



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VALRICÉLIO MENEZES XAVIER

DA RIGIDEZ DE VARIEDADES KÄHLERIANAS MUNIDAS DE
CAMPO VETORIAL CONFORME FECHADO

FORTALEZA

2018

VALRICÉLIO MENEZES XAVIER

DA RIGIDEZ DE VARIEDADES KÄHLERIANAS MUNIDAS DE CAMPO
VETORIAL CONFORME FECHADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha
Muniz Neto

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- X24r Xavier, Valricélio Menezes.
Da rigidez de variedades kählerianas munidas campo vetorial conforme fechado / Valricélio Menezes
Xavier. – 2018.
80 f. : il.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.
1. Variedades kählerianas. 2. Campo conforme fechado. 3. Curvatura não positiva. 4. Toro plano. 5. Campos paralelos. I. Título.

CDD 510

VALRICÉLIO MENEZES XAVIER

DA RIGIDEZ DE VARIEDADES KÄHLERIANAS MUNIDAS DE CAMPO
VETORIAL CONFORME FECHADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 11/07/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Presidente da banca)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me iluminar neste árduo caminho.

Aos meus familiares que sempre me apoiaram e incentivaram em todas as decisões que tomei ao longo desses anos.

À minha noiva, Josefa Regina, por me aguentar, compreender e se fazer presente em todos os momentos.

Ao meu orientador, professor Dr. Antonio Caminha Muniz Neto, que dispôs de seu tempo orientando não somente este trabalho como também ensinando um pouco de sua experiência matemática e experiência de vida.

À todos os professores do departamento de Matemática UFC, em especial aqueles que puderam compartilhar seu conhecimento comigo no mestrado, Antonio Caminha, Ernani Ribeiro, Marcelo Melo, Fernanda Camargo, Diego Moreina, Ederson Braga, Edson Sampaio e Luquesio Jorge e a todos os professores do IFCE, em especial Angelo Papa, Aluísio Cabral, Maria Eugênia, Jânio Kléo e José Stálio.

Aos membros da banca Marcos Melo, Jonantan Floriano e Paulo Alexandre, pela disponibilidade.

À todos meus amigos da pós-graduação que puderam compartilhar comigo experiências para além da sala de aula.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

”O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.” (Isaac Newton)

RESUMO

O objetivo desse trabalho é mostrar dois resultados sobre a rigidez de variedades kählerianas sob certas restrições. No primeiro resultado, mostraremos que se uma superfície kähleriana conexa e compacta M de curvatura gaussiana não positiva, está munida de campo conforme fechado ξ com zeros isolados, então M terá necessariamente curvatura gaussiana nula, ξ será paralelo e M será isométrica ao toro plano. Para o outro resultado, consideraremos M uma variedade kähleriana conexa, completa, de dimensão complexa $n > 1$ e munida com campo conforme fechado não trivial ξ . Nesse caso, se a distribuição \mathcal{D} em $M \setminus \xi^{-1}(0)$, gerada por ξ e $J\xi$, possui uma folha compacta Σ de curvatura seccional holomorfa não positiva e $\text{Hol}^\perp(\Sigma)$ é um grupo de torção, então $\xi^{-1}(0) = \emptyset$, ξ e $J\xi$ são paralelos em M , as folhas de \mathcal{D} são isométricas a um toro plano e as folhas de \mathcal{D}^\perp são isométricas a uma variedade kähleriana de dimensão complexa $n - 1$. Em particular, o recobrimento universal de M é o produto cartesiano de \mathbb{R}^2 com uma variedade kähleriana conexa, simplesmente conexa e completa.

Palavras-chave: Variedades kählerianas. Campo conforme fechado. Curvatura não positiva. Toro plano. Campos paralelos.

ABSTRACT

The goal of this work is to demonstrate two results about the rigidity of kählerian manifolds under certain conditions. In the first result, we show that if a connected compact kählerian surface M with nonpositive gaussian curvature is endowed with a closed conformal vector field ξ whose singular points are isolated, then M has necessarily zero gaussian curvature, ξ is parallel and M is isometric to a flat torus. In the second result, we consider a connected complete kählerian manifold M , of complex dimension $n > 1$ and equipped with a nontrivial closed conformal vector field ξ . In this case, if the distribution \mathcal{D} in $M \setminus \xi^{-1}(0)$, generated by ξ and $J\xi$, has one compact leaf Σ with nonpositive holomorphic sectional curvature and $\text{Hol}^\perp(\Sigma)$ is a torsion group, then $\xi^{-1}(0) = \emptyset$, ξ and $J\xi$ are parallel in M , the leafs of \mathcal{D} are isometric to the flat torus and the leafs of \mathcal{D}^\perp are isometric to a kählerian manifold of complex dimension $n - 1$. In particular, the universal covering of M is a cartesian product of \mathbb{R}^2 with a connected, simply connected, complete kählerian manifold.

Keywords: Kählerian manifolds. Closed conformal vector fields. Nonpositive curvature. Flat torus. Parallel vector fields.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geodésicas fechadas em M	70
Figura 2 – Comparando Σ a Σ_q	73
Figura 3 – β também é uma geodésica fechada.	74
Figura 4 – Calculando o comprimento de β	75

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	11
2.1	Geometria riemanniana	11
2.2	Distribuições e Folheações	26
3	GEOMETRIA COMPLEXA	29
3.1	Funções de várias variáveis complexas	29
3.2	Variedades quasi-complexas	33
3.3	Variedades complexas	35
4	DEFORMANDO MÉTRICAS DE VARIEDADES KÄHLERIANAS	42
4.1	Variedades kählerianas	42
4.2	Campos conformes fechados	47
4.3	Variedades kählerianas munidas de campo conforme fechado .	53
5	DOIS RESULTADOS PARA VARIEDADES KÄHLERIANAS	67
5.1	Superfícies kählerianas	67
5.2	Variedade kähleriana com dimensão complexa $n > 1$	70
6	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação usou como base o artigo "*On the structure of complete kählerian manifolds furnished with closed conformal vector fields*" de Antonio Caminha (Veja CAMINHA (2017)).

Entender a rigidez de uma estrutura geométrica a partir de suas propriedades básicas está presente na Matemática desde a Grécia Antiga, quando, a partir de cinco axiomas, era obtida toda estrutura geométrica do plano. Nesse trabalho, discuremos dois resultados sobre a rigidez de variedades kählerianas munidas de campo conforme fechado e curvatura seccional holomorfa não positiva.

No primeiro capítulo apresentaremos as principais definições e resultados preliminares envolvendo variedades riemannianas que serão abordadas neste texto. No segundo capítulo discutiremos aspectos básicos sobre geometria complexa que irão fomentar os conceitos fundamentais da dissertação. Já o terceiro capítulo será a parte técnica do trabalho, onde iremos abordar variedades kählerianas, campos conformes e a deformação de métricas em variedades kählerianas a partir de um campo conforme fechado, relacionando elementos das variedades original e a deformada.

No último capítulo mostraremos os dois resultados principais. No primeiro deles, mostraremos que se uma superfície kähleriana conexa e compacta M , com curvatura gaussiana não positiva está munida de campo conforme fechado ξ com singularidades isoladas, então M será isométrica ao toro plano e ξ será paralelo. No outro caso, consideraremos uma variedade kähleriana completa e conexa M de dimensão complexa $n > 1$ e munida de campo conforme fechado não trivial ξ . Nesse caso, as singularidades de ξ são automaticamente isoladas e as folhas não triviais da distribuição gerada por ξ e $J\xi$ são totalmente geodésicas em M . Assumindo que exista uma folha compacta nessa folheação, que o grupo normal de homomia é de torção e que a curvatura seccional holomorfa de ξ é não positiva ao longo de M , então ξ é paralelo e M é folheado por uma família de superfícies totalmente geodésicas isométricas ao toro plano e por uma família totalmente geodésica de variedades kählerianas de dimensão complexa $n - 1$. Em particular, o recobrimento universal de M é isométrico a um produto cartesiano que terá o \mathbb{R}^2 como um de seus fatores.

2 PRELIMINARES

Ao longo deste capítulo mostraremos algumas definições e teoremas de geometria riemanniana e variedades suaves que serão utilizadas ao longo do texto. Indicaremos como leitura complementar DO CARMO (2015), LEE (2003), MADSEN and TORNEHAVE (1997) e KOBAYASHI and NOMIZU (1963).

2.1 Geometria riemanniana

Nessa seção introduziremos alguns conceitos sobre variedades riemannianas que usaremos nesse trabalho. Sejam M uma variedade riemanniana, TM seu fibrado tangente e $\pi : TM \rightarrow M$ a aplicação projeção natural. Assim, X será campo vetorial de M se X é uma seção suave de π , isto é, $X : M \rightarrow TM$ é suave e $\pi \circ X = Id_M$. Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de M .

Além disso, chamaremos de conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável, uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, que leva (X, Y) em $\nabla_X Y$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ suave}\}$. Além disso, seja $\{X_i\}_{i=1}^{\dim M}$ um referencial local num aberto $U \subset M$ e fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, temos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis em U , então, pelas propriedades acima, a conexão é dada por

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k, \quad (1)$$

onde $X = \sum_i x_i X_i$ e $Y = \sum_j y_j Y_j$ em U .

A próxima proposição relaciona variedades riemannianas com as conexões afins.

Teorema 2.1 (Levi-Civita). *Dada uma variedade riemanniana M de métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as seguintes condições:*

- (a) $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$,
- (b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Veja o Teorema 3.16 do capítulo II de DO CARMO (2015). □

Corolário 2.2 (Fórmula de Koszul). *Dada uma variedade riemanniana M de métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, vale*

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &- \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos, pela Proposição 2.2 do capítulo II de DO CARMO (2015), que para uma conexão afim ∇ , existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ outro campo vetorial DV/dt ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , que satisfaz as seguintes condições:

- (a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, para V, W campos vetoriais ao longo de c .
- (b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I .
- (c) Se V é induzido por um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = (c(t))_*$, então $DV/dt = \nabla_{dc/dt}Y$.

Com isso, se M é uma variedade riemanniana com conexão ∇ , dizemos que um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é **paralelo** quando $DV/dt = 0$ para todo $t \in I$. Além disso, pela Proposição 2.6 do capítulo II de DO CARMO (2015), se $V_0 \in T_{c(t_0)}M$, com $t_0 \in I$, então existe um único campo vetorial paralelo V ao longo c tal que $V(c(t_0)) = V_0$. Nesse caso, dizemos que $V(t)$ é o transporte paralelo de V_0 ao longo de c .

A próxima proposição relaciona a conexão riemanniana com o transporte paralelo.

Proposição 2.3. *Sejam M uma variedade riemanniana, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ e $c : I \rightarrow M$ uma curva integral de X por p , isto é, $c(t_0) = p$ e $dc/dt = X(c(t))$. Assim, a conexão riemanniana de M é dada por*

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}(P_{c;t_0;t}^{-1}(Y(c(t))))|_{t=t_0},$$

onde $P_{c;t_0;t} : T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$ é o transporte paralelo ao longo de c de t_0 a t .

Demonstração. Provaremos inicialmente que $P = P_{c;t_0;t}$ é linear. Sejam $v, w \in T_{c(t_0)}M$ e $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ os únicos campos paralelos ao longo de c tais que $V(t_0) = v$ e $W(t_0) = w$. Desta forma, para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt} = 0$$

e

$$\frac{D}{dt}(\lambda V) = \lambda \frac{DV}{dt} = 0,$$

logo $V + W$ e λV são campos paralelos ao longo de c . Portanto,

$$\begin{aligned} P(\lambda v + w) &= P(\lambda V(t_0) + W(t_0)) = P((\lambda V + W)(t_0)) \\ &= (\lambda V + W)(t) = \lambda V(t) + W(t) \\ &= \lambda P(v) + P(w), \end{aligned}$$

mostrando sua linearidade.

Além disso, $|P(v)| = |v|$ para todo $v \in T_{c(t_0)}M$. De fato, dado $v \in T_{c(t_0)}M$ e seja V o único transporte paralelo ao longo de c tal que $V(t_0) = v$, então

$$\frac{d}{dt} \langle V, V \rangle = 2 \left\langle \frac{DV}{dt}, V \right\rangle = 0,$$

o que mostra que $|V|$ é constante, logo,

$$|P(v)| = |V(t)| = |V(t_0)| = |v|.$$

Dessa forma, obtemos que P é uma isometria, visto que dados $v_1, v_2 \in T_{c(t_0)}M$, pelo que mostramos anteriormente, temos

$$\begin{aligned} |P(v_1)|^2 + 2 \langle P(v_1), P(v_2) \rangle + |P(v_2)|^2 &= |P(v_1 + v_2)|^2 = |v_1 + v_2|^2 \\ &= |v_1|^2 + 2 \langle v_1, v_2 \rangle + |v_2|^2, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\langle P(v_1), P(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Como P é uma isometria linear, assim $P^{-1} : T_{c(t)}M \rightarrow T_{c(t_0)}M$ está bem definida. Considere um sistema de coordenadas $(U; x_1, \dots, x_n)$ em torno de $c(t_0) \in M$. Logo,

$$\left\{ w_1(t_0) = \frac{\partial}{\partial x_1}(c(t_0)), \dots, w_n(t_0) = \frac{\partial}{\partial x_n}(c(t_0)) \right\}$$

é uma base do espaço tangente $T_{c(t_0)}M$. Uma vez que P é uma isometria, podemos transportar a base ao longo da curva, ou seja,

$$\left\{ w_1(t) = P \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(c(t_0)) \right), \dots, P \left(w_n(t_0) = \frac{\partial}{\partial x_n}(c(t_0)) \right) \right\}$$

é uma base de $T_{c(t)}M$. Desta forma, se $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então podemos escrevê-lo na forma $Y(c(t)) = \sum_i a_i(t)w_i(t)$, onde $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, para $i \in \{1, \dots, \dim M\}$.

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P_{c;t_0;t}^{-1}(Y(c(t))))|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P^{-1}(Y(c(t))) - P^{-1}(Y(c(t_0)))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_i \frac{a_i(t)P^{-1}(w_i(t)) - a_i(t_0)w_i(t_0)}{t - t_0} \\ &= \sum_i \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a_i(t) - a_i(t_0)}{t - t_0} w_i(t_0) \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}(a_i(t_0))w_i(t_0). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela expressão da derivada covariante, obtemos

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= \left(\nabla_{\frac{dc}{dt}} Y \right) (p) = \frac{DY}{dt}(c(t_0)) \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt}(a_i(t_0))w_i(t_0) + a_i(t_0) \frac{Dw_i}{dt}(t_0) \right) \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}(a_i(t_0))w_i(t_0), \end{aligned}$$

portanto,

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_i \frac{d}{dt}(a_i(t_0))w_i(t_0) = \frac{d}{dt}(P_{c;t_0;t}^{-1}(Y(c(t))))|_{t=t_0}.$$

□

Para o que segue, devemos lembrar que uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$, onde M é uma variedade riemanniana, é dita **geodésica**, quando $D(d\gamma/dt)/dt = 0$ para todo $t \in I$. Além disso, dados $p \in M$ e $v \in T_p M$, existe uma única geodésica $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, para $\varepsilon > 0$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ (Teorema 2.2, cap. III de DO CARMO (2015)). Assim, podemos definir a curva $\gamma(t, q, v) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, onde $q \in M$ e $v \in T_q M$, a geodésica que no instante $t = 0$ passa em q com velocidade v .

Vale salientar que as geodésicas têm uma propriedade de homogeneidade, onde se $\gamma(t, q, av)$ está definida em $(-\delta, \delta)$ e $\gamma(at, q, v)$ está definida em $(-\delta/a, \delta/a)$, para $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, então $\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$ (Lema 2.6, cap. III de DO CARMO (2015)). Com isso, podemos introduzir o conceito de aplicação exponencial. Seja $p \in M$ e $B_\varepsilon(0) \subset T_p M$ a bola aberta de centro em 0 em $T_p M$ e raio $\varepsilon > 0$. Dizemos que $\exp_p : B_\varepsilon(0) \rightarrow M$, dada por $\exp_p(v) = \gamma(1, p, v)$, para $v \in B_\varepsilon(0)$, é a aplicação exponencial. Ademais, dado

$q \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \rightarrow \exp_q(B_\varepsilon(0))$ é difeomorfismo (Proposição 2.9, cap. III de DO CARMO (2015)). Nesse caso, $\exp_q(B_\varepsilon(0)) := B_\varepsilon(p)$ será chamada de bola normal.

A próxima proposição usará os conceitos sobre geodésicas e aplicação exponencial para construção de um referencial local geodésico.

Proposição 2.4 (Referencial geodésico). *Seja M uma variedade riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Assim, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U , tais que, em p , $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Uma tal família $E_i, i = 1, \dots, n$, de campos de vetores é chamada um referencial (local) geodésico em p .*

Demonstração. Seja $p \in M$ e seja $\varepsilon > 0$ tal que $U = B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0)) \subset M$ é uma bola normal em p . Logo, se $q \in U$, então existe $v_0 \in B_\varepsilon(0) \subset T_p M$ tal que $\exp_p(v_0) = q$. Defina a curva:

$$\begin{aligned} c : [0, |v_0|] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto c(t) = \exp_p\left(\frac{tv_0}{|v_0|}\right), \end{aligned}$$

assim, temos que $c(0) = p$ e $c(|v_0|) = \exp_p(v_0) = q$. Dessa forma, c é a geodésica normalizada que liga p a q . Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$, definimos $E_i(q) = P(e_i)$, para $i = 1, \dots, n$, onde $P = P_{c,0,v_0}$ definida na Proposição 2.3. Nessa mesma proposição, provamos que P é isometria, logo $\{E_1, \dots, E_n\}$ é base ortonormal de $T_q M$, visto que $\langle E_i(q), E_j(q) \rangle = \langle P(e_i), P(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Como esse processo pode ser aplicado em todo U , obtemos $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$ campos de vetores ortonormais.

Nos resta mostrar que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Assim, definimos, para $i = 1, \dots, n$, as aplicações

$$\begin{aligned} \alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto \alpha_i(t) = \exp_p(te_i), \end{aligned}$$

onde, por definição, $te_i \in B_\varepsilon(0) \subset T_p M$. Como o campo transporta o campo velocidade de forma paralela, temos

$$E_i(\alpha_i(t)) = E_i(\exp_p(te_i)) = P(e_i) = \frac{d}{dt}\gamma(1, p, te_i) = \alpha_i'(t),$$

já que por unicidade, o transporte paralelo será a própria geodésica. Dessa forma, se $P_{i,t} : T_p M \rightarrow T_{\alpha_i(t)} M$ é o transporte paralelo de p até $\alpha_i(t)$, ao longo da geodésica α_i ,

então

$$P_{\alpha_j, t}^{-1}(E_k(\alpha_j(t))) = e_k,$$

para todos $k, j = 1, \dots, n$, por construção. De fato, $E_k(\alpha_j(t))$ é o transporte paralelo do vetor e_k sobre a geodésica α_j . Logo, quando a função inversa do transporte paralelo é aplicada, ela retorna ao vetor inicial que, por construção, é sempre um dos vetores da base de $T_p M$, neste caso, e_k . Pela Proposição 2.3, temos

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = \left. \frac{dP_{\alpha_i, t}^{-1}(E_j(\alpha_i(t)))}{dt} \right|_{t=0} = \frac{de_j}{dt} = 0,$$

como queríamos mostrar. □

Um conceito muito relevante em variedades riemanniana é o de variedades geodésicamente completas (ou simplesmente variedades completas). Dizemos que uma variedade riemanniana M é (geodésicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida para todo $v \in T_p M$, ou seja, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

É importante salientar que a distância $d(p, q)$ em uma variedade riemanniana é definida por $d(p, q)$ igual ao ínfimo dos comprimentos $f_{p, q}$, onde $f_{p, q}$ é uma curva diferenciável por partes ligando p a q . Assim, variedades riemannianas são espaços métricos, na métrica d (Proposição 2.5, cap. VII de DO CARMO (2015)), e a topologia induzida por d nessa variedade é a mesma topologia inicial (Proposição 2.6, cap. VII de DO CARMO (2015)).

O Teorema adiante relacionará o conceito de variedades riemannianas geodesicamente completas com sua natureza topológica, o que mostrará com clareza que podemos chamar tais variedades apenas de completas.

Teorema 2.5 (Hopf e Rinow). *Sejam M uma variedade riemanniana e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) \exp_p está definida em todo o $T_p M$.
- b) Os subconjuntos limitados e fechados de M são compactos.
- c) M é completa como espaço métrico.
- d) M é geodésicamente completa.
- e) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$ e $\cup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$, então $d(p, q_n) \rightarrow +\infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

- f) Para todo $q \in M$, existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. Veja o Teorema 2.8 do capítulo VII de DO CARMO (2015). \square

Sejam M uma variedade riemanniana, $p \in M$ e $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ um laço baseado em p (ou seja, $\alpha(0) = \alpha(1) = p$) diferenciável por partes. Assim, denotamos por $P_\alpha : T_p M \rightarrow T_p M$ o transporte paralelo levado pela curva α e chamamos de **grupo de holonomia** de M em p o conjunto de todos os operadores P_α , para α um laço baseado em p , diferenciável por partes. Denotamos esse conjunto por $\text{Hol}_p(M)$. Esse conjunto, de fato, forma um grupo, onde a composição de laços baseados em p é sua operação, isto é, $P_\alpha \cdot P_\beta := P_{\alpha \cdot \beta}$ e P_ϵ é a identidade, onde $\epsilon : [0, 1] \rightarrow M$ e $\epsilon([0, 1]) = p$.

Além disso, um subspaço D de $T_p M$ é dito **invariante** por $\text{Hol}_p(M)$ se D for invariante por todos os elementos de $\text{Hol}_p(M)$, isto é, se $x \in D$, então $P_\alpha(x) = x$, para todos $P_\alpha \in \text{Hol}_p(M)$. Se D for não nulo, diremos que D é **irreduzível** se o único subspaço próprio de D invariante por $\text{Hol}_p(M)$ for o subspaço nulo.

Vale salientar que um produto de variedades riemannianas $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$ isométrico à variedade M é uma **decomposição de De Rham** de M se M_0 é isométrico a um espaço euclidiano e cada uma das outras variedades M_i forem completas, simplesmente conexas, irreduzíveis (isto é, o espaço tangente em algum ponto é irreduzível) e tiverem grupo de holonomia não triviais. Dessa forma, o próximo teorema fornece condições necessárias para existência desse tipo de decomposição.

