UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JUNIOR DA SILVA BESSA

O FUNCIONAL DE WILLMORE E SUA INVARIÂNCIA CONFORME

FORTALEZA
2020

JUNIOR DA SILVA BESSA

O FUNCIONAL DE WILLMORE E SUA INVARIÂNCIA CONFORME

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise Geométrica.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B465f Bessa, Junior da Silva.
O funcional de Willmore e sua invariância conforme. / Junior da Silva Bessa. – 2020.
73 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

1. Funcional de Willmore. 2. Invariância conforme. 3. Energia de Willmore. I. Título.

CDD 510

JUNIOR DA SILVA BESSA

O FUNCIONAL DE WILLMORE E
SUA INVARIÂNCIA CONFORME

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise Geométrica.

Aprovoda em: 20 / 02 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Profª. Dra. Maria Cristiane Magalhães Brandão
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus e à todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

A Deus antes de tudo, pela oportunidade e pela força que me deu para realizar esse trabalho que a priori era um sonho muito distante, mas com o poder Dele se tornou mais do que possível.
À minha esposa Isaelly Brito e a minha filha Thalita, por estarem juntas comigo nessa jornada de estudos.
À minha família e a família da minha esposa por todo apoio e mobilização para me ajudarem a ter as melhores condições possíveis para a realização do curso do mestrado.
Ao Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro, pela esplendorosa orientação, sempre com muita calma, serenidade e com toda sua experiência. Além de tudo isso, agradeço por sua assiduidade nessa dissertação, fato imprescindível para esse trabalho.
À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.
Aos professores participantes da banca examinadora o meu orientador o Professor Dr. José Fábio Bezerra Montenegro, aos professores Dr. Cleon da Silva Barroso, Dr. Leo Ivo da Silva Souza e a professora Dra. Maria Cristiane Magalhães Brandão pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.
Aos professores do Departamento de Matemática da UFC com os quais cursei as disciplinas necessárias para o curso do mestrado e os demais professores que não cursei disciplinas mas me ajudaram no mestrado, seja com orientações ou dúvidas.
Ao meu amigo Wanderley pela força em muitos momentos no mestrado. Ao meu amigo Edilson pela força em alguns momentos na caminhada do mestrado. Aos colegas da turma de mestrado e do doutorado, pelas reflexões, críticas e sugestões.
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Pois eu sou o Senhor, o seu Deus, que o segura pela mão direita e diz a você: Não tema; eu o ajudarei. Is 41,13"

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos o funcional de Willmore para uma superfície S diferenciável, fechada e orientável, além disso, proveremos a invariância desse funcional por transformações conformes do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Para alcançar tais objetivos, primeiramente explanamos alguns conceitos e resultados preliminares, julgados necessários, para o entendimento do conteúdo principal do trabalho. Após essa explanação, definiremos o funcional de Willmore e mostraremos algumas propriedades sobre esse funcional, dentre elas a invariância por transformações conformes de $\mathbb{R}^3$. E por fim, apresentaremos duas generalizações para esse funcional. A primeira, é o funcional de Willmore de dimensão n com $n \geq 3$, enquanto a segunda, é o funcional de Willmore relativo a uma variedade Riemanniana $M^n (n \geq 3)$ e provaremos que essa última generalização é invariante sob mudanças conformes de métrica.

Palavras-chave: Funcional de Willmore. Invariância conforme. Energia de Willmore.

ABSTRACT

In the paper, we study the Willmore funcional for a differentiable, closed and orientable surface S, moreover, we prove the invariance of this functional under conformal transformations of Euclidean space $\mathbb{R}^3$. To achieve these objectives, we first explain some concepts and preliminary, deemed necessary, to understand the main content of the paper. After this explanation, we will define the Willmore functional and we will show some properties about this functional, among them, the invariance under conformal transformations of $\mathbb{R}^3$. And per finally, we will present two generalizations for this functional. This first, is the Willmore functional of dimension n, while the second is the Willmore functional relative to an Riemannian manifold $M^n (n \geq 3)$ and we will prove that the latter generalization is invariant under conformal changes of the metric.

Keywords: Willmore functional. Conformal invariance. Willmore energy.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 1965, o geômetra inglês Thomas James Willmore, conjecturou que qualquer toro T imerso no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ goza da seguinte propriedade

$$\int_T H^2 dA \geq 2\pi^2,$$

onde H é função curvatura média em T e dA é o elemento de área induzido pela imersão (Ver [WILLMORE (1965)]). A famosa conjectura de Willmore foi resolvida por Codá e Neves no ano 2012 em [MARQUES e NEVES (2013)]. Em geral, dada uma superfície de classe C^∞, fechada e orientável S imersa em $\mathbb{R}^3$ associamos o valor

$$W(S) := \int_S H^2 dA$$

chamado a energia de Willmore da superfície S, onde H é a curvatura média de S e dA o elemento de área.

Nesse contexto, apresentaremos o funcional de Willmore de uma superfície de classe C^∞, fechada e orientável S, que associa a cada imersão $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o número real

$$\mathcal{W}(f) := \int_S H^2 dA.$$

O funcional de Willmore surge de forma natural em outras ciências, como o estudo das membranas celulares na biomatemática [TODA e ATHUKORALAGE (2013)] e no estudo das conchas elásticas descrito em [POISSON (1814)]. Além disso, o funcional de Willmore está relacionado no estudo de alguns problemas na própria matemática, um exemplo é o problema que Vieira estudou em [VIEIRA (2019)] sobre o primeiro autovalor do operador de Laplace penalizado pela curvatura média, na área da análise geométrica, onde é de grande utilidade no trabalho uma variação do funcional de Willmore. Visto isso, o funcional de Willmore é, de fato, uma ferramenta muito importante para o estudo de vários fenômenos em várias áreas.

Além de apresentar o funcional de Willmore descrito acima, exploraremos algumas propriedades dele, como algumas estimativas para os valores do funcional, dentro de certas hipóteses e a propriedade que caracteriza fortemente o funcional de Willmore, a sua invariância por transformações conformes que é o Teorema de Blaschke.

E por fim, exibiremos duas generalizações do funcional de Willmore. A primeira é o funcional de Willmore de dimensão $n(n \geq 3)$ que a cada imersão $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ associa a quantidade

$$\mathcal{W}_n(f) := \int_S \|\vec{H}\|^2 dA_g,$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média da imersão e dA_g é o elemento de volume de S da métrica g em S induzida pela imersão f. Já a segunda generalização é o funcional de Willmore relativo a uma n-variedade Riemanniana (M, g) com $n \geq 3$, o qual associa a cada imersão $f : S \longrightarrow M$ o valor

$$\mathcal{W}_M(f) := \int_S (\|\vec{H}\|^2 + K_M^S) dA_g,$$

aqui $\vec{H}$ é o vetor curvatura média da imersão, K_M^S a curvatura seccional em M relativa ao plano tangente de S e dA_g é o elemento de volume em S da métrica induzida pela imersão.

Após essa introdução, a dissertação está divida em mais 4 capítulos. No Capítulo 2, explanaremos sobre alguns conceitos e resultados sobre variedades diferenciáveis, variedades Riemannianas e alguns resultados de outras áreas que julguemos necessários para o entendimento desse trabalho. Já o Capítulo 3, definiremos o funcional de Willmore, exploraremos algumas propriedades sobre ele e provaremos o Teorema de Blaschke. O Capítulo 4 dedicamos a explanar sobre duas generalizações do funcional de Willmore descritas acima junto com o resultado que é uma espécie de generalização da invariância conforme do funcional de Willmore, o qual afirma que o funcional de Willmore relativo a uma variedade Riemanniana é invariante sob mudanças conformes de métrica.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Nesse capítulo, apresentaremos os pré-requisitos que julgamos necessários para a exposição dos resultados e definições dos capítulos subsequentes deste trabalho. Vale ressaltar que, omitiremos grande parte das demonstrações dos resultados presentes nesse capítulo, mas sempre que ocorrer tal fato, serão indicadas as referências para encontrar as demonstrações omitidas. Além das referências citadas nesse capítulo, para mais detalhes sobre alguns conceitos aqui expostos veja, [KUWERT e SCHÄTZLE (1945)], [LIMA (2015)] e [WILLMORE (1982)].

2.1 Variedades Diferenciáveis

Começaremos com a definição de variedade topológica e depois daremos uma estruturação a esses objetos que estudaremos adiante, junto com uma explanação de conceitos necessários para o decorrer do trabalho.

Definição 2.1 *(**Variedade Topológica**) Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n ou simplesmente uma n-variedade topológica se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

i) M é um espaço de Hausdorff, isto é, para todo par de pontos distintos $x, y \in M$ existem subconjuntos abertos $U, V \subset M$ disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$.

ii) M satisfaz o 2^o Axioma de Enumerabilidade, ou seja, a topologia de M admite uma base enumerável.

iii) M é localmente euclidiano de dimensão n. Isto quer dizer que para todo $x \in M$, existem $U \subset M$ vizinhança aberta de x, $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi : U \longrightarrow V$ homeomorfismo.

Observação 2.2 *Às vezes também usaremos a notação M^n para dizer que M é uma variedade topológica de dimensão n.*

Definição 2.3 *Seja M uma n-variedade topológica. Uma carta coordenada (ou simplesmente uma carta) em M é um par (U, φ), onde U é um aberto em M e $\varphi : U \longrightarrow \widehat{U}$ é um homeomorfismo entre U e $\widehat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Observações 2.4 *A respeito da definição acima:*

i) Sendo M uma n-variedade topológica, por definição para cada ponto $p \in M$ temos uma carta (U, φ) com $p \in U$. Por outro lado, dada uma carta (U, φ) dizemos que U é um domínio coordenado ou vizinhança coordenada. Já a aplicação φ é denominada aplicação coordenada (local) e se escrevermos $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ dizemos que φ_i são as coordenadas locais em U.

ii) Para algumas definições mais adiante, podemos olhar para o homeomorfismo inverso $\psi = \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$ de uma carta (U, φ) centrada em $p \in M$, onde nesse caso chamaremos U apenas de vizinhança coordenada em p e ψ de uma parametrização *de M em p.*

Definição 2.5 *Seja M uma n-variedade topológica. Dadas duas cartas (U, φ) e (V, ψ) em M tais que $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicação composta $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ é chamada de aplicação de transição de φ para ψ.*

Para o que segue, relembremos que dados $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, uma aplicação $F : U \longrightarrow V$ é dita suave(ou de classe C^∞ ou infinitamente diferenciável) se cada uma das m funções componentes de F possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Além disso, se F é uma bijeção e sua aplicação inversa $F^{-1} : V \longrightarrow V$ também for suave dizemos que F é um difeomorfismo.

Definição 2.6 *Duas cartas (U, φ) e (V, ψ) em uma n-variedade topológica M são ditas suavemente compatíveis(ou compatíveis) quando $U \cap V = \emptyset$ ou quando a aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo entre os abertos $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ de $\mathbb{R}^n$.*

Definição 2.7 *Definimos um atlas para uma variedade topológica M^n como uma coleção $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in L\}$(L conjunto de índices) de cartas em M tais que $M = \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$. Além disso, $\mathcal{A}$ é dito suave(ou diferenciável) se quaisquer duas cartas em $\mathcal{A}$ são compatíveis.*

Definição 2.8 *Um atlas suave $\mathcal{A}$ em uma n-variedade topológica M é dito maximal se não existe atlas suave para M que contém $\mathcal{A}$ propriamente. Quando $\mathcal{A}$ é um atlas maximal para M, dizemos que M tem uma estrutura suave(ou diferenciável).*

Observação 2.9 *Ás vezes também chamamos um atlas maximal de completo.*

Definição 2.10 (Variedade diferenciável) *Uma n-variedade diferenciável(ou suave) é um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é uma n-variedade topológica e $\mathcal{A}$ é um atlas maximal para M.*

Observações 2.11

(a) Por simplicidade, às vezes usaremos o termo "n-variedade"ou "n-variedade de classe C^∞"em vez do termo "n-variedade diferenciável".

(b) Também por simplicidade usaremos,às vezes, o termo "M é uma variedade diferenciável", omitindo a estrutura diferenciável em M e sua dimensão.

(c) Se M é uma variedade diferenciável, qualquer carta (U, φ) contido na estrutura suave em M é denominada carta suave,e a aplicação coordenada é dita aplicação coordenada suave. Analogamente, também dizemos que U é domínio coordenado suave.

