**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**

**CENTRO DE CIÊNCIAS**

**DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E MÉTODOS QUANTITATIVOS**

**MESTRADO ACADÊMICO EM MODELAGEM E MÉTODOS QUANTITATIVOS**

**HUGO VICTOR SILVA**

# MANIPULAÇÃO ÓTIMA DE PREFERÊNCIAS NO MODELO DE GRAFO PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

**FORTALEZA**

**2019**

HUGO VICTOR SILVA

# MANIPULAÇÃO ÓTIMA DE PREFERÊNCIAS NO MODELO DE GRAFO PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Modelagem e Métodos Quantitativos do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Métodos Quantitativos

Orientador: Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Diego Rodrigues

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S58m Silva, Hugo Victor.
Manipulação ótima de preferências no modelo de grafo para resolução de conflito / Hugo Victor Silva. – 2019.
82 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo.
Coorientação: Prof. Dr. Carlos Diego Rodrigues.

1. Modelo Grafo para Resolução de Conflitos (GMCR). 2. GMCR Inverso. 3. Intervenção em Conflitos. 4. Custo Mínimo. I. Título.

CDD 510

HUGO VICTOR SILVA

MANIPULAÇÃO ÓTIMA DE PREFERÊNCIAS NO MODELO DE GRAFO PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Modelagem e Métodos Quantitativos do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Métodos Quantitativos

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Diego Rodrigues (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Maísa Mendonça Silva
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Prof. Dr. Tibérius de Oliveira e Bonates
Universidade Federal do Ceará (UFC)

# AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus orientadores Leandro Chaves Rêgo e Carlos Diego Rodrigues por ter me dado mais do que orientação para o trabalho acadêmico. Produzimos juntos com incontáveis reuniões e sinto-me honrado em ter trabalhado com esses grandes profissionais.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Departamento de Estatística e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Ceará, em particular, André Jalles Monteiro, Jesus Ossian da Cunha, Juvêncio Santos Nobre, Rafael Bráz A. Farias, Ricardo Coelho Silva e Tibérius de Oliveira e Bonates, que, junto com meus orientadores foram responsáveis pela qualidade da minha formação. Obrigado pelo trabalho de excelência e espero que inspirem muito estudantes como me inspiraram.

À minha esposa Natasha Lopes Gomes por ter estado ao meu lado nos momentos difíceis e por ser compreensiva, amiga e companheira, dando o suporte que eu precisava para concluir esse trabalho.

Aos meus amigos da juventude Francisco Rafael Nascimento dos Santos, Rafael Albuquerque Mesquita, Samara Mota Brito e Josias Valentim Santana que me proporcionaram momentos de lazer quando eu mais precisava, contribuindo para minha saúde mental e para a ampliação dos meus conhecimentos em curiosidades do mundo e cultura inútil.

Aos meus colegas de trabalho do IFCE, em particular os Professores de Matemática do campus Canindé no período de 2017-2019, que me apoiaram aprovando em colegiado limite diferenciado de carga horária a fim de que eu pudesse dedicar o devido tempo aos estudos.

Ao Ney Wendell Matos dos Santos, sempre prestativo na coordenação do curso, cuidando dos assuntos burocráticos para os alunos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

”O risco de uma decisão errada é preferível ao terror da indecisão.”

(Maimônides)

**RESUMO**

Conflitos são inerentes as relações humanas e acontecem em diversos níveis desde a escala pessoal até conflitos envolvendo grandes blocos de países. Os custos decorrentes de conflitos são de diversas ordens: econômica, social e ambiental. Deste modo, formas eficazes de intervir em conflitos de modo a se obter estabilidade em certos cenários desejáveis são de grande importância. O *Graph Model for Conflict Resolution* / Modelo de Grafo para Resolução de Conflito (GMCR) é um modelo que tem sido bastante usado para modelar e analisar conflitos por ser flexível e de fácil calibração. O objetivo desse trabalho é apresentar ideias de como trabalhar com o GMCR inverso de modo a otimizar custos na alteração das preferências de cada *Decision Maker* / Decisor (DM) a fim de obter estados de equilíbrio dentro do conflito. Nós propomos alguns métodos de agregação de custo nas alterações das preferências dos DMs. O intuito é determinar as alterações de preferência de menor custo agregado que tornem um determinado estado desejado um equilíbrio de acordo com uma determinada noção de estabilidade. Além de descrever formalmente o problema, estudamos algumas propriedades dos custos mínimos para diferentes noções de estabilidade, determinamos a complexidade computacional deste problema e propomos dois algoritmos para resolução deste problema em conflitos bilaterais, sendo um método de busca exaustiva, que se mostrou ineficiente, e um outro método que é baseado em um problema de programação linear inteira. Aplicamos este método em dois conflitos conhecidos na literatura do GMCR: o conflito da crise dos mísseis cubanos e o conflito de valores.

**Palavras-chave:** Modelo Grafo para Resolução de Conflitos (GMCR). GMCR Inverso. Intervenção em Conflitos. Custo Mínimo

**ABSTRACT**

Conflicts are inherent in human relations and occur at various levels from the personal scale to conflicts involving large blocks of countries. The costs arising from conflicts are of various types: economic, social and environmental. Thus, effective ways of intervening in conflicts to achieve stability in certain desirable scenarios are of great importance. The Graph Model for Conflict Resolution (GMCR) is a model that has long been used to model and analyze conflicts because it is flexible and easy to calibrate. The purpose of this Master's thesis is to present ideas on how to work with the inverse GMCR to optimize costs in changing the preferences of each DM to achieve equilibrium states within the conflict. We propose some methods to aggregate costs of changing DM's preferences. The purpose is to determine the lower aggregate cost preference changes that make a given desired state an equilibrium according to a given stability notion. Besides formally describing the problem, we study some properties of the minimum costs for different stability notions, determine the computational complexity of this problem, and propose two algorithms for solving this problem in bilateral conflicts, one based on an exhaustive search, which turned out to be inneficient, and another method that is based on an integer linear programming problem. We apply this method to two known conflicts in the GMCR literature: the conflict of the Cuban missile crisis and the conflict of values.

**Keywords:** Graph Model for Conflict Resolution (GMCR). Inverse GMCR. Intervention in Conflicts. Minimum Cost

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

**LISTA DE ALGORITMOS**

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| *LPR* | *Lista de Perfil de Relações de Preferência* |
| CIA | *Agência Central de Inteligência* |
| CNF | *Conjunctive Normal Form* / Forma Normal Conjuntiva |
| DM | *Decision Maker* / Decisor |
| GMCR | *Graph Model for Conflict Resolution* / Modelo de Grafo para Resolução de Conflito |
| GMR | *General Metarationality* / Metarracionalidade Geral |
| HSP | Hitting Set Problem / Problema da Transversal de Conjunto |
| R | Estabilidade de Nash ou Racionalidade |
| SAD | *Sistema de Apoio à Decisão* |
| SAT | *Boolean Satisfiability Problem* / Problema de Satisfatibilidade Booleana |
| SEQ | *Sequential Stability* / Estabilidade Sequencial |
| SMR | *Symmetric Metarationality* / Metarracionalidade Simétrica |
| SSEQ | *Symmetric Sequential Stability* / Estabilidade Sequencial Simétrica |
| UI | *Unilateral Improvement* / Melhoria Unilateral |
| UM | *Unilateral Move* / Movimento Unilateral |

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $\succ$ | Relação de preferência estrita entre estados do conflito |
| $\sim$ | Relação de indiferença entre estados do conflito |
| $R_i(s)$ | Conjunto Acessível ao DM $i$ a partir do estado $s$ |
| $R_i^+(s)$ | Conjunto das Melhorias Unilaterais do DM $i$ a partir do estado $s$ |
| $LPR(s_E)$ | Lista de perfis de relações de preferência |

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Desde crianças todos nós jogamos, entretanto, quando economistas falam em jogos, eles se referem a interações sociais e econômicas entre tomadores de decisão. Conflitos são os mais caros e perigosos dentre todas as interações sociais (BERCOVITCH; GARTNER, 2008). Conflito é um processo iniciado quando um dos indivíduos percebe que seu adversário afetou negativamente ou afetará negativamente algo que é a preocupação ou o interesse do primeiro indivíduo (ROBBINS, 1990). É inevitável que haja conflitos em situações em que seres humanos interagem entre si ou em grupo. Tais conflitos podem ser exemplificados como disputas entre sindicato e empresas pelas condições de trabalho dos funcionários, qual lance dar em leilões, acordos entre partes de um processo jurídico, guerras entre nações, entre outros.

Pode ocorrer de uma das partes que são capazes de tomar decisões em um conflito (denotados por DMs) tentar manipular os interesses de outros DMs a fim de obter o que deseja ou ainda pode haver uma intervenção de outro interessado em um resultado específico do conflito mas que não estava inicialmente na disputa e esse interventor tem interesse em manipular as preferências dos DMs a fim de atingir um determinado estado no conflito. Essa manipulação traz um custo e naturalmente o manipulador se interessa em ter o menor custo possível para atingir seu objetivo.

Os principais objetivos de um manipulador do conflito são obter uma melhor compreensão dos aspectos estratégicos da disputa e assim tomar decisões mais fundamentadas. Ao utilizar um modelo de resolução de conflitos é possível chegar a resultados como uma análise de estabilidade baseada no modelo e isso pode fornecer previsões, soluções de compromisso e sugerir que a cooperação com os outros jogadores leve a resultados em que ambos saiam ganhando.

A teoria dos jogos pode ser usada para descrever o processo de resolução de conflitos. FANG *et al.* (1993) desenvolveram, a partir da teoria dos jogos e usando conceitos de análise de resolução de conflitos, o "Graph Model for Conflict Resolution" (GMCR) que é um modelo aplicado em decisões interativas ou situações de conflitos, em que uma análise de estabilidade pode ser feita a fim de determinar soluções satisfatórias para tais situações. Um estado é dito ser um equilíbrio se ele é estável para todos os DMs de acordo com o mesmo conceito de estabilidade. O GMCR avalia as melhores estratégias de resolução de conflitos, auxiliando o comportamento dos tomadores de decisão, podendo ser utilizado em negociações e mediações por exibir os estados de equilíbrio.

Já o modelo GMCR inverso apresentado por Kinsara *et al.* (2015a) difere na ordem dos passos. Enquanto o modelo do GMCR recebe as preferências dos DMs e oferece como resultado os possíveis estados de equilíbrio, o GMCR inverso parte de uma solução desejada e obtém uma lista de preferências entre os estados do conflito para cada DM de modo que a solução desejada seja um equilíbrio de acordo com as preferências nesta lista. Dessa forma pode-se determinar quais preferências manipular para obter o resultado desejado.

Um dos problemas encontrados é que a quantidade de perfis que aparecem na lista que é dada como solução do modelo GMCR inverso é muito grande e uma análise manual pode ser inviável no caso de conflitos com muitos DMs e cada um deles dispondo de várias opções dentro do conflito. Estamos interessados em um algoritmo que, dado um estado de interesse dentro dos estados viáveis do conflito possamos identificar de forma eficiente qual dos perfis de preferência encontrados na lista obtida usando o GMCR inverso torna esse estado de interesse um estado de equilíbrio alterando de forma ótima (mínima) as preferências originais dos DMs.

Kinsara *et al.* (2015b) apresenta um sistema chamado de GMCR+ capaz de apresentar a lista de preferências gerada pelo modelo do GMCR inverso que usa a representação matricial para o GMCR proposto por Xu *et al.* (2007) onde eles apresentam definições de estabilidade usando as representações matriciais e teoremas com as condições para um estado ser um estado de equilíbrio. Wu *et al.* (2018) também atacam o problema de alterar preferências dos decisores de forma ótima no GMCR. Contudo, a abordagem utilizada por Wu *et al.* (2018) assume que as preferências são geradas a partir de um ranqueamento de afirmações sobre opções que os DMs podem ou não adotar no conflito. As alterações de preferência segundo estes autores são decorrência de mudanças na ordem das afirmações no ranqueamento. Acreditamos que esta abordagem além de possuir as limitações de só trabalhar com preferências geradas através de um ranqueamento de afirmações sobre opções (o que implica em preferências transitivas, por exemplo), não é a forma mas natural de um manipulador oferecer incentivos para alterar preferências dos DMs. Bartholdi *et al.* (1989) apresenta uma atribuição de custo na alteração de preferências entre eleitores num processo de votação e demonstra propriedades interessantes que fundamentam essa atribuição e que podem nos ajudar a atingir nossos objetivos. Essa atribuição foi baseada em Kemeny e Snell (1972) e iremos utilizá-lá para atribuir um custo na alteração das preferências entre os estados e entre os DMs e assim identificar o perfil gerado pelo GMCR inverso de menor custo para a parte interessada.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo abordar o problema da minimização dos custos envolvidos ao se intervir em um conflito, mais especificamente nas preferências dos decisores, a fim de se alcançar um resultado desejado utilizando como ferramenta o GMCR. Apresentamos uma proposta de medida de custo e métodos de agregação dos custos para alteração de preferências de vários DMs. Determinamos a complexidade computacional deste problema de manipulação ótima de preferências e, finalmente, apresentamos resolução de aplicações com uma análise dos resultados.

## 1.2 Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos formalmente o modelo GMCR, os principais conceitos de estabilidade utilizados com este modelo tanto na sua versão direta como inversa. Também apresentamos a forma matricial de determinar as estabilidades no modelo e descrevemos dois problemas computacionais clássicos que serão utilizados nos nossos desenvolvimentos. No Capítulo 3, apresentamos formalmente o problema de manipulação ótima de preferências, descrevendo possíveis métodos de agregação de custos de manipulação de preferências de diferentes decisores. Também apresentamos um resultado sobre a complexidade deste problema e um algoritmo de busca exaustiva para resolver o problema. No Capítulo 4, apresentamos fórmulas lógicas que determinam a estabilidade dos estados e propomos 4 algoritmos baseados em um programação linear inteira para resolver o problema da manipulação ótima de preferências. No Capítulo 5, estes algoritmos são testados em dois conflitos da literatura do GMCR, um com 12 estados e outro com 36 estados. Por fim, finalizamos o trabalho no Capítulo 6, em que apresentamos as conclusões gerais desta dissertação e direções para trabalhos futuros.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esse capítulo busca apresentar uma fundamentação teórica que será utilizada para tratar o tema ao longo do trabalho. Na seção 2.1 vamos apresentar os conceitos apresentados por (FANG *et al.*, 1987) para o modelo GMCR enquanto que na seção 2.2 apresentamos cinco das definições clássicas de estabilidade utilizadas neste modelo. Trazemos o modelo GMCR inverso em 2.3 apresentado por Kinsara *et al.* (2015a) onde o objetivo se assemelha ao nosso problema, com a diferença que a solução apresentada é uma lista de relações de preferências que tornam um determinado cenário do conflito um equilíbrio de acordo com uma noção de estabilidade escolhida, enquanto estamos interessados em uma única relação de preferência para cada DM que pertence a essa lista. Na seção 2.4 são apresentados os conceitos de estabilidade no modelo GMCR inverso já trazidos por Kinsara *et al.* (2015a), com exceção da Estabilidade Sequencial Simétrica, discutida na subseção 2.4.5, que foi proposta posteriormente por RÊGO e VIEIRA (2016) e introduzimos aqui também no contexto do GMCR inverso. Na seção 2.5, são apresentadas as definições matriciais de estabilidade propostas por Xu *et al.* (2007) que irão nos ajudar a simplificar os algoritmos que iremos propor. Na seção 2.6, apresentamos os sistemas de apoio à decisão já disponibilizados até a produção desse texto que envolvem resolver problemas no GMCR e no GMCR inverso. Finalmente, nas seções 2.7 e 2.8, são apresentados conceitos de problemas computacionais que serão usados respectivamente para auxiliar na apresentação do nosso algoritmos proposto e para analisar a complexidade do nosso problema.

## 2.1 O Modelo GMCR

Para modelar o procedimento básico do GMCR devemos identificar os parâmetros do conflito (FANG *et al.*, 1987). Ao identificar as partes envolvidas no conflito, chamados de **decisores (DMs)** podemos em seguida identificar ações que podem ou não ser tomadas pelos DMs ao longo de um conflito, ou seja, as **opções** disponíveis a cada um deles e, a partir daí, observar todos os possíveis **estados do conflito** que tratam-se de uma descrição completa de quais opções dos DMs são ou não utilizadas. Em seguida, identificamos os **estados inviáveis**, assim chamados por conterem opções mutualmente exclusivas dos DMs ou não serem condizentes com o contexto do conflito. Excluindo esses estados, os **estados viáveis** serão representados por vértices de um grafo no GMCR. Em seguida, podemos listar as possíveis mudanças de estados e, para cada decisor, definir as **acessibilidades** e representá-las por meio dos arcos do grafo.

Por fim, identificamos as **preferências** de cada DM sobre os estados viáveis do conflito. Após fazer a identificação dos parâmetros do conflito devemos fazer uma **análise** pela perspectiva de cada DM para determinar se existe **estabilidade individual** de cada DM de acordo com alguma das definições de estabilidade, em seguida verificar se o conflito apresenta algum estado de **equilíbrio**, que consiste de um estado que seja estável para todos os DMs de acordo com um mesmo conceito de estabilidade.

Seja $N = \{1,2,\ldots,n\}$ o conjunto de DMs envolvidos no conflito e, para cada DM $i \in N$, o conjunto $O_i$ representa as opções booleanas do DM $i$. $S = \{1,2,\ldots,m\}$ representa o conjunto de estados viáveis do conflito (já retirados os estados com opções mutualmente exclusivas), onde para cada estado $s \in S$, temos $s \subseteq O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_k$ e são descritos como vértices de um grafo. Uma coleção finita de grafos direcionados $D_i = \{S, A_i\}$, $i \in N$, pode ser utilizada para modelar o curso do conflito, em que $A_i \subseteq S \times S$. No grafo $D_i$, um arco $(a,b) \in A_i$ existe entre estados $a$, $b \in S$ se, e somente se, o DM $i$ pode mover-se unilateralmente (em um passo ou uma etapa) de $a$ para $b$. Ele é chamado de grafo direcionado porque o arco tem uma orientação que pode ser de uma maneira (movimento irreversível) ou duas maneiras (movimento reversível). A relação de preferência do DM $i$ é uma relação binária $\{\succ_i\}$ sobre $S$, onde $a \succ_i b$ significa que o DM $i$ prefere estritamente $a$ a $b$. Assumimos que $\succ_i$ seja assimétrica, ou seja, $a \succ_i b$ implica que $b \not\succ_i a$. A partir da relação $\succ_i$, pode-se derivar duas outras relações $\succsim_i$ e $\sim_i$. Diz-se que $a \succsim_i b$ quando $b \not\succ_i a$, que é chamada de relação de preferência fraca, enquanto $a \sim_i b$ se $a \not\succ_i b$ e $b \not\succ_i a$, que é chamada de relação de indiferença. As preferências ordinais estritas significam que não existe indiferença entre estados. Em geral, nenhuma suposição de transitividade de preferências é feita no modelo.

As possibilidades de movimentação unilateral de um DM $i$ podem ser representadas formalmente através de um conjunto $R_i$. Para cada $i \in N$ e para cada estado $s \in S$, $R_i(s)$ é o conjunto de todos os estados para os quais o DM $i$ pode mover-se (em uma única etapa) a partir do estado $s$, formalmente definido por:

$$R_i(s) = \{a \in S : (s,a) \in A_i\}.$$

Assumiremos, como usual na literatura do GMCR, que $s \notin R_i(s)$, $\forall s \in S$. Para definição dos conceitos de estabilidade, vamos definir um subconjunto de $R_i(s)$, denotado por $R_i^+$, que é o conjunto de todos os estados $s_a$ para os quais o DM $i$ pode mover-se (em uma única etapa) a partir do estado $s$, em que o estado $s_a$ é estritamente preferível ao estado $s$, formalmente definido por:

$$R_i^+(s) = \{a \in R_i(s) : a \succ_i s\}.$$

O movimento em um passo por DM $i$ de um estado $s$ para um estado $a$ em $R_i(s)$ é chamado de ***Unilateral Move* / Movimento Unilateral (UM)** enquanto o movimento em um passo por DM $i$ de um estado $s$ para um estado $a$ em $R_i^+(s)$ é chamado de ***Unilateral Improvement* / Melhoria Unilateral (UI)**.

Devido aos diversos comportamentos diferentes que podem surgir em situações de conflito, definimos a análise de estabilidade como sendo o estudo do interesse dos DMs em realizar possíveis movimentos e contramovimentos em conflitos estratégicos.

## 2.2 Definições de Estabilidade no GMCR

Como vimos, objetivo principal do GMCR é prever ou avaliar a estabilidade / equilíbrio de cada estado para cada DM. Cinco dos conceitos de soluções clássicas segundo os quais um estado pode ser estável são: Estabilidade de Nash ou Racionalidade (R)(NASH, 1950), *General Metarationality* / Metarracionalidade Geral (GMR)(HOWARD, 1971), *Sequential Stability* / Estabilidade Sequencial (SEQ)(FRASER; HIPEL, 1979), *Symmetric Metarationality* / Metarracionalidade Simétrica (SMR)(HOWARD, 1971) e *Symmetric Sequential Stability* / Estabilidade Sequencial Simétrica (SSEQ)(RÊGO; VIEIRA, 2016).

Os conceitos de solução descrevem como um DM é motivado a fazer movimentos e contramovimentos. Esses conceitos (ou comportamentos padrões) determinam se um estado específico será terminal ou se um DM será motivado a se desviar para outro estado. Diferentes DMs podem ter padrões de comportamento com base em diferentes fatores, incluindo riscos, previsões e informações disponíveis.

A seguir, iremos definir esses cinco conceitos de estabilidade para um estado para um dado DM, conhecido como **DM focal** em um conflito bilateral. Seja $N = \{1,2\}$ o conjunto dos decisores e $S = \{1,\dots,m\}$ o conjunto de estados. Dizemos que um estado $s \in S$ é chamado de equilíbrio de acordo com uma determinada definição de estabilidade se for estável para cada DM sob essa definição.