Teorema 2.6 (de decomposição de De Rham). *Uma variedade riemanniana M conexa, simplesmente conexa e completa admite uma decomposição de De Rham $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$, que é única a menos de uma ordem.*

Demonstração. Veja o Teorema 6.2 do capítulo IV de KOBAYASHI and NOMIZU (1963) \square

Para o que segue, sabemos que dados uma variedade riemanniana M , $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definimos a **divergência** de X como a função $\text{div } X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\text{div } X(p) = \text{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p))$, e o **gradiente** de f como o campo vetorial $\text{grad } f$ em M definido por $\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v)$, para todos $p \in M$ e $v \in T_p M$. É comum, ainda, escrever ∇f no lugar de $\text{grad } f$.

A proposição a seguir nos fornece uma fórmula para o gradiente e o divergente a partir de referencial geodésico local.

Proposição 2.7. *Sejam M uma variedade riemanniana de dimensão n , $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial geodésico em $p \in M$, então*

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i(p) \quad e$$

$$\operatorname{div}X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p),$$

onde $X = \sum_{i=1}^n f_i E_i$.

Demonstração. Como $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal para T_pM , então

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}f(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{grad}f(p), E_i(p) \rangle E_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i(p). \end{aligned}$$

Além disso, como $\operatorname{div}X(p) = \operatorname{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p))$ e $X = \sum_i f_i E_i$, então

$$\begin{aligned} \operatorname{div}X(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i(p)} X(p), E_i(p) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} f_j E_j, E_i \rangle (p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle f_j \nabla_{E_i} E_j + E_i(f_j) E_j, E_i \rangle (p). \end{aligned}$$

Como $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico e ortogonal, logo $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, o que nos dá

$$\operatorname{div}X(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle E_i(f_j) E_j, E_i \rangle (p) = \sum_{i,j=1}^n E_i(f_j) \delta_{ij}(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i),$$

como queríamos demonstrar. \square

Para mais, definimos o **tensor curvatura de Riemann** em uma variedade riemanniana M , o (1,3)-tensor $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Vale salientar que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, já que, no \mathbb{R}^n , $XYf = YXf$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Além disso, dados um ponto $p \in M$, um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ e $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , o número real $K(x, y) = \langle R(x, y)x, y \rangle / |x \wedge y|^2$ é chamado de **curvatura seccional** de σ em p , onde $|x \wedge y|^2 = |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2$. A

Proposição 3.1 do capítulo IV de DO CARMO (2015) garante que se x' e y' formam outra base de σ , então $K(x, y) = K(x', y')$, logo, podemos denotar $K(\sigma) = K(x, y)$.

Para o que segue, seja M uma variedade riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇ , se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é suave, o **tensor hessiano** é o 2-tensor covariante $\text{Hess}_M f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que

$$(\text{Hess}_M f)(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Segue imediatamente da definição e da compatibilidade da conexão de Levi-Civita com a métrica de M (Teorema 2.1), que

$$\begin{aligned} (\text{Hess}_M f)(X, Y) &= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f), \end{aligned}$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Por outro lado, a simetria de ∇ garante que

$$\begin{aligned} (\text{Hess}_M f)(X, Y) &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= Y(X(f)) + [X, Y](f) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) \\ &= (\text{Hess}_M f)(Y, X), \end{aligned} \tag{2}$$

o que mostra a simetria de $\text{Hess}_M f$.

Podemos, ainda, definir o **operador hessiano**, $\text{Hess}_M f : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por $\text{Hess}_M f(X) = \nabla_X \nabla f$. Dessa forma, dizemos que $p \in M$ é um ponto não-degenerado de f quando o operador $\text{Hess}_M f(p) : T_p M \rightarrow T_p M$, dado por $\text{Hess}_M f(v)(p) = \nabla_v \nabla f$, é invertível. A proposição a seguir nos mostra uma propriedade importante de pontos não-degenerados.

Proposição 2.8. *Sejam M uma variedade riemanniana e $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado de $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p , onde o único ponto crítico de f é p .*

Demonstração. Veja o Teorema 12.6 de MADSEN and TORNEHAVE (1997). \square

Outro conceito relevante que usaremos nesse texto é o de campo de Killing. Sejam M uma variedade riemanniana, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$, $U \subset M$ uma vizinhança de p e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. Dizemos que X é um **campo**

de Killing se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\varphi(t_0, \cdot) : U \rightarrow M$ é uma isometria. A seguir, temos uma condição necessária e suficiente para existência desses campos.

Proposição 2.9. *Dada uma variedade riemanniana M um campo suave X em M , então X é campo de Killing se, e somente se, $\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$ para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. Pela compatibilidade da conexão na métrica e sua simetria, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Y, Z \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle \nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_X Z, Y \rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_Y X, Z \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle \nabla_X Z, Y \rangle \\
&= X \langle Y, Z \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle. \tag{3}
\end{aligned}$$

Suponhamos que X é campo de Killing. Dessa forma, se $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ é o fluxo de X , então $d\varphi_t$ é isometria para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$. Com isso, temos

$$\langle Y, Z \rangle = \langle d\varphi_{-t}(Y), d\varphi_{-t}(Z) \rangle,$$

onde, se calcularmos $X \langle Y, Z \rangle$ em $p \in M$, obtemos

$$\begin{aligned}
X \langle Y, Z \rangle &= d(\langle Y, Z \rangle)_{\varphi(0,p)} \varphi'(0,p) = \frac{\partial}{\partial t} (\langle Y, Z \rangle)_{\varphi(t,p)} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\langle d\varphi_{-t}(Y), d\varphi_{-t}(Z) \rangle)_{\varphi(t,p)} \Big|_{t=0} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle d\varphi_{-t}(Y), d\varphi_{-t}(Z) \rangle - \langle d\varphi_0(Y), d\varphi_0(Z) \rangle}{t}.
\end{aligned}$$

Como $\varphi_0(p) = p$, para todo $p \in M$, então $d\varphi_0 = Id$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
X \langle Y, Z \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle d\varphi_{-t}(Y), d\varphi_{-t}(Z) \rangle - \langle Y, Z \rangle}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle d\varphi_{-t}(Y) - Y + Y, d\varphi_{-t}(Z) - Z + Z \rangle - \langle Y, Z \rangle}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \langle d\varphi_{-t}(Y) - Y, d\varphi_{-t}(Z) - Z \rangle \\
&\quad + \langle d\varphi_{-t}(Y) - Y, Z \rangle + \langle Y, d\varphi_{-t}(Z) - Z \rangle \}.
\end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínua e $\lim_{t \rightarrow 0} d\varphi_{-t} = d\varphi_0 = Id$, logo $\lim_{t \rightarrow 0} (d\varphi_{-t}(Z) - Z) = 0$. Ademais, $[X, Y](p) = \lim_{s \rightarrow 0} (Y - d\varphi_s Y)(\varphi(0, p))/s$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
X \langle Y, Z \rangle (p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\varphi_{-t}(Y) - Y}{t}, d\varphi_{-t}(Z) - Z \right\rangle + \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\varphi_{-t}(Y) - Y}{t}, Z \right\rangle \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle Y, \frac{d\varphi_{-t}(Z) - Z}{t} \right\rangle \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\varphi_{-t}(Y) - Y}{t}, Z \right\rangle + \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle Y, \frac{d\varphi_{-t}(Z) - Z}{t} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Fazendo $s = -t$, obtemos

$$\begin{aligned}
X \langle Y, Z \rangle (p) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\langle \frac{Y - d\varphi_{-t}(Y)}{s}, Z \right\rangle + \lim_{s \rightarrow 0} \left\langle Y, \frac{Z - d\varphi_{-t}(Z)}{s} \right\rangle \\
&= \langle [X, Y], Z \rangle (p) + \langle Y, [X, Z] \rangle (p) \\
&= -\langle [Y, X], Z \rangle (p) - \langle Y, [Z, X] \rangle (p).
\end{aligned}$$

Como p foi tomado arbitrariamente, então $X \langle Y, Z \rangle = -\langle [Y, X], Z \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle$ e substituindo em (3), temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \\
&= -\langle [Y, X], Z \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que mostra a primeira parte.

Reciprocamente, suponhamos $\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$ para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Afirmamos que $\langle d\varphi_t(Z), d\varphi_t(Y) \rangle (p)$ é constante para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ é o fluxo de X .

Sejam $p \in M$ e $I = \partial/\partial t (\langle d\varphi_t(Z), d\varphi_t(Y) \rangle (p))|_{t=0}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle d\varphi_t(Z), d\varphi_t(Y) \rangle (p) - \langle Y, Z \rangle (p)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\langle d\varphi_t(Y)(p) - Y(\varphi_t(p)) + Y(\varphi_t(p)), d\varphi_t(Z)(p) - Z(\varphi_t(p)) + Z(\varphi_t(p)) \rangle \\
&\quad - \langle Y, Z \rangle (p)] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\langle d\varphi_t(Y)(p) - Y(\varphi_t(p)), d\varphi_t(Z)(p) - Z(\varphi_t(p)) \rangle \\
&\quad + \langle Y(\varphi_t(p)), d\varphi_t(Z)(p) - Z(\varphi_t(p)) \rangle + \langle d\varphi_t(Y)(p) - Y(\varphi_t(p)), Z(\varphi_t(p)) \rangle \\
&\quad + \langle Y(\varphi_t(p)), Z(\varphi_t(p)) \rangle - \langle Y(p), Z(p) \rangle].
\end{aligned}$$

Usando o fato do limite da soma ser igual ao limite da soma, temos

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\langle Y(\varphi_t(p)), Z(\varphi_t(p)) \rangle - \langle Y(p), Z(p) \rangle] \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\varphi_t(Y)(p) - Y(\varphi_t(p))}{t}, d\varphi_t(Z)(p) - Z(\varphi_t(p)) \right\rangle \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle Y(\varphi_t(p)), \frac{d\varphi_t(Z)(p) - Z(\varphi_t(p))}{t} \right\rangle \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\varphi_t(Y)(p) - Y(\varphi_t(p))}{t}, Z(\varphi_t(p)) \right\rangle \\
&= X \langle Y, Z \rangle (p) + \langle -[X, Y], 0 \rangle (p) + \langle -[X, Y], Z \rangle (p) + \langle -[X, Z], Y \rangle (p) \\
&= X \langle Y, Z \rangle (p) + \langle [Y, X], Z \rangle (p) + \langle [Z, X], Y \rangle (p) \\
&= \langle \nabla_Y X, Z \rangle (p) + \langle \nabla_Z X, Y \rangle (p) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle d\varphi_t(Z), d\varphi_t(Y) \rangle (p)$ é constante para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, assim, obtemos

$$\langle d\varphi_t(Z), d\varphi_t(Y) \rangle (p) = \langle d\varphi_0(Z), d\varphi_0(Y) \rangle (p) = \langle Z, Y \rangle (p),$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, logo, φ_t é uma isometria, como queríamos mostrar. \square

Ao longo deste trabalho precisaremos entender o conceito de derivada exterior. Para isso, precisamos saber que $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*M)$, isto é, $\Omega^k(M)$ é conjunto das seções suaves de $\pi : \Lambda^k T^*M \rightarrow M$, onde $\Lambda^k T^*M = \sqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$ e $\Lambda^k(T_p^*M)$ é o espaço vetorial dos k -covetores em T_pM .

O resultado a seguir define a derivada exterior em variedades suaves.

Teorema 2.10. *Seja M uma variedade diferenciável. Existe um único operador $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ para todo $k \geq 0$, chamada de **derivada exterior**, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) d é linear sobre \mathbb{R} .
- (ii) Se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$, então

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

- (iii) $d \circ d \equiv 0$.

- (iv) Para $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, df é a diferencial de f , dada por $df(X) = Xf$.

Demonstração. Veja o Teorema 14.24 de LEE (2003). \square

Para calcular a derivada exterior de um k -forma diferencial, temos a **fórmula**

de **Koszul**, que nos diz que se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Para uma demonstração desse fato, veja a Proposição 14.32 de LEE (2003).

Além disso, sejam $\omega \in \Omega^k(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde M é uma variedade riemanniana. Chamamos de derivada covariante $\nabla_X \omega$ de ω em relação a X , o k -tensor

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega(Y_1, \dots, Y_k) &= X(\omega(Y_1, \dots, Y_k)) - \omega(\nabla_X Y_1, \dots, Y_k) \\ &\quad - \dots - \omega(Y_1, \dots, \nabla_X Y_k), \end{aligned}$$

para $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(M)$.

A próxima proposição relaciona a derivada exterior em função de um somatório de derivadas covariantes de um tensor de $\Omega^k(M)$.

Proposição 2.11. *Se M é uma variedade riemanniana e $\omega \in \Omega^k(M)$, então*

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_i (-1)^{i-1} (\nabla_{X_i} \omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}), \quad (5)$$

para todos $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ é a derivada covariante.

Demonstração. Segue de (4) que

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \underbrace{\nabla_{X_i} X_j}_j, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^j \omega(X_1, \dots, \underbrace{\nabla_{X_j} X_i}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

Para o que falta, basta substituir i por j (e vice-versa) na última parcela, onde obtemos

$$\begin{aligned}
d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\
&\quad + \sum_{i < j} (-1)^i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \underbrace{\nabla_{X_i} X_j}_j, \dots, X_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{i < j} (-1)^i \omega(X_1, \dots, \underbrace{\nabla_{X_i} X_j}_j, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\
&= \sum_i (-1)^{i-1} (\nabla_{X_i} \omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}).
\end{aligned}$$

□

Relembremos, agora, os principais conceitos a respeito de imersões isométricas. Seja $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade riemanniana \bar{M} de dimensão $k = n + m$. A métrica de \bar{M} induz de maneira natural uma métrica riemanniana em M : se $v_1, v_2 \in T_p M$, para $p \in M$, definimos $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Nesse caso, f é uma imersão isométrica de M em \bar{M} .

Para cada $p \in M$, podemos identificar $T_{f(p)}\bar{M} = T_{f(p)}M \oplus (T_{f(p)}M)^\perp$, onde $df_p(T_p M) := T_{f(p)}M$ e $(T_{f(p)}M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_{f(p)}M$ em $T_{f(p)}\bar{M}$. Com isso, podemos escrever $v \in T_{f(p)}\bar{M}$ por $v = v^T + v^\perp$, onde $v^T \in T_{f(p)}M$ e $v^\perp \in (T_{f(p)}M)^\perp$, denominadas, respectivamente, de componente tangencial e componente normal.

A conexão riemanniana de \bar{M} será indicada por $\bar{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M , e \bar{X} e \bar{Y} são extensões locais a \bar{M} , definimos $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$. É fácil ver que ∇ é a conexão riemanniana de M . Convém, ainda, definir a segunda forma fundamental de f . Se X e Y são campos locais em M , dizemos que

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é a segunda forma fundamental de f . Vale salientar que $\alpha(X, Y)$ não depende das extensões \bar{X} e \bar{Y} . Com efeito, seja \bar{X}_1 outra extensão de X , teremos

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}_1} \bar{Y} - \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X} - \bar{X}_1} \bar{Y},$$

que se anula em $f(M)$, pois $\bar{X} - \bar{X}_1 = 0$ em $f(M)$. Analogamente, se \bar{Y}_1 outra extensão de Y , então

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}_1 - \nabla_X Y) = 0,$$

o que mostra que $\alpha(X, Y)$ está bem definida.

Uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é **totalmente geodésica** se a segunda forma

fundamental de f é identicamente nula. A razão dessa terminologia é dada pela proposição a seguir.

Proposição 2.12. *Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica se, e somente se, toda geodésica γ de M é geodésica de \overline{M} .*

Demonstração. Veja a Proposição 2.9 do capítulo VI de DO CARMO (2015). \square

Para mais, veremos alguns resultados sobre variedades riemannianas de curvatura seccional constante. Para isso, precisaremos definir alguns conceitos. Dizemos que uma ação do grupo G sobre um espaço topológico M opera de modo propriamente descontínuo quando para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G \setminus \{e\}$, onde $e \in G$ é a identidade. Suponha, agora, que M é uma variedade riemanniana e Γ um subgrupo do grupo das isometrias de M que opera de modo propriamente descontínuo. Com isso, a aplicação de recobrimento $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$, onde M/Γ tem a topologia quociente, induz um difeomorfismo local fazendo de M/Γ uma variedade diferenciável. Ademais, podemos munir M/Γ com uma métrica riemanniana de modo que π seja uma isometria local, basta que para cada $p \in M/\Gamma$ escolhamos $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ e para todo par $u, v \in T_p(M/\Gamma)$, definimos

$$\langle u, v \rangle = \langle d\pi^{-1}(u), d\pi^{-1}(v) \rangle_{\tilde{p}}.$$

Como Γ é transitiva em $\pi^{-1}(p)$, isto é, $\Gamma p = M$ para todo $p \in M$, então dado qualquer $\tilde{q} \in \pi^{-1}$ existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(\tilde{q}) = \tilde{p}$, o que mostra que a definição acima não depende da escolha de \tilde{p} . Claramente, tal métrica será um isometria local, doravante chamada de **métrica em M/Γ induzida pelo recobrimento π** .

Segue adiante dois resultados importantes sobre espaços de curvatura constante.

Teorema 2.13 (Cartan). *Seja M^n uma variedade riemanniana completa e de curvatura seccional constante K . Então o recobrimento universal \tilde{M} de M , com a métrica do recobrimento, é isométrico a:*

- (a) \mathbb{H}^n , se $K = -1$,
- (b) \mathbb{R}^n , se $K = 0$,
- (c) \mathbb{S}^n , se $K = 1$.

Demonstração. Veja o Teorema 4.1 do capítulo VIII de DO CARMO (2015). \square

Proposição 2.14. *Seja M uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional constante K . Então M é isométrica a \tilde{M}/Γ , onde \tilde{M} é \mathbb{S}^n se $K > 0$, \mathbb{R}^n se $K = 0$ ou \mathbb{H}^n se $K < 0$, Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de \tilde{M} que opera de modo propriamente*

descontínuo em \tilde{M} , e a métrica de \tilde{M}/Γ é a induzida pelo recobrimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$.

Demonstração. Veja a Proposição 4.3 do capítulo VIII de DO CARMO (2015). \square

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária para existência de geodésicas fechadas numa variedade riemanniana. Para isso, diremos que um conjunto \mathcal{L} de caminhos fechados em M é classe livre de homotopia se quando $f \in \mathcal{L}$, e $g : [0, 1] \rightarrow M$ é tal que existe uma homotopia

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M, \quad F(0, t) = f(t), \quad F(1, t) = g(t), \quad F(s, 0) = F(s, 1),$$

então $g \in \mathcal{L}$. O conjunto de tais classes é indicado por $C_1(M)$.

Teorema 2.15 (Cartan). *Se M é compacta e $\mathcal{L} \in C_1(M)$ não é a classe constante, então existe uma geodésica fechada de M na classe \mathcal{L} .*

Demonstração. Veja o Teorema 2.2 do capítulo XII de DO CARMO (2015). \square

2.2 Distribuições e Folheações

Nessa seção definiremos os principais elementos de Distribuições e Folheações e indicaremos seus principais resultados. Para uma leitura completa, veja o capítulo 19 de LEE (2003).

Seja M uma variedade diferenciável. Uma **distribuição D em M de posto k** é uma coleção de subespaços $D_p \subset T_pM$ de dimensão k , para cada $p \in M$, onde $D = \cup_{p \in M} D_p$. Essa distribuição será suave se, e somente se, existem uma vizinhança U para cada ponto de M e campos vetoriais suaves $X_1, \dots, X_k : U \rightarrow TM$ tais que $X_1|_q, \dots, X_k|_q$ formam uma base para D_q para cada $q \in U$ (Lema 10.32 de LEE (2003)). Nesse caso, dizemos que D é localmente gerado pelos campos vetoriais X_1, \dots, X_k .

Suponha $D \subset TM$ uma distribuição suave. Uma variedade imersa $N \subset M$ é dita **variedade integral de D** se $T_pN = D_p$ para todo $p \in N$. Além disso, tal variedade será dita maximal quando não puder ser estendida. Nessas condições, dizemos que a distribuição é integrável.

Exemplo 2.16 (Distribuição e variedades integrais).

- (a) Se V é um campo vetorial que não se anula em M , então V gera uma distribuição suave de posto 1 em M . A imagem de uma curva integral de V é uma variedade integral de D .
- (b) Em \mathbb{R}^n , os campos $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_k$ gera uma distribuição de posto k . Os subespaços afins paralelos a $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ são variedades integrais dessa distribuição.
- (c) Seja R a distribuição de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gerado pelo campo vetorial radial $\sum_i x_i \partial/\partial x_i$ e seja R^\perp o complemento ortogonal de R . Dessa forma, R^\perp é uma distribuição suave

de posto $(n - 1)$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nesse caso, para cada ponto de $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, a esfera de raio $|x|$ e centro na origem é uma variedade integral de \mathbb{R}^n .

Vale salientar que uma distribuição D é dita **involutiva** quando, dado um par X, Y de seções locais de D , isto é, $X_p, Y_p \in D_p$ para todo $p \in M$, então $[X, Y]$ é uma seção local de D . Segue uma condição necessária para que uma distribuição seja uma involução.

Proposição 2.17. *Toda distribuição integrável é uma involução.*

Demonstração. Veja a Proposição 19.3 de LEE (2003). □

Dada uma distribuição $D \subset TM$ de posto k , dizemos que uma carta coordenada (U, φ) em M é flat para D quando $\varphi(U)$ é um cubo em \mathbb{R}^n e em pontos de U , D é gerada pelos k primeiros campos vetoriais coordenados $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_k$. Dizemos que a distribuição $D \subset TM$ é **completamente integrável** se existe uma carta flat para D em uma vizinhança de cada ponto de M . Com isso, toda distribuição completamente integrável é integrável e, conseqüentemente, será uma involução, isto é

$$\text{completamente integrável} \Rightarrow \text{integrável} \Rightarrow \text{involução}.$$

O Teorema a seguir é central na teoria das distribuições e faz com que as implicações anteriores tornem-se equivalências.

Teorema 2.18 (Frobenius). *Toda distribuição involução é completamente integrável.*

Demonstração. Veja o Teorema 19.12 de LEE (2003). □

Para finalizar o capítulo, introduziremos o conceito de folheação. Para isso, seja M uma variedade n dimensional e \mathcal{F} uma coleção de subvariedades de M de dimensão k . Uma carta suave (U, φ) de M é dita flat para \mathcal{F} se $\varphi(U)$ é um cubo em \mathbb{R}^n e cada subvariedade de \mathcal{F} tem intersecção com U vazia ou é uma união enumerável de slices k -dimensionais da forma $x_{k+1} = c_{k+1}, \dots, x_n = c_n$, para $c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Assim, definimos a **folheação de dimensão k em M** como a coleção \mathcal{F} de subvariedades disjuntas, conexas, não vazias e imersas de dimensão k em M , chamadas de **folhas da folheação**, onde sua união é a própria M e tal que na vizinhança de cada ponto $p \in M$ existe uma carta flat para \mathcal{F} .

Exemplo 2.19 (Folheações).

- (a) A coleção de todos os subespaços k -dimensionais afins de \mathbb{R}^n paralelos a $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ é uma folheação k -dimensional de \mathbb{R}^n .
- (b) A coleção de todos os raios abertos da forma $\{\lambda x : \lambda > 0\}$, com $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é uma folheação 1-dimensional de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(c) A coleção de todas as esferas centradas na origem é uma folheação $(n-1)$ -dimensional de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

O próximo Teorema relaciona as teorias de distribuição e folheações.

Teorema 2.20 (Teorema Global de Frobenius). *Seja D uma involução numa variedade diferenciável M . A coleção de todas as variedades integrais máximas de D formam uma folheação em M .*

Demonstração. Veja o Teorema 19.21 de LEE (2003). □

3 GEOMETRIA COMPLEXA

Neste capítulo estudaremos os principais aspectos sobre variedades complexas e, antes disso, veremos os principais resultados de funções de várias variáveis complexas e variedades quasi-complexa. Para uma leitura mais detalhada sobre este tema veja o capítulo 5 de CAMINHA (2014).

3.1 Funções de várias variáveis complexas

Indicaremos \mathbb{C}^m como o conjunto das m -uplas (z_1, \dots, z_m) de números complexos, munido com estrutura e topologia diferenciáveis obtidas pela identificação usual com \mathbb{R}^{2m} .

Definição 3.1. *Uma função $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ é dita uma função \mathbb{R} -linear se*

$$L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^m$$

e

$$L(\lambda z) = \lambda L(z), \quad \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}^m.$$

Considerada como função das $2m$ variáveis reais $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$, com $z_k = x_k + iy_k$ para $1 \leq k \leq m$, uma função \mathbb{R} -linear $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ se escreve como

$$L(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) = \sum_k (a_k x_k + b_k y_k),$$

com $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ para $1 \leq k \leq m$. Substituindo $x_k = (z_k + \bar{z}_k)/2$ e $y_k = (z_k - \bar{z}_k)/2i$, obtemos

$$L(z_1, \dots, z_m) = \sum_k (\alpha_k z_k + \beta_k \bar{z}_k),$$

com $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$, para $1 \leq k \leq m$.

Definição 3.2. *Uma função $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ é dita uma função \mathbb{C} -linear se*

$$L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^m$$

e

$$L(\lambda z) = \lambda L(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^m.$$

Se $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ é \mathbb{C} -linear, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$ onde $L(z_1, \dots, z_m) = \sum_k (\alpha_k z_k + \beta_k \bar{z}_k)$. Assim, como $L(iz) = iL(z)$, então

$$i \sum_k (\alpha_k z_k - \beta_k \bar{z}_k) = L(iz) = iL(z) = i \sum_k (\alpha_k z_k + \beta_k \bar{z}_k),$$

donde temos $-i\beta_k = i\beta_k$, para $1 \leq k \leq m$, logo, $\beta_k = 0$ para todo $1 \leq k \leq m$. Portanto, L é da forma

$$L(z_1, \dots, z_m) = \sum_k \alpha_k z_k.$$

Dessa forma, segue uma das definições centrais dessa seção.

Definição 3.3. *Seja $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto. Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é \mathbb{C} -diferenciável em $a \in U$ se existe uma função \mathbb{C} -linear $L_a : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(h),$$

para todo $h \in \mathbb{C}^m$ de norma suficientemente pequena, onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{|h|} = 0.$$

A função \mathbb{C} -linear L_a da definição anterior é unicamente determinada por f , de modo que será denotada por $df(a)$. Nesse caso, ela será chamada de \mathbb{C} -derivada de f em $a \in U$.

Definição 3.4. *Dados $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto e $a \in U$, dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é **holomorfa** (respectivamente **anti-holomorfa**) em a se f (respectivamente \bar{f}) for \mathbb{C} -diferenciável em uma vizinhança de a em U . A função f é holomorfa (respectivamente anti-holomorfa) em U se o for em todo ponto de U .*

Além disso, sejam $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto, $a \in U$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função \mathbb{C} -diferenciável em a . Para $1 \leq j \leq m$, definimos as j -ésimas **diferenciais holomorfa e anti-holomorfa** de f em a , respectivamente, por

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \right) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \right).$$

No que segue, a próxima proposição relaciona a diferencial de f em a com as suas diferenciais holomorfas.

Proposição 3.5. *Se $U \subset \mathbb{C}^m$ é um aberto, $a \in U$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função \mathbb{C} -diferenciável em a , então*

$$df(a)(h) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) h_j$$

para todo $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{C}^m$.

Demonstração. Como $df(a)$ é \mathbb{C} -linear, então também é \mathbb{R} -linear. Sendo $h_j = k_j + il_j$ para $1 \leq j \leq m$, obtemos

$$\begin{aligned} df(a)(h) &= \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) k_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) l_j \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \left(\frac{h_j + \bar{h}_j}{2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \left(\frac{h_j - \bar{h}_j}{2i} \right) \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \right) h_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \right) \bar{h}_j \right) \\ &= \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) h_j, \end{aligned}$$

visto que $df(a)$ é \mathbb{C} -linear. □

Corolário 3.6. *Se $U \subset \mathbb{C}^m$ é aberto e $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função \mathbb{R} -diferenciável em U , então f é holomorfa em U se, e somente se,*

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x_j} = -\frac{\partial u}{\partial y_j}, \quad \forall 1 \leq j \leq m. \quad (6)$$

As equações em (6) são chamadas de **equações de Cauchy-Riemann** para f .

Demonstração. Pela parte final da demonstração da proposição anterior, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u + iv) + i \frac{\partial}{\partial y_j} (u + iv) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \right),
\end{aligned}$$

obtendo o resultado desejado. \square

Dados $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto e uma aplicação $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$, sabemos que, pelo Capítulo 5 de LIMA (2009), f é \mathbb{R} -diferenciável em $a \in U$ se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas f_j são \mathbb{R} -diferenciáveis em a . Mais precisamente, existe uma transformação linear real $L_a : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(h),$$

para todo $h \in \mathbb{R}^{2m}$ de norma suficientemente pequena.

Similarmente ao que fizemos no caso $n = 1$, dizemos que $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ é **\mathbb{C} -diferenciável** se existir uma transformação linear complexa $L_a : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que

$$f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(h),$$

para todo $h \in \mathbb{C}^m$ de norma suficientemente pequena, onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{|h|} = 0.$$

Logo, f é \mathbb{C} -diferenciável em $a \in U$ se, e somente se, cada f_j é \mathbb{C} -diferenciável em a . Com isso, estendemos a noção de holomorfia a aplicações.

Definição 3.7. *Seja $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto. Uma aplicação $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ é **holomorfa** (respectivamente **anti-holomorfa**) em $a \in U$ se f (respectivamente \bar{f}) for \mathbb{C} -diferenciável em uma vizinhança de a em U . A função f é holomorfa (respectivamente anti-holomorfa) em U se o for em todo ponto de U .*

Pelo que foi discutido anteriormente, f é holomorfa se, e somente se, cada função coordenada f_j também o for. Dessa forma, podemos estender a regra da cadeia usual a aplicações holomorfas, como mostra o resultado a seguir.

Proposição 3.8. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^m$ e $V \subset \mathbb{C}^n$ abertos. Se $f : U \rightarrow V$ é holomorfa em*

$a \in U$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}^p$ é holomorfa em $b = f(a) \in V$, então $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ é holomorfa em a , com $(g \circ f)'(a) = g'(b) \circ f'(a)$.

Demonstração. Como g e f são aplicações \mathbb{R} -diferenciáveis em vizinhanças de b e a , respectivamente, assim, pela regra da cadeia real garante a \mathbb{R} -diferenciabilidade de $g \circ f$ em uma vizinhança $U' \subset U$ de a , com $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \circ f'(z)$, para todo $z \in U'$. Desde que $f'(z) : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^p$ e $g'(f(z)) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ são transformações lineares complexas, logo, o mesmo vale para $(g \circ f)'(z)$, para todo $z \in U'$. Portanto, $g \circ f$ é \mathbb{C} -diferenciável em U' e, assim, $g \circ f$ é holomorfa em a . \square

Em Análise Complexa de uma variável, sabemos que se uma função é holomorfa também será analítica. Esse resultado pode ser estendido para aplicações de várias variáveis, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 3.9. *Seja $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto. Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ é holomorfa, então f é analítica.*

Demonstração. Veja a Proposição A.32 de CAMINHA (2014). \square

3.2 Variedades quasi-complexas

Nessa seção, estudaremos a estrutura das variedade quasi-complexas, cuja definição segue abaixo. Para entender melhor essa seção é necessário saber a teoria de espaços vetoriais complexos. Deixamos como referência o Apêndice A.3 de CAMINHA (2014).

Definição 3.10. *Uma **estrutura quasi-complexa** J em uma variedade diferenciável M , de dimensão (real) $2n$, é a escolha, para cada $p \in M$, de uma estrutura complexa $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$, diferenciável no seguinte sentido: para cada $p \in M$ existem coordenadas locais (x_1, \dots, x_{2n}) , definidas em uma vizinhança U de p em M e tais que a matriz de J_p com respeito à base coordena $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{2n})$ de $T_p M$ tem a forma*

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p = \sum_l J_{kl}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_p$$

com $J_{kl} \in C^\infty(U)$ para todos $1 \leq k, l \leq 2n$. Nesse caso, diremos que M é uma **variedade quasi-complexa** e que as funções J_{kl} são as componentes de J com respeito às coordenadas (x_1, \dots, x_{2n}) .

Dada uma variedade quasi-complexa M^{2n} , com estrutura quasi-complexa J e $p \in M$, é imediato verificar que a diferenciabilidade de J independe das coordenadas locais escolhidas em vizinhanças de p .

Considerando M uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional, o **fibrado tangente complexificado** de M é o produto tensorial

$$TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} (M \times \mathbb{R})$$

com espaço de seções isomorfo à complexificação $\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{X}(M)$. Assim, denotaremos, a partir daqui, $\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ como o espaço das seções, de sorte que todo $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ pode ser escrito da forma $\xi = X + iY$, com $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Suponha que M é quasi-complexa com estrutura quasi-complexa J . Para $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotando $(JX)_p = J_p X_p$ para cada $p \in M$, temos um campo $JX \in \mathfrak{X}(M)$, onde a aplicação $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, que leva X em JX , define uma estrutura complexa no espaço vetorial real $\mathfrak{X}(M)$. Similarmente, tal estrutura se estende a uma aplicação $\mathcal{C}^{\infty}(M, \mathbb{C})$ -linear $J : \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$, que leva $X + iY$ em $JX + iJY$.

Denotando

$$\mathfrak{X}(M)^{\pm} = \{ \xi \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}; J\xi = \pm\xi \},$$

obtemos subespaços vetoriais complexos $\mathfrak{X}(M)^+$ e $\mathfrak{X}(M)^-$ de $\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ (veja o Lema A.15 de CAMINHA (2014)), tais que $\overline{\mathfrak{X}(M)^+} = \mathfrak{X}(M)^-$ e

$$\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{X}(M)^+ \oplus \mathfrak{X}(M)^-.$$

É imediato verificar que tal decomposição em soma direta induz uma decomposição do fibrado tangente complexificado na soma de Whitney

$$TM^{\mathbb{C}} = TM^+ \oplus_W TM^-,$$

onde TM^+ e TM^- são fibrados vetoriais de posto (real) $2n$ sobre M , tais que

$$\Gamma(TM^+) = \mathfrak{X}(M)^+ \quad \text{e} \quad \Gamma(TM^-) = \mathfrak{X}(M)^-.$$

As seções de TM^+ e TM^- são campos vetoriais complexos, respectivamente, de **tipo holomorfo** e **anti-holomorfo** em M .

Pela decomposição de $\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$, dado $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$, temos $\xi = \xi^+ + \xi^-$, onde

$$\xi^+ = \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \in \mathfrak{X}(M)^+ \text{ e } \xi^- = \frac{1}{2}(\xi + iJ\xi) \in \mathfrak{X}(M)^-,$$

de sorte que ξ^+ (resp. ξ^-) é a componente de tipo holomorfo (resp. tipo anti-holomorfo) de ξ . Logo, podemos verificar que

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(M)^+ &= \{X - iJX; X \in \mathfrak{X}(M)\}, \\ \mathfrak{X}(M)^- &= \{X + iJX; X \in \mathfrak{X}(M)\}.\end{aligned}$$

Para o que segue, tais definições e discussões sobre seus conceitos são suficientes para o restante do trabalho. Contudo, enunciaremos um último teorema para entender a rigidez de variedades quasi-complexas.

Teorema 3.11. *Toda variedade quasi-complexa é orientável.*

Demonstração. Veja o Teorema 5.5 de CAMINHA (2014). □

3.3 Variedades complexas

Nessa seção analisaremos os principais fundamentos de variedades complexas, objeto principal deste capítulo.

Definição 3.12. *Uma **variedade complexa** M de dimensão (complexa) n é uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional (dimensão real), munida de um atlas formada por cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ satisfazendo as seguintes condições: sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

*é uma função holomorfa de n variáveis complexas. Nesse caso, cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ é uma **carta coordenada holomorfa** ou, ainda, **um sistema de coordenadas complexas** em M e o conjunto $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é um **atlas complexo** para M .*

Segue do Teorema 3.9 que toda variedade complexa é uma variedade analítica real. Ademais, se $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$ e $z_j = x_j + iy_j$ para $1 \leq j \leq n$, então $\varphi = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ é uma carta coordenada analítica de M , vista como variedade analítica real.

Exemplo 3.13. Se M^2 é uma superfície riemanniana orientável e $\{(\varphi_\alpha; U_\alpha)\}$ é um atlas para M formado pelas cartas isotérmicas positivas (tais cartas existem por CHERN

(1955)), então M é uma variedade complexa de dimensão complexa 1.

Para mostrar isso, tome α e β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, com $\varphi_\alpha(q) = (u(q), v(q))$ e $\varphi_\beta(q) = (x(q), y(q))$ para $q \in U_\alpha \cap U_\beta$. Então, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = 0 \quad (7)$$

e

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0. \quad (8)$$

Substituindo

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y}$$

em (7) e usando (8), obtemos as relações

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Encarando acima como um sistema de equações em $\partial x/\partial u$ e $\partial y/\partial u$, além de usar a positividade das cartas, onde $\partial x/\partial u \partial y/\partial v - \partial x/\partial v \partial y/\partial u > 0$, obtemos

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u},$$

que são as equações de Cauchy-Riemann (6) para mudança de coordenada, o que prova que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é holomorfa para todos α e β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Exemplo 3.14. O n -espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^n , com o atlas formado pela aplicação identidade, é uma variedade complexa de dimensão n .

Sejam M uma variedade complexa de dimensão (complexa) n e $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$ um sistema de coordenadas complexas em $U \subset M$, com $z_j = x_j + iy_j$. Então as coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ formam um sistema de coordenadas reais para M em U , onde $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial y_n)$ é um referencial para TM em U . Além disso, se

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

então $(\partial/\partial z_1, \partial/\partial \bar{z}_1, \dots, \partial/\partial z_n, \partial/\partial \bar{z}_n)$ é um referencial para $TM^{\mathbb{C}}$ em U , onde obteremos o seguinte resultado.

Lema 3.15. *Seja M uma variedade complexa de dimensão (complexa) n . Se (w_1, \dots, w_n) e (z_1, \dots, z_n) são sistemas de coordenadas complexas num aberto $U \subset M$, então*

$$\frac{\partial}{\partial w_k} = \sum_j \frac{\partial z_j}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial z_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k} = \sum_j \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \bar{w}_k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

Demonstração. Sendo $z_k = x_k + iy_k$ e $w_k = u_k + iv_k$ e omitindo, por conveniência, o ponto p , pelas equações de Cauchy-Riemann (6), temos

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial z_j}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial z_j} &= \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial w_k} + i \frac{\partial y_j}{\partial w_k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} - i \frac{\partial x_j}{\partial v_k} + i \frac{\partial y_j}{\partial u_k} + \frac{\partial y_j}{\partial v_k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} + i \frac{\partial y_j}{\partial u_k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - i \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{\partial y_j}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} - i \sum_j \left(\frac{\partial y_j}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial x_j}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_k} - i \frac{\partial}{\partial v_k} \right) = \frac{\partial}{\partial w_k}. \end{aligned}$$

A outra igualdade é completamente análoga. □

O próximo resultado relaciona as variedades quasi-complexas e as variedades complexas.

Proposição 3.16. *Se M é uma variedade complexa de dimensão (complexa) n e onde (z_1, \dots, z_n) é um sistema de coordenadas complexas num aberto $U \subset M$, então, para $p \in U$, o operador linear $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que*

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \quad \text{e} \quad J_p \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \quad (9)$$

independe das coordenadas complexas $z_k = x_k + iy_k$ escolhidas e define uma estrutura quasi-complexa em M .

Demonstração. Fixados $p \in M$ e uma carta coordenada complexa (z_1, \dots, z_n) como no enunciado, então J_p , dado por (9), define uma estrutura complexa em T_pM . Estendendo J_p a um operador linear em $TM^{\mathbb{C}}$ pondo, para cada $p \in M$ e todos $u, v \in T_pM$, $J_p(u+iv) = J_pu + iJ_pv$. Fazendo $T_pM^{\pm} = \{v \in T_pM^{\mathbb{C}}; J_pv = \pm iv\}$, então $T_pM^{\mathbb{C}} = T_pM^+ \oplus T_pM^-$ (vide o Lema A.15 de CAMINHA (2014)).

Seja, agora, (w_1, \dots, w_n) outro sistema de coordenadas complexas numa vizinhança de $p \in M$. Denotando por I_p a estrutura complexa correspondente em T_pM , bem como sua extensão a $TM^{\mathbb{C}}$, ou seja, tal que

$$I_p = \left(\frac{\partial}{\partial w_k} \right) = i \frac{\partial}{\partial w_k} \quad \text{e} \quad I_p = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}_k} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k},$$

devemos mostrar a coincidência de I_p e J_p em $TM^{\mathbb{C}}$. Para isso, é suficiente mostrar que, em relação à decomposição em soma direta $T_pM^{\mathbb{C}} = T_pM^+ \oplus T_pM^-$ induzida por J , teremos $(\partial/\partial w_k)_p \in T_pM^+$ bem como $(\partial/\partial \bar{w}_k)_p \in T_pM^+$, já que, uma vez feito isso, obteremos

$$J_p = \left(\frac{\partial}{\partial w_k} \right) = i \frac{\partial}{\partial w_k} = I_p = \left(\frac{\partial}{\partial w_k} \right)$$

e

$$J_p = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}_k} \right) = i \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k} = I_p = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}_k} \right).$$

Para o que falta, veja que no ponto p e pelo Lema 3.15, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial w_k} = \sum_j \frac{\partial z_j}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_pM^+ \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k} = \sum_j \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \bar{w}_k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \in T_pM^-.$$

□

Se M é uma variedade complexa, a estrutura quasi-complexa J construída nessa proposição é denominada **estrutura quasi-complexa canônica** de M . Pelo Teorema 3.11 e a proposição anterior obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.17. *Toda variedade complexa é orientável.*

Uma aplicação bem relevante na teoria de variáveis complexas é o **tensor de Nijenhuis**, definido em M , uma variedade quasi-complexa com estrutura quasi-complexa J , onde $\mathcal{N} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(M)$, dada para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$\mathcal{N}(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y], \quad (10)$$

é um 2-tensor covariante em M .

Para a próxima proposição, precisaremos estender o colchete de Lie de campos de vetores em M a campos vetoriais complexos, pondo

$$[X + iY, X' + iY'] = ([X, X'] - [Y, Y']) + i([X, Y'] + [Y, X']),$$

para todos $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 3.18. *Se M é uma variedade quasi-complexa com estrutura quasi-complexa J , são equivalentes:*

- (a) $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^+ \Rightarrow [\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(M)^+$.
- (b) $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^- \Rightarrow [\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(M)^-$.
- (c) $\mathcal{N}(X, Y) = 0$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Inicialmente estenderemos \mathcal{N} a $\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ por linearidade, isto é, pondo

$$\mathcal{N}(\xi, \eta) = [J\xi, J\eta] - J[J\xi, \eta] - J[\xi, J\eta] - [\xi, \eta], \quad (11)$$

para todos $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$.

Mostraremos a equivalência entre (a) e (b). Se $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^-$, então $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in \mathfrak{X}(M)^+$. Supondo a validade do item (a), segue que $[\bar{\xi}, \bar{\eta}] \in \mathfrak{X}(M)^+$. Como $[\bar{\xi}, \bar{\eta}] = \overline{[\xi, \eta]}$, teremos $\overline{[\xi, \eta]} \in \mathfrak{X}(M)^+$, logo, $[\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(M)^-$. Para mostrar que (b) implica (a), a demonstração é análoga.

Suponha a validade de (a). Mostraremos que $\mathcal{N}(\xi, \eta) = 0$, para todos $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$. Como $\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{X}(M)^+ \oplus \mathfrak{X}(M)^-$ e \mathcal{N} é linear nas duas entradas, então é suficiente mostrar que $\mathcal{N}(\xi, \eta) = 0$, para todos $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\pm}$. Dessa forma, consideraremos três casos:

- i. Se $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^+$, então $J\xi = i\xi$, $J\eta = i\eta$ e, por hipótese, $J[\xi, \eta] = i[\xi, \eta]$. Assim, segue de (11) que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\xi, \eta) &= [i\xi, i\eta] - J[i\xi, \eta] - J[\xi, i\eta] - [\xi, \eta] \\ &= i^2[\xi, \eta] - iJ[\xi, \eta] - iJ[\xi, \eta] - [\xi, \eta] \\ &= -[\xi, \eta] - 2i^2[\xi, \eta] - [\xi, \eta] = 0. \end{aligned}$$

- ii. Se $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^-$, então $J\xi = -i\xi$, $J\eta = -i\eta$ e, por hipótese e pela equivalência anterior, $J[\xi, \eta] = -i[\xi, \eta]$. Calculando de modo análogo ao que foi feito em i , segue que $\mathcal{N}(\xi, \eta) = 0$.
- iii. Se $\xi \in \mathfrak{X}(M)^+$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^-$ (o caso onde $\xi \in \mathfrak{X}(M)^-$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^+$ pode ser resolvido da mesma forma), então $J\xi = i\xi$, $J\eta = -i\eta$. Portanto, por (11), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\xi, \eta) &= [i\xi, -i\eta] - J[i\xi, \eta] - J[\xi, -i\eta] - [\xi, \eta] \\ &= -i^2[\xi, \eta] - iJ[\xi, \eta] + iJ[\xi, \eta] - [\xi, \eta] = 0.\end{aligned}$$

Por fim, suponha que $\mathcal{N}(X, Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Afirmamos que $\mathcal{N}(\xi, \eta) = 0$ para todos $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$. De fato, se $\xi = X + iY$ e $\eta = X' + iY'$, com $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\mathcal{N}(\xi, \eta) = (\mathcal{N}(X, X') - \mathcal{N}(Y, Y')) + i(\mathcal{N}(X, Y') + \mathcal{N}(Y, X')) = 0.$$

Suponhamos, agora, que $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^+$, assim, $J\xi = i\xi$ e $J\eta = i\eta$. Portanto, por (11), obtemos

$$\begin{aligned}0 = \mathcal{N}(\xi, \eta) &= [i\xi, i\eta] - J[i\xi, \eta] - J[\xi, i\eta] - [\xi, \eta] \\ &= 2([\xi, \eta] + iJ[\xi, \eta])\end{aligned}$$

logo, $J[\xi, \eta] = i[\xi, \eta]$, conforme desejávamos. □

Para terminar este capítulo mostraremos que o tensor de Nijenhuis é nulo em variedades complexas, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 3.19. *Se M é uma variedade complexa e J é sua estrutura quasi-complexa canônica, então $\mathcal{N}(X, Y) = 0$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. Conforme vimos prova da Proposição 3.16 que, se (z_1, \dots, z_n) é um sistema de coordenadas complexas para M , definido num aberto $U \subset M$, então os referenciais $(\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n)$ e $(\partial/\partial \bar{z}_1, \dots, \partial/\partial \bar{z}_n)$ são bases em U , respectivamente, para $\mathfrak{X}(M)^+$ e $\mathfrak{X}(M)^-$. Portanto, se $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^+$, temos $\xi = \sum_j a_j \partial/\partial z_j$ e $\eta = \sum_j b_j \partial/\partial z_j$, para certas funções suaves $a_j, b_j : U \rightarrow \mathbb{C}$, logo,

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] &= \sum_{j,k} \left[a_j \frac{\partial}{\partial z_j}, b_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right] \\
&= \sum_{j,k} \left(a_j \frac{\partial b_k}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_k} - b_k \frac{\partial a_j}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \\
&= \sum_{j,k} \left(a_j \frac{\partial b_k}{\partial z_j} - b_j \frac{\partial a_k}{\partial z_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_j} \in \mathfrak{X}(M)^+.
\end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 3.18, temos que $\mathcal{N}(X, Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ com a estrutura quasi-complexa canônica J . □

4 DEFORMANDO MÉTRICAS DE VARIEDADES KÄHLERIANAS

Ao longo deste capítulo definiremos e discutiremos resultados a respeito de variedades kählerianas e campos conformes, além de deformar a métrica desse tipo de variedade e comparar suas estruturas básicas, tais como suas conexões de Levi-Civita e curvaturas seccionais holomorfas.

4.1 Variedades kählerianas

Para essa seção, M será uma variedade complexa de dimensão (complexa) n e J sua estrutura quasi-complexa canônica.

Como a geometria de uma variedade está relacionada com sua métrica e uma variedade complexa está associada a sua estrutura quasi-complexa, é natural que haja um desejo de relacioná-las. Assim, uma métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ em M é dita **hermitiana** se

$$\langle X, Y \rangle = \langle JX, JY \rangle$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Vale ressaltar que toda variedade complexa pode ser munida com uma métrica hermitiana. Para isso, basta definir, a partir da métrica g de M , o 2-tensor \tilde{g} por

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dessa forma, \tilde{g} será simétrico e positivo definido, além de valer a seguinte igualdade

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY) = g(JX, JY) + g(-X, -Y) = \tilde{g}(JX, JY).$$

Com isso, \tilde{g} será uma métrica hermitiana em M . Por essa razão, toda métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, a partir desse capítulo, será hermitiana.

Seja ω o 2-tensor covariante em M dado por

$$\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle,$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O 2-tensor ω é uma 2-forma diferenciável, denominada **forma kähleriana**. Para mostrar que ω é uma forma diferenciável basta mostrar que é alternada, visto que, claramente, tal tensor é suave. De fato, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ e devido a métrica ser her-

mitiana, temos

$$\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle = \langle J^2X, JY \rangle = \langle -X, JY \rangle = -\omega(Y, X).$$

Definição 4.1. *Seja M uma variedade complexa com estrutura quasi-complexa canônica J . Uma métrica g em M é dita **métrica kähleriana** se g é hermitiana e sua forma kähleriana ω é fechada, isto é, $d\omega = 0$. Nesse caso, (M, J, g) é uma **variedade kähleriana**.*

Antes de nos aprofundarmos nas propriedades de variedades kählerianas, vejamos alguns exemplos relevantes.

Exemplo 4.2 (\mathbb{C}^n). A estrutura quasi-complexa canônica e a métrica euclidiana canônica tornam \mathbb{C}^n uma variedade kähleriana. De fato, podemos identificar $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$, onde cada elemento seu pode ser representado por $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, obtendo

$$\left\langle J \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right), J \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right\rangle = \delta_{jk} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle$$

e da mesma forma, temos

$$\left\langle J \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right), J \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right\rangle \text{ e } \left\langle J \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right), J \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right\rangle,$$

para $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, logo, sua métrica é hermitiana. Além disso, seja ω sua forma kähleriana, obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{j < k} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) dx_j \wedge dx_k + \sum_{j < k} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right) dx_j \wedge dy_k \\ &+ \sum_{j < k} \omega \left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right) dy_j \wedge dy_k \\ &= \sum_{j < k} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle dx_j \wedge dx_k + \sum_{j < k} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right\rangle dx_j \wedge dy_k \\ &+ \sum_{j < k} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right\rangle dy_j \wedge dy_k \\ &= \sum_{j < k} \delta_{jk} dx_j \wedge dy_k = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j. \end{aligned}$$

Com isso, segue imediatamente que $d\omega = 0$, visto que $ddx_j = 0 = ddy_j$.

Exemplo 4.3 (Superfícies riemannianas orientáveis). Como foi visto no Exemplo 3.13,

toda superfície riemanniana orientável M^2 , munida com atlas formada por cartas isotérmicas positivas, é uma variedade complexa de dimensão 1. Sendo J a estrutura quasi-complexa canônica de M^2 e $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ a base coordenada correspondente a uma carta isotérmica positiva em M , obtemos

$$\left\langle J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$$

e, analogamente, temos

$$\left\langle J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle = 0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \text{ e } \left\langle J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle.$$

Logo, a métrica de M é hermitiana e, como toda 2-forma em M é fechada (visto que M tem dimensão riemanniana igual a 2), então $(M, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exemplo 4.4 (Produto de variedades kählerianas). Sejam M_1 e M_2 variedades kählerianas com estruturas quasi-complexa J_1 e J_2 e formas kählerianas ω_1 e ω_2 , respectivamente. Denotaremos as métricas de M_1 e M_2 por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Tomando $M = M_1 \times M_2$ é imedito que M é variedade complexa pela métrica produto. Além disso, J será sua estrutura quasi-complexa, dada por $J = (J_1, J_2)$, ou seja,

$$J(X_1, X_2) = (J_1 X_1, J_2 X_2),$$

para todos $X_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ e $X_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.

Com isso, afirmamos que M é uma variedade kähleriana com a métrica produto, denotada também por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De fato, tomando $X_i, Y_i \in \mathfrak{X}(M_i)$ para $i \in \{1, 2\}$, temos

$$\begin{aligned} \langle J(X_1, X_2), J(Y_1, Y_2) \rangle &= \langle (J_1 X_1, J_2 X_2), (J_1 Y_1, J_2 Y_2) \rangle \\ &= \langle J_1 X_1, J_1 Y_1 \rangle + \langle J_2 X_2, J_2 Y_2 \rangle \\ &= \langle X_1, Y_1 \rangle + \langle X_2, Y_2 \rangle \\ &= \langle (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \rangle, \end{aligned}$$

mostrando que a métrica produto é hermitiana. Ademais, denotando $\pi_i : M \rightarrow M_i$ as projeções canônicas e sendo ω a forma kähleriana de M , obtemos

$$\begin{aligned}
\omega((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= \langle J(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \rangle = \langle (J_1X_1, J_2X_2), (Y_1, Y_2) \rangle \\
&= \langle J_1X_1, Y_1 \rangle + \langle J_2X_2, Y_2 \rangle = \omega_1(X_1, Y_1) + \omega_2(X_2, Y_2) \\
&= (\pi_1^*\omega_1)((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) + (\pi_2^*\omega_2)((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \\
&= (\pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)),
\end{aligned}$$

ou seja, $\omega = \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$. Portanto,

$$d\omega = d\pi_1^*\omega_1 + d\pi_2^*\omega_2 = \pi_1^*d\omega_1 + \pi_2^*d\omega_2 = 0.$$

Usando o fato do tensor de Nijenhuis ser identicamente nulo numa variedade complexa com estrutura quasi-complexa canônica, conforme mostrado na Proposição 3.19, podemos estabelecer um critério, necessário e suficiente, para saber quando a forma kähleriana é fechada numa variedade complexa com métrica hermitiana.

Teorema 4.5. *Se M é uma variedade complexa com métrica hermitiana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, estrutura quasi-complexa J e conexão de Levi-Civita ∇ , então M é kähleriana se, e somente se, $\nabla_X J = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. Seja ω a forma kähleriana de M com métrica hermitiana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Como $\omega \in \Omega^2(M)$, pela Proposição 2.11, temos

$$(d\omega)(X, Y, Z) = (\nabla_X\omega)(Y, Z) - (\nabla_Y\omega)(X, Z) + (\nabla_Z\omega)(X, Y), \quad (12)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, sabemos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\omega)(Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\
&= X \langle JY, Z \rangle - \langle J\nabla_X Y, Z \rangle - \langle JY, \nabla_X Z \rangle \\
&= \langle \nabla_X JY, Z \rangle - \langle J\nabla_X Y, Z \rangle \\
&= \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle.
\end{aligned}$$

Aplicando esse resultado em (12), obtemos

$$(d\omega)(X, Y, Z) = \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle - \langle (\nabla_Y J)X, Z \rangle + \langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle. \quad (13)$$

Dessa forma, supondo $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos imediatamente, por (13), que ω será fechada, logo M será kähleriana.

Reciprocamente, seja M variedade kähleriana. Sendo \mathcal{N} o tensor de Nijenhuis

de M e como $J^2 = -Id$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(X, Y) &= [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] \\
&= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_YJX) \\
&\quad - J(\nabla_XJY - \nabla_{JY}X) - \nabla_XY + \nabla_YX \\
&= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J(\nabla_YJ)X - J(\nabla_XJ)Y. \tag{14}
\end{aligned}$$

Usando $(\nabla J)J + J\nabla J = 0$, pois $J^2 = -Id$, (13), o fato de M ser uma variedade kähleriana na métrica g , (14) e $\mathcal{N} = 0$, visto na Proposição 3.19, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= (d\omega)(X, Y, Z) - (d\omega)(JX, JY, Z) = \\
&= \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle - \langle (\nabla_Y J)X, Z \rangle + \langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle \\
&\quad - \langle (\nabla_{JX} J)JY, Z \rangle + \langle (\nabla_{JY} J)JX, Z \rangle - \langle (\nabla_Z J)JX, JY \rangle \\
&= \langle -J^2(\nabla_X J)Y, Z \rangle - \langle -J^2(\nabla_Y J)X, Z \rangle + \langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle \\
&\quad + \langle J(\nabla_{JX} J)Y, Z \rangle - \langle J(\nabla_{JY} J)X, Z \rangle + \langle J(\nabla_Z J)X, JY \rangle \\
&= \langle -J^2(\nabla_X J)Y + J^2(\nabla_Y J)X + J(\nabla_{JX} J)Y - J(\nabla_{JY} J)X, Z \rangle + 2\langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle \\
&= \langle J\mathcal{N}(X, Y), Z \rangle + 2\langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle \\
&= 2\langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle,
\end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, $\langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle = 0$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, assim, $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. \square

Corolário 4.6. *Se (M, J, g) é uma variedade kähleriana, então $\nabla_X JY = J\nabla_X Y$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. De fato, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer, temos

$$\nabla_X JY = (\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y = J\nabla_X Y,$$

pois (M, J, g) é uma variedade kähleriana, logo $\nabla_X J = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. \square

Posteriormente, segue um teorema que mostra uma versão complexa do Teorema de Cartan para formas especiais, que omitiremos a prova, pois sua demonstração foge do escopo deste trabalho. Para isso, precisamos definir a curvatura seccional holomorfa. Seja $(M, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Fixados $p \in M$ e $X_p \in T_p M \setminus \{0\}$, a **curvatura seccional holomorfa** $K(X_p)$ de M em p , na direção de X_p , é a curvatura seccional de M (vista como variedade riemanniana) segundo o plano gerado por X_p e $J_p X_p$.

Teorema 4.7 (Hawley-Igusa). *Se M e M' são variedades kählerianas n -dimensionais completas e simplesmente conexas, ambas com mesma curvatura seccional holomorfa constante, então M e M' são isomorfas.*

Demonstração. Veja o Teorema 7.9 do capítulo IX de KOBAYASHI and NOMIZU (1969). □

Para finalizar esta seção, enunciaremos a versão complexa do teorema de decomposição de De Rham munida de uma métrica kähleriana. Assim como no teorema anterior, omitiremos a prova, pois a demonstração transcende os objetivos deste trabalho.

Teorema 4.8 (de decomposição de De Rham, versão complexa). *Seja $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$ uma decomposição de De Rham para uma variedade kähleriana conexa, simplesmente conexa e completa M . Então M_0, M_1, \dots, M_k são todas variedades kählerianas e a isometria entre M e $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$ é holomorfa.*

Demonstração. Veja o Teorema 8.1 do capítulo IX de KOBAYASHI and NOMIZU (1969). □

4.2 Campos conformes fechados

Os resultados centrais deste trabalho envolvem a existência de campo conforme fechado em variedades kählerianas. Entretanto, a definição de tais campos não está restrita a variedades complexas. Por isso, inicialmente definiremos e mostraremos os principais resultados dessa estrutura em variedades riemannianas quaisquer, para, posteriormente, relacioná-la com variedades kählerianas.

Definição 4.9. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Dizemos que ξ é um **campo conforme fechado** se existe $\psi \in C^\infty(M)$, chamada de **fator conforme de ξ** , tal que*

$$\nabla_X \xi = \psi X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 4.10. *Seja ξ um campo conforme fechado numa variedade riemanniana M . Assim, ξ é paralelo se, e somente se, ξ é campo de Killing. De fato, se ξ é paralelo, então $\nabla_X \xi = \nabla_Y \xi = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, logo, $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = 0$ e pela Proposição 2.9, ξ é campo de Killing. Reciprocamente, se ξ é um campo de Killing e ψ seu fator conforme, então, pela Proposição 2.9, $0 = 2 \langle \nabla_X \xi, X \rangle = 2\psi \langle X, X \rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, $\psi \equiv 0$, como queríamos mostrar.*

Seguem alguns exemplos de campos conforme no \mathbb{R}^n e em \mathbb{S}^n .

Exemplo 4.11. Naturalmente, qualquer variedade riemanniana possui um campo conforme fechado, o campo identicamente nulo $\xi \equiv 0$, com fator conforme $\psi \equiv 0$. No \mathbb{R}^n , os campos $Z(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n p_i \partial / \partial x_i$ e $\xi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \partial / \partial x_i$, para $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ fixado e $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qualquer, são conformes. De fato, como os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k são identicamente nulos, para quaisquer $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, no espaço euclidiano, então para qualquer $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial / \partial x_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}\nabla_X Z &= \sum_{i=1}^n X(p_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \\ \nabla_X \xi &= \sum_{i=1}^n X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} = X.\end{aligned}$$

Portanto, Z e ξ são campos conformes com respectivos fatores conformes $\psi_Z \equiv 0$ e $\psi_\xi \equiv 1$.

Exemplo 4.12 (Campo conforme fechado em \mathbb{S}^n). Sejam $Z, N \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, onde Z é um campo constante e N é o campo posição, mostrado no exemplo anterior. Restringindo tais campos a esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, temos que $\xi := Z - \langle Z, N \rangle N \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica canônica do \mathbb{R}^{n+1} . Seja $\rho = \langle Z, N \rangle$. Afirmamos que $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ é um campo conforme fechado de fator conforme $\psi = -\rho$. De fato, consideremos ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita, respectivamente, de \mathbb{R}^{n+1} e \mathbb{S}^n . Tomando $p \in \mathbb{S}^n$, (x_1, \dots, x_{n+1}) um referencial geodésico em \mathbb{R}^{n+1} saindo de p , $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ e usando o fato dos símbolos de Christoffel serem identicamente nulos no \mathbb{R}^{n+1} , temos em p (mas omitindo a notação por simplicidade)

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \xi &= \left(\sum_i X(\langle \xi, x_i \rangle) x_i \right)^T \\ &= \left(\sum_i X(\langle Z, x_i \rangle - \langle N, Z \rangle \langle N, x_i \rangle) x_i \right)^T \\ &= \left(\sum_i -(\langle \nabla_X N, Z \rangle \langle N, x_i \rangle + \langle N, Z \rangle \langle \nabla_X N, x_i \rangle) x_i \right)^T \\ &= \left(\sum_i -(\langle X, Z \rangle \langle N, x_i \rangle + \rho \langle X, x_i \rangle) x_i \right)^T \\ &= (-\langle X, Z \rangle N - \rho X)^T = -\rho X,\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $Y = \sum_i \langle Y, x_i \rangle x_i$ para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, além de considerar extensões de ξ e X para \mathbb{R}^{n+1} . Como o resultado vale para cada $p \in \mathbb{S}^n$, obtemos o resultado desejado.

Proposição 4.13. *Seja M uma variedade riemanniana n -dimensional. Se ξ é um campo*

conforme fechado e ψ seu fator conforme, então

$$\psi = \frac{\operatorname{div} \xi}{n}.$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de $T_p M$. Assim, pela definição de divergente e como ξ é campo conforme fechado, então

$$\operatorname{div} \xi(p) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \xi, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \psi(p) e_i, e_i \rangle = \psi(p) \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle = n\psi(p).$$

Como p foi tomado arbitrariamente, então $\operatorname{div} \xi = n\psi$. □

Para as próximas proposições denotaremos θ_X , dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, como o 1-tensor definido por $\theta_X(Y) = \langle X, Y \rangle$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, definiremos o 2-tensor simétrico $\theta_X^2 = \theta_X \otimes \theta_X$, isto é, $\theta_X^2(Y, Z) = \theta_X(Y)\theta_X(Z) = \langle X, Y \rangle \langle X, Z \rangle$, para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

A proposição a seguir nos mostra a relação do fechamento com campos conformes, por isso, é comum denominar tais campos de campos conformes fechados.

Proposição 4.14. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Se ξ é um campo conforme fechado, então θ_ξ é uma 1-forma fechada.*

Demonstração. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer e usando a fórmula de derivada exterior, temos

$$\begin{aligned} (d\theta_\xi)(X, Y) &= X(\theta_\xi(Y)) - Y(\theta_\xi(X)) - \theta_\xi([X, Y]) \\ &= X \langle \xi, Y \rangle - Y \langle \xi, X \rangle - \langle \xi, [X, Y] \rangle \\ &= \langle \nabla_X \xi, Y \rangle - \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = \psi \langle X, Y \rangle - \psi \langle Y, X \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

As próximas proposições relacionam condições de existência e unicidade de campos conformes e sua relação com seu fator conforme.

Lema 4.15. *Um campo vetorial conforme ξ em M é determinado unicamente pelos valores de ψ , $\nabla\psi$, ξ e $\nabla\xi$ em um ponto de M .*

Demonstração. Veja as Preliminares de OBATA (1970). □

Proposição 4.16. *Seja M uma variedade riemanniana de dimensão $n > 2$. Se ξ é campo conforme fechado não trivial, isto é, ξ não é identicamente nulo, então $\operatorname{div} \xi$ não se anula em nenhum ponto de M .*

Demonstração. Veja a Proposição 4.1 de OBATA (1970). □

O resultado adiante foi provado em ROS and URBANO (1998) e nos fornece expressões para o gradiente, divergente e tensor de Riemann envolvendo campos conformes.

Proposição 4.17. *Seja ξ um campo conforme fechado não trivial em uma variedade riemanniana M de dimensão n . Então*

(a) *Os gradientes de $|\xi|^2$ e do divergente de ξ são dados por*

$$\nabla |\xi|^2 = \frac{2\operatorname{div} \xi}{n} \xi \quad (15)$$

$$|\xi|^2 \nabla(\operatorname{div} \xi) = -n \operatorname{Ric}(\xi)\xi, \quad (16)$$

onde Ric denota a curvatura de Ricci normalizada, isto é,

$$\operatorname{Ric}(X)(p) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(X, e_i)X, e_i \rangle$$

para $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$.

(b) *O tensor curvatura (de Riemann) R de M satisfaz*

$$|\xi|^2 R(X, Y)\xi = \operatorname{Ric}(\xi) (\langle Y, \xi \rangle X - \langle X, \xi \rangle Y), \quad (17)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

(c) *Se $n > 2$, então os zeros de ξ são isolados.*

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de $T_p M$. Assim, $\xi = \sum_{i=1}^n \langle \xi, e_i \rangle e_i$ em p . Ademais, para $i \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$e_i \langle \xi, \xi \rangle (p) = 2 \langle \nabla_{e_i} \xi, e_i \rangle (p) = 2\psi(p) \langle \xi, e_i \rangle (p).$$

Dessa forma, usando a definição de gradiente, a relação acima e Proposição 4.13, obtemos

$$\nabla |\xi|^2 = \sum_{i=1}^n e_i \langle \xi, \xi \rangle e_i = \sum_{i=1}^n 2\psi \langle \xi, e_i \rangle e_i = 2\psi \sum_{i=1}^n \langle \xi, e_i \rangle e_i = \frac{2\operatorname{div} \xi}{n} \xi$$

em p . Como p foi tomado arbitrariamente, então (15) vale em toda M .

Sabemos que se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então $X(f) = \langle X, \nabla f \rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Com isso, usando (15), temos

$$\begin{aligned} \text{Hess}_M |\xi|^2(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla |\xi|^2, Y \rangle = \langle \nabla_X(2\psi\xi), Y \rangle \\ &= \left\langle \frac{2}{n} X(\text{div } \xi)\xi + 2\psi \nabla_X \xi, Y \right\rangle \\ &= \frac{2}{n} \langle X, \nabla(\text{div } \xi) \rangle \langle \xi, Y \rangle + 2\psi^2 \langle X, Y \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Como os tensores $\text{Hess}_M |\xi|^2$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ são simétricos, obtemos

$$\langle \nabla(\text{div } \xi), X \rangle \langle \xi, Y \rangle = \langle \nabla(\text{div } \xi), Y \rangle \langle \xi, X \rangle.$$

Com isso, tomando $p \in M$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de $T_p M$ e fazendo $X = e_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, e $Y = \xi$, temos, em p ,

$$\langle \nabla(\text{div } \xi), e_i \rangle \langle \xi, \xi \rangle = \langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle \langle \xi, e_i \rangle. \quad (19)$$

Como $\nabla(\text{div } \xi)(p) = \sum_{i=1}^n \langle \text{div } \xi, e_i \rangle(p) e_i$ e usando (19), obtemos

$$\begin{aligned} |\xi|^2 \nabla(\text{div } \xi) &= \sum_{i=1}^n |\xi|^2 \langle \nabla(\text{div } \xi), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle \langle \xi, e_i \rangle e_i \\ &= \langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle \xi, \end{aligned} \quad (20)$$

em p . Contudo, essa fórmula vale para qualquer p , logo, vale para todo M .

Além disso, usando o fato de ξ ser campo conforme fechado e a Proposição 4.13, temos

$$\begin{aligned} |\xi|^2 R(X, Y)\xi &= |\xi|^2 \{ \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_{[X, Y]}\xi \} \\ &= |\xi|^2 \{ \nabla_Y \psi X - \nabla_X \psi Y + \psi [X, Y] \} \\ &= |\xi|^2 \{ \langle \nabla \psi, Y \rangle X - \langle \nabla \psi, X \rangle Y + \psi \nabla_Y X - \psi \nabla_X Y + \psi [X, Y] \} \\ &= \frac{1}{n} \{ \langle |\xi|^2 \nabla(\text{div } \xi), Y \rangle X - \langle |\xi|^2 \nabla(\text{div } \xi), X \rangle Y \} \\ &= \frac{1}{n} \langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle \{ \langle \xi, Y \rangle X - \langle \xi, X \rangle Y \}. \end{aligned} \quad (21)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dessa forma, para provar (16) e (17), devemos mostrar que vale a equação $n\text{Ric}(\xi) = -\langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle$. Para isso, mostraremos que tal resultado vale em um ponto p arbitrário, logo vale para todo M . Se $\xi(p) = 0$, para algum $p \in M$, então essa fórmula vale trivialmente. Caso contrário, assim como fizemos anteriormente, tomaremos $\{e_i\}_{i=1}^n$

uma base ortonormal de T_pM , e faremos $X = \xi$ e $Y = e_i$ em (21), onde obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(\xi) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \langle R(\xi, e_i)\xi, e_i \rangle = -\frac{\langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle}{n(n-1)|\xi|^2} \sum_{i=1}^n \langle |\xi|^2 e_i - \langle \xi, e_i \rangle \xi, e_i \rangle \\
&= -\frac{\langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle}{n(n-1)|\xi|^2} \left(n|\xi|^2 - \sum_{i=1}^n \langle \xi, e_i \rangle^2 \right) = -\frac{\langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle}{n(n-1)|\xi|^2} (n-1)|\xi|^2 \\
&= -\frac{\langle \nabla(\text{div } \xi), \xi \rangle}{n}. \tag{22}
\end{aligned}$$

Como (22) vale para todo M , aplicando esse resultado em (20) e (21) obtemos, respectivamente, (16) e (17).

Para o que falta, pela Proposição 4.16, temos que $\text{div } \xi$ não se anula em nenhum ponto de M quando $n > 2$. Seja p um ponto crítico de $|\xi|^2$. Assim, $X(|\xi|^2)(p) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dessa forma, $2\langle \nabla_X \xi, \xi \rangle(p) = 2\psi \langle X, \xi \rangle(p) = 0$, logo, p um ponto crítico de $|\xi|^2$ se, e somente se, $\xi(p) = 0$, já que $\text{div } \xi \neq 0$ e X um campo qualquer. Assim, se p é um zero de ξ e aplicando em (18), então $\text{Hess}_M |\xi|^2(X, Y)(p) = 2\psi(p)^2(X, Y)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde temos que $\text{Hess}_M |\xi|^2$ é positivo definido em todo ponto crítico de $|\xi|^2$, portanto, p não é ponto degenerado, logo, pelo Teorema 2.8, todos os seus pontos críticos são isolados e, conseqüentemente, os zeros de ξ são isolados. \square

Nos próximos teorema e exemplo, iremos perceber que a existência de campos conformes não triviais em certas variedades riemannianas podem revelar alguma rigidez nessa estrutura.

Teorema 4.18 (Tanno-Weber). *Seja M uma variedade riemanniana com curvatura escalar constante $S > 0$. Então M é globalmente isométrico à esfera se M admite um campo vetorial conforme ξ não trivial que se anula em algum ponto de M .*

Demonstração. Veja o Teorema 1 de TANNO and WEBER (1969). \square

Exemplo 4.19. Seja (M^m, J, g, ∇) um espaço compacto, simétrico, dimensão real m e curvatura escalar positiva. Se $H_{dR}^1(M) = \{0\}$ e M não é isométrico a \mathbb{S}^m , então M não possui um campo vetorial conforme. Suponha que exista um campo conforme fechado $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Como a 1-forma θ_ξ é fechada, ela deve gerar um elemento $[\theta_\xi] \in H_{dR}^1(M)$, logo $[\theta_\xi] = 0$. Por sua vez, isso implica que $\xi = \nabla f$, para $f \in C^\infty(M)$. Como M é compacta, então f possui, pelo menos, dois pontos críticos, logo ξ possui dois zeros em M , já que f assume máximo, mínimo e $\xi = \nabla f$. Uma vez que M tem curvatura escalar positiva, o Teorema 4.18 garante que M é isométrica a esfera, o que contraria a hipótese. Portanto, M não possui campo conforme fechado não trivial.

4.3 Variedades kählerianas munidas de campo conforme fechado

O objetivo dessa seção é deformar a métrica de uma variedade kähleriana, comparando suas estruturas básica, para que, no próximo capítulo, possamos compreender a rigidez dessas variedades que possuem campo conforme fechado não trivial.

No próximo teorema definiremos uma nova métrica kähleriana, denotada por \tilde{g} , a partir de uma métrica kähleriana dada, denotada por $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Por isso, ao longo dessa seção, escreveremos $|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = g(\xi, \xi)$ para ξ campo vetorial.

Teorema 4.20. *Sejam $(M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade kähleriana com conexão de Levi-Civita ∇ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial conforme em M , com fator conforme ψ . Se $|\xi|^2 < c$ em M , para uma constante positiva c e $\mu = (c - |\xi|^2)^{-1}$, então o 2-tensor simétrico covariante*

$$\tilde{g} = \mu g + \mu^2(\theta_\xi^2 + \theta_{J\xi}^2) \quad (23)$$

define outra métrica kähleriana em (M, J) .

Demonstração. Como $\mu > 0$ e g , θ_ξ^2 e $\theta_{J\xi}^2$ são positivos definidos, então o 2-tensor \tilde{g} é positivo definido e define uma métrica em M . Além disso, \tilde{g} é métrica hermitiana. De fato, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e denotando $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{g}(JX, JY) &= \mu \langle JX, JY \rangle + \mu^2 (\langle \xi, JX \rangle \langle \xi, JY \rangle + \langle J\xi, JX \rangle \langle J\xi, JY \rangle) \\ &= \mu \langle X, Y \rangle + \mu^2 (\langle J\xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle + \langle \xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle) \\ &= \tilde{g}(X, Y), \end{aligned}$$

já que g é métrica hermitiana.

Para o que falta, devemos mostrar que $\tilde{\omega}$ é fechada. Tomando $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(X, Y) &= \tilde{g}(JX, Y) = \mu \langle JX, Y \rangle + \mu^2 (\langle \xi, JX \rangle \langle \xi, Y \rangle + \langle J\xi, JX \rangle \langle J\xi, Y \rangle) \\ &= \mu\omega(X, Y) + \mu^2(\theta_{J\xi}(X)\theta_\xi(Y) + \theta_\xi(X)\theta_{J\xi}(Y)) \\ &= \mu\omega(X, Y) + \mu^2(\theta_\xi \wedge \theta_{J\xi})(X, Y) \end{aligned}$$

e, com isso,

$$\tilde{\omega} = \mu\omega + \mu^2\theta_\xi \wedge \theta_{J\xi}.$$

Como ω e θ_ξ são fechados, temos

$$d\tilde{\omega} = d\mu \wedge \omega + 2\mu d\mu \wedge \theta_\xi \wedge \theta_{J\xi} + \mu^2\theta_\xi \wedge d\theta_{J\xi}. \quad (24)$$

Calculando $d\mu$ isoladamente, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, obtemos

$$\begin{aligned} d\mu(X) &= X(\mu) = (c - |\xi|^2)^{-2} X \langle \xi, \xi \rangle \\ &= 2\mu^2 \langle \nabla_X \xi, \xi \rangle = 2\mu^2 \langle \psi X, \xi \rangle \\ &= 2\psi\mu^2 \theta_\xi(X), \end{aligned}$$

isto é,

$$d\mu = 2\psi\mu^2 \theta_\xi.$$

Para obter uma expressão para $d\theta_{J\xi}$, usaremos a fórmula de Koszul para derivada exterior e o corolário 4.6. Assim, sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} d\theta_{J\xi}(X, Y) &= X(J\xi(Y)) + Y(J\xi(X)) - \theta_{J\xi}([X, Y]) \\ &= X \langle J\xi, Y \rangle - Y \langle J\xi, X \rangle - \langle J\xi, [X, Y] \rangle \\ &= \langle \nabla_X J\xi, Y \rangle - \langle \nabla_Y J\xi, X \rangle \\ &= \langle J\nabla_X \xi, Y \rangle - \langle J\nabla_Y \xi, X \rangle \\ &= \langle J(\psi X), Y \rangle - \langle J(\psi Y), X \rangle \\ &= 2\psi \langle JX, Y \rangle = 2\psi\omega(X, Y), \end{aligned}$$

ou seja, $d\theta_{J\xi} = 2\psi\omega$. Substituindo as expressões obtidas de $d\mu$ e $d\theta_{J\xi}$ em (24) e usando o fato de $\theta_\xi \wedge \theta_\xi = 0$, finalmente, obtemos

$$d\tilde{\omega} = 2\psi\mu^2 \theta_\xi \wedge \omega + 4\psi\mu^3 \theta_\xi \wedge \theta_\xi \wedge \theta_{J\xi} - \mu^2 \theta_\xi \wedge (2\psi\omega) = 0.$$

□

Mostraremos a seguir, que sob certas condições, a variedade (M, \tilde{g}) é completa, com \tilde{g} a métrica definida no teorema anterior. Um caminho natural para mostrar tal propriedade seria usar o Teorema de Hopf-Rinow, contudo o Lema da curva divergente, que provaremos a seguir, será mais eficiente para mostrar a completude de (M, \tilde{g}) .

Lema 4.21 (da curva divergente). *Uma curva divergente em uma variedade riemanniana M é uma aplicação diferenciável $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ tal que para todo compacto $K \subset M$ existe um $t_0 \in (0, +\infty)$ com $\gamma(t) \notin K$ para $t > t_0$. Seja $l(\gamma)$ o comprimento de γ . Dessa forma, M é uma variedade completa se, e somente se, $l(\gamma) = +\infty$.*

Demonstração. Suponhamos que M seja completa. Dessa forma, existem K_n , $n \in \mathbb{N}$, onde cada K_n é compacto, $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$, $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n = M$ e para $p \in M$ fixado e $q_n \notin K_n$, então $d(p, q_n) \rightarrow +\infty$. Com isso, tome $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ uma curva divergente. Fixando

$p = \gamma(0)$ e como γ é curva divergente, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in (0, +\infty)$ tal que $q_n := \gamma(t_n) \notin K_n$. Logo, pela completude de M , obtemos

$$l(\gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma|_{[0, t_n]}) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(p, q_n) = +\infty.$$

Portanto, $l(\gamma) = +\infty$.

Reciprocamente, suponha que M não é completa. Assim, queremos mostrar que existe uma curva divergente $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ com $l(\gamma) < +\infty$. Considere uma geodésica não estendível $\gamma : [0, a) \rightarrow M$. Afirmamos que γ é uma curva divergente.

Suponhamos, por contradição, que exista um compacto K tal que $\gamma([0, a)) \subset K$. Fazendo $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de reais onde $t_n \rightarrow a$ e $t_n \in [0, a)$ e denotando $q_n := \gamma(t_n)$, então $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em K , que é compacto, logo q_n possui subsequência convergindo para um $q \in K$. Sejam $(q_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal subsequência e $B_r(q)$ uma vizinhança normal de q , onde $\exp_q : B_r(0) \rightarrow B_r(q)$ é um difeomorfismo. Como $B_r(q)$ é aberto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n_k \geq k_0$, então $q_{n_k} \in B_r(q)$. Tome $\alpha : [t_{k_0}, a + \varepsilon) \rightarrow M$ uma geodésica em $B_r(q)$, tal que $\alpha(t_{k_0}) = \gamma(t_{k_0})$, $\alpha'(t_{k_0}) = \gamma'(t_{k_0})$. Como α tem as mesmas condições iniciais de $\gamma|_{[t_{k_0}, a)}$ e como $\exp_q : B_r(0) \rightarrow B_r(q)$ é um difeomorfismo, então $\alpha|_{[t_{k_0}, a)} = \gamma|_{[t_{k_0}, a)}$, mas

$$q = \lim_{k \rightarrow +\infty} q_{n_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma(t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha(t_{n_k}) = \alpha(a).$$

Logo, α estenderia γ , o que, por hipótese, é um absurdo. Portanto, não existe compacto que $\gamma([0, a)) \subset K$ e, assim, γ é curva divergente.

Para o que falta, seja $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \rightarrow M$ uma reparametrização de γ , logo, $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$. Como γ é geodésica, então $|\gamma'(t)| = c \in [0, +\infty)$, para todo $t \in [0, a)$. Daí, obtemos

$$l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma) \leq \int_0^a |\gamma'(t)| dt = ca < +\infty,$$

como queríamos mostrar. □

Proposição 4.22. *Sob as hipóteses do Teorema (4.20) e supondo que ψ é limitado e não se anula fora de um subconjunto compacto em M . Se $|\xi|^2 : M \rightarrow [0, +\infty)$ é própria e $\sup_M |\xi|^2 = c$, então (M, \tilde{g}) é completo.*

Demonstração. Seja $\tilde{l}(\cdot)$ a distância com respeito a \tilde{g} . Usaremos o Lema 4.21 para mostrar que (M, J, \tilde{g}) é completa. Com isso, tome uma curva divergente $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$, assim,

queremos mostrar que $\tilde{l}(\gamma) = +\infty$. Inicialmente, observe que

$$\tilde{g}(v, v) = \mu g(v, v) + \mu^2(\langle \xi, v \rangle^2 + \langle J\xi, v \rangle^2) \geq (\mu \langle \xi, v \rangle)^2,$$

para qualquer $v \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $K \subset M$ um conjunto compacto tal que $\psi \neq 0$ em K^c e $t_0 > 0$ tal que $\gamma(t) \notin K$ para $t > t_0$. Tomando $\sup_M |\psi| = \alpha < +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{l}(\gamma|_{[0,t]}) &\geq \int_{t_0}^t \tilde{g}(\gamma'(s), \gamma'(s))^{1/2} ds \geq \int_{t_0}^t |\mu(\gamma(s)) \langle \xi(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle| ds \\ &= \int_{t_0}^t \frac{1}{|\psi(\gamma(s))|} \cdot \frac{1}{c - |\xi(\gamma(s))|^2} |\langle \xi(\gamma(s)), \nabla_{\gamma'(s)} \xi \rangle| ds \\ &\geq \frac{1}{2\alpha} \left| \int_{t_0}^t \frac{1}{c - |\xi(\gamma(s))|^2} \cdot \frac{d}{ds} |\xi(\gamma(s))|^2 ds \right| \\ &= \frac{1}{2\alpha} |\log(c - |\xi(\gamma(t_0))|^2) - \log(c - |\xi(\gamma(s))|^2)|. \end{aligned}$$

Tome $\varepsilon > 0$. Como $|\xi|^2$ é própria, $|\xi|^2 < c$ e $\sup_M |\xi|^2 = c$, então existe um subconjunto L_ε de M tal que $|\xi|^2 > c - \varepsilon$ em L_ε^c . Como γ é divergente, então existe $t_\varepsilon > t_0$ tal que $\gamma(t) \in L_\varepsilon^c$ para $t > t_\varepsilon$. Assim, para $t > t_0, t_\varepsilon$, temos

$$\tilde{l}(\gamma|_{[0,t]}) \geq \frac{1}{2\alpha} (\log(c - |\xi(\gamma(t_0))|^2) - \log \varepsilon),$$

logo, $\tilde{l}(\gamma) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{l}(\gamma|_{[0,t]}) = +\infty$. □

Exemplo 4.23. Seja (N^{n-1}, J_N, g_N) uma variedade kähleriana de dimensão complexa $n - 1$ e \mathbb{T} o toro plano com estrutura quasi-complexa canônica. Seja $M^n = N \times \mathbb{T}$ uma variedade kähleriana com métrica e estrutura quasi-complexa produto. Além disso, se \mathbb{T} é o quociente de um ladrilhamento \mathcal{L} em \mathbb{R}^2 e Z um campo vetorial constante na direção de um dos vetores do ladrilhamento, então Z é um campo paralelo, e também conforme, em \mathbb{T} , que pode ser levantado paralelamente em M .

O resultado central dessa seção é relacionar a curvatura seccional holomorfa de (M, J, g) e (M, J, \tilde{g}) . Antes disso, será necessário relacionar suas correspondentes conexões, como mostra a próxima proposição.

Proposição 4.24. *Sejam (M^n, J, g) uma variedade kähleriana, $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial conforme tal que $|\xi|^2 < c \in (0, +\infty)$ e \tilde{g} a métrica kähleriana dada em (23). Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e ∇ e $\tilde{\nabla}$, respectivamente, as conexões de Levi-Civita de g e \tilde{g} , então*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi \mu (\langle \xi, X \rangle Y + \langle \xi, Y \rangle X + \langle \xi, X \rangle JY + \langle \xi, Y \rangle JX), \quad (25)$$

onde ψ é o fator conforme de ξ e $\mu = (c - |\xi|^2)^{-1}$.

Demonstração. Escrevendo $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e tomando quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2\mu \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + 2\mu^2 \langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle \langle \xi, Z \rangle + 2\mu^2 \langle \tilde{\nabla}_X Y, J\xi \rangle \langle J\xi, Z \rangle \\
&= 2\mu \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + 2\mu \langle \mu \langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle \xi, Z \rangle + 2\mu \langle \langle \mu \tilde{\nabla}_X Y, J\xi \rangle J\xi, Z \rangle \\
&= 2\mu \langle \tilde{\nabla}_X Y + \mu \langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle \xi + \mu \langle \tilde{\nabla}_X Y, J\xi \rangle J\xi, Z \rangle. \tag{26}
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a fórmula de Koszul, obtemos

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(\tilde{g}(Y, Z)) + Y(\tilde{g}(Z, X)) - Z(\tilde{g}(X, Y)) \\
&\quad - \tilde{g}(X, [Y, Z]) + \tilde{g}(Y, [Z, X]) + \tilde{g}(Z, [X, Y]). \tag{27}
\end{aligned}$$

Como $\mu = (c - |\xi|^2)^{-1}$, então $X(\mu) = 2\psi(c - |\xi|^2)^{-2} \langle \xi, X \rangle = 2\psi\mu^2 \langle \xi, X \rangle$ e $X(\mu^2) = 4\psi\mu^3 \langle \xi, X \rangle$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
X(\tilde{g}(Y, Z)) &= 2\psi\mu^2 \langle \xi, X \rangle \langle Y, Z \rangle + \mu X \langle Y, Z \rangle \\
&\quad + 4\psi\mu^3 \langle \xi, X \rangle (\langle \xi, Y \rangle \langle \xi, Z \rangle + \langle J\xi, Y \rangle \langle J\xi, Z \rangle) \\
&\quad + \mu^2 (\psi \langle X, Y \rangle \langle \xi, Z \rangle + \langle \xi, \nabla_X Y \rangle \langle \xi, Z \rangle) \\
&\quad + \mu^2 (\psi \langle \xi, Y \rangle \langle X, Z \rangle + \langle \xi, Y \rangle \langle \xi, \nabla_X Z \rangle) \\
&\quad + \mu^2 (\psi \langle JX, Y \rangle \langle J\xi, Z \rangle + \langle J\xi, \nabla_X Y \rangle \langle J\xi, Z \rangle) \\
&\quad + \mu^2 (\psi \langle J\xi, Y \rangle \langle JX, Z \rangle + \langle J\xi, Y \rangle \langle J\xi, \nabla_X Z \rangle). \tag{28}
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\tilde{g}([X, Y], Z) = \mu \langle [X, Y], Z \rangle + \mu^2 (\langle \xi, [X, Y] \rangle \langle \xi, Z \rangle + \langle J\xi, [X, Y] \rangle \langle J\xi, Z \rangle). \tag{29}$$

Nosso objetivo é obter uma expressão para $2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z)$ em função das equações (28) e (29). Para isso, definiremos $S_i : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, onde

$$\begin{aligned}
S_1(X, Y, Z) &= 2\psi\mu^2 \langle \xi, X \rangle \langle Y, Z \rangle, \\
S_2(X, Y, Z) &= \mu X \langle Y, Z \rangle, \\
S_3(X, Y, Z) &= 4\psi\mu^3 \langle \xi, X \rangle (\langle \xi, Y \rangle \langle \xi, Z \rangle + \langle J\xi, Y \rangle \langle J\xi, Z \rangle), \\
S_4(X, Y, Z) &= \mu^2 (\langle \xi, \nabla_X Y \rangle \langle \xi, Z \rangle + \langle \xi, Y \rangle \langle \xi, \nabla_X Z \rangle \\
&\quad + \langle J\xi, \nabla_X Y \rangle \langle J\xi, Z \rangle + \langle J\xi, Y \rangle \langle J\xi, \nabla_X Z \rangle),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_5(X, Y, Z) &= \mu^2(\psi \langle X, Y \rangle \langle \xi, Z \rangle + \psi \langle \xi, Y \rangle \langle X, Z \rangle \\
&\quad + \psi \langle JX, Y \rangle \langle J\xi, Z \rangle + \psi \langle J\xi, Y \rangle \langle JX, Z \rangle), \\
S_6(X, Y, Z) &= \mu \langle [X, Y], Z \rangle \quad \text{e} \\
S_7(X, Y, Z) &= \mu^2 (\langle \xi, [X, Y] \rangle \langle \xi, Z \rangle + \langle J\xi, [X, Y] \rangle \langle J\xi, Z \rangle).
\end{aligned}$$