Definição 2.12 *Dizemos que S é uma superfície de classe C^∞(ou superfície diferenciável) quando S é uma 2-variedade diferenciável.*

Para a próxima definição, consideremos o semi-espaço fechado superior n-dimensional $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \cdots), x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Observe que o interior e o bordo de $\mathbb{H}^n$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}\mathbb{H}^n &= \{(x_1, \cdots), x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \\ \partial\mathbb{H}^n &= \{(x_1, \cdots), x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} \end{aligned}$$

Definição 2.13 *Dizemos que um espaço topológico M é uma variedade topológica de dimensão n com bordo ou simplesmente uma n-variedade topológica com bordo quando:*

(i) M é um espaço de Hausdorff.

(ii) M satisfaz o 2º Axioma de Enumerabilidade.

(iii) Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança V de p que é homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^n$ ou a um aberto (relativo) de $\mathbb{H}^n$

Observações 2.14 *Sobre a definição acima:*

(a) Como na definição de variedade topológica o aberto $U \subset M$ junto com o homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow \widehat{U}$ (onde $\widehat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ ou um aberto(relativo) de $\mathbb{H}^n$) é chamado de uma carta para M. Quando for precisa a distinção, diremos que (U, φ) é uma carta interior(respectivamente, carta de bordo), quando $\varphi(U)$ for um aberto de $\mathbb{R}^n$(respc. aberto(relativo) de $\mathbb{H}^n$ tal que $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$).

(b) Um ponto $p \in M$ é dito ponto interior de M quando p está no domínio de alguma carta interior. Por outro lado, p é dito ponto de bordo se p está contido em alguma carta de bordo (U, φ) com $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$.

(c) O bordo de M(no sentido de variedade) é o conjunto ∂M de todos os pontos de bordo de M. Já o interior de M(no sentido de variedade) é o conjunto $IntM$ constituído por todos os pontos interiores de M.

(d) Dadas duas cartas (U, φ) e (V, ψ) em M tais que $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicação composta $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ é dita a aplicação de transição de φ para ψ.

Proprosição 2.15 (Invariância Topológica do Bordo) *Se M é uma variedade topológica com bordo, então cada ponto de M é um ponto de bordo ou é um ponto interior, mas não ambos. Portanto, $\partial M \cap IntM = \emptyset$ e $M = \partial M \cup IntM$.*

Prova: Ver LEE (2013) Teorema 1.37, pág. 26. ■

Observação 2.16 *Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que uma aplicação $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é suave(de classe C^∞) se para cada $p \in X$ existe um aberto U_p de p tal que existe $\widehat{f} : U_p \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ aplicação suave tal que $\widehat{f}|_{U_p \cap A} = f$.*

Definição 2.17 *Seja M uma n-variedade topológica com bordo. Como nas variedades topológicas dizemos que duas cartas (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis se $U \cap V = \emptyset$ ou se a aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo. Um atlas suave(ou uma estrutura suave) para M é uma coleção $\mathcal{A}$ de cartas que são duas a duas compatíveis. Além disso, $\mathcal{A}$ é dito maximal se não exite nenhum atlas suave para M que contenha $\mathcal{A}$ propriamente.*

Definição 2.18 *Uma variedade suave(diferenciável) com bordo é um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é uma n-variedade topológica com bordo e $\mathcal{A}$ é uma estrutura suave para M.*

Definição 2.19 *Uma variedade M é dita fechada quando M é um espaço topológico compacto e uma variedade sem bordo(isto é, $\partial M = \emptyset$).*

Definição 2.20 (Aplicações diferenciáveis em variedades) *Seja M uma n-variedade diferenciável. Dizemos que uma aplicação $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável(ou suave), se para cada $p \in M$ existe uma carta suave (U, φ) para M com $p \in U$ tal que a aplicação $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é suave no sentido de aplicações entre subconjuntos dos espaços euclidianos. Se M é uma variedade com bordo, definimos da mesma forma acima o conceito de uma aplicação $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ser diferenciável, exceto que a imagem $\varphi(U)$ pode ser um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ e neste último caso, entendemos a suavidade da aplicação $f \circ \varphi^{-1}$ como na Observação* 2.16.

Observações 2.21 *1) Na definição acima, a aplicação $\widehat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ é chamada de representação coordenada de f.*
2) O conjunto de todas as funções diferenciáveis $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas em uma variedade diferenciável M será denotado por $C^{\infty}(M)$.

Definição 2.22 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $F : M \longrightarrow N$ é diferenciável(ou suave), se para cada $p \in M$, existem cartas suaves (U, φ) para M, $p \in U$, (V, ψ) para N satisfazendo $F(U) \subset V$ e tal que a aplicação composta $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ é suave. Ademais, se M e N são variedades diferenciáveis com bordo a definição de $F : M \longrightarrow N$ se diferenciável é a mesma acima, ressaltando que, a aplicação $\widehat{F}$ tem domínio em um subconjunto de $\mathbb{H}^n$ enquanto a suavidade dela será olhada como uma aplicação cujo contradomínio será olhado como subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Finalmente, a aplicação $\widehat{F}$ é chamada de representação local para F*

Observação 2.23 *A definição de aplicação suave entre variedades diferenciáveis, independe das cartas suaves que tomarmos, desde que faça sentido a composição da representação local. Isso é verdade pela compatibilidade das cartas suaves.*

Observação 2.24 *Até o final desse capítulo, salvo menção, omitiremos o termo "com ou sem bordo"quando nos referirmos a uma variedade.*

Definição 2.25 *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $F : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo, quando F é uma bijeção diferenciável, cuja inversa $F^{-1} : N \longrightarrow M$ também é diferenciável.*

Proprosição 2.26 *Toda aplicação suave é contínua. Mais precisamente, para toda aplicação suave $F : M \longrightarrow N$ entre duas variedades diferenciáveis M e N(podendo $N = \mathbb{R}^k$), tem-se que F é uma aplicação contínua.*
Prova: Ver LEE (2013), Proposição 2.4, pág. 34. ■

Proprosição 2.27 *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis. As seguintes afirmações são verdadeiras:*
(a) Toda aplicação constante $c : M \longrightarrow N$ é diferenciável.
(b) A aplicação identidade $Id : M \longrightarrow M$ é diferenciável.
(c) Se $F : M \longrightarrow N$ e $G : N \longrightarrow P$ são duas aplicações diferenciáveis, então a aplicação composta $G \circ F : M \longrightarrow P$ também é diferenciável.
Prova: De fato,
(a) Segue imediato da definição.

(b) Seja $p \in M$. Escolhamos uma carta (U, φ) de tal sorte que $p \in U$. Então, a aplicação $\widehat{Id}\varphi \circ Id \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \varphi(U)$ é suave pois,

$$\widehat{Id}(x) = (\varphi \circ Id \circ \varphi^{-1})(x) = \varphi(Id(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x, \ \forall x \in \varphi(U).$$

Ou seja, $\widehat{Id} = Id|_{\varphi(U)}$ é a restrição ao aberto $\varphi(U)$ da aplicação identidade do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ a qual sabemos que é suave, onde n é a dimensão da variedade M. Portanto, Id é uma aplicação suave.
(c) Ver LEE (2013), Proposição 2.10 item (d), pág.37. ∎

Relembremos que dada uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em um espaço topológico M, o suporte de f é por definição o fecho do conjunto dos pontos de M tal que f não é nula, em símbolos,

$$suppf = \overline{\{p \in M; f(p) \neq 0\}}.$$

Por outro lado,uma cobertura $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de um espaço topológico M é dita localmente finita se para cada ponto de M existe uma vizinhança aberta V desse ponto tal que $V \cap U_\alpha$ apenas para um número finito de índices $\alpha \in A$.

Definição 2.28 *Sejam M uma variedade diferenciável e $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta para M indexada. Uma partição da unidade subordinada a cobertura $\mathcal{F}$ é uma família $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de funções contínuas $f_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes propriedades:*
(i) $0 \leq f_\alpha(x) \leq 1$ para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in M$.
(ii) $suppf_\alpha \subset F_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.
(iii) A família $\{suppf_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é localmente finita.
(iv) $\displaystyle\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in M$.
Além disso, dizemos que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma partição diferenciável da unidade subordinada a cobertura $\mathcal{F}$ quando cada uma das funções f_α é diferenciável.

Teorema 2.29 (Existência de Partição da Unidade) *Suponha que M é uma variedade diferenciável e $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura indexada de abertos para M. Então, existe uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $\mathcal{F}$.*
Demonstração: Ver LEE (2013), Teorema 2.23, pág. 43. ∎

Definição 2.30 *Sejam M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Uma derivação em p é uma aplicação linear $v : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf, \ \forall f, g \in C^\infty(M).$$

O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em p, será denotado por T_pM e será chamado de espaço tangente de M em p. Cada $v \in T_pM$ é chamado de vetor tangente em p.

Observação 2.31 *Com as operações usuais,*

$$\begin{aligned}(v+w)f &= vf + wf,\ \forall f \in C^\infty(M), v, w \in T_pM \\ (\lambda v)f &= \lambda(vf),\ \forall f \in C^\infty(M), v \in T_pM,\end{aligned}$$

o conjunto T_pM é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Definição 2.32 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável, para cada $p \in M$ definimos a aplicação*

$$dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,$$

a qual chamaremos a diferencial de F no ponto p, que associa a cada vetor tangente em p (derivação em p) $v \in T_pM$ o vetor tangente $dF_p(v) \in T_{F(p)}N$ em $F(p)$ satisfazendo a seguinte regra

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F),\ \forall f \in C^\infty(N).$$

Observação 2.33 *A aplicação acima está bem definida. Com efeito, para cada função $f \in C^\infty(N)$ temos pela diferenciabilidade da aplicação F que $f \circ F \in C^\infty(M)$ e assim faz sentido a expressão $dF_p(v)(f) = v(f \circ F)$. E por v ser uma derivação em p, segue imediatamente que $dF_p(v)$ é uma derivação em $F(p)$, uma vez que,*

$$\begin{aligned}dF_p(v)(fg) &= v((fg)\circ F) = v((f\circ F)(g \circ F)) = (f\circ F)(p)v(g\circ F) + \\ &+ (g \circ F)(p)v(f\circ F) = f(F(p))dF_p(v)g + g(F(p))dF_p(v)f,\end{aligned}$$

para todos $f, g \in C^\infty(N)$. Já a linearidade de $dF_p(v)$ segue imediatamente da linearidade de v. Assim, a diferencial está bem definida.

Proprosição 2.34 *Consideremos M, N e P variedades diferenciáveis, $F : M \longrightarrow N$ e $G : N \longrightarrow P$ aplicações diferenciáveis. Para cada $p \in M$ temos:*

(a) $dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ é uma transformação linear.

(b) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \longrightarrow T_{(G\circ F)(p)}P$.

(c) $d(Id_M)_p = Id_{T_pM} : T_pM \longrightarrow T_pM$

(d) Se F é um difeomorfismo, então $dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ é um isomorfismo e vale $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Prova: (a)Sejam $v, w \in T_pM$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos por T_pM ser espaço vetorial que

$$\begin{aligned}dF_p(v+w)(f) &= (v+w)(f\circ F) = v(f \circ F) + w(f \circ F) \\ &= dF_p(v)(f) + dF_p(w)(f), \forall f \in C^\infty(N).\end{aligned}$$

Assim, $dF_p(v + w) = dF_p(v) + dF_p(w)$. Analogamente, mostra-se $dF_p(\lambda v) = \lambda dF_p(v)$. Portanto, dF_p é uma transformação linear.

(b) Pela Proposição 2.27 item (d), $G \circ F$ é diferenciável e assim faz sentido em falar da diferencial de $G \circ F$ em p. Seja $v \in T_pM$. Por definição,

$$\begin{aligned} d(G \circ F)_p(v)(f) &= v(f \circ (G \circ F)) = v((f \circ G) \circ F)) = dF_p(v)(f \circ G) = \\ &= dG_{F(p)}(dF_p(v))(f) = (dG_{F(p)} \circ dF_p)(v)(f),\ \forall f \in C^\infty(P) \\ &\Longrightarrow d(G \circ F)_p(v) = (dG_{F(p)} \circ dF_p)(v). \end{aligned}$$

E assim, $d(G \circ F)_p = (dG_{F(p)} \circ dF_p)$, o que prova (b).
(c) Seja $v \in T_pM$. Para todo $f \in C^\infty(M)$ temos

$$d(Id_M)(v)(f) = v(f \circ Id_M) = v(f) = Id_{T_pM}(v)(f) \Longrightarrow d(Id_M)(v) = Id_{T_pM}(v).$$

Como v é arbitrário tem-se $d(Id_M) = Id_{T_pM}$.
(d) Finalmente, por F ser um difeomorfismo, vale que F e F^{-1} são diferenciáveis e assim podemos falar das respectivas diferencias delas. Por outro lado, sabemos que

$$F \circ F^{-1} = Id_N \ \text{ e } \ F^{-1} \circ F = Id_M,$$

daí usando (b) e (c) ganhamos que

$$dF_p \circ d(F^{-1})_{F(p)} = Id_{T_pN} \ \text{ e } \ d(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p = Id_{T_pM}$$

Assim, dF_p é invertível com $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$ e pelo item (a) sabemos que dF_p e sua inversa $d(F^{-1})_{F(p)}$ são transformações lineares. Logo, dF_p é um isomorfismo linear. ■

Definição 2.35 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma curva(curva diferenciável) em M é uma aplicação contínua(diferenciável) $\gamma : J \longrightarrow M$ onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.*

Definição 2.36 *Sejam $\gamma : J \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em uma variedade M com $\gamma(t_0) = p$. Definimos o vetor velocidade da curva γ no instante t_0 como a aplicação $\gamma'(t_0) : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\gamma'(t_0)(f) = (f \circ \gamma)'(t_0).$$

Proprosição 2.37 *Sejam M uma variedade diferenciável, $p \in M$ e $\gamma : J \longrightarrow M$ uma curva diferenciável com $\gamma(t_0) = p$. Então, o vetor velocidade é uma derivação em p.*
Prova: De fato, dadas $f, g \in C^\infty(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \gamma'(t_0)(fg) &= ((fg) \circ \gamma)'(t_0) = [(f \circ \gamma)(t_0)(g \circ \gamma)(t_0)]' = (f \circ \gamma)'(t_0)(g \circ \gamma)(t_0) \\ &+ (f \circ \gamma)(t_0)(g \circ \gamma)'(t_0) \\ &= \gamma'(t_0)(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \gamma'(t_0)(g) \\ \gamma'(t_0)(\lambda f) &= (\lambda f \circ \gamma)'(t_0) = \lambda (f \circ \gamma)'(t_0) = \lambda \gamma'(t_0)(f). \end{aligned}$$

■

Proprosição 2.38 *Sejam M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Todo $v \in T_pM$ é um vetor velocidade de alguma curva diferenciável em M.*
Prova: Ver LEE (2013), Proposição 3.23, pág. 70. ■

Observação 2.39 *A partir da proposição acima podemos dar uma caracterização para o espaço tangente T_pM. De fato, sejam $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset M$ uma parametrização de uma vizinhança aberta V de $p = \varphi(x)$ e $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base canônica de $\mathbb{R}^n$. Denotando*

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = d\varphi_x e_i, \;\; i = 1, \cdots, n,$$

segue que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ forma uma base para T_pM chamada base coordenada associada à parametrização φ.

Definição 2.40 *Seja M^n uma variedade diferenciável. Definimos o fibrado tangente de M como o conjunto*

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}.$$

O fibrado tangente de M, possui uma topologia natural e um estrutura diferenciável definidos a partir de M que o torna uma variedade diferenciável de dimensão $2n$ (Ver LEE (2013), Proposição 3.18, pág. 66).

Definição 2.41 *Um campo vetorial em uma variedade M é uma correspondência X que associa a cada $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos que aplicações, X é uma aplicação de M sobre o fibrado tangente TM. Dizemos que X é um campo diferenciável quando a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável.*

Observação 2.42 *O conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.*

A partir de um campo vetorial suave $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos definir uma aplicação (que também denotaremos por X) $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ dada por $X(f) = Xf$, onde $Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $(Xf)(p) = X_p(f)$(lembrando que X_p é uma derivação em p). Veja que X é linear e além disso vale a regra do produto,

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), \;\; \forall f, g \in C^\infty(M).$$

A aplicação X é chamada de uma derivação. Pela suavidade do campo X, a aplicação pertence ao conjunto $C^\infty(M)$, $\forall f \in C^\infty(M)$(Ver LEE (2013), Proposição 8.14, pág. 180). O abuso de notação para representar a derivação acima com a mesma notação do campo vetorial é justificada pela

Proprosição 2.43 *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que uma aplicação $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ é uma derivação se, e somente se, D é da forma $Df = Xf$ para algum campo vetorial diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$.*
Demonstração: Ver LEE (2013), Proposição 8.15, pág. 181. ■

Observação 2.44 *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais em uma variedade M, podemos definir derivações $XY : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ e $YX :\longrightarrow C^\infty(M)$ por*

$$XYf = X(Yf) \quad e \quad YXf = Y(Xf), \;\; \forall f \in C^\infty(M).$$

Note que XY e YX estão bem definidas pelo visto acima.

A partir dessas derivações temos a

Definição 2.45 *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o colchete de Lie dos campos X e Y como a aplicação $[X, Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ dada pela regra*

$$[X, Y]f = XYf - YXf,\ \forall f \in C^\infty(M).$$

Observação 2.46 *O colchete de Lie de dois campos vetoriais diferenciável é um campo vetorial diferenciável (Ver LEE (2013), Proposição 8.25, pág. 186.).*

Proprosição 2.47 *Sejam M uma variedade diferenciável, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$. Então,*
(i) (Bilinearidade)$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ e $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$.
(ii) (Antisimetria) $[X, Y] = -[Y, X]$.
(iii) (Identidade de Jacobi) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + (fX(g))Y - (gY(f))X$.

Demonstração:

(i) De fato,

$$\begin{aligned}
[aX + bY, Z]h &= (aX + bY)Zh - Z(aX + bY)h \\
&= (aX)Zh + (bY)Zh - Z(aX)h - Z(bY)h \\
&= a(XZh) + b(YZh) - a(ZXh) - b(ZYh) \\
&= a(XZh - ZXh) + b(YZh - ZYh) \\
&= a[X, Z]h + b[Y, Z]h,\ \forall h \in C^\infty(M).
\end{aligned}$$

Logo, $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$. A outra igualdade é análoga.

(ii) Para toda $h \in C^\infty(M)$ vale

$$[X, Y]h = XYh - YXh = -(YXh - XYh) = -[Y, X]h.$$

Assim, $[X, Y] = -[Y, X]$.

(iii) Com efeito,

$$\begin{aligned}
([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]])h &= [X, [Y, Z]]h + [Y, [Z, X]]h + [Z, [X, Y]]h \\
&= X[Y, Z]h - [Y, Z]Xh + Y[Z, X]h - \\
&- [Z, X]Yh + Z[X, Y]h - [X, Y]Zh \\
&= XYZh - XZYh - YZXh + ZYXh + \\
&+ YZXh - YXZh - ZXYh + XZYh + \\
&+ ZXYh - ZYXh - XYZh + YXZh \\
&= 0,\ \forall h \in C^\infty(M).
\end{aligned}$$

O que prova a Identidade de Jacobi.

(iv) Seja $h \in C^\infty(M)$,

$$[fX, gY]h = fX(gY)h - gY(fX)h = fX(gY(h)) - gY(fX(h))$$

donde pela regra do produto temos

$$\begin{aligned}[fX, gY]h &= gfX(Y(h)) + fX(g)Yh - fgY(X(h)) - gY(f)X(h) \\ &= fg(XYh - YXh) + (fX(g)(Yh) - (gY(f)(Xh) \\ &= fg[X,Y]h + (fX(g))Yh - (gY(f))Xh,\end{aligned}$$

o que prova (iv) e consequentemente encerra a demonstração. ∎

Definição 2.48 *Um fibrado vetorial(suave) k-dimensional é um par de variedades E(espaço total) e M(base) junto com uma aplicação suave sobrejetiva $\pi : E \longrightarrow M$(chamada projeção) tais que:*

i) Para cada $p \in M$ o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$(fibra sobre p) é dotado de uma estrutura de espaço vetorial k-dimensional.

ii) Para cada $p \in M$ existem uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$, chamada uma local trivialização de E sobre U satisfazendo as seguintes condições:

- *$\pi_U \circ \varphi = \pi$, onde $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow U$ é a aplicação projeção sobre a primeira coordenada.*
- *para cada $q \in U$, a restrição de φ a fibra E_q é um isomorfismo linear de E_q sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$.*

Observação 2.49 *Às vezes dizemos que $\pi : E \longrightarrow M$ é o fibrado vetorial sobre M, já deixando explícita a projeção π.*

Definição 2.50 *Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M. Um seção suave de E é uma aplicação suave $F : M \longrightarrow E$ suave tal que $\pi \circ F = id_M$.*

Definição 2.51 *Uma aplicação diferenciável $F : M \longrightarrow N$ entre as variedades suaves M e N é dita uma imersão diferenciável, se a sua diferencial dF_p é injetiva para todo $p \in M$, equivalentemente, se posto $F = dim\ M$. Além disso, se F é um mergulho topológico (isto é, se F é um homeomorfismo sobre a sua imagem $F(M) \subset N$ com a topologia induzida) dizemos que F é um mergulho diferenciável de M sobre N.*

Definição 2.52 *Seja M uma variedade diferenciável. Um subconjunto $S \subset M$ é dita uma subvariedade diferenciável de M quando a aplicação inclusão $i : S \hookrightarrow M$ é um mergulho diferenciável.*

Observação 2.53 *Quando $f : M \longrightarrow N$ é imersão(ou mergulho), dizemos que a diferença $dimN - dimf(M) \geq 0$ é a codimensão de $f(M)$ em N. Em particular, quando a codimensão for 1, dizemos que $f(S)$ é uma hipersuperfície imersa(ou mergulhada) em N.*

Teorema 2.54 *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $F : M \longrightarrow N$ diferenciável é uma imersão diferenciável se, e somente se, para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p tal que $F|_U : U \longrightarrow N$ é um mergulho suave.*
Demonstração: Ver LEE (2013), Teorema 4.25, pág. 87. ∎

Exemplo 2.55 *Como aplicação do Teorema 2.54, dada uma imersão $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície S sobre $\mathbb{R}^3$, conseguimos encontrar, para cada $p \in f(S)$, um mergulho*

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre um aberto $V \subset f(S)$ contendo p.

Prova: De fato, como $p \in f(S)$, existe $\overline{q} \in S$ tal que $p = f(\overline{q})$. Assim, pelo Teorema 2.54, podemos tomar $V_{\overline{q}} \subset S$ vizinhança aberta de $\overline{q}$ tal que $f|_{V_{\overline{q}}} : V_{\overline{q}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um mergulho. Por outro lado, como S é uma superfície, podemos tomar $Y : W \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \overline{V} \subset S$ uma parametrização de S em torno de $\overline{q}$, com $Y(q) = \overline{q}$. A partir disso, sendo $V = f(V_{\overline{q}} \cap \overline{V})$(que é um aberto em $f(S)$, pois $f|_{V_{\overline{q}}}$ é um homeomorfismo) e $U = Y^{-1}(V_{\overline{q}} \cap \overline{V})$(aberto de $\mathbb{R}^2$, pois Y é um homeomorfismo) temos que

$$X := (f \circ Y)|_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

é o mergulho procurado. O fato de X ser um mergulho sai diretamente das aplicações $f|_{V_{\overline{q}}}$ ser um mergulho e Y ser uma parametrização de S. ∎

Observação 2.56 *O exemplo acima nos diz que $f(S)$ é localmente uma superfície parametrizável em $\mathbb{R}^3$ e quando tomarmos um mergulho X da forma acima, chamaremos de parametrização local de $f(S)$.*

Teorema 2.57 (Versão Forte do Teorema da Imersão de Whitney) *Se $n \geq 2$, então toda n-variedade suave admite uma imersão suave sobre $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Demonstração: Ver WHITNEY (1944), Teorema 6, pág.270. ∎

Definição 2.58 *Uma variedade diferenciável M diz orientável quando a estrutura diferenciável $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ satisfaz a seguinte condição:*
Para todo par de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\alpha)$ tais que $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ tem-se que a aplicação de transição $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ de φ_α para φ_α tem determinante Jacobiano positivo. Caso contrário, dizemos que M é não-orientável.

2.2 Variedades Riemannianas

Inicialmente explanaremos um pouco sobre alguns conceitos e resultados do Cálculo Tensorial para um melhor entendimento sobre o conceito de variedade Riemanniana.

Definição 2.59 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n, V^* o seu espaço dual, k, l, r e s inteiros positivos. Definimos:*

i) Um tensor k-covariante em V é uma aplicação k-linear

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ fatores}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

.

ii) Um tensor l-contravariante em V é uma aplicação l-linear

$$G : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ fatores}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

.

iii) Um tensor misto do tipo (r, s) sobre V(também chamado um tensor r-covariante, *s-contravariante sobre V) é uma aplicação (r+s)-linear*

$$H : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r \text{ fatores}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s \text{ fatores}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

.

Observações 2.60 *Sobre a definição acima:*

a) *Por convenção, definimos um tensor* 0*-covariante (ou* 0*-contravariante) como um número real. E também por convenção, um tensor do tipo* $(0,0)$ *é um número real.*

b) *Denotaremos por* $\mathcal{T}^k(V)$ *o conjunto dos tensores k-covariantes sobre* V*. Com as operações usuais de soma e multiplicação por um número real naturais para aplicações k-lineares,* $\mathcal{T}^k(V)$ *é um espaço vetorial. Denotaremos por* $\mathcal{T}_l(V)$ *e* $\mathcal{T}^r_s(V)$*, respectivamente, o conjunto dos tensores l-contravariantes sobre V e o conjunto dos tensores mistos do tipo* (r,s) *sobre* V *e analogamente a observação sobre* $\mathcal{T}^k(V)$*, vê-se que* $\mathcal{T}_l(V)$ *e* $\mathcal{T}^r_s(V)$ *são espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais.*

c) *Os tensores* 1*-covariantes sobre um espaço vetorial de dimensão finita* V *são os funcionais lineares(ou covetores), isto é,* $T^1(V) = V^*$*. Já os tensores* 1*-contravariantes sobre* V *são os vetores, ou seja,* $T_1(V) = V^{**} = V$ *(aqui usamos o fato de* $dimV < \infty$ *e assim podemos identificar o espaço com o seu bidual).*

Definição 2.61 (Produto de tensores) *Seja* V *espaço vetorial de dimensão finita. Dados* $T \in \mathcal{T}^r_s(V)$ *e* $S \in \mathcal{T}^t_u(V)$ *definimos o produto tensorial* $T \otimes S$ *como um tensor do tipo* $(r+t, s+u)$ *sobre* V *pela seguinte regra*

$$\begin{aligned}(T \otimes S)(v_1, \cdots, v_{r+t}, w^1, \cdots, w^{s+u}) &= T(v_1, \cdots, v_r, w^1, \cdots, w^s) \cdot \\ &\cdot \ S(v_{r+1}, \cdots, v_{r+t}, w^{s+1}, \cdots, w^{s+u})\end{aligned}$$

Observação 2.62 *Dados uma variedade diferenciável* M^n*,* $p \in M$ *e uma parametrização* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset M$ *em torno de p sabemos que*

$$\mathcal{B}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p \right\}$$

é uma base para o espaço tangente T_pM *associada a parametrização* φ*. A essa base podemos associar base dual coordenada*

$$\mathcal{B}^*_p = \{dx^1|_p, \cdots, dx^n|_p\} \subset (T_pM)^*,$$

onde $dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) = \delta_{ij}, \ i,j = 1, \cdots, n$ *(*δ_{ij} *é o delta de Kronecker).*

Exemplo 2.63 *Consideremos* M^n *uma variedade diferenciável, p um ponto de M e* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset M$ *uma parametrização local de M centrada em p. Escrevendo*

$u, v \in T_pM$ em relação a base coordenada

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$
$$v = \sum_{j=1}^{n} v^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p,$$

temos para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$ que

$$dx^k|_p(u) \quad = \sum_{i=1}^{n} u^i(p) dx^k|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) = \sum_{i=1}^{n} u^i(p)\delta_{ki} = u^k(p)$$

e

$$dx^k|_p(v) = \sum_{j=1}^{n} v^j(p) dx^k|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right) = \sum_{j=1}^{n} v^j(p)\delta_{kj} = v^k(p).$$

Daí, podemos escrever o produto tensorial $dx^i|_p \otimes dx^j|_p$ como

$$(dx^i|_p \otimes dx^j|_p)(u, v) = dx^i|_p(u) \cdot dx^j|_p(v) = u^i(p) \cdot v^j(p), i, j = 1, \cdots, n.$$

Definição 2.64 *Seja M^n uma variedade diferenciável. O espaço tensorial tangente a M em p do tipo (k, l) é o espaço vetorial $\mathcal{T}_l^k(T_pM)$.*

Observação 2.65 *Na definição acima, se tomarmos $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset M$ uma parametrização em torno de p, podemos exibir uma base para $\mathcal{T}_l^k(T_pM)$, a qual chamaremos de base coordenada associada à parametrização φ. Para isso tomemos a base coordenada de T_pM*

$$\mathcal{B}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$$

e sua base dual

$$\mathcal{B}_p^* = \{dx^1|_p, \cdots, dx^n|_p\}.$$

Temos que

$$(\mathcal{B}_l^k)_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}|_p \right\}_{1 \le i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l \le n}$$

é base para $\mathcal{T}_l^k(T_pM)$(Ver LEE (2013), Corolário 12.12, pág. 313) que é a base coordenada associada à parametrização φ. Assim, dado um tensor $T \in \mathcal{T}_l^k(T_pM)$ pode ser escrito

$$T = T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}|_p$$

onde $T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l} = T \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big|_p, dx^{j_1}|_p, \cdots, dx^{j_l}|_p \right)$ e acima estamos usando a convenção de Einstein para somatórios. Essa convenção consiste na seguinte regra: Se em um termo aparece um mesmo índice duas vezes, entende-se como uma soma sobre todos *os valores possíveis.*

Definição 2.66 *Seja M^n uma variedade diferenciável. Definimos o fibrado tensorial do tipo (k,l) de M como a união disjunta*

$$\mathcal{T}_l^k(M) = \coprod_{p\in M} (\mathcal{T}_l^k(T_pM)).$$

Observação 2.67 *Veja que $\mathcal{T}_l^k(M)$ é um fibrado vetorial sobre M. De fato, primeiramente note que $\mathcal{T}_l^k(M)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $(n + n^{k+l})$, uma vez que, se $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in L}$ é uma estrutura diferenciável para M, então*

$$B = \{(U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in L},$$

é uma estrutura diferenciável para $\mathcal{T}_l^k(M)$ onde $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{k+l}} \longrightarrow \mathcal{T}_l^k(M)$ é dada por $\psi_\alpha(x, (F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l})) = T \in \mathcal{T}_l^k(T_xM)$ Basta tomarmos a projeção $\pi : \mathcal{T}_l^k(M) \longrightarrow M$ dada por $\pi(T) = p$ para cada $T \in \mathcal{T}_l^k(T_pM)$. Claramente, para cada $p \in M$ a fibra sobre M, $E_p = \pi^{-1}(p) = \mathcal{T}_l^k(T_pM)$ é um espaço vetorial n^{k+l}-dimensional. Por outro lado, dada uma parametrização $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \subset M$ centrada em p, definamos

$$\begin{array}{rll} \psi: & \pi^{-1}(U) \subset \mathcal{T}_l^k(M) & \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n^{k+l}} \\ & T & \longmapsto \psi(T) = (x, (F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l})), \end{array}$$

onde $T \in \mathcal{T}_l^k(T_xM)$ e $(F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l})$ é visto como um vetor de $\mathbb{R}^{n^{k+l}}$ onde as coordenadas são os n^{k+l} números reais $F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l} = F\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big|_p, dx^{j_1}|_p, \cdots, dx^{j_l}|_p\right)$. As demais condições para ser um fibrado vetorial decorrem imediatamente das aplicações acima.

Definição 2.68 *Seja M^n uma variedade diferenciável. Um campo (k,l)-tensorial sobre M(k-covariante, l-contravariante) é uma aplicação diferenciável $T : M \longrightarrow \mathcal{T}_l^k(M)$, tal que $\pi \circ T = id_M$, onde $\pi : \mathcal{T}_l^k(M) \longrightarrow M$ é a projeção canônica do fibrado (k,l)-tensorial de M sobre M. Mais especificamente temos,*

$$T_p = T(p) = T_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}|_p,$$

onde todas as funções $T_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l} : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis para todos índices $i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l = 1, \cdots, n$ e para todas as vizinhanças coordenadas de M.

Observação 2.69 *Por simplicidade dizemos apenas que T é um campo k-tensorial covariante, em vez de, um campo $(k,0)$-tensorial e T é um campo l-tensorial contravariante quando T é um campo $(0,l)$-tensorial.*

Observação 2.70 *O espaço vetorial de todos os campos (k,l)-tensoriais sobre uma variedade M será denotado por $\mathfrak{T}_l^k(M)$.*

Definição 2.71 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dados $p \in M$ e $T \in \mathcal{T}^k(T_{F(p)}N)$ definimos o tensor k-covariante em*

$\mathcal{T}^k(T_pM)$, $dF_p^*(T)$, chamado o pullback de T por F em p pela regra

$$dF_p^*(T)(v_1, \cdots, v_k) = T(dF_pv_1, \cdots, dF_pv_k),\ \forall v_1, \cdots, v_k \in T_pM.$$

Mais geralmente, dado um campo tensorial k-covariante X em N, definimos o campo tensorial k-covariante $F^*X : M \longrightarrow \mathcal{T}^k(M)$, chamado o pullback de X por F, definido por

$$(F^*X)_p = dF_p^*(X_{F(p)}).$$

Agora podemos definir o conceito de métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável.

Definição 2.72 *Uma métrica Riemanniana(ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M^n é um campo 2-tensorial covariante g tal que g é simétrico(isto é, $g_p(u,v) = g_p(v,u)$, $\forall u, v \in T_pM, \forall p \in M$) e positivo definido(ou seja, g_p é positiva definida, para todo $p \in M$).*

Observações 2.73 *Na definição acima:*

i) Note que $g \in \mathfrak{T}_0^2(M)$ e assim

$$\begin{aligned} g: \ M &\longrightarrow \mathcal{T}_0^2(M) \\ p &\longmapsto g(p) = g_p, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto g_p(u,v). \end{aligned}$$

À menos de menção contrária, denotaremos $\langle u, v\rangle_p$ no lugar de $g_p(u,v)$.

ii) Para cada $p \in M$ tomando uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset M$ em torno de p. Considerando a base coordenada de T_pM

$$\mathcal{B}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$$

e sua base dual coordenada $\mathcal{B}_p^* = \{dx^1|_p, \cdots, dx^n|_p\}$. Temos que dados $u, v \in T_pM$ podemos escrever

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n u^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \\ v &= \sum_{j=1}^n v^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \end{aligned}$$

e assim usando as propriedades da métrica Riemanniana g e pelo Exemplo temos,

$$\begin{aligned} g_p(u,v) &= \langle u,v\rangle_p \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n u^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \sum_{j=1}^n v^j(p)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right\rangle_p \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right\rangle_p u^i(p)\cdot v^j(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right\rangle_p (dx^i|_p \otimes dx^j|_p)(u,v). \end{aligned}$$

Logo, as funções coordenadas $g_{ij} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis da métrica são

$$g_{ij}(p) = \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right\rangle_p, i,j = 1,\cdots,n,$$

onde $(g_{ij}(p))$ é uma matriz $n \times n$ simétrica e positiva. As funções g_{ij} são chamadas os coeficientes da métrica.

Definição 2.74 *Uma variedade Riemanniana é um par (M,g) onde M é uma variedade diferenciável e g uma métrica Riemanniana*

Definição 2.75 *Seja (M^n,g) variedade Riemanniana. Definimos:*

i) A norma(ou comprimento) de um vetor $u \in T_pM$ por

$$\|u\|_g = \sqrt{\langle u,u\rangle_p}$$

ii) O ângulo entre dois vetores não-nulos $u,v \in T_pM$ é o único $\theta \in [0,\pi]$ satisfazendo

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle_p}{\|u\|\|v\|}$$

iii) Dois vetores $u,v \in T_pM$ são ditos ortogonais se $\langle u,v\rangle_p = 0$.

iv) Um referencial ortonormal para um subconjunto aberto $U \subset M$ é uma n-upla $(E_1,\cdots,E_n)$ de campos vetoriais em M tais que $E_1(p),\cdots,E_n(p)$ formam uma base ortonormal para T_pM, para todo $p \in U$.

Observação 2.76 *Quando não houver confusão sobre a métrica na variedade Riemanniana, denotaremos $\|u\|_g$ apenas por $\|u\|$*

Exemplo 2.77 *Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ uma imersão entre as variedades M e N. Se N é dotada de uma métrica Riemanniana g, então f induz uma métrica Riemanniana para M. O pullback f^*g da métrica Riemanniana g é uma métrica Riemanniana para M. De fato, note que a diferenciabilidade é imediata pela diferenciabilidade da métrica para N e da imersão. Além disso, para cada $p \in M$ temos*

$$(f^*g)_p(u,v) = \langle df_pu, df_pv\rangle_{f(p)} = \langle df_pv, df_pu\rangle_{f(p)} = (f^*g)_p(v,u),\ \forall u,v \in T_pM.$$

Logo, f^*g é simétrico. Além disso, dados $u, v \in T_pM$ com $u \neq v$ temos pelo fato de df_p ser injetiva que $df_pu \neq df_pv$ e assim por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{f(p)}$ ser positiva definida

$$(f^*g)_p(u, v) = \langle df_pu, df_pv \rangle_{f(p)} > 0$$

E claramente se $u = v$, então $(f^*g)_p(u, v) = \langle df_pu, df_pv \rangle_{f(p)} = \langle df_pu, df_pu \rangle_{f(p)} = 0$. E assim (f^*g) é positiva definida. Portanto, (f^*g) é uma métrica Riemanniana para M. Nesse caso, dizemos que f é uma imersão isométrica.

Proprosição 2.78 *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*
Prova: Ver LEE (2013), Proposição 13.3, pág. 329. ∎

Definição 2.79 *Seja M^n uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$. Definimos o gradiente de f como o campo vetorial* $\operatorname{grad} f$ *em M definido por*

$$\langle (\operatorname{grad} f)(p), v \rangle = df_pv, \;\; p \in M, \;\; v \in T_pM.$$

Observação 2.80 *O campo* $\operatorname{grad} f$ *é único (Ver LEE (2013), pág. 343), e em coordenadas locais vale*

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_j,$$

onde $\{X_1, \cdots, X_n\}$ é uma base coordenada.

Falaremos um pouco agora de integração em variedades riemannianas para o que segue na próxima seção.

Definição 2.81 *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientável e $R \subset M$ uma região(ou seja, R é um conjunto aberto e conexo) relativamente compacta, tal que R está contida em alguma vizinhança coordenada $\varphi(U)$ de alguma parametrização positiva $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(U) \subset M$ tal que $\partial(\varphi^{-1}(R))$ tenha medida nula em $\mathbb{R}^n$. Definimos o volume de R pelo número*

$$\operatorname{vol}(R) = \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n.$$

Se $R \subset M$ for uma região compacta e não estiver contida inteiramente em alguma coordenada, basta tomarmos a coleção $\{V_\lambda\}_{\alpha \in \Lambda}$ de vizinhanças coordenadas associadas a parametrizações $\varphi_\lambda : U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V_\lambda \subset M$ tais que $R \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\lambda$, extrairmos uma subcobertura finita da cobertura acima $\{V_{\lambda_i}\}_{i=1}^k$($R$ é compacto) e daí pelo Teorema 2.29 podemos tomar uma partição $\{f_i\}_{i=1}^k$ da unidade subordinada a essa cobertura e definirmos

$$\operatorname{vol}(R) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi_{\lambda_i}(V_{\lambda_i})} f_i \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n.$$

Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com suporte compacto R então definimos

$$\int_M f dA_g = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi_i(V_i)} f(\varphi_i^{-1}(x)) f_i \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n,$$

onde $\{f_i\}_{i=1}^{k}$ é a partição da unidade subordinada a cobertura finita $\{V_i\}$ de vizinhanças coordenadas que cobrem R.

Observações 2.82 *i) A expressão $\mathrm{vol}(R)$ acima está bem definida(Ver CARMO (2008)), pág.49).*
ii) O integrando na definição de $\mathrm{vol}(R)$, na verdade é uma forma diferencial positiva de grau n chamada usualmente a forma elemento de volume da variedade M.
iii) Na definição acima, a expressões que envolvem partição da unidade, independe da escolha da partição da unidade(Ver LEE (2013), Proposição 16.5, pág. 405).

Definição 2.83 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão ∇ em M é uma aplicação bilinear sobre $\mathbb{R}$*

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

tal que satisfaz as seguintes propriedades:
i) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,
ii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$,
onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ são campos diferenciáveis em M e $f, g \in C^\infty(M)$ funções diferenciáveis definidas em M. O campo $\nabla_X Y$ é chamado a derivada covariante do campo Y na direção de X.

Observação 2.84 *Seja ∇ uma conexão em uma variedade diferenciável M^n. Considerando um sistema de coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ em torno de um ponto p podemos escrever*

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i \quad e \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Assim, pelas propriedades da definição acima temos que

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X Y & \overset{i)}{=} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \nabla_{X_i} Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_{i=j}^{n} y_j X_j \right) \overset{ii)}{=} \sum_{ij=1}^{n} x_i \left(y_j \nabla_{X_i} X_j + X_i(y_j) X_j \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j=1}^{n} x_i X_i(y_j) X_j, \end{array}$$

escrevendo $\nabla_{X_i} X_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$ em termos dos X_k, temos que Γ_{ij}^k são funções dife-

renciáveis(pois $\nabla_{X_i} Y_j \in \mathfrak{X}(M)$) e que

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

assim, em coordenadas locais $\nabla_X Y(p)$ depende apenas de $x_k(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X.

Definição 2.85 *As funções diferenciáveis Γ_{ij}^k definidas na Observação 2.84 são chamadas os símbolos de Christoffel da conexão ∇ associados a parametrização φ.*

Definição 2.86 *Seja $\gamma : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável M. Um campo vetorial ao longo da curva γ é um campo vetorial diferenciável $V : I \longrightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, $\forall t \in I$.*

Observação 2.87 *O espaço vetorial de todos os campos vetoriais ao longo de uma curva $\gamma : I \longrightarrow M$ será denotado por $\mathfrak{X}(\gamma)$.*

Proprosição 2.88 *Sejam M uma variedade diferenciável e ∇ uma conexão em M. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\gamma : I \longrightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de γ, denominado derivada covariante de V ao longo de γ, tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, V e W são campos diferenciáveis ao longo de γ.

b) $\frac{D(fV)}{dt} = \frac{Df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ onde V é um campo de vetores ao longo de γ e f é uma função diferenciável em I.

c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V = Y \circ \gamma$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y$.

Demonstração: Ver CARMO (2008), Proposição 2.2, pág. 56. ∎

Definição 2.89 *O campo $\frac{DV}{dt}$ da Proposição 2.88 é chamado a derivada covariante de V ao longo da curva γ.*

Definição 2.90 *Sejam M uma variedade diferenciável e uma conexão ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\gamma : I \longrightarrow M$ é dito paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, $\forall t \in I$.*

Proprosição 2.91 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Dados uma curva diferenciável em M $\gamma : I \longrightarrow M$ e V_0 um vetor tangente a M em $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$, ou seja, $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de γ, tal que $V(t_0) = V_0$,($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de γ).*

Demonstração: Ver CARMO (2008), Proposição 2.6, pág. 58. ∎

Definição 2.92 *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Riemanniana em M. A conexão ∇ é dita compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável γ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de γ, tivermos $\langle P, P' \rangle = constante$.*

Proprosição 2.93 *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao* *longo da curva diferenciável* $\gamma : I \longrightarrow M$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \ \forall t \in I.$$

Demonstração: Ver CARMO (2008), Proposição 3.2, pág. 59. ■

Corolário 2.94 *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração: Ver CARMO (2008), Corolário 3.3, pág. 60. ■

Definição 2.95 *Uma conexão* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Teorema 2.96 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana* M*, existe uma única conexão* ∇ *em* M *tal que:*
a) ∇ *é simétrica.*
b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*
Demonstração: Ver CARMO (2008), Teorema 3.6, pág. 61. ■

Definição 2.97 *A conexão do Teorema* 2.96 *é chamada conexão de Levi-Civita(ou Riemanniana) de* M*.*

Observações 2.98 *i) Seja* ∇ *uma conexão Riemanniana em uma Variedade Riemanniana* (M^n, g)*. Sabemos pela compatibilidade com a métrica* g *que vale*

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

Somando, membro a membro, as duas primeiras igualdades, subtraindo da terceira e usando a simetria da conexão obtemos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle &= \langle [X, Y] + \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, [X, Z] + \nabla_Z X\rangle + \\ &+ \langle [Y, Z] + \nabla_Z Y, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \\ &- \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle [X, Y], Z\rangle + \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \\ &+ \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle \nabla_Z Y, X\rangle + \\ &+ \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + \\ &+ 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \\ &- \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle).\end{aligned}$$

Mas se (U,φ) *é um sistema de coordenadas, o fato de* ∇ *ser simétrica implica para todos* $i,j \in \{1,\cdots,n\}$

$$\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i = [X_i,X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim, em coordenadas locais temos que

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{ij}^m g_{lk} &= \langle X_k, \nabla_{X_i}X_j\rangle = \frac{1}{2}(X_j\langle X_i,X_k\rangle + X_i\langle X_k,X_j\rangle - X_k\langle X_j,X_i\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right), \; i,j,k \in \{1,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

Como a matriz (g_{km}) *admite inversa, a qual denotaremos por* (g^{km})*, teremos que*

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)g^{km}, \; m = 1,\cdots,n,$$

ou seja, temos a expressão para os símbolos de Christoffel associados a um sistema de coordenadas escrito em função apenas pelos coeficientes da métrica, junto com os termos da matriz inversa (g^{km}).

ii) Se ∇ *é a conexão Riemanniana da variedade Riemanniana* (M,g) *a igualdade*

$$\begin{aligned}\langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \\ &- \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle), \; X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)\end{aligned}$$

é chamada Identidade de Koszul.

Definição 2.99 *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana* M *é uma correspondência que associa a cada par* $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \; \forall Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ *é a conexão Riemanniana de* M.

Exemplo 2.100 *Se* $M = \mathbb{R}^n$*, então* $R(X,Y)Z = 0, \; \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.
De fato, como $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever $Z = (Z_1,\cdots,Z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, assim

$$\nabla_X Z = (X(Z_1),\cdots,X(Z_n)) \Longrightarrow \nabla_Y\nabla_X Z = (YX(Z_1),\cdots,YX(Z_n)).$$

Analogamente, obtemos

$$\nabla_Y Z = (Y(Z_1), \cdots, Y(Z_n)) \Longrightarrow \nabla_X \nabla_Y Z = (XY(Z_1), \cdots, XY(Z_n)).$$

donde

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= -((XY - YX)(Z_1, \cdots, (XY - YX)(Z_n)) + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= -([X,Y](Z_1), \cdots, [X,Y](Z_n)) + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= -\nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proprosição 2.101 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*
(i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$, $X_1, X_2, Y_1 Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.
(ii) Para todo par de campos diferenciáveis em M $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear,ou seja,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z + W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ e todos $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.
Demonstração: Ver CARMO (2008), Proposição 2.2, pág. 100. ∎

Lembremos que dado um espaço vetorial V dotado de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, indicaremos por $\|x \times y\|$ a expressão

$$\sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proprosição 2.102 *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM de uma variedade Riemanniana M e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então,*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y \rangle}{\|x \times y\|}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.
Demonstração: Ver CARMO (2008), Proposição 3.1, pág. 104. ∎

Exemplo 2.103 *Pelo Exemplo,* 2.100 *temos que* $K(x,y) = 0$ *para todo par de vetores*

$x, y \in T_p\mathbb{R}^n$ linearmente independentes.

Definição 2.104 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ é chamado curvatura seccional de σ em p.*

Agora, considere $f : M^n \longleftrightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão isométrica da variedade M sobre a variedade Riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$. Sabemos que existe uma métrica induzida por f para M, a saber, o pullback $g = f^*\overline{g}$, donde (M, g) é uma variedade Riemanniana. Explanaremos, de forma resumida, as relações entre as geometrias de M e de $\overline{M}$.
Para cada $p \in M$ sabemos pelo Teorema 2.54 que existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ tal que $f|_U : U \longrightarrow \overline{M}$ é um mergulho e assim $f(U)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Assim existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V de $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do espaço do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. A fim de simplificar a notação, identifiquemos U com $f(U)$ e cada vetor $u \in T_qM$ com sua respectiva imagem $df_qu \in T_{f(q)}\overline{M}$.
Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Com isso, para cada $v \in T_p\overline{M}$, existem $v^T \in T_pM$ e $v^N \in (T_pM)^\perp$ tais que

$$v = v^T + v^N.$$

Dizemos que v^T é a componente tangencial do vetor v e v^N é a componente normal do vetor v. Tal decomposição é evidentemente diferenciável no seguinte sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \longmapsto (p, v^T) \;\text{ e }\; (p, v) \longmapsto (p, v^N)$$

são diferenciáveis.
Indiquemos por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Dados X e Y campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ sua respectivas extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Observemos inicialmente que tal definição independe das extensões locais tomadas (Ver WILLMORE (1993), Proposição 4.12, pág. 117). Verifica-se que esta é a conexão Riemanniana relativa a métrica induzida de M (Ver,WILLMORE (1993), pág.118). A partir desses comentários acima temos a

Observação 2.105 *Para o que segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ o conjunto dos campos de vetores normais a $f(U) \equiv U$.*

Proprosição 2.106 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ então a aplicação*

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) &\longrightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp \\ (X, Y) &\longmapsto B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \end{aligned}$$

é bilinear e simétrica.
Demonstração: Ver CARMO (2008), Proposição 2.1, pág. 140. ■

Observação 2.107 *Pela proposição acima, em um sistema de coordenadas, a bilinearidade de B implica que $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.*

Definição 2.108 *Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle$$

é bilinear e simétrica pela Proposição 2.106. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

A segunda forma fundamental induz uma aplicação linear auto-adjunta, a qual usaremos para estudar conceitos importantes mais adiante, mais precisamente temos a

Definição 2.109 *Dados $p \in M$ e $\eta \in T_pM$. Definimos a aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ dada por*

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = II_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle,$$

a qual chamamos de operador de Weingarten.

O operador de Weingarten está relacionado com a derivada covariante pela

Proprosição 2.110 *Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então,*

$$S_\eta(x) = (\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração: Ver CARMO (2008), Proposição 2.3, pág. 142. ■

Quando $f(M)$ é uma hipersuperfície imersa, isto é, $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, temos que para cada $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^{\perp}$,$\|\eta\| = 1$, o operador de Weingarten $S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ é auto-adjunto e simétrica pelo Teorema espectral existe uma base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de T_pM associados aos autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Supondo que M e $\overline{M}$ sejam orientáveis e estão orientadas(isto é, escolhemos orientações para M e $\overline{M}$) então, o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, \cdots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Assim, temos a

Definição 2.111 *Dada a imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ nas condições acima, os autovalores $k_i(p) =: \lambda_i$, $i = 1, \cdots n$ são chamadas as curvaturas principais de f em p e os autovetores e_i, $i = 1, \cdots, n$ são denominados as direções principais. O valores $K(p) = \det S_\eta = k_1(p). \cdots .k_n(p)$ e $H(p) = \frac{1}{n}(k_1(p) + \cdots + k_n(p))$ são chamados, respectivamente, a curvatura de Gauss-Kronecker de f em p e a curvatura média de f em p.*

Observação 2.112 *Na definição acima, um caso importante é quando* $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$*. Considerando* $\overline{N}$ *uma extensão local de* η*, unitária e normal a* M *e denotando por*

$$\mathbb{S}_1^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$*, defina a aplicação normal de Gauss,* $N : M^n \longrightarrow \mathbb{S}_1^n$*, transladando a origem do campo* $\overline{N}$ *para a origem do* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e pondo*

$$N(q) = \text{ponto final do transladado de } \overline{N}(q),$$

Nestas condições, $-S_\eta$ *é a derivada da aplicação normal de Gauss* N *(Ver CARMO (2008), pág. 143).*

Definição 2.113 *Seja* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ *imersão isométrica. Dado* $\{E_i\}_{i=1}^m$ *um referencial ortonormal de* $\mathfrak{X}(U)^\perp$*, onde* U *é uma vizinhança aberta de* $p \in M$ *tal que* $f|_U : U \longrightarrow \overline{M}$ *é um mergulho, podemos escrever em* p

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{m} H_i(x, y)E_i, x, y \in T_pM,$$

onde $H_i = H_{E_i}$ *definimos o vetor curvatura média da imersão* f *em* p *como*

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(\text{traço}S_i)E_i$$

onde $S_i = S_{E_i},\ i = 1, \cdots, m$*.*

Observações 2.114 *Na definição acima:*

i) A definição do vetor curvatura média não depende do referencial ortonormal escolhido (Ver WILLMORE (1993), pág.120).

ii) O vetor curvatura média é igual a

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B(e_j, e_j),$$

onde $\{e_j\}_{j=1}^n$ *é uma base ortonormal de* T_pM*. De fato, tomando uma base ortonormal* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *de* T_pM *e um referencial ortonormal* $E_1, \cdots, E_m$ *de* $\mathfrak{X}(U)^\perp$ *podemos escrever para cada* $j = 1, \cdots, n$*,*

$$B(e_j, e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_i^j E_i.$$

Mas como $E_1, \cdots, E_m$ *é um referencial ortonormal, vale que* $a_i^j = \langle B(e_j, e_j), E_i\rangle$*, donde*

$$B(e_j, e_j) = \sum_{i=1}^{m}\langle B(e_j, e_j), E_i\rangle E_i.$$

Por outro lado, para cada $i = 1, \cdots, m$ *temos que*

$$\textit{traçoS}_i = \sum_{j=1}^{n} a^i_{jj},$$

onde (a^i_{kj}) *é a matriz de* S_i *associada a base dada acima e por esta ser ortonormal vale que* $a^i_{jj} = \langle S_i(e_j), e_j\rangle = \langle B(e_j, e_j), E_i\rangle$ *e assim*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B(e_j, e_j) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\langle B(e_j, e_j), E_i\rangle E_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\langle B(e_j, e_j), E_i\rangle E_i\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\langle B(e_j, e_j), E_i\rangle\right) E_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\langle S_i(e_j), e_j\rangle\right) E_i\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(\textit{traçoS}_i)E_i = \vec{H}(p).
\end{aligned}$$

E por fim, note que tal caracterização do vetor curvatura média independe da base ortonormal de T_pM. *De fato, se* $\{e_i\}$ *e* $\{\overline{e_i}\}$ *são duas bases ortonormais de* T_pM, *então podemos escrever*

$$\overline{e_i} = \sum_{k=1}^{n} b^k_i e_k,$$

onde a matriz quadrada de ordem n (b^k_i) *é ortogonal(veja que* $b^k_i = \langle\overline{e_i}, e_k\rangle$*). Logo,*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B(\overline{e_j}, \overline{e_j}) = \frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n} B(b^k_j e_k, b^k_j e_k) = \sum_{j,k=1}^{n}(b^k_j)^2 B(e_k, e_k)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} B(e_k, e_k),$$

onde usamos o fato de (b^k_j) *é uma matriz ortogonal satisfazer* $\sum_{k=1}^{n}(b^k_j)^2 = 1$.

iii) Em coordenadas locais, por LEE (1997), pág. 28, vale

$$\vec{H} = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} B_{ij},$$

onde (g^{ij}) *é a matriz inversa da matriz da métrica* g.

Definição 2.115 *Seja* $f : M \longrightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ *imersão isométrica. Definimos o comprimento(ou a norma) da segunda forma fundamental em* $p \in M$ *como o valor*

$$\|B(p)\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\|B(e_i, e_j)\|^2},$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ *é uma base ortonormal de* T_pM.

Observação 2.116 *O comprimento da segunda forma fundamental independe da escolha* *da base ortonormal de T_pM(Ver WILLMORE (1993), pág. 120).*

Definição 2.117 *Considere $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ imersão isométrica. Definimos a parte sem traço da segunda forma fundamental*

$$B^\circ(X,Y) = B(X,Y) - g(X,Y)\vec{H},$$

para todos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, onde U é um aberto de M tal que $f|_U$ seja um mergulho e g é métrica Riemanniana de $\overline{M}$. Para cada $p \in M$ definimos também a comprimento(ou norma) da parte sem traço da segunda forma fundamental B° em p por

$$\|B^\circ\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \|B^\circ(e_i, e_j)\|^2},$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal do espaço tangente T_pM.

Observações 2.118 *Sobre a definição acima:*

i) O comprimento da parte sem traço da segunda forma fundamental em um ponto não depende da escolha da base ortonormal da plano tangente a esse ponto.

ii) Em coordenadas locais sabemos que

$$B^\circ_{ij} = B_{ij} - g_{ij}\vec{H}$$

iii) Ainda em coordenadas locais, sabemos pelo produto de tensores na métrica Riemanniana que

$$\|B^\circ\| = \sqrt{g(B^\circ, B^\circ)} = \sqrt{\sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij}g^{kl}g(B^\circ_{ik}, B^\circ_{jl})}$$

(Ver LEE (1997), pág.29.).

No próximo resultado relacionaremos as curvaturas principais e a segunda forma fundamental de duas variedades M e $\overline{M}$, no contexto acima de uma imersão isométrica $f : M \longrightarrow \overline{M}$. Dados $x, y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$ linearmente independentes, indicaremos por $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por x e y.

Teorema 2.119 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e $x, y \in T_pM$ vetores ortonormais. Então,*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - \|B(x,y)\|^2.$$

Demonstração: Ver CARMO (2008), Teorema 2.5, pág. 143. ■

Observação 2.120 *Quando $M = S$ é uma superfície e $\overline{M} = \mathbb{R}^3$, dados $p \in S$ e um vetor unitário $\eta \in (T_pS)^\perp$. Sendo $k_1(p), k_2(p)$ as curvatura principais de S em p que são os autovalores do operador $S_\eta : T_pS \longrightarrow T_pS$ associados a uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de* *autovalores de S_η. Daí,*

$$B(e_i, e_j) = \langle B(e_1, e_j), \eta\rangle\eta = \langle S_\eta(e_i), e_j\rangle\eta = k_i(p)\langle e_i, e_j\rangle\eta,\ i, j = 1, 2,$$

donde $B(e_i, e_j) = k_i(p)\eta$ se $i = j$ e $B(e_i, e_j) = 0$ se $i \neq j$. Logo, pelo Teorema de Gauss 2.119,

$$K(e_1, e_2) - \underbrace{\overline{K}(e_1, e_2)}_{=0} = k_1(p)k_2(p) = K(p),$$

ou seja, a curvatura seccional de S coincide com a curvatura Gaussiana.

Teorema 2.121 (Gauss-Bonnet) *Seja S uma 2-variedade Riemanniana compacta e orientável. Então,*

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S),$$

onde K é a curvatura Gaussiana em S, dA é o elemento volume de S e $\chi(M) = F - A + V$ é a característica de Euler-Poincaré para uma dada triangulação sendo F o número de Faces, A o número de arestas, e V o número de vértices da triangulação.
Demonstração: Ver LEE (1997) Teorema 9.7, pág. 167. ∎

2.3 Resultados adicionais

Nessa subseção falaremos de algumas definições e resultados além das preliminares de variedades diferenciáveis e Riemannianas.

Definição 2.122 *Seja U subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é conforme se os ângulos (não orientados) de curvas que se encontram são preservados, ou seja, se o ângulo (não orientado) de dois vetores quaisquer v_1 e v_2 em $p \in U$ é igual ao ângulo de $df_p v_1$ com $df_p v_2$.*

Proprosição 2.123 *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (U aberto) aplicação diferenciável. Então, f é uma aplicação conforme se, e somente se, para todo $p \in U$ e para todo par de vetores v_1 e v_2 em p satisfaz:*

$$\langle df_p v_1, df_p v_2\rangle = \lambda^2(p)\langle v_1, v_2\rangle,\ \lambda(p) > 0.$$

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos que f é conforme e fixemos arbitrariamente $p \in U$. Dados dois vetores v_1 e v_2 em p sabemos que

$$\frac{\langle df_p v_1, df_p v_2\rangle}{\|df_p v_1\|\|df_p v_2\|} = \cos\sphericalangle(df_p v_1, df_p v_2) = \cos\sphericalangle(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\|v_2\|}$$

Assim,

$$\langle df_p v_1, df_p v_2\rangle = \left(\frac{\|df_p v_1\|\|df_p v_2\|}{\|v_1\|\|v_2\|}\right)\langle v_1, v_2\rangle.$$

Assim, tome $\lambda^2(p) = \dfrac{\|df_pv_1\|\|df_pv_2\|}{\|v_1\|\|v_2\|}$ e mostramos o desejado.
($\Leftarrow$) Reciprocamente, para cada $p \in U$ e para cada par de vetores v_1 e v_2 em p usemos a notação $\sphericalangle(v_1, v_2)$ para representar o ângulo não orientado de v_1 e v_2. Se $\sphericalangle(v_1, v_2) = 0$ não temos o que fazer,pois $v_1 = v_2$ ou $v_1 = -v_2$ e daí o resultado saí direto. Caso contrário, a hipótese nos garante

$$\cos \sphericalangle(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{\langle df_pv_1, df_pv_2\rangle}{\lambda^2(p)\|v_1\|\|v_2\|}.$$

Mas, em particular,

$$\begin{aligned}
\|df_pv_i\|^2 \quad &= \langle df_pv_i, df_pv_i\rangle = \lambda^2(p)\langle v_i, v_i\rangle = \lambda^2(p)\|v_i\|^2, \ i = 1, 2.\\
\Longrightarrow \quad & \lambda^2(p) = \frac{\|df_pv_i\|^2}{\|v_i\|^2}, i = 1, 2.\\
\Longrightarrow \quad & \lambda(p) = \frac{\|df_pv_i\|}{\|v_i\|}, \ i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\cos \sphericalangle(v_1, v_2) = \frac{\langle df_pv_1, df_pv_2\rangle}{\lambda(p)\|v_1\|\lambda(p)\|v_2\|} = \frac{\langle df_pv_1, df_pv_2\rangle}{\|df_pv_1\|\|df_pv_2\|} = \cos \sphericalangle(df_pv_1, df_pv_2),$$

onde $\sphericalangle(df_pv_1, df_pv_2)$ é o ângulo não orientado formado pelos vetores df_pv_1 e df_pv_2 em $f(p)$. Portanto, f preserva ângulos e assim é uma aplicação conforme. ■

Observação 2.124 *A função positiva $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida acima será chamada o coeficiente de conformidade de f. Além disso, temos a relação do coeficiente de conformidade $\lambda^2 = e^{2\ln\lambda}$.*

Exemplo 2.125 *Uma transformação linear $M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é denominada um movimento rígido(ou uma isometria) quando $M(x) = A(x) + b, \forall x \in \mathbb{R}^n$, onde A é uma transformação ortogonal sobre $\mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$ um vetor fixo. M é uma aplicação conforme.*
De fato, claramente M é suave com

$$dM_pv = Av, \forall p \in \mathbb{R}^n, \ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Consequentemente, usando o fato de A preservar produto interno(uma vez que, A é uma transformação linear ortogonal) ganhamos

$$\langle dM_pv_1, v_2\rangle = \langle Av_1, Av_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle,$$

para todos v_1 e v_2 vetores partindo de $p \in \mathbb{R}^n$. Logo, pela Proposição 2.123 M é uma aplicação conforme com coeficiente de conformidade $\lambda(p) = 1, \ \forall p \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.126 *Uma homotetia é uma aplicação $\mathcal{H}_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\mathcal{H}_\alpha(x) = \alpha x$, onde α é uma constante real positiva, a qual chamaremos de coeficiente da dilatação. $\mathcal{H}_\alpha$ é uma aplicação conforme.*
Pela a diferenciabilidade de $\mathcal{H}_\alpha$ segue-se do fato de $\mathcal{H}_\alpha$ ser linear e alem disso, sabemos

que

$$d(\mathcal{H}_\alpha)_p v = \alpha v,\ \forall p \in \mathbb{R}^n,\ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

A partir disso, dados v_1 e v_2 vetores partindo de $p \in \mathbb{R}^n$ obtemos

$$\langle d(\mathcal{H}_\alpha)_p v_1, d(\mathcal{H}_\alpha)_p v_2\rangle = \langle \alpha v_1, \alpha v_2\rangle = \alpha^2 \langle v_1, v_2\rangle.$$

Logo, pela Proposição 2.123 $\mathcal{H}_\alpha$ é conforme com coeficiente de conformidade $\lambda(p) = \alpha$.

Exemplo 2.127 *Sejam $a \in \mathbb{R}^3$ e $r > 0$. A aplicação inversão da esfera com centro a e raio r $\mathbb{S}^2_r(a)$ é a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^3 - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{a\}$ definida por*

$$\varphi(x) = r^2 \frac{x-a}{\|x-a\|^2} + a.$$

Afirmamos que φ é uma aplicação conforme.
Observe que φ é diferenciável e vale para cada vetor $v \in \mathbb{R}^n$ partindo de $p \in U$

$$d\varphi_p v = r^2 \frac{v}{\|p-a\|^2} - 2r^2 \frac{\langle p-a, v\rangle}{\|p-a\|^4}(p-a).$$

Assim, dados u e v vetores partindo de p,

$$\begin{aligned}
\langle d\varphi_p u, d\varphi_p v\rangle &= r^4 \frac{\langle u, v\rangle}{\|p-a\|^4} - 4r^4 \frac{\langle p-a, u\rangle\langle p-a, v\rangle}{\|p-a\|^6} + 4r^4 \frac{\langle p-a, u\rangle\langle p-a, v\rangle}{\|p-a\|^8}\|p-a\|^2 \\
&= \frac{r^4}{\|p-a\|^4}\langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Assim tomando $\lambda(p) = \frac{r^2}{\|p-a\|^2}, p \in U$ temos que

$$\langle d\varphi_p v_1, d\varphi_p v_2\rangle = \lambda^2(p)\langle v_1, v_2\rangle,$$

para todo $p \in U$ e todo par de vetores v_1 e v_2 partindo de p. Portanto, pela Proposição 2.123, φ é uma aplicação conforme.

Observação 2.128 *Observe que a aplicação inversão da esfera de centro $a \in \mathbb{R}^3$ e raio $r > 0$ $\varphi : \mathbb{R}^3 - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{a\}$, geometricamente aplica um ponto $p \in \mathbb{R}^3 - \{a\}$ em um ponto $\varphi(p) \in \mathbb{R}^3 - \{a\}$ que está na reta determinada pelos pontos p e a, a uma distância $\|\varphi(p) - a\| = \frac{1}{\|p-a\|}$ de a. Portanto, $\varphi(\mathbb{S}^2_r(a)) = \mathbb{S}^2_r(a)$ e φ permuta entre si as regiões interior e exterior de $\mathbb{S}^2_r(a)$(exceto o ponto a em que φ não está definida nesse ponto).*

As transformações conformes em $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$ tem uma caracterização muito importante. Mais precisamente, uma transformação conforme $T : U \longrightarrow \mathbb{R}^n(U \subset \mathbb{R}^n$ aberto), pode ser vista em termos de homotetias, movimentos rígidos e inversões da esfera, esse fato é o que diz o próximo teorema a seguir. Vale ressaltar que omitiremos a demonstração desse resultado, pois tal prova não está entre os objetivos do trabalhos. Contudo, deixaremos a referência para os leitores que desejarem saber a demonstração desse resultado.

Teorema 2.129 (Liouville) *Seja $T : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, uma transformação conforme de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então, T é a restrição a U de uma composição de movimentos rígidos, dilatações e inversões, no máximo uma de cada.*
Demonstração: Ver CARMO (2008), Teorema 5.2, pág. 189. ■

3 FUNCIONAL DE WILLMORE

Nesse capítulo, apresentaremos o funcional de Willmore de uma superfície fechada e orientável S, além de explorar algumas propriedades do funcional, como por exemplo, a invariância por transformações conformes.

3.1 Definição, exemplos e algumas propriedades

Seja S uma superfície de classe C^∞, fechada e orientável. Salvo menção contrária, consideraremos S é uma superfície conexa.

Definição 3.1 (Funcional de Willmore) *Seja $\mathcal{I}_S$ o espaço de todas as imersões diferenciáveis de S sobre o espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$. Definimos o funcional*

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : \ \mathcal{I}_S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \mathcal{W}(f) = \int_S H^2 dA, \end{aligned}$$

onde $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ é a curvatura média da imersão f(k_1 e k_2 são as curvaturas principais) e dA é o elemento de área de S.

Observações 3.2 *Note que na definição acima:*

i) *Na notação acima, a integração na verdade é sobre a imagem $f(S)$, pois estamos fazendo a identificação $S \equiv f(S)$ como subvariedade.*

ii) *O funcional $\mathcal{W}$ está bem definido. De fato, pela Versão Forte do Teorema da Imersão de Whitney (Teorema 2.57) $\mathcal{I}_S \neq \emptyset$. Além disso, como S é uma superfície fechada, sabemos em particular, que S é um espaço topológico compacto. Assim, dada $f \in \mathcal{I}_S$ se m for um mergulho, pela continuidade de f, $f(S)$ é compacta que pela continuidade da função curvatura média(Ver MONTIEL e ROS (2009), Proposição 3.43, pág. 89) em $f(S)$, $H(f(S))$ é compacto, em particular, limitado, ou seja, existe $C > 0$ tal que $|H(f(p))| \leq C, \forall p \in S$. Portanto,*

$$0 \leq \mathcal{W}(f) = \int_{f(S)} H^2 dA \leq \int_{f(S)} C^2 dA = C^2 \int_{f(S)} dA = C^2 \acute{A}rea(f(S)) < +\infty.$$

Agora se f não é um mergulho, isto é, apenas imersão, pelo Exemplo 2.55 podemos escrever

$$f(S) = \bigcup_{p \in S} V_p$$

onde cada V_p é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$($f(p) \in V_p$) associada a um mergulho $X_p : U_p \longrightarrow V_p \subset \mathbb{R}^3$ de um aberto $U_p \subset \mathbb{R}^2$ sobre V_p. Por U_p ser aberto podemos encontrar $\varepsilon_p > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_p = B[X_p^{-1}(f(p)), \varepsilon_p] \subset U_p$, assim por X_p ser homeomorfismo e B_p compacto, $X_p(B_p)$ é compacto. Logo,

$$f(S) = \bigcup_{p \in S} X_p(B_p)$$

e daí por $f(S)$ ser compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $\{X_{p_i}(B_{p_i})\}_{i=1}^k$

da cobertura acima(para ver isso basta tomar $A_p = int(B_p) = B(X_p^{-1}(f(p)), \varepsilon_p)$ e assim $\{X_p(A_p)\}_{p\in S}$ é uma cobertura aberta para $f(S)$ da qual podemos extrair uma subcobertura finita $\{X_{p_i}(A_{p_i})\}_{i=1}^k$ e por $X_{p_i}(A_{p_i}) \subset X_{p_i}(B_{p_i})$ para $i = 1, \cdots, k$ temos o afirmado), onde $X_{p_i}(B_{p_i})$ é uma superfície regular compacta e assim pelo fato da função curvatura média estar definida em cada uma dessas k superfícies e ser uma aplicação contínua temos que $H(X_{p_i}(B_{p_i}))$ é compacto, isto é, existe $C_i > 0$ tal que

$$|H(q)| \leq C_i, \ \forall q \in X_{p_i}(B_{p_i}), \ i = 1, \cdots, k.$$

Assim, olhando para os abertos V_{p_i} que contém $W_i := X_{p_i}(B_{p_i})$, tomemos $\{\psi_i\}$ partição da unidade associada a cobertura $\{V_{p_i}\}$ e assim obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(f) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{V_{p_i}} \psi_i H^2 \chi_{W_i} dA \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{V_{p_i}} C_i^2 \psi_i \chi_{W_i} dA = \\
&= \sum_{i=1}^{k} C_i^2 \int_{W_i} \psi_i dA \leq \max_{1\leq i\leq k}\{C_i\} \int_{f(S)} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \psi_i\right)}_{\overset{\|}{1}} dA = \\
&= \max_{1\leq j\leq k}\{C_i\} \acute{A}rea(f(S)) < +\infty.
\end{aligned}$$

O que prova a boa definição do funcional de Willmore.

iii) *Para os próximos resultados, dada $f \in \mathcal{I}_S$ podemos assumir que f é um mergulho, pois pelo item anterior, o cálculo de $\mathcal{W}(f)$ quando f é apenas imersão se reduz a uma quantidade finita de integrais, onde f restrita essas regiões é um mergulho.*

iv) *Para cada $f \in \mathcal{I}_S$, chamamos $\mathcal{W}(f)$ a energia de Willmore da "superfície"$f(S)$.*

Exemplo 3.3 *Consideremos o mergulho trivial da esfera $\mathbb{S}_r^2(a) \subset \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned}
m: \ \mathbb{S}_r^2(a) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
x &\longmapsto m(x) = x.
\end{aligned}$$

Temos que $\mathcal{W}(m) = 4\pi$.

De fato, observemos inicialmente que $m(\mathbb{S}_r^2(a)) = \mathbb{S}_r^2(a)$. Por outro lado, perceba que a aplicação $N : \mathbb{S}_r^2(a) \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $N(p) = \dfrac{1}{r}(p-a)$ é uma aplicação normal de Gauss para $\mathbb{S}_r^2(a)$, donde $dN_p u = \dfrac{1}{r}u, \ \forall u \in T_p\mathbb{S}_r^2(a)$. Tomando a base de autovetores $\{e_1, e_2\} \subset T_p\mathbb{S}_r^2(a)$ de $-dN_p$ associada as curvaturas principais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ obtemos que

$$k_1(p) = k_2(p) = -\frac{1}{r} \Longrightarrow H(p) = -\frac{1}{r}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(m) &= \int_{\mathbb{S}_r^2(a)} H^2 dA = \int_{\mathbb{S}_r^2(a)} \frac{1}{r^2} dA = \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{S}_r^2(a)} 1 dA = \frac{1}{r^2} \text{Área}(\mathbb{S}_r^2(a)) = \\
&= \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi.
\end{aligned}$$

Observações 3.4 *No exemplo acima, a energia de Willmore da esfera $\mathbb{S}^2_r(a)$ independe do raio e do centro. Em particular, se aumentarmos ou diminuirmos o raio da esfera, via uma homotetia, a energia de Willmore da esfera é preservada. Mais adiante, mostraremos que essa invariância por homotetia não é um fato válido apenas para a esfera.*

Exemplo 3.5 *Consideremos o mergulho padrão do toro $\mathbb{T}^2(a,b)$ em $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{T}^2(a,b) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto f(x)=x, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{T}^2(a,b)$ é o toro dado pela parametrização

$$p=(a+b\cos u)\cos v,\ \ q=((a+b\cos u)\operatorname{sen} v,\ \ r=b\operatorname{sen} u,$$

com $a>b>0$, $u,v\in(0,2\pi)$. Calculemos $\mathcal{W}(f)$.
Com efeito, denotando por E, F, G os coeficientes da primeira forma fundamental e por e, f, g os coeficientes da segunda forma fundamental de $\mathbb{T}^2(a,b)$ sabemos por CARMO (2012), Exemplo 1, pág. 184 que

$$\begin{gathered} E=b^2,\ \ F=0,\ \ G=(a+b\cos u)^2 \\ e=b,\ \ f=0,\ \ g=(a+b\cos u)\cos u \end{gathered}$$

Assim, denotando por H a curvatura média de $\mathbb{T}^2(a,b)$ pela parametrização acima, obtemos

$$H=\frac{eG-2fF+Eg}{2(EG-F^2)}=\frac{b(a+b\cos u)^2+b^2(a+b\cos u)\cos u}{2b^2(a+b\cos u)^2}=\frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)},$$

donde

$$H^2=\left(\frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)}\right)^2=\frac{a^2+4ab\cos u+4b^2\cos^2 u}{4b^2(a+b\cos u)^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f) &= \int_{\mathbb{T}^2(a,b)} H^2 dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2+4ab\cos u+4b^2\cos^2 u}{4b^2(a+b\cos u)^2}\right)\sqrt{EG-F^2}\,dudv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2+4ab\cos u+4b^2\cos^2 u}{4b^2(a+b\cos u)^2}\right) b(a+b\cos u)\,dudv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2+4ab\cos u+4b^2\cos^2 u}{4b(a+b\cos u)}\right) dudv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2}{4b(a+b\cos u)}+\cos u\right) dudv \\ &= \frac{a^2}{4b}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dudv}{a+b\cos u}+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos u\,dudv, \end{aligned}$$

onde a última integral dupla é igual a zero. Além disso, note que a função a ser integrada na primeira integral iterada só depende da variável u e assim ficamos com a integral imprópria

$$\mathcal{W}(f) = \frac{a^2\pi}{2b}\int_0^{2\pi}\frac{du}{a+b\cos u} = \frac{a^2\pi}{b}\int_0^{\pi}\frac{du}{a+b\cos u},$$

onde a última igualdade se justifica pela função que está sendo integrada ser par. Fazendo a substituição $z = \tan\frac{u}{2}$ temos que $u \to \pi \implies z \to +\infty$, $\cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ e $du = \frac{2dz}{1+z^2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(f) &= \frac{a^2\pi}{b}\int_0^{\pi}\frac{du}{a+b\cos u}\\
&= \frac{a^2\pi}{b}\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_0^{\varepsilon}\frac{2dz}{a+b+(a-b)z^2}\\
&= \frac{2a^2\pi}{b(a+b)}\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_0^{\varepsilon}\frac{dz}{1+\frac{(a-b)}{a+b}z^2}\\
&= \frac{2a^2\pi}{b(a+b)}\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\varepsilon\right) - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot 0\right)\right]\\
&= \frac{2a^2\pi}{b(a+b)}\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\varepsilon\right)\right]\\
&= \frac{2a^2\pi}{b(a+b)}\cdot\frac{\pi\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}},
\end{aligned}$$

pois a continuidade da função $g(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}x\right)$ garante que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}}.$$

Logo,

$$\mathcal{W}(f) = \frac{a^2\pi^2\sqrt{a+b}}{b\sqrt{a-b}(a+b)} = \frac{a^2\pi^2}{b\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} = \frac{a^2\pi^2}{b\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{\pi^2}{\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}} = \frac{\pi^2}{c\sqrt{1-c^2}},$$

onde $c = \frac{b}{a}$, $c \in (0,1)$, pois $a > b$.

Observação 3.6 *No exemplo acima, perceba que*

$$\lim_{c\to0^+}\mathcal{W}(f) = \lim_{c\to1^-}\mathcal{W}(f) = +\infty.$$

Além disso, olhando $\mathcal{W}(f)$ como função de c e escrevendo $\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(f)(c)$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(f)'(c) &= \frac{\pi^2}{c^2(1-c^2)}\left(\sqrt{1-c^2} - \frac{2c^2}{2\sqrt{1-c^2}}\right)\\
&= \frac{-\pi^2}{c^2\sqrt{1-c^2}} + \frac{\pi^2}{\sqrt{1-c^2}},\quad \forall c \in (0,1).
\end{aligned}$$

Daí, $\mathcal{W}(f)'(c) = 0 \Longrightarrow c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$*. Calculando a segunda derivada em relação a c da função* $\mathcal{W}(f)$ *ganhamos que*

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(f)''(c) &= \frac{-\pi^2}{c^4(1-c^2)}\left(2c\sqrt{1-c^2}-\frac{2c^3}{2\sqrt{1-c^2}}\right)+\frac{4\pi^2 c}{3\sqrt{(1-c^2)^5}}\\ &= \frac{-2\pi^2}{c^3\sqrt{1-c^2}}+\frac{\pi^2}{c\sqrt{(1-c^2)^3}}+\frac{4\pi^2 c}{3\sqrt{(1-c^2)^5}},\ \ \forall c\in(0,1).\end{aligned}$$

E assim, $\mathcal{W}(f)''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{4\pi^2}{3} > 0$*. Portanto,* $\mathcal{W}(f)(c)$ *atinge valor mínimo para* $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$*. Quando* $a = \sqrt{2}$ *e* $b = 1$ *temos que* $\mathbb{T}^2(\sqrt{2}, 1)$ *é a imagem (via projeção estereográfica)do Toro de Clifford(em homenagem ao matemático inglês William Kingdon Clifford) dado por*

$$\mathbb{T}_{\sqrt{2}} := \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\phi, \operatorname{sen}\phi); \theta, \phi \in (0, 2\pi)\right\}.$$

Esse toro é conhecido por ser o único toro mínimo mergulhado em S^3 *além de estar relacionado com a famosa Conjectura de Willmore (Ver MARQUES e NEVES (2013)).*

Teorema 3.7 (Willmore-1965) *Seja S uma superfície de gênero 0. Então, para todo mergulho* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *temos*

$$\mathcal{W}(f) \geq 4\pi.$$

Além disso, $\mathcal{W}(f) = 4\pi$ *se, e somente se,* $f(S)$ *é uma esfera euclidiana.*

Demonstração: Seja $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho. Denotemos por k_1, k_2 as curvaturas principais em $f(S)$. Sabemos que,

$$K = k_1, k_2 \ \text{ e } \ H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

onde K e H são, respectivamente, as funções curvatura Gaussiana e Média da imersão f. Dessas igualdades temos que

$$\begin{aligned}H^2 &= \left(\frac{1}{2}(k_1+k_2)\right)^2 = \frac{1}{4}(k_1^2+2k_1k_2+k_2^2) = K - \frac{1}{2}k_1k_2 + \frac{1}{4}(k_1^2+k_2^2) =\\ &= K + \left(\frac{1}{2}(k_1-k_2)\right)^2\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{W}(f) = \int_S \left[K + \left(\frac{1}{2}(k_1-k_2)\right)^2\right] dA = \int_S K dA + \frac{1}{4}\int_S (k_1-k_2)^2 dA$$

que pelo Teorema de Gauss-Bonnet 2.121 ganhamos,

$$\mathcal{W}(f) = 2\pi\chi(S) + \frac{1}{4}\int_S (k_1-k_2)^2 dA,$$

mas por S ter gênero 0 sabemos que $\chi(S) = 2$ e assim na igualdade acima temos

$$\mathcal{W}(f) = 4\pi + \frac{1}{4}\int_S (k_1 - k_2)^2 dA \geq 4\pi,$$

uma vez que, a integral acima é não-negativa, pois $(k_1 - k_2)^2 \geq 0$.
Para o que falta, se $f(S)$ é uma esfera vê-se de forma inteiramente análoga ao Exemplo 3.3 que $\mathcal{W}(f) = 4\pi$. Reciprocamente, se $\mathcal{W}(f) = 4\pi$ temos pela desigualdade acima,

$$4\pi = \mathcal{W}(f) = 4\pi + \frac{1}{4}\int_S (k_1 - k_2)^2 dA \Longrightarrow \frac{1}{4}\int_S (k_1 - k_2)^2 dA = 0 \Longrightarrow \int_S (k_1 - k_2)^2 dA = 0,$$

o que implicaria $k_1 = k_2$. Assim, todos os pontos de $f(S)$ são umbílicos e por $f(S)$ ser compacta e conexa, temos por consequência do Teorema de Classificação das superfícies totalmente umbílicas (Ver MONTIEL e ROS (2009), Corolário 3.31, pág.85) $f(S)$ é um plano ou uma esfera euclidiana, mas por ser compacta(em particular, limitada), $f(S)$ é uma esfera euclidiana. ■

Para o próximo resultado precisaremos da seguinte

Definição 3.8 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e K curvatura Gaussiana definida em S. Dizemos que S convexa quando $K(p) > 0,\ \forall p \in S$.*

O resultado a seguir nos fornece, dentro de algumas hipóteses, uma limitação superior da energia de Willmore.

Teorema 3.9 (Willmore-1965) *Seja S uma superfície tal que $f(S)$ é uma superfície convexa e com área A então,*

$$4\pi \leq \mathcal{W}(f) \leq MA,$$

onde

$$M = \sup_{p \in f(S)} \left\{ K(p) - \frac{\Delta K(p)}{K(p)} \right\}$$

e ΔK é o laplaciano da função curvatura Gaussiana em $f(S)$.
Demonstração: Por $f(S)$ ser uma superfície compacta sabemos pelo Teorema de Chern-Lashoff(Ver MONTIEL e ROS (2009), Teorema 5.29, pág. 156) que

$$\int_{f(S)} K^+ dA \geq 4\pi,$$

onde $K^+(p) = \max\{K(p), 0\},\ \forall p \in f(S)$. Usando esse fato e que $H^2 \geq K$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f) &= \int_{f(S)} H^2 dA \geq \int_{f(S)} K dA = \int_{\{K \geq 0\}} K dA + \int_{\{K < 0\}} K dA \geq \int_{\{K \geq 0\}} K dA \\ &= \int_{f(S)} K^+ dA \geq 4\pi, \end{aligned}$$

onde $\{K \geq 0\} = \{p \in f(S); K(p) \geq 0\}$ e $\{K < 0\} = \{p \in f(S); K(p) < 0\}$. Por outro lado, por CHERN (1945) Teorema 5, sabemos que

$$H^2 \leq M.$$

Assim,

$$\mathcal{W}(f) = \int_{f(S)} H^2 dA \leq \int_{f(S)} M dA = M \int_{f(S)} 1 dA = MA.$$

O que encerra a demonstração. ∎

3.2 Invariância conforme do funcional de Willmore

Uma das propriedades mais importantes do funcional de Willmore é a sua invariância por transformações conforme. Nosso objetivo agora é provar tal resultado que é atribuído ao matemático austro-hungáro Wihelm Johann Eugen Blaschke em 1929. Para isso apresentaremos abaixo as ferramentas necessárias para a demonstração desse teorema.

Lema 3.10 (Invariância sob movimentos rígidos) *Considere S uma superfície e $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um movimento rígido. Então,*

$$\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(M \circ f), \ \forