



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**ALEXANDRE RIBEIRO CAJAZEIRA RAMOS**

**UMA ABORDAGEM DE PARTIÇÃO E INTERPOLAÇÃO DE CONJUNTOS DE**  
**POLÍGONOS PARA VISUALIZAÇÃO TEMPORAL DE FENÔMENOS**  
**GEOESPACIAIS**

**FORTALEZA**

**2019**

ALEXANDRE RIBEIRO CAJAZEIRA RAMOS

UMA ABORDAGEM DE PARTIÇÃO E INTERPOLAÇÃO DE CONJUNTOS DE  
POLÍGONOS PARA VISUALIZAÇÃO TEMPORAL DE FENÔMENOS GEOESPACIAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Computação Gráfica

Orientadora: Profa. Dra. Emanuele Marques dos Santos

Coorientador: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante Neto

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

R141a Ramos, Alexandre Ribeiro Cajazeira.

Uma abordagem de partição e interpolação de conjuntos de polígonos para visualização temporal de fenômenos geoespaciais / Alexandre Ribeiro Cajazeira Ramos. – 2019.  
63 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Emanuele Marques dos Santos.

Coorientação: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante Neto.

1. Visualização de fenômenos espaço-temporais. 2. Animação. 3. Interpolação. I. Título.

CDD 005

---

ALEXANDRE RIBEIRO CAJAZEIRA RAMOS

UMA ABORDAGEM DE PARTIÇÃO E INTERPOLAÇÃO DE CONJUNTOS DE  
POLÍGONOS PARA VISUALIZAÇÃO TEMPORAL DE FENÔMENOS GEOESPACIAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Computação Gráfica

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Profa. Dra. Emanuele Marques dos Santos (Orientadora)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante Neto  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Creto Augusto Vidal  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Gilvan Rodrigues Maia  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*“Imagination is more important than knowledge.  
For knowledge is limited, whereas imagination  
embraces the whole world, stimulating progress,  
giving birth to evolution.”*

(Albert Einstein)

## RESUMO

Fenômenos geoespaciais, como disputas territoriais, ocupação urbana e concentração de crimes, podem ser representados e analisados através de mapas temáticos construídos por diferentes técnicas. Nesta seara, o uso de animação pode ser uma boa alternativa às visualizações estáticas ao comunicar mudanças dinâmicas. Algumas abordagens já representam fenômenos espaço-temporais usando um conjunto de polígonos definido para cada instante de tempo, como também sugerem o uso da interpolação. Entretanto, essas representações são estáticas ou não são gerais para interpolar conjuntos arbitrários. Deste modo, este problema apresenta uma série de requisitos que não são satisfeitos pelas ferramentas e abordagens disponíveis atualmente. Por exemplo, a interpolação deve suportar qualquer conjunto de polígonos, ser suave, sem sobreposições e totalmente automática (sem a intervenção do usuário). Para resolver esse problema, este trabalho apresenta uma abordagem para interpolação automática entre conjuntos de polígonos e diferentes técnicas para subdivisão espacial, possibilitando a visualização de mudanças temporais com animação. Foi realizada uma série de experimentos com diferentes tipos de interpolação, demonstrando que a abordagem proposta, quando associada ao método de divisão de polígonos baseado em Voronoi, foi capaz de atender aos requisitos estabelecidos. Também foi produzida uma aplicação para a utilização da abordagem proposta na visualização e análise da evolução temporal de mapas de crimes. Neste contexto, a aplicação desenvolvida mostrou-se capaz de possibilitar uma alternativa consistente às ferramentas atuais de visualizações estáticas.

**Palavras-chave:** Visualização de fenômenos espaço-temporais. Animação. Interpolação.

## ABSTRACT

Geospatial phenomena, such as territorial disputes, urban occupation and concentration of crimes, can be represented and analyzed through thematic maps constructed by different techniques. In this area, the use of animation can be a good alternative to static visualizations when communicating dynamic changes. Some approaches already represent spatiotemporal phenomena using a polygon set for each time instant. However, these representations are static and not general enough to be applied to the interpolation of arbitrary polygons. Furthermore, the problem of interpolating arbitrary polygons has a set of requirements that are not satisfied by the currently available tools. For example, the polygons are arbitrary, and the interpolation should be smooth and fully automatic (not requiring user intervention). To solve this problem, this work presents an approach for automatic polygon set interpolation and different techniques for spatial division, allowing the visualization of temporal changes in different phenomena with animations. It was performed a series of experiments with different types of interpolation, demonstrating that the proposed approach, when associated with the Voronoi-based polygon division method, satisfied all the established requirements. An application using the proposed approach was developed for visualization and analysis of the temporal evolution of crime maps, and it was a consistent alternative to current static visualization tools.

**Keywords:** Visualization of spatiotemporal phenomena. Animation. Interpolation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplos de fenômenos geoespaciais representados por mapas temáticos . . .	12
Figura 2 – Exemplo de muitos mapas dispostos lado a lado em uma visualização: Como a epidemia de mortes por overdose de drogas se espalhou nos Estados Unidos	13
Figura 3 – Exemplo de quatro conjuntos de polígonos sobrepostos, em que cada cor representa um mapeamento em um período diferente de tempo. . . . .	13
Figura 4 – Exemplo de divisão utilizando a biblioteca <i>Flubber</i> (VELTMAN, 2017): Interpolação (A1-A4) entre os estados <i>Virgínia Ocidental</i> (1 polígono) e <i>Havaí</i> (8 polígonos), dos Estados Unidos. . . . .	15
Figura 5 – Abordagem Proposta . . . . .	16
Figura 6 – Exemplos de Polígonos Simples (Válidos) e Complexos (Inválidos) . . . . .	18
Figura 7 – Malha Triangular gerada a partir de um polígono simples, composta por triângulos (Azul) conectados por arestas (Preto) e vértices (Vermelho) comuns.	19
Figura 8 – Processo de geração de malha por Avanço de Fronteira . . . . .	21
Figura 9 – Exemplo de linha poligonal simples e fechada . . . . .	22
Figura 10 – Casos base no processo de Triangulação por Diagonais . . . . .	23
Figura 11 – Diagramas de Voronoi de um conjunto com 15 pontos aleatórios . . . . .	23
Figura 12 – Os Diagramas de Voronoi (—) e Delaunay (...) de um conjunto de pontos . . . . .	24
Figura 13 – Ilustração dos níveis de uma <i>QuadTree</i> . . . . .	24
Figura 14 – Exemplos de <i>QuadTrees</i> construídas a partir de polígonos . . . . .	25
Figura 15 – Exemplos de interpolação dos mesmos pares de polígonos, mas com diferentes correspondências entre vértices . . . . .	28
Figura 16 – Análise comparativa entre metodologias para trajetória de vértices. . . . .	29
Figura 17 – Demonstração dos cinco tipos de correspondências exploradas por Kim e Cova (2007). . . . .	30
Figura 18 – Resultados para cada caso apresentado na Figura 17. . . . .	30
Figura 19 – Interseção entre Polígonos utilizada por (CARBUNESCU; WART, 2008) . . . . .	31
Figura 20 – Exemplo de interpolação obtida por (CARBUNESCU; WART, 2008) . . . . .	31
Figura 21 – Exemplo de Interpolação executado por Shiao <i>et al.</i> (2007). . . . .	31
Figura 22 – Interpolação executada por Radziewsky <i>et al.</i> (2016) . . . . .	32
Figura 23 – Fluxograma da abordagem proposta . . . . .	33



Figura 24 – Ilustração do processo de identificação de correspondências do exemplo apresentado na Figura 23 . . . . .	34
Figura 25 – Ilustração do processo de decomposição do exemplo apresentado na Figura 23	35
Figura 26 – Ilustração das interpolações do exemplo apresentado na Figura 23 . . . . .	37
Figura 27 – Divisão de polígonos baseada em malhas. . . . .	38
Figura 28 – Técnicas de triangulação e geração de malhas utilizadas. . . . .	39
Figura 29 – Ilustração do método de geração de malhas baseado em Quadtree, templates e Delaunay. . . . .	40
Figura 30 – Método de Divisão baseado em Diagrama de Voronoi. . . . .	42
Figura 31 – Visão Geral da Aplicação Desenvolvida . . . . .	44
Figura 32 – Painéis de controle para construção, edição e controle de animações . . . . .	45
Figura 33 – Exemplos de Anotações Temporais . . . . .	46
Figura 34 – Ilustração do conceito de Rastro durante uma animação . . . . .	46
Figura 35 – Interpolações entre pares de polígonos, satisfazendo aos requisitos R1 e R2.	48
Figura 36 – Comparação entre quatro métodos de divisão de polígonos durante a interpolação . . . . .	49
Figura 37 – Análise comparativa entre técnicas de triangulação e geração de malhas. . .	50
Figura 38 – Interpolação entre os estados Pensilvânia e Havaí. . . . .	52
Figura 39 – Interpolação entre os estados Illinois e Havaí. . . . .	52
Figura 40 – Interpolação entre os estados Oregon e Havaí. . . . .	52
Figura 41 – Exemplos de interpolação utilizando a abordagem proposta. . . . .	53
Figura 42 – Demonstração da visualização com mapas sobrepostos em diferentes cores.	55
Figura 43 – Visualização com mapas organizados lado a lado. . . . .	55
Figura 44 – Evolução CVP semestral, com mapas sobrepostos em diferentes cores. . . .	56
Figura 45 – Evolução CVP semestral, com mapas organizados lado a lado. . . . .	56
Figura 46 – Demonstração da abordagem proposta para visualizar a evolução anual de Crimes Violentos contra o Patrimônio - CVP. . . . .	58
Figura 47 – Demonstração da abordagem proposta, com a utilização do rastro, para visualizar a evolução anual de Crimes Violentos contra o Patrimônio - CVP.	58

## LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Triangulação de Delaunay com restrições . . . . .	20
Algoritmo 2 – Triangulação por Avanço de Fronteira . . . . .	21
Algoritmo 3 – Triangulação por Diagonais . . . . .	22
Algoritmo 4 – Algoritmo de Decomposição . . . . .	36

## SUMÁRIO

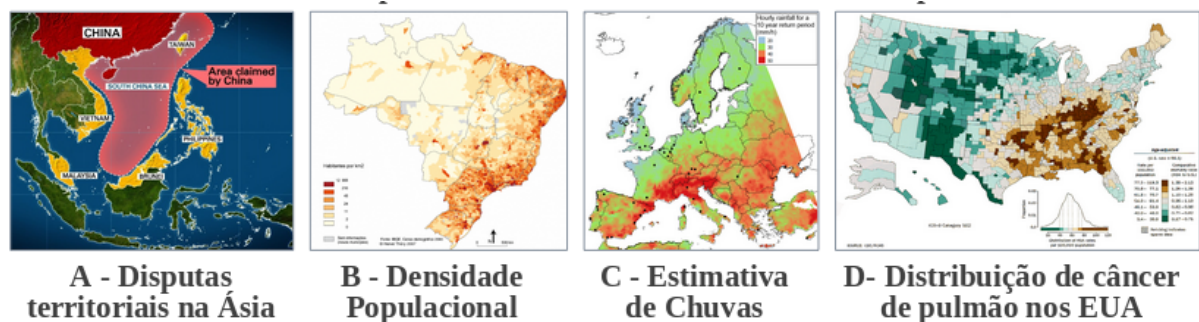
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	16
<b>1.2</b>	<b>Publicações</b>	16
<b>1.3</b>	<b>Estrutura do trabalho</b>	17
<b>2</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b>	18
<b>2.1</b>	<b>Conceitos preliminares</b>	18
<b>2.2</b>	<b>Divisão espacial</b>	19
<b>2.2.1</b>	<i>Triangulação e malhas triangulares</i>	19
<b>2.2.1.1</b>	<i>Triangulação por Delaunay</i>	20
<b>2.2.1.2</b>	<i>Triangulação por Avanço de Fronteira</i>	20
<b>2.2.1.3</b>	<i>Triangulação por Diagonais</i>	22
<b>2.2.2</b>	<i>Diagrama de Voronoi</i>	23
<b>2.2.3</b>	<i>QuadTree</i>	24
<b>3</b>	<b>TRABALHOS RELACIONADOS</b>	26
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b>	26
<b>3.2</b>	<b>Análise de fenômenos espaço-temporais</b>	26
<b>3.3</b>	<b>Interpolação de Polígonos</b>	28
<b>3.3.1</b>	<i>Interpolação 2D</i>	28
<b>3.3.2</b>	<i>Interpolação 3D</i>	32
<b>4</b>	<b>ABORDAGEM PROPOSTA</b>	33
<b>4.1</b>	<b>Visão Geral</b>	33
<b>4.1.1</b>	<i>Identificação de Correspondências</i>	34
<b>4.1.2</b>	<i>Decomposição</i>	35
<b>4.1.3</b>	<i>Interpolação</i>	36
<b>4.2</b>	<b>Divisão de polígonos</b>	37
<b>4.2.1</b>	<i>Técnicas baseadas em malhas triangulares</i>	38
<b>4.2.1.1</b>	<i>Técnicas utilizadas para geração de malhas</i>	39
<b>4.2.2</b>	<i>Técnica baseada em Voronoi</i>	41
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO</b>	43
<b>5.1</b>	<b>Contextualização</b>	43

5.2	Aplicação e Interface . . . . .	43
6	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . .	47
6.1	<b>Experimento 1: Interpolação entre pares de polígonos</b> . . . . .	47
6.2	<b>Experimento 2: Divisão de Polígonos</b> . . . . .	49
6.3	<b>Experimento 3: Interpolação entre conjuntos arbitrários</b> . . . . .	51
6.4	<b>Cenário exemplo de análise temporal de crimes</b> . . . . .	53
6.4.1	<i>Cenário: Evolução anual de Crimes Violentos contra o Patrimônio - CVP</i>	54
6.4.2	<i>Ferramentas atualmente disponíveis: Abordagens estáticas</i> . . . . .	54
6.4.3	<i>Experimentos com a abordagem proposta</i> . . . . .	57
7	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	59
7.1	<b>Principais contribuições</b> . . . . .	59
7.2	<b>Trabalhos Futuros</b> . . . . .	59
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	61

## 1 INTRODUÇÃO

Fenômenos geoespaciais, como disputas territoriais, exploração agrícola, ocupação urbana, eventos climáticos, regiões endêmicas e concentração de crimes, podem ser representados e analisados através de mapas temáticos construídos por diferentes técnicas (KRAAK; ORMELING, 2010; ROBERTSON *et al.*, 2007; ABHAR *et al.*, 2015). A Figura 1 apresenta alguns exemplos de mapas temáticos em diferentes contextos.

Figura 1 – Exemplos de fenômenos geoespaciais representados por mapas temáticos



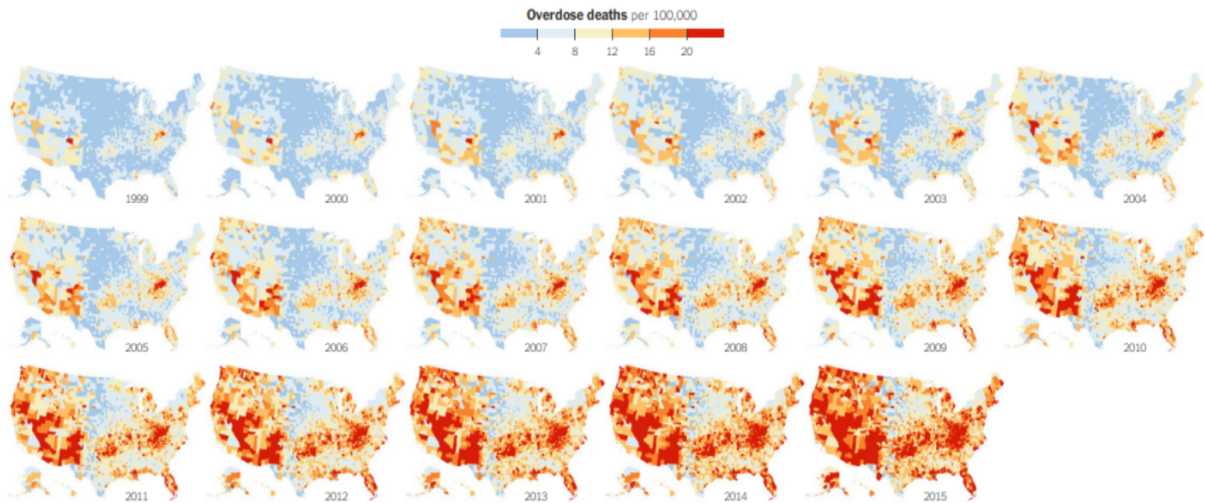
Fontes: A - Cable News Network - CNN (2018); B - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE (2007); C - Guerreiro *et al.* (2017); e D - National Center for Health Statistics - NCHS (2015);

A visualização desses fenômenos contribui para a compreensão de suas características e comportamento ao longo do tempo. Na análise criminal, por exemplo, agências de polícia, analistas e gestores de segurança pública buscam compreender como as regiões com alta taxa de criminalidade se transformam ao longo do tempo (SANTOS, 2013; BOWERS *et al.*, 2004; QUEIROZ NETO *et al.*, 2016). Atualmente, utilizando as ferramentas disponíveis neste contexto, mapas que representam diferentes períodos são mostrados lado a lado (MALIK *et al.*, 2011) ou sobrepostos com cores diferentes (QUEIROZ NETO *et al.*, 2016).

Entretanto, para a análise de períodos consideráveis de tempo, com múltiplos mapas temporais, estas abordagens estáticas de visualização podem não ser apropriadas. Com mapas dispostos lado a lado, uma grande área da tela é necessária para demonstrar todos os elementos da visualização, dificultando a compreensão e a análise comparativa, a Figura 2 ilustra este cenário. De maneira análoga, quando a sobreposição é utilizada, muitas cores diferentes para cada instante de tempo dificulta a distinção e compreensão dos mapas, como mostra a Figura 3.

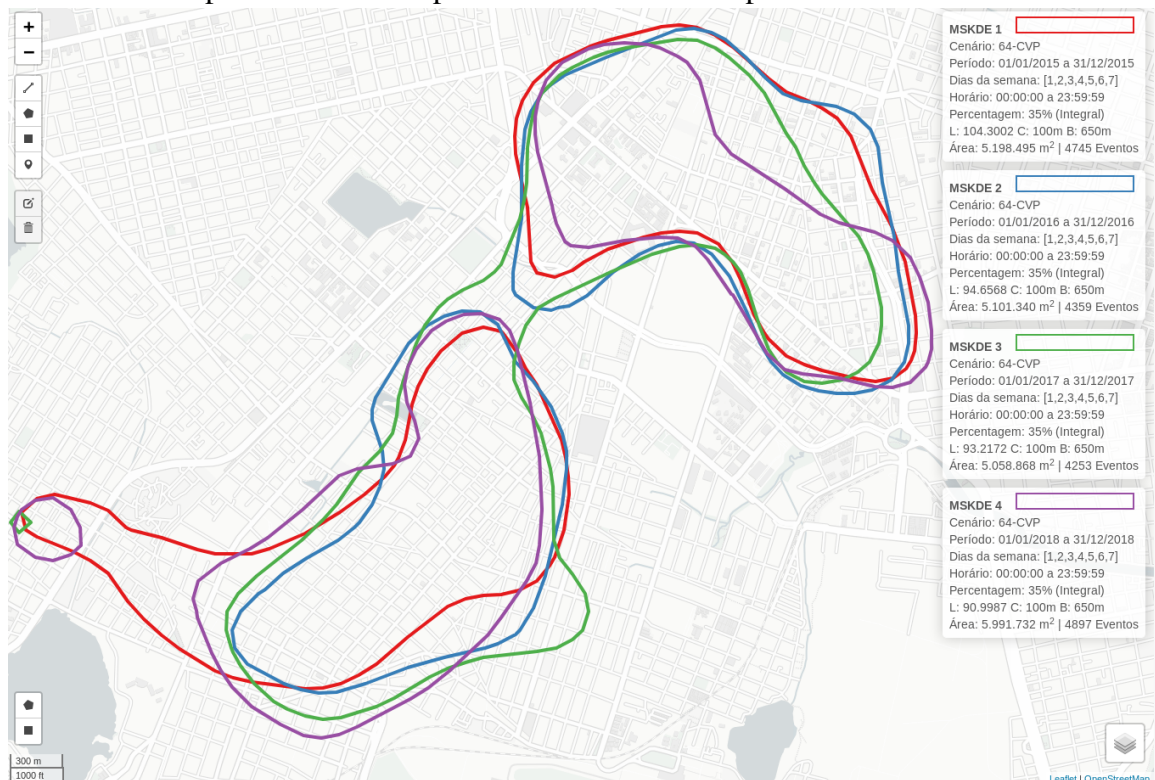
As animações, embora controversas no campo da visualização (TVERSKY *et al.*, 2002), podem ser um meio poderoso de contar histórias, portanto, são uma alternativa aos mapas estáticos na comunicação de mudanças dinâmicas (LEE *et al.*, 2015; KIM *et al.*, 2019).

Figura 2 – Exemplo de muitos mapas dispostos lado a lado em uma visualização: Como a epidemia de mortes por overdose de drogas se espalhou nos Estados Unidos



Fonte: The New York Times (2016).

Figura 3 – Exemplo de quatro conjuntos de polígonos sobrepostos, em que cada cor representa um mapeamento em um período diferente de tempo.



Fonte: Elaborada a partir da técnica proposta por Queiroz Neto *et al.* (2016).

Além disso, existem situações em que a aquisição de dados e o mapeamento desses fenômenos são processos complexos de alto custo (KIM; COVA, 2007; CARBUNESCU; WART, 2008), sendo realizado em intervalos distantes de tempo e dificultando uma análise temporal consistente. Considerando essa situação, Kim e Cova (2007) apresentam uma abordagem para

visualizar a evolução temporal dos incêndios florestais através da interpolação de polígonos, em um processo semiautomático com restrições para otimizar a representação das mudanças reais no fenômeno estudado.

Outras abordagens também representam fenômenos espaço-temporais usando um conjunto de polígonos definido para cada instante de tempo (CARBUNESCU; WART, 2008; ROBERTSON *et al.*, 2007; QUEIROZ NETO *et al.*, 2016). No entanto, não contemplam a interpolação e animação de polígonos arbitrários.

Outra restrição do problema é que as mudanças temporais de muitos fenômenos não são lineares. A cada instante pode haver um número diferente de regiões para exibição (ROBERTSON *et al.*, 2007; ABHAR *et al.*, 2015). Portanto, pode ocorrer a divisão ou fusão de regiões. Além disso, as regiões podem aparecer ou desaparecer ao longo do tempo. No contexto de uso da terra, por exemplo, uma área pode eventualmente ser dividida por novas estradas ou negociações entre proprietários (CARBUNESCU; WART, 2008).

Assim, identificam-se os seguintes requisitos para o problema de interpolação entre conjuntos de polígonos:

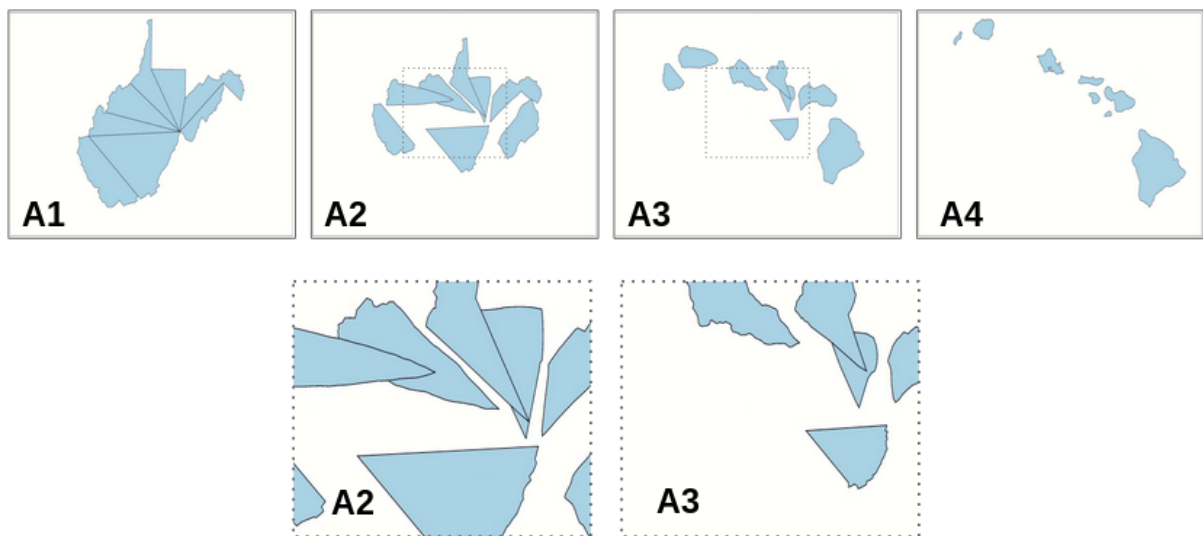
- R1 Os polígonos podem ser arbitrários, isto é, podem ser convexos ou côncavos e podem possuir furos;
- R2 Os polígonos podem ter um número diferente de vértices entre diferentes instantes;
- R3 Em cada instante, pode haver um número diferente de polígonos, ou seja, trata-se de um problema de interpolação muitos-para-muitos;
- R4 A interpolação deve ser suave para ser exibida como uma animação. Além disso, os polígonos não devem se interseccionar;
- R5 O processo não deve exigir intervenção do usuário, ou seja, deve ocorrer de forma totalmente automática.

Atualmente, existem várias abordagens para interpolar pares de polígonos (VELTMAN, 2017; SEDEBERG; GREENWOOD, 1992; SEDERBERG *et al.*, 1993; SHIAO *et al.*, 2007) e para análise temporal de fenômenos geoespaciais (ROBERTSON *et al.*, 2007; ABHAR *et al.*, 2015; KIM; COVA, 2007; MIZUTANI, 2009; SALAMAT; ZAHZAH, 2010). No entanto, segundo o levantamento realizado durante o desenvolvimento deste trabalho, não foram encontrados métodos ou ferramentas capazes de atender a lista de requisitos acima.

Veltman (2017), em particular, propôs uma biblioteca em *javascript* intitulada *Flubber*, que garante interpolações suaves entre pares de polígonos e permite interpolações um-

para-muitos e muitos-para-um, utilizando um método de divisão baseado em triangulação. Esta biblioteca não suporta totalmente interpolações muitos-para-muitos, exigindo que os usuários especifiquem cada par de interpolação explicitamente. Além disso, seu método simples de divisão pode resultar em sobreposições durante as transições, como mostra a Figura 4, comprometendo uma animação suave, principalmente quando as arestas dos polígonos são exibidas.

Figura 4 – Exemplo de divisão utilizando a biblioteca *Flubber* (VELTMAN, 2017): Interpolação (A1-A4) entre os estados *Virgínia Ocidental* (1 polígono) e *Havaí* (8 polígonos), dos Estados Unidos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Este trabalho propõe uma abordagem para interpolar conjuntos arbitrários de polígonos que atenda todos os requisitos definidos para este problema. Logo, pode ser utilizada para visualizar mudanças temporais de diferentes fenômenos espaciais através de animação. Para validação desta abordagem, foi desenvolvida uma aplicação que explora a evolução temporal de mapas de crimes.

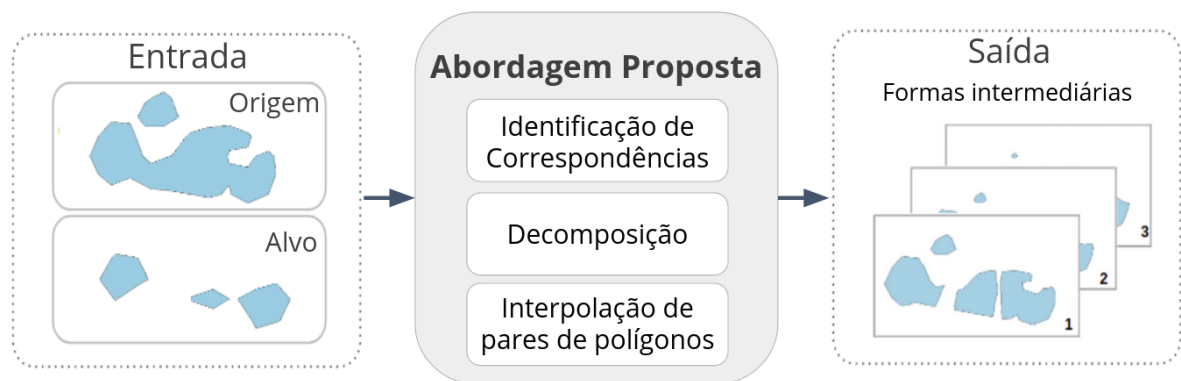
A abordagem proposta recebe como entrada apenas dois conjuntos de polígonos, definidos como **Origem** e **Alvo** (estágios inicial e final da interpolação, respectivamente), sem informações do domínio ou do contexto em que foram mapeados. E retorna as formas intermediárias para a construção de uma animação suave. Esta abordagem é dividida em três etapas distintas, para torná-la geral e adaptável à utilização em diferentes contextos de aplicação:

1. Identificação de correspondências entre conjuntos;
2. Decomposição;
3. Interpolações entre pares de polígonos.



Primeiro as correspondências entre conjuntos são identificadas para verificar quais polígonos devem surgir, desaparecer ou ser divididos durante a animação. Em seguida, realiza-se uma decomposição para reduzir o problema a uma lista de pares de formas, através de divisões espaciais. Por fim, cada interpolação um-para-um é executada, obtendo as formas intermediárias a serem animadas. A Figura 5 ilustra este processo.

Figura 5 – Abordagem Proposta



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 1.1 Objetivos

1. Elaborar uma abordagem para interpolar automaticamente conjuntos de polígonos arbitrários, de maneira suave e sem sobreposições;
2. Possibilitar a visualização de diferentes fenômenos geoespaciais através da animação;
3. Apresentar e comparar diferentes técnicas para divisão de polígonos;
4. Produzir um protótipo para aplicação da abordagem proposta na visualização e análise de mapas.

## 1.2 Publicações

Como resultado deste trabalho, foi gerada a seguinte publicação:

RAMOS, A. R. C.; SANTOS, E.; CAVALCANTE-NETO, J. B. A partition approach to interpolate polygon sets for animation. In: **2019 32nd SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images (SIBGRAPI)**. [S.l.: s.n.], 2019. p. 139–146.

### **1.3 Estrutura do trabalho**

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: O capítulo 2 apresenta os conceitos fundamentais à compreensão dos problemas abordados nesta pesquisa. O capítulo 3 debate e relaciona as abordagens correlatas à solução proposta. O capítulo 4 detalha a metodologia desenvolvida para interpolar conjuntos arbitrários de polígonos. O capítulo 5 apresenta a versão final de uma aplicação desenvolvida para validação da metodologia proposta nesta pesquisa. No capítulo 6, os resultados obtidos através da abordagem proposta são discutidos. Por fim, o capítulo 7 apresenta conclusões e norteia possíveis trabalhos futuros a partir das contribuições desta pesquisa.

## 2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

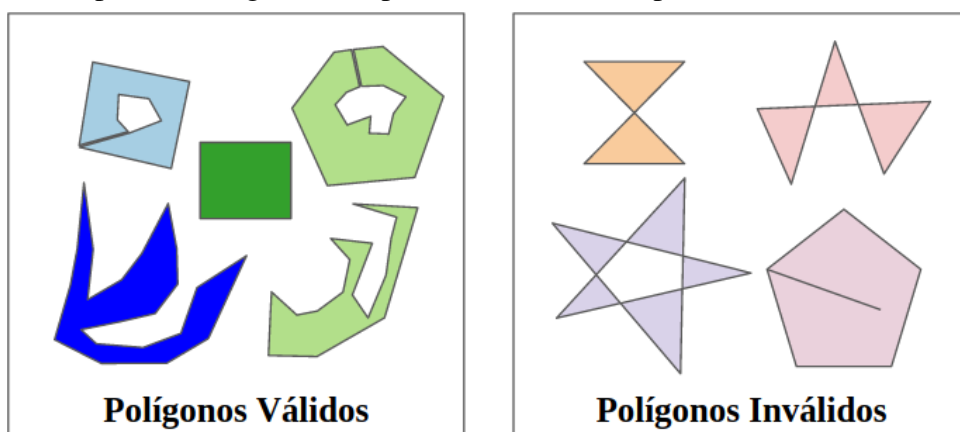
Este capítulo apresenta alguns dos conceitos e definições fundamentais para a construção das técnicas exploradas nesta pesquisa, como também para a compreensão efetiva das soluções desenvolvidas e suas restrições. Para tanto, a seção 2.1 pontua conceitos preliminares e a seção 2.2 explora a divisão espacial e suas técnicas subjacentes. Outros conceitos relevantes são abordados detalhadamente nos Capítulos subsequentes, como a interpolação (seção 3.3) e interseção entre polígonos (subseção 4.1.1).

### 2.1 Conceitos preliminares

A abordagem proposta, como demonstrado na Figura 5, recebe como entrada a representação de fenômenos geoespaciais em dois conjuntos de polígonos (**Origem** e **Alvo**), que são, em síntese, conjuntos de figuras planas e fechadas compostas por segmentos de reta.

Para não haver inconsistências em cálculos geométricos como interseção, divisão e interpolação durante a aplicação da abordagem, foi definida a premissa de que todos os polígonos nos conjuntos de entrada são ou serão transformados em polígonos simples. Ou seja, polígonos em que apenas as arestas adjacentes se intersectam, dividindo o plano geométrico nas regiões interna e externa ao polígono. A Figura 6 ilustra este conceito.

Figura 6 – Exemplos de Polígonos Simples (Válidos) e Complexos (Inválidos)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, todas as operações no âmbito da abordagem proposta partem do pressuposto de que os elementos dos conjuntos de entrada **Origem** e **Alvo** podem ser manipulados como uma sequência de vértices que representa uma linha poligonal simples e fechada.

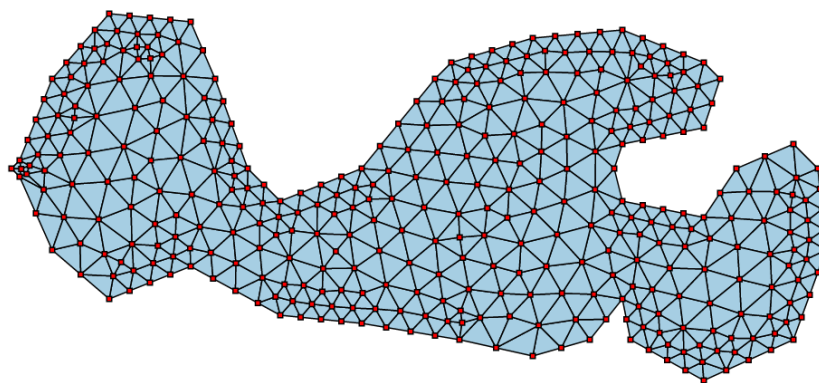
## 2.2 Divisão espacial

Em diversos fenômenos geoespaciais, as mudanças ao longo do tempo podem resultar na união ou ramificação de regiões (ROBERTSON *et al.*, 2007; ABHAR *et al.*, 2015; KIM; COVA, 2007; MIZUTANI, 2009; SHIAO *et al.*, 2007; BAJAJ *et al.*, 1996; BOISSONNAT, 1988; GIERTSEN *et al.*, 1990; CARBUNESCU; WART, 2008; MIZUTANI, 2012). Esta seção apresenta os conceitos relacionados às técnicas desenvolvidas nesta pesquisa para representar estas mudanças durante a interpolação entre conjuntos de polígonos. Assim, a subseção 2.2.1 apresenta conceitos e técnicas relacionadas à Triangulação, a subseção 2.2.2 descreve o Diagrama de Voronoi e a subseção 2.2.3 descreve o conceito de *QuadTree*.

### 2.2.1 Triangulação e malhas triangulares

A subdivisão ou discretização de domínios é parte de um problema clássico da geometria, a triangulação, que representa o domínio em questão através de um conjunto de simpleses, ou seja, a geometria mais simples para o número de dimensões trabalhadas. Em duas dimensões, o simplex é o triângulo e este processo resulta em uma malha triangular, que é um conjunto de triângulos conectados por arestas e vértices comuns. A Figura 7 ilustra uma malha triangular de um polígono simples.

Figura 7 – Malha Triangular gerada a partir de um polígono simples, composta por triângulos (Azul) conectados por arestas (Preto) e vértices (Vermelho) comuns.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Diversas técnicas são encontradas na literatura para este problema (FIGUEIREDO; CARVALHO, 1991). Para a triangulação de polígonos simples, destacam-se as seguintes técnicas: Delaunay com restrições (subseção 2.2.1.1), avanço de fronteira (subseção 2.2.1.2) e varredura por diagonais (subseção 2.2.1.3).

### 2.2.1.1 Triangulação por Delaunay

Uma das técnicas mais populares para triangulação se baseia no diagrama de Delaunay (EL-HAMALAWI, 2004; MAVRIPLIS, 1995). Em 2D, essa técnica maximiza a obtenção de triângulos equiláteros através do critério do círculo vazio (FIGUEIREDO; CARVALHO, 1991). Para polígonos simples existe uma variação dessa técnica, que recebe o conjunto de arestas como restrições (ou seja, as arestas do polígono necessariamente devem compor a triangulação). O pseudocódigo apresentado no Algoritmo 1 demonstra esse processo.

---

#### **Algoritmo 1:** Triangulação de Delaunay com restrições

---

**Entrada:** Conjuntos **P** e **A** de pontos e arestas de um determinado **Polígono**;

**Saída:** Lista de Triângulos **T**;

1 **início**

2     Criar pilha de Arestas Livres **AL**, inicializada com o conjunto **A**;

3     **enquanto** *Houver Arestas Livres* **faça**

4         Desempilhar aresta **AT**, da pilha de Arestas Livres **AL**;

5         Encontrar um ponto do conjunto **P** para construir um triângulo com a aresta **AT**, de modo que as duas novas arestas **A1** e **A2** formem o maior ângulo possível e que não tenham intercessão com os triângulos e restrições existentes;

6         Empilhar **A1** e **A2**, caso não existam;

7     **fim**

8 **fim**

---

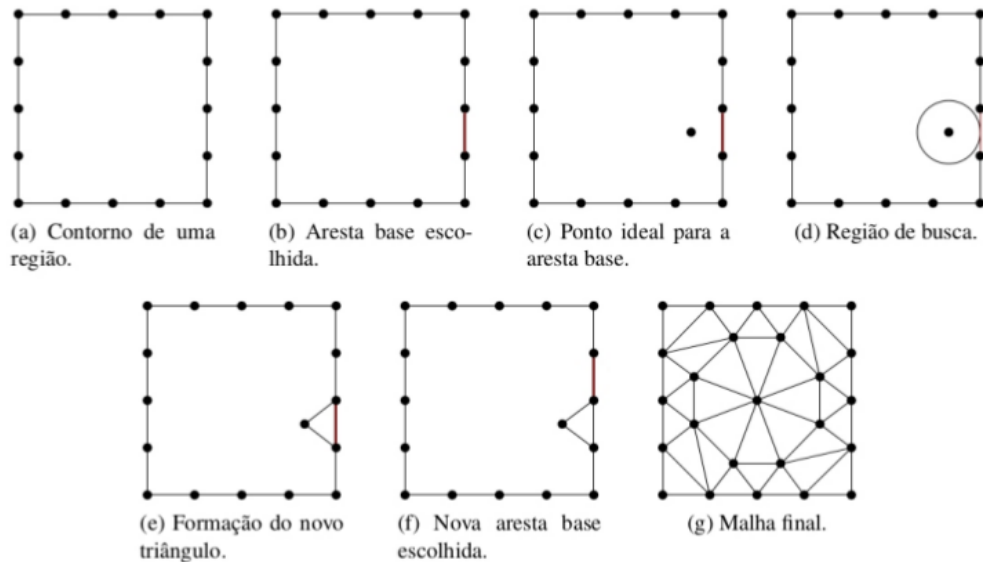
### 2.2.1.2 Triangulação por Avanço de Fronteira

Avanço de fronteira representa um conjunto de técnicas que buscam a discretização de um domínio a partir do respectivo limite, contorno ou fronteira (FIGUEIREDO; CARVALHO, 1991). Esta abordagem compreende aplicações tanto para triangulação de um conjunto de vértices quanto para a geração, otimização ou adaptação de malhas, quando há a possibilidade de inserção de novos vértices (MIRANDA *et al.*, 1999; CAVALCANTE-NETO *et al.*, 2005; FREITAS *et al.*, 2013). A Figura 8 ilustra o processo de geração de malha por avanço de fronteira.

Esta técnica se destaca pela abrangência e capacidade de generalização, não sendo limitada à triangulação de linhas poligonais fechadas e sem arestas internas (EL-HAMALAWI,

2004), como mostra o pseudocódigo apresentado no Algoritmo 2. Nela, a qualidade da discretização não é, necessariamente, a prioridade. Pois o critério para novos triângulos é adaptado em cada aplicação (MAVRIPLIS, 1995).

Figura 8 – Processo de geração de malha por Avanço de Fronteira



Fonte: Freitas *et al.* (2013).

---

**Algoritmo 2:** Triangulação por Avanço de Fronteira

---

**Entrada:** Conjuntos  $V$  e  $A$  de vértices e arestas orientadas de um determinado Polígono;

**Saída:** Lista de Triângulos  $T$ ;

1 **início**

2 Criar lista de triângulos  $T$  e pilha **Fronteira**;

3 Inicializar **Fronteira** com o conjunto  $A$ ;

4 **enquanto** *Houver Arestas na Fronteira*, **faça**

5 Desempilhar aresta  $AT$  da **Fronteira**;

6 Ranquear os vértices de  $V$  à esquerda de  $AT$ , com um critério arbitrário.

7 Selecionar um vértice do rank para construir um triângulo  $t$  com  $AT$ , de modo que as duas novas arestas  $A1$  e  $A2$  não cruzem a **Fronteira**;

8  $T.inserir(t)$ ;

9 Atualizar a **Fronteira** empilhando as arestas  $A1$  e  $A2$ , caso não existam;

10 **fim**

11 **retorna**  $T$

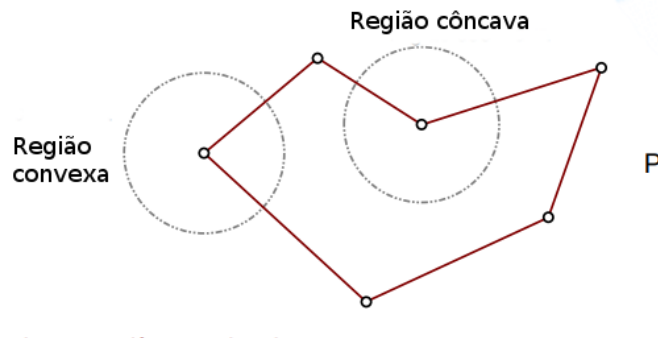
12 **fim**

---

### 2.2.1.3 Triangulação por Diagonais

Dada uma linha poligonal simples e fechada, sem furos, é possível discretizar considerando apenas seus lados e diagonais (FIGUEIREDO; CARVALHO, 1991). O pseudocódigo apresentado no Algoritmo 3 demonstra o fluxo de execução desta técnica e a Figura 9 apresenta um exemplo de linha poligonal simples e fechada, com regiões côncavas e convexas. A Figura 10 apresenta exemplos de diagonais válidas e inválidas obtidas durante a aplicação da técnica.

Figura 9 – Exemplo de linha poligonal simples e fechada



Fonte: Elaborada pelo autor.

---

#### Algoritmo 3: Triangulação por Diagonais

---

**Entrada:** Conjunto  $P$  de pontos de um determinado Polígono;

**Saída:** Lista de Triângulos  $T$ ;

1 **início**

2     Inicializar lista de Triângulos  $T$ ;

3     Encontrar ponto  $p_1 \in P$ , que possibilite um ângulo convexo (Vértice com menor valor no eixo  $X$ , por exemplo);

4     Formar triângulo  $t$ , com  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_n$  (vértices adjacentes à  $p_1$ );

5     **se** Nenhum outro vértice de  $P$  for interno ao triângulo  $t$ , **então**

6          $T$ .inserir( $t$ );

7         Realizar chamada recursiva para  $\{ p_2, p_3, p_4 \dots p_n \}$ ;

8     **senão**

9         Encontrar o vértice  $p_k$ , entre os vértices internos a  $t$ , mais próximo a  $p_1$ ;

10         Realizar duas chamadas recursivas:  $\{ p_1, p_2 \dots p_k \}$  e  $\{ p_1, p_k \dots p_n \}$ ;

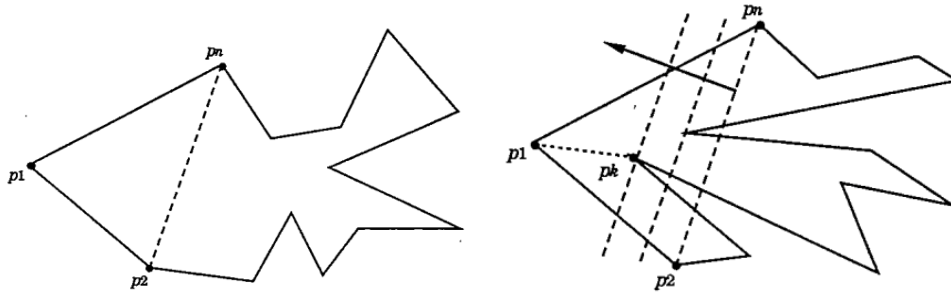
11     **fim**

12     **retorna** Lista  $T$

13 **fim**

---

Figura 10 – Casos base no processo de Triangulação por Diagonais

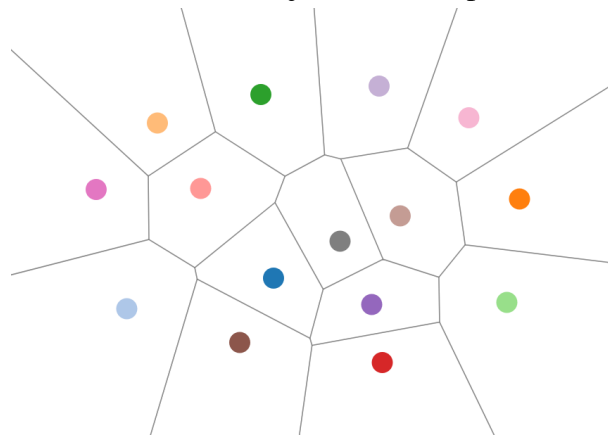


Fonte: Figueiredo e Carvalho (1991).

### 2.2.2 Diagrama de Voronoi

A discretização de um domínio possui muitas aplicações e utilidades, como, por exemplo, a obtenção de valores intermediários através da interpolação, quando apenas um conjunto restrito de informações é conhecido. O Diagrama de Voronoi decompõe um domínio em polígonos convexos disjuntos, que representam, em duas dimensões, a região de maior proximidade a cada vértice conhecido deste domínio. Neste sentido, os polígonos de Voronoi relativos a um determinado conjunto de  $n$  pontos decompõem o  $R^2$  em uma união de  $n$  polígonos convexos de interiores disjuntos (FIGUEIREDO; CARVALHO, 1991; AURENHAMMER, 1991). A Figura 11 ilustra este processo.

Figura 11 – Diagramas de Voronoi de um conjunto com 15 pontos aleatórios

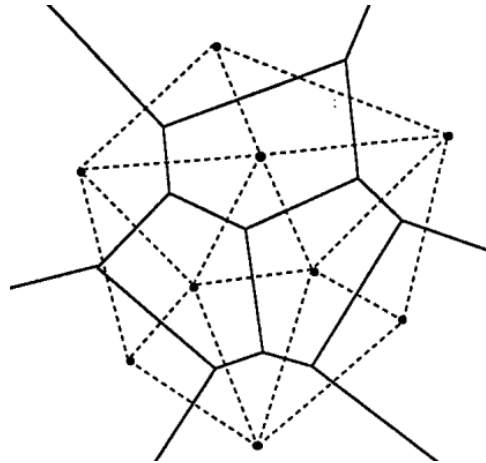


Fonte: Elaborada pelo autor.

Como descreve a subseção 2.2.1, as características geométricas inerentes aos simpleses facilitam cálculos quando a triangulação é utilizada, entretanto os triângulos resultantes podem não representar a região de influência de cada um dos vértices conhecidos. A Figura 12 demonstra um exemplo de diagrama de Voronoi e seu grafo dual, a triangulação de Delaunay, descrita na subseção 2.2.1.1, para ilustrar as diferenças destas técnicas aplicadas na subdivisão.



Figura 12 – Os Diagramas de Voronoi (—) e Delaunay (...) de um conjunto de pontos



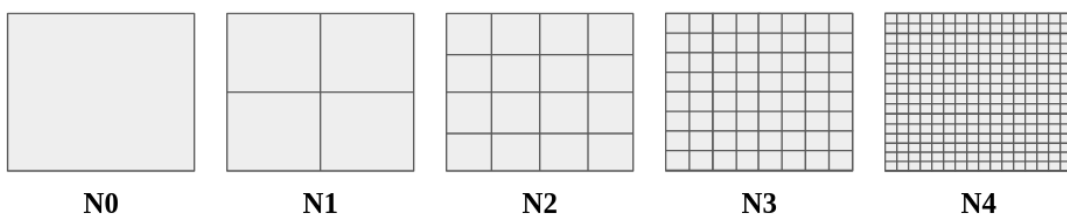
Fonte: Figueiredo e Carvalho (1991).

### 2.2.3 QuadTree

Além da Triangulação e do Diagrama de Voronoi, outras estratégias podem ser utilizadas para a decomposição de domínios e figuras geométricas. As estruturas de dados baseadas em árvores, por exemplo, possibilitam diversas aplicações em diferentes contextos. Seja na otimização de buscas ou na divisão espacial, as árvores são amplamente utilizadas na computação (OOI *et al.*, 2015; MIRANDA *et al.*, 1999).

Uma *QuadTree* é uma estrutura de dados baseada em árvore em que cada nó possui exatamente quatro filhos, ou seja, esta estrutura subdivide recursivamente o espaço bidimensional em quatro regiões (TABARRAEI; SUKUMAR, 2005; OOI *et al.*, 2015), como ilustra a Figura 13.

Figura 13 – Ilustração dos níveis de uma *QuadTree*

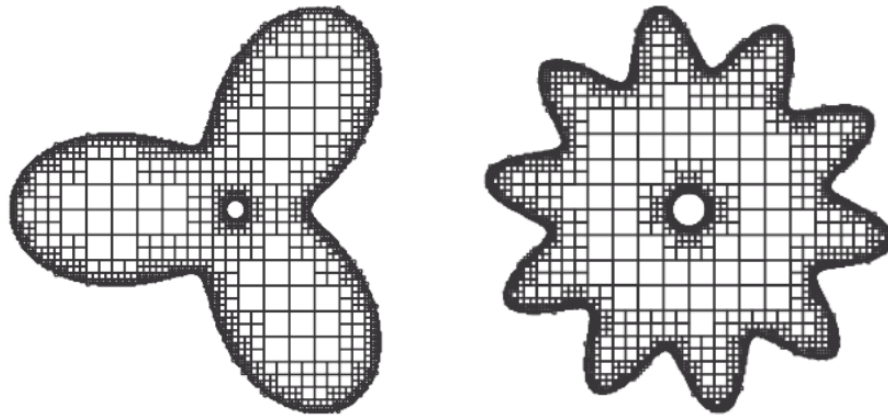


Fonte: Elaborada pelo Autor.

Níveis 0, 1, 2, 3 e 4 de uma *QuadTree*, com 4, 16, 64 e 256 células, respectivamente.

Além disso, o processo recursivo de geração de uma *QuadTree* pode considerar as arestas de um polígono, tendo como critério para novos níveis a interseção entre células-nós da árvore e as arestas do polígono. Logo, como demonstra a Figura 14, a decomposição da área mais próxima às arestas do polígono é maior.

Figura 14 – Exemplos de *QuadTrees* construídas a partir de polígonos



Fonte: Adaptada de Ooi *et al.* (2015).

Considerando que os polígonos explorados no contexto da abordagem proposta neste trabalho podem ser irregulares, com ângulos não convexos e arestas com comprimento desigual, a utilização de *QuadTrees* pode auxiliar o processo de divisão ao delimitar as regiões mais irregulares nos perímetros dos polígonos que serão divididos. A técnica de geração de malhas desenvolvida nesta pesquisa, que associa a divisão espacial com *QuadTrees*, é descrita detalhadamente na subseção 4.2.1.1.

### 3 TRABALHOS RELACIONADOS

Este capítulo apresenta os trabalhos relacionados a esta pesquisa. A seção 3.1 descreve o processo de levantamento bibliográfico realizado, a seção 3.2 aborda os trabalhos relacionados à Análise de Fenômenos Espaço-Temporais e a seção 3.3 apresenta os métodos que exploram a Interpolação de Polígonos.

#### 3.1 Introdução

O levantamento bibliográfico deste trabalho partiu da estratégia *Quick and Dirty Review (QnDReview)*, apresentada por Ji (2014) como uma abordagem para lidar com a quantidade gigantesca de artigos publicados atualmente. Em síntese, essa estratégia consiste em vasculhar e classificar muitos artigos em um curto período de tempo, para que se possa escolher bem quais artigos devem ser analisados detalhadamente, sem perder a completude necessária em um levantamento bibliográfico.

Logo, o levantamento de trabalhos correlatos partiu de palavras-chave genéricas, como interpolação, visualização de fenômenos espaço-temporais, divisão espacial e geração de malhas, reunindo todos os trabalhos encontrados com essas temáticas. Em seguida realizou-se uma leitura rápida, acompanhada da classificação da relevância dos artigos para o contexto desta pesquisa. Por fim, foram selecionados, analisados e debatidos os principais trabalhos e soluções encontradas. As próximas seções deste capítulo apresentam o resultado deste processo, dividido em duas categorias: Análise de fenômenos espaço-temporais (seção 3.2) e Interpolação de Polígonos (seção 3.3).

#### 3.2 Análise de fenômenos espaço-temporais

A análise de mudanças temporais em fenômenos espaciais é encontrada na literatura de diversas maneiras e em diferentes contextos e aplicações. Esta seção apresenta os trabalhos que exploram a representação destas mudanças através de abordagens estáticas e/ou animações. Também são apresentados os trabalhos correlatos que analisam os diversos aspectos destas mudanças em diferentes fenômenos, mas que não apresentam propostas de visualização.

No contexto da segurança pública, em que analistas e gestores buscam compreender mudanças temporais em regiões de alto risco, Queiroz Neto *et al.* (2016) propuseram uma solução rápida e eficaz para a geração de mapas hotspot, combinando *Marching Squares* e

*Kernel Density Estimation* - MSKDE para gerar polígonos que delimitam as regiões consideradas relevantes. Entretanto, a visualização proposta pelos autores é realizada com a sobreposição de mapas, tornando a análise temporal limitada a um número restrito de períodos. Apesar disso, a partir da técnica MSKDE é possível aplicar a interpolação de polígonos para representar mudanças temporais em mapas de crimes, com animação. Uma breve análise comparativa entre a sobreposição e a animação neste contexto é descrita na seção 6.4.

Algumas abordagens sugerem o uso da interpolação para construção de visualizações temporais, considerando que dados de diversos fenômenos geoespaciais geralmente são capturados e armazenados em grandes intervalos de tempo. Neste sentido, Kim e Cova (2007) apresentam uma abordagem aplicada a um caso específico, apresentado como *O Grande incêndio do Sul da Califórnia em 2003*, em que os autores demonstram êxito na representação real do fenômeno estudado. A metodologia proposta por Kim e Cova (2007) é precursora na representação da evolução temporal de fenômenos através da interpolação e os autores fundamentam o arcabouço deste problema. De maneira similar, Carbunescu e Wart (2008) apresentam uma ferramenta temporal e interativa para a análise da evolução do uso da terra, contida em *shapefiles* no formato SIG - Sistemas de Informações Geográficas.

Essas abordagens apresentam bons resultados e demonstram a viabilidade do uso de interpolação e animação para representar mudanças temporais em diferentes fenômenos. Entretanto, não executam interpolação entre conjuntos de polígonos arbitrários, com tamanho e topologia distintos. Logo, não são aplicáveis em outros contextos e não satisfazem os requisitos explorados nesta pesquisa.

Outras pesquisas são dedicadas à discussão de questões relacionadas às mudanças espaço-temporais dos polígonos usados em diferentes contextos. Robertson *et al.* (2007) apresentam uma abordagem para a análise espaço-temporal de polígonos que são espacialmente distintos e experimentam mudanças discretas ao longo do tempo, intitulada STAMP. Abhar *et al.* (2015) exploram a evolução histórica de explosões em *Cape Cod National Seashore* (CCNS), com o método STAMP. Mizutani (2009) e Mizutani (2012) apresentam um framework analítico do uso da terra para a compreensão dos processos de mudanças em relação aos tipos e formas de exploração. Por fim, SALAMAT e ZAHZAH (2010) apresentam um método *Fuzzy* para definir as relações espaço-temporais dos objetos. Entretanto, nenhum desses trabalhos apresenta uma ferramenta prática para visualização e análise das mudanças associadas aos respectivos fenômenos.

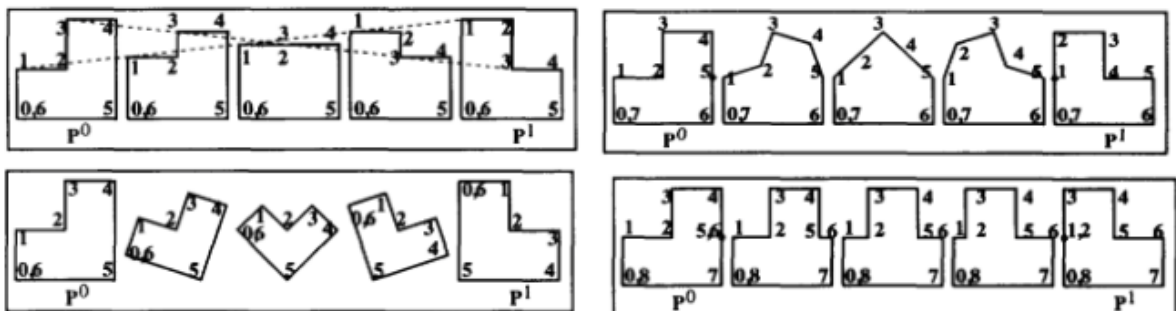
### 3.3 Interpolação de Polígonos

O problema de interpolação entre pares de polígonos não é novo e possui diversos estudos na literatura (SEDEBERG; GREENWOOD, 1992; SEDERBERG *et al.*, 1993; ALEXA, 2002; CARBUNESCU; WART, 2008; KIM; COVA, 2007; KAMVYSSELIS, 1997). Diante da quantidade de abordagens utilizadas neste contexto, a definição de um método passa, necessariamente, pela análise cuidadosa das características e aplicações de cada abordagem. Desta maneira, esta Seção apresenta as abordagens correlatas e destacadas como fundamentais para a compreensão e execução dos métodos desenvolvidos nesta pesquisa.

#### 3.3.1 Interpolação 2D

Sederberg e Greenwood (1992) propuseram um algoritmo para interpolação suavizada entre duas formas 2D, onde formas intermediárias são calculadas com pouca interação com o usuário. Os autores apontam a necessidade de uma topologia equivalente entre as formas e demonstram que a identificação de correspondências entre vértices nas formas inicial e final é determinante na suavização do processo de interpolação. Dada a correspondência entre vértices, os autores reduzem o problema à interpolação linear de vértices, ou seja, aplicação da equação paramétrica de uma reta. Nesta abordagem a identificação de correspondências consiste em considerar a sequência de vértices do polígono inicial como um “fio” que possa ser moldado, acomodando-o na forma final a partir do comprimento e ângulo formado pelas arestas dos polígonos. A Figura 15 demonstra como diferentes correspondências entre vértices alteram os polígonos intermediários em uma interpolação.

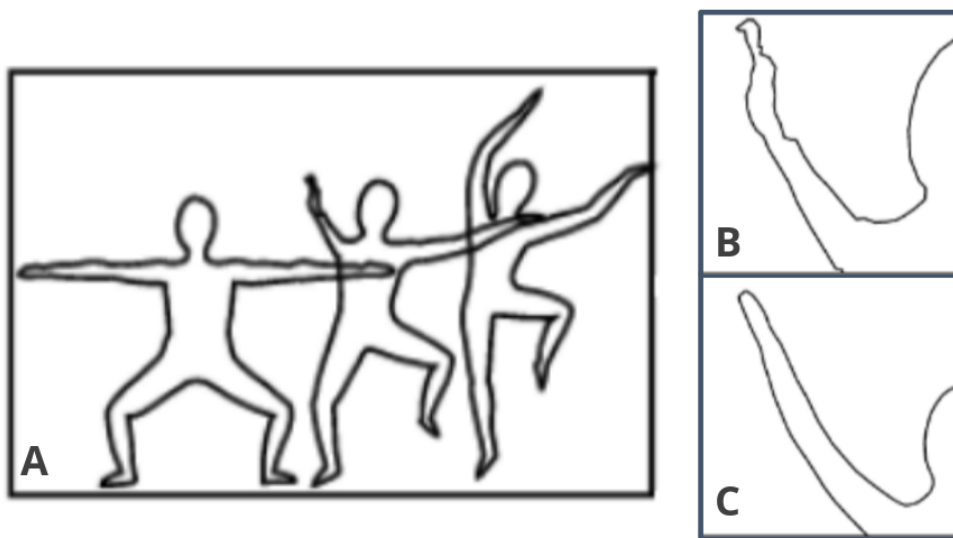
Figura 15 – Exemplos de interpolação dos mesmos pares de polígonos, mas com diferentes correspondências entre vértices



Fonte: Sederberg e Greenwood (1992).

Sederberg *et al.* (1993) propuseram um algoritmo para determinar as trajetórias que os vértices correspondentes devem percorrer em uma transição entre pares de formas 2D. Os autores sugerem que a definição de formas intermediárias deve ser obtida através da interpolação direta das representações intrínsecas (ângulos e comprimento de arestas) dos polígonos inicial e final, desconsiderando uma trajetória linear entre vértices. Os autores apontam que esta abordagem suaviza as transições e pode evitar a deformação de regiões durante o processo de interpolação. A Figura 16 demonstra uma análise comparativa apresentada pelos autores.

Figura 16 – Análise comparativa entre metodologias para trajetória de vértices.



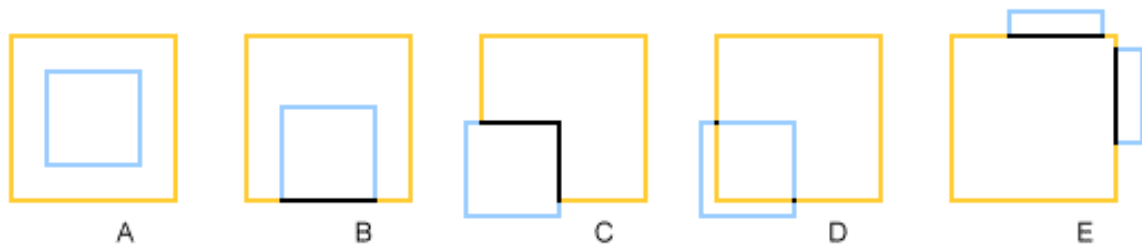
Fonte: Sederberg *et al.* (1993).

A e B - Deformação de regiões através da interpolação linear de vértices correspondentes e C - Suavização através da interpolação direta de ângulos e comprimentos de arestas

Kamvysselis (1997) apresenta uma metodologia que consiste em converter os polígonos origem e alvo em duas Imagens Circulares Estendidas - ICE, o equivalente bidimensional da Imagem Gaussiana Estendida IGE e, em seguida, utiliza essa representação para construir os valores intermediários. Esse método funciona bem, mas somente para polígonos convexos, onde a ICE é única.

Como descrito anteriormente, Kim e Cova (2007) apresentam uma abordagem para visualização da evolução temporal de incêndios florestais através da interpolação. Os autores apresentam um processo semiautomático, com um conjunto restrito de correspondências entre polígonos, para que a interpolação se aproxime da evolução real dos incêndios. A Figura 17 apresenta o escopo de correspondências exploradas pelos autores e a Figura 18, os respectivos resultados.

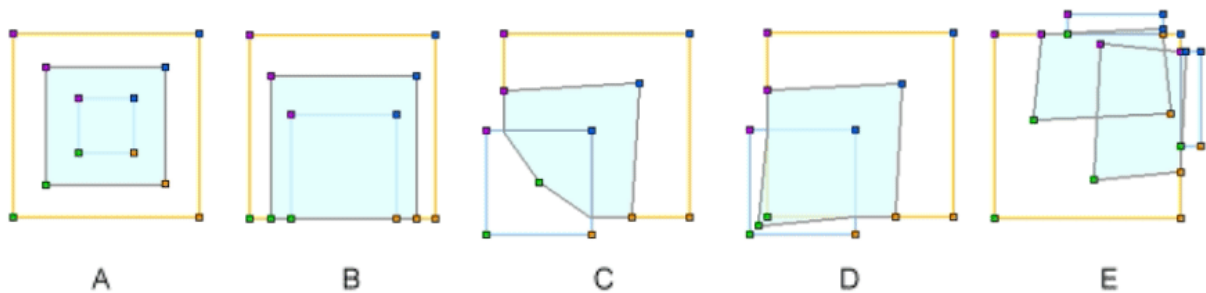
Figura 17 – Demonstração dos cinco tipos de correspondências exploradas por Kim e Cova (2007).



Fonte: Kim e Cova (2007).

A - Formas sem característica compartilhada; B - Com características compartilhadas; C - Formas adjacentes com características compartilhadas; D - Sobreposição; e E - Relações  $(n \rightarrow x*n)$  com características compartilhadas.

Figura 18 – Resultados para cada caso apresentado na Figura 17.



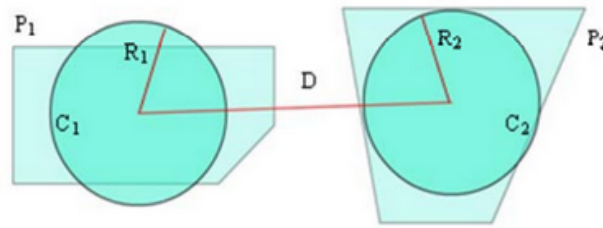
Fonte: Kim e Cova (2007).

Os contornos em amarelo e azul representam os estágios inicial e final da interpolação, respectivamente, enquanto o preenchimento em azul é o estágio intermediário (50% da interpolação)

Carbunescu e Wart (2008), que também exploram o problema da evolução temporal de fenômenos geoespaciais (seção 3.2), apresentam uma ferramenta baseada em interpolação, mas não executam interpolações um-para-muitos ou muitos-para-um, ou seja, não exploram o problema de divisão de polígonos. Os autores demonstram que a interpolação entre pares de formas com topologias distintas torna o problema de correspondência de vértices desafiador, incluindo a necessidade de inserção de pontos. Logo, concentram esforços na definição de um método satisfatório para este problema. Esta metodologia busca a redução de custo de trajetórias entre vértices ao longo da interpolação, testando todas as combinações possíveis. A verificação de correspondências é feita através do cálculo simplificado de interseção, como demonstra a Figura 19. A Figura 20 ilustra os resultados obtidos.

Shiao *et al.* (2007) apresentam uma técnica para interpolação entre fatias de imagens médicas para obter contornos intermediários consistentes. A técnica se baseia na construção de splines cúbicas, a partir de representações simplificadas dos polígonos, e realiza a interpolação

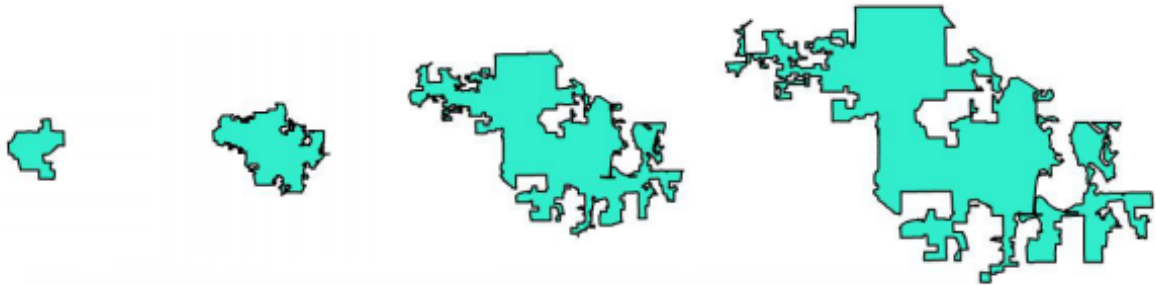
Figura 19 – Interseção entre Polígonos utilizada por (CARBUNESCU; WART, 2008)



Fonte: Carbucescu e Wart (2008).

Para dois polígonos  $P_1$  e  $P_2$ , sendo  $C_1$  e  $C_2$  círculos com áreas equivalentes às de  $P_1$  e  $P_2$ , sendo  $R_1$  e  $R_2$  os raios de  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, e  $D$  a distância entre os centróides de  $P_1$  e  $P_2$ ; Existe uma interseção se  $D < (R_1 + R_2)$ .

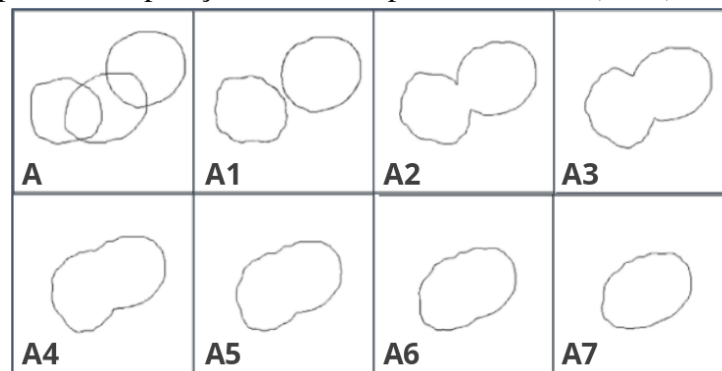
Figura 20 – Exemplo de interpolação obtida por (CARBUNESCU; WART, 2008)



Fonte: Carbucescu e Wart (2008).

dos dados paramétricos dessas splines de modo a reconstruir, gradativamente, o contorno desejado. De acordo com os autores, garantindo a devida discretização das splines construídas, a técnica resulta em soluções satisfatórias e de baixo custo computacional, resguardando as devidas restrições: funciona bem quando os pares de contorno são mutuamente centralizados e de tamanho e forma semelhantes. A Figura 21 demonstra um exemplo de interpolação com essa abordagem.

Figura 21 – Exemplo de Interpolação executado por Shiao *et al.* (2007).



Fonte: Adaptado de Shiao *et al.* (2007).

A - polígonos sobrepostos e A1-A7 - etapas da interpolação.

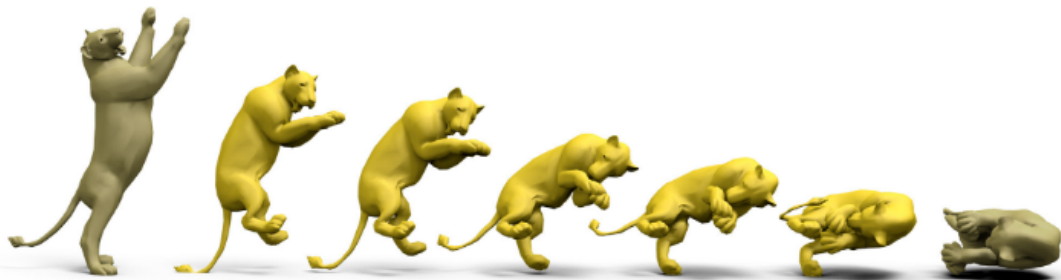


### 3.3.2 Interpolação 3D

Na reconstrução de formas 3D a partir de um conjunto de contornos transversais (BAJAJ *et al.*, 1996; BOISSONNAT, 1988; GIERTSEN *et al.*, 1990), foram encontrados problemas relacionados aos explorados nesta pesquisa: problema de correspondência (a identificação correta entre contornos de diferentes fatias); e o problema de ramificação, ou divisão (quando um contorno em uma fatia possui múltiplas correspondências em fatias adjacentes). A principal diferença, no entanto, é que o objetivo desses trabalhos é a reconstrução de uma superfície 3D. Portanto devem seguir as restrições físicas dos objetos que serão reconstruídos. Geralmente, uma restrição nessas abordagens é a necessidade de fatias semelhantes para evitar deformações e anomalias. Por outro lado, a abordagem proposta neste trabalho não possui tais restrições, sendo capaz de interpolar conjuntos arbitrários de polígonos.

Cashman e Hormann (2012), Radziewsky *et al.* (2016) e Brandt *et al.* (2016) exploram o problema de deformações durante a interpolação e animação de formas 3D não rígidas (animação de personagens, por exemplo) expressas em sequências de malhas. Essas abordagens apresentam resultados satisfatórios na redução de deformações, mas possuem um escopo diferente desta pesquisa. A divisão e a identificação de correspondências, que são etapas cruciais para a interpolação entre conjuntos de polígonos, não são relevantes para essas abordagens. Além disso, os autores relatam a necessidade de uma equivalência topológica entre as malhas que serão interpoladas. A Figura 22 ilustra uma interpolação executada por uma dessas metodologias.

Figura 22 – Interpolação executada por Radziewsky *et al.* (2016)



Fonte: Radziewsky *et al.* (2016).

## 4 ABORDAGEM PROPOSTA

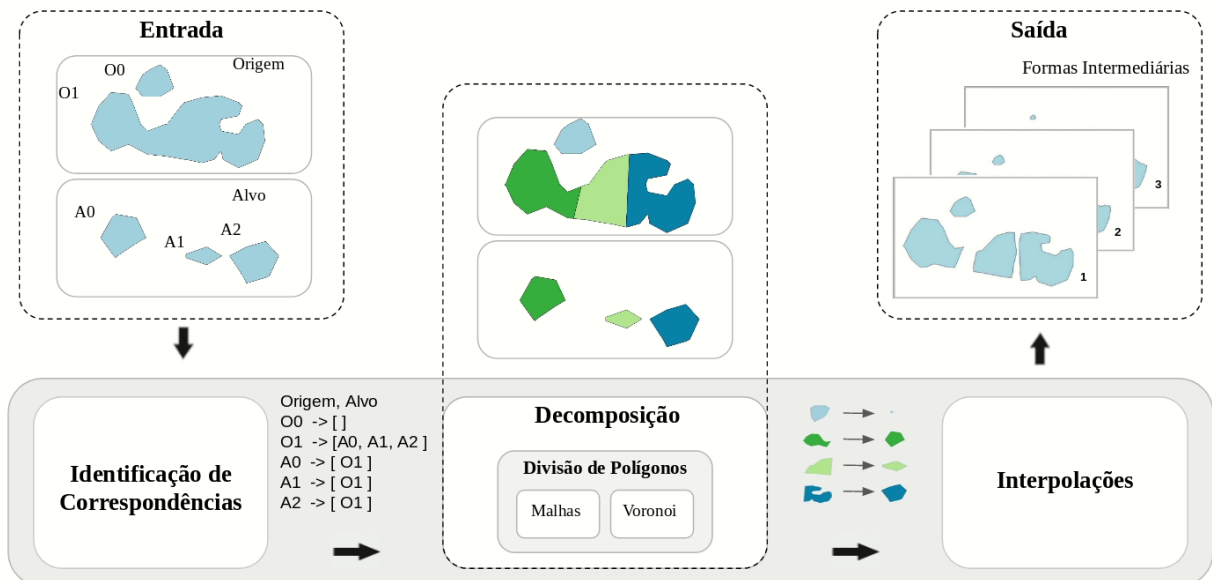
Este capítulo está organizado para apresentar os métodos e técnicas desenvolvidos neste trabalho. A seção 4.1 apresenta o método desenvolvido para a interpolação entre conjuntos arbitrários de polígonos e a seção 4.2 as técnicas empregadas em um dos problemas subjacentes: A divisão de polígonos.

### 4.1 Visão Geral

A abordagem proposta neste trabalho produz uma solução automática para interpolar suavemente conjuntos de polígonos arbitrários, possibilitando a construção de visualizações para a evolução temporal de diferentes fenômenos geoespaciais.

A Figura 23 ilustra a abordagem proposta, que recebe dois conjuntos de polígonos, chamados de **Origem** e **Alvo**, e retorna formas intermediárias para a construção de uma animação suave. Para torná-la geral e adaptável a diferentes contextos, esta metodologia foi dividida em três etapas: identificação de correspondências entre conjuntos (subseção 4.1.1), decomposição (subseção 4.1.2) e interpolações entre pares de polígonos (subseção 4.1.3).

Figura 23 – Fluxograma da abordagem proposta



Fonte: Elaborada pelo autor.

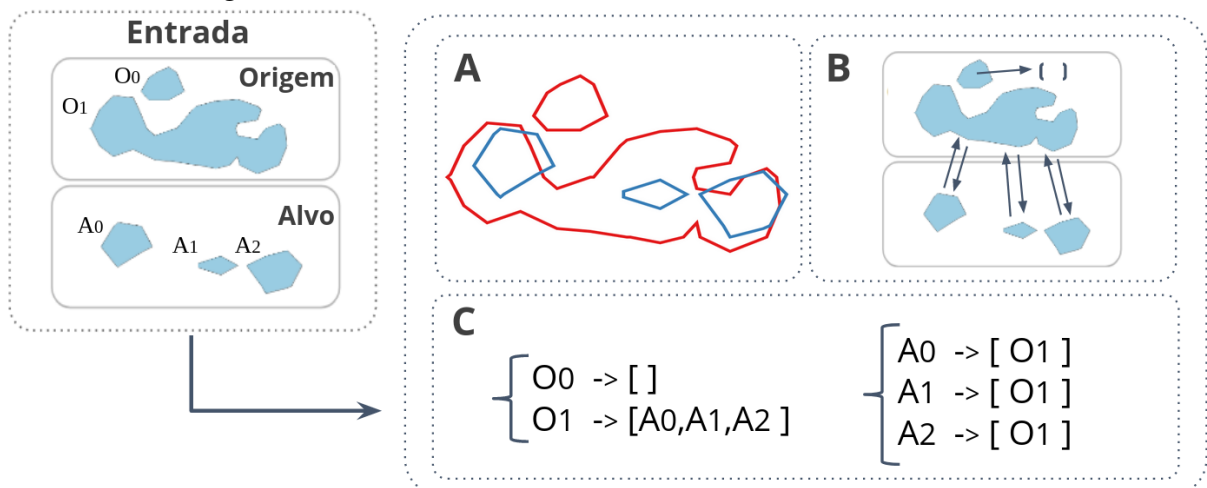
#### 4.1.1 Identificação de Correspondências

A primeira etapa da abordagem define as correspondências entre os conjuntos **Origem** e **Alvo**. Esta é uma etapa fundamental para identificar quais polígonos devem aparecer ou desaparecer ao longo da animação, bem como quais polígonos devem ser divididos na etapa de decomposição (subseção 4.1.2). A Figura 24 ilustra este processo.

Esta etapa da metodologia recebe os dois conjuntos e retorna uma lista de correspondências muitos-para-muitos, em que cada polígono de cada conjunto aponta para uma lista de polígonos correspondentes no conjunto adjacente. Esta lista dupla possibilita o acesso rápido às correspondências. Ao final desta etapa, cada polígono pode ter zero, um, ou vários polígonos correspondentes. As três situações devem ser analisadas separadamente na etapa subsequente.

Para que a metodologia seja geral e viabilize aplicações em diferentes domínios, as correspondências foram definidas de maneira puramente geométrica. Isso significa que haverá uma correspondência entre um polígono  $O_i$ , do conjunto **Origem** e o polígono  $A_j$ , do conjunto **Alvo**, se e somente se houver uma interseção espacial entre  $O_i$  e  $A_j$ . Ressalta-se, entretanto, que outras funções podem ser utilizadas neste contexto, como um raio de tolerância (CARBUNESCU; WART, 2008) ou algoritmos capazes de extrair informações do contexto em que os mapas estão inseridos.

Figura 24 – Ilustração do processo de identificação de correspondências do exemplo apresentado na Figura 23



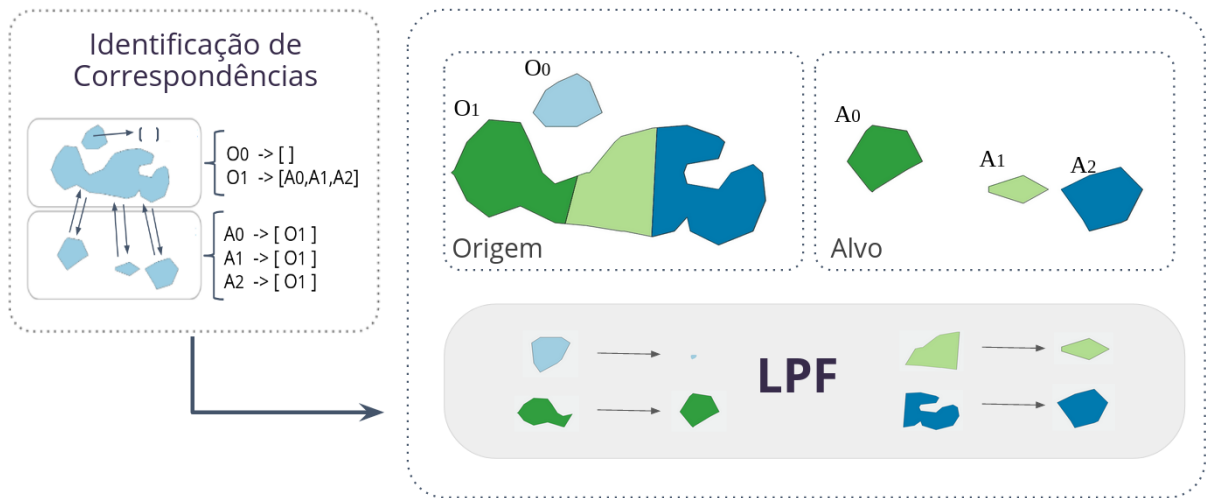
Fonte: Elaborada pelo autor.

(A) Conjuntos **Origem** e **Alvo** sobrepostos com as cores vermelho e azul, respectivamente, demonstrando as interseções espaciais existentes. (B) e (C) apresentam o resultado do processo de identificação de correspondências, ou seja, cada polígono de cada conjunto deve apontar para uma lista de polígonos correspondentes no conjunto adjacente.

### 4.1.2 Decomposição

A etapa de decomposição é responsável por reduzir a lista de correspondências a uma lista de pares de formas que serão interpoladas posteriormente. Para isso, recebe como entrada os conjuntos de polígonos **Origem** e **Alvo** e suas respectivas relações de correspondência. E retorna uma Lista de Pares de Formas - **LPF**. A Figura 25 ilustra esta etapa.

Figura 25 – Ilustração do processo de decomposição do exemplo apresentado na Figura 23



Fonte: Elaborada pelo autor.

O Algoritmo 4 executa a decomposição, recebendo como entrada **Origem** e **Alvo**, os conjuntos de polígonos de entrada; e **CO** e **CA**, as listas de correspondências de cada polígono dos conjuntos **Origem** e **Alvo**, respectivamente.

Como mencionado anteriormente, a lista de correspondência de cada polígono pode estar vazia, possuir apenas um ou diversos polígonos do outro conjunto. Quando a lista está vazia, duas situações podem acontecer: Se o polígono estiver na **Origem**, ele deve desaparecer suavemente durante a interpolação (linhas 4 a 6); se o polígono estiver no **Alvo**, deve aparecer suavemente (linhas 12 a 14). Em ambos os casos, o centroide do polígono é utilizado como correspondente, ou seja, o polígono se transforma em seu centroide, ou vice-versa, durante a animação que será construída.

Quando uma lista de correspondências possui um ou mais elementos, deve-se dividir o polígono em um número de regiões equivalente ao número de polígonos correspondentes (linhas 8 e 16), para definir, em seguida, os pares de formas entre as subdivisões dos conjuntos **Origem** e **Alvo** (linhas 19 a 23).

Diferentes técnicas podem ser utilizadas para realizar a divisão de polígonos e a

seção 4.2 apresenta as técnicas desenvolvidas neste trabalho. O processo de divisão deve receber um polígono **P** e a lista de polígonos correspondentes **PC**, resultando na divisão de **P** em sub-regiões, tal que cada sub-região esteja relacionada a cada elemento presente em **PC**. Quando **PC** possuir apenas um polígono, o processo de divisão apenas retorna o par de polígonos **P** e **PC[0]**. Ao final deste processo, os pares de formas resultantes são adicionados à **LPF**.

---

**Algoritmo 4:** Algoritmo de Decomposição

---

**Entrada:** Origem, Alvo, CO e CA

**Saída:** LPF

```

1 início
2   LPF ← ∅;
3   para cada  $O_i \in \text{Origem}$ , faça
4     se  $CO_i = \emptyset$  então
5        $c \leftarrow \text{Centroide}(O_i)$ ;
6       LPF.inserir( $[O_i, c]$ );
7     senão
8        $R_i \leftarrow \text{Dividir}(O_i, CO_i)$ ;
9     fim
10  fim
11  para cada  $A_j \in \text{Alvo}$ , faça
12    se  $CA_j = \emptyset$  então
13       $c \leftarrow \text{Centroide}(A_j)$ ;
14      LPF.inserir( $[c, A_j]$ );
15    senão
16       $R_j \leftarrow \text{Dividir}(A_j, CA_j)$ ;
17    fim
18  fim
19  para cada  $A_j \in \text{Alvo}$ , faça
20    para cada  $O_i \in CA_j$  faça
21      LPF.inserir( $[R_{ij}, R_{ji}]$ );
22    fim
23  fim
24  retorna LPF
25 fim
```

---

### 4.1.3 Interpolação

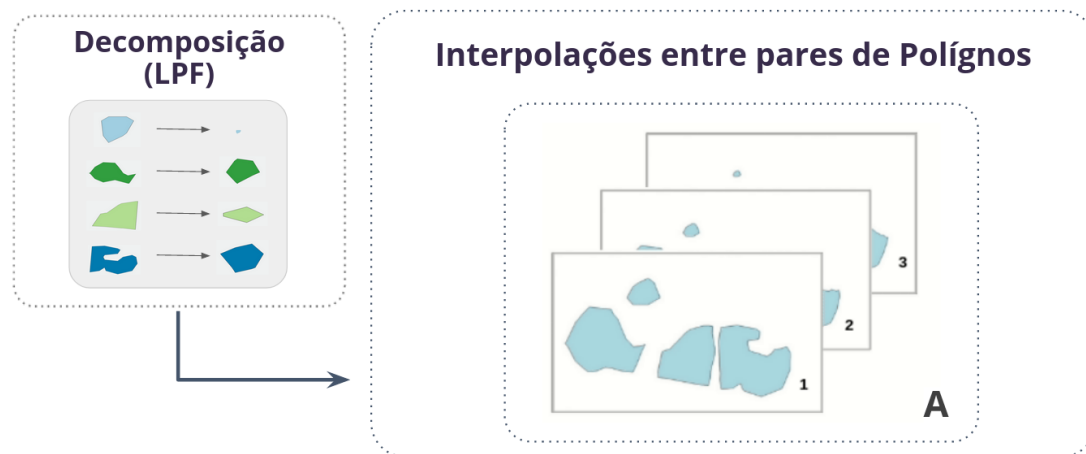
A terceira etapa desta abordagem recebe a lista de pares de formas - **LPF** e realiza as interpolações entre pares separadamente, gerando as formas intermediárias para a animação. A Figura 26 ilustra este processo, que é a última etapa da metodologia proposta.

A interpolação de pares de polígonos realizada nesta pesquisa tem como base as

técnicas apresentadas em (SEDEBERG; GREENWOOD, 1992; CARBUNESCU; WART, 2008; VELTMAN, 2017) e é composta pelos seguintes passos:

1. Verificar se o par de polígonos tem topologia equivalente e adicionar, se necessário, vértices de maneira uniforme ao longo do perímetro do polígono com menor quantidade de vértices.
2. Identificar correspondências entre vértices através da redução do custo de trajetória, como proposto em (CARBUNESCU; WART, 2008).
3. Gerar formas intermediárias interpolando os pares de vértices correspondentes com a equação paramétrica da reta.

Figura 26 – Ilustração das interpolações do exemplo apresentado na Figura 23



Fonte: Elaborada pelo autor.

(A) **Formas intermediárias** produzidas por cada interpolação entre elementos da Lista de Pares de Formas - **LPF**, para construção de uma animação suave entre os conjuntos **Origem** e **Alvo** do exemplo apresentado na Figura 23. Este exemplo ilustrativo também está disponível em vídeo, no endereço: <https://youtu.be/n1r5t3AQLxw>.

## 4.2 Divisão de polígonos

Um dos objetivos desta pesquisa foi verificar se a divisão de polígonos pode interferir significativamente nos resultados da interpolação entre conjuntos, confirmando se o requisito R4 - A interpolação deve ser suave para ser exibida como uma animação. Além disso, os polígonos não devem se cruzar - foi satisfeito.

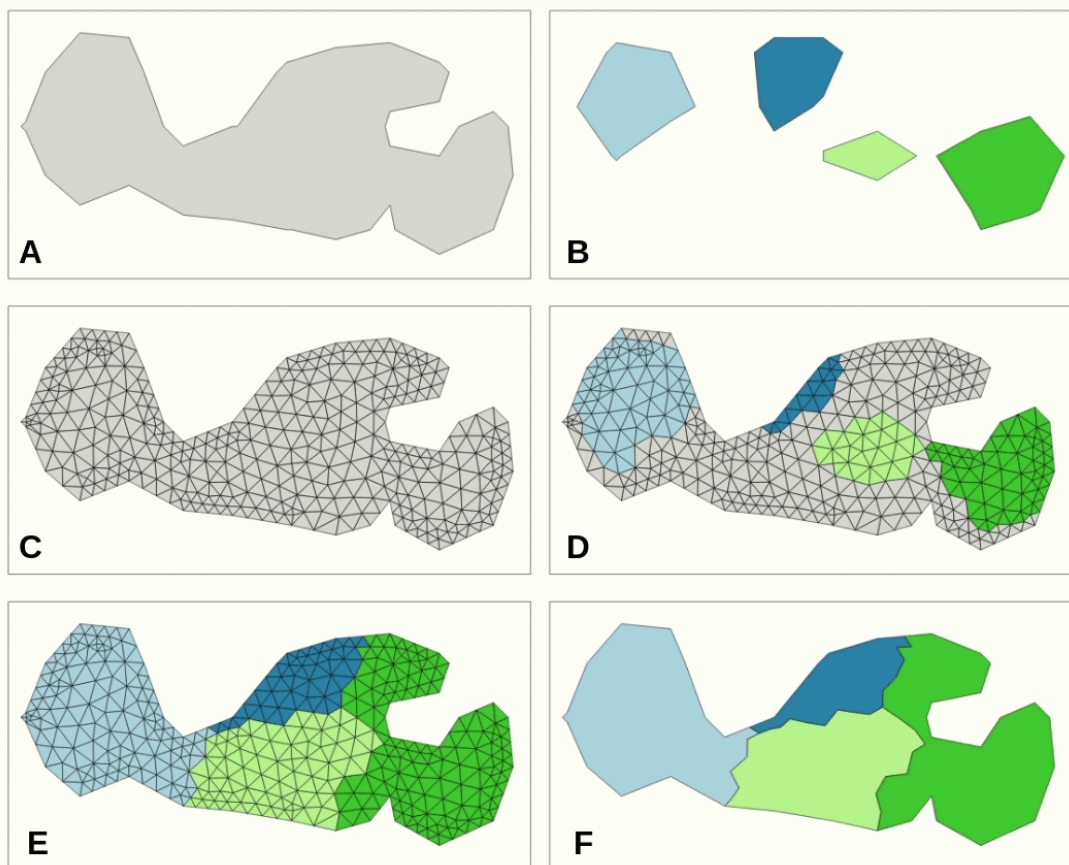
O processo de divisão recebe como entrada um polígono **P** e um conjunto de polígonos correspondentes **PC**, resultando em uma sub-região de **P** para cada polígono de **PC**. No contexto da interpolação entre conjuntos, este processo possibilita a transformação de uma correspondência um-para-muitos em uma lista de pares de polígonos que serão interpolados

separadamente, como discutido na subseção 4.1.2. Foram desenvolvidas duas técnicas para este problema: Uma baseada em malhas triangulares (subseção 4.2.1) e outra baseada em diagramas de Voronoi (subseção 4.2.2).

#### 4.2.1 Técnicas baseadas em malhas triangulares

A divisão de polígonos é um problema clássico em processamento geométrico que pode ser associado à geração de malhas triangulares (BERG *et al.*, 2008; PREPARATA; SHAMOS, 1985; EL-HAMALAWI, 2004; MAVRIPLIS, 1995; SHEWCHUK, 2002). A técnica baseada em malhas desenvolvida nesta pesquisa é ilustrada na Figura 27, com base nas seguintes etapas:

Figura 27 – Divisão de polígonos baseada em malhas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(A) O polígono **P** a ser dividido, (B) O conjunto de polígonos correspondentes **PC**, (C) Uma malha gerada a partir de **P**, (D) Os triângulos que interceptam cada polígono correspondente destacados com as respectivas cores, enquanto os triângulos sem interseção são apresentados em cinza, (E) Conclusão do processo de classificação dos elementos da malha em grupos e (F) Resultado da união de elementos de cada grupo, formando uma sub-região de **P** para cada polígono em **PC**.

1. Obter uma malha triangular para o polígono **P** (Figura 27C);
2. Classificar os elementos da malha em grupos associados a cada polígono correspondente (Figura 27D e E);
3. Unir cada grupo de elementos como uma única sub-região (Figura 27F).

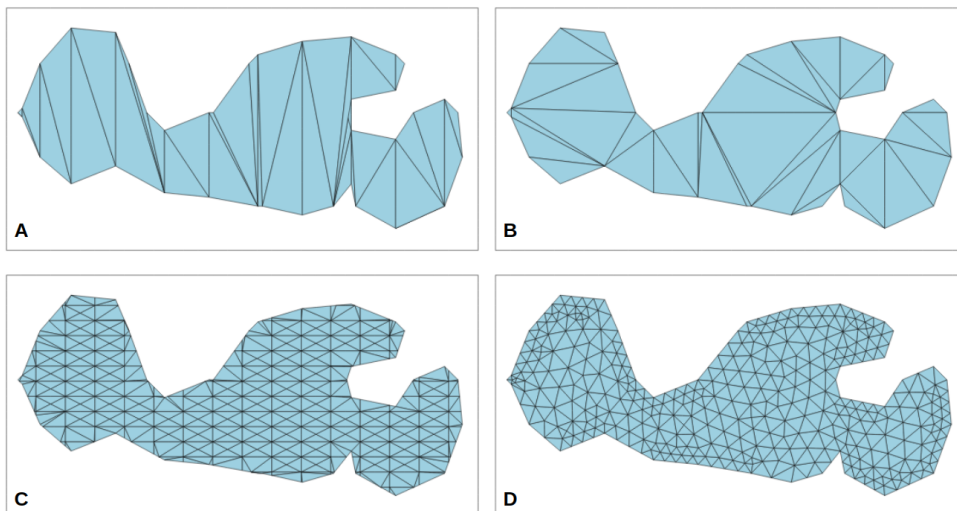
A primeira etapa deste processo contempla qualquer técnica de geração de malhas que receba um polígono como entrada e retorne um conjunto de triângulos que preencham o mesmo espaço deste polígono. As técnicas que foram implementadas e utilizadas neste contexto são apresentadas na subseção 4.2.1.1.

Para a classificação descrita na etapa 2, inicialmente os elementos da malha que interceptam cada polígono correspondente são associados a esse polígono (Figura 27D). Depois percorrem-se e associam-se os elementos sem interseção ao grupo relacionado ao polígono correspondente mais próximo (Figura 27E). Por fim, para a etapa 3, os triângulos de cada grupo são concatenados formando as sub-regiões desejadas (Figura 27F).

#### 4.2.1.1 Técnicas utilizadas para geração de malhas

Para obter bons resultados visuais na interpolação, é desejável que as sub-regiões resultantes do processo de divisão sejam suaves e contínuas. Foram implementadas diferentes técnicas de geração de malha para verificar o impacto da qualidade de seus elementos nos resultados, como mostra a Figura 28.

Figura 28 – Técnicas de triangulação e geração de malhas utilizadas.



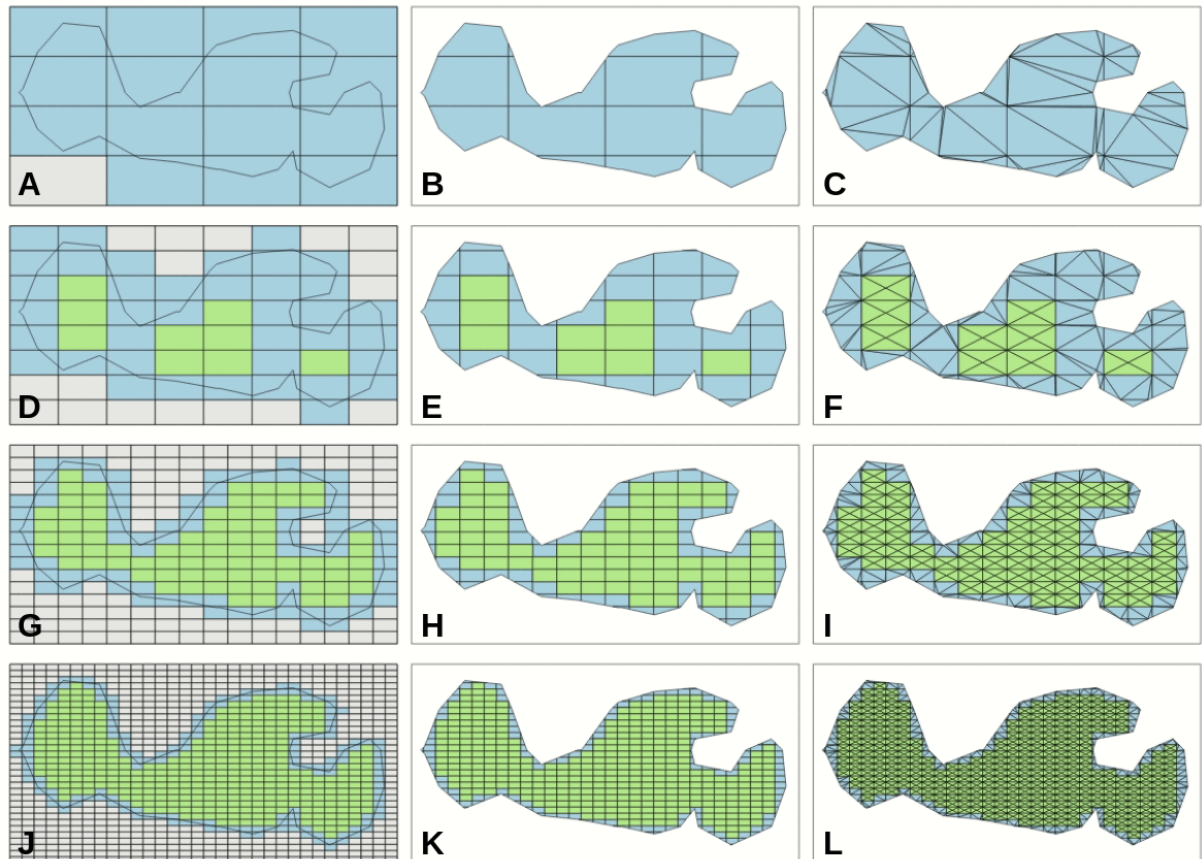
Fonte: Elaborada pelo autor.

(A) Triangulação por Diagonais, (B) Delaunay com restrições, (C) Malha gerada pelo método baseado em QuadTree, templates e Delaunay e (D) Malha gerada pelo método de Avanço de Fronteira (MIRANDA *et al.*, 1999).



Decidiu-se usar o método de triangulação por diagonais (subseção 2.2.1.3), um bom método de geração de malhas baseado em avanço de fronteira proposto por (MIRANDA *et al.*, 1999) e um método baseado em Quadtree (subseção 2.2.3), *templates* e Delaunay com restrições (subseção 2.2.1.1).

Figura 29 – Ilustração do método de geração de malhas baseado em Quadtree, templates e Delaunay.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em cinza a área ocupada por células **Out** da Quadtree, em azul por células **On** e em verde por células **In**. (A), (D), (G) e (J) apresentam todas as células dos níveis 2, 3, 4 e 5 da QuadTree, respectivamente. (B), (E), (H) e (K) o resultado do Item 2 - Obter a interseção entre as células de um nível da QuadTree e **P**. Por fim, (C), (F), (I) e (L) apresentam as malhas resultantes deste processo.

A motivação para desenvolver um método baseado em Quadtree, templates e triangulação de Delaunay surgiu a partir da demanda pela geração de uma malha mais regular, de modo que os limites das sub-regiões resultantes do processo de divisão pudessem ser mais suaves em relação às outras técnicas. A Figura 29 ilustra este método, demonstrando a geração de malhas para um polígono **P** em quatro diferentes níveis de uma QuadTree, que segue as seguintes etapas:

1. Construir uma QuadTree a partir dos vértices e arestas de **P**, com um número predeter-

minado de níveis, classificando interativamente as células como **In** - Internas, **On** – Que interceptam as arestas de **P**, e **Out** - Externas (Figura 29-A, D, G e J);

2. Obter a interseção entre as células de um nível da QuadTree e **P** (Figura 29-B, E, H e K);
3. Gerar a malha utilizando Templates e Triangulação de Delaunay (Figura 29-C, F, I e L).

O processo descrito no Item 2 consiste em descartar da QuadTree as células **Out**, considerando apenas células **In** e a área de interseção entre **P** e cada célula **On**. Já o Item 3 descreve a geração em si, onde um template é utilizado nas células **In** e a triangulação de Delaunay é utilizada na área restante.

#### 4.2.2 *Técnica baseada em Voronoi*

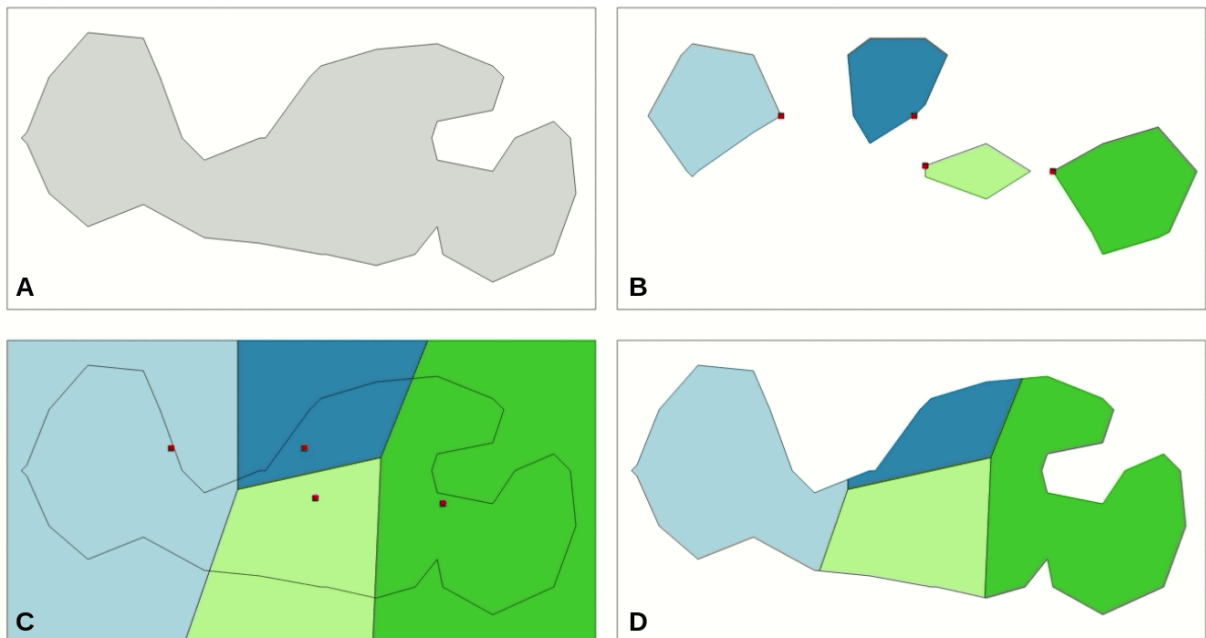
Embora o uso de malhas triangulares possa facilitar alguns cálculos e aplicações inerentes às características geométricas dos triângulos - geometria mais simples em duas dimensões - o processo de divisão descrito na subseção 4.2.1 não resulta em sub-regiões suaves e contínuas em todos os casos. A qualidade da divisão baseada em malhas depende diretamente das características geométricas dos elementos gerados (tamanho e simetria, por exemplo), podendo resultar em sub-regiões com bordas muito irregulares e comprometendo a interpolação, como pode ser observado na seção 6.2.

Uma alternativa para este problema foi encontrada elaborando-se um método para divisão de polígonos baseado em diagramas de Voronoi, como demonstra a Figura 30. Dado um conjunto de vértices (sementes), o diagrama de Voronoi consiste em polígonos convexos que delimitam a área mais próxima de cada vértice deste conjunto (AURENHAMMER, 1991). Esta característica é fundamental para a divisão e é aproveitada em nosso método, que segue os seguintes passos:

1. Obter o diagrama de Voronoi a partir de um conjunto com um vértice relacionado a cada polígono correspondente (Figura 30C);
2. Definir as sub-regiões a partir da interseção entre o polígono a ser dividido e os polígonos do diagrama de Voronoi descrito no passo anterior (Figura 30D).

O diagrama gerado no passo 1 terá o mesmo número de células que o número de polígonos correspondentes. Inicialmente, utilizou-se o centroide de cada polígono correspondente como semente, mas isso gerou sobreposições em alguns casos. Para evitar essas sobreposições, é escolhido como semente o vértice (Figura 30B, em vermelho) mais próximo do centroide do polígono a ser dividido.

Figura 30 – Método de Divisão baseado em Diagrama de Voronoi.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(A) O polígono  $P$  a ser dividido, (B) O conjunto de polígonos correspondentes  $PC$ , (C) O Diagrama de Voronoi e (D) Sub-regiões de  $P$  resultantes deste processo. Os vértices utilizados para construção do diagrama estão destacados em vermelho.

## 5 IMPLEMENTAÇÃO

Este capítulo apresenta a versão final de uma aplicação desenvolvida para validação da metodologia proposta nesta pesquisa. Desta forma, a seção 5.1 contextualiza o fenômeno abordado nesta aplicação e a seção 5.2 apresenta a interface gráfica desenvolvida e suas funcionalidades.

### 5.1 Contextualização

No Brasil, foram registradas 57.358 mortes violentas intencionais em 2018, constituindo uma taxa de 27,5 homicídios por 100 mil habitantes. Além disso, foram registradas 343 mortes de policiais civis e militares e 6.220 pessoas mortas em decorrência de intervenções policiais (FÓRUM BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA, 2019).

Resguardando os recortes de raça, gênero, faixa etária e fatores socioeconômicos, que demonstram discrepâncias relevantes no contexto da segurança pública, pode-se inferir que a violência no Brasil atinge a todos (FÓRUM BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA, 2019). Neste sentido, a segurança pública tem sido pautada nos mais diversos espaços de debate da sociedade brasileira, tanto nas esferas do poder público como no cotidiano da população. Assim, diversos pesquisadores concentram esforços na obtenção de soluções e contribuições para esta relevante questão.

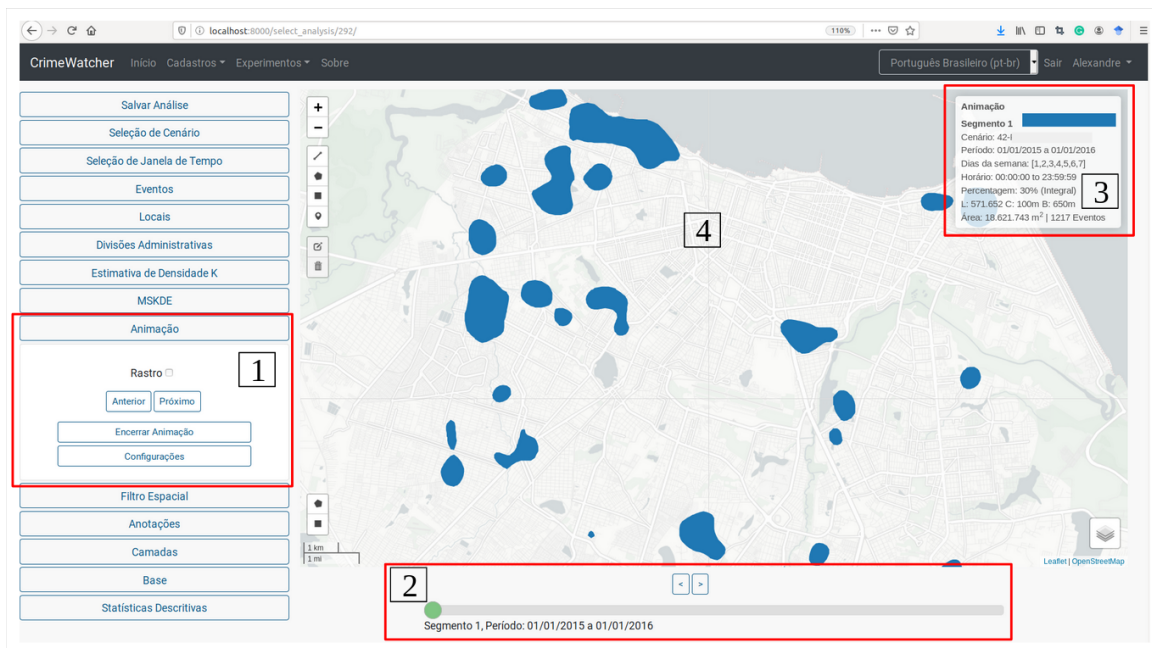
Como demonstrado na seção 3.2, a geração de mapas hotspots se destaca como abordagem predominante para a visualização e análise de dados relacionados à criminalidade. Nesta seara, agências de polícia e gestores da segurança pública apontam a necessidade de novas abordagens para representar a evolução temporal de mapas de crimes.

Portanto, baseado na solução apresentada no capítulo 4, foi desenvolvida uma aplicação que possibilita a análise temporal envolvendo múltiplos mapas através de animações e outras ferramentas visuais, buscando explicitar as mudanças em regiões de alto risco e o impacto de ações de estado ao longo do tempo.

### 5.2 Aplicação e Interface

A aplicação desenvolvida compõe uma plataforma de análise e visualização para o contexto da segurança pública, acrescentando a esta a possibilidade de animação entre mapas gerados através da técnica proposta por Queiroz Neto *et al.* (2016), ou seja, diferentes conjuntos

Figura 31 – Visão Geral da Aplicação Desenvolvida



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os quadros destacados em vermelho demonstram a aplicação proposta em uma plataforma completa de análise de mapas de crimes. Os quadros 1 e 2 apresentam a área para construção, configuração, customização e controle da animação. O quadro 3 apresenta o espaço para legenda de cada conjunto de polígonos. Por fim, o mapa destacado em 4 demonstra o espaço para exibição da animação.

de polígonos para cada instante de tempo.

Para esta aplicação, diferentes mapas são organizados em uma lista circular ordenada pelo tempo e as animações são construídas a partir da interpolação entre pares destes mapas, ou seja, pares de conjuntos de polígonos. Esta aplicação foi desenvolvida em *Javascript*, com as bibliotecas *D3*<sup>1</sup>, para tratamento de dados, *Leaflet*<sup>2</sup>, para manipulação de mapas, *Turf*<sup>3</sup>, para operações geométricas como interseção e união de formas e *Flubber*<sup>4</sup>, para interpolações entre pares de formas.

Ressalta-se que as variáveis, ferramentas e mecanismos utilizados para geração dos mapas não estão no escopo da aplicação desenvolvida nesta pesquisa. Entretanto são disponibilizadas na plataforma de análise e visualização de crimes em que esta aplicação está inserida.

A Figura 31 apresenta uma visão geral da aplicação desenvolvida, ilustrando a interfacs disponível ao usuário para criação e visualização de animações. A Figura 32 detalha

<sup>1</sup> <https://d3js.org/>

<sup>2</sup> <https://leafletjs.com/>

<sup>3</sup> <https://turfjs.org/>

<sup>4</sup> <https://github.com/veltman/flubber>

Figura 32 – Painéis de controle para construção, edição e controle de animações



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os quadros A e B demonstram os painéis de controle para iniciar ou encerrar uma análise com animações, permitem a utilização do rastro e a possibilidade de configurar parâmetros visuais. Nos quadros C e D podem ser observados os parâmetros disponíveis para configuração e estilização. O quadro E apresenta uma "linha do tempo" interativa, demonstrando o mapa atual e possibilitando ao usuário a requisição de animações não sequenciais (o usuário pode arrastar a barra para qualquer direção ou intervalo e uma nova animação será construída).

as opções disponíveis ao usuário para construção, configuração, customização e controle das animações.

A possibilidade de anotações temporais também foi considerada e desenvolvida. São marcadores como polígonos, linhas e pontos vinculados a um mapa ou período de tempo específico. Desta forma, estes marcadores são exibidos apenas quando o respectivo mapa é renderizado durante a animação. A Figura 33 ilustra este conceito.

Por fim, a Figura 34 ilustra a utilização do Rastro, uma ferramenta adicional desenvolvida para facilitar a compreensão de mudanças temporais. Com o Rastro, combinamos a animação com a abordagem estática de mapas sobrepostos em diferentes cores (QUEIROZ NETO *et al.*, 2016), mantendo visível, em cada iteração, o mapa do estágio inicial da animação.

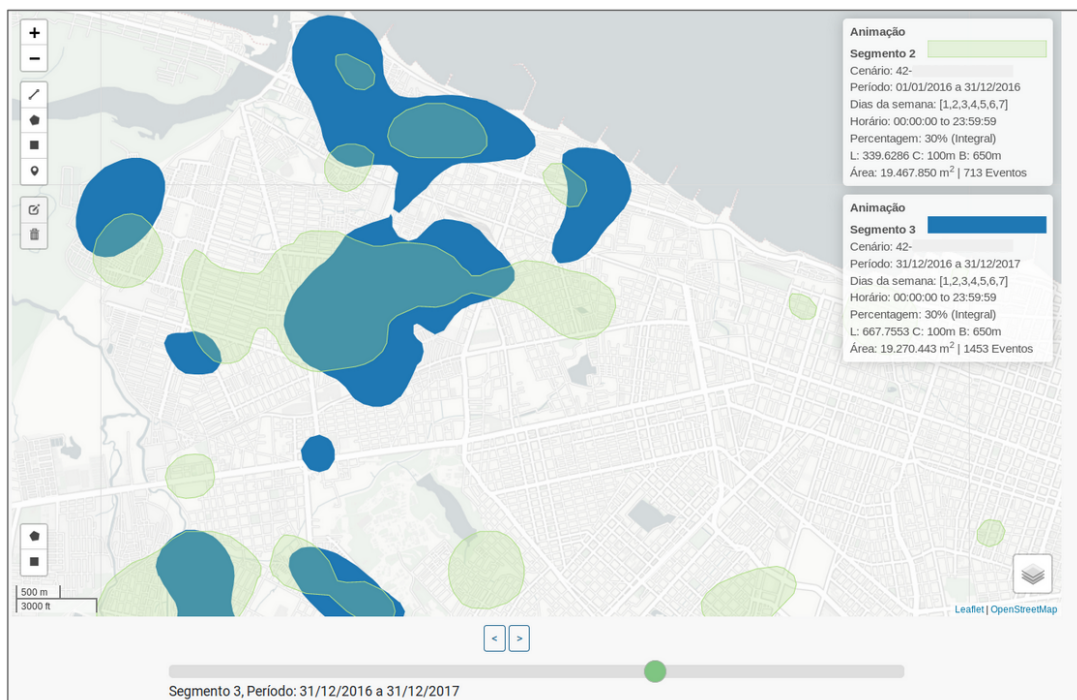
Figura 33 – Exemplos de Anotações Temporais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma linha, um polígono e um ponto são vinculados a um dos mapas em uma análise e são exibidos apenas durante a animação deste mapa, como marcadores temporais.

Figura 34 – Ilustração do conceito de Rastro durante uma animação



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em verde o conjunto de polígonos do rastro, ou seja, o conjunto **Origem** desta interpolação é renderizado durante toda a animação como uma referência. Em azul os polígonos animados, que resultam no conjunto **Alvo** desta interpolação ao final do processo.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo tem como objetivo apresentar e discutir os resultados obtidos através da abordagem proposta. Deste modo, os testes e experimentos buscam verificar a capacidade da metodologia em atender aos requisitos listados na introdução, como também a utilização da abordagem proposta como ferramenta para visualização de mudanças dinâmicas em diferentes fenômenos espaço-temporais.

Este capítulo está dividido em três experimentos distintos: A seção 6.1 apresenta o Experimento 1: Interpolação entre pares de polígonos. Em seguida, a seção 6.2 apresenta o Experimento 2: Divisão de Polígonos, por fim a seção 6.3 apresenta o Experimento 3: Interpolação entre conjuntos arbitrários. Além disso, a capítulo 6.4 apresenta um cenário de utilização da implementação descrita no Capítulo 5 dentro do contexto de segurança pública.

### 6.1 Experimento 1: Interpolação entre pares de polígonos

No capítulo 4, que descreve a metodologia proposta, explica-se que o problema de interpolação entre conjuntos de polígonos é reduzido, após a etapa de divisão espacial, a uma série de interpolações simples (um-para-um). Considerando tal situação, este experimento busca verificar a capacidade da metodologia proposta em executar a operação básica de interpolação entre pares de polígonos, processo descrito na subseção 4.1.3.

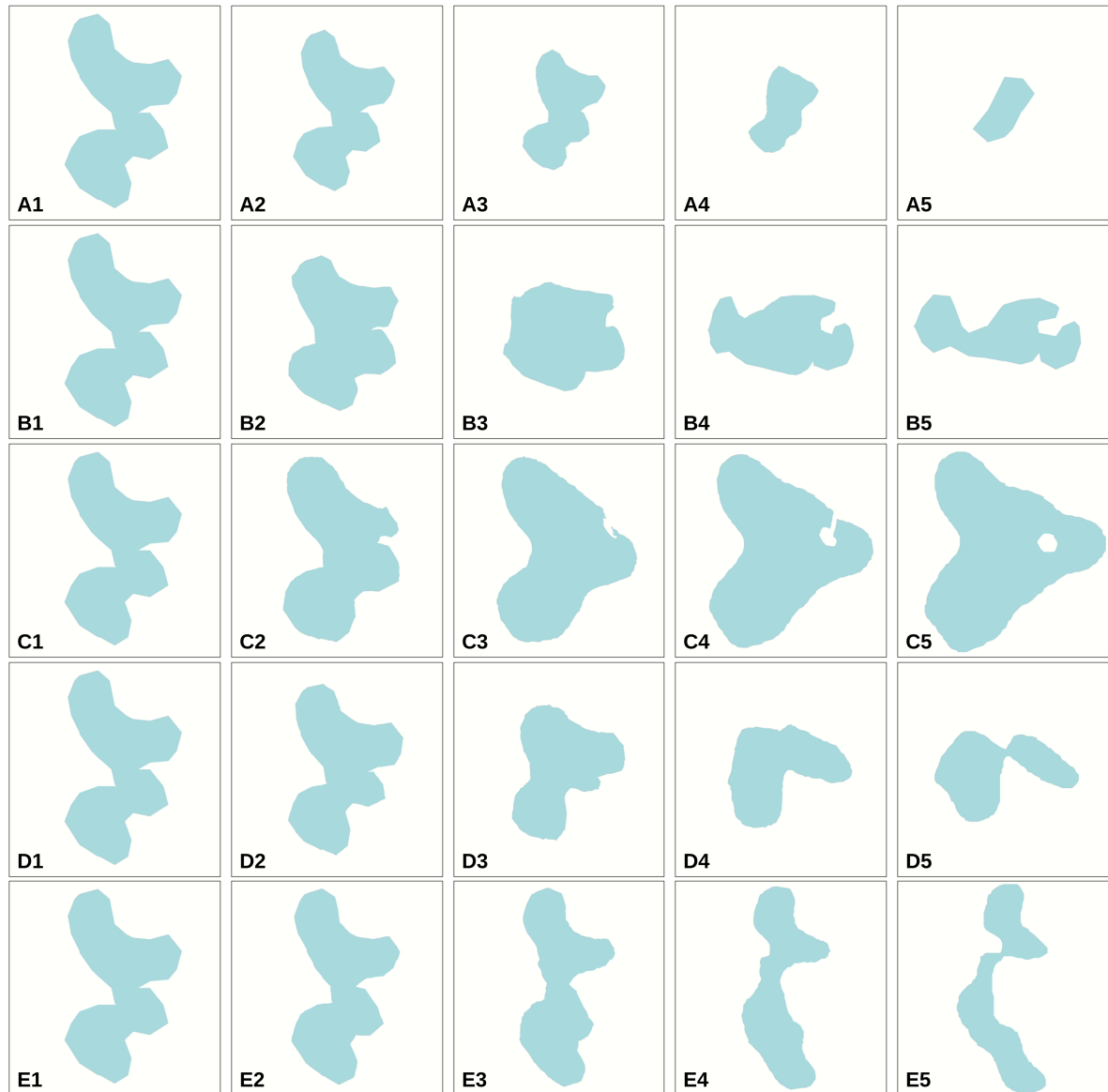
Em síntese, o principal objetivo desse experimento é comprovar que a abordagem atende aos requisitos R1 - Os polígonos podem ser arbitrários (convexos ou côncavos) e podem possuir furos; e R2 - Os polígonos podem ter um número diferente de vértices entre diferentes instantes de tempo.

Neste sentido, a Figura 35 ilustra cinco exemplos de interpolação entre pares de polígonos, tendo um único polígono origem e diferentes polígonos alvo, com geometrias arbitrárias e características peculiares. Através destes exemplos pode-se observar que a abordagem proposta possibilitou a construção de animações suaves nas diferentes situações requisitadas, atendendo de maneira satisfatória aos requisitos R1 e R2.

Ressalta-se, ainda, que em função de interpolações um-para-um constituírem uma etapa obrigatória da abordagem proposta, todos os experimentos subsequentes também podem demonstrar a capacidade da metodologia em lidar com este problema.



Figura 35 – Interpolações entre pares de polígonos, satisfazendo aos requisitos R1 e R2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O mesmo polígono Origem (A1, B1, C1, D1 e E1) é interpolado para cinco outros polígonos (A5, B5, C5, D5 e E5). A2-A4, B2-B4, C2-C4, D2-D4 e E2-E4 são os polígonos intermediários. Também disponível em vídeo, no endereço: <https://youtu.be/t83R9fdCYAs>.

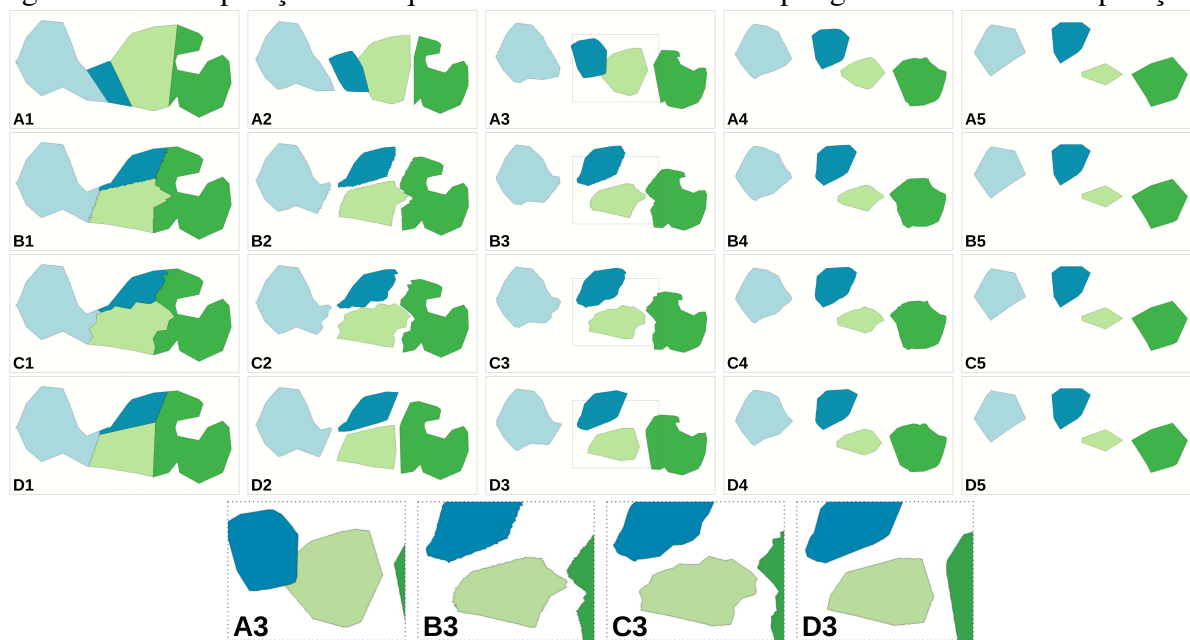
## 6.2 Experimento 2: Divisão de Polígonos

Conforme apresentado na subseção 4.1.2, a divisão espacial é um problema inerente à interpolação entre conjuntos de polígonos. Neste sentido, este experimento tem como objetivo verificar a influência dos resultados relacionados às diferentes técnicas de divisão de polígonos na construção de animações suficientemente suaves e sem sobreposições.

Em suma, este experimento busca verificar a capacidade da abordagem proposta em atender aos requisitos R3 - Em cada instante de tempo, pode haver um número diferente de polígonos (interpolação de muitos para muitos) e R4 - A interpolação deve ser suave o suficiente para ser exibida como uma animação e os polígonos não devem se intersestar.

Com base nos métodos descritos na seção 4.2, este experimento apresenta uma análise comparativa utilizando três técnicas baseadas em malha (Diagonais, Avanço de Fronteira e QuadTree-Templates-Delaunay) e uma baseada em Voronoi. A Figura 36 ilustra a aplicação das quatro técnicas em uma interpolação que divide o mesmo polígono em quatro correspondentes.

Figura 36 – Comparação entre quatro métodos de divisão de polígonos durante a interpolação



Fonte: Elaborada pelo autor.

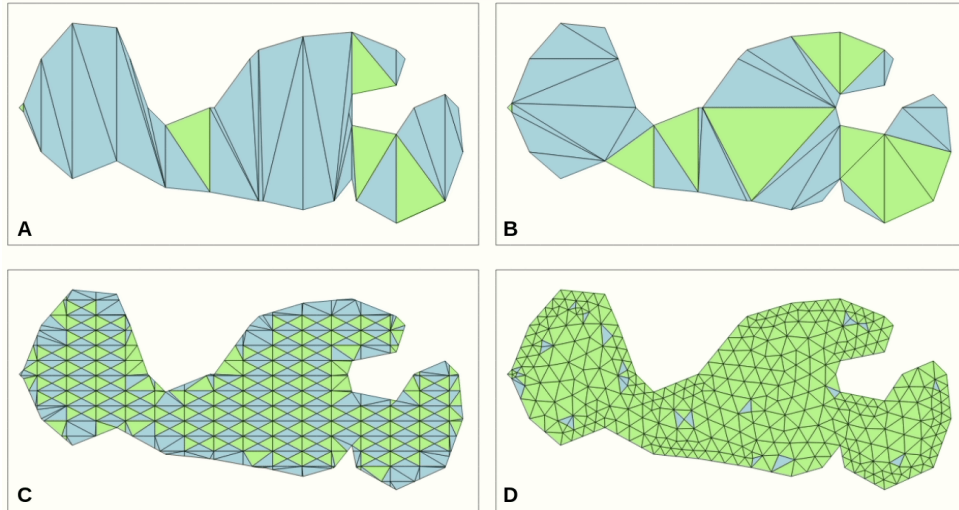
A linha A1-A5 ilustra a interpolação com a técnica de triangulação por Diagonais, B1-B5 o método baseado em QuadTree-Templates-Delaunay, C1-C5 avanço de fronteira (MIRANDA *et al.*, 1999) e, por fim, D1-D5 apresenta a técnica baseada em Voronoi.

Também disponível em vídeo, no endereço: [https://youtu.be/pFi\\_eP7LXgw](https://youtu.be/pFi_eP7LXgw).

A Figura 37 apresenta uma análise comparativa da qualidade dos triângulos gerados pelas diferentes técnicas baseadas em malha utilizadas na Figura 36. Neste sentido, a técnica de

avanço de fronteira (MIRANDA *et al.*, 1999) gerou uma malha de qualidade superior (96% bons triângulos) às técnicas quadtree-template-delaunay (41% bons triângulos) e por Diagonais (23% bons triângulos).

Figura 37 – Análise comparativa entre técnicas de triangulação e geração de malhas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(A) Triangulação por Diagonais, (B) Delaunay com restrições, (C) Malha gerada pelo método baseado em QuadTree, templates e Delaunay e (D) Malha gerada pelo método de Avanço de Fronteira (MIRANDA *et al.*, 1999). A métrica utilizada foi a relação entre o raio do círculo inscrito e circunscrito de cada elemento (intervalo entre 0 e 1, onde 1 corresponde a um triângulo equilátero). Os triângulos de alta qualidade ( $\geq 0.8$ ) estão destacados em verde e os de baixa qualidade ( $< 0.8$ ) em azul. Em (A), 23% são de alta qualidade, (B) 32%, (C) 47% e (D) 96%.

A interpolação utilizando a técnica de divisão baseada em malhas com a triangulação por diagonais, ilustrada na linha A1-A5, da Figura 36, resultou em regiões suaves e contínuas. Entretanto, em função da baixa discretização do domínio, bem como pelas limitações inerentes à técnica de triangulação por diagonais (subseção 2.2.1.3), pode-se observar que este método não é aplicável ao contexto da interpolação (não atende o requisito R1 - Os polígonos podem ser arbitrários (convexos ou côncavos) e podem possuir furos), como também os resultados obtidos possuem sobreposições, não atendendo aos requisitos identificados neste trabalho.

As regiões ampliadas na última linha da Figura 36, demonstram um padrão irregular nos limites dos polígonos divididos pelas demais técnicas baseadas em malha, enquanto os limites do Voronoi são mais suaves.

O método baseado em Quadtree, Template e Delaunay maximizou a área gerada de maneira regular e reduziu a área não estruturada (como mostra a Figura 29), mas não possibilitou divisões que atendessem aos critérios presentes no problema de interpolação.

Em diversos testes, as malhas geradas pela técnica de avanço de fronteira (MIRANDA *et al.*, 1999) produziram resultados satisfatórios. Entretanto, em alguns casos, observa-se que a organização espacial dos triângulos influencia os resultados da divisão, gerando bordas bastante irregulares que comprometem as transições suaves.

Considerando as três técnicas baseadas em malha desenvolvidas, pode-se observar um alto custo computacional que impossibilita o seu uso em uma ferramenta interativa e cujos resultados não produziram transições suaves para animação, não atendendo aos requisitos enumerados. Por outro lado, os resultados da abordagem de divisão de polígonos com base nos diagramas de Voronoi (subseção 4.2.2) mostram que o uso das bordas do diagrama produziu divisões suaves e contínuas, que representam as regiões mais próximas do polígono correspondente. Essa abordagem também evitou sobreposições e gerou divisões com rapidez suficiente para serem animadas em uma ferramenta interativa. Desta forma, o método baseado em Voronoi possibilita que a abordagem proposta atenda aos requisitos R3 e R4.

### 6.3 Experimento 3: Interpolação entre conjuntos arbitrários

Considerando satisfeitos os processos de interpolação entre pares (R1 e R2) e divisão de polígonos (R3 e R4), verificou-se a capacidade da metodologia em lidar com o problema global da interpolação muitos-para-muitos, identificando corretamente as correspondências, realizando as divisões necessárias e interpolando os pares corretos de regiões para garantir a construção de animações suaves.

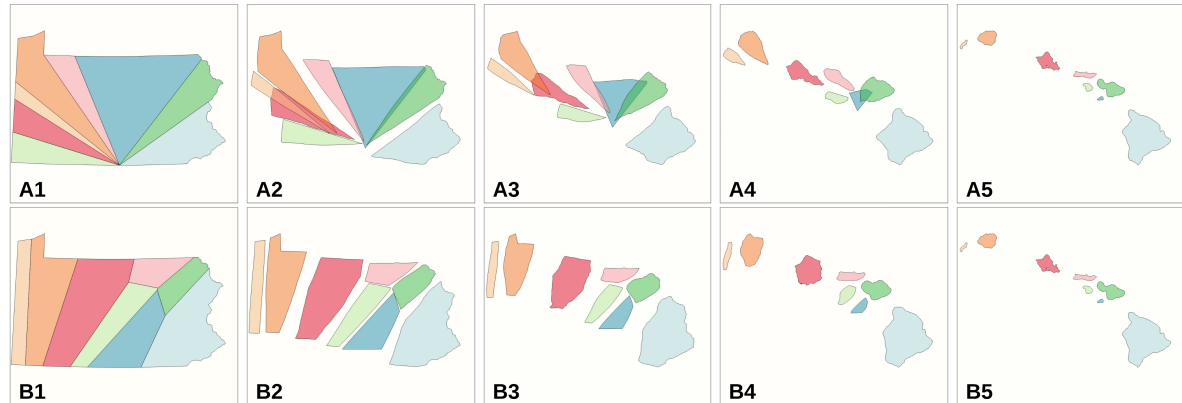
Neste sentido, este experimento contém interpolações um-para-muitos e muitos-para-muitos, para verificar a capacidade da abordagem proposta em atender o conjunto de requisitos estabelecidos, especialmente o R5 - O processo não deve exigir intervenção do usuário.

As Figuras 38 e 39 e 40 <sup>1</sup> apresentam resultados comparativos entre a Flubber (VELTMAN, 2017) e a abordagem proposta, interpolando estados dos Estados Unidos: *Pennsylvania*, *Illinois* e *Oregon* (um polígono cada) para as ilhas do *Havaí* (8 polígonos disjuntos), constituindo exemplos de interpolação um-para-muitos.

Através destas figuras, pode-se observar a presença de sobreposições nas interpolações geradas pela Flubber (A2-A4). Isso ocorre porque seu método de divisão espacial não considera a posição relativa dos polígonos correspondentes (uma simples triangulação do polígono é realizada). Por outro lado, a abordagem proposta (B2-B4) não gerou sobreposições.

<sup>1</sup> Que também estão disponíveis em vídeo, no link: [https://youtu.be/GcDCFwf\\_D\\_c](https://youtu.be/GcDCFwf_D_c)

Figura 38 – Interpolação entre os estados Pensilvânia e Havaí.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A1-A5 usam a Flubber (VELTMAN, 2017) e B1-B5 usam a abordagem proposta.

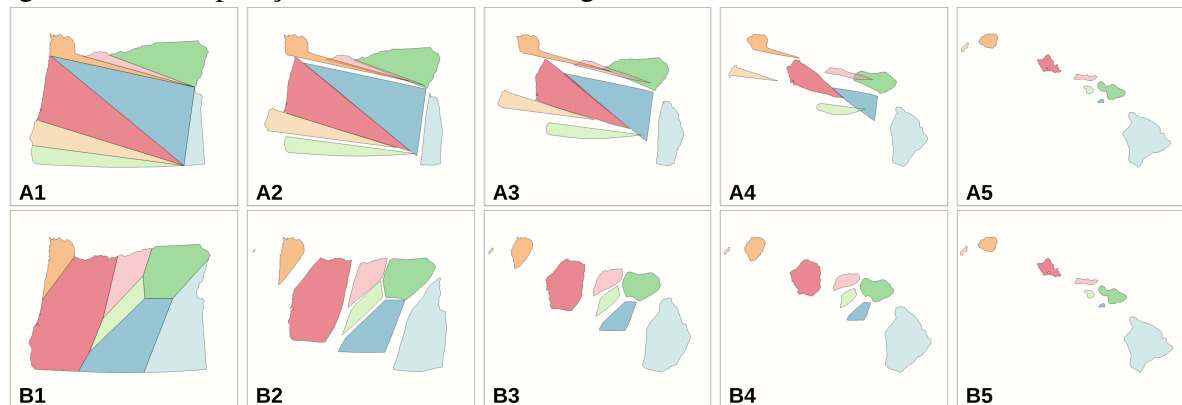
Figura 39 – Interpolação entre os estados Illinois e Havaí.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A1-A5 usam a Flubber (VELTMAN, 2017) e B1-B5 usam a abordagem proposta.

Figura 40 – Interpolação entre os estados Oregon e Havaí.

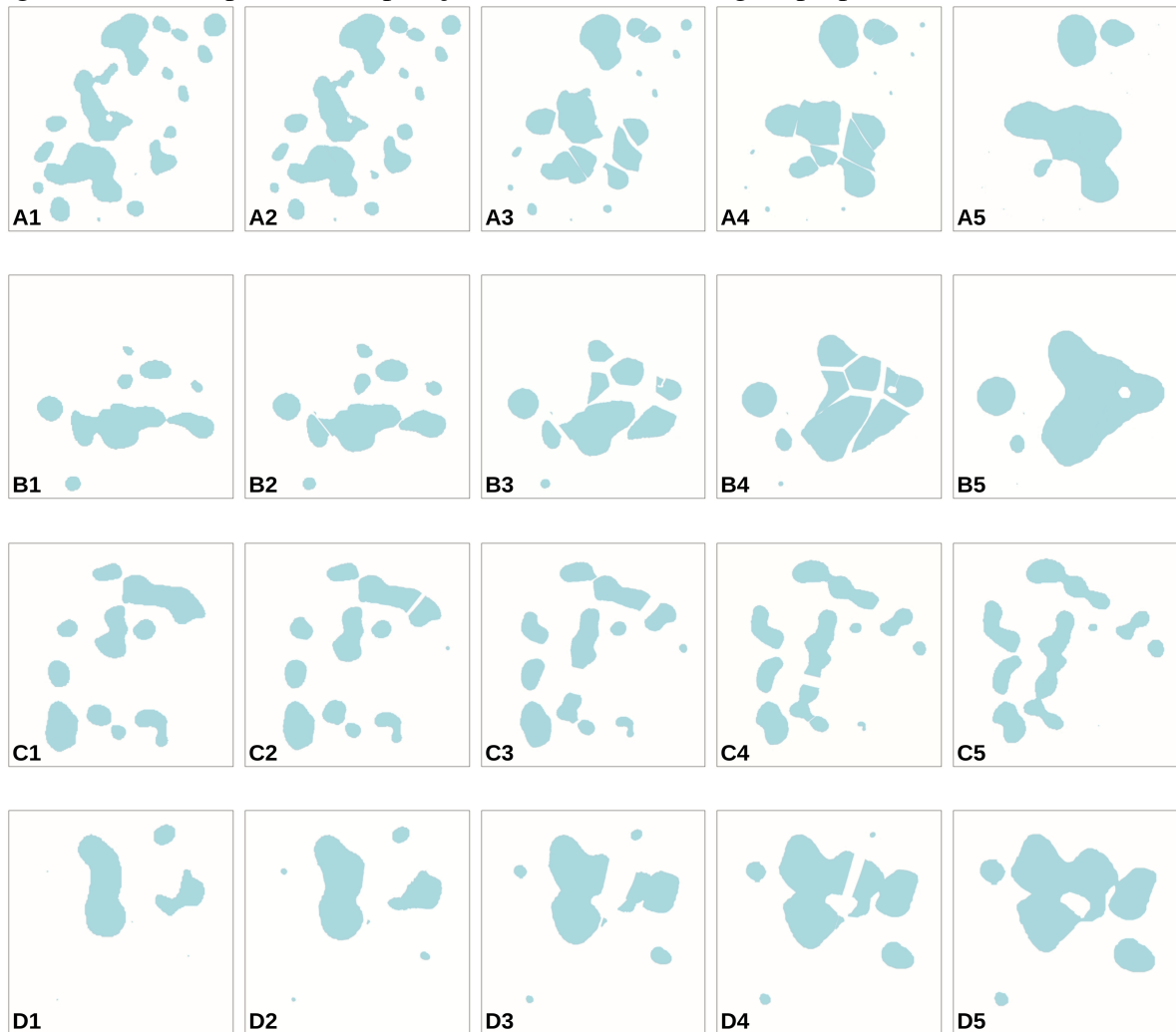


Fonte: Elaborada pelo autor.

A1-A5 usam a Flubber (VELTMAN, 2017) e B1-B5 usam a abordagem proposta.

Por fim, a Figura 41 apresenta exemplos de interpolações muitos-para-muitos com conjuntos arbitrários de polígonos. Nela, pode-se observar a capacidade da abordagem proposta para construir animações suaves a partir de conjuntos de polígonos completamente distintos, com geometrias e topologias discrepantes.

Figura 41 – Exemplos de interpolação utilizando a abordagem proposta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Interpolações muitos-para-muitos, onde A1, B1, C1 e D1 são conjuntos "Origem", com 18, 7, 10 e 3 polígonos, respectivamente. A5, B5, C5 e D5 são conjuntos "Alvo", com 4, 3, 8 e 4 polígonos, respectivamente. E A2-A4, B2-B4, C2-C4 e D2-D4 são as formas intermediárias. Também disponível em vídeo, no endereço: <https://youtu.be/S54qagnNnKY>.

#### 6.4 Cenário exemplo de análise temporal de crimes

O capítulo 5 apresenta a versão final de uma aplicação desenvolvida para validar a metodologia proposta nesta pesquisa e destaca que esta aplicação compõe uma plataforma

completa de análise no contexto da segurança pública. Deste modo, esta seção apresenta um cenário exemplo para ilustrar as contribuições da aplicação desenvolvida na visualização da evolução temporal de mapas de crimes.

A aplicação desenvolvida acrescenta à plataforma a possibilidade de animar mapas temporais (diferentes conjuntos de polígonos para cada período de tempo), como uma alternativa às abordagens disponíveis. Neste sentido, a subseção 6.4.1 apresenta o cenário explorado, a subseção 6.4.2 demonstra a visualização utilizando as ferramentas disponíveis e a subseção 6.4.3 apresenta as soluções produzidas nesta pesquisa.

#### **6.4.1 Cenário: Evolução anual de Crimes Violentos contra o Patrimônio - CVP**

Como já mencionado neste trabalho, agências de polícia, analistas e gestores de segurança pública buscam novas alternativas para compreensão da evolução temporal de regiões com altos índices de criminalidade (SANTOS, 2013; BOWERS *et al.*, 2004).

Portanto, para demonstrar a alternativa gerada por este trabalho, foi selecionado o cenário da evolução anual, de 2015 a 2018, de Crimes Violentos contra o Patrimônio - CVP, que englobam todos os crimes classificados como roubo, exceto latrocínio (roubo seguido de morte). Considerando as limitações das abordagens estáticas, já discutidas no capítulo 1, foi explorado um cenário com quatro mapas, um para cada ano, de tamanho e características distintas, sendo que os mapas de 2015, 2016, 2017 e 2018, possuem 4745, 4359, 4253, 4897 eventos e 2, 2, 4 e 5 polígonos, respectivamente. Todos os mapas foram gerados com os mesmos parâmetros KDE: Tamanho de célula 100, banda 650 e porcentagem 35% (Integral).

#### **6.4.2 Ferramentas atualmente disponíveis: Abordagens estáticas**

Na plataforma em que a aplicação proposta foi desenvolvida, utiliza-se, para produção de mapas, a técnica desenvolvida por Queiroz Neto *et al.* (2016). Neste sentido, a visualização temporal (com múltiplos mapas) ocorre através da sobreposição em diferentes cores. Entretanto, muitos mapas sobrepostos não são distinguíveis o suficiente, como demonstra a Figura 42.

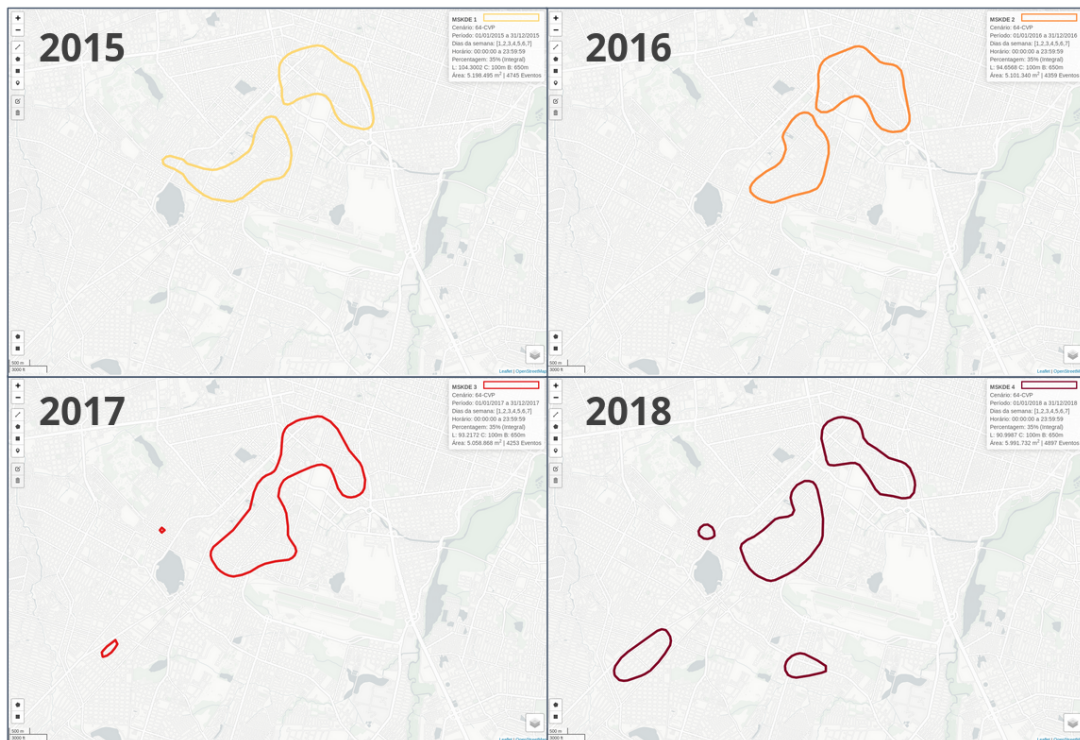
Considerando as discussões e trabalhos relacionados presentes no capítulo 3, uma alternativa poderia ser a organização dos mapas lado a lado, como ilustra a Figura 43. Contudo, esta técnica também possui limitações para uma análise comparativa envolvendo períodos consideráveis de tempo.

Figura 42 – Demonstração da visualização com mapas sobrepostos em diferentes cores.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir da técnica proposta por Queiroz Neto *et al.* (2016). Também disponível em vídeo, no endereço: <https://youtu.be/CfQz-gOzoq0>.

Figura 43 – Visualização com mapas organizados lado a lado.



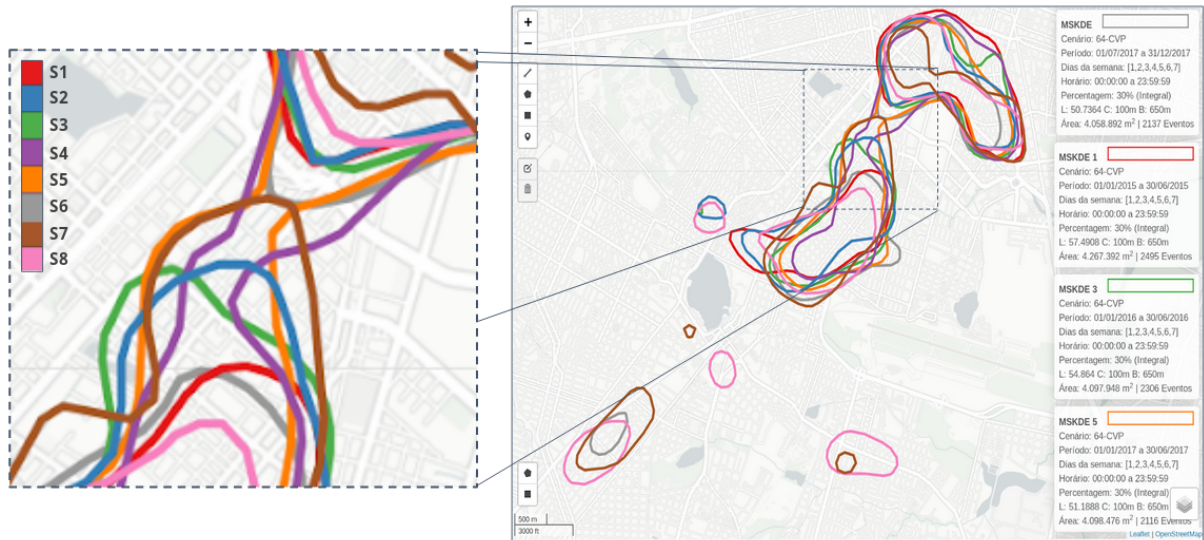
Fonte: Elaborada pelo autor a partir da técnica proposta por Queiroz Neto *et al.* (2016).

Estes exemplos demonstram que com apenas quatro mapas, como no cenário explorado, as restrições inerentes às abordagens estáticas tornam-se explícitas. Logo, à medida que mais mapas são inseridos em uma análise, a visualização estática torna-se mais difícil. Por exemplo, se os usuários requisitarem a evolução semestral para o cenário explorado, como



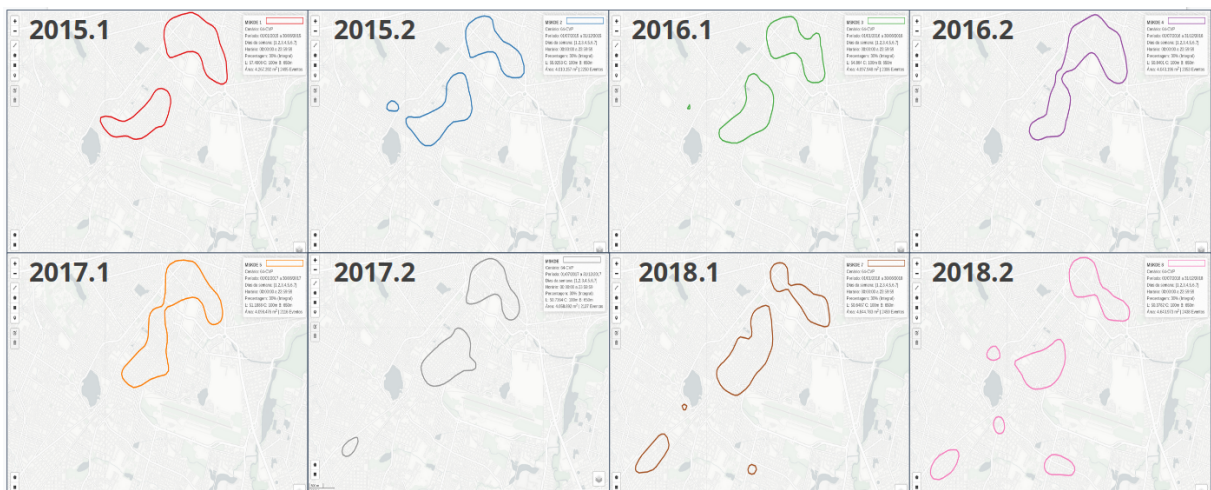
mostram as Figuras 44 e 45, tais abordagens podem limitar as possibilidades de visualização e análise comparativa, corroborando para a relevância do uso de animações ou outras ferramentas dinâmicas.

Figura 44 – Evolução CVP semestral, com mapas sobrepostos em diferentes cores.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir da técnica proposta por Queiroz Neto *et al.* (2016). Vermelho (2015.1), Azul (2015.2), Verde (2016.1), Roxo (2016.2), Laranja (2017.1), Cinza (2017.2), Marrom (2018.1) e Rosa (2018.2).

Figura 45 – Evolução CVP semestral, com mapas organizados lado a lado.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir da técnica proposta por Queiroz Neto *et al.* (2016).

### 6.4.3 Experimentos com a abordagem proposta

Os experimentos expressos na seção 6.3 demonstram que a abordagem proposta interpola conjuntos de polígonos arbitrários de maneira suave e sem sobreposições, satisfazendo todos os requisitos estabelecidos (R1-R5) para este problema. Enquanto os resultados expressos nesta subseção buscam ilustrar a capacidade desta abordagem para a visualização de fenômenos geoespaciais.

Neste sentido, esta subseção apresenta as soluções produzidas nesta pesquisa no contexto da segurança pública para o cenário descrito na subseção 6.4.1, ilustradas nas Figuras 46 e 47. Além disso, possibilita uma breve comparação entre a abordagem proposta e as visualizações estáticas (6.4.2) para a análise da evolução temporal de mapas de crimes.

A seção 5.2 descreve a aplicação e as interfaces disponibilizadas ao usuário e apresenta o conceito de rastro durante a animação. O processo para construção de uma visualização de mapas de crimes com animação segue os seguintes passos:

1. Selecionar um Ambiente (o espaço geográfico da análise);
2. Selecionar o cenário descrito na subseção 6.4.1 (o conjunto de crimes);
3. Selecionar uma Janela de Tempo (período da análise: 2015-2018);
4. Definir os parâmetros para construção dos mapas;
5. Definir o número de seguimentos (esse processo define uma divisão da janela de tempo);
6. Criar a animação.

No cenário explorado pode-se observar a divisão, o surgimento e desaparecimento de polígonos, bem como pequenas variações em uma mesma região ao longo do tempo. As técnicas de visualização estática (subseção 6.4.2), não associam estas mudanças à exibição em uma linha do tempo dinâmica, como na animação. Deste modo, os analistas devem recorrer às legendas de maneira constante para compreender quais mudanças estão relacionadas a um período de tempo específico, além disso as abordagens estáticas não são escaláveis para suportar muitos mapas em uma visualização, como já demonstrado neste trabalho. Portanto, pode-se considerar que a abordagem proposta constitui uma alternativa consistente às ferramentas disponíveis para a comunicação de mudanças temporais.

Vale ressaltar que a qualidade da animação não está associada à quantidade de mapas interpolados, pois os mapas são organizados em uma lista circular e animados sequencialmente. Deste modo, a aplicação desenvolvida possibilita a visualização e análise comparativa para

grandes intervalos de tempo, com múltiplos mapas<sup>1</sup>.

Figura 46 – Demonstração da abordagem proposta para visualizar a evolução anual de Crimes Violentos contra o Patrimônio - CVP.

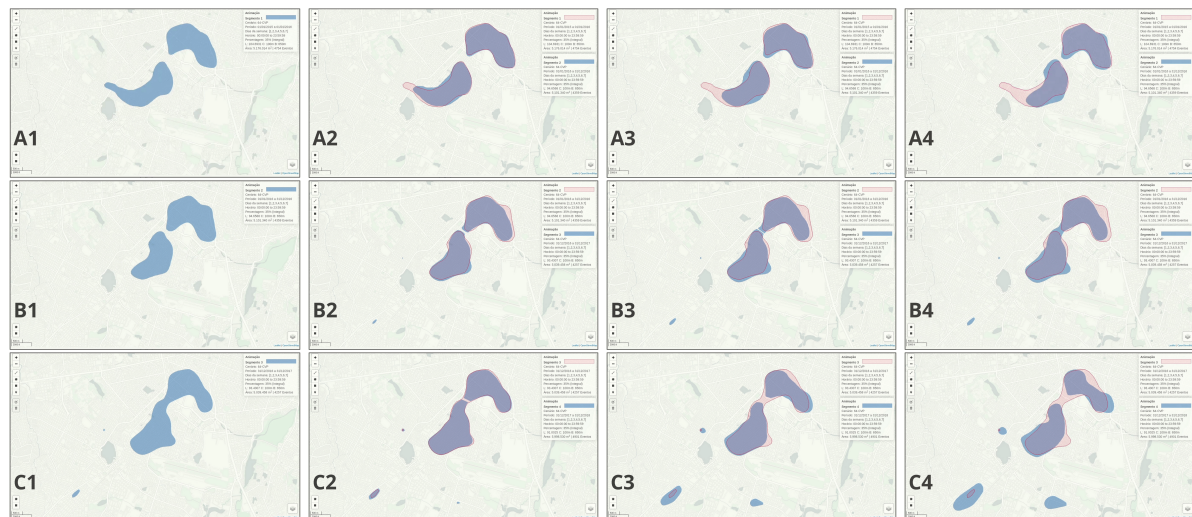


Fonte: Elaborada pelo autor.

Também disponível em vídeo, no endereço: [https://youtu.be/vb8r8\\_7Zcik](https://youtu.be/vb8r8_7Zcik).

A1-A4: 2015-2016; B1-B4: 2016-2017; C1-C4: 2017-2018.

Figura 47 – Demonstração da abordagem proposta, com a utilização do rastro, para visualizar a evolução anual de Crimes Violentos contra o Patrimônio - CVP.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Também disponível em vídeo, no endereço: <https://youtu.be/-ljx6Qky5nQ>.

A1-A4: 2015-2016; B1-B4: 2016-2017; C1-C4: 2017-2018.

<sup>1</sup> Um vídeo para ilustrar a evolução semestral CVP (para comparar com as Figuras 44 e 45) está disponível no link: <https://youtu.be/J3mBDRDtUEg>

## 7 CONCLUSÃO

### 7.1 Principais contribuições

Neste trabalho foi apresentada uma abordagem para interpolação automática entre conjuntos de polígonos e diferentes técnicas para subdivisão espacial. A abordagem proposta, quando associada ao método de divisão de polígonos baseado em Voronoi (4.2.2), mostrou-se capaz de atender aos requisitos estabelecidos para esta pesquisa (R1-R5), realizando transições suaves, automáticas e sem sobreposições. A validação desta abordagem foi realizada em uma série de experimentos com diferentes tipos de interpolação e em um cenário exemplo de análise temporal de mapas de crimes.

Conforme demonstrado no capítulo 4, a abordagem proposta foi estruturada de modo generalista e é flexível a adaptações para diferentes domínios. Neste sentido, todas as etapas podem ser parcial ou completamente modificadas em diferentes contextos de aplicação.

Os capítulos 5 e 6 certificam que a abordagem proposta possibilitou a visualização de fenômenos espaço-temporais através da animação. No contexto da segurança pública, como demonstra a seção 6.4, a aplicação desenvolvida mostrou-se capaz de possibilitar uma alternativa consistente às ferramentas atuais para visualização da evolução temporal de mapas de crimes.

Portanto, podemos destacar como principais contribuições desta pesquisa a concepção de uma abordagem automática e satisfatória para interpolação entre conjuntos arbitrários de polígonos, a proposição de uma alternativa às abordagens estáticas para visualização de mudanças em fenômenos espaço-temporais e uma aplicação desenvolvida para análise e visualização de mudanças em mapas de crimes através da animação. Desta forma, as contribuições geradas perpassam pela computação gráfica, geometria computacional, animação, visualização de dados e segurança pública.

### 7.2 Trabalhos Futuros

Existem algumas áreas possíveis de trabalhos futuros para o prosseguimento desta pesquisa. Primeiro e mais importante, a completa integração da abordagem proposta em uma ferramenta de visualização e análise de dados de crimes e a realização de um *design study* (SEDLMAIR *et al.*, 2012) para avaliar melhor a efetividade do uso de animações. Por conseguinte, faz-se necessária a devida implantação, testes e posterior coleta de *feedbacks* com especialistas

como gestores da segurança pública ou representantes de agências de polícia. Ademais, pode-se buscar a realização de análises comparativas entre abordagens estáticas e dinâmicas para comunicar mudanças temporais em mapas de crimes.

Destaca-se, também, a possibilidade de empregar a abordagem proposta em outros fenômenos, como disputas territoriais, ocupação urbana, exploração agrícola, eventos climáticos e regiões endêmicas. Tais aplicações podem corroborar para a validação da abordagem proposta como uma ferramenta consistente e eficaz para a visualização de fenômenos espaço-temporais.

Além disso, como a abordagem proposta foi estruturada para suportar adaptações e modificações que considerem as especificidades de cada domínio, os trabalhos futuros incluem a construção de variações em cada uma das etapas da metodologia. Neste sentido, a identificação de correspondências entre conjuntos (4.1.1) pode considerar: outras variáveis disponíveis (não apenas geométricas); a definição direta de correspondências pelo usuário; ou o uso de inteligência artificial, por exemplo. De modo similar, a divisão espacial (4.1.2) e a interpolação entre pares de polígonos (4.1.3) podem ser adaptadas com novas técnicas e mecanismos específicos para cada contexto de aplicação.

## REFERÊNCIAS

- ABHAR, K. C.; WALKER, I. J.; HESP, P. A.; GARES, P. A. Spatial-temporal evolution of aeolian blowout dunes at cape cod. **Geomorphology**, v. 236, p. 148 – 162, 2015. ISSN 0169-555X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169555X15000987>. Acesso em: 05 Mar. 2019.
- ALEXA, M. Recent advances in mesh morphing. **Computer Graphics forum**, v. 21, p. 173–197, 2002.
- AURENHAMMER, F. Voronoi diagrams: a survey of a fundamental geometric data structure. **ACM Comput. Surv.**, ACM, v. 23, n. 3, p. 345–405, set. 1991. ISSN 0360-0300. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/116873.116880>. Acesso em: 05 Mar. 2019.
- BAJAJ, C. L.; COYLE, E. J.; LIN, K.-N. Arbitrary Topology Shape Reconstruction from Planar Cross Sections. **Graphical Models and Image Processing**, v. 58, n. 6, p. 524 – 543, 1996. ISSN 1077-3169. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077316996900441>. Acesso em: 02 Set. 2018.
- BERG, M.; KREVELD, M. v.; OVERMARS, M.; SCHWARZKOPF, O. **Computational Geometry: Algorithms and Applications**. third. [S. l.]: Springer-Verlag, 2008. 386 p. ISBN 978-3540779735.
- BOISSONNAT, J.-D. Shape reconstruction from planar cross sections. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, v. 44, n. 1, p. 1 – 29, 1988. ISSN 0734-189X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734189X88800288>.
- BOWERS, K. J.; JOHNSON, S. D.; PEASE, K. Prospective hot-spotting: The future of crime mapping? **The British Journal of Criminology**, v. 44, p. 641–658, 2004.
- BRANDT, C.; TYCOWICZ, C. von; HILDEBRANDT, K. Geometric Flows of Curves in Shape Space for Processing Motion of Deformable Objects. **Computer Graphics Forum**, v. 35, n. 2, p. 295–305, 2016. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/cgf.12832>. Acesso em: 05 Set. 2018.
- CABLE NEWS NETWORK - CNN. **US sails warships past disputed islands in South China Sea**. 2018. Disponível em: <https://edition.cnn.com/2018/05/27/asia/south-china-sea-freedom-of-navigation-intl/index.html>. Acesso em: 05 Set. 2019.
- CARBUNESCU, R. C.; WART, S. V. Polygon vertex set matching algorithm for shapefile tweening. 2008.
- CASHMAN, T.; HORMANN, K. A continuous, editable representation for deforming mesh sequences with separate signals for time, pose and shape. **Computer Graphics Forum**, v. 31, p. 735–744, 05 2012.
- CAVALCANTE-NETO, J. B.; LUIZ, F.; , M. ; WAWRZYNEK, P. A.; INGRAFFEA, A. A back-tracking procedure for optimization of simplex meshes. **COMMUNICATIONS IN NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING Commun. Numer. Meth. Engng**, v. 21, p. 711–722, 12 2005.
- EL-HAMALAWI, A. A 2d combined advancing front-delaunay mesh generation scheme. **Finite Elements in Analysis and Design**, p. 967–989, 2004.

FIGUEIREDO, L. H.; CARVALHO, P. C. P. **Introdução à geometria computacional**. Rio de Janeiro - RJ: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, 1991. ISBN 85-244-0061-7.

FREITAS, M. O.; WAWRZYNEK, P. A.; CAVALCANTE-NETO, J. B.; VIDAL, C.; MARTHA, L.; INGRAFFEA, A. A distributed-memory parallel technique for two-dimensional mesh generation for arbitrary domains. **Advances in Engineering Software**, v. 59, p. 38–52, 05 2013.

FÓRUM BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA. **Anuário Brasileiro de Segurança Pública**. [S. l.], 2019. Disponível em: [http://www.forumseguranca.org.br/wp-content/uploads/2020/03/Anuario-2019-FINAL\\_21.10.19.pdf](http://www.forumseguranca.org.br/wp-content/uploads/2020/03/Anuario-2019-FINAL_21.10.19.pdf). Acesso em: 05 Mar. 2019.

GIERTSEN, C.; HALVORSEN, A.; FLOOD, P. R. Graph-directed modelling from serial sections. **The Visual Computer**, v. 6, n. 5, p. 284–290, Sep 1990. ISSN 1432-2315. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01900750>.

GUERREIRO, S. B.; GLENIS, V.; DAWSON, R. J.; KILSBY, C. Pluvial flooding in european cities—a continental approach to urban flood modelling. **Water**, v. 9, n. 4, 2017. ISSN 2073-4441. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2073-4441/9/4/296>. Acesso em: 05 Mar. 2019.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. **Brasil Densidade Demográfica 2007**. 2007. Disponível em: [ftp://geofp.ibge.gov.br/cartas\\_e\\_mapas/mapas\\_do\\_brasil/sociedade\\_e\\_economia/mapas\\_murais/densidade\\_populacional\\_2007.pdf](ftp://geofp.ibge.gov.br/cartas_e_mapas/mapas_do_brasil/sociedade_e_economia/mapas_murais/densidade_populacional_2007.pdf). Acesso em: 10 Set. 2019.

Jl, Y. S. Qndreview: read 100 chi papers in 7 hours. **Conference on Human Factors in Computing Systems - Proceedings**, 04 2014.

KAMVYSSELIS, M. 2d polygon morphing using the extended gaussian image. 1997.

KIM, T. H.; COVA, T. J. Tweening grammars: Deformation rules for representing change between discrete geographic entities. **Computers, Environment and Urban Systems**, Elsevier, v. 31, p. 317–336, 2007.

KIM, Y.; CORRELL, M.; HEER, J. Designing animated transitions to convey aggregate operations. **Computer Graphics Forum**, v. 38, p. 541–551, 06 2019.

KRAAK, M.-J.; ORMELING, F. **Cartography: Visualization of Geospatial Data**. 3rd. ed. [S. l.]: Prentice-Hall, 2010.

LEE, B.; RICHE, N. H.; ISENBERG, P.; CARPENDALE, S. More than telling a story: Transforming data into visually shared stories. **IEEE Computer Graphics and Applications**, v. 35, n. 5, p. 84–90, Sep. 2015. ISSN 0272-1716.

MALIK, A.; MACIEJEWSKI, R.; HODGESS, E.; EBERT, D. S. Describing temporal correlation spatially in a visual analytics environment. **In Proceedings of the Hawaii International Conference on System Sciences**, p. 1–8, 2011.

MAVRIPLIS, D. J. An advancing front delaunay triangulation algorithm designed for robustness. **Journal of Computational Physics**, p. 90–101, 1995.

- MIRANDA, A. C.; NETO, J. B. C.; MARTHA, L. F. An algorithm for two-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks. **SIBGRAPI '99: proceedings of the XII Brazilian symposium on computer graphics and image processing**, p. 29–38, 1999.
- MIZUTANI, C. Land use transition process analysis using polygon events and polygon status: A case study of tsukuba science city. In: **2009 17th International Conference on Geoinformatics**. [S. l.]: IEEE, 2009. p. 1–6. ISSN 2161-024X.
- MIZUTANI, C. Construction of an analytical framework for polygon-based land use transition analyses. **Computers, Environment and Urban Systems**, v. 36, n. 3, p. 270 – 280, 2012. ISSN 0198-9715. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0198971511001153>. Acesso em: 20 Mar. 2018.
- NATIONAL CENTER FOR HEALTH STATISTICS - NCHS. **Atlas of United States Mortality**. 2015. Disponível em: <https://www.cdc.gov/nchs/products/other/atlas/lcwm.htm>. Acesso em: 08 Set. 2019.
- OOI, E.; MAN, H.; NATARAJAN, S.; SONG, C. Adaptation of quadtree meshes in the scaled boundary finite element method for crack propagation modelling. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 144, p. 101 – 117, 2015. ISSN 0013-7944. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001379441500363X>. Acesso em: 10 Abr. 2018.
- PREPARATA, F. P.; SHAMOS, M. I. **Computational Geometry: an Introduction**. [S. l.]: Springer-Verlag, 1985. ISBN 978-0-387-96131-6.
- QUEIROZ NETO, J. F.; SANTOS, E. M. d.; VIDAL, C. A. Mskde: Using marching squares to quickly make high quality crime hotspot maps. **SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images (SIBGRAPI)s**, p. 305–312, 2016.
- RADZIEWSKY, P. von; EISEMANN, E.; SEIDEL, H.-P.; HILDEBRANDT, K. Optimized subspaces for deformation-based modeling and shape interpolation. **Computers & Graphics**, v. 58, p. 128 – 138, 2016. ISSN 0097-8493. Shape Modeling International 2016. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097849316300590>. Acesso em: 04 Mar. 2018.
- ROBERTSON, C.; NELSON, T. A.; BOOTS, B.; WULDER, M. A. Stamp: spatial-temporal analysis of moving polygons. **Journal of Geographical Systems**, v. 9, n. 3, p. 207–227, Sep 2007. ISSN 1435-5949. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10109-007-0044-2>. Acesso em: 10 Mar. 2019.
- SALAMAT, N.; ZAHZAH, E. Fuzzy spatio-temporal relations analysis. In: **2010 Seventh International Conference on Information Technology: New Generations**. [S. l.]: IEEE, 2010. p. 301–306.
- SANTOS, R. B. **Crime Analysis With Crime Mapping**. third. Los Angeles, California: SAGE Publications, 2013. 352 p. ISBN 978-1452202716.
- SEDEBERG, T. w.; GREENWOOD, E. A physically based approach to 2-d shape blending. **SIGGRAPH '92 Proceedings of the 19th annual conference on Computer graphics and interactive techniques**, ACM New York, v. 26, p. 25–34, 1992.



SEDERBERG, T. W.; GAO, P.; WANG, G.; MU, H. 2-d shape blending: an intrinsic solution to the vertex path problem. **SIGGRAPH '93 Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques**, ACM New York, p. 15–18, 1993.

SEDLMAIR, M.; MEYER, M.; MUNZNER, T. Design Study Methodology: Reflections from the Trenches and the Stacks. **IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics (Proc. InfoVis)**, v. 18, n. 12, p. 2431–2440, 2012.

SHEWCHUK, J. R. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. **Computational Geometry**, v. 22, n. 1, p. 21 – 74, 2002. ISSN 0925-7721. 16th ACM Symposium on Computational Geometry. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772101000475>. Acesso em: 04 Mar. 2018.

SHIAO, Y.-H.; CHUANG, K.-S.; CHEN, T.-J.; CHEN, C.-Y. Polygon interpolation for serial cross sections. **Computers in Biology and Medicine**, Elsevier, v. 37, p. 1241–1251, 2007.

TABARRAEI, A.; SUKUMAR, N. Adaptive computations on conforming quadtree meshes. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 41, n. 7, p. 686 – 702, 2005. ISSN 0168-874X. The Sixteenth Annual Robert J. Melosh Competition. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X04001684>. Acesso em: 04 Mar. 2018.

THE NEW YORK TIMES. **How the Epidemic of Drug Overdose Deaths Rippled Across America**. 2016. Disponível em: <https://www.nytimes.com/interactive/2016/01/07/us/drug-overdose-deaths-in-the-us.html>. Acesso em: 01 Set. 2019.

TVERSKY, B.; MORRISON, J. B.; BETRANCOURT, M. Animation: can it facilitate? **International journal of human-computer studies**, Elsevier, v. 57, n. 4, p. 247–262, 2002.

VELTMAN, N. **Flubber: Tools for smoother shape animations**. [S. l.]: GitHub, 2017. Disponível em: <https://github.com/veltman/flubber>. Acesso em: 05 Set. 2018.