Com isso, $X(\tilde{g}(Y, Z)) = \sum_{i=1}^5 S_i(X, Y, Z)$ e $\tilde{g}([X, Y], Z) = S_6(X, Y, Z) + S_7(X, Y, Z)$. Além disso, definimos $\overline{S}_i : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\overline{S}_i(X, Y, Z) = S_i(X, Y, Z) + S_i(Y, Z, X) - S_i(Z, X, Y)$. Dessa maneira, $2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \sum_{i=1}^7 \overline{S}_i(X, Y, Z)$. Calculando os \overline{S}_i usando as propriedades da conexão de Levi-Civita, temos

$$\begin{aligned}
\overline{S}_1(X, Y, Z) &= 2\psi\mu^2 (\langle \xi, X \rangle Y + \langle \xi, Y \rangle X, Z) - \langle \xi, Y \rangle \langle X, Y \rangle), \\
\overline{S}_2(X, Y, Z) + \overline{S}_6(X, Y, Z) &= 2\mu \langle \nabla_X Y, Z \rangle, \\
\overline{S}_3(X, Y, Z) &= 4\psi\mu^3 (\langle \xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle \xi + \langle \xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle J\xi \\
&\quad + \langle J\xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle J\xi - \langle J\xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle \xi, Z) \\
\overline{S}_4(X, Y, Z) + \overline{S}_7(X, Y, Z) &= \mu^2 (\langle \nabla_X Y, \xi \rangle \xi + \langle \nabla_X Y, \xi \rangle J\xi, Z) \\
\overline{S}_5(X, Y, Z) &= 2\mu^2 \psi (\langle J\xi, Y \rangle JX + \langle J\xi, X \rangle JY, Z) + \langle \xi, Y \rangle \langle X, Y \rangle).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= \sum_{i=1}^7 \overline{S}_i(X, Y, Z) = 2\mu \langle \nabla_X Y + \psi\mu(\langle \xi, X \rangle Y + \langle \xi, Y \rangle X) \\
&\quad + 2\psi\mu^2(\langle \xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle \xi + \langle \xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle J\xi) \\
&\quad + 2\psi\mu^2(\langle J\xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle J\xi - \langle J\xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle \xi) \\
&\quad + \mu(\langle \nabla_X Y, \xi \rangle \xi + \langle \nabla_X Y, \xi \rangle J\xi) \\
&\quad + \mu\psi(\langle J\xi, Y \rangle JX + \langle J\xi, X \rangle JY, Z). \tag{30}
\end{aligned}$$

Como $Z \in \mathfrak{X}(M)$ foi escolhido arbitrariamente, então comparando (26) e (30), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y &+ \mu \langle \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \xi \rangle \xi + \mu \langle \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, J\xi \rangle J\xi = \\
&= \psi\mu (\langle \xi, X \rangle Y + \langle \xi, Y \rangle X + \langle J\xi, Y \rangle JX + \langle J\xi, X \rangle JY) \\
&\quad + 2\psi\mu^2 (\langle \xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle - \langle J\xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle) \xi \\
&\quad + 2\psi\mu^2 (\langle \xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle + \langle J\xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle) J\xi. \tag{31}
\end{aligned}$$

Denotando $W = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y + \mu F(X, Y)$ como o somatório do lado direito

de (31), obtendo a seguinte equação

$$W + \mu \langle W, \xi \rangle \xi + \mu \langle W, J\xi \rangle J\xi = \mu F(X, Y). \quad (32)$$

Fazendo o produto interno (g) em (32) com ξ e $J\xi$ e, lembrando que, por definição $1 + \mu \langle \xi, \xi \rangle = c\mu$, encontramos

$$\langle W, \xi \rangle = c^{-1} \langle F(X, Y), \xi \rangle \quad \text{e} \quad \langle W, J\xi \rangle = c^{-1} \langle F(X, Y), J\xi \rangle.$$

Dessa forma, (32) pode ser reescrita por

$$W = \mu(F(X, Y) - c^{-1} \langle F(X, Y), \xi \rangle \xi - c^{-1} \langle F(X, Y), J\xi \rangle J\xi). \quad (33)$$

Por fim, como $\langle J\xi, \xi \rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle F(X, Y), \xi \rangle &= 2\psi (\langle \xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle (1 + \mu \langle \xi, \xi \rangle) - \langle J\xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle (1 + \mu \langle \xi, \xi \rangle)) \\ &= 2\psi\mu c (\langle \xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle - \langle J\xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle) \end{aligned}$$

e, similarmente, temos

$$\langle F(X, Y), J\xi \rangle = 2\psi\mu c (\langle \xi, X \rangle \langle J\xi, Y \rangle + \langle J\xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle).$$

Portanto, usando os resultados anteriores e (33), obtemos

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi\mu (\langle \xi, X \rangle Y + \langle \xi, Y \rangle X + \langle \xi, X \rangle JY + \langle \xi, Y \rangle JX).$$

□

Em uma variedade hermitiana de dimensão complexa n , chamamos de **referencial hermitiano** (local) em um aberto U um referencial ortonormal com a estrutura do tipo $(e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n)$. O próximo lema nos mostra que numa variedade kähleriana M , para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p que possui um referencial hermitiano que é geodésico.

Lema 4.25. *Se (M^n, J, g) é uma variedade kähleriana e $p \in M$, então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e um referencial hermitiano em U que é geodésico em p .*

Demonstração. Primeiramente mostraremos a existência de uma base hermitiana em

T_pM . Para isso, seja $e_1 \in T_pM$. Como M é hermitiano, $\langle Je_1, Je_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1$ e

$$\langle Je_1, e_1 \rangle = \langle J^2e_1, Je_1 \rangle = \langle -e_1, Je_1 \rangle = -\langle Je_1, e_1 \rangle,$$

com isso, $\langle e_1, Je_1 \rangle = 0$ e, assim, $\{e_1, Je_1\}$ é um conjunto ortonormal em T_pM .

Tome, agora, um vetor $e_2 \in T_pM$ ortogonal a e_1 e Je_1 . Analogamente, temos $\langle Je_2, Je_2 \rangle = 1$, $\langle Je_2, e_2 \rangle = 0$ e $\langle Je_2, e_1 \rangle = -\langle e_2, Je_1 \rangle = 0 = \langle e_2, e_1 \rangle = \langle Je_2, Je_1 \rangle$. Assim, o conjunto $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$ é ortonormal em T_pM . Dessa forma, repetindo esse argumento $n - 2$ vezes, chegamos a um conjunto ortonormal $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$ em T_pM .

Para o que falta, tome $U \subset M$ uma vizinhança normal de p e um referencial ortonormal $\{e_1, e'_1, \dots, e_n, e'_n\}$ em U , que é geodésico em p , com $e'_i(p) = Je_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, conforme vimos sua existência no Proposição 2.4. Queremos mostrar que $e'_i = Je_i$ em U . De fato, dado $q \in U$, tome a geodésica radial $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Dessa maneira, pelo Corolário 4.6, obtemos

$$\frac{D}{dt}Je_i = \nabla_{\gamma'}Je_i = J\nabla_{\gamma'}e_i = 0,$$

o que mostra que Je_i é paralela ao longo de γ . Como $e'_i(p) = J_p e_k = (Je_i)(p)$, pela unicidade do transporte paralelo, temos $e'_i = Je_i$ ao longo de γ , assim, $e'_i = Je_i$ em q . Portanto, o referencial hermitiano $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$ em U é geodésico. \square

Lema 4.26. *Seja $(M^n, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade kähleriana de dimensão complexa n , com conexão de Levi-Civita ∇ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial conforme em M , com fator conforme ψ . Se $|\xi|^2 < c$ em M , para uma constante positiva c e $\mu = (c - |\xi|^2)^{-1}$, então, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$X(\mu) = 2\psi\mu^2 \langle X, \xi \rangle \quad \text{e} \quad JX(\mu) = -2\psi\mu^2 \langle X, J\xi \rangle. \quad (34)$$

Além disso, em cada ponto onde ξ não se anula, temos

$$X(\psi) = -\text{Ric}(\widehat{\xi}) \langle X, \xi \rangle \quad \text{e} \quad JX(\psi) = \text{Ric}(\widehat{\xi}) \langle X, J\xi \rangle, \quad (35)$$

onde $\widehat{\xi} = \xi / |\xi|$.

Demonstração. Para a primeira parte, basta derivar $\mu = (c - |\xi|^2)^{-1}$ em relação a X , $JX \in \mathfrak{X}(M)$ e usar o fato de ξ ser campo conforme fechado, assim, temos

$$X(\mu) = -\mu^2 X(-\langle \xi, \xi \rangle) = 2\psi\mu^2 \langle X, \xi \rangle \quad \text{e} \quad JX(\mu) = -2\psi\mu^2 \langle X, J\xi \rangle.$$

Para a segunda parte, como a dimensão complexa é o dobro da dimensão riemanniana de

M e ξ é campo conforme fechado, pela Proposição 4.13, temos

$$\psi = \frac{\operatorname{div} \xi}{2n}$$

e pela Proposição 4.17, obtemos

$$|\xi|^2 \nabla(\operatorname{div} \xi) = -2n \operatorname{Ric}(\xi)\xi.$$

Em particular, em cada ponto de M onde $\xi \neq 0$ e usando as equações anteriores, temos

$$\nabla\psi = -\operatorname{Ric}(\widehat{\xi})\xi.$$

Portanto, usando a definição de gradiente, então para pontos de M onde $\xi \neq 0$, obtemos

$$X(\psi) = \langle X, \nabla\psi \rangle = -\operatorname{Ric}(\widehat{\xi}) \langle X, \xi \rangle \quad e$$

$$JX(\psi) = -\operatorname{Ric}(\widehat{\xi}) \langle JX, \xi \rangle = \operatorname{Ric}(\widehat{\xi}) \langle X, J\xi \rangle,$$

como queríamos demonstrar. □

Toda seção tinha por objetivo chegar no próximo teorema, que relaciona a curvatura seccional holomorfa de (M, J, g) e (M, J, \tilde{g}) .

Teorema 4.27. *Sejam $(M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade kähleriana com $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial conforme em M com zeros isolados, onde ψ é seu fator conforme, $|\xi|^2 < c$ em M , para uma constante positiva c , $\mu = (c - |\xi|^2)^{-1}$ e \tilde{g} a métrica de (M, J) dada em (23). Além disso, dado $p \in M$, $X \in T_p M$ unitário com respeito a g e sejam $K(X)$ e $\tilde{K}(X)$ as curvaturas seccionais holomorfas de (M, J, g) e (M, J, \tilde{g}) , respectivamente. Então, para cada ponto onde ξ não se anula, temos*

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X) &= \frac{1}{\tilde{g}(X, X)^2} \left\{ \mu K(X) + \mu^2 \operatorname{Ric}(\widehat{\xi}) (\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) \right\} \\ &+ \frac{1}{\tilde{g}(X, X)} 2\mu \operatorname{Ric}(\widehat{\xi}) (\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) - 4\psi^2, \end{aligned}$$

onde $\widehat{\xi} = \xi / |\xi|$ e Ric representa a curvatura de Ricci de g .

Demonstração. Primeiramente, deve-se estender X a um campo vetorial suave em torno de p . Se \tilde{R} é o tensor curvatura de (M, \tilde{g}) , a curvatura seccional holomorfa de (M, \tilde{g}) é dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(X) &= \frac{\tilde{g}(\tilde{R}(X, JX)JX, X)}{\tilde{g}(X, X)\tilde{g}(JX, JX) - \tilde{g}(X, JX)^2} \\
&= \frac{1}{\tilde{g}(X, X)^2} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_{JX} JX - \tilde{\nabla}_{JX} \tilde{\nabla}_X JX - \tilde{\nabla}_{[X, JX]} JX, X) \\
&= \frac{1}{\tilde{g}(X, X)^2} \{X(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX} JX, X)) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX} JX, \tilde{\nabla}_X X) - JX(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JX, X)) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JX, \tilde{\nabla}_{JX} X) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[X, JX]} JX, X)\},
\end{aligned}$$

já que \tilde{g} é uma métrica hermitiana, logo $\tilde{g}(X, JX) = 0$.

Para facilitar a notação, denotaremos

$$\alpha = 2\psi\mu \langle X, \xi \rangle \quad \text{e} \quad \beta = 2\psi\mu \langle X, J\xi \rangle. \quad (36)$$

Usando (25) e o fato de $\langle X, JX \rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X X &= \nabla_X X + \alpha X + \beta JX, \\
\tilde{\nabla}_X JX &= \nabla_X JX + \alpha JX - \beta X, \\
\tilde{\nabla}_{JX} X &= \nabla_{JX} X + \alpha JX - \beta X, \\
\tilde{\nabla}_{JX} JX &= \nabla_{JX} JX - \alpha X - \beta JX.
\end{aligned} \quad (37)$$

Pelo Lema 4.25 podemos construir um referencial hermitiano e geodésico, na métrica g , a partir de X , onde $\{X, JX, e_2, Je_2, \dots, e_n, Je_n\}$ é tal referencial. Logo, para qualquer $v \in T_p M$, temos $(\nabla_v X)(p) = (\nabla_v JX)(p) = 0$. Com isso, $[X, JX] = 0$ e, dessa forma, o último termo da expressão de $\tilde{K}(X)$ é zero, em p . Dessa maneira, usando esse fato e as equações em (37), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(X) &= \frac{1}{\tilde{g}(X, X)^2} \{X(\tilde{g}(\nabla_{JX} JX - \alpha X - \beta JX, X)) \\
&\quad - \tilde{g}(\nabla_{JX} JX - \alpha X - \beta JX, \nabla_X X + \alpha X + \beta JX) \\
&\quad - JX(\tilde{g}(\nabla_X JX - \beta X + \alpha JX, X)) \\
&\quad + \tilde{g}(\nabla_X JX - \beta X + \alpha JX, \nabla_{JX} X - \beta X + \alpha JX)\} \\
&= \frac{1}{\tilde{g}(X, X)^2} \{X(\tilde{g}(\nabla_{JX} JX), X) - JX\tilde{g}(\nabla_X JX), X)\} \\
&\quad + \frac{1}{\tilde{g}(X, X)} \{-X(\alpha) + 2(\alpha^2 + \beta^2) + JX(\beta)\} \\
&\quad + \frac{1}{\tilde{g}(X, X)^2} \{-\alpha X(\tilde{g}(X, X)) + \beta JX(\tilde{g}(X, X))\}.
\end{aligned} \quad (38)$$

Assim, denotaremos por $A = X(\tilde{g}(\nabla_{JX} JX), X) - JX\tilde{g}(\nabla_X JX), X)$, $B = -X(\alpha) + 2(\alpha^2 + \beta^2) + JX(\beta)$ e $C = -\alpha X(\tilde{g}(X, X)) + \beta JX(\tilde{g}(X, X))$, dessa forma, por

(38), temos $\tilde{K}(X) = \tilde{g}(X, X)^{-2}(A + \tilde{g}(X, X)B + C)$. Calculando separadamente A , B e C , temos

$$\begin{aligned}
A &= X(\mu) \langle \nabla_{JX} JX, X \rangle + \mu X \langle \nabla_{JX} JX, X \rangle \\
&+ X(\mu^2)(\langle \nabla_{JX} JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle + \langle \nabla_{JX} JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle) \\
&+ \mu^2 X(\langle \nabla_{JX} JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle + \langle \nabla_{JX} JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle) \\
&- JX(\mu) \langle \nabla_X JX, X \rangle + \mu JX \langle \nabla_X JX, X \rangle \\
&- JX(\mu^2)(\langle \nabla_X JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle + \langle \nabla_X JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle) \\
&- \mu^2 JX(\langle \nabla_X JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle + \langle \nabla_X JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle).
\end{aligned}$$

Como $\nabla_v X = \nabla_v JX = 0$ e $[X, JX] = 0$ em p , obtemos

$$\begin{aligned}
A &= \mu \langle \nabla_X \nabla_{JX} JX, X \rangle + \mu^2 \langle \nabla_X \nabla_{JX} JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle \\
&+ \mu^2 \langle \nabla_X \nabla_{JX} JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle - \mu \langle \nabla_{JX} \nabla_X JX, X \rangle \\
&- \mu^2 \langle \nabla_{JX} \nabla_X JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle - \mu^2 \langle \nabla_{JX} \nabla_X JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle \\
&= \mu \langle R(X, JX) JX, X \rangle + \mu^2 \langle R(X, JX) JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle \\
&+ \mu^2 \langle R(X, JX) JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle \tag{39} \\
&= \mu K(X) + \mu^2 \langle R(X, JX) JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle + \mu^2 \langle R(X, JX) JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle.
\end{aligned}$$

Para obter uma expressão para B calcularemos, primeiramente, expressões para $X(\alpha)$ e $X(\beta)$ usando o Lema 4.26, as equações de (36), a definição de campo conforme fechado e o fato de $\xi(p) \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned}
X(\alpha) &= X(2\psi\mu \langle X, \xi \rangle) = 2(X(\psi)\mu \langle X, \xi \rangle + \psi X(\mu) \langle X, \xi \rangle + \psi\mu X \langle X, \xi \rangle) \\
&= 2\left(-\text{Ric}(\hat{\xi})\mu \langle X, \xi \rangle^2 + 2\psi^2\mu^2 \langle X, \xi \rangle^2 + \psi\mu \langle \nabla_X X, \xi \rangle + \psi\mu \langle X, \nabla_X \xi \rangle\right) \\
&= -2\text{Ric}(\hat{\xi})\mu \langle X, \xi \rangle^2 + 4\psi^2\mu^2 \langle X, \xi \rangle^2 + 2\psi^2\mu,
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$X(\beta) = 2\text{Ric}(\hat{\xi})\mu \langle X, J\xi \rangle^2 - 4\psi^2\mu^2 \langle X, J\xi \rangle^2 - 2\psi^2\mu.$$

Vale lembrar, ainda, que

$$2(\alpha^2 + \beta^2) = 2[(2\psi\mu \langle X, \xi \rangle)^2 + (2\psi\mu \langle X, J\xi \rangle)^2] = 8\psi^2\mu^2(\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2).$$

Aplicando tais expressões em B , obtemos

$$\begin{aligned}
B &= -X(\alpha) + 2(\alpha^2 + \beta^2) + X(\beta) \\
&= 2\mu\text{Ric}(\widehat{\xi}) (\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) + 4\psi^2\mu^2(\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) - 4\psi^2\mu \\
&= 2\mu\text{Ric}(\widehat{\xi}) (\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) + 4\psi^2(\mu + \mu^2(\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2)) - 8\psi^2\mu \\
&= 2\mu\text{Ric}(\widehat{\xi}) (\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) + 4\psi^2\widetilde{g}(X, X) - 8\psi^2\mu. \tag{40}
\end{aligned}$$

Para ter uma expressão de C , precisaremos obter uma fórmula para $Y(\widetilde{g}(X, X))$, onde $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Para isso, devemos lembrar que $(\nabla_v X)(p) = 0$ para todo $v \in T_p M$, do Lema 4.26 e que $X \langle X, \xi \rangle = \psi$, obtemos

$$\begin{aligned}
Y(\widetilde{g}(X, X)) &= Y(\mu) + Y(\mu^2)(\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) + \mu^2 Y(\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) \\
&= 2\psi\mu^2 \langle Y, \xi \rangle + 4\psi\mu^3 \langle X, \xi \rangle (\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) \\
&\quad + 2\mu^2 (\langle X, \xi \rangle \langle X, \psi Y \rangle + \langle X, \xi \rangle \langle X, J(\psi Y) \rangle) \\
&= 4\psi\mu \langle Y, \xi \rangle \widetilde{g}(X, X) + 2\mu^2 \psi (\langle X, \xi \rangle \langle X, Y \rangle + \langle X, \xi \rangle \langle X, JY \rangle) \\
&\quad - 2\psi\mu^2 \langle Y, \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Em particular, aplicando essa fórmula com $Y = X$ e $Y = JX$, temos

$$\begin{aligned}
C &= -2\psi\mu \langle X, \xi \rangle \{4\psi\mu \langle X, \xi \rangle \widetilde{g}(X, X) + 2\psi\mu^2 \langle X, \xi \rangle - 2\psi\mu^2 \langle X, \xi \rangle\} \\
&\quad + 2\psi\mu \langle X, J\xi \rangle \{4\psi\mu \langle JX, \xi \rangle \widetilde{g}(X, X) - 2\psi\mu^2 \langle X, J\xi \rangle - 2\psi\mu^2 \langle JX, \xi \rangle\} \\
&= 8\psi^2\mu^2(\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2)\widetilde{g}(X, X). \tag{41}
\end{aligned}$$

Substituindo (39), (40), (41) e que $4\psi^2\widetilde{g}(X, X) - 8\psi^2\mu - 8\psi^2\mu^2(\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) = -4\psi^2\widetilde{g}(X, X)$ em (38), obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}(X) &= \frac{1}{\widetilde{g}(X, X)^2} \{ \mu K(X) + \mu^2 \langle R(X, JX)JX, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle \\
&\quad + \mu^2 \langle R(X, JX)JX, J\xi \rangle \langle X, J\xi \rangle \} \\
&\quad + \frac{1}{\widetilde{g}(X, X)} \cdot 2\mu\text{Ric}(\widehat{\xi})(\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) - 4\psi^2.
\end{aligned}$$

Para o que falta, usaremos o Lema 4.17, onde temos

$$\begin{aligned}
\langle R(X, JX)JX, \xi \rangle &= -\langle R(X, JX)\xi, JX \rangle \\
&= -\text{Ric}(\widehat{\xi})(\langle JX, \xi \rangle \langle X, JX \rangle - \langle X, \xi \rangle \langle JX, JX \rangle) \\
&= \text{Ric}(\widehat{\xi}) \langle X, \xi \rangle,
\end{aligned}$$

e analogamente, $\langle R(X, JX)JX, J\xi \rangle = \text{Ric}(\widehat{\xi}) \langle X, J\xi \rangle$. Substituindo esses resultados na fórmula de $\widetilde{K}(X)$ obtida anteriormente, obtemos o resultado do teorema.

□

Observação 4.28. Se uma variedade kähleriana M^n tem dimensão complexa $n > 1$ e possui campo conforme fechado $\xi \in \mathfrak{X}(M) \setminus \{0\}$, então o Lema 4.17 assegura que os zeros de ξ são isolados (já que sua dimensão riemanniana é $2n$). Assim, a fórmula de $\tilde{K}(X)$ pode ser estendida para todos os pontos de M , substituindo $\text{Ric}(\hat{\xi})$ por zero nos pontos singulares de ξ , pois nesse caso $\text{Ric}(\hat{\xi})$ ainda será suave. De fato, se $\xi(p) = 0$, existe uma sequência $(p_j)_{j \geq 1}$ em M , convergindo para p , onde $\xi(p_j) \neq 0$. Como $(\nabla\psi)(p_j) = -\text{Ric}(\hat{\xi}(p_j))\xi(p_j)$, obtemos

$$\nabla\psi(p) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \nabla\psi(p_j) = - \lim_{j \rightarrow +\infty} \underbrace{\text{Ric}(\hat{\xi}(p_j)) \frac{\xi(p_j)}{|\xi(p_j)|}}_{\text{limitado}} \cdot |\xi(p_j)| = 0.$$

Dessa forma, $\nabla\psi = 0$, logo $\text{Ric}(\hat{\xi})(p) = 0$, assim, a fórmula de $\tilde{K}(X)$ é válida para todo M .

Exemplo 4.29. Sejam \mathbb{C}^n , J sua estrutura quasi-complexa canônica, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ sua métrica padrão e $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$. Como o campo vetorial $\xi(p) = p$ é conforme, podemos munir \mathbb{B}^n com a métrica kähleriana \tilde{g} , tal que

$$\tilde{g} = \frac{1}{1 - |\xi|^2} \langle \cdot, \cdot \rangle + \frac{1}{(1 - |\xi|^2)^2} (\theta_\xi^2 + \theta_{J\xi}^2).$$

Como o tensor de Riemann em \mathbb{C}^n é nulo e $\psi \equiv 1$, então, pelo Teorema 4.27,

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X) &= \frac{1}{\tilde{g}(X, X)^2} \left\{ \underbrace{\mu K(X)}_{=0} + \underbrace{\mu^2 \text{Ric}(\hat{\xi})}_{=0} (\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{g}(X, X)} 2\mu \underbrace{\text{Ric}(\hat{\xi})}_{=0} (\langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2) - 4 \underbrace{\psi^2}_{=1} \\ &= -4, \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{B}^n)$. Dessa forma, pelo Teorema 4.7, desde que \mathbb{B}^n é conexo e simplesmente conexo de curvatura seccional constante (negativa), então $(\mathbb{B}^n, J, \tilde{g})$ é o próprio espaço hiperbólico $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$.

Corolário 4.30. Sejam (M, J, g) uma variedade kähleriana, $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial conforme com zeros isolados e tal que $|\xi|^2 < c$ em M e \tilde{g} a métrica kähleriana em (M, J) dado em (23). Para $X \in T_p M$ unitário com respeito a g , $p \in M$ e tal que $K(X) \geq 0$, temos

(a) Se $X \perp \xi$, $J\xi$, então $\tilde{K}(X) \leq cK(X) - 4\psi^2$.

(b) Para $X \in T_p M$ qualquer, e se M tem curvatura de Ricci não negativa, então

$$\tilde{K}(X) \leq cK(X) + 2c\text{Ric}(\hat{\xi}) - 4\psi^2,$$

com $\text{Ric}(\hat{\xi})$ sendo 0, se $\xi(p) = 0$.

Demonstração. Se $X \perp \xi$, $J\xi$, então $\tilde{g}(X, X) = \mu$. Logo, pelo Teorema 4.27 e que $\langle X, \xi \rangle = \langle X, J\xi \rangle = 0$, temos

$$\tilde{K}(X) = (c - \mu^2)K(X) - 4\psi^2 \leq cK(X) - 4\psi^2.$$

Para um $X \in T_p M$ unitário qualquer, definimos $A = \langle X, \xi \rangle^2 + \langle X, J\xi \rangle^2$ e escrevemos

$$\tilde{K}(X) = \frac{\mu}{\tilde{g}(X, X)^2} K(X) + \frac{(\mu^2 + 2\mu\tilde{g}(X, X))A}{\tilde{g}(X, X)^2} \cdot \text{Ric}(\hat{\xi}) - 4\psi^2.$$

Como $\mu A \geq 0$, então $1 + \mu A \geq 1$. Além disso, $\tilde{g}(X, X) = \mu(1 + \mu A)$, logo, para primeira parcela de $\tilde{K}(X)$, temos

$$\frac{\mu}{\tilde{g}(X, X)^2} = \frac{1}{\mu(1 + \mu A)^2} \leq \frac{1}{\mu} = c - |\xi|^2 \leq c.$$

Para segunda parcela, fazendo $y = \mu A$, temos

$$\frac{(\mu^2 + 2\mu\tilde{g}(X, X))A}{\tilde{g}(X, X)^2} = \frac{(\mu^2 + 2\mu^2 + 2\mu^3 A)A}{\mu^2(1 + \mu A)^2} = \frac{(3 + 2\mu A)A}{(1 + \mu^2 A)} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{3y + 2y^2}{1 + 2y + y^2}.$$

Como $y \geq 0$, então

$$\frac{3y + 2y^2}{1 + 2y + y^2} = 2 - \frac{1}{1 + y} - \frac{1}{(1 + y)^2} < 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X) &= \frac{\mu}{\tilde{g}(X, X)^2} K(X) + \frac{(\mu^2 + 2\mu\tilde{g}(X, X))A}{\tilde{g}(X, X)^2} \cdot \text{Ric}(\hat{\xi}) - 4\psi^2 \\ &\leq cK(X) + 2c\text{Ric}(\hat{\xi}) - 4\psi^2, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

5 DOIS RESULTADOS PARA VARIEDADES KÄHLERIANAS

Nesse capítulo reside os principais resultados deste trabalho. Mostraremos, aqui, dois resultados sobre a rigidez de variedades kählerianas munidas de campo conforme fechado não trivial. Dividiremos esse capítulo em duas seções, a primeira seção mostrará a rigidez dessas estruturas em superfícies kählerianas (quando a dimensão complexa é 1) e a segunda para variedade com dimensão complexa maior que 1.

5.1 Superfícies kählerianas

Nessa primeira seção mostraremos que uma superfície kähleriana de curvatura não positiva e munida de campo conforme fechado não trivial é isométrica ao toro plano. Para isso, usaremos os resultados do capítulo anterior, bem como o lema a seguir, que relaciona a forma de volume nas métricas g e \tilde{g} , definida em (23).

Lema 5.1. *Sejam (M^1, J, g) uma superfície kähleriana compacta munida com vetor conforme $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, com seu conjunto de zeros isolados e fator conforme ψ . Sejam, ainda, $c > 0$ tal que $c > \max_M |\xi|^2$ e \tilde{g} a métrica kähleriana de M definida em (23). Se $d_g M$ e $d_{\tilde{g}} M$ são as formas de volume de M na métrica g e \tilde{g} , respectivamente, temos*

$$d_{\tilde{g}} M = c\mu^2 d_g M. \quad (42)$$

Demonstração. Como os pontos singulares de ξ são isolados, é suficiente mostrar que (42) é válida para $\xi \neq 0$. Como $\tilde{g}(\xi, \xi) = \mu |\xi|^2 (1 + \mu |\xi|^2) = \mu^2 |\xi|^2 c$, então se p não é ponto singular, $e_1 = \xi \cdot \tilde{g}(\xi, \xi)^{-1/2} = \xi \cdot (\sqrt{c\mu} |\xi|)^{-1}$ e $e_2 = J\xi \cdot \tilde{g}(J\xi, J\xi)^{-1/2} = J\xi \cdot (\sqrt{c\mu} |\xi|)^{-1}$, temos que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal positiva para $T_p M$ com respeito a \tilde{g} . Assim, se $\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\}$ é base dual de $\{e_1, e_2\}$ na métrica \tilde{g} , então $d_{\tilde{g}} M = \tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2$ em p .

Para $v \in T_p M$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(v) &= \frac{1}{\sqrt{c\mu} |\xi|} \tilde{g}(v, \xi) = \frac{1}{\sqrt{c\mu} |\xi|} (\mu \langle v, \xi \rangle + \mu^2 \theta_\xi^2(v, \xi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c\mu} |\xi|} (\mu \theta_\xi(v) + \mu^2 \theta_\xi(v) |\xi|^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c\mu} |\xi|} (\mu + \mu^2 |\xi|^2) \theta_\xi(v) = \frac{\mu^2 c}{\sqrt{c\mu} |\xi|} \theta_\xi(v) \\ &= \frac{\sqrt{c\mu}}{|\xi|} \theta_\xi(v) = \sqrt{c\mu} \theta_{\hat{\xi}}(v), \end{aligned}$$

assim, $\tilde{\theta}_1 = \sqrt{c\mu} \theta_{\hat{\xi}}$. Analogamente, $\tilde{\theta}_2 = \sqrt{c\mu} \theta_{J\hat{\xi}}$.

Como $\{\hat{\xi}, J\hat{\xi}\}$ é uma base ortonormal positiva para $T_p M$ com respeito a g ,

então obtemos

$$d_{\tilde{g}}M = \tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2 = c\mu^2\theta_{\hat{\xi}} \wedge \theta_{J\hat{\xi}} = c\mu^2d_gM.$$

□

Teorema 5.2. *Seja (M^1, J, g) uma superfície kähleriana com curvatura gaussiana $K \leq 0$. Se M possui um campo vetorial conforme ξ , onde seus zeros são ponto isolados, então $K \equiv 0$, ξ é paralelo e M é isométrica ao toro plano.*

Demonstração. Sejam ψ , o fator conforme de ξ , $c > 0$ um número real tal que $c > \max_M |\xi|^2$ (tal máximo existe, visto que M é compacta) e \tilde{g} a métrica definida em (23).

Como $\xi^{-1}(0)$ é um conjunto formado por pontos isolados e M é compacto, então $\xi^{-1}(0)$ é um conjunto finito. Além disso, denotaremos K e \tilde{K} as curvaturas gaussianas de (M, g) e (M, \tilde{g}) , respectivamente e que, nesse caso também representam a curvatura seccional holomorfa de $\hat{\xi}$ em todos os pontos de $M \setminus \xi^{-1}(0)$. Com isso, temos $K = K(\hat{\xi})$ e $\tilde{K} = \tilde{K}(\hat{\xi})$ em $M \setminus \xi^{-1}(0)$. Ademais, como a dimensão riemanniana de M é 2, então $\text{Ric}(\hat{\xi}) = K(\hat{\xi})$. Assim, fazendo $\langle, \rangle = g$ e pelo Teorema 4.27, temos

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{1}{\tilde{g}(\hat{\xi}, \hat{\xi})^2} \left\{ \mu K + \mu^2 K \left(\langle \hat{\xi}, \xi \rangle^2 + \langle \hat{\xi}, J\xi \rangle^2 \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{\tilde{g}(\hat{\xi}, \hat{\xi})} 2\mu K \left(\langle \hat{\xi}, \xi \rangle^2 + \langle \hat{\xi}, J\xi \rangle^2 \right) - 4\psi^2 \end{aligned}$$

Como $\langle \hat{\xi}, J\xi \rangle = 0$ e

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\hat{\xi}, \hat{\xi}) &= \mu \langle \hat{\xi}, \hat{\xi} \rangle + \mu^2 \left(\theta_{\xi}^2(\hat{\xi}, \hat{\xi}) + \theta_{J\xi}^2(\hat{\xi}, \hat{\xi}) \right) \\ &= \mu + \mu^2 \langle \hat{\xi}, \xi \rangle^2 = \mu + \mu^2 |\xi|^2 = c\mu^2, \end{aligned}$$

fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{1}{c^2\mu^4} (\mu + \mu^2 |\xi|^2) K + \frac{2\mu K}{c\mu^2} |\xi|^2 - 4\psi^2 \\ &= \left(\frac{1 + 2\mu |\xi|^2}{c\mu^2} \right) K - 4\psi^2 \\ &= \left(\frac{c + |\xi|^2}{c\mu} \right) K - 4\psi^2. \end{aligned}$$

Por continuidade, a fórmula acima relaciona as duas curvaturas gaussianas em todo M , e não apenas em $M \setminus \xi^{-1}(0)$.

Usando o Teorema de Gauss-Bonnet duas vezes, a fórmula obtida anterior-

mente e (42), temos

$$\begin{aligned}
2\pi\mathcal{X}(M) &= \int_M \tilde{K} d_{\tilde{g}} M = \int_M \left[\left(\frac{c + |\xi|^2}{c\mu} \right) K - 4\psi^2 \right] c\mu^2 d_g M \\
&= \int_M \left(\frac{c + |\xi|^2}{c - |\xi|^2} \right) K d_g M - 4c \int_M \psi^2 \mu^2 d_g M \\
&\leq \int_M \left(\frac{c - |\xi|^2}{c - |\xi|^2} + \frac{2|\xi|^2}{c - |\xi|^2} \right) K d_g M \\
&\leq \int_M K d_g M = 2\pi\mathcal{X}(M).
\end{aligned}$$

Dessa forma, todas as desigualdades acima, são igualdades. Trocando "≤" por "=" na primeira desigualdade, temos $4c \int_M \psi^2 \mu^2 d_g M = 0$, mas como $c, \mu > 0$ e $\psi^2 \geq 0$, então $\psi \equiv 0$. Fazendo o mesmo processo para segunda igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M \left(\frac{c - |\xi|^2}{c - |\xi|^2} + \frac{2|\xi|^2}{c - |\xi|^2} \right) K d_g M &= \int_M K d_g M \\
\Leftrightarrow \int_M (1 + 2|\xi|^2 \mu) K d_g M &= \int_M K d_g M \\
\Leftrightarrow 2 \int_M |\xi|^2 \mu K d_g M &= 0
\end{aligned}$$

Como, a menos de um conjunto de pontos isolados, as funções $|\xi|^2$ e μ são positivas, então a integral acima será zero apenas quando $K \equiv 0$, visto que $K \leq 0$. Isso significa que M é difeomorfa ao toro e ξ é paralela. Como $\nabla J = 0$, temos também que $J\xi$ é paralelo. Vale salientar que $\xi \langle \xi, \xi \rangle = J\xi \langle \xi, \xi \rangle = 0 = \xi \langle J\xi, J\xi \rangle = J\xi \langle J\xi, J\xi \rangle$, logo $|\xi| = |J\xi|$ é constante em M e, como ξ não é trivial, ξ não se anula em M .

Como M é difeomorfa a um toro, o Teorema de Cartan (2.15) assegura a existência de geodésicas fechadas γ_1 e γ_2 em M , representando as classes de homotopia livre do conjunto de geradores de $\pi_1(M)$. Sabendo que o fluxo de ξ age por isometrias, visto que ξ é paralelo, em γ_1 e γ_2 , podemos assumir que ambas começam e terminam no mesmo ponto p de M , assim, $\pi_1(M; p)$ é gerada por $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$. Se $\gamma'_1(0) = \alpha\xi + \beta J\xi$, para algum $\alpha, \beta > 0$, então o paralelismo de ξ e $J\xi$ nos garante $\gamma'_1 = \alpha\xi + \beta J\xi$ ao longo de γ_1 , de modo que γ_1 é uma geodésica fechada iniciando em p . Analogamente, o mesmo ocorre em γ_2 (veja a Figura 1).

Desde que $K \equiv 0$ e M é difeomorfa a um toro, seu recobrimento universal, munido com métrica de recobrimento, é o \mathbb{R}^2 com métrica canônica. Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ a aplicação de recobrimento, $o \in \pi^{-1}(p)$ e $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ os levantamentos de γ_1 e γ_2 , respectivamente. Como que π é uma isometria local, então $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ são segmentos de linha saindo de o . Tomando $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = o$, podemos assumir que $d\pi_o$ manda $\tilde{\gamma}'_i(0)$ em $\gamma'_i(0)$, para

$i = 1, 2$, bem como $\angle(\tilde{\gamma}'_1(0), \tilde{\gamma}'_2(0)) = \angle(\gamma'_1(0), \gamma'_2(0))$. Supondo, sem perda de generalidade, que γ_1 e γ_2 são normalizadas (assim como $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$), e seja $l(\gamma_i) = a_i$, para $i = 1, 2$. Se \vec{u}_1 e \vec{u}_2 os vetores de \mathbb{R}^2 que saem de o para $\tilde{\gamma}_1(a_1)$ e $\tilde{\gamma}_2(a_2)$, respectivamente, e \mathcal{L} o ladrilhamento em \mathbb{R}^2 gerado por \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , então o recobrimento de M mostra que M é isométrico ao toro plano $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma(\pi)$, quociente do domínio fundamental de \mathcal{L} por π .

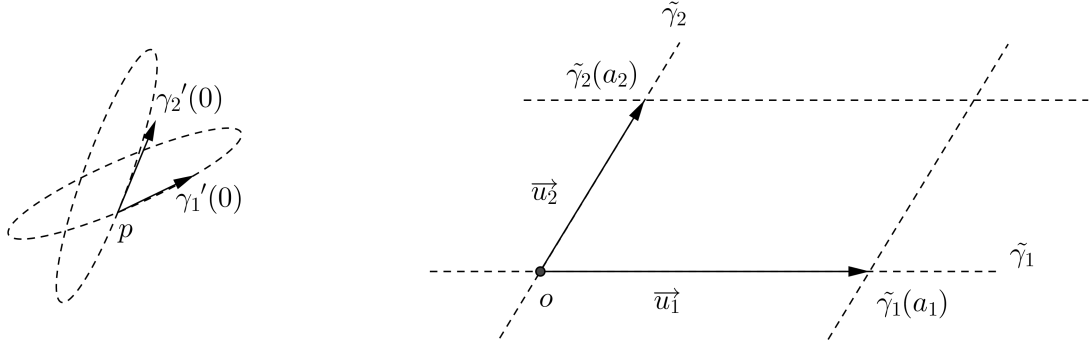


Figura 1: Geodésicas fechadas em M .

□

Observação 5.3. A não positividade da curvatura seccional holomorfa e a compacidade de M não podem ser retiradas, pois existem exemplos de campos conformes não paralelos em \mathbb{S}^2 e \mathbb{R}^2 , vide os Exemplos 4.11 e 4.12.

5.2 Variedade kähleriana com dimensão complexa $n > 1$

A partir desse momento retornaremos ao caso de variedades kählerianas M^n de dimensão complexa $n > 1$. Nesse caso, não precisamos pedir que os zeros de um campo conforme fechado não trivial sejam isolados, visto que isso já é garantido pela Proposição 4.17. Para mostrar o nosso próximo resultado de rigidez dessa estrutura, precisaremos provar alguns resultados auxiliares.

Lema 5.4. *Sejam $n > 1$ e (M^n, J, g) uma variedade kähleriana munida com um campo vetorial conforme $\xi \in \mathfrak{X}(M) \setminus \{0\}$. Então, a distribuição \mathcal{D} gerada por ξ e $J\xi$ é uma involução em $M \setminus \xi^{-1}(0)$ e as folhas são totalmente geodésicas e kählerianas na métrica induzida.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.6 e pela característica de campo conforme fechado, temos

$$[\xi, J\xi] = \nabla_\xi J\xi - \nabla_{J\xi} \xi = J\nabla_\xi \xi - \psi J\xi = 0,$$

o que mostra que \mathcal{D} é uma involução. Além disso, se Σ é uma uma folha de \mathcal{D} e \mathcal{N} denota o tensor de Nijenhuis de Σ , é imetiato que $\mathcal{N} \equiv 0$, então Σ é uma curva complexa em

(M^n, J, g) e a restrição de g a Σ (por abuso de notação, a restrição da métrica g em Σ também será chamada de g) é kähleriana.

Para o que falta, seja α a segunda forma fundamental de Σ e $(\cdot)^\perp$ denota a projeção ortogonal sobre $T(\Sigma, g)^\perp$. Então,

$$\alpha(\xi, J\xi) = (\nabla_\xi J\xi)^\perp = (J\nabla_\xi \xi)^\perp = (\psi J\xi)^\perp = 0,$$

mostrando que Σ é totalmente geodésica. \square

Lema 5.5. *Sejam $n > 1$ e (M^n, J, g) uma variedade kähleriana munida com um campo vetorial conforme $\xi \in \mathfrak{X}(M) \setminus \{0\}$. Se existe uma folha não trivial Σ , da distribuição \mathcal{D} , gerada por ξ e $J\xi$ tal que o fator conforme de ξ se anula em Σ , então ele se anula em M . Em particular, ξ e $J\xi$ são paralelos e não se anulam em nenhum ponto de M .*

Demonstração. Por hipótese, sabemos que $\xi \neq 0$ em Σ . Para $p \in \Sigma$ tal que $\psi(p) = 0$, tome uma vizinhança V de p em $M \setminus \xi^{-1}(0)$ onde exista um campo vetorial X em V , com $X \perp \xi$ e $X \perp J\xi$ (tal campo existe, visto que a dimensão riemanniana de M é maior que 2). Sejam ψ , o fator conforme de ξ , e $\alpha : [0, 1] \rightarrow V$, a curva integral de X começando em p até um ponto $q \in V$. Como $\nabla\psi = -\text{Ric}(\hat{\xi})\xi$ em $M \setminus \xi^{-1}(0)$, temos

$$\frac{d}{dt}\psi(\alpha(t)) = \langle \nabla\psi(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = -\left\langle \text{Ric}(\hat{\xi})\xi, X \right\rangle_{\alpha(t)} = 0.$$

Assim, ψ é constante ao longo de α e, como $\psi(p) = 0$, então $\psi \equiv 0$ ao longo de α . Desde que nós tomamos X arbitrário com condição $X \perp \xi$ e $X \perp J\xi$, nós concluímos que $\psi \equiv 0$ numa vizinhança de $p \in M \setminus \xi^{-1}(0)$.

Além disso, ψ se anula em abertos de $M \setminus \xi^{-1}(0)$ e como o conjunto $M \setminus \xi^{-1}(0)$ é conexo, concluímos $\psi \equiv 0$ em $M \setminus \xi^{-1}(0)$. Ademais, desde que $\xi^{-1}(0)$ é formado por pontos isolados e ψ é contínua, então $\psi \equiv 0$ em M . Com isso, ξ e $J\xi$ são paralelos em M , já que $\nabla J = 0$.

Por fim, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrário, temos $X \langle \xi, \xi \rangle = 2 \langle \nabla_X \xi, \xi \rangle = 2\psi \langle X, \xi \rangle = 0$, o que significa que $|\xi|$ é constante em M . Como $\xi \neq 0$ em Σ , então $|\xi| = c > 0$, logo, ξ não se anula em M . Do mesmo modo, $J\xi$ não se anula em nenhum ponto de M . \square

Lema 5.6. *Sejam M uma variedade riemanniana, $\eta \in \mathfrak{X}(M) \setminus \{0\}$ um campo vetorial completo e paralelo com fluxo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ e $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma geodésica preservada por Φ . Se $P_\alpha : T_{\alpha(0)}M \rightarrow T_{\alpha(1)}M$ é o transporte paralelo ao longo de α , então $P_\alpha = (d\Phi)_{(1, \alpha(0))}$.*

Demonstração. Sejam $p = \alpha(0)$ e $v \in T_pM$. Pela unicidade do transporte paralelo com essas condições iniciais, é suficiente mostrar que a aplicação $t \mapsto (d\Phi)_{(t, p)}(v)$ é paralela ao

longo de α . Para isso, tome $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\delta(0) = p$ e $\delta'(0) = v$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(d\Phi)_{(t,p)}(v) &= \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(t, \delta(s)) \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \delta(s)) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{D}{ds} \eta(\Phi(t, \delta(s))) \Big|_{s=0} = \left(\nabla_{\frac{d}{ds} \Phi(t, \delta(s))} \eta \right)_{\Phi(t,p)} = 0, \end{aligned}$$

já que η é paralelo. \square

Para mostrar o próximo teorema, além de usar os últimos três lemas, precisaremos definir novos elementos. Sejam N uma subvariedade conexa de M , $p \in N$, uma curva fechada e diferenciável por partes $\alpha : [0, 1] \rightarrow N$ tal que $\alpha(0) = p$ e o transporte paralelo ao longo de α define o operador $P_\alpha : T_p N^\perp \rightarrow T_p N^\perp$. Sendo mais preciso, para $v \in T_p N^\perp$, temos $P_\alpha(v) = V(1)$, onde $t \mapsto V(t)$ é o transporte paralelo de v ao longo de α . Munindo essa estrutura com o produto $P_\alpha \cdot P_\beta = P_{\alpha \cdot \beta}$, temos que o conjunto desses operadores lineares formam um subgrupo de $O(T_p N^\perp)$, com o operador de conjunto constante sendo o elemento neutro e $(P_\alpha)^{-1} = P_{\alpha^{-1}}$. Tal subgrupo é chamado de subgrupo de holonomia normal de N em p , que é denotado por $\text{Hol}_p^\perp(N)$. Sejam $q \in N$ e δ uma curva suave por partes ligando p a q , obtemos o isomorfismo $\text{Hol}_p^\perp(N) \simeq \text{Hol}_q^\perp(N)$ via $P_\alpha = P_{\delta^{-1} \cdot \alpha \delta}$, já que N é uma subvariedade conexa. Por isso, podemos nos referir ao grupo de holonomia normal de N e denotá-lo por $\text{Hol}^\perp(N)$.

Com isso, podemos provar nosso segundo resultado principal.

Teorema 5.7. *Sejam $n > 1$ um inteiro e (M^n, J, g, ∇) uma variedade kähleriana conexa, completa munida com um campo vetorial conforme e não trivial ξ . Denotemos \mathcal{D} como a distribuição em $M \setminus \xi^{-1}(0)$ gerada por ξ e $J\xi$ e Σ uma folha compacta de \mathcal{D} , assumindo, por hipótese, sua existência. Se a curvatura seccional holomorfa de M ao longo de Σ é não positiva e $\text{Hol}^\perp(\Sigma)$ é um grupo de torsão¹, então:*

- (a) $\xi^{-1}(0) = \emptyset$ e ξ e $J\xi$ são paralelos ao longo de M .
- (b) As folhas de \mathcal{D} , munidas com métrica induzida, formam uma família totalmente geodésica isométrica ao toro.
- (c) A distribuição \mathcal{D}^\perp é integrável e, na métrica induzida, suas folhas são totalmente geodésicas e variedades kählerianas completas de dimensão complexa $n - 1$.

Demonstração. O Lema 5.4 assegura que Σ é totalmente geodésica em M , então a curvatura gaussiana K_Σ coincide com a curvatura seccional holomorfa de M ao longo de Σ . Além disso, $K_\Sigma \leq 0$ e usando o Teorema 5.2 temos que Σ é isométrico ao toro plano, pois conclui-se que $K_\Sigma \equiv 0$, e o fator conforme ψ de ξ se anula ao longo de Σ . Ademais,

¹Nesse contexto, dizemos que G , com identidade e , é um **grupo é de torsão** se, para todo $g \in G$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = e$.

o Lema 5.5 mostra que $\psi \equiv 0$ em toda M , $\xi^{-1}(0) = \emptyset$ e tanto ξ quanto $J\xi$ são paralelas ao longo M , o que demonstra a parte (a).

Para a parte (b), denotaremos por d_M a distância riemanniana em M . Dado $q \in M$, a compacidade de Σ garante a existência de um ponto $p \in \Sigma$ tal que $d_M(p, q) = d_M(q; \Sigma)$. Como M é completa, o Teorema de Hopf-Rinow assegura a existência de uma geodésica normalizada $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = q$ e $l = l(\gamma) = d_M(p, q)$. Em particular, pela escolha de p temos que $\gamma'(0) \perp T_p\Sigma$, o que nos dá $\langle \gamma'(0), \xi_p \rangle = \langle \gamma'(0), J\xi_p \rangle = 0$. Assim, pelo paralelismo de ξ e como γ é geodésica, temos que para todo $s \in [0, l]$ vale

$$\frac{d}{ds} \langle \gamma', \xi \rangle_{\gamma(s)} = \left\langle \frac{D\gamma'}{ds}, \xi \right\rangle_{\gamma(s)} + \left\langle \gamma', \frac{D\xi}{ds} \right\rangle_{\gamma(s)} = 0.$$

Dessa forma, $\langle \gamma', \xi \rangle = 0$ ao longo de γ , visto que seu valor é constante ao longo de γ e $\langle \gamma'(0), \xi_p \rangle = 0$, sobretudo, $\langle \gamma', \xi \rangle_q = 0$. Do mesmo modo, $\langle \gamma', J\xi \rangle_q = 0$. Por outro lado, se Σ_q é a folha de \mathcal{D} passando por q , então $T_q\Sigma_q$ é gerada por ξ_q e $J\xi_q$, pela discussão acima, temos $\gamma'(l) \perp T_q\Sigma_q$ (veja a Figura 2).

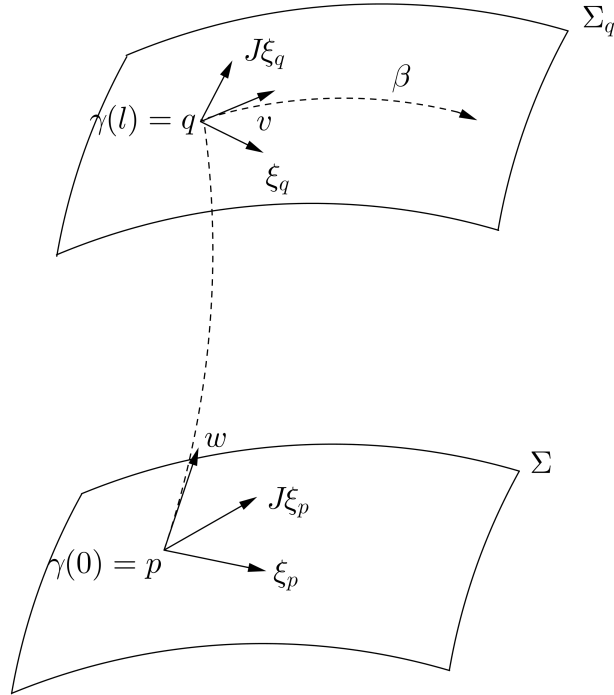


Figura 2: Comparando Σ a Σ_q .

Além disso, pelo Lema 5.4, Σ é totalmente geodésica em M . Com isso, sejam $q_0 \in \Sigma_q$, $v \in T_{q_0}\Sigma_q$ e α a geodésica iniciando em q_0 com velocidade inicial v . Como Σ_q é totalmente geodésica em M , então α é uma geodésica de M . Como M é completa, então $\alpha(t)$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, mas já que α é uma geodésica qualquer de Σ_q , então Σ_q é geodesicamente completa. Sejam K_{Σ_q} a curvatura gaussiana de Σ_q e

$K(\xi, J\xi)$ a curvatura seccional holomorfa de M gerada por ξ e $J\xi$. Denotando por R o operador curvatura de M , pelo paralelismo de ξ e $J\xi$, temos $R(J\xi, \xi)\xi = 0$, o que significa que $K(J\xi, \xi)\xi \equiv 0$. Assim, desde que Σ_q é totalmente geodésica em M , então $K_{\Sigma_q} = K(J\xi, \xi)\xi|_{\Sigma_q} \equiv 0$. Além disso, como Σ_q é uma superfície conexa e com curvatura gaussiana nula, então ela é isométrica a um toro, um plano ou a um cilindro. Nos próximos passos, mostraremos que Σ_q é isométrica a um toro.

Ao provar o Teorema 5.2, mostramos a existência de geodésicas fechadas α_1 e α_2 em Σ começando em p e onde $\pi_1(\Sigma, p)$ é gerada por $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$. Com isso, seja $\alpha = \alpha_1 : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ e escrevemos $\alpha'(0) = v_p = a\xi_p + bJ\xi_p$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Se $v = a\xi_q + bJ\xi_q$, temos, agora, que $v \in \Sigma_q$. Se β é a geodésica de Σ_q partindo de q com velocidade v , queremos mostrar que β é uma geodésica fechada com $l(\alpha) = l(\beta)$. Para isso, dividiremos a prova em dois passos (veja a Figura 3):

(i) Sejam $w = \gamma'(0) \in T_p^\perp \Sigma$ e $\eta = a\xi + bJ\xi$, que é um campo paralelo e completo em M . Se $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ é o fluxo de η , então $\Phi^t = \Phi(t, \cdot) : M \rightarrow M$ é uma isometria. Ademais, $\gamma^t(s) := \Phi(t, \gamma(s))$ é uma geodésica de M ligando $\alpha(t)$ a $\beta(t)$. O paralelismo de η assegura, pelo Lema 5.6, que $w(t) = (d\Phi^t)_p w$ é paralelo ao longo de α e normal a Σ . Com isso, $w(1) = P_\alpha(w)$, com $P_\alpha \in \text{Hol}^\perp(\Sigma)$. Por hipótese, $\text{Hol}^\perp(\Sigma)$ é um grupo de torsão, ou seja, existe um natural m tal que $P_\alpha^m = \text{Id} : T_p^\perp \Sigma \rightarrow T_p^\perp \Sigma$. Em particular, $P_\alpha^m(w) = w$. Como $P_\alpha^m = P_{\alpha \dots \alpha}$ (m vezes) e seja $c = l(\alpha \cdot \dots \cdot \alpha) = ml(\alpha)$, então $\gamma^c : [0, l] \rightarrow M$ é uma geodésica ligando $p = (\alpha \cdot \dots \cdot \alpha)(0)$ a $\beta(c)$, com velocidade inicial w . Dessa forma, pela unicidade de geodésica com tais condições iniciais, concluímos que $\gamma^c = \gamma$, logo $\beta(c) = \gamma^c(l) = \gamma(l) = q = \beta(0)$. Por fim, desde que $\beta'(0)$ é o transporte paralelo de $\alpha'(0)$ ao longo de γ , então $\beta'(c)$ é o transporte paralelo de $\alpha'(c)$ ao longo de γ^c e $\alpha'(0) = \alpha'(c)$, $\gamma^c = \gamma$, temos que $\beta'(0) = \beta'(c)$, o que mostra que β é uma geodésica fechada.

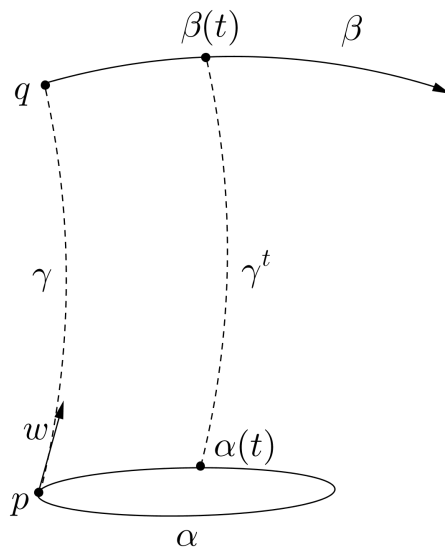


Figura 3: β também é uma geodésica fechada.

(ii) Para $0 \leq t \leq l$, sejam $v_t \in T_{\gamma(t)}\Sigma_{\gamma(t)}$, denotando o transporte paralelo de v ao longo de $\gamma|_{[0,t]}$ (com as notações da parte (i)) e δ_t a geodésica fechada partindo de $\gamma(t)$ com velocidade inicial v_t , onde $\delta_0 = \alpha$ e $\delta_l = \beta$ (veja a Figura 4). Como $\exp : TM \rightarrow M$ é uma aplicação suave, a função $t \mapsto l(\gamma_t)$ é contínua. Por outro lado, (também da parte (i)), temos $l(\delta_t)/l(\alpha) \in \mathbb{Z}$ para cada $t \in [0, l]$. Assim, pela continuidade de $t \mapsto l(\gamma_t)$ e $\delta_0 = \alpha$, então $l(\beta) = l(\delta_l) = l(\delta_0) = l(\alpha)$.

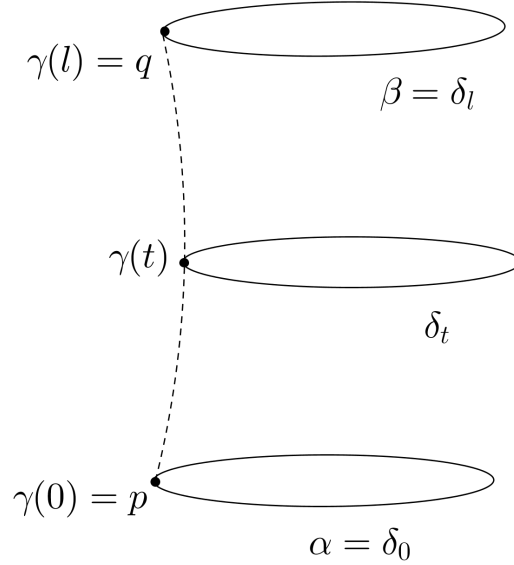


Figura 4: Calculando o comprimento de β .

Dessa maneira, pela parte (i), garantimos que as geodésicas β_1 e β_2 de Σ_q , obtidas de α_1 e α_2 pelo transporte paralelo de $\alpha'_1(0)$ e $\alpha'_2(0)$ ao longo de γ , são geodésicas fechadas distintas. Como o plano não possui geodésicas fechadas e o cilindro, em cada ponto, possui apenas uma geodésica fechada, então concluímos que Σ_q é um toro. Além disso, por construção, temos $\langle \alpha'_1(0), \alpha'_2(0) \rangle = \langle \beta'_1(0), \beta'_2(0) \rangle$ e, pela parte (ii), que $l(\alpha_1) = l(\beta_1)$ e $l(\alpha_2) = l(\beta_2)$, mostrando que Σ_q é isométrico a Σ .

Para demonstrar a parte (c), tome X e Y campos vetoriais suaves em \mathcal{D}^\perp , então, pelo paralelismo de ξ e $J\xi$, temos

$$\langle \nabla_X Y, \xi \rangle = X \langle Y, \xi \rangle - \langle Y, \nabla_X \xi \rangle = 0,$$

e analogamente $\langle \nabla_X Y, J\xi \rangle = 0$. Com isso, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in \mathcal{D}^\perp$, logo, \mathcal{D}^\perp é integrável.

Seja N uma folha de \mathcal{D}^\perp e α sua segunda forma fundamental, daí obtemos

$$\alpha(X, Y) = \langle \nabla_X Y, \xi \rangle \frac{\xi}{|\xi|^2} + \langle \nabla_X Y, J\xi \rangle \frac{J\xi}{|J\xi|^2} = 0,$$

provando que N é totalmente geodésica em M . Para mostrar a completude de N , na métrica induzida, basta observar que toda geodésica de N é geodésica de M e como M

é completa, então suas geodésicas estão definidas para todo \mathbb{R} e, assim, N também é geodésicamente completa.

É imediato verificar que se $X \in \mathfrak{X}(N)$, então $JX \in \mathfrak{X}(N)$, já que $\langle X, \xi \rangle = 0 = \langle X, J\xi \rangle$ e a métrica $\langle \cdot \rangle$ é hermitiana. Vale salientar que $J_N = J|_N$ é uma estrutura quasi complexa de N e o fato da conexão de Levi-Civita de N ser restrição da conexão em M , garante que $\nabla J_N = 0$, já que a restrição do tensor de Nejenhuis de M para N é nula. Por isso, desde que a métrica induzida é hermitiana e $\nabla J_N = 0$ concluímos que N também é uma variedade kähleriana.

Para o que falta, tomemos N_1 e N_2 duas folhas distintas de \mathcal{D}^\perp e pontos $p_1 \in N_1 \cap \Sigma$ e $p_2 \in N_2 \cap \Sigma$. Seja $\delta : [0, l] \rightarrow \Sigma$ a geodésica de Σ ligando p_1 a p_2 tal que $l(\delta) = l$ e $\delta'(0) = a\xi_{p_1} + bJ\xi_{p_2}$, para $a, b \in \mathbb{R}$. O paralelismo de ξ e $J\xi$ garante que δ' é restrição de um campo paralelo (e completo) $\eta = a\xi + bJ\xi$ a δ . Seja $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo de η , então $\Phi^l = \Phi(l, \cdot) : M \rightarrow M$ é uma isometria tal que $\Phi^l(p_1) = p_2$ e $(d\Phi^l)_{p_1}(T_{p_1}N_1) = T_{p_2}N_2$. Como N_1 e N_2 são variedades kählerianas conexas, completas, totalmente geodésicas em M e Φ^l é uma isometria, então Φ^l leva geodésicas de N_1 em geodésicas de N_2 . Assim, $\Phi^l(N_1) \subset N_2$ e, analogamente $\Phi^{-l}(N_2) = N_1$. Portanto, $\Phi^l(N_1) = N_2$, o que prova o item (c). □

Para finalizar, mostraremos como essas folheações se relacionam com o recobrimento universal da variedade kähleriana, nas condições do teorema anterior.

Corolário 5.8. *Sejam $n > 1$ um inteiro e (M^n, J, g, ∇) uma variedade kähleriana conexa e completa satisfazendo as hipóteses do teorema anterior. Se \tilde{M} é o recobrimento universal de M , munido com métrica de recobrimento, então \tilde{M} é isométrico ao produto riemanniano $\tilde{N} \times \mathbb{R}^2$, onde \tilde{N} é uma variedade kähleriana conexa, simplesmente conexa e completa.*

Demonstração. Seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M , onde denotamos por \tilde{g} sua métrica de recobrimento. Assim, como π , por definição, é uma isometria local, então \tilde{M} é uma variedade kähleriana, visto que $\tilde{\nabla}\tilde{J} = 0$, onde $\tilde{\nabla}$ e \tilde{J} representam a conexão de Levi-Civita e a estrutura quasi complexa de \tilde{M} na métrica \tilde{g} . Assim, desde que \tilde{M} é simplesmente conexa (já que \tilde{M} é recobrimento universal), conexa e completa, pelo teorema de decomposição de De Rham (Teorema 4.8), versão complexa, então \tilde{M} é isométrica a $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$, onde todas as variedades M_0, M_1, \dots, M_k são kählerianas, conexas, simplesmente conexas e completas. Ademais, as folheações ortogonais de M levantam duas folheações ortogonais em \tilde{M} com folhas totalmente geodésicas, onde uma delas é o \mathbb{R}^2 , visto que uma das folhas de M é o toro e, sem perda de generalidade, supomos $M_0 = \mathbb{R}^2$.

Denotando $\tilde{N} = M_1 \times \cdots \times M_k$, temos \tilde{N} uma variedade kähleriana conexa, simplesmente conexa e completa, com \tilde{M} isométrica ao produto riemanniano $\tilde{N} \times \mathbb{R}^2$. \square

6 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho foi possível perceber o quanto as variedades complexas possuem mais rigidez em relação às variedades diferenciáveis, pois, por exemplo, elas devem ter dimensão par e serem orientáveis. Essa restrição também ocorre quando uma variedade riemanniana possui um campo conforme fechado não trivial, visto que não existem variedades complexas compactas, simétricas, com curvatura escalar positiva, não isométrico a esfera e $H_{dR}^1(M) = \{0\}$ com campo conforme fechado não trivial (vide o Exemplo 4.19). Vale salientar que esse exemplo nos induz a hipótese da não positividade nos Teoremas 5.2 e 5.7. Assim, quando temos uma superfície kähleriana conexa e compacta M , com curvatura gaussiana não positiva munida de campo conforme fechado ξ com singularidades isoladas, então M será exatamente o toro plano e, além disso, ξ será paralelo. Nesse sentido, o toro plano tem um destaque central quando nos referimos a essas condições, já que no segundo resultado principal, quando consideraremos uma variedade kähleriana completa e conexa M de dimensão complexa $n > 1$, munida de campo conforme fechado não trivial ξ , assumindo que exista um folha compacta nessa folheação, que o grupo de holonomia normal é de torção e que a curvatura seccional holomorfa de ξ é não positiva ao longo de M , então M é folheado por uma família de superfícies totalmente geodésicas isométricas ao toro plano e por uma família totalmente geodésica de variedades kählerianas de dimensão complexa $n - 1$, além de, novamente, ξ ser paralela.

REFERÊNCIAS

- CAMINHA, A. *Geometria diferencial*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- CAMINHA, A. *On the structure of complete kählerian manifolds furnished with closed conformal vector fields*. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1409.5629.pdf>, 2017. Acesso em 2 jan. 2018.
- CHERN, S.S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 6, p. 771–782, 1955.
- DO CARMO, M. P. *Geometria riemanniana*. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry*. v. 1. New York: John Wiley and Sons., 1963.
- KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry*. v. 2. New York: John Wiley and Sons, 1969.
- LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer, 2003.
- LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. v. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- MADSEN, I. H.; TORNEHAVE, J. *From calculus to cohomology: De Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- OBATA, M. Conformal transformations of riemannian manifolds. *J. Diff. Geom.*, v. 4, n. 3, p. 311–333, 1970.
- ROS, A; URBANO, F. Lagrangian submanifolds of \mathbb{C}^n with conformal Maslov form and the Whitney sphere. *J. Math. Soc. Japan*, v. 50, n. 1, p. 203–224, 1998.
- TANNO, S; WEBER, W. Closed conformal vector fields. *J. Diff. Geom.*, v. 3, n. 3-4, p. 361–366, 1969.