### 2.2.1 *Estabilidade de Nash (R)*

Sejam $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s$ é Nash estável (ou individualmente racional) (R) para o DM $i$ se, e somente se, o decisor não puder mover-se unilateralmente para um estado estritamente preferível. No GMCR padrão um estado $s$ é Nash estável para o DM $i$, se e somente se $R_i^+(s) = \emptyset$.

### 2.2.2 *Estabilidade Metarracional Geral (GMR)*

Sejam $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s \in S$ é estável segundo a metarracionalidade geral (GMR) para DM $i$ quando esse DM se move de forma a buscar sua melhoria considerando TODAS as reações possíveis ao seu movimento, ignorando as suas possíveis contrarreações, ou seja, o DM analisa um passo a frente do seu movimento, sem considerar sua resposta ao movimento do outro decisor. No GMCR padrão dizemos que $s$ é GMR estável se, e somente se, para cada estado $a \in R_i^+(s)$ existe pelo menos um estado $b \in R_{N-\{i\}}(a)$ tal que $s \succsim_i b$. Deste modo, diz-se que qualquer movimento de melhoria unilateral que o decisor focal possa fazer a partir de um estado GMR estável é retaliado pelo outro decisor.

### 2.2.3 *Estabilidade Metarracional Simétrica (SMR)*

Sejam $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s \in S$ é estável segundo a metarracionalidade simétrica (SMR) para o DM $i$ quando considera não só seus próprios movimentos e as reações do seu adversário para cada um desses movimentos, mas também sua contrarreação. O DM segundo este critério tem capacidade de analisar três momentos da jogada: a sua jogada, a resposta à sua jogada que será feita pelo adversário e já avalia a sua resposta à jogada do adversário, enquanto segundo o critério de metarracionalidade geral observa apenas dois movimentos e o critério de Nash somente um movimento. No modelo GMCR padrão dizemos que o estado $s \in S$ é SMR estável para DM $i$ se, e somente se, para cada estado $a \in R_i^+(s)$ existe pelo menos um estado $b \in R_{N-\{i\}}(a)$ tal que $s \succsim_i b$ e $s \succsim_i c$ para todo estado $c \in R_i(b)$.

### 2.2.4 *Estabilidade Sequencial (SEQ)*

Sejam $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s \in S$ é sequenciavelmente estável (SEQ) para DM $i$ quando esse DM se move de forma a buscar sua melhoria considerando as possíveis reações à sua jogada que serão benéficas ao outro decisor, desconsiderando os movimentos do adversário que não gerem benefício a ele (mesmo que causem prejuízo ao DM $i$). No modelo GMCR padrão dizemos que o estado $s \in S$ é SEQ estável para DM $i$ se, e somente se, para cada estado $a \in R_i^+(s)$ existe pelo menos um estado $b \in R_{N-\{i\}}^+(a)$ tal que $s \succsim_i b$.

### 2.2.5 Estabilidade Sequencial Simétrica (SSEQ)

Sejam $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s \in S$ é sequencial e simétrico estável (SSEQ) para DM $i$ quando esse DM decide seus movimentos de forma a buscar sua melhoria considerando as possíveis reações à sua jogada que serão benéficas ao outro jogador, desconsiderando os movimentos do adversário que não gerem benefício a ele, e ainda considera a sua contrarreação, mas o estado resultante não pode ser melhor do que o estado $s$ para cada possível contra-ataque. No modelo GMCR padrão dizemos que o estado $s$ é (SSEQ) estável para DM $i$ se, e somente, para todo estado $a \in R_i^+(s)$ existe pelo menos um estado $b \in R_{N-\{i\}}^+(a)$ tal que $s \succsim_i b$ e $s \succsim_i c$ para todo estado $c \in R_i(b)$.

## 2.3 O Modelo GMCR Inverso

A principal diferença entre a modelagem do GMCR inverso e o procedimento básico GMCR padrão está na ordem dos passos (KINSARA *et al.*, 2015a). O procedimento original requer os parâmetros que foram citados anteriormente para o conflito a ser analisado onde identificamos as preferências de cada DM, enquanto o GMCR inverso parte de uma solução desejada. Observe que o GMCR exige uma relação de preferência entre os estados para todos os DMs e o GMCR inverso obtém como solução os **perfis de relação preferências**, que consiste de uma relação de preferência sobre o conjunto de estados viáveis para cada DM no conflito. No GMCR inverso, o problema é encontrar todos os perfis de relação de preferências sob o qual um dado estado é um equilíbrio em relação a uma definição de estabilidade específica, enquanto no modelo do GMCR padrão a análise significa encontrar todos os equilíbrios dado um perfil de relação de preferências dos DMs.

No modelo clássico da Teoria dos Jogos as preferências de cada um dos DMs podem ser representadas usando um vetor *payoff* tal que para o DM $i$ o vetor *payoff* que representa suas preferências é denotado por $P_i$ $\forall$ $i$, onde $P_i = p^i = (p_1^i, p_2^i, \ldots, p_m^i), P_i \in \mathbb{R}^m$. Se $a, b \in S$, então DM $i$ prefere $a$ a $b$ ou é indiferente $(a \succsim_i b)$ se, e somente se $p_a^i \geq p_b^i$. Uma notação equivalente é

$$P_i(a) = p_a^i$$

de modo que $a \succsim_i b$ se, e somente se $P_i(a) \geq P_i(b)$.

Por exemplo, se $P_i = (4,0,5,1,5)$, então a preferência do DM $i$ para o estado 1 é atribuído um valor igual a 4. Assim, $P_i(1) = 4, P_i(2) = 0, P_i(3) = 5, P_i(4) = 1$ e $P_i(5) = 5$. No GMCR, uma **ordenação de preferências** (do inglês: *preference ranking*) para o DM $i$ é uma lista de estados viáveis ordenados a partir do mais preferido para o menos preferido para o DM $i$, onde as indiferenças são permitidas. Dentro do exemplo anterior, uma relação de preferência (PR) entre os estados para o DM $i$ será $PR_i = \{3 \sim_i 5 \succ_i 1 \succ_i 4 \succ_i 2\}$. Observe que a mesma relação de preferências pode ser representada por vários vetores de *payoff*, ou vetores de preferências ordinais, diferentes. Dois desses vetores são chamados equivalentes. Preferências ordinais assumem que as relações de preferências são transitivas. Como no modelo padrão do GMCR a hipótese de transitividade de preferências não é assumida, descreveremos os conceitos do GMCR inverso utilizando perfis de relações de preferências, o que generaliza a abordagem inicial do GMCR inverso descrita por Kinsara *et al.* (2015a).

Se $PR_i$ é uma relação de preferência entre os estados para o DM $i \in N$, então $PR_N = (PR_1, PR_2, \ldots, PR_n)$ é um perfil de relação de preferências. Por exemplo, se $P_j = (2,4,1,3,3)$ então podemos ter $PR_j = \{2 \succ_j 4 \sim_j 5 \succ_j 1 \succ_j 3\}$ e o perfil de relação de preferências é dado por:

$$PR_{\{i,j\}} = \{PR_i, PR_j\} = \{3 \sim_i 5, 3 \succ_i 1, 1 \succ_i 4, 4 \succ_i 2, 2 \succ_j 4, 4 \sim_j 5, 4 \succ_j 1, 1 \succ_j 3\}$$

Em posse do vetor de preferências e dos perfis de preferências um modelo de grafo pode ser designado por $G = \langle N, S, P_N \rangle$ onde N é a lista de decisores $N = \{1, \ldots, n\}$, S é o conjunto de estados viáveis $S = \{1, 2, \ldots, m\}$, e $P_N$ é o perfil de relações de preferência.

## 2.4 Definições de Estabilidade no GMCR Inverso

Como vimos, o objetivo principal do GMCR é prever ou avaliar a estabilidade / equilíbrio de cada estado para cada DM. Cinco dos conceitos de soluções segundo os quais um estado pode ser estável são: estabilidade de Nash (NASH, 1950), GMR (HOWARD, 1971), SEQ(FRASER; HIPEL, 1979), SMR(HOWARD, 1971) e SSEQ (RÊGO; VIEIRA, 2016).

Um dos algoritmos para resolver o problema do GMCR inverso conhecido como *método da busca exaustiva* consiste em testar cada possível perfil de preferência para cada DM em relação ao equilíbrio desejado. Como o número de possíveis relações de preferências é bastante grande, uma série de sistemas de apoio à decisão vem sendo desenvolvidos e falaremos sobre eles na seção 2.6. Assumindo preferências assimétricas, como para cada par de estados $(a,b)$ temos 3 possibilidades: $a \succ b$, $b \succ a$ e $a \sim b$ então temos $(3^{\binom{m}{2}})^n$ possíveis perfis de relações de preferências, onde $m$ é o número de estados viáveis e $n$ é o número de DMs. Caso existam combinações de classificações de preferências para todos os DMs atingirem o equilíbrio desejado, essa combinação será salva em uma *Lista de Perfil de Relações de Preferência* (*LPR*) onde cada uma das linhas é um perfil de relação de preferência que tornará o estado $s$ estável para todos os DMs. Utilizaremos a notação $s \succ_i^t a$ para representar que o estado $s$ é preferível ao estado $a$ para o DM $i$ no perfil de relação de preferências $PR_N^t$. A lista pode ser usada para traçar estratégias e táticas para influenciar o curso do conflito. Abaixo temos uma representação de uma lista *LPR*.

$$LPR(s) = \left\{ \begin{array}{c} PR_N^1 \\ PR_N^2 \\ \vdots \\ PR_N^v \end{array} \right\}.$$

A seguir iremos definir cinco dos conceitos de estabilidade para um estado. Dizemos que um estado $s \in S$ é chamado de equilíbrio (ou estável) de acordo com uma determinada definição de estabilidade se for estável para cada DM sob essa definição. No GMCR inverso, para um estado de equilíbrio desejado $s \in S$, devemos encontrar todo $PR_N^t,\ t \in \{1,2,\ldots,v\}$, tal que o estado $s$ seja estável para todos os DMs de acordo com o perfil de relação de preferência $PR_N^t$. Usaremos as notações $R_i^{t+}$ e $R_{N-\{i\}}^{t+}$, quando as relações de preferências contidas nestas definições forem as que estão de acordo com o perfil de relações de preferências $PR_N^t$.

### *2.4.1 Estabilidade de Nash (R)*

Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s$ é um equilíbrio de Nash no modelo GMCR inverso se e somente se $s \succsim_i a$ para todo $i \in N$ e todo $a \in R_i(s)$. A **lista de perfis de relações de preferências de Nash** ou Nash $LPR(s) = \{PR_N^1, PR_N^2, \ldots, PR_N^v\}$ é uma lista de relações de preferências dos DMs, onde em cada $PR_N^k$, temos $s \succsim_i^k a, \forall a \in R_i(s)$, $\forall i \in N$, $\forall k \in \{1,\ldots,v\}$.

### 2.4.2 Estabilidade Metarracional Geral (GMR)

Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s \in S$ é um equilíbrio GMR no modelo GMCR inverso se for GMR estável para todos os DMs e, com isso, construímos a **lista de perfis de relações de preferências GMR** do estado $s$ ou GMR $LPR(s)$ que é a lista de relações de preferências dos DMs, onde em cada $PR_N^k$, temos que $\forall i \in N$ e para cada estado $a \in R_i^{k+}(s)$, existe pelo menos um estado $b \in R_{N-\{i\}}(a)$ satisfazendo $s \succsim_i^k b$.

### 2.4.3 Estabilidade Metarracional Simétrica (SMR)

Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s \in S$ é um equilíbrio SMR no modelo GMCR inverso se for SMR estável para todos os DMs e, com isso, construímos a **lista de perfis de relações de preferências SMR** do estado $s$ ou SMR $LPR(s)$ que é a lista de relações de preferências, onde em cada $PR_N^k$, temos que $\forall i \in N$ e para cada estado $a \in R_i^{k+}(s)$ no perfil de preferência, existe pelo menos um estado $b \in R_{N-\{i\}}(a)$ satisfazendo $s \succsim_i^k b$ e todos $c \in R_i(b)$ satisfazem $s \succsim_i^k c$.

### 2.4.4 Estabilidade Sequencial (SEQ)

Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s \in S$ é um equilíbrio SEQ no modelo GMCR inverso se for SEQ estável para todos os DMs e, com isso, construímos a **lista de perfis de relações de preferências SEQ** do estado $s$ ou SEQ $LPR(s)$ que é a lista de relações de preferência onde em cada $PR_N^k$, temos que $\forall i \in N$ e para cada estado $a \in R_i^{k+}(s)$, existe pelo menos um estado $b \in R_{N-i}^{k+}(a)$ satisfazendo $s \succsim_i^k b$.

### 2.4.5 Estabilidade Sequencial Simétrica (SSEQ)

Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado $s \in S$ é um equilíbrio SSEQ no modelo GMCR inverso se for SSEQ estável para todos os DMs e, com isso, construímos a **lista de perfis de relações de preferência SSEQ** do estado $s$ ou SSEQ $LPR(s)$ que é a lista de perfis de relação de preferência onde em cada $PR_N^k$, temos que $\forall i \in N$ e para cada estado $a \in R_i^{k+}(s)$, existe pelo menos um estado $b \in R_{N-\{i\}}^{k+}(a)$ tal que $s \succsim_i^k b$ e $s \succsim_i^k c$ para todo $c \in R_i(b)$.

## 2.5 Modelo Matricial do GMCR

Iremos agora apresentar as representações matriciais do GMCR propostas por Xu *et al.* (2007). Nessa representação são usadas matrizes para representar as preferências dos decisores e suas acessibilidades da seguinte forma: a matriz $J_i$ representa a acessibilidade para o decisor $i$, a matriz $J_i^+$ representa as melhorias unilaterais para o decisor $i$ e as matrizes $P_i^+$, $P_i^=$ e $P_i^-$ representam as preferências para o decisor $i$. Além dessas representações, Xu *et al.* (2007) apresentam teoremas que descrevem manipulações algébricas destas matrizes para a determinação das estabilidades de *Nash*, *GMR*, *SMR*, e *SEQ* para um determinado decisor. Acrescentamos nessa seção o teorema com as condições matriciais para um estado ser estável segundo a definição *SSEQ* para um decisor, que foi proposta posteriormente por RÊGO e VIEIRA (2016).

Seja $|S|$ o número de elementos do conjunto de estados $S$, para $i \in N$, $J_i$ é uma matriz $0-1$ do tipo $|S| \times |S|$ definida por:

$$J_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{se } (a,b) \in A_i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$J_i$ é chamada de matriz de acessibilidade para o DM $i$ e representa de forma matricial os movimentos unilaterais desse DM. A partir de $J_i$, pode-se obter $R_i(a)$, a lista de estados alcançáveis para o DM $i$ a partir de $a$ da seguinte forma: $R_i(a) = \{b \in S \ : \ J_i(a,b) = 1\}$.

Para o DM $i$, uma matriz de melhoria unilateral $J_i^+$ é definida da seguinte forma:

$$J_i^+(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{se } J_i(a,b) = 1 \text{ e } b \succ_i a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De modo análogo, pode-se definir $R_i^+(a)$ a lista de melhorias unilaterais para o DM $i$ a partir de $a$ da seguinte forma: $R_i^+(a) = \{b \in S : \ J_i^+(a,b) = 1\}$.

### *2.5.1 Representação Matricial das Relações de Preferências dos DMs*

As matrizes de relação de preferência $P_i^+$, $P_i^-$ e $P_i^=$ para o DM $i$ são, respectivamente, definidas como:

$$P_i^+(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \succ_i a, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$P_i^{-}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \succ_i b, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$P_i^{=}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \sim_i a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A matriz $P_i^{-,=}(a,b)$ pode ser definida de duas formas:

$$P_i^{-,=}(a,b) = 1 - P_i^{+}(a,b)$$

ou

$$P_i^{-,=}(a,b) = P_i^{-}(a,b) + P_i^{=}(a,b).$$

Não é exigido nas definições das matrizes de relação de preferência supor transitividade de preferências, ou seja, os resultados apresentados são válidos também para preferências não transitivas.

### 2.5.2 *Representação Matricial das Definições de Estabilidade Para Modelos de Conflitos para 2 DMs*

Xu *et al.* (2007) apresentam uma maneira mais conveniente e eficiente de calcular as estabilidades de *Nash*, *GMR*, *SMR* e *SEQ* e consequentemente prever equilíbrios no GMCR utilizando operações matriciais. Mostraremos que a estabilidade sequencial simétrica também pode ser obtida de modo similar às demais. Xu *et al.* (2007) recomenda seguir os seguintes passos:

1. Construir a matriz correspondente ao conjunto de estados acessíveis a cada DM;
2. Representar a matriz que corresponde à preferência de cada DM;
3. Use operações entre matrizes para determinar estabilidades.

Seja $E$ uma matriz do tipo $|S| \times |S|$ com cada entrada 1, e seja $e_k$ um vetor de coluna $|S|-$ dimensional com o $k-$ésimo elemento igual a 1 e todos os outros elementos iguais a 0.

Para duas matrizes $M$ e $N$ do tipo $|S| \times |S|$, $W = M \circ N$ é definido como a matriz do tipo $|S| \times |S|$ onde para cada par de estados $(a,b)$ temos $W(a,b) = M(a,b) \cdot N(a,b)$ ("$\circ$"denota o produto Hadamard). Se $M$ é uma matriz do tipo $|S| \times |S|$, então a matriz $sign(M)$ do tipo $|S| \times |S|$ com entrada $(a,b)$ é definida da seguinte forma:

$$sign[M(a,b)] = \begin{cases} 1 & \text{se } M(a,b) > 0, \\ 0 & \text{se } M(a,b) = 0, \\ -1 & \text{se } M(a,b) < 0 \end{cases}$$

De acordo com Xu *et al.* (2007), as definições de estabilidade podem ser determinadas diretamente usando a relação que foi estabelecida entre elementos de matriz de acessibilidade e de preferência e o conjunto de estados do GMCR, usando as preferências sobre os estados. Para modelos com dois DMs, as caracterizações algébricas de estabilidade são apresentadas e demonstradas por Xu *et al.* (2007), nas seguintes definições e teoremas:

**Teorema 2.5.1** *Seja $i \in N$ um DM. Um estado $s \in S$ é Nash estável para o DM $i$ se, e somente se,*

$$e_s^\top \cdot J_i^+ = \vec{0}^\top \tag{2.1}$$

*(onde $\top$ denota a matriz transposta).*

**Definição 2.5.1** *Seja $i \in N$. A definição de $M_i^{GMR} \in |S| \times |S|$ é dada por:*

$$M_i^{GMR} = J_i^+ \cdot [E - sign(J_{N-\{i\}} \cdot (P_i^{-,=})^\top)].$$

**Teorema 2.5.2** *Seja $i \in N$ um DM. Um estado $s \in S$ é GMR estável para o DM $i$ se e somente se*

$$M_i^{GMR}(s,s) = 0. \tag{2.2}$$

**Definição 2.5.2** *Seja $i \in N$. A definição de $M_i^{SMR} \in |S| \times |S|$ é dada por:*

$$M_i^{SMR} = J_i^+ \cdot [E - sign(H)]$$

*onde $H$ é obtido da seguinte forma:*

$$H = J_{N-\{i\}} \cdot [(P_i^{-,=})^\top \circ (E - sign(J_i \cdot (P_i^+)^\top))].$$

**Teorema 2.5.3** *Seja $i \in N$ um DM. Um estado $s \in S$ é SMR estável para o DM i se e somente se*

$$M_i^{SMR}(s,s) = 0. \tag{2.3}$$

**Definição 2.5.3** *Seja $i \in N$. A definição de $M_i^{SEQ} \in |S| \times |S|$ é dada por:*

$$M_i^{SEQ} = J_i^+ \cdot [E - sign(J_{N-\{i\}}^+ \cdot (P_i^{-,=})^\top)].$$

**Teorema 2.5.4** *Seja $i \in N$ um DM. Um estado $s \in S$ é SEQ estável para o DM i se e somente se*

$$M_i^{SEQ}(s,s) = 0. \tag{2.4}$$

**Definição 2.5.4** *Seja $i \in N$. A definição de $M_i^{SSEQ} \in |S| \times |S|$ é dada por:*

$$M_i^{SSEQ} = J_i^+ \cdot [E - sign(H^+)]$$

*onde $H^+$ é obtido da seguinte forma:*

$$H^+ = J_{N-\{i\}}^+ \cdot [(P_i^{-,=})^\top \circ (E - sign(J_i \cdot (P_i^+)^\top))].$$

**Teorema 2.5.5** *Seja $i \in N$ um DM. Um estado $s \in S$ é SSEQ estável para o DM i se e somente se*

$$M_i^{SSEQ}(s,s) = 0. \tag{2.5}$$

Na seção 3.4 utilizaremos estas representações matriciais para propor um algoritmo força bruta para resolver o problema da manipulação ótima de preferências do GMCR.

## 2.6 Sistema de Apoio a Decisão

Dado o grande número de perfis de preferência que construímos na modelagem do GMCR inverso, é recomendado usar um *software* já que resolver problemas à mão é possível apenas para instâncias pequenas, porém cansativo, demorado e propenso a erros. O primeiro *software* desenvolvido foi um sistema de apoio à decisão, um código para testar cada perfil de preferência, isto é, o chamado método da busca exaustiva.

Um dos sistemas de apoio à decisão, GMCR II, foi desenvolvido por PENG (1999). A abordagem matricial para GMCR permite um processamento mais rápido (XU *et al.*, 2009). Kinsara *et al.* (2015b) afirmam que um projeto para combinar as abordagens lógica e matricial em um sistema de apoio à decisão mais robusto e flexível foi iniciado por eles. O objetivo deste sistema era superar as limitações da versão anterior e também adicionar novas extensões e recursos que a atual não suporta. Um dos principais objetivos do novo sistema é incluir a metodologia do GMCR inverso.

O novo sistema de apoio à decisão possui algumas versões principais e pode ser encontrado até a presente data no site http://www.gmcrplus.com. A primeira versão contém um algoritmo GMCR, com base na programação usando a representação lógica do GMCR. Esta versão exige que o usuário insira o DMs, opções, estados viáveis e preferências. O *software* gera saída indicando a estabilidade de cada estado viável, de acordo com os diferentes conceitos de solução.

Uma interface gráfica ao usuário foi introduzida na segunda versão. Nesta versão, a interface facilita a entrada de parâmetros de conflito, incluindo DMs, opções e preferências. Movimentos reversíveis e irreversíveis podem ser especificados usando setas diferenciadas. Foram introduzidas duas principais melhorias: um algoritmo de abordagem de matriz no cálculo das estabilidades GMCR e algoritmos de modelagem GMCR inverso. Além disso, foi desenvolvida uma ferramenta útil para identificar estados viáveis usando o método de subtração.

Esse novo sistema, chamado GMCR+, agora convertido em uma versão que permite acesso mais fácil em diferentes plataformas (como o Microsoft Windows, Macintosh OS e Linux) sem a necessidade de instalação na máquina específica, é capaz de lidar com uma ampla variedade de problemas de decisões envolvendo dois ou mais tomadores de decisão (DMs). Como dados de entrada inserimos os DMs, as opções ou cursos de ação disponíveis para cada um deles, e as preferências para cada DM sobre os possíveis cenários ou estados que podem ocorrer e, com isso, o GMCR+ pode calcular os resultados de estabilidade e equilíbrio de acordo com uma vasta gama de conceitos de solução que explicam o comportamento humano em conflitos. Então o componente inverso do sistema GMCR+ determina quais as relações de preferência entre os estados para cada DM produz equilíbrios conforme especificado pelo usuário. Outras características incorporadas no GMCR+ incluem análise de coalizão, gráfico e diagrama de árvore, relatórios narrativos de resultados e um recurso de rastreamento que mostra como o conflito poderia evoluir de um estado de *status quo* para um equilíbrio desejável ou outro resultado especificado. O sistema GMCR+ possui um design modular para facilitar a adição de novos avanços.

Atualmente, não existe nenhum sistema de apoio à decisão que aborde o problema da manipulação ótima de preferências. O objetivo desse trabalho é, além de apresentar este problema formalmente na Seção 3.1, propor um método eficiente para resolver este problema, que poderá ser no futuro incorporado como um módulo do GMCR+ ou de outro sistema de apoio à decisão.

A seguir, descreveremos dois problemas computacionais clássicos que serão utilizados neste trabalho. O problema SAT que servirá de auxílio para determinar a estabilidade de estados e o problema do *Hitting set* que será utilizado para analisar a complexidade computacional do nosso problema de manipualção ótima de preferências.

## 2.7 O problema SAT

O problema de determinar se uma expressão booleana pode ser satisfeita ou não é um problema NP-completo (COOK, 1971). Na verdade foi o primeiro problema NP-completo descrito na literatura.

Uma expressão booleana pode ser construída de (BROWN, 1990):

1. Variáveis que assumem valores booleanos, ou seja, assumem o valor 1 (verdade) ou o valor 0 (falso);
2. Operadores binários $\{\vee, \wedge\}$ , referentes aos operadores lógicos AND e OR respectivamente;
3. Operador unitário $\neg$ para a representação lógica da negação;
4. Parênteses para grupo de operadores e operandos caso seja necessário alterar a precedência de operadores $(\neg, \vee$ ou $\wedge)$.

Um exemplo de uma expressão booleana é $\neg(x_1 \vee x_2) \wedge x_3$. A subexpressão $(x_1 \vee x_2)$ é verdade sempre que $x_1$ ou $x_2$ tem o valor 1, mas é falsa quando ambos $x_1$ e $x_2$ assumem o valor 0. A expressão maior $\neg(x_1 \vee x_2)$ é 1 exatamente quando $(x_1 \vee x_2)$ é falso, ou seja, quando ambos $x_1$ e $x_2$ assumirem o valor 0. Então se $x_1$ ou $x_2$ ou ambos assumirem o valor 1 então $\neg(x_1 \vee x_2)$ é falso. Considerando a expressão inteira, temos um AND de duas subexpressões que assume o valor 1 se ambas forem verdadeiras. Isso é verificado somente quando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$. Logo estas atribuições satisfazem a expressão. Dizemos que uma expressão é satisfeita ou satisfatível se existe uma atribuição ou assinalamento das variáveis que fazem com que uma expressão assuma o valor 1.

O problema de satisfatibilidade é o seguinte: Dada uma expressão booleana, ela pode ser satisfeita? Uma instância do problema de *Boolean Satisfiability Problem* / Problema de Satisfatibilidade Booleana (SAT) pode ser apresentada através de uma expressão booleana denominada *Conjunctive Normal Form* / Forma Normal Conjuntiva (CNF). Uma fórmula booleana proposicional é constituída de literais e cláusulas. Como já explicado, cada variável assume valores pertencentes ao conjunto $\{0,1\}$. Um literal então pode ser a própria variável $x$ ou sua negação $\neg x$. Uma cláusula $c$ é definida como $c = (l_1 \vee ... \vee l_n)$. Uma CNF é a conjunção de cláusulas, ou seja, $f = (c_1 \wedge ... \wedge c_m)$.

Algumas definições se farão úteis para resolver problemas de SAT:

Seja $\varphi : \{x_1, ..., x_n\} \rightarrow \{0,1\}$ um assinalamento para todas a variáveis booleanas $\{x_1, ..., x_n\}$.

**Definição 2.7.1** *Um literal $l$ é satisfeito se e somente se assume o valor verdade, ou seja,* $(l \equiv x_i$ *e* $\varphi(x_i) = 1)$ *ou* $(l \equiv \neg x_i$ *e* $\varphi(x_i) = 0)$.

**Definição 2.7.2** *Uma cláusula $c = (l_1 \vee ... \vee l_k)$ é satisfeita se e somente se pelo menos um literal $l \in c$ é satisfeito, ou seja, assume o valor* 1. *Uma cláusula vazia, aquela que não contém literais, denotada por $\emptyset$ é sempre não-satisfeita.*

**Definição 2.7.3** *Uma CNF $f = c_1 \wedge ... \wedge c_m$ é satisfeita se e somente se todas as cláusulas assumem o valor* 1.

## 2.8 O Problema Hitting Set

O Hitting Set Problem / Problema da Transversal de Conjunto (HSP) é um problema clássico em análise combinatória, ciência da computação, pesquisa operacional e teoria da complexidade. Sua versão de decisão é um dos 21 problemas NP-completos apresentados por Karp em 1972 (KARP, 1972) enquanto sua versão de otimização é um problema NP-difícil (GAREY, 1979). define o problema da seguinte forma:

Dado um conjunto finito $U = \{1, 2, ..., u\}$ (chamado de universo) e uma coleção finita $T = \{T_1, \ldots, T_t\}$ de $t$ subconjuntos não vazios cuja união é igual ao universo, ou seja, $T_k \neq \emptyset, T_k \subseteq U \ \forall \ k \in \{1, \ldots, t\}$ e $\bigcup_{k=1}^{t} T_k = U$. Cada subconjunto $T_k \in T$ é um conjunto finito de elementos de $U$ (chamados componentes de $T_k$). A versão de otimização do HSP consiste em identificar a cardinalidade $c$ do subconjunto $H \subseteq U$ de menor cardinalidade que "acerta" pelo menos um elemento de cada conjunto da coleção $T$, ou seja:

$$H \subseteq U,\ \forall\, T_k \in T, T_k \cap H \neq \emptyset \text{ e } \nexists\, H' \subset U; T_k \cap H' \neq \emptyset\ \forall\, k \in \{1,\ldots,t\} \text{ e } |H'| < |H|.$$

O conjunto $H$ intersecta ("acerta") cada subconjunto da coleção $T$. Em outras palavras, cada subconjunto em $T$ deve conter pelo menos um elemento de $H$. Podem haver vários conjuntos mínimos que acertam $T$, o que constitui uma coleção de conjuntos solução $\Omega = \{H_1,\ldots,H_k,\ldots,H_{|\Omega|}\}$. Encontrar um elemento de $\Omega$ é conhecido por ser um problema NP-difícil (GAREY, 1979). A solução $c$ do HSP é número de elementos do conjunto solução dado pelo número de elementos de $H$, isto é, $|H|$.

Por exemplo, considere o universo $U = \{1,2,3,4,5\}$ e a coleção de conjuntos $T = \{\{1,2,4\},\{2,3\},\{3,5\},\{4,5\}\}$. Nesse exemplo temos $T_1 = \{1,2,4\}$, $T_2 = \{2,3\}$, $T_3 = \{3,5\}$ e $T_4 = \{4,5\}$, onde a união entre todos os elementos de $T$ é igual ao conjunto $U$. Para esse exemplo temos duas soluções para o HSP: o conjunto $H_1 = \{2,5\}$ e o conjunto $H_2 = \{3,4\}$ cujas cardinalidades de ambos é igual a 2. Observe que $\nexists\, H'$ de cardinalidade inferior a 2 que seja solução do HSP.

No capítulo seguinte, apresentamos formalmente o problema da manipulação ótima de preferências e descrevemos alguns resultados obtidos.

# 3 MANIPULAÇÃO ÓTIMA DE PREFERÊNCIAS NO MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS BILATERAIS

Nesse capítulo iremos apresentar o problema o qual ficamos interessados em investigar. Já na seção 3.1 descrevemos o problema da manipulação ótima de preferências no modelo de grafo para resolução de conflitos bilaterais usando um exemplo ilustrativo de fácil compreensão. A partir dessa apresentação, na seção 3.2 apresentamos propostas de critérios para agregar custos ao manipular as preferências de vários decisores no GMCR. Na seção 3.3, descrevemos alguns resultados teóricos sobre o problema que concernem a relação entre os custos mínimos de manipulação para diferentes noções de estabilidade e um resultado sobre a complexidade computacional do problema. Apresentamos na seção 3.4 um algoritmo para resolver o problema da manipulação de preferências entre decisores no GMCR utilizando o método apresentado por Kinsara *et al.* (2015b) e disponível atualmente, o qual lista todos os perfis de relação de preferência e, com isso identifica aqueles perfis que apresentam o estado focal como um estado de equilíbrio (na definição de equilíbrio desejada) através de uma busca exaustiva, que utiliza dos métodos matriciais propostos por Xu *et al.* (2007).

## 3.1 Descrição do Problema

Seja o conjunto de decisores $N = \{1,2\}$, como apresentado na seção 2.4, a $LPR(s)$ apresenta uma lista de perfis de relações de preferências para os quais o estado $s$ é um estado de equilíbrio segundo algum dos critérios de equilíbrio no GMCR inverso. Utilizaremos o modelo matricial apresentado em 2.5 para caracterizar os perfis de relações de preferências apresentados na $LPR(s)$. O problema da manipulação de preferências no modelo de grafo para resolução de conflitos bilaterais consiste em apresentar um perfil de relações de preferências para o qual o estado $s$ é um estado de equilíbrio segundo algum dos critérios de equilíbrio com o menor "custo" e pode ser enunciado de uma forma inicial e na versão de decisão como um problema computacional da seguinte forma:

**MANIPULAÇÃO DE PREFERÊNCIAS NO GMCR PARA CONFLITOS BILATERAIS**

INSTÂNCIA: Um conjunto finito $S = \{1,\ldots,m\}$ de "estados do conflito", um estado focal $s \in S$, um critério $E$ de estabilidade (definido em 2.2), um critério $C$ de agregação de custo (que será definido em 3.2) as matrizes $J_1$, $J_2$, $P_1^+$ e $P_2^+$ e um inteiro $k$.

PERGUNTA: É possível tornar o estado $s$ um estado de equilíbrio segundo o critério $E$ com um custo de alterar as preferências dos decisores menor ou igual a $k$?

É fácil ver que a pergunta acima será respondida com um SIM para todo $k$ suficientemente grande , apenas tornando o estado focal indiferente a todos os outros estados para ambos os decisores. Já na versão de otimização do problema, estamos interessados em encontrar o menor valor de $k$ para o qual a pergunta anterior é respondida com um SIM.

Para ilustrar essa versão inicial do problema da manipulação ótima de preferências no GMCR bilateral apresentaremos um exemplo.

Seja o conjunto de decisores $N = \{1,2\}$, conjunto de estados viáveis $S = \{1,2,3,4,5\}$. No GMCR a acessibilidade dos decisores pode ser apresentada pelo grafo representado na figura abaixo.

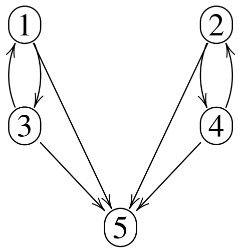


Figura 1 – Acessibilidade do decisor 1

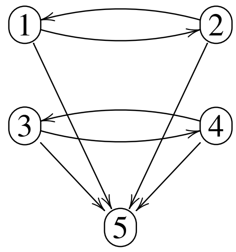


Figura 2 – Acessibilidade do decisor 2

As representações acima mostram como os decisores podem alterar os estados do conflito com movimentos unilaterais, ou seja, o decisor 1, por exemplo, pode alterar o conflito entre os estados 1 e 3 de acordo com seus interesses. Usando a representação matricial para a acessibilidade, temos:

$$J_1(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \qquad J_2(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As preferências de cada decisor são dadas por relações de preferências não transitivas apresentadas usando as representações matriciais a seguir:

$$P_1^+(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \qquad P_2^+(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em posse das relações de preferência dos decisores podemos construir também um perfil de relações de preferências:

$$PR_N^1 = \{P_1^+(a,b), P_2^+(a,b)\},$$

onde $P_1^+(a,b) = (p_{ab}^1)_{5\times 5}$ e $P_2^+(a,b) = (p_{ab}^2)_{5\times 5}$ definidas acima. Observe que $p_{34}^2 = 1$ significa que $4 \succ_2 3$. Podemos construir outros perfis de relações de preferências, desde que possamos alterar as preferências de um decisor, como por exemplo

$$PR_N^2 = \{P_1^+(a,b), X_2(a,b)\},$$

onde $X_2(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Nesse perfil $X_2(a,b)$ mudamos a preferência do decisor 2 de modo que o estado 3 seja indiferente ao estado 4, ou seja, $3 \sim_2 4$ e o estado 3 também seja indiferente ao estado 5, ou seja, $3 \sim_2 5$ . Nas condições iniciais de preferência, o decisor 2 teria interesse em mover o conflito do estado 3 para o estado 4 ou para o estado 5 mas com algum "incentivo"que pode vir ou do decisor 1 ou de uma terceira parte inicialmente externa ao conflito, é possível fazer essa mudança na preferência do decisor 2 e dessa forma teríamos no estado 3 um estado Nash estável para ambos os decisores, logo 3 seria um equilíbrio de Nash.

Outras alterações nas preferências dos decisores podem ser feitas a fim de atingir uma das definições de estabilidade desejadas. Essas alterações trazem um determinado custo para o decisor que tem interesse nessa alteração de preferência ou para um interventor do conflito e precisam ser cuidadosamente avaliadas. Na seção a seguir propomos critérios para agregação de custos a fim de determinar as intervenções ou manipulações que tenham um menor custo possível, considerando para isto diversos critérios e pontos de vista tanto de uma possível parte externa ao conflito quanto de algum dos decisores envolvidos no mesmo.

## 3.2 Critérios para Agregação de Custos

Nosso problema consiste em manipular as preferências dos decisores a fim de obtermos um determinado estado como estado de equilíbrio para alguma das definições de equilíbrio descritas na seção 2.2. Estamos interessados também em obter esse estado de equilíbrio com o menor custo possível. Wu *et al.* (2018) apresenta um modelo onde é alterada a prioridade das opções dos decisores no conflito a fim de alterar as preferências entre os estados do conflito para os decisores. Acreditamos que uma abordagem diferente seja mais apropriada tendo em vista as limitações do sistema de opções que serão apresentadas posteriormente. Nossa ideia inicial de atribuição de custo para cada preferência entre estados alterada é inspirada nas definições dadas por Kemeny e Snell (1972) e consiste em definir um custo para alterações entre as relações de preferência. O custo entre os perfis de relação de preferência $PR_i^a$ e $PR_i^b$ de um DM $i$, que será considerado como o custo para alterar as preferências deste DM da seguinte forma:

Seja $PR_i^{a,b}$ o custo de mudar o perfil de relação de preferência $a$ para o perfil de relação de preferência $b$ para o decisor $i$, ou seja

$$PR_i^{a,b} := \mathrm{c}(PR_i^a, PR_i^b) := \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{p=s+1}^{m} c_i^{a,b}(s,p) \tag{3.1}$$

onde $\mathrm{c}_i^{a,b}$ é calculado da seguinte forma:

$$
c_i^{a,b}(s,p) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad PR_i^a \text{ e } PR_i^b \text{ coincidem com respeito a preferência entre } s \text{ e } p; \\ 1, & \text{se} \quad \text{de acordo com exatamente uma das relações de preferência } s \text{ e } p \text{ são indiferentes;} \\ 2, & \text{se} \quad \text{de acordo com uma das relações de preferência temos } s \succ p \text{ enquanto de acordo com a outra temos } p \succ s. \end{cases}
$$

Assumindo que teremos um custo para manipular as preferências de um decisor então teremos um custo para tornar um estado estável para esse decisor e um equilíbrio para o conflito de acordo com alguma das definições anteriores. Em geral, tem-se um custo associado para cada DM. Então, a manipulação ótima depende dos objetivos do individuo interessado em tornar o determinado estado equilíbrio. Existem diversos critérios de agregação dos custos dos DMs a fim de se obter uma manipulação ótima. A seguir nós apresentaremos quatro critérios que podem ser utilizados.

Dessa forma podemos agora definir os quatro tipos de custos para a manipulação entre os perfis de relações de preferências para todos dos decisores, ou seja, o custo para alterar as relações de preferências de todos os decisores do perfil de relações de preferências *a* para o perfil de relações de preferências *b*.

**Definição 3.2.1** *O custo total entre o perfil de relação de preferência a para o perfil de relação de preferências b para todos os n decisores em N será definida como o somatório dos custos entre o perfil de relação de preferência a para o perfil de relação de preferência b de cada decisor, ou seja:*

$$
{}_{T}PR_N^{a,b} := c_T(PR_N^a, PR_N^b) := \sum_{i=1}^{n} PR_i^{a,b}
$$

**Definição 3.2.2** *A amplitude dos custos dos DMs para se alterar de um perfil de relação de preferências a para um perfil de relação de preferências b pode ser utilizado como outro critério* *de agregação. Formalmente, esta amplitude é dada por:*

$$_{amp}PR_N^{a,b} := \mathrm{c}_{amp}(PR_N^a, PR_N^b) := \max_{i,j \in N} |PR_i^{a,b} - PR_j^{a,b}|$$

**Definição 3.2.3** *O máximo entre os custos dos DMs para se alterar de um perfil de relação de preferências a para um perfil de relação de preferências b pode ser utilizada como outro critério de agregação. Formalmente, esse máximo é dado por:*

$$_{\max}PR_N^{a,b} := \mathrm{c}_{\max}(PR_N^a, PR_N^b) := \max_{i,j \in N} \{PR_i^{a,b}, PR_j^{a,b}\}$$

**Definição 3.2.4** *A variância do conjunto de custos dos DMs de alterar o perfil de relação de preferências a para o perfil de relação de preferências b também pode ser um critério adotado para se encontrar a manipulação ótima. Formalmente, temos:*

$$_{\mathrm{var}}PR_N^{a,b} := \mathrm{c}_{\mathrm{var}}(PR_N^a, PR_N^b) := \mathrm{Var}[PR_i^{a,b} : i \in N]$$

Otimizar o custo para mudar do perfil de relações de preferências $a$ para algum perfil na lista de relação de preferências que nos dá algum estado como um estado de equilíbrio seria encontrar o estado $b$ na lista de perfis de relações de preferências $LPR(s_E)$ cujo custo entre esse perfil e o perfil real de relações de preferências seja mínima para alguma das definições de custo apresentadas.

Podemos usar um dos critérios acima como critério primário de agregação e outro desses critérios como um critério secundário. Por exemplo, o usuário pode querer prioritariamente o perfil de relações de preferência de menor custo total e, dentre os perfis de menor custo total seja buscado o de menor variância.

No exemplo que foi apresentado para descrever nosso problema temos o perfil de relação de preferências $PR_N^1 = \{P_1^+(s,p), P_2^+(s,p)\}$ que representa as preferências iniciais dos decisores enquanto $PR_N^2 = \{P_1^+(s,p), X_2(s,p)\}$ representa as preferências dos decisores após manipular as preferências iniciais. Pelas definições apresentadas temos:

$$PR_1^{1,2} := \mathrm{c}(PR_1^1, PR_1^2) := \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=p+1}^{m} c_1^{a,b}(s,p) = 0 \text{ e}$$

$$PR_2^{1,2} := \mathrm{c}(PR_2^1, PR_2^2) := \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=p+1}^{m} c_2^{a,b}(s,p) = 2.$$

Notemos que $PR_1^{1,2} = 0$ pois não houve alteração nas preferências do decisor 1 enquanto $PR_2^{1,2} = 2$ pois houve alteração nas preferências do decisor 2 de modo que $4 \succ_2 3$ e $5 \succ_2 3$ no $PR_2^1$ enquanto $4 \sim_2 3$ e $5 \sim_2 3$ no $PR_2^2$ e, com isso, $c_2^{1,2}(3,4) = 1$, $c_2^{1,2}(3,5) = 1$ e $c_2^{1,2}(s,p) = 0$ para todo $(s,p) \neq (3,4)$ e $(s,p) \neq (3,5)$.

Usando agora nossas definições de custo temos que

$${}_{T}PR_N^{1,2} =_{amp} PR_N^{1,2} =_{\max} PR_N^{1,2} = 2 \text{ enquanto } {}_{\mathrm{var}}PR_N^{1,2} = 1.$$

Como vimos anteriormente, essa alteração no perfil de relação de preferências torna o estado 3 um estado de equilíbrio de Nash. Então podemos afirmar que o custo para tornar o estado 3 um estado de equilíbrio de Nash foi 2 (de acordo com as definições de custo total, amplitude dos custos ou máximo entre os custos) ou foi de 1 (de acordo com a definição de variância dos custos).

Agora que definimos o que é e como agregar um custo a uma alteração de perfil de relação de preferência, iremos descrever na seção a seguir alguns resultados teóricos sobre o problema. Um dos resultados diz respeito a relação entre os custos mínimos de manipulação para diferentes critérios de estabilidade e o outro diz respeito a um resultado sobre a complexidade do nosso problema.

## 3.3 Resultados Teóricos

Nessa seção apresentaremos alguns dos resultados teóricos obtidos enquanto buscávamos nosso objetivo principal. Na Seção 3.3.1, apresentamos um valor máximo para o valor ótimo do custo de manipulação de preferências de um decisor baseado na relação entre as soluções existentes nos conceitos de estabilidade no GMCR. Em seguida, na Seção 3.3.2, mostramos que nosso problema é pelo menos tão difícil quanto um problema clássico de complexidade computacional, a saber o Hitting Set Problem que foi apresentado na Seção 2.8. Finalmente, na Seção 3.4, apresentamos e analisamos a eficiência do método da busca exaustiva onde são gerados todos os perfis de relação de preferências possíveis e, em seguida, são armazenados e exibidos aqueles que apresentam a menor quantidade de alterações nas relações de preferências para atingir o equilíbrio de acordo com uma dada noção de estabilidade.

### *3.3.1 Relações entre os custos mínimos para manipulação de preferências entre diferentes critérios de estabilidade*

Na literatura do GMCR, existem relações bem estabelecidas entre os principais conceitos de estabilidade que foram apresentados na Seção 2.2, a saber: estabilidade de Nash, estabilidade GMR, estabilidade SMR, estabilidade SEQ e estabilidade SSEQ (FANG *et al.*, 1993; RÊGO; VIEIRA, 2016). A Figura 3 ilustra essas relações entre os principais critérios de estabilidade no GMCR.

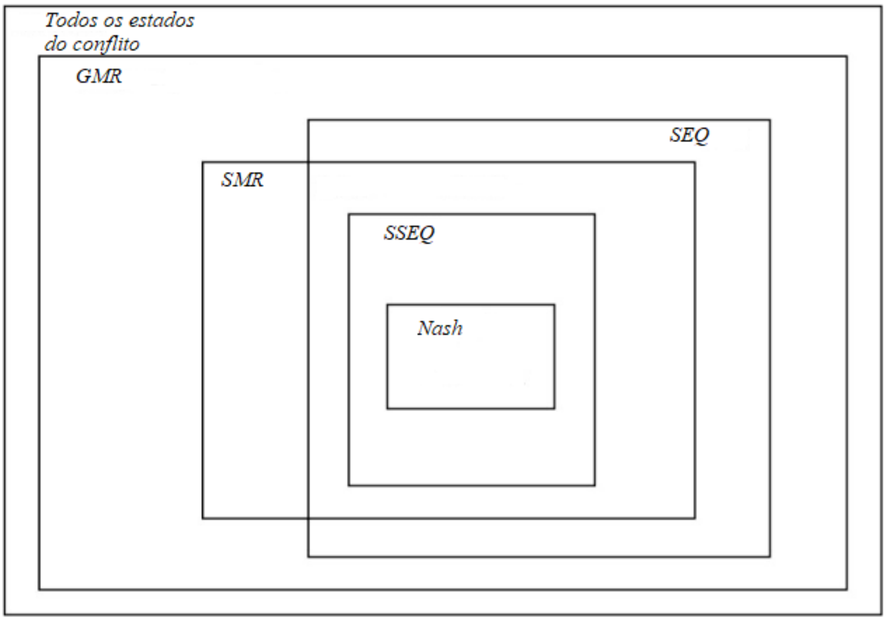


Figura 3 – Relação entre critérios de estabilidade: Nash, GMR, SMR, SEQ e SSEQ.

O conjunto de estados Nash estáveis é um subconjunto do conjunto de estados SSEQ estáveis que por sua vez está contido na interseção do conjunto de estados que satisfazem Metarracionalidade Simétrica (SMR) com o conjunto de estados que satisfazem estabilidade Sequencial (SEQ). Estes dois últimos são ambos subconjuntos do conjunto de estados que satisfazem Metarracionalidade Geral (GMR).

Com o auxílio dessas relações entre os critérios de estabilidade, iremos estabelecer relações entre os custos mínimos para se obter estabilidade no GMCR para diferentes critérios de estabilidade. O Teorema 3.3.1, utiliza o fato de que a estabilidade de Nash implica as outras quatro noções de estabilidade para estabelecer uma cota superior para o custo mínimo da manipulação de preferências a fim de tornar um estado estável para um dado decisor de acordo com algum dos cinco critérios de estabilidade apresentados neste trabalho.

**Teorema 3.3.1** *Seja $i \in N$. O valor ótimo do custo da manipulação de preferências a fim de tornar um estado $s$ estável para o decisor $i$ de acordo com qualquer um dos cinco critérios apresentados (Nash, GMR, SMR, SEQ e SSEQ) é no máximo $|R_i^+(s)|$.*

*DEMONSTRAÇÃO*: Conforme pode ser observado na Figura 3, se um estado for Nash estável para um decisor, ele também irá satisfazer as outras quatro noções de estabilidade. Deste modo, as alterações nas relações de preferências necessárias para tornar um estado *Nash* estável para um decisor são suficientes para tornar esse estado estável segundo os outros quatro critérios de estabilidade para esse decisor. O custo mínimo para tornar um estado $s$ *Nash* estável para um decisor $i$, é dado por $|R_i^+(s)|$, já que é a quantidade de estados que são melhorias unilaterais para o decisor $i$ a partir do estado $s$, e o custo é 1 para tornar essa melhoria uma indiferença. Desta forma, temos que com um custo de $|R_i^+(s)|$ é possível tornar o estado $s$ estável segundo qualquer um dos quatro critérios de estabilidade e com isso, essa é uma cota superior para o valor ótimo do custo da manipulação de preferências de um decisor para tornar $s$ estável para o decisor $i$ segundo os cinco critérios de estabilidade.

■

Seja $N$ o conjunto de decisores num conflito cujo conjunto de estados é dado por $S$ e seja $PR_i^1$ o perfil de relação de preferências inicial desse conflito para o decisor $i \in N$. Seja $PR_i^{s-Nash}$ um perfil de relação de preferências nesse mesmo conflito onde a menor quantidade possível de alterações nas relações de preferências foram realizadas a fim de que o estado $s \in S$ seja *Nash* estável para o decisor $i$. Analogamente definimos $PR_i^{s-GMR}, PR_i^{s-SMR}, PR_i^{s-SEQ}$ e $PR_i^{s-SSEQ}$. Desta forma, $PR_i^{1,s-Nash} = c(PR_i^1, PR_i^{s-Nash})$ é o menor custo para tornar o estado $s$ Nash estável para o decisor $i$. De forma análoga, definimos $PR_i^{1,s-GMR}$, $PR_i^{1,s-SMR}$, $PR_i^{1,s-SEQ}$ e $PR_i^{1,s-SSEQ}$. A seguir apresentaremos dois teoremas que nos dão uma relação entre esses custos.

**Teorema 3.3.2** *Seja $i \in N$ e $s \in S$. Então*

$$PR_i^{1,s-GMR} \leq PR_i^{1,s-SMR} \leq PR_i^{1,s-SSEQ} \leq PR_i^{1,s-Nash} \tag{3.2}$$

*DEMONSTRAÇÃO*: Pelo Teorema 3.3.1, $PR_i^{1,s-Nash}$ é um custo de manipulação nas relações de preferências do decisor $i$ suficiente para tornar o estado $s$ estável nas cinco definições apresentadas, servindo assim como uma cota superior para os custos mínimos de manipulações desses critérios de estabilidade. Observando novamente as inclusões apresentadas na Figura 3, se um estado for SSEQ estável então ele também será SMR e GMR estável e como $PR_i^{1,s-SSEQ}$

é o menor custo para tornar o estado $s$ SSEQ estável para o decisor $i$ então por esse mesmo custo o estado $s$ também será GMR e SMR estável, logo $PR_i^{1,s-SSEQ}$ será uma cota superior para $PR_i^{1,s-GMR}$ e $PR_i^{1,s-SMR}$. Uma relação entre os custos $PR_i^{1,s-SMR}$ e $PR_i^{1,s-GMR}$ acontece de forma análoga, sendo que nesse caso $PR_i^{1,s-GMR}$ terá o valor de $PR_i^{1,s-SMR}$ como uma cota superior, visto que todo estado SMR estável para o decisor $i$ também é GMR estável para este decisor.

■

**Teorema 3.3.3** *Seja $i \in N$ e $s \in S$. Então*

$$PR_i^{1,s-GMR} \leq PR_i^{1,s-SEQ} \leq PR_i^{1,s-SSEQ} \leq PR_i^{1,s-Nash} \tag{3.3}$$

*DEMONSTRAÇÃO*: Análogo ao anterior.

■

Observando a Figura 3 podemos concluir que nada podemos afirmar sobre uma relação entre os custos $PR_i^{1,s-SMR}$ e $PR_i^{1,s-SEQ}$ pois um estado pode ser SMR estável sem ser SEQ estável e vice versa. Na subseção a seguir vamos mostrar que apresentar as manipulações ótimas nas preferências de um decisor a fim de tornar um determinado estado do conflito estável não é um problema trivial, sendo pelo menos tão complexo quanto um problema computacional clássico e difícil.

### *3.3.2 Análise de Complexidade*

Nessa seção, vamos falar sobre a complexidade do problema da manipulação ótima de preferências no GMCR usando como referência o HSP, um problema clássico da análise combinatória apresentado na Seção 2.8. Como entrada de uma instância do problema (na versão de decisão) de otimizar custos nas alterações nos perfis de relações preferências de dois decisores a fim de obter um estado como estado de equilíbrio GMR temos:

**Definição 3.3.1** *Dado um conjunto de estados $S$, relações de preferência $P_1$ e $P_2$ e adjacência $J_1$ e $J_2$ sobre os estados em $S$ para os jogadores 1 e 2, respectivamente, e dado um estado focal $s$ e um valor arbitrário $k$, o problema de decisão da estabilidade GMR (DGMR) consiste em determinar se é possível tornar o estado $s$ GMR-estável com custo no máximo $k$.*

Para efeitos de clareza vamos replicar aqui também o problema de decisão do HSP.

**Definição 3.3.2** *Dado um conjunto S, um conjunto T, que é subconjunto do conjunto das partes de S, e um valor k, queremos determinar se existe um conjunto H (chamado hitting set) com cardinalidade no máximo k tal que* $\forall T_i \in T\ T_i \cap H \neq \emptyset$.

**Teorema 3.3.4** *O problema de decisão da estabilidade GMR é NP-completo.*

*DEMONSTRAÇÃO:* Vamos demonstrar o resultado através de uma redução do DGMR ao HSP. Considere uma instância do HSP $I = (S,T,k)$, onde $S = \{1,\cdots,n\}$, $T = \{T_1,\cdots,T_m\}$. Vamos construir uma instância $I' = (S',P_1',P_2',J_1',J_2',s',k')$ do DGMR de tal forma que o resultado do problema DGMR para $I'$ é o mesmo resultado do HSP para $I$.

Primeiramente vamos construir o conjunto de estados $S' = Z_S \cup Z_T \cup \{s'\}$, onde $Z_S$ tem um estado correspondente a cada elemento em $S$, $Z_T$ tem um estado correspondente a cada elemento em $T$ e $s'$ é um novo estado. Em seguida vamos construir as preferências de cada jogador. Para o jogador 2, vamos dizer que todos os estados são indiferentes entre si e, com isso, o estado $s'$ é um estado GMR-estável. Formalmente $P_2' = \{s_a \sim_2 s_b\ :\ s_a,s_b \in S'\}$. Para o jogador 1 temos a seguinte relação: o estado $s'$ é menos preferível do que qualquer estado $s_{T_i} \in Z_T$ e menos preferível do que qualquer estado em $s_b \in Z_S$ enquanto as outras relações de preferências entre os demais estados é uma indiferença, ou seja, $P_1' = \{s \succ_1 s'\ :\ s \in S' - \{s'\}\} \cup \{s_a \sim_1 s_b\ :\ s_a,s_b \in S' - \{s\},\}$. As relações de acessibilidade para o decisor 2 seguem de modo que cada estado $s_b \in Z_S$ pode ser acessado a partir do estado $s_{T_i} \in Z_T$ desde que $b \in T_i$, ou seja, $J_2' = \{(s_{T_i},s_b)\ :\ s_{T_i} \in Z_T, s_b \in Z_S, b \in T_i\}$, enquanto para o decisor 1 teremos que qualquer estado $s_{T_i}$ é acessível a partir de $s'$, ou seja, $J_1' = \{(s',s_{T_i})\ : s_{T_i} \in Z_T\}$. Finalmente vamos fazer o valor $k' = k$.

Observe que esta construção é imediata e pode ser realizada em tempo polinomial. Além disso, o problema se resume ao jogador 1, dado que o estado $s'$ já é estável para o jogador 2 (não requer qualquer mudança).

Para obter a solução deste problema de decisão devemos considerar mudanças de preferência entre $s'$ e os estados em $Z_T$ ou entre $s'$ e os estados em em $Z_S$. No entanto para qualquer solução em que exija uma mudança entre $s'$ e um estado em $Z_T$ podemos obter uma outra solução que realiza a mudança apenas entre $s'$ e os estados em $Z_S$. Assim, vamos considerar apenas soluções que alteram preferências entre $s'$ e $Z_S$.

As soluções desta forma podem ser caracterizadas por um subconjunto $Z_H \subseteq Z_S$. Observe que estas soluções podem ser entendidas como retaliações e devem portanto ser capazes de retaliar cada estado em $Z_T$. Para tanto, conforme a construção de $Z_T$ e $Z_S$, o conjunto $Z_H$ corresponde a elementos em $S$ que são um *hitting set* em $I = (S, P, k)$.

Assim concluímos que o custo de tornar o estado $s'$ estável é menor ou igual a $k'$ se, e somente se, existe um subconjunto $H \subseteq S$, onde $H \cap T_i \neq \emptyset$, para todo $T_i \in T$, onde $|H| \leq k$.

■

**Corolário 3.3.1** *O problema de otimização da estabilidade GMR é NP-difícil.*

*DEMONSTRAÇÃO*: Como o problema de decisão DGMR está na classe NP então o problema de otimização associado é NP-difícil.

■

**Corolário 3.3.2** *O problema de otimização da estabilidade SMR, SEQ e SSEQ são NP-difícil.*

*DEMONSTRAÇÃO:* A mesma transformação proposta no Teorema 3.3.4 pode ser aplicada e a estabilidade SMR, SEQ ou SSEQ são equivalentes à estabilidade GMR no caso da instância obtida.

■

Para entender nossa estratégia para o problema de otimização, vamos ilustrá-la utilizando o exemplo apresentado na Seção 2.8 onde temos o universo $S = \{1,2,3,4,5\}$ e a coleção de conjuntos $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ com $T_1 = \{1,2,4\}$, $T_2 = \{2,3\}$, $T_3 = \{3,5\}$ e $T_4 = \{4,5\}$. A ideia é considerar o estado $s'$ estável para um decisor (digamos o decisor 2) enquanto geramos o conjunto que representa os estados acessíveis e preferíveis para o decisor 1 a partir da entrada do HSP . Para converter essa instância em uma instância do problema de manipulação ótima de preferência no GMCR bilaterais, teríamos $S' = \{s', s_{T_1}, s_{T_2}, s_{T_3}, s_{T_4}, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $R_1(s') = R_i^+(s') = \{s_{T_1}, s_{T_2}, s_{T_3}, s_{T_4}\}$, $R_2(s_{T_i}) = T_i$, $i = 1,2,3,4$. Suponha ainda que todos os demais conjuntos de acessibilidade e melhorias que não estão descritos sejam vazios.

Assumindo que todos os estados $1,2,3,4,5$ são preferíveis ao estado $s'$ para o decisor 1 temos então que o estado $s'$ não é GMR estável para o decisor 1.

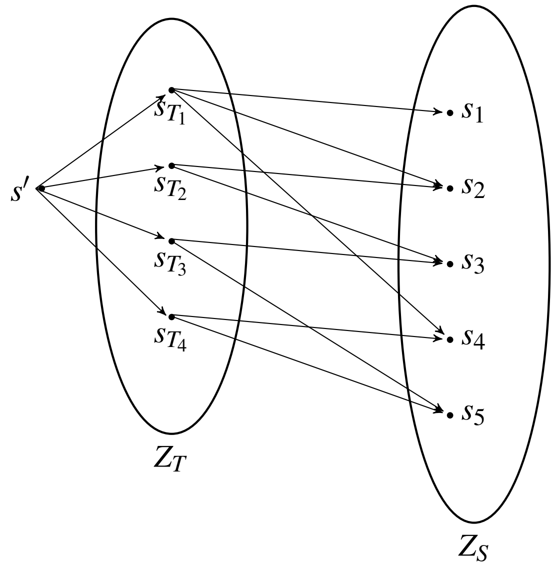


Figura 4 – Instância do Problema de Manipulação de Preferências no GMCR para conflitos Bilaterais a partir de uma instância do HSP

Uma solução para o nosso problema de manipulação ótima seria mudar a preferência do decisor 1 entre os estados $s'$ e $s_2$ e entre $s'$ e $s_5$, tornando em ambos os casos os estados com preferência indiferente para o decisor 1, ou seja $s' \sim_1 s_2$ e $s' \sim_1 s_5$.

Observe que qualquer movimento de melhoria unilateral do decisor 1 a partir de $s'$ seria retaliado, uma vez que essas preferências tenham sido alteradas. Além disso, não existe uma maneira de garantir a existência de uma retaliação para toda melhoria unilateral alterando uma única preferência. Portanto, para tornar o estado $s'$ GMR-estável, cada uma de suas melhorias unilaterais tem que ou (a) deixar de ser uma melhoria unilateral por uma alteração de preferência de um estado $s_{T_i}$ em relação a $s'$ ou (b) tem que existir uma retaliação que pode ser atingida através da alteração de uma preferência do decisor 1 entre um estado $s_a \in Z_S$ e $s'$ para o decisor 1. Note que como $T_i \neq \emptyset$, então sempre existe uma maneira equivalente ou melhor em termos de custo de alterar uma preferência de um estado em $Z_S$ em relação a $s'$ em relação a alterar a preferência de um estado em $Z_T$ em relação a $s'$ para o decisor $i$. Finalmente, note que a $H_1 = \{2,5\}$ é também uma solução do HSP.

Agora podemos afirmar que resolver o problema de manipulação ótima de preferências é pelo menos tão difícil quanto resolver um HSP. Na seção a seguir, descrevemos um método de busca exaustiva para resolução do problema de manipulação ótima de preferências.

## 3.4 Método da Busca Exaustiva

A aplicação do sistema GMCR demonstrou a necessidade de assistência de um software, pois para resolver até mesmo modelos pequenos à mão pode ser incômodo, impreciso e sujeito a erros (KILGOUR *et al.*, 2001). Por isso, nessa seção iremos apresentar a descrição de um algoritmo para a resolução do problema da manipulação ótima de preferências. Inicialmente pensaremos em um código que gere todos os perfis de relação de preferências dos decisores, teste quais desses perfis de relações de preferências atinge a definição de estabilidade desejada para determinado estado e para os dois decisores chegando assim a um equilíbrio do conflito, verifique o custo para agregar esses perfis encontrados aos DMs de acordo com a definição de custo desejada e possa exibir ao final do processo o custo ótimo e todos os perfis de relações de preferências que apresentam esse custo. Esse método será chamado de método da força bruta.

Em termos gerais, um Sistema de Apoio a Decisão para Análise e Resolução de Conflitos (ou simplesmente *Sistema de Apoio à Decisão* (SAD)) é um sistema computacional que ajuda no processo de tomada de decisão (FINLAY, 1994). Desde a introdução dos modelos de conflitos estratégicos, tem havido várias tentativas de softwares SAD para auxiliar os pesquisadores na análise de conflitos.

O algoritmo da busca exaustiva proposto recebe como valores de entrada as matrizes de preferências $P^+$ e as matrizes de acessibilidades $J$ dos decisores, o estado $s$ o qual se deseja que seja o estado de equilíbrio, a definição de equilíbrio a ser utilizada e o tipo de agregação de custo.

O algoritmo da busca exaustiva inicialmente gera todas as possíveis matrizes de preferências para os dois decisores. Usando as definições matriciais de estabilidade apresentadas na seção 2.5 é testado se cada uma das matrizes geradas satisfazem o critério de estabilidade solicitada verificando assim se tal perfil de preferências é um equilíbrio para o conflito e, caso seja atingido o equilíbrio, utilizando as definições de agregação de custo é verificado o custo de alterar as preferências iniciais dos decisores para as matrizes de preferência geradas. Caso seja encontrado um perfil de preferências com um custo de agregação menor, salva-se este novo perfil. Caso o custo encontrado seja igual ao corrente, agrega-se o novo perfil de preferência, a lista de perfis salvos. É importante ressaltar que é sempre possível tornar um estado um equilíbrio de Nash, consequentemente equilíbrio segundo qualquer outro conceito de estabilidade, tornando todos os estados indiferentes para todos os decisores. O Algoritmo 1 lista os perfis que são mais próximos aos perfis de preferências originais e que tornam o estado desejado um equilíbrio de acordo com alguma noção pré-definida. A seguir o nosso algoritmo:

---

**Algoritmo 1:** Método da busca exaustiva para manipulação de preferências no GMCR

---

**Input:** $J_1, J_2, P_1^+, P_2^+, s$ e $ESTAVEL$ (que pode receber NASH, GMR, SMR, SEQ, SSEQ).

A variável $custo$ recebe $\infty$ como valor inicial;

**Output:** $custo(P_1, P_2, X_{1k}, Y_{2l})$, $V_1$, $V_2$;

$V_1 \leftarrow \emptyset$

$V_2 \leftarrow \emptyset$

**para todo** $k$ **de** 1 **até** $3^{\binom{m}{2}}$ **faça**

    **Gerar** $X_{1k}$ **matriz de preferência para o decisor** 1

    **Se** $X_{1k}$ $ESTAVEL$ **então**

        **para todo** $l$ **de** 1 **até** $3^{\binom{m}{2}}$ **faça**

            **Gerar** $Y_{2l}$ **matriz de preferência para o decisor** 2

            **se** $Y_{2l}$ $ESTAVEL$ **então**

                **Calcular** $custo(P_1, P_2, X_{1k}, Y_{2l})$

                **se** $custo(P_1, P_2, X_{1k}, Y_{2l}) < custo$ **então**

                    $custo \leftarrow custo(P_1, P_2, X_{1k}, Y_{2l})$

                    $V_1 \leftarrow \emptyset$

                    $V_2 \leftarrow \emptyset$

                    $V_1 \supset X_{ik}$

                    $V_2 \supset Y_{jl}$

                **senão, se** $custo(P_1, P_2, X_{1k}, Y_{2l}) = custo$ **então**

                    $V_1 \supset X_{1k}$

                    $V_2 \supset Y_{2l}$

                **fim**

            **fim**

        **fim**

    **fim**

**fim**

**retorna** $custo$

---

Ao resolvermos nosso problema nos valores de entrada apresentados em 3.1 usando o método da busca exaustiva com algoritmo implementado no software R i386 3.6.0 executado sobre a versão R x64 3.6.0 num hardware Intel(R) Core(TM) i5-3317u (1.70 GHz) - 12 GB de RAM nos deparamos com problemas no tempo de resolução devido a complexidade do problema. Soluções que buscam estabilidade para dois decisores e cinco estados no conflito foram encontradas em mais de 48 horas de processamento.

Por exemplo, escolhendo o estado 3 como o estado que queremos que seja um estado de equilíbrio GMR e o critério de agregação do custo total, rodamos o algoritmo com as matrizes de entrada apresentadas na Seção 3.1 para as acessibilidades e preferências de dois decisores. Dessa forma são geradas $3^{10}$ matrizes de preferências para o 1 e testadas sequencialmente se são GMR estáveis. Quando alguma matriz gerada for GMR estável para o decisor 1, digamos a matriz $X_{1k_1}$ então são geradas todas as matrizes $3^{10}$ de preferências para o decisor 2. Ao encontrar uma matriz GMR estável para o decisor 2, digamos $Y_{2l_1}$ é então calculado o custo para a alterar as preferências do decisor 1 e do decisor 2 usando as definições apresentadas em 3.2. Se o custo calculado for menor que o custo salvo, atualiza o custo, limpa o conjunto $V_1$ e $V_2$ que terão como elementos as matrizes de preferências geradas que nos dão o menor custo para manipular as preferências dos decisores 1 e 2 respectivamente e finalmente as matrizes $X_{1k_1}$ e $Y_{2l_1}$ são armazenadas em $V_1$ e $V_2$ respectivamente. Caso o custo calculado seja igual ao custo atual, então as matrizes geradas serão armazenadas em $V_1$ e $V_2$ e caso o custo calculado for maior que o valor atual do custo, nada será feito.

# 4 UM ALGORITMO EFICIENTE PARA DETERMINAR A FORMA ÓTIMA DE MANIPULAR PREFERÊNCIAS EM CONFLITOS BILATERAIS

## 4.1 Introdução

Nesse capítulo, apresentaremos um algoritmo de desempenho satisfatório para determinar a forma ótima de manipular preferências em conflitos bilaterais. Este algoritmo é baseado em um problema de programação linear inteira. As restrições do problema são descritas através de fórmulas lógicas que garantem a estabilidade do estado. Deste modo, na seção a seguir, descreveremos uma abordagem lógica para determinação da estabilidade de um estado.

## 4.2 Abordagem Lógica

Com o auxílio do método matricial apresentado na Seção 2.5 podemos escrever as definições de estabilidade usando conectivos lógicos como uma instância de um problema SAT apresentado na Seção 2.7 de modo a melhorar a abordagem computacional sem precisar utilizar o método da busca exaustiva.

Seja $S$ o conjunto de estados, $p^i_{sl} = 1$ se temos a relação entre os estados $l, s \in S$ de modo que $l \succ_i s$ para o decisor $i$ e $p^i_{sl} = 0$ caso contrário. Seja $j^i_{sl} = 1$ se o estado $l$ é acessível a partir do estado $s$ para o decisor $i$ em um único passo e $j^i_{sl} = 0$ caso contrário.

Nesta seção, considere que o conjunto de estados de um conflito é $S = \{1, 2, \ldots, m\}$. Usando esses valores como literais num problema de SAT, a seguir descreveremos teoremas que descrevem cláusulas lógicas para determinar a estabilidade de um estado de acordo com os conceitos de Nash, GMR, SMR, SEQ e SSEQ.

**Teorema 4.2.1** *Um estado $s \in S$ é Nash estável para o decisor $i$ se e somente se:*

$$\bigwedge_{l=1}^{m} (\neg j^i_{sl} \vee \neg p^i_{sl}) = 1 \tag{4.1}$$

**Prova:** Uma cláusula qualquer $(\neg j^i_{sl} \vee \neg p^i_{sl}) = 1$ significa que o decisor $i$ não pode mover o conflito de forma unilateral do estado $s$ para o estado $l$ ou que o mesmo estado $l$ não é preferível ao estado $s$ para o decisor $i$ e, dessa forma, temos que $l \notin R^+_i(s)$. Como $\forall\ l \in S$ as cláusulas são verdadeiras, então $R^+_i(s) = \emptyset$. Logo, (4.1) é satisfeita se e somente se $s$ é Nash estável para o decisor $i$.

**Teorema 4.2.2** *Um estado $s \in S$ é GMR estável para o decisor i se e somente se:*

$$\bigwedge_{l=1}^{m}\left(\neg j^{i}_{sl} \vee \neg p^{i}_{sl} \vee \left(\bigvee_{k=1}^{m}(j^{j}_{lk} \wedge \neg p^{i}_{sk})\right)\right) = 1 \tag{4.2}$$

**Prova:** Uma cláusula qualquer $\left(\neg j^{i}_{sl} \vee \neg p^{i}_{sl} \vee \left(\bigvee_{k=1}^{m}(j^{j}_{lk} \wedge \neg p^{i}_{sk})\right)\right) = 1$ significa que o decisor $i$ não pode mover o conflito de forma unilateral do estado $s$ para o estado $l$ ou que o mesmo estado $l$ não é preferível ao estado $s$ para o decisor $i$ ou ainda $\exists\, k \in S$ tal que o decisor $j$ pode mover o conflito de forma unilateral do estado $l$ para o estado $k$ e temos $k \not\succ_i s$, sendo assim uma possível retaliação ao decisor $i$ caso ele possa e queira mudar o conflito do estado $s$ para o estado $l$ e, dessa forma, temos que $l \notin R^{+}_{i}(s)$ ou $\exists\, k \in S$ tal que $k \in R_j(l)$ e $s \succsim_i k$. Como $\forall\, l \in S$ as cláusulas são verdadeiras, então para cada estado $l \in R^{+}_{i}(s)$, existe pelo menos um estado $k \in R_j(l)$ tal que $s \succsim_i k$. Logo, (4.2) é satisfeita se e somente se $s$ é GMR estável.

**Teorema 4.2.3** *Um estado s é SMR estável para o decisor i se e somente se:*

$$\bigwedge_{l=1}^{m}\left(\neg j^{i}_{sl} \vee \neg p^{i}_{sl} \bigvee_{k=1}^{m}\left(j^{j}_{lk} \wedge \neg p^{i}_{sk} \bigwedge_{b=1}^{m}(\neg j^{i}_{kb} \vee \neg p^{i}_{sb})\right)\right) = 1 \tag{4.3}$$

**Prova:** Uma cláusula qualquer $\left(\neg j^{i}_{sl} \vee \neg p^{i}_{sl} \bigvee_{k=1}^{m}\left(j^{j}_{lk} \wedge \neg p^{i}_{sk} \bigwedge_{b=1}^{m}(\neg j^{i}_{kb} \vee \neg p^{i}_{sb})\right)\right) = 1$ significa que o decisor $i$ não pode mover o conflito de forma unilateral do estado $s$ para o estado $l$ ou que o mesmo estado $l$ não é preferível ao estado $s$ para o decisor $i$ ou ainda $\exists\, k \in S$ tal que o decisor $j$ pode mover o conflito de forma unilateral do estado $l$ para o estado $k$ e temos $k \not\succ_i s$ e ainda para todo estado $b$, ou $b$ não é acessível a partir de $k$ para o decisor $i$ ou temos $b \not\succ_i s$. Deste modo, o estado $k$ é uma possível retaliação ao decisor $i$ caso ele possa e queira mudar o conflito do estado $s$ para o estado $l$, a partir da qual não existe nenhuma contrarreação para um outro estado $b$. Portanto, temos que $l \notin R^{+}_{i}(s)$ ou $\exists\, k \in S$ tal que $k \in R_j(l)$ e $s \succsim_i k$ e $\forall\, b \in S$ tal que $b \in R_i(k)$ temos que $s \succsim_i b$. Como $\forall\, l \in S$ as cláusulas são verdadeiras, então para cada estado $l \in R^{+}_{i}(s)$, existe pelo menos um estado $k \in R_j(l)$ tal que $s \succsim_i k$ e $s \succsim_i b$ para todo estado $b \in R_i(k)$. Logo, (4.3) é satisfeita se e somente se $s$ é SMR estável.

**Teorema 4.2.4** *Um estado s é SEQ estável para o decisor i se e somente se:*

$$\bigwedge_{l=1}^{m}\left(\neg j^{i}_{sl} \vee \neg p^{i}_{sl} \vee \bigvee_{k=1}^{m}\left(j^{j}_{lk} \wedge p^{j}_{lk} \wedge \neg p^{i}_{sk}\right)\right) = 1 \tag{4.4}$$

**Prova:** Uma cláusula qualquer $\left(\neg j^i_{sl} \vee \neg p^i_{sl} \vee \left(\bigvee_{k=1}^{m} (j^j_{lk} \wedge p^j_{lk} \wedge \neg p^i_{sk})\right)\right) = 1$ significa que o decisor $i$ não pode mover o conflito de forma unilateral do estado $s$ para o estado $l$ ou que o mesmo estado $l$ não é preferível ao estado $s$ para o decisor $i$ ou ainda $\exists\, k \in S$ tal que o decisor $j$ pode mover o conflito de forma unilateral do estado $l$ para o estado $k$, $k \succ_j l$ e $k \not\succ_i s$. Deste modo, $k$ é uma possível melhoria unilateral para o decisor $j$ a partir do estado $l$ e uma retaliação ao decisor $i$ caso ele possa e queira mudar o conflito do estado $s$ para o estado $l$. Portanto, temos que $l \notin R^+_i(s)$ ou $\exists\, k \in S$ tal que $k \in R^+_j(l)$ e $s \succsim_i k$. Como $\forall\, l \in S$ as cláusulas são verdadeiras, então para cada estado $l \in R^+_i(s)$, existe pelo menos um estado $k \in R^+_j(l)$ tal que $s \succsim_i k$. Logo, (4.4) é satisfeita se e somente se $s$ é SEQ estável.

**Teorema 4.2.5** *Um estado s é SSEQ estável para o decisor i se e somente se:*

$$\bigwedge_{l=1}^{m} \left(\neg j^i_{sl} \vee \neg p^i_{sl} \bigvee_{k=1}^{m} \left(j^j_{lk} \wedge p^j_{lk} \wedge \neg p^i_{sk} \bigwedge_{b=1}^{m} (\neg j^i_{kb} \vee \neg p^i_{sb})\right)\right) = 1 \tag{4.5}$$

**Prova:** Uma cláusula qualquer $\left(\neg j^i_{sl} \vee \neg p^i_{sl} \bigvee_{k=1}^{m} \left(j^j_{lk} \wedge p^j_{lk} \wedge \neg p^i_{sk} \bigwedge_{b=1}^{m} (\neg j^i_{kb} \vee \neg p^i_{sb})\right)\right) = 1$ significa que o decisor $i$ não pode mover o conflito de forma unilateral do estado $s$ para o estado $l$ ou que o mesmo estado $l$ não é preferível ao estado $s$ para o decisor $i$ ou ainda $\exists\, k \in S$ tal que o decisor $j$ pode mover o conflito de forma unilateral do estado $l$ para o estado $k$, $k \succ_j l$ e $k \not\succ_i s$ e ainda para todo estado $b$ ou $b$ não é acessível a partir de $k$ para o decisor $i$ ou $b \not\succ_i s$. Deste modo, o estado $k$ é uma melhoria unilateral do decisor $j$ a partir do estado $l$ e uma possível retaliação ao decisor $i$ caso ele possa e queira mudar o conflito do estado $s$ para o estado $l$, a partir do qual não existe nenhuma contrarreação. Portanto, temos que $l \notin R^+_i(s)$ ou $\exists\, k \in S$ tal que $k \in R^+_j(l)$ e $s \succsim_i k$ e $\forall\, b \in S$ tal que $b \in R_i(k)$ temos que $s \succsim_i b$. Como $\forall\, l \in S$ as cláusulas são verdadeiras, então para cada estado $l \in R^+_i(s)$, existe pelo menos um estado $k \in R^+_j(l)$ tal que $s \succsim_i k$ e $s \succsim_i b$ para todo estado $b \in R_i(k)$. Logo, (4.5) é satisfeita se e somente se $s$ é SSEQ estável.

## 4.3 Modelos de Otimização

Nessa seção, iremos apresentar nossos algoritmos utilizados para atingir a manipulação ótima nas preferências de dois decisores num conflito modelado com GMCR e para cada definição de estabilidade apresentada. Descreveremos os algoritmos para conflitos bilaterais onde o conjunto de decisores é dado por $N = \{1,2\}$ e em termos do critério do custo total.

Para os demais critérios, algoritmos similares podem ser descritos alterando apropriadamente o funcional objetivo dos problemas.

Os algoritmos serão descritos para tornar o estado $s \in S = \{1, 2, \ldots, m\}$ um estado de equilíbrio de acordo com algum critério de estabilidade. Para o critério de estabilidade de Nash, já vimos que a solução ótima pode ser trivialmente obtida tornando cada estado em $R_i^+(s)$ indiferente ao estado $s$ para cada decisor $i \in N$ e com isso o seu custo no critério custo total equivale a $|R_1^+(s)| + |R_2^+(s)|$, a soma das cardinalidades dos conjuntos das melhorias unilaterais a partir do estado $s$ para cada decisor.

Nas subseções a seguir, os problemas serão descritos usando as variáveis binárias $x_{ab}^i$, que indica quando a preferência estrita do estado $b$ em relação ao estado $a$ para o decisor $i$ foi transformada em indiferença, e variáveis binárias $y_a$ que indica se o estado $a$ que é uma melhoria unilateral em relação ao estado $s$ para o decisor $i$ e para o qual não existe uma retaliação após alterações de preferências passou a ser retaliável.

A seguir, descreveremos o problema para o critério do GMR.

### *4.3.1 Manipulação Ótima Eficiente - GMR*

A seguir, descrevemos um método de otimização linear inteira para encontrar a forma ótima de tornar o estado $s$ um equilíbrio GMR. Para cada $x_{sa}^i = 1$ no conjunto de solução ótimo do problema de otimização a seguir, significa que um estado $a$ que é preferível a $s$ pelo decisor $i$ deve ser tornado indiferente para tornar o estado $s$ um equilíbrio GMR.

$$\min \quad \sum_{i\in N} \sum_{q\in S: p^i_{sq}=1} x^i_{sq} \tag{4.6}$$

$$s.a.: \quad \forall i \in N, \forall\, a \in R_i(s) \text{ tal que } p^i_{sa} * \left( \prod_{b\in R_{N-\{i\}}(a)} p^i_{sb} \right) = 1,$$

$$x^i_{sa} + y^i_a \geq 1, \tag{4.7}$$

$$\forall i \in N, \forall\, a \in R_i(s) \text{ tal que } p^i_{sa} * \left( \prod_{b\in R_{N-\{i\}}(a)} p^i_{sb} \right) = 1,$$

$$y^i_a \leq \sum_{b\in S:\ p^i_{sb} * j^{N-\{i\}}_{ab} = 1} x^i_{sb}, \tag{4.8}$$

$$x^i_{sq} \in \{0,1\},\ i \in N, \forall q \in S \text{ tal que } \ p^i_{sq} = 1, \tag{4.9}$$

$$\forall i \in N, \forall\, a \in R_i(s) \text{ tal que } p^i_{sa} * \left( \prod_{b\in R_{N-\{i\}}(a)} p^i_{sb} \right) = 1,$$

$$y^i_a \in \{0,1\} \tag{4.10}$$

O modelo apresentado nas Equações 4.6 a 4.10 acima calcula o valor mínimo da soma de todas as alterações de preferências em relação ao estado $s$ tanto para o decisor 1 como para o decisor 2 como foi definido no critério do custo total na Seção 3.2. As alterações de preferências neste caso podem ser de 2 naturezas: (i) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e estados que são melhorias unilaterais ($a$'s) a partir de $s$ e já não sejam retaliáveis ou (ii) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e estados ($b$'s) que são acessíveis pelo oponente do decisor focal a partir de um estado do tipo $a$, mas não são uma retaliação às melhorias unilaterais do decisor focal a partir do estado $s$. A seguir, detalhamos cada uma das restrições do problema:

- Para todo decisor $i \in N$ e todo estado $a \in S$ que seja uma melhoria unilateral a partir do estado $s$ para o decisor $i$ para o qual não exista uma retaliação, a Equação 4.7 indica que haverá uma alteração de preferência tornando $a$ indiferente a $s$ para o decisor $i$ ($x^i_{sa} = 1$) ou haverá uma retaliação a partir de $a$ ($y^i_a = 1$). É importante ressaltar que como as variáveis $y^i_a$ não fazem parte da função objetivo sempre que possível satisfazer essa restrição tornando $y^i_a$ igual a 1, melhor será;
- Para todo decisor $i \in N$ e todo estado $a \in S$ que seja uma melhoria unilateral a partir do estado $s$ para o decisor $i$ para o qual não exista uma retaliação, a Equação 4.8 restringe que só existe uma retaliação a partir de $a$, se alguma preferência de um estado $b$ acessível ao

oponente do decisor focal a partir de $a$ foi alterada em relação ao estado $s$ para o decisor $i$ tornando $b$ indiferente a $s$ ($x^i_{sb} = 1$);

- As restrições 4.9 e 4.10 são para informar que as variáveis $x^i_{sq}$ e $y^i_a$ do modelo são variáveis booleanas.

Descreveremos a seguir o problema para o critério do SMR.

### 4.3.2 Manipulação Ótima Eficiente - SMR

A seguir, descrevemos um modelo de otimização linear inteira para encontrar a forma ótima de tornar o estado $s$ um equilíbrio SMR.

$$\min \quad \sum_{i \in N} \sum_{q \in S: p^i_{sq}=1} x^i_{sq} \tag{4.11}$$

$$s.a.: \quad i \in N,\ a \in R_i(s),\ p^i_{sa} * \prod_{b \in S;\ j^{N-\{i\}}_{ab}=1} \left[ p^i_{sb} + (1 - p^i_{sb}) * \left( \sum_{c \in R_i(b)} p^i_{sc} \right) \right] \geq 1$$

$$x^i_{sa} + y^i_a \geq 1, \tag{4.12}$$

$$i \in N,\ a \in R_i(s),\ p^i_{sa} * \prod_{b \in S;\ j^{N-\{i\}}_{ab}=1} \left[ p^i_{sb} + (1 - p^i_{sb}) * \left( \sum_{c \in R_i(b)} p^i_{sc} \right) \right] \geq 1$$

$$y^i_a \leq \sum_{b \in R_{N-\{i\}}(a)} z^i_{ab} \tag{4.13}$$

$$z^i_{ab} \leq x^i_{sb},\ i \in N,\ \forall a \in R_i(s), \forall b \in R_{N-\{i\}}(a), p^i_{sa} * p^i_{sb} = 1 \tag{4.14}$$

$$z^i_{ab} \leq x^i_{sc},\ i \in N, \forall a \in R_i(s),\ \forall b \in R_{N-\{i\}}(a),\ \forall c \in R_i(b),\ p^i_{sa} * p^i_{sc} = 1, \tag{4.15}$$

$$x^i_{sq} \in \{0,1\},\ \forall i \in N, \forall q \in S \text{ tal que } \ p^i_{sq} = 1, \tag{4.16}$$

$$y^i_a \in \{0,1\},\ \forall i \in N,\ \forall a \in S. \tag{4.17}$$

$$z^i_{ab} \in \{0,1\},\ \forall i \in N,\ \forall a \in S,\ \forall b \in S, \tag{4.18}$$

Assim como no caso do GMR, o modelo apresentado nas Equações 4.11 a 4.18 acima calcula o valor mínimo da soma de todas as alterações de preferências de todos os decisores como foi definido no critério do custo total na Seção 3.2. As alterações de preferências neste caso podem ser de 3 naturezas: (i) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e estados que são melhorias unilaterais ($a$'s) a partir de $s$, (ii) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e estados ($b$'s) que não são uma retaliação às melhorias unilaterais do decisor focal a partir de $s$ juntamente com as relações de preferências do decisor focal entre o estado $s$ e os estados acessíveis ($c$'s) a partir de $b$ pelo decisor focal que são preferíveis a $s$ e (iii) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e os estados acessíveis ($c$'s) a partir de $b$ pelo decisor focal que são preferíveis a $s$, nos quais os estados ($b$'s) já são uma retaliação às melhorias unilaterais do decisor focal a partir de $s$. A seguir, detalhamos cada uma das restrições do problema:

- Para todo decisor $i \in N$ e todo estado $a \in S$ que seja uma melhoria unilateral a partir do estado $s$ para o decisor $i$ para o qual todo movimento dos oponentes levando a um estado $b$ ou $b$ não é uma retaliação ou $b$ é uma retaliação a partir da qual o decisor focal pode escapar para um estado $c$, a Equação 4.12 indica que haverá uma alteração de preferência tornando $a$ indiferente a $s$ para o decisor $i$ ($x^i_{sa} = 1$) ou haverá uma retaliação a partir de $a$ ($y^i_a = 1$) da qual o decisor $i$ não escapará. É importante ressaltar que como as variáveis $y^i_a$ não fazem parte do funcional objetivo sempre que possível satisfazer essa restrição tornando $y^i_a$ igual a 1, melhor será para o funcional objetivo;
- Para todo decisor $i \in N$ e todo estado $a \in S$ que seja uma melhoria unilateral a partir do estado $s$ para o decisor $i$ para o qual todo movimento do oponente levando-o a um estado $b$ ou $b$ não é uma retaliação ou $b$ é uma retaliação a partir da qual o decisor focal pode escapar para um estado $c$, a Equação 4.13, restringe que só existe uma retaliação a partir de $a$, se (i) pela Restrição 4.14, alguma preferência de um estado $b$ acessível ao oponente de $i$ a partir do estado $a$ e preferível a $s$ pelo decisor $i$ foi alterada em relação ao estado $s$ para o decisor $i$ tornando $b$ indiferente a $s$ ($x^i_{sb} = 1$) e se (ii) pela Restrição 4.15, todos os estados acessíveis $c$ a partir de $b$ pelo decisor $i$ que sejam preferíveis a $s$ pelo decisor $i$ se tornam indiferentes a $s$ ($x^i_{sc} = 1$).
- As restrições 4.16, 4.17 e 4.18 são para informar que as variáveis $x^i_{sq}$, $y^i_a$ e $z^i_{ab}$ do modelo são variáveis booleanas.

A seguir descreveremos o problema para o critério SEQ.

### *4.3.3 Manipulação Ótima Eficiente - SEQ*

A seguir, descrevemos um método de otimização linear inteira para encontrar a forma ótima de tornar o estado $s$ um equilíbrio SEQ.

Para o modelo SEQ temos uma diferença no funcional objetivo em relação aos modelos GMR e SMR, pois neste caso além do custo para tornar um estado preferível a $s$ pelo decisor $i$ indiferente ($x^i_{sa} = 1$), podemos ter o custo de alterar uma preferência do oponente de modo a tornar uma retaliação do estado $a$ para o estado $b$ benéfica para o oponente $\left(x_{ab}^{N-\{i\}}(1+p_{ba}^{N-\{i\}})\right)$.

$$\min \quad \sum_{i\in N}\sum_{a\in S:p^i_{sa}=1}(x^i_{sa}+\sum_{b\in S}x^{N-i}_{ab}(1+p^{N-i}_{ba})) \tag{4.19}$$

$$s.a.: \quad \forall i \in N, \forall\, a \in R_i(s) \text{ tal que } p^i_{sa} * \left(\prod_{b\in R_{N-\{i\}}(a):p_{ab}^{N-\{i\}}=1} p^i_{sb}\right) = 1,$$

$$x^i_{sa} + y^i_a \geq 1, \tag{4.20}$$

$$\forall i \in N, \forall\, a \in R_i(s) \text{ tal que } p^i_{sa} * \left(\prod_{b\in R_{N-\{i\}}(a):p_{ab}^{N-\{i\}}=1} p^i_{sb}\right) = 1,$$

$$y^i_a \leq \sum_{b\in R_{N-\{i\}}(a)} z^i_{ab}, \tag{4.21}$$

$$z^i_{ab} \leq x^i_{sb},\ i \in N,\ \forall a \in R_i(s), \forall b \in R_{N-\{i\}}(a), p^i_{sa} * p^i_{sb} = 1 \tag{4.22}$$

$$z^i_{ab} \leq x_{ab}^{N-\{i\}},\ i \in N,\ \forall a \in R_i(s), \forall b \in R_{N-\{i\}}(a), p^i_{sa} * (1 - p_{ab}^{N-\{i\}}) = 1 \tag{4.23}$$

$$x_{ab}^{N-\{i\}} + x_{ba}^{N-\{i\}} \leq 1,\ \forall i \in N,\ \forall a,b \in S, \tag{4.24}$$

$$x^i_{ab} \in \{0,1\},\ \forall i \in N,\ \forall a,b \in S, \tag{4.25}$$

$$y^i_a \in \{0,1\},\ \forall i \in N,\ \forall a \in S, \tag{4.26}$$

$$z^i_{ab} \in \{0,1\},\ \forall i \in N,\ \forall a \in S, \forall b \in R_{N-\{i\}}(a). \tag{4.27}$$

O modelo apresentado nas Equações 4.19 a 4.27 acima calcula o valor mínimo da soma de todas as alterações de preferências em relação ao estado $s$ tanto para o decisor 1 como para o decisor 2 como foi definido no critério do custo total na Seção 3.2. As alterações de preferências neste caso podem ser de 3 naturezas: (i) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e estados que são melhorias unilaterais ($a$'s) a partir de $s$ pela restrição 4.20, (ii) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e estados ($b$'s) que não são uma retaliação às melhorias unilaterais do decisor focal a partir do estado $s$ pela restrição 4.22 e (iii) na relação de preferência do decisor não focal entre os estados que são melhorias unilaterais ($a$'s) a partir de $s$ para o decisor focal e estados ($b$'s) que não são uma retaliação às melhorias unilaterais do decisor focal a partir do estado $s$, tornando-os uma retaliação, pela restrição 4.23. A seguir detalhamos cada uma das restrições do problema:

- Para todo decisor $i \in N$ e todo estado $a \in S$ que seja uma melhoria unilateral a partir do estado $s$ para o decisor $i$ para o qual não exista uma retaliação, a Equação 4.20 indica que haverá uma alteração de preferência tornando $a$ indiferente a $s$ para o decisor $i$ ($x^i_{sa} = 1$) ou haverá uma retaliação a partir de $a$ ($y_a^i = 1$). É importante ressaltar que como as variáveis $y_a^i$ não fazem parte do funcional objetivo sempre que possível satisfazer essa restrição tornando $y_a^i$ igual a 1, melhor será para o funcional objetivo;

- Para todo decisor $i \in N$ e todo estado $a \in S$ que seja uma melhoria unilateral a partir do estado $s$ para o decisor $i$ para o qual não exista uma retaliação, a Equação 4.21 restringe que só existe uma retaliação a partir de $a$, se alguma preferência de um estado $b$ acessível e preferível pelo oponente do decisor focal a partir de $a$ foi (i) alterada em relação ao estado $s$ para o decisor $i$ tornando $b$ indiferente a $s$ ou (ii) alterada em relação ao estado $a$ para o oponente do decisor focal, tornando $b$ indiferente a $a$;
- A restrição 4.24 garante que o modelo não viole a assimetria da preferência.
- As restrições 4.25, 4.26 e 4.27 são para informar que as variáveis $x_{sa}^i$, $y_a^i$ e $z_{ab}^i$ do modelo são variáveis booleanas.

### *4.3.4 Manipulação Ótima Eficiente - SSEQ*

A seguir, descrevemos um modelo de otimização linear inteira para encontrar uma forma ótima de tornar o estado $s$ um equilíbrio SSEQ.

$$\min \quad \sum_{i\in N}\sum_{a\in S: p^i_{sa}=1}(x^i_{sa}+\sum_{b\in S}x^{N-i}_{ab}(1+p^{N-i}_{ba})) \tag{4.28}$$

$$s.a.: \quad \forall i\in N, a\ \in R_i(s),\ p^i_{sa}*\prod_{b\in R_{N-\{i\}}(a):\ p^{N-\{i\}}_{ab}=1}\left[p^i_{sb}+(1-p^i_{sb})*\left(\sum_{c\in R_i(b)}p^i_{sc}\right)\right]\geq 1,$$

$$x^i_{sa}+y^i_a\geq 1, \tag{4.29}$$

$$\forall i\in N, a\ \in R_i(s),\ p^i_{sa}*\prod_{b\in R_{N-\{i\}}(a): p^{N-\{i\}}_{ab}=1}\left[p^i_{sb}+(1-p^i_{sb})*\left(\sum_{c\in R_i(b)}p^i_{sc}\right)\right]\geq 1,$$

$$y^i_a\leq \sum_{b\in R_{N-\{i\}}(a)} z^i_{ab}, \tag{4.30}$$

$$z^i_{ab}\leq x^i_{sb},\ i\in N,\ \forall a\in R_i(s), \forall b\in R_{N-\{i\}}(a), p^i_{sa}*p^i_{sb}=1, \tag{4.31}$$

$$z^i_{ab}\leq x^{N-\{i\}}_{ab},\ i\in N,\ \forall a\in R_i(s), \forall b\in R_{N-\{i\}}(a), p^i_{sa}*(1-p^{N-\{i\}}_{ab})=1, \tag{4.32}$$

$$z^i_{ab}\leq x^i_{sc},\ \forall i\in N, \forall a\in R_i(s),\ \forall b\in R_{N-\{i\}}(a),\ \forall c\in R_i(b),\ p^i_{sa}*p^i_{sc}=1, \tag{4.33}$$

$$x^{N-\{i\}}_{ab}+x^{N-\{i\}}_{ba}\leq 1\ \forall i\in N,\ \forall a,b\in S, \tag{4.34}$$

$$x^i_{sa}\in\{0,1\},\ \forall i\in N,\ \forall a\in S, \tag{4.35}$$

$$y^i_a\in\{0,1\},\ \forall i\in N,\ \forall a\in S, \tag{4.36}$$

$$z^i_{ab}\in\{0,1\},\ \forall i\in N,\ \forall a\in S. \tag{4.37}$$

Assim como no caso do SEQ, o modelo apresentado nas Equações 4.28 a 4.37 acima calcula o valor mínimo da soma de todas as alterações de preferências em relação ao estado $s$ tanto para o decisor 1 como para o decisor 2 como foi definido no critério do custo total na Seção 3.2. As alterações de preferências neste caso podem ser de 4 naturezas: (i) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e estados que são melhorias unilaterais ($a$'s) a partir de $s$, (ii) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e estados ($b$'s) que não são uma retaliação às melhorias unilaterais do decisor focal a partir de $s$ juntamente com as relações de preferências do decisor focal entre o estado $s$ e os estados acessíveis ($c$'s) a partir de $b$ pelo decisor focal que são preferíveis a $s$, (iii) na relação de preferência do oponente do decisor focal entre estados que são melhorias unilaterais ($a$'s) a partir de $s$ para o decisor focal e estados ($b$'s) que não são uma retaliação às melhorias unilaterais do decisor focal a partir de $s$, tornando-os uma retaliação, e (iv) na relação de preferência do decisor focal entre o estado focal $s$ e os estados acessíveis ($c$'s) a partir de $b$ pelo decisor focal que são preferíveis à $s$, nos quais os estados ($b$'s) já são uma retaliação às melhorias unilaterais do decisor focal a partir de $s$. A seguir, detalhamos cada uma das restrições do problema:

- Para todo decisor $i \in N$ e todo estado $a \in S$ que seja uma melhoria unilateral a partir do estado $s$ para o decisor $i$ para o qual todo melhoria unilateral do oponente levando a um estado $b$ a partir de $a$, ou $b$ não é uma retaliação ou $b$ é uma retaliação a partir da qual o decisor focal pode escapar para um estado $c$, a Equação 4.29 indica que haverá uma alteração de preferência tornando $a$ indiferente a $s$ para o decisor $i$ ($x^i_{sa} = 1$) ou haverá uma retaliação a partir de $a$ ($y^i_a = 1$) da qual o decisor $i$ não escapará. Ressaltamos novamente que como as variáveis $y^i_a$ não fazem parte do funcional objetivo sempre que possível satisfazer essa restrição tornando $y^i_a$ igual a 1, melhor será para o funcional objetivo;
- Para todo decisor $i \in N$ e todo estado $a \in S$ que seja uma melhoria unilateral a partir do estado $s$ para o decisor $i$ para o qual toda melhoria unilateral do oponente levando o conflito a um estado $b$ ou $b$ não é uma retaliação ou $b$ é uma retaliação a partir da qual o decisor focal pode escapar para um estado $c$, a Equação 4.30, restringe que só existe uma retaliação a partir de $a$, se (i) pela Restrição 4.31, quando alguma preferência de um estado $b$ acessível e preferível ao oponente de $i$ a partir do estado $a$ e preferível a $s$ pelo decisor $i$ for alterada em relação ao estado $s$ para o decisor $i$ tornando $b$ indiferente a $s$ ($x^i_{sb} = 1$), (ii) pela Restrição 4.32, se o estado $b$ acessível ao oponente do decisor $i$ a partir de $a$ não for uma melhoria para o opoente que a preferência seja alterada tornado este movimento uma melhoria unilateral ($x^{N-\{i\}}_{ab} = 1$) e se (iii) pela Restrição 4.33, as preferências de todos os estados acessíveis $c$ a partir de $b$ pelo decisor $i$ que forem preferíveis a $s$ forem alteradas para tornar $c$ indiferente a $s$ pelo decisor $i$ ($x^i_{sc} = 1$).
- A restrição 4.24 garante que o modelo não viole a assimetria da preferência.
- As restrições 4.35, 4.36 e 4.37 são para informar que as variáveis $x^i_{sa}$, $y^i_a$ e $z^i_{ab}$ do modelo são variáveis booleanas.

# 5 APLICAÇÃO DO MODELO

Nesse capítulo, apresentaremos dois conflitos bilaterais já descritos na literatura do GMCR. No primeiro conflito temos a crise dos mísseis cubanos apresentada por Fraser e Hipel (1982) e Fraser e Hipel (1984). Recordaremos o contexto histórico deste conflito na seção 5.1, apresentaremos a modelagem do mesmo com um modelo GMCR que apresenta 12 estados viáveis na seção 5.2 e, na seção 5.3, descreveremos a análise de estabilidade e os custos para manipulação entre as preferências dos decisores envolvidos no conflito a fim de tornar cada um dos estados estáveis de acordo com alguma noção de estabilidade. Na segunda aplicação, utilizamos o conflito de valores, descrito em Hipel e Obeidi (2005), no qual temos uma dissensão prolongada entre aqueles que apoiam a abordagem predominante do livre comércio de mercadorias e serviços entre nações, que serão apresentados como DM GMDE, e aqueles representam ambientalistas e apoiadores bem-estar social e, portanto, reflete os valores de uma abordagem de ecossistema sustentável, que serão apresentaremos como DM SES. A descrição deste conflito é detalhada na seção 5.4, apresentamos a modelagem do mesmo com um modelo GMCR que apresenta 36 estados viáveis na seção 5.5 e, na seção 5.6, descrevemos a análise de estabilidade e custos para manipulação entre as preferências dos decisores envolvidos no conflito a fim de tornar cada um dos estados estáveis de acordo com alguma noção de estabilidade.

## 5.1 Contexto Histórico da Crise dos Mísseis Cubanos

Os eventos da crise dos mísseis cubanos que eclodiu entre Estados Unidos (EUA) e União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) em outubro de 1962 começaram com a derrubada do regime de Batista em Cuba por Fidel Castro em 1959. Os EUA ficaram irritados com o subsequente confisco de propriedades americanas em Cuba e a percepção de uma ameaça militar comunista tão perto de casa. Isso culminou na invasão da Baía dos Porcos, patrocinada pelos americanos, em abril de 1961, onde exilados cubanos treinados pela *Agência Central de Inteligência* (CIA), não conseguiram se estabelecer em Cuba. Depois do fiasco da Baía dos Porcos, o presidente americano John F.Kennedy comprometeu-se publicamente que sua administração não iria tolerar mísseis ofensivos em Cuba.

Em 14 de outubro de 1962, a equipe de reconhecimento aéreo americano descobriu evidências irrefutáveis de mísseis ofensivos soviéticos sendo instalados em vários locais em Cuba. Para obter conselhos sábios sobre o que fazer e de tantas fontes confiáveis possível, o Presidente

Kennedy criou o Comitê Executivo do Conselho Nacional de Segurança. Esse comitê incluía membros importantes do gabinete e oficiais de agências do governo com responsabilidades pelas decisões políticas e militares, representantes dos principais segmentos do povo e alguns assessores especiais. Esse Comitê Executivo apresentou uma série de ações possíveis em resposta à ameaça soviética, incluindo a execução de ações não agressivas, ataques aéreos contra as bases de mísseis em Cuba e impondo um bloqueio a Cuba, devolvendo navios que transportam suprimentos militares da URSS para Cuba (ALLISON; ZELIKOW, 1999).

A primeira-ministra Nikita Kruschev da URSS teve que decidir se deveria ou não retirar mísseis soviéticos de Cuba. Ela também poderia escalar o conflito através de ações coercitivas, como pressionar a Berlim Ocidental, atacar os navios norte americanos, bombardeando alvos do sudeste americano de Cuba ou iniciando um ataque ICBM (Intercontinental Ballistic Missile) nos EUA. Graças a hesitação e sabedoria exercidas pelos chefes de ambas as superpotências, a crise dos mísseis cubanos não resultou em uma guerra nuclear. Em vez disso, os EUA adotaram uma estratégia bloqueio de embarques militares para Cuba, e a URSS retiraram os mísseis ofensivos. Até o presente momento, os americanos mantiveram suas promessas de não realizar uma invasão militar a Cuba.

## 5.2 Modelagem da Crise dos Mísseis Cubanos

A modelagem das acessibilidades e das relações de preferências dos decisores nesse conflito é obtida e apresentada em Zaraté *et al.* (2014), Fraser e Hipel (1982) e Fraser e Hipel (1984). Aqui adotaremos esses mesmos parâmetros do conflito, sendo descritos na forma matricial. Nessas modelagens os estados foram obtidos por meio do sistema de opções, onde os Estados Unidos poderiam (i) Realizar ou não um ataque aéreo “cirúrgico”. Isso significaria destruir bases de mísseis em um ataque aéreo rápido e convencional. Isso poderia exigir uma invasão de acompanhamento da ilha; ou (ii) impor ou não um bloqueio marítimo. A Marinha Americana aplicaria um embargo a remessas militares da URSS para Cuba. Por outro lado, a URSS poderia (iii) retirar ou não os mísseis de Cuba ou (iv) evoluir ou não o conflito. Isso poderia ser feito invadindo o oeste de Berlim, assaltando navios da Marinha dos EUA, bombardeando o sudeste americanos a partir de Cuba ou iniciar um ataque de ICBM (míssil balístico intercontinental) aos EUA. Em posse das opções dos decisores, os estados dos conflitos são obtidos por meio das possíveis combinações das opções dos decisores. A Tabela 1 ilustra os estados viáveis ao conflito.

| | Estados | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Decisores | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **1.EUA** | | | | | | | | | | | | |
| Ataque Aéreo | N | S | N | S | N | S | N | S | N | S | N | S |
| Bloqueio | N | N | S | S | N | N | S | S | N | N | S | S |
| **2.URSS** | | | | | | | | | | | | |
| Retirar Mísseis | N | N | N | N | S | S | S | S | N | N | N | N |
| Evoluir o Conflito | N | N | N | N | N | N | N | N | S | S | S | S |

Tabela 1 – Estados acessíveis no conflito dos mísseis cubanos

A seguir, vamos apresentar as acessibilidades dos decisores na forma matricial:

$$J_1(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A seguir as matrizes que representam as preferências estritas para esses decisores.

$$P_1^{+}(a,b)=\begin{pmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

$$P_2^{+}(a,b)=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0
\end{pmatrix}.$$

### 5.3 Análise de Estabilidade e Custos para Manipulações de Preferência da Crise dos Mísseis Cubanos

Nessa seção apresentamos os estados estáveis do conflito e o custo mínimo necessário para tornar um equilíbrio cada um dos outros estados que não são equilíbrio para cada uma das cinco noções de estabilidade utilizadas neste trabalho. Vamos apresentar o modelo criado pelo algoritmo de manipulação ótima eficiente para o estado 4 ser um equilíbrio GMR.

$$\text{min}: \quad X^1_{42}+X^1_{43}+X^1_{45}+X^1_{46}+X^1_{47}+X^1_{48}+X^2_{41}+X^2_{42}+X^2_{43}+X^2_{45}+X^2_{46}+X^2_{47}+X^2_{48} \tag{5.1}$$

$$s.a.: \quad c_1 : X^2_{48}+Y^2_8 \geq 1 \tag{5.2}$$

$$c_2 : X^2_{45}+X^2_{46}+X^2_{47}-Y^2_8 \geq 0 \tag{5.3}$$

$$c_3 : X^1_{42}, X^1_{43}, X^1_{45}, X^1_{46}, X^1_{47}, X^1_{48}, X^2_{41}, X^2_{42}, X^2_{43}, X^2_{45}, X^2_{46}, X^2_{47}, X^2_{48}, Y^2_8 \in \{0,1\} \tag{5.4}$$

Na seção 4.3 vimos que no caso do GMR todas as alterações de preferências seriam de uma preferência estrita para uma indiferença. Nesse exemplo, nosso modelo apresenta na função objetivo todas as mudanças de preferências entre o estado 4 e os estados que são preferíveis ao estado 4 para pelo menos um dos dois decisores, porém não há necessidade de mudar a preferência de todos eles. De acordo com a condição $c_1$ apresentada na Equação 5.2, apenas deve ser alterada a preferência entre o estado 4 e o estado 8 para o decisor 2 ou o estado 8 deve ser retaliado. Já a condição $c_2$ apresentada na Equação 5.3, a retaliação ao estado 8 só vai ocorrer se forem alteradas uma das preferências entre o estado 4 e o estado 5, entre o estado 4 e o estado 6 ou entre o estado 4 e o estado 7 para o decisor 2. A restrição $c_3$ apresentada na Equação 5.4 indica que as variáveis são booleanas. Com isso apresentamos 4 alterações possíveis entre as preferências dos decisores (em particular do decisor 2) onde basta fazer uma dessas alterações que o estado 4 se tornará um equilíbrio GMR.

Apresentaremos a seguir o modelo criado para o estado 4 ser um equilíbrio no conceito SMR.

$$\min: \quad X_{42}^1 + X_{43}^1 + X_{45}^1 + X_{46}^1 + X_{47}^1 + X_{48}^1 + X_{41}^2 + X_{42}^2 + X_{43}^2 + X_{45}^2 + X_{46}^2 + X_{47}^2 + X_{48}^2 \tag{5.5}$$

$$s.a: \quad c_1: X_{48}^2 + Y_8^2 \geq 1 \tag{5.6}$$

$$c_2: -Y_8^2 + Z_{85}^2 + Z_{86}^2 + Z_{87}^2 \geq 0 \tag{5.7}$$

$$c_3: -X_{45}^2 + Z_{85}^2 \leq 0 \tag{5.8}$$

$$c_4: -X_{46}^2 + Z_{86}^2 \leq 0 \tag{5.9}$$

$$c_5: -X_{47}^2 + Z_{87}^2 \leq 0 \tag{5.10}$$

$$c_6: -X_{41}^2 + Z_{85}^2 \leq 0 \tag{5.11}$$

$$c_7: -X_{42}^2 + Z_{86}^2 \leq 0 \tag{5.12}$$

$$c_8: -X_{43}^2 + Z_{87}^2 \leq 0 \tag{5.13}$$

$$c_9: X_{42}^1, X_{43}^1, X_{45}^1, X_{46}^1, X_{47}^1, X_{48}^1, X_{41}^2, X_{42}^2, X_{43}^2, X_{45}^2, X_{46}^2, X_{47}^2, X_{48}^2 \in \{0,1\} \tag{5.14}$$

$$c_{10}: Y_8^2, Z_{85}^2, Z_{86}^2, Z_{87}^2 \in \{0,1\} \tag{5.15}$$

Nesse exemplo nosso modelo apresenta na função objetivo todas as mudanças de preferências entre o estado 4 e os estados que são preferíveis ao estado 4 para pelo menos um dos dois decisores, porém não há necessidade de mudar a preferência de todos eles. De acordo com a condição $c_1$ apresentada na Equação 5.6, deve ser alterada a preferência entre o estado 4 e o estado 8 para o decisor 2 ou o estado 8 deve ser retaliado. Já a condição $c_2$ apresentada na Equação 5.3, informa que o estado 8 pode ser retaliado de forma que o decisor 2 não possa escapar e que essa retaliação deve ser feita movendo o conflito para o estado 5 ou para o estado 6 ou para o estado 7. As restrições $c_3$ apresentada na Equação 5.8, $c_4$ apresentada na Equação 5.9 e $c_5$ apresentada na Equação 5.10 informam que os estados 5, 6 e 7 respectivamente podem ser uma retaliação alterando a preferência entre esses estados e o estado 4 para o decisor 2 e deve-se ainda eliminar as formas como o decisor 2 possa escapar dessas retaliações. As formas de escapar dessas retaliações são prevenidas através das condições $c_6$, $c_7$ e $c_8$, respectivamente. Por $c_6$ apresentada na Equação 5.11 pode-se alterar a preferência entre os estados 1 e 4 para o decisor 2, por $c_7$ apresentada na Equação 5.12 pode-se alterar a preferência entre os estados 2 e 4 para o decisor 2, por $c_8$ apresentada na Equação 5.13 pode-se alterar a preferência entre os estados 3 e 4 para o decisor 2. Como precisariam fazer duas alterações nas relações de preferências do decisor 2 a fim de que o estado 4 seja um estado SMR estável para esse decisor então a alteração de menor custo seria alterar a preferência entre o estado 4 e o estado 8. As restrições $c_9$ e $c_{10}$ apresentadas nas Equações 5.14 e 5.15 informam que as variáveis são booleanas.

Apresentaremos a seguir o modelo criado para o estado 4 ser um equilíbrio no conceito SEQ.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & X^1_{42} + 2X^1_{21} + 2X^1_{22} + 2X^1_{23} + 2X^1_{24} + 2X^1_{25} + 2X^1_{26} + 2X^1_{27} + 2X^1_{28} + 2X^1_{29} + 2X^1_{2,10} + \\
& 2X^1_{2,11} + 2X^1_{2,12} + X^1_{43} + 2X^1_{31} + 2X^1_{32} + 2X^1_{33} + 2X^1_{34} + 2X^1_{35} + 2X^1_{36} + 2X^1_{37} + 2X^1_{38} + \\
& 2X^1_{39} + 2X^1_{3,10} + 2X^1_{3,11} + 2X^1_{3,12} + X^1_{45} + 2X^1_{51} + 2X^1_{52} + 2X^1_{53} + 2X^1_{54} + 2X^1_{55} + 2X^1_{56} + \\
& 2X^1_{57} + 2X^1_{58} + 2X^1_{59} + 2X^1_{5,10} + 2X^1_{5,11} + 2X^1_{5,12} + X^1_{46} + 2X^1_{61} + 2X^1_{62} + 2X^1_{63} + 2X^1_{64} + \\
& 2X^1_{65} + 2X^1_{66} + 2X^1_{67} + 2X^1_{68} + 2X^1_{69} + 2X^1_{6,10} + 2X^1_{6,11} + 2X^1_{6,12} + X^1_{47} + 2X^1_{71} + 2X^1_{72} + \\
& 2X^1_{73} + 2X^1_{74} + 2X^1_{75} + 2X^1_{76} + 2X^1_{77} + 2X^1_{78} + 2X^1_{79} + 2X^1_{7,10} + 2X^1_{7,11} + 2X^1_{7,12} + X^1_{48} + \\
& 2X^1_{81} + 2X^1_{82} + 2X^1_{83} + 2X^1_{84} + 2X^1_{85} + 2X^1_{86} + 2X^1_{87} + 2X^1_{88} + 2X^1_{89} + 2X^1_{8,10} + 2X^1_{8,11} + \\
& 2X^1_{8,12} + X^2_{41} + 2X^2_{11} + 2X^2_{12} + 2X^2_{13} + 2X^2_{14} + 2X^2_{15} + 2X^2_{16} + 2X^2_{17} + 2X^2_{18} + 2X^2_{19} + \\
& 2X^2_{1,10} + 2X^2_{1,11} + 2X^2_{1,12} + X^2_{42} + 2X^2_{21} + 2X^2_{22} + 2X^2_{23} + 2X^2_{24} + 2X^2_{25} + 2X^2_{26} + 2X^2_{27} + \\
& 2X^2_{28} + 2X^2_{29} + 2X^2_{2,10} + 2X^2_{2,11} + 2X^2_{2,12} + X^2_{43} + 2X^2_{31} + 2X^2_{32} + 2X^2_{33} + 2X^2_{34} + 2X^2_{35} + \\
& 2X^2_{36} + 2X^2_{37} + 2X^2_{38} + 2X^2_{39} + 2X^2_{3,10} + 2X^2_{3,11} + 2X^2_{3,12} + X^2_{45} + 2X^2_{51} + 2X^2_{52} + 2X^2_{53} + \\
& 2X^2_{54} + 2X^2_{55} + 2X^2_{56} + 2X^2_{57} + 2X^2_{58} + 2X^2_{59} + 2X^2_{5,10} + 2X^2_{5,11} + 2X^2_{5,12} + X^2_{46} + 2X^2_{61} + \\
& 2X^2_{62} + 2X^2_{63} + 2X^2_{64} + 2X^2_{65} + 2X^2_{66} + 2X^2_{67} + 2X^2_{68} + 2X^2_{69} + 2X^2_{6,10} + 2X^2_{6,11} + 2X^2_{6,12} + \\
& X^2_{47} + 2X^2_{71} + 2X^2_{72} + 2X^2_{73} + 2X^2_{74} + 2X^2_{75} + 2X^2_{76} + 2X^2_{77} + 2X^2_{78} + 2X^2_{79} + 2X^2_{7,10} + \\
& 2X^2_{7,11} + 2X^2_{7,12} + X^2_{48} + 2X^2_{81} + 2X^2_{82} + 2X^2_{83} + 2X^2_{84} + 2X^2_{85} + 2X^2_{86} + 2X^2_{87} + 2X^2_{88} + \\
& 2X^2_{89} + 2X^2_{8,10} + 2X^2_{8,11} + 2X^2_{8,12} \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s.a.:\quad & c_1 : X^1_{42} + Y^1_2 \geq 1 && (5.17)\\
& c_2 : X^1_{43} + Y^1_3 \geq 1 && (5.18)\\
& c_3 : X^2_{48} + Y^2_8 \geq 1 && (5.19)\\
& c_4 : -Y^1_2 + Z^1_{26} + Z^1_{2,10} \geq 0 && (5.20)\\
& c_5 : -Y^1_3 + Z^1_{37} + Z^1_{3,11} \geq 0 && (5.21)\\
& c_6 : -Y^2_8 + Z^2_{85} + Z^2_{86} + Z^2_{87} \geq 0 && (5.22)\\
& c_7 : -X^1_{46} + Z^1_{26} \leq 0 && (5.23)\\
& c_8 : -X^1_{47} + Z^1_{37} \leq 0 && (5.24)\\
& c_9 : -X^2_{45} + Z^2_{85} \leq 0 && (5.25)\\
& c_{10} : -X^2_{46} + Z^2_{86} \leq 0 && (5.26)\\
& c_{11} : -X^2_{47} + Z^2_{87} \leq 0 && (5.27)\\
& c_{12} : -X^2_{2,10} + Z^1_{2,10} \leq 0 && (5.28)\\
& c_{13} : -X^2_{3,11} + Z^1_{3,11} \leq 0 && (5.29)\\
& c_{14} : X^i_{ab} \in \{0,1\}, Y^i_a \in \{0,1\}, Z^i_{ab} \in \{0,1\}, \forall i \in N,\ \forall a,b \in S && (5.30)
\end{aligned}
$$

Nesse exemplo nosso modelo apresenta na função objetivo todas as mudanças de preferências possíveis entre estados do conflito para os dois decisores, porém não há necessidade de mudar a preferência de todos eles. De acordo com a condição $c_1$ apresentada na Equação 5.17, deve ser alterada a preferência entre o estado 4 e o estado 2 para o decisor 1 ou o estado 2 deve ser retaliado pelo decisor 2, de acordo com a condição $c_2$ apresentada na Equação 5.18, deve ser alterada a preferência entre o estado 4 e o estado 3 para o decisor 1 ou o estado 3 deve ser retaliado pelo decisor 2 e de acordo com a condição $c_3$ apresentada na Equação 5.19, deve ser alterada a preferência entre o estado 4 e o estado 8 para o decisor 2 ou o estado 8 deve ser retaliado pelo decisor 1.

A restrição $c_4$ apresentada na Equação 5.20 informa que a retaliação à mudança do conflito do estado 4 para o estado 2 feita pelo decisor 1 pode ser retaliada a partir de alteração na relação de preferência entre o estado 2 e o estado 6 ou entre o estado 2 e o estado 10. Para que o estado 6 seja uma retaliação, a condição $c_7$ descrita na Equação 5.23 indica que a preferência entre os estados 6 e 4 para o decisor 1 deve ser modificada para uma indiferença. Por outro lado, para que o estado 10 seja uma retaliação, a condição $c_{12}$ descrita na Equação 5.28 indica que a preferência entre os estados 2 e 10 para o decisor 2 deve ser alterada para que este decisor tenha incentivo de retaliar o decisor 1 modificando o conflito para este estado. É bom ressaltar que a alteração de preferência deve ser de uma preferência estrita, logo o custo para essa alteração é 2.

A restrição $c_5$ apresentada na Equação 5.21 informa que a retaliação à mudança do conflito do estado 4 para o estado 3 feita pelo decisor 1 pode ser retaliada a partir de alteração na relação de preferência entre o estado 3 e o estado 7 ou entre o estado 3 e o estado 11. Para que o estado 7 seja uma retaliação, a condição $c_8$ descrita na Equação 5.24 indica que a preferência entre os estados 7 e 4 para o decisor 1 deve ser modificada para uma indiferença. Por outro lado, para que o estado 11 seja uma retaliação, a condição $c_{13}$ descrita na Equação 5.29 indica que a preferência entre os estados 3 e 11 para o decisor 2 deve ser alterada para que este decisor tenha incentivo de retaliar o decisor 1 modificando o conflito para este estado. É bom ressaltar que a alteração de preferência deve ser de uma preferência estrita, logo o custo para essa alteração é 2.

Finalmente, a restrição $c_6$ apresentada na Equação 5.22 informa que a mudança do estado 4 para o estado 8 feita pelo decisor 2 pode ser retaliada pelo decisor 1 ou indo para o estado 5, ou para o estado 6 ou para o estado 7. Para que o estado 5 seja uma retaliação, a condição $c_9$ descrita na Equação 5.25 indica que a preferência entre os estados 4 e 5 para o decisor 2 deve ser modificada para uma indiferença. Para que o estado 6 seja uma retaliação, a condição $c_{10}$ descrita na Equação 5.26 indica que a preferência entre os estados 4 e 6 para o decisor 2 deve ser modificada para uma indiferença. Para que o estado 7 seja uma retaliação, a condição $c_{11}$ descrita na Equação 5.27 indica que a preferência entre os estados 4 e 7 para o decisor 2 deve ser modificada para uma indiferença.

A restrição $c_{14}$ apresentada na Equação 5.30 informa que as variáveis são booleanas.

Apresentaremos a seguir o modelo criado para o estado 4 ser um equilíbrio no conceito SSEQ.

$$\begin{aligned}
\min \quad & X_{42}^{1}+2X_{21}^{1}+2X_{22}^{1}+2X_{23}^{1}+2X_{24}^{1}+2X_{25}^{1}+2X_{26}^{1}+2X_{27}^{1}+2X_{28}^{1}+2X_{29}^{1}+2X_{2,10}^{1}+\\
& 2X_{2,11}^{1}+2X_{2,12}^{1}+X_{43}^{1}+2X_{31}^{1}+2X_{32}^{1}+2X_{33}^{1}+2X_{34}^{1}+2X_{35}^{1}+2X_{36}^{1}+2X_{37}^{1}+2X_{38}^{1}+\\
& 2X_{39}^{1}+2X_{3,10}^{1}+2X_{3,11}^{1}+2X_{3,12}^{1}+X_{45}^{1}+2X_{51}^{1}+2X_{52}^{1}+2X_{53}^{1}+2X_{54}^{1}+2X_{55}^{1}+2X_{56}^{1}+\\
& 2X_{57}^{1}+2X_{58}^{1}+2X_{59}^{1}+2X_{5,10}^{1}+2X_{5,11}^{1}+2X_{5,12}^{1}+X_{46}^{1}+2X_{61}^{1}+2X_{62}^{1}+2X_{63}^{1}+2X_{64}^{1}+\\
& 2X_{65}^{1}+2X_{66}^{1}+2X_{67}^{1}+2X_{68}^{1}+2X_{69}^{1}+2X_{6,10}^{1}+2X_{6,11}^{1}+2X_{6,12}^{1}+X_{47}^{1}+2X_{71}^{1}+2X_{72}^{1}+\\
& 2X_{73}^{1}+2X_{74}^{1}+2X_{75}^{1}+2X_{76}^{1}+2X_{77}^{1}+2X_{78}^{1}+2X_{79}^{1}+2X_{7,10}^{1}+2X_{7,11}^{1}+2X_{7,12}^{1}+X_{48}^{1}+\\
& 2X_{81}^{1}+2X_{82}^{1}+2X_{83}^{1}+2X_{84}^{1}+2X_{85}^{1}+2X_{86}^{1}+2X_{87}^{1}+2X_{88}^{1}+2X_{89}^{1}+2X_{8,10}^{1}+2X_{8,11}^{1}+\\
& 2X_{8,12}^{1}+X_{41}^{2}+2X_{11}^{2}+2X_{12}^{2}+2X_{13}^{2}+2X_{14}^{2}+2X_{15}^{2}+2X_{16}^{2}+2X_{17}^{2}+2X_{18}^{2}+2X_{19}^{2}+\\
& 2X_{1,10}^{2}+2X_{1,11}^{2}+2X_{1,12}^{2}+X_{42}^{2}+2X_{21}^{2}+2X_{22}^{2}+2X_{23}^{2}+2X_{24}^{2}+2X_{25}^{2}+2X_{26}^{2}+2X_{27}^{2}+\\
& 2X_{28}^{2}+2X_{29}^{2}+2X_{2,10}^{2}+2X_{2,11}^{2}+2X_{2,12}^{2}+X_{43}^{2}+2X_{31}^{2}+2X_{32}^{2}+2X_{33}^{2}+2X_{34}^{2}+2X_{35}^{2}+\\
& 2X_{36}^{2}+2X_{37}^{2}+2X_{38}^{2}+2X_{39}^{2}+2X_{3,10}^{2}+2X_{3,11}^{2}+2X_{3,12}^{2}+X_{45}^{2}+2X_{51}^{2}+2X_{52}^{2}+2X_{53}^{2}+\\
& 2X_{54}^{2}+2X_{55}^{2}+2X_{56}^{2}+2X_{57}^{2}+2X_{58}^{2}+2X_{59}^{2}+2X_{5,10}^{2}+2X_{5,11}^{2}+2X_{5,12}^{2}+X_{46}^{2}+2X_{61}^{2}+\\
& 2X_{62}^{2}+2X_{63}^{2}+2X_{64}^{2}+2X_{65}^{2}+2X_{66}^{2}+2X_{67}^{2}+2X_{68}^{2}+2X_{69}^{2}+2X_{6,10}^{2}+2X_{6,11}^{2}+2X_{6,12}^{2}+\\
& X_{47}^{2}+2X_{71}^{2}+2X_{72}^{2}+2X_{73}^{2}+2X_{74}^{2}+2X_{75}^{2}+2X_{76}^{2}+2X_{77}^{2}+2X_{78}^{2}+2X_{79}^{2}+2X_{7,10}^{2}+\\
& 2X_{7,11}^{2}+2X_{7,12}^{2}+X_{48}^{2}+2X_{81}^{2}+2X_{82}^{2}+2X_{83}^{2}+2X_{84}^{2}+2X_{85}^{2}+2X_{86}^{2}+2X_{87}^{2}+2X_{88}^{2}+\\
& 2X_{89}^{2}+2X_{8,10}^{2}+2X_{8,11}^{2}+2X_{8,12}^{2} \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

$$s.a.: \quad c_1 : X^1_{42} + Y^1_2 \geq 1 \tag{5.32}$$

$$c_2 : X^1_{43} + Y^1_3 \geq 1 \tag{5.33}$$

$$c_3 : X^2_{48} + Y^2_8 \geq 1 \tag{5.34}$$

$$c_4 : -Y^1_2 + Z^1_{26} + Z^1_{2,10} \geq 0 \tag{5.35}$$

$$c_5 : -Y^1_3 + Z^1_{37} + Z^1_{3,11} \geq 0 \tag{5.36}$$

$$c_6 : -Y^2_8 + Z^2_{85} + Z^2_{86} + Z^2_{87} \geq 0 \tag{5.37}$$

$$c_7 : -X^1_{46} + Z^1_{26} \leq 0 \tag{5.38}$$

$$c_8 : -X^1_{47} + Z^1_{37} \leq 0 \tag{5.39}$$

$$c_9 : -X^2_{45} + Z^2_{85} \leq 0 \tag{5.40}$$

$$c_{10} : -X^2_{46} + Z^2_{86} \leq 0 \tag{5.41}$$

$$c_{11} : -X^2_{47} + Z^2_{87} \leq 0 \tag{5.42}$$

$$c_{12} : -X^2_{2,10} + Z^1_{2,10} \leq 0 \tag{5.43}$$

$$c_{13} : -X^2_{3,11} + Z^1_{3,11} \leq 0 \tag{5.44}$$

$$c_{14} : -X^1_{45} + Z^1_{26} \leq 0 \tag{5.45}$$

$$c_{15} : -X^1_{47} + Z^1_{26} \leq 0 \tag{5.46}$$

$$c_{16} : -X^1_{48} + Z^1_{26} \leq 0 \tag{5.47}$$

$$c_{17} : -X^1_{45} + Z^1_{37} \leq 0 \tag{5.48}$$

$$c_{18} : -X^1_{46} + Z^1_{37} \leq 0 \tag{5.49}$$

$$c_{19} : -X^1_{48} + Z^1_{37} \leq 0 \tag{5.50}$$

$$c_{20} : -X^2_{41} + Z^2_{85} \leq 0 \tag{5.51}$$

$$c_{21} : -X^2_{42} + Z^2_{86} \leq 0 \tag{5.52}$$

$$c_{22} : -X^2_{43} + Z^2_{87} \leq 0 \tag{5.53}$$

$$c_{23} : X^i_{ab} \in \{0,1\}, Y^i_a \in \{0,1\}, Z^i_{ab} \in \{0,1\}, \forall i \in N,\ \forall a,b \in S \tag{5.54}$$

Nesse exemplo nosso modelo apresenta na função objetivo todas as mudanças de preferências possíveis entre estados do conflito para os dois decisores, porém não há necessidade de mudar a preferência de todos eles. De acordo com a condição $c_1$ apresentada na Equação 5.32, deve ser alterada a preferência entre o estado 4 e o estado 2 para o decisor 1 ou o estado 2 deve ser retaliado, de acordo com a condição $c_2$ apresentada na Equação 5.33, deve ser alterada a preferência entre o estado 4 e o estado 3 para o decisor 1 ou o estado 3 deve ser retaliado e de acordo com a condição $c_3$ apresentada na Equação 5.34, deve ser alterada a preferência entre o estado 4 e o estado 8 para o decisor 2 ou o estado 8 deve ser retaliado.

A restrição $c_4$ apresentada na Equação 5.35 informa que o estado 2 pode ser retaliado de forma que o decisor 1 não possa escapar e que essa retaliação deve ser feita pelos estados 6 e 10. As restrições $c_7$ apresentada na Equação 5.38 e $c_{12}$ apresentada na Equação 5.43 informam que os estados 6 e 10 respectivamente podem ser uma retaliação alterando (i) a preferência entre o estado 6 e o estado 4 (para serem indiferentes) para o decisor 1 e deve-se ainda eliminar as formas como o decisor 1 possa escapar dessa retaliação e (ii) entre o estado 10 e o estado 2 (alternando a preferência estrita) para o decisor 2 onde não há como o decisor 1 escapar dessa retaliação. As formas de escapar da retaliação prevenidas através das condições $c_{14}$, $c_{15}$ e $c_{16}$ apresentadas nas Equações 5.45, 5.46 e 5.47 respectivamente que seria alterando as preferências entre o estado 4 e os estados 5, 7 e 8 para o decisor 1 (para uma indiferença).

A restrição $c_5$ apresentada na Equação 5.36 informa que o estado 3 pode ser retaliado de forma que o decisor 1 não possa escapar e que essa retaliação deve ser feita pelos estados 7 e 11. As restrições $c_8$ apresentada na Equação 5.39 e $c_{13}$ apresentada na Equação 5.44 informam que os estados 7 e 11 respectivamente podem ser uma retaliação alterando (i) a preferência entre o estado 7 e o estado 4 (para serem indiferentes) para o decisor 1 e deve-se ainda eliminar as formas como o decisor 1 possa escapar dessa retaliação e (ii) entre o estado 11 e o estado 3 (alternando a preferência estrita) para o decisor 2 onde não há como o decisor 1 escapar dessa retaliação. As formas de escapar da retaliação prevenidas através das condições $c_{17}$, $c_{18}$ e $c_{19}$ apresentadas nas Equações 5.48, 5.49 e 5.50 respectivamente que seria alterando as preferências entre o estado 4 e os estados 5, 6 e 8 para o decisor 1 (para uma indiferença).

A restrição $c_6$ apresentada na Equação 5.37 informa que o estado 8 pode ser retaliado de forma que o decisor 2 não possa escapar e que essa retaliação deve ser feita pelos estados 5, 6 e 7. As restrições $c_9$ apresentada na Equação 5.40, $c_{10}$ apresentada na Equação 5.41 e $c_{11}$ apresentada na Equação 5.42 informam que os estados 5, 6 e 7 respectivamente podem ser uma retaliação alterando a preferência entre esses estados e o estado 4 para o decisor 2 e deve-se ainda eliminar as formas como o decisor 2 possa escapar dessas retaliações. As formas de escapar dessas retaliações são prevenidas através das condições $c_{20}$, $c_{21}$ e $c_{22}$, respectivamente. Por $c_{20}$ apresentada na Equação 5.51 pode-se alterar a preferência entre os estados 1 e 4 para o decisor 2, por $c_{21}$ apresentada na Equação 5.52 pode-se alterar a preferência entre os estados 2 e 4 para o decisor 2 e por $c_{23}$ apresentada na Equação 5.13 pode-se alterar a preferência entre os estados 3 e 4 para o decisor 2. A restrição $c_{23}$ apresentada na Equação 5.54 informa que as variáveis são booleanas.

Utilizamos os modelos de programação linear inteira apresentados em 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 e 4.3.4 e obtivemos os resultados expressos na Tabela 2.

| Conceitos de Equilíbrio | Custo Total da Manipulação | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NASH | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| GMR | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| SMR | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| SEQ | 3 | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| SSEQ | 3 | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| Estados | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Tabela 2 – Custos para tornar os estados um equilíbrio para o conflito

Os estados que possuem custo total da manipulação igual a zero para determinado conceito de equilíbrio são os estados que são equilíbrios para o conflito nesse conceito. No algoritmo de manipulação ótima proposto, esses resultados foram obtidos em um tempo de 1 segundo.

Podemos observar que nenhum estado é um equilíbrio de Nash porém com apenas o custo de 1 mudança de preferência os estados 3, 5 e 7 podem se tornar um equilíbrio de Nash. Por outro lado, o estado que tem o maior custo para se tornar um estado de equilíbrio é o estado 9.

Fazendo uma análise pelo ponto de vista da URSS e supondo que ela tenha interesse que os Estados Unidos Não realizem ataque e Não fazem o bloqueio, então os estados 1, 5 e 9 satisfazem esse interesse. Como vimos, o estado 5 pode ser manipulado a um custo de uma alteração nas preferências, sendo então mais interessante manipular o conflito para esse estado que os outros. Já analisando pelo ponto de vista do Estados Unidos e supondo que eles tenham interesse que a URSS retire os mísseis e Não evolua o conflito, então os estados 5, 6, 7 e 8 satisfazem esse interesse. Novamente o estado 5 mostra ser um estado interessante para essa suposição. Assumindo esse perfil de interesse para as opções dos decisores, o estado 5 se mostra como o de menor custo para solucionar o conflito.

## 5.4 Descrição do Conflito de Valores

Em linhas gerais, o Conflito de Valores, descrito por Hipel e Obeidi (2005), apresenta dois grupos com interesses conflitantes. O primeiro grupo consiste em defensores da globalização econômica por meio de acordos internacionais de livre comércio, como OMC e NAFTA, que defendem os princípios da economia global orientada para o mercado (GMDE), os quais afirmam que uma economia orientada para o mercado constitui um aparato crucial para trazer prosperidade, liberdade e democracia. Afirmam que o livre comércio leva à integração econômica e à estabilidade financeira em todo o mundo. Capitalizando em grandes escalas de produção e prestação de serviços, especialização e padronização, o livre comércio promete custos mais baixos para bens e serviços, bem como melhor qualidade de vida e maior prosperidade econômica. A Organização Mundial do Comércio (OMC) organiza fóruns econômicos para os governos negociarem, gerenciarem e controlarem políticas comerciais. Baseia-se em vários princípios atraentes, incluindo a não discriminação (tratamento igual dos parceiros comerciais), liberalização do mercado, transparência, previsibilidade e concorrência justa. Devido à sua estrutura, a OMC pode fornecer aos membros de países em desenvolvimento e menos desenvolvidos alavancar oportunidades não disponíveis fora da competência da OMC - como no caso de acordos comerciais bilaterais. Desde a sua criação em 1994, houve cinco Conferências Ministeriais da OMC, onde representantes de membros da OMC se reuniram para discutir questões-chave relacionadas a acordos de comércio e serviços. Possivelmente, a Conferência Ministerial mais importante e bem-sucedida foi a reunião de Doha, realizada em novembro de 2001. Como resultado de uma solicitação apresentada pela União Européia (UE), a Declaração de Doha reconheceu a importância de proteger o meio ambiente ao mesmo tempo em que promove livre comércio. Além disso, a Declaração pedia, pela primeira vez, que os países negociassem relações entre os acordos da OMC e os Acordos Ambientais Multilaterais. Muitos defensores do princípio do livre comércio não veem a necessidade de conciliar comércio e ambiente dentro do paradigma da OMC, que a pobreza é uma das principais razões para a degradação ambiental e a injustiça social, e que “os membros da OMC já estão contribuindo para o desenvolvimento sustentável e melhor proteção ambiental em todo o mundo” e acrescentam: “A liberalização do comércio pode ter um impacto positivo no meio ambiente, melhorando a alocação eficiente de recursos, promovendo o crescimento econômico e gerando receitas que podem ser utilizadas para fins ambientais".

O segundo grupo, denotado por SES, são pessoas e organizações cujos sistemas de valores priorizam a mordomia ambiental, o desenvolvimento sustentável, os direitos humanos, os princípios democráticos e outras questões relacionadas que são importantes para o bem-estar da sociedade. Sua posição é que o crescimento econômico, a proteção ambiental e a biodiversidade devam ser considerados concomitantemente, e a soberania dos governos não deve ser apropriada para as empresas transnacionais, estendendo os direitos ao acesso privado além dos direitos de seus próprios cidadãos. Eles não são contra o crescimento econômico como um meio de criar riqueza e bem-estar, mas são contra as práticas e intenções das empresas transnacionais e a nova economia global orientada para o mercado, que não consideram as necessidades dos pobres e a biodiversidade do meio ambiente. Afirmam ainda que a OMC é uma instituição não democrática e secreta, projetada para aumentar as fortunas dos países industrializados em detrimento dos países em desenvolvimento. Além disso, os críticos da OMC afirmam que, em vez de se beneficiarem da liberalização do comércio, muitos países em desenvolvimento que abriram seus mercados estão agora em pior situação. As regras de comércio internacional, como aquelas incorporadas aos acordos da OMC e ao NAFTA, influenciaram ou substituíram uma gama crescente de políticas e leis públicas implementadas pelos governos eleitos. De fato, ao assinar acordos comerciais internacionais, os governos tornaram a si mesmos e os cidadãos que os elegeram subservientes às corporações transnacionais e investidores estrangeiros e impediram sua capacidade de alcançar objetivos nacionais. Segundo os apoiadores da SES, os valores do GMDE estão proliferando em todas as sociedades, circunscrevendo sua soberania em questões-chave, que incluem desenvolvimento econômico, cultura, programas sociais e administração do ecossistema. A política externa da atual administração nos EUA é fornecer ajuda externa apenas aos países que adotam a democracia e a economia de mercado. Embora a grande maioria das pessoas seja a favor de países serem controlados por seus cidadãos por meio de eleições democráticas, pressionar deliberadamente os países democráticos ou não democráticos a adotarem um sistema econômico específico não é democrático. O mercado, por exemplo, pode produzir produtos de boa qualidade a baixo custo quando existe uma verdadeira concorrência, mas, como demonstrado pelo colapso da Enron, que era uma empresa internacional de serviços, o mercado pode não ser um mecanismo adequado para fornecer certos tipos de serviços públicos, incluindo abastecimento de água e manutenção de infraestrutura pública. No Reino Unido, por exemplo, a privatização de serviços públicos, como abastecimento e tratamento de água e o sistema ferroviário, resultou em cidadãos britânicos bebendo a água de pior qualidade na Europa Ocidental e possuindo um sistema ferroviário perigoso que funciona ineficazmente.

## 5.5 Modelagem do Conflito de Valores

Considere um tipo geral de conflito que agora está ocorrendo em todo o mundo nos níveis local, nacional e global entre os valores básicos do GMDE e os do SES. Na Tabela 3 é apresentada a lista as opções disponíveis para cada parte e os estados viáveis do conflito. A modelagem detalhada também pode ser encontrada em Hipel e Obeidi (2005). O GMDE tem três opções: **Influenciar** os estados a adotarem políticas econômicas orientadas pelo mercado, **promover** os ideais de globalização e internacionalização por meio da mídia que enfatizam a eficiência e a prosperidade das sociedades que se integram aos acordos globais de livre comércio e **reformar** a OMC para que o ambiente seja tratado como uma confiança pública e não como uma mercadoria. O SES tem três opções principais: Promover a **educação** pública que promova a integridade ambiental, a responsabilidade social e de alertar para os perigos de sucumbir aos valores do GMDE, pressionar, por intermédio de **lobistas**, os governos a incorporar preocupações ambientais, ecossistêmicas e outras preocupações sociais nos acordos de livre comércio e **pressionar** os negociadores comerciais a considerarem mais preocupações sociais em sua agenda.

Na Figura 5 apresentamos as relações de preferências entre os estados para os decisores.

| GMDE | | SES |
|---|---|---|
| (3,4) | Mais preferível | (10,20) |
| (13,14) | | (5,15) |
| (8,9) | | (16,18) |
| (18,19) | | (33,35) |
| (1,2) | | (6,8) |
| (11,12) | | (25,27) |
| (6,7) | | (11,13) |
| (16,17) | | (29,31) |
| (23,24) | | (1,3) |
| (31,32) | | (21,23) |
| (27,28) | | (17,19,34,36) |
| (35,36) | | (7,9,26,28) |
| (21,22) | | (12,14,30,32) |
| (29,30) | | (2,4,22,24) |
| (25,26) | | |
| (33,34) | | |
| (5,10,15,20) | Menos preferível | |

Figura 5 – Relações de preferências entre os estados do Conflito de Valores

| Decisores | Opções | Estados | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| | 1. Influenciar | N | S | N | S | N | N | S | N | S | N | N | S |
| GMDE | 2. Promover | N | N | S | S | N | N | N | S | S | N | N | N |
| | 3. Reformar | N | N | N | N | S | N | N | N | N | S | N | N |
| | 4. Educar | N | N | N | N | N | S | S | S | S | S | N | N |
| SES | 5. Lobby | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | S | S |
| | 6. Pressionar | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N |

| Decisores | Opções | Estados | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| | 1. Influenciar | N | S | N | N | S | N | S | N | N | S | N | S |
| GMDE | 2. Promover | S | S | N | N | N | S | S | N | N | N | S | S |
| | 3. Reformar | N | N | S | N | N | N | N | S | N | N | N | N |
| | 4. Educar | N | N | N | S | S | S | S | S | N | N | N | N |
| SES | 5. Lobby | S | S | S | S | S | S | S | S | N | N | N | N |
| | 6. Pressionar | N | N | N | N | N | N | N | N | S | S | S | S |

| Decisores | Opções | Estados | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| | 1. Influenciar | N | S | N | S | N | S | N | S | N | S | N | S |
| GMDE | 2. Promover | N | N | S | S | N | N | S | S | N | N | S | S |
| | 3. Reformar | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N |
| | 4. Educar | S | S | S | S | N | N | N | N | S | S | S | S |
| SES | 5. Lobby | N | N | N | N | S | S | S | S | S | S | S | S |
| | 6. Pressionar | S | S | S | S | S | S | S | S | S | S | S | S |

Tabela 3 – Estados Viáveis do Conflito de Valores

## 5.6 Análise de Estabilidade e Custos para Manipulações de Preferência no Conflito de Valores

Em posse das acessibilidades e das relações de preferências criamos as matrizes de acessibilidade e de preferências para os dois decisores e utilizando os modelos de programação linear inteira apresentados em 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 e 4.3.4 obtivemos os resultados expressos na Tabela 4. Novamente os estados com custo zero para determinada definição de equilíbrio significa que esse estado já é estável nessa definição.

Já no Conflito de Valores, os estados 18, 19 e 36 já são equilíbrios de Nash. Uma análise de qual estado é mais interessante manipular depende da perspectiva de cada decisor ou até mesmo de um interventor externo. Novamente os resultado foram obtidos em um tempo muito curto, aproximadamente de 2 segundos mostrando a eficiência da nossa proposta de

| Equilíbrio | Custo Total da Manipulação | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nash | 8 | 8 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | 4 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | 0 |
| GMR | 0 | 6 | 0 | 6 | 4 | 0 | 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| SMR | 0 | 6 | 0 | 6 | 4 | 0 | 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| SEQ | 0 | 6 | 6 | 6 | 4 | 0 | 2 | 2 | 2 | 4 | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | 0 |
| SSEQ | 0 | 6 | 6 | 6 | 4 | 0 | 2 | 2 | 2 | 4 | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | 0 |
| Estados | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| Equilíbrio | Custo Total da Manipulação | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| NASH | 0 | 4 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| GMR | 0 | 4 | 2 | 8 | 0 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 2 | 6 | 0 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| SMR | 0 | 4 | 2 | 8 | 0 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 2 | 6 | 0 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| SEQ | 0 | 4 | 2 | 8 | 7 | 6 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 | 6 | 5 | 4 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| SSEQ | 0 | 4 | 2 | 8 | 7 | 6 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 | 6 | 5 | 4 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| Estados | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |

Tabela 4 – Custos para tornar os estados um equilíbrio para o Conflito de Valores

modelo para manipulação de conflitos aplicado a um conflito com 36 estados onde o modelo da busca exaustiva não seria capaz de apresentar um resultado satisfatório em tempo viável.

# 6 CONCLUSÕES E DIREÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentado o problema da manipulação ótima de preferências para a obtenção de uma solução num conflito bilateral. Inicialmente apresentados os conceitos necessários para a formulação do problema dentro do modelo de grafo para resolução de conflitos, depois o problema foi formulado e exemplificado e, logo em seguida, foi analisada sua complexidade em relação a outro problema computacional clássico, o HSP. Posteriormente foi apresentado um algoritmo de busca exaustiva que gerava todas as matrizes de preferência possíveis e buscava as matrizes que resolviam o problema porém em um tempo bastante elevado já para um conflito de 5 estados.

Uma abordagem lógica foi utilizada para ajudar a estabelecer restrições em um modelo de otimização linear inteira que apresentamos para encontrar de forma mais eficiente uma solução ótima para o problema proposto. Os modelos apresentados resolvem o problema para o critério de agregação do custo total para os cinco principais conceitos de estabilidade.

O modelo proposto apresentou desempenho satisfatório em expor uma solução ótima para o Conflito da Crise dos Mísseis Cubanos que pode ser modelado como um conflito bilateral com 12 estados viáveis. A solução para tornar qualquer um dos estados um equilíbrio para o conflito é exibido na Tabela 2 e foi obtido quase que instantaneamente.

Também aplicamos o modelo proposto para o Conflito de Valores que pode ser modelado como um conflito bilateral com 36 estados viáveis. Novamente o modelo proposto apresentou desempenho satisfatório em exibir uma solução ótima para esse conflito e o custo para tornar qualquer um dos estados um equilíbrio para o conflito é exibido na Tabela 4 e mais uma vez foi obtido quase que instantaneamente.

Os algoritmos apresentados foram implementados em linguagem C, usando o RStudio (para a busca exaustiva) e o CPLEX (para o algoritmo da manipulação ótima). Uma interface usando o QT Creator foi adicionada para o segundo modelo a fim de tornar mais fácil inserir os dados de entrada no problema.

Por fim, gostaríamos de apresentar alguns pontos que ainda estão em aberto no contexto deste trabalho e merecem um estudo mais aprofundado:

1. Implementar um custo diferenciado para cada alteração em uma relação de preferência? Esse custo pode ser obtido por meio do vetor *payoff*, por exemplo;
2. Apresentar um modelo que resolva o problema da manipulação ótima de preferências para conflitos com múltiplos decisores e estabilidade para coalizões;

3. Implementar computacionalmente outros critérios de agregação de custo e critérios múltiplos, tendo um critério primário e outro secundário;
4. Resolver o problema para o caso de preferências transitivas e até mesmo para outras estruturas de preferências, como preferências probabilísticas ou preferências nebulosas (*fuzzy*);
5. Testar o modelo proposto para grafos de preferências com muitos vértices e de densidades de arestas variadas e comparar com outros algoritmos que resolvem o HSP.

# REFERÊNCIAS


ALLISON, G.; ZELIKOW, P. **Essence of Decision: Explaining the Cuban Missile Crisis**. Longman, 1999. (Alternative Etext Formats). ISBN 9780321013491. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=aSk3ek0t54EC>.

BARTHOLDI, I. J. J.; TOVEY, C. A.; TRICK, M. A. Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election. Social Choice and Welfare - Springer - Verlag, p. 157–165, 1989.

BERCOVITCH, J.; GARTNER, S. S. **International conflict mediation: new approaches and findings**. [S.l.]: Routledge. New York, NY, USA, 2008.

BROWN, F. M. **The Logic of Boolean Equations**. [S.l.]: Kluwer Academir Publishers, 1990.

COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In Proceedings of the Third IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science, p. 151–158, 1971.

FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. The graph model for conflicts. Pergamon Journals LTD., v. 23, n. 1, p. 41–55, 1987.

FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. **Interactive decision making: the graph model for conflict resolution**. [S.l.]: John Wile & Sons, INC., 1993.

FINLAY, P. N. Introducing decision support systems. NCC Blackwell, 1994.

FRASER, N.; HIPEL, K. **Conflict analysis: models and resolutions**. North-Holland, 1984. (North-Holland series in system science and engineering). ISBN 9780444009210. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=kBVPAAAAMAAJ>.

FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. Solving complex conflicts. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, v. 9, n. 12, p. 805–816, 1979.

FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. Dynamic modelling of the cuban missile crisis. **Conflict Management and Peace Science**, v. 6, n. 2, p. 1–18, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/073889428300600201>.

GAREY, D. S. J. M. R. **Computer and intractability: a guide to the theory of NP-completeness**. [S.l.]: W.H.Freeman Co Ltd, 1979. (A Series of books in the mathematical sciences). ISBN 9780716710448,0716710447.

HIPEL, K. W.; OBEIDI, A. Trade versus the environment: Strategic settlement from a systems engineering perspective. **Systems Engineering**, v. 8, n. 3, p. 211–233, 2005. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/sys.20031>.

HOWARD, N. **Paradoxes of Rationality: Theory of Metagames and Political Behavior**. [S.l.]: MIT Press,Cambridge, MA, USA, 1971.

KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations. New York: Plenum., 1972.

KEMENY, J. G.; SNELL, J. **Mathematical Models in the Social Sciences**. [S.l.]: MIT Press, 1972.

KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W.; FANG, L.; PENG, X. J. Coalition analysis in group decision support. Group Decision and Negotiation 10, 2001.

KINSARA, R. A.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. Inverse approach to the graph model for conflict resolution. IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS: SYSTEMS, v. 45, n. 5, 2015.

KINSARA, R. A.; PETERSONS, O.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. Advanced decision support for the graph model for conflict resolution. Journal of Decision Systems, v. 10, n. 2, p. 117–145, 2015.

NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. National Academy of Sciences, v. 36, n. 1, p. 48–49, 1950.

PENG, X. J. **A decision support system for conflict resolution**. Tese (Doutorado) — University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1999.

ROBBINS, S. P. **Organization Theory: Structures, Designs, and Applications**. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1990. ISBN 0136424716,9780136424710.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Symmetric sequential stability in the graph model for conflict resolution with multiple decision makers. Group Decision and Negotiation, Springer, p. 1–18, 2016.

WU, Z.; XU, H.; KE, G. Y. Third party interventions for the conflict between hospital and patient based on option prioritization. Group Decision and Negotiation - GDN, p. 194–198, 2018.

XU, H.; HIPEL, K. W.; FELLOW; IEEE; KILGOUR, D. M. Matrix representation of conicts with two decision-makers. 2007 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics,Montreal, Que., Canada, 2007.

XU, H.; LI, K. W.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. A matrix-based approach to searching colored paths in a weighted colored multidigraph. Applied Mathematics and Computation, v. 215, n. 1, p. 353–366, 2009.

ZARATÉ, P.; CAMILLERI, G.; KAMISSOKO, D.; AMBLARD, F. **Group Decision and Negotiation 2014 GDN 2014: Proceedings of the Joint International Conference of the INFORMS GDN Section and the EURO Working Group on DSS**. EWG-DSS, 2014. 200-207 p. ISBN 9782917490273. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=gA_GBgAAQBAJ>.