_3 bom. Podemos aplicar o Lema 4.25 a essa coloração, para obter a coloração C' desejada. \square

Figura 9 – Classes de cores i e j , onde $i < j$, com cardinalidade quatro e três que induzem dois K_3 defeituosos.



Uma vez que examinamos o caso em que existem K_3 defeituosos bicromáticos coloridos com classes de cores i e j com cardinalidades três e quatro, onde $i < j$, resta estudar o caso em que $i > j$, levando em conta os resultados do Lema 4.29.

Figura 10 – Classes de cores i e j , onde $i > j$, com cardinalidade quatro e três que induzem um K_3 defeituoso.



Lema 4.30. *Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria ótima obtida pela aplicação dos Lemas 4.25, 4.26, 4.27, 4.28 e 4.29, onde os K_3 's bons recebem as menores cores $1, \dots, l$. Suponha que existem d K_3 's defeituosos, bicromáticos segundo C , coloridos com cores superiores a l . Suponha adicionalmente que todas as cores que colorem esses K_3 's induzem elas mesmas um $K_{2,2}$ e um K_3 , onde a cor do K_3 é maior do que a cor do $K_{2,2}$. Então existe uma coloração C' gulosa 2-imprópria ótima onde as $l + d$ primeiras classes de cores são formadas por K_3 's bons.*

Demonstração. Seja $D = \{D_1, \dots, D_d\}$ o conjunto dos K_3 's defeituosos. Considere D_1 e sejam i e j as cores que colorem D_1 , com $l < j < i$. Logo, a cor j colore um $K_{2,2}$. Podemos, sem perda de generalidade, assumir que a classe de cor i , que induz um K_3 está contida em G_1 . A Figura 10a apresenta um subgrafo com as classes de cores i e j onde $i > j$. Os vértices de j em G_1 podem, ou não, ter vizinhos em i . Se qualquer vértice de j em G_1 tiver pelo menos um vizinho em i , então i e j induzem dois K_3 's defeituosos que podem ser transformados em K_3 's bons. De forma semelhante ao que fizemos no Lema 4.28, podemos obter uma coloração C' reclamada no enunciado.

Se, porém, os vértices de j em G_1 não tiverem nenhum vizinho em i , então i e j induzem apenas um K_3 defeituoso formado por quaisquer dois vértices de i com qualquer vértice de j em G_2 . Suponha que os vértices u_4, u_5 , e v_2 induzem esse K_3 defeituoso que por sua vez é colorido com a cor j e, portanto, passa a ser um K_3 bom. Veja que se colorirmos o vértice v_1 e mais dois vértices quaisquer não coloridos de G_1 , o vértice v_1 fica saturado e a cor i é proibida de ser usada em G_1 . Por outro lado, como não há cor superior a i em G_2 (pelo Lema 4.29), a cor i passa a ser maior cor de um vértice em G_2 . Colocando o vértice u_3 como último vértice na ordem e aplicando o Lema 4.25, podemos obter uma coloração C' como reclamada no enunciado. Essas modificações são apresentadas na Figura 10b. □

Observe que, exceto pelo Lema 4.29, todos os K_3 's defeituosos tratados pertencem a duas classes de cores saturadas. O próximo Lema trata do caso onde apenas uma dessas classes está saturada.

Lema 4.31. *Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria ótima obtida pela aplicação dos Lemas 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30, onde os K_3 's bons recebem as menores cores $1, \dots, l$. Suponha que existe um K_3 defeituoso, bicromático segundo C , colorido com as cores i e j maiores do l , com $i < j$ tal que a cor i tal que j é a maior cor de C . Então, existe uma coloração C' gulosa k -imprópria de G onde as $l + 1$ primeiras cores são formadas por $l + 1$ K_3 's bons.*

Demonstração. Podemos supor que j não está saturada, pois todos os casos em que i e j estão saturados foram tratados. Seja u, v e w esse K_3 defeituoso. Como a união das duas classes de cores i e j possui pelo menos 4 vértices, podemos recolorir u, v e w com a cor i e os vértices restantes da união entre i e j com a cor j . Observe que i continua sendo uma cor saturada. Além disso, como j é a maior de C , o número de cores permanece inalterado. Agora, podemos aplicar o Lema 4.25 a essa nova coloração para obter a coloração C' reclamada. Isso encerra a prova. \square

A aplicação sucessiva dos Lemas 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31 produz uma coloração C sem K_3 's defeituosos bicromáticos. Passamos então a examinar os K_3 's defeituosos tricromáticos. Um K_3 defeituoso tricromático tem cada um de seus vértices colorido com uma cor diferente. O Lema que segue prova a inexistência desse tipo de K_3 .

Lema 4.32. *Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria ótima obtida pela aplicação dos Lemas 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30. A coloração C não contém K_3 defeituosos tricromáticos.*

Demonstração. Considere um K_3 defeituoso tricromático formado pelos vértices u colorido com i , v colorido com j e w colorido com l . Suponha sem perda de generalidade que u e v estão em G_1 e w está em G_2 . Como há duas entre as cores i , j e l que estão saturadas, há pelo menos uma entre i e j que está saturada. Suponha que i está saturada. Logo existe uma aresta entre u e algum outro vértice u_1 colorido também com i . Se u_1 pertence a G_1 , temos que u, u_1 e w formam um K_3 defeituoso bicromático, um absurdo. Logo, u_1 pertence a G_2 . Agora, u, v e u_1 formam um K_3 defeituoso bicromático, um absurdo. Essas duas contradições encerram a prova. \square

Podemos passar então à prova da Conjectura 4.9 para o caso $k = 2$.

Teorema 4.33. $\Gamma^2(G) = \Gamma^2(G \setminus R) + \Gamma^2(R)$, onde $\Gamma^2(G \setminus R) = \frac{|G \setminus R|}{3}$.

Demonstração. Seja C uma coloração gulosa 2-imprópria ótima obtida pela aplicação dos Lemas 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31 com $\Gamma^2(G)$ cores. Seja $\{1, \dots, l\}$ as cores de C que colore os bons K_3 's. Seja $G \setminus R$ o grafo induzido pelas classes de cores $\{1, \dots, l\}$. Observe que como C não possui K_3 's defeituosos, todos os K_3 's que interceptam G_1 e G_2 estão em $G \setminus R$. Logo, $G \setminus R$ é maximal com respeito a essa propriedade e pode ser fatorado por K_3 's que interceptam G_1 e G_2 . Como $|V(G \setminus R)| = l \times 3$ e $G \setminus R$ admite uma coloração 2-imprópria com l , que é o limite superior para um grafo com essa quantidade de vértices, temos que $\Gamma^2(G \setminus R) = l$. Para completar a prova, $\Gamma^2(R) = \Gamma^2(G) - l$, caso contrário C não seria ótima, visto que as colorações de $G \setminus R$ e R são independentes. Finalmente, como C é uma coloração ótima, R maximiza $\Gamma^2(R)$

entre todas as escolhas de R que produzem l bons K_3 's. Esse conjunto de fatos completam a prova do teorema.

□

5 FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS

Neste capítulo, introduzimos modelos para os problemas de coloração gulosa próprio e impróprio. Apresentamos uma formulação de programação por restrição e uma de programação inteira para cada problema.

5.1 Coloração gulosa própria

Vamos denotar por C o conjunto de cores que podem ser usadas para colorir um grafo G . Em um problema de coloração própria, até n cores podem ser utilizadas e, por isso, $C = \{1, \dots, n\}$.

5.1.1 Formulação de programação por restrições

As variáveis inteiras deste modelo tem domínio entre 1 e n . A variável z é do tipo inteiro e representa a maior cor usada na coloração do grafo. O conjunto representado por P_v denota o conjunto de cores proibidas para v e as variáveis cor_v indicam a cor com que um vértice v deve ser colorido.

$$\max z \tag{5.1}$$

s.a

$$z = \max\{cor_v : v \in V\}, \tag{5.2}$$

$$P_v = \bigcup_{u \in N(v)} \{cor_u\}, \quad \forall v \in V \tag{5.3}$$

$$cor_v = \min C \setminus P_v, \quad \forall v \in V \tag{5.4}$$

$$z \in \{1, \dots, n\}, \tag{5.5}$$

$$cor_v \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall v \in V \tag{5.6}$$

$$P_v \in \{1, \dots, n\}^n, \quad \forall v \in V. \tag{5.7}$$

A expressão (5.1) determina que o número de cores usadas deve ser maximizado. A variável z tem seu valor definido através da restrição (5.2) que determina que z assumo o valor da maior cor usada na coloração. Observe que o conjunto de restrições (5.3) define cada variável P_v como sendo a união das cores que aparecem na vizinhança de v .

As restrições (5.4) forçam que as variáveis cor_v assumam o menor valor do conjunto obtido através da diferença entre o conjunto de cores possíveis e o conjunto de cores proibidas para v . Além disso, elas expressam a propriedade de uma coloração de Grundy. Como a formulação busca uma coloração de Grundy com o maior número de cores, o valor da variável z é o número de Grundy na solução ótima.

5.1.2 Formulação de programação inteira

Todas as variáveis desse modelo são binárias. As variáveis x_v^c indicam se o vértice v é colorido com a cor c . Cada variável z_c indica se pelo menos um vértice é colorido com a cor c .

$$\max \sum_{c \in C} z_c \quad (5.8)$$

s.a

$$\sum_{c \in C} x_v^c = 1, \quad \forall v \in V \quad (5.9)$$

$$z_c \leq \sum_{v \in V} x_v^c, \quad \forall c \in C \quad (5.10)$$

$$x_v^c + x_u^c \leq z_c, \quad \forall \{u, v\} \in E, \forall c \in C \quad (5.11)$$

$$x_v^c \geq 1 - \sum_{d=1}^{c-1} x_v^d - \sum_{u \in N(v)} x_u^c, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.12)$$

$$x_v^c \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.13)$$

$$z_c \in \{0, 1\}, \quad \forall c \in C. \quad (5.14)$$

A função objetivo (5.8) indica que o número de cores deve ser maximizado. As restrições (5.9) expressam que cada vértice deve ser colorido com uma cor. As restrições (5.10) expressam que $z_c = 0$ caso nenhum vértice seja colorido com a cor c . As restrições (5.11) proíbem que vértices adjacentes sejam coloridos com a mesma cor.

As restrições (5.12) forçam que as variáveis $x_v^c = 1$ quando uma cor c estiver disponível para um vértice v . Se há algum vértice na vizinhança de v colorido com c , essa restrição não força, pelo termo $\sum_{u \in N(v)} x_u^c$, que a variável $x_v^c = 1$ e a restrição (5.11) garante que $x_v^c = 0$. Se um vértice v é colorido por alguma cor d , $d < c$, essa restrição é folgada para todo c , $c > d$, e não força que $x_v^c = 1$ em razão do termo $\sum_{d=1}^{c-1} x_v^d$. Por outro lado, veja que, se há uma cor c disponível para um vértice v , ou seja, v ainda não foi colorido e não tem vizinhos coloridos com c , v é forçado a ser colorido com cor c e esta é a menor disponível para v . Note que o conjunto

de soluções que satisfazem as restrições (5.9) - (5.14) é precisamente o conjunto de soluções que representam as colorações gulosas de um grafo G .

As restrições (5.13) e (5.14) definem que as variáveis do modelo são binárias.

5.2 Coloração gulosa k -imprópria

Como visto anteriormente, uma coloração gulosa k -imprópria usa no máximo $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$ cores. Por isso, $C = \left\{1, \dots, \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil\right\}$ para os modelos desta seção.

5.2.1 Formulação de programação por restrições

No modelo para o problema de coloração gulosa k -imprópria, em relação ao modelo da seção 5.1.1, há a introdução das variáveis q_v^c e um ajuste nas restrições (5.3), que estabelecem o conjunto de cores proibidas para um vértice v . As variáveis q_v^c possuem domínio $\{1, \dots, n-1\}$ e indicam a quantidade de vértices na vizinhança de v coloridos com a cor c . As restrições (5.2) e (5.4) - (5.7) também são restrições desse modelo.

max z

s.a (5.2), (5.4) - (5.7),

$$q_v^c = |\{u \in N(v) : cor_u = c\}|, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.15)$$

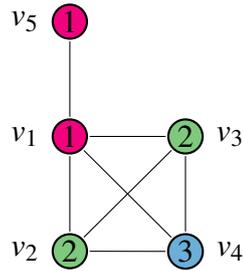
$$c \in P_v \Leftrightarrow q_v^c \geq k+1 \vee \left(cor_v \neq c \wedge \bigvee_{u \in N(v)} q_u^c = k \wedge cor_u = c \right), \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.16)$$

$$q_v^c \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall v \in V, \forall c \in C. \quad (5.17)$$

As restrições (5.15) estabelecem que cada variável q_v^c deve assumir valor igual ao número de vizinhos de v que são coloridos com a cor c .

As restrições (5.16) indicam as regras necessárias para que uma cor seja proibida para um vértice. Para que a solução do problema respeite a regra de impropriedade, é necessário expressar que uma cor c está proibida para um vértice caso este tenha em sua vizinhança mais que k vizinhos coloridos com c . Além disso, uma cor c está proibida para um vértice v , se há em sua vizinhança um vértice u saturado com a cor c e v não contribui para tal saturação. Se isso não for levado em conta, a regra de impropriedade seria violada para o vértice u (u seria colorido com a cor c e seria vizinho de mais que k vértices coloridos com c).

Figura 11 – Exemplo de coloração onde $\Gamma^1(G) = 3$



No exemplo apresentado na Figura 11, se os vértices v_1 e v_5 não são coloridos com a mesma cor, então v_5 pode receber a cor de algum dos vértices na vizinhança de v_1 . Neste caso, no máximo duas cores poderiam ser usadas para colorir G de maneira gulosa 1-imprópria.

O grafo apresentado é um exemplo onde a coloração requer o uso dos termos $q_v^c \geq k + 1$ e $(cor_v \neq c \wedge \bigvee_{u \in N(v)} q_u^c = k \wedge cor_u = c)$ das restrições (5.16). Considere os valores assumidos pelas variáveis q_v^c , P_v , e cor_v na solução correspondente à coloração da Figura 11. Observe que $2 \in P_4$ pois $q_4^2 \geq 2$. Note que v_1 está saturado com a cor 1, mas v_4 não contribui para isso. Então, $1 \in P_4$ pois $cor_4 \neq 1 \wedge q_1^1 = 1 \wedge cor_1 = 1$. Se a cor 1 estivesse disponível para o vértice v_4 , então cor_4 seria obrigada a assumir o valor 1, devido à restrição (5.4). Mas, isso implicaria que a restrição de imprópriedade de v_1 seria violada.

5.2.2 Formulação de programação inteira

As variáveis x_v^c , p_v^c , e z_c tem o mesmo significado das variáveis do modelo de programação inteira para o problema de coloração gulosa própria. As variáveis binárias y_v^c são adicionadas nesse modelo para indicar se um vértice v possui em sua vizinhança mais que k vértices coloridos com a cor c . Há também a inclusão das variáveis binárias w_v^c para indicar se um vértice v está saturado com a cor c .

As restrições (5.9) e (5.10) também são restrições desse modelo.

max z

s.a (5.9), (5.10),

$$(|N(v)| - k)y_v^c \geq \sum_{u \in N(v)} x_u^c - k, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.18)$$

$$(k+1)y_v^c \leq \sum_{u \in N(v)} x_u^c, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.19)$$

$$w_v^c \leq x_v^c, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.20)$$

$$kw_v^c \leq \sum_{u \in N(v)} x_u^c, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.21)$$

$$w_v^c + (1 - x_v^c)(|N(v)| - k + 1) \geq \sum_{u \in N(v)} x_u^c - k + 1, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.22)$$

$$p_v^c \leq y_v^c + \sum_{u \in N(v)} w_u^c, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.23)$$

$$p_v^c \geq y_v^c, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.24)$$

$$p_v^c \geq w_u^c - x_v^c, \quad \forall v \in V, \forall \{v, u\} \in E, \forall c \in C \quad (5.25)$$

$$x_v^c \leq 1 - p_v^c, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.26)$$

$$x_v^c \leq p_v^d, \quad \forall v \in V, \forall c \in C, \forall d < c \quad (5.27)$$

$$x_v^c, y_v^c, w_v^c, p_v^c \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, \forall c \in C \quad (5.28)$$

$$z_c \in \{0, 1\}, \quad \forall c \in C. \quad (5.29)$$

As restrições (5.18) e (5.19) são encarregadas de determinar os valores das variáveis y_v^c . Cada restrição em (5.18) força que y_v^c deve assumir o valor 1 quando o vértice v tem mais que k vizinhos em sua vizinhança coloridos com a cor c . Isso acontece sempre que o termo $\sum_{u \in N(v)} x_u^c - k \geq 1$. A restrição (5.19) força que $y_v^c = 0$ quando, na vizinhança de v , a quantidade de vértices coloridos com a cor c é menor ou igual a k .

As restrições (5.20), (5.21), e (5.22) são responsáveis por determinar os valores que as variáveis w_v^c podem assumir. A restrição (5.20) força que $w_v^c = 0$ se v não é colorido com a cor c . A restrição (5.21) garante que $w_v^c = 0$ quando menos que k dos vizinhos de v assumem a cor c . Devido a restrição (5.20), exatamente um dos termos do lado esquerdo de (5.22) é nulo em qualquer solução viável. Se $x_v^c = 0$, temos $w_v^c = 0$ e (5.22) é trivialmente satisfeita. Por outro lado, se v é colorido com a cor c e k de seus vizinhos também o são, então (5.22) força $w_v^c = 1$.

Lembramos ao leitor ou leitora que um vértice v é proibido de ser colorido com

uma cor c em duas situações. A primeira, quando a cor c aparece em mais que k vértices na vizinhança de v . A segunda, quando v tem um vértice u em sua vizinhança saturado com a cor c por vértices em $N(u) \setminus \{v\}$. As restrições (5.23), (5.24), e (5.25) determinam os valores das variáveis p_v^c . Cada uma dessas variáveis assume o valor 1 quando pelo menos uma das situações descritas anteriormente é estabelecida.

Quando um vértice v não possui mais que k vizinhos coloridos com a cor c nem é vizinho de um vértice saturado sem sua contribuição, então a restrição (5.23) força que $p_v^c = 0$. Se uma dessas situações acontece, então a restrição (5.23) permite que p_v^c assumam valor 1. As restrições (5.24) e (5.25) forçam $p_v^c = 1$ quando alguma dessas situações acontecem. Note que a restrição (5.25) não força $p_v^c = 1$ quando v é colorido com a cor c . Isso mantém a cor c permitida para os vizinhos de um vértice saturado que contribuem para essa saturação.

As restrições (5.26) estabelecem que um vértice não pode ser colorido com uma cor proibida. As restrições (5.27) garantem que os vértices são coloridos com a menor cor permitida uma vez que proibem uma cor c para v caso haja alguma cor $d < c$ disponível. As restrições (5.28) e (5.29) definem que as variáveis do modelo são binárias.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, resumimos os resultados obtidos no desenvolvimento desta dissertação. O objetivo da dissertação era o estudo da heurística de coloração gulosa para o problema de coloração k -imprópria de grafos. Como se faz habitualmente, o estudo aqui almejava estimar o pior desempenho dessa heurística. Além de introduzir o conceito de Número de Grundy k -impróprio, generalizamos o conceito de t -átomo, estudamos o parâmetro em árvores binomiais e cografos, e apresentamos formulações de programação por restrições e programação inteira. Não apenas apresentamos formulações para a coloração imprópria, mas também para o Número de Grundy clássico, preenchendo um vácuo nesse estudo (esses resultados estão nos Capítulos 4 e 5).

Mais especificamente, definimos t -átomos k -impróprios e provamos que a existência de um t -átomos k -impróprios é condição necessária e suficiente para que o número de Grundy k -impróprio seja pelo menos t . Esse estudo pode prosseguir com a investigação do uso da noção de t -átomo k -impróprios para a determinação do número de Grundy k -impróprio para quaisquer grafos.

Para árvores binomiais, determinamos o valor exato do número de Grundy 1-impróprio nessa classe. A determinação do número de Grundy k -impróprio, $k > 1$, das árvores binomiais permanece como um problema em aberto.

Para os cografos, determinamos o valor do número de Grundy k -impróprio em cografos desconexos e formulamos uma conjectura (a Conjectura 4.9) para o valor desse parâmetro em cografos conexos. Embora, o caso geral da conjectura permaneça como problema em aberto, provamos a validade da conjectura para $k = 1$ e $k = 2$. Deixamos também como problema em aberto o estudo dos impactos algorítmicos da Conjectura 4.9), nos casos em que ela é verdadeira.

Uma vez que, na conjectura, o Número de Grundy k -impróprio é expresso através de uma recorrência, investigamos casos especiais de cografos conexos, com o objetivo de obter o valor exato do parâmetro para as classes estudadas.

No que se refere às formulações em programação matemática, as do problema de coloração gulosa imprópria deram suporte aos estudos teóricos empreendidos neste trabalho. Pode-se aprofundar o estudo destas, testando as formulações de programação por restrições e programação inteira a fim de compará-las. Além disso, investigando resultados computacionais de instâncias de alguma aplicação do problema.

Finalmente, para trabalhos futuros, além da busca de soluções para os problemas em

aberto aqui relatados, podemos nos perguntar: 1) sobre outras heurísticas para o problema de coloração k -imprópria, 2) a respeito da complexidade parametrizada dos problemas de coloração k -impróprias e de seus duais; e 3) a determinação desses parâmetros em outras classes de grafos.

REFERÊNCIAS

- ACHUTHAN, N.; ACHUTHAN, N.; SIMANIHURUK, M. On defective colourings of complementary graphs. **The Australasian Journal of Combinatorics [electronic only]**, v. 13, 01 1996.
- ACHUTHAN, N.; ACHUTHAN, N.; SIMANIHURUK, M. On the Nordhaus-Gaddum problem for the n -path-chromatic number of a graph. **JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, v. 27, 01 1998.
- ANDREWS, J. A.; JACOBSON, M. S. On a generalization of chromatic number. **Congressus Numerantium**, Utilitas Mathematica Pub. Incorporated, v. 47, p. 33–48, 1985.
- APPEL, K. I.; HAKEN, W. **Every planar map is four colorable**. [S. l.]: American Mathematical Soc., 1989. v. 98.
- BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 37, n. 2, p. 194–197, 1941.
- CHRISTEN, C. A.; SELKOW, S. M. Some perfect coloring properties of graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 27, n. 1, p. 49 – 59, 1979. ISSN 0095-8956. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895679900674>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- CHVÁTAL, V. The minimality of the Mycielski graph. In: BARI, R. A.; HARARY, F. (Ed.). **Graphs and Combinatorics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1974. p. 243–246. ISBN 978-3-540-37809-9.
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Introduction to algorithms**. [S. l.]: MIT press, 2009.
- CORNEIL, D.; LERCHS, H.; BURLINGHAM, L. Complement reducible graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 3, n. 3, p. 163 – 174, 1981. ISSN 0166-218X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X81900135>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- COWEN, L.; GODDARD, W.; JESURUM, C. E. Defective coloring revisited. **Journal of Graph Theory**, v. 24, n. 3, p. 205–219, 1997. Disponível em: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199703\)24:3<205::AID-JGT2>3.0.CO;2-T](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199703)24:3<205::AID-JGT2>3.0.CO;2-T). Acesso em: 18 nov. 2019.
- COWEN, L. J.; COWEN, R. H.; WOODALL, D. R. Defective colorings of graphs in surfaces: Partitions into subgraphs of bounded valency. **Journal of Graph Theory**, v. 10, n. 2, p. 187–195, 1986. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jgt.3190100207>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- COWEN, R. Some connections between set theory and computer science. In: GOTTLOB, G.; LEITSCH, A.; MUNDICI, D. (Ed.). **Computational Logic and Proof Theory**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993. p. 14–22.
- DECHTER, R. **Constraint Processing**. [S. l.]: Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
- DJIDJEV, H.; GARRIDO, O.; LEVCOPOULOS, C.; LINGAS, A. **On the maximum k -dependent set problem**. [S. l.]: Dept. Computer Science, Lund University, Sweden, 1992.

- ERDŐS, P.; HAJNAL, A. On decomposition of graphs. **Acta Mathematica Hungarica**, v. 18, n. 3, p. 359–377, 1967.
- FINK, J. F.; JACOBSON, M. S. n -domination in graphs. In: JOHN WILEY & SONS, INC. **Graph theory with applications to algorithms and computer science**. [S. l.], 1985. p. 283–300.
- FRICK, M. A survey of (m, k) -colorings. In: GIMBEL, J.; KENNEDY, J. W.; QUINTAS, L. V. (Ed.). **Quo Vadis, Graph Theory?** Elsevier, 1993, (Annals of Discrete Mathematics, v. 55). p. 45 – 57. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167506008703741>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- FRICK, M.; HENNING, M. A. Extremal results on defective colorings of graphs. **Discrete Mathematics**, v. 126, n. 1, p. 151 – 158, 1994. ISSN 0012-365X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X94902607>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness**. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1979. ISBN 0716710455.
- GOYAL, N.; VISHWANATHAN, S. NP-completeness of undirected greedy numbering and related problems. **Unpublished manuscript**, 1997.
- GRUNDY, P. M. Mathematics and games. **Eureka**, v. 2, p. 6–9, 1939.
- HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S.; BEYER, T. A linear algorithm for the Grundy (coloring) number of a tree. **Congr. Numer.**, v. 36, 01 1982.
- HOPKINS, G.; STATON, W. Vertex partitions and k -small subsets of graphs. **Ars Combinatoria**, v. 22, p. 19–24, 1986.
- JENSEN, T. R.; TOFT, B. **Graph coloring problems**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 1995. v. 39.
- KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: _____. Boston, MA: Springer US, 1972. p. 85–103. ISBN 978-1-4684-2001-2. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9. Acesso em: 18 nov. 2019.
- LERCHS, H. On cliques and kernels. **Department of Computer Science, University of Toronto**, 1971.
- LERCHS, H. On the clique-kernel structure of graphs. **Dept. of Computer Science, University of Toronto**, 1972.
- LOVÁSZ, L. On decomposition of graphs. **Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica**, p. 237–238, 1966.
- LUND, C.; YANNAKAKIS, M. On the hardness of approximating minimization problems. **Journal of the ACM (JACM)**, ACM New York, NY, USA, v. 41, n. 5, p. 960–981, 1994.
- MACKENZIE, D. A. **Mechanizing proof: computing, risk, and trust**. [S. l.]: MIT Press, 2004.
- MADDOX, R. B. On k -dependent subsets and partitions of k -degenerate graphs. **Congr. Numer**, v. 66, p. 11–14, 1988.

- MADDOX, R. B. **Vertex partitions and transition parameters**. [S. l.]: Ph.D Thesis, The University of Mississippi, Mississippi, 1988.
- MYCIELSKI, J. Sur le coloriage des graphes. In: **Colloq. Math.** [S. l.: s. n.], 1955. v. 3, n. 161-162, p. 9.
- NORDHAUS, E. A.; GADDUM, J. W. On complementary graphs. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 63, n. 3, p. 175–177, 1956. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2306658>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- ROSSI, F.; BEEK, P. V.; WALSH, T. **Handbook of constraint programming**. [S. l.]: Elsevier, 2006.
- SIMANIHURUK, M.; ACHUTHAN, N.; ACHUTHAN, N. R. On defective colourings of triangle-free graphs. **Australasian J. Combinatorics**, v. 16, p. 259–284, 1997.
- SIMANIHURUK, M.; ACHUTHAN, N.; ACHUTHAN, N. R. On minimal triangle-free graphs with prescribed 1-defective chromatic number. **Australasian J. Combinatorics**, v. 16, p. 203–228, 1997.
- STEWART, L. **Cographs: a class of tree representable graphs**. Tese (Doutorado) – University of Toronto, Department of Computer Science, 1978.
- ZAKER, M. Results on the Grundy chromatic number of graphs. **Discrete Mathematics**, v. 306, n. 23, p. 3166 – 3173, 2006. ISSN 0012-365X. International Workshop on Combinatorics, Linear Algebra, and Graph Coloring. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X06004122>. Acesso em: 18 nov. 2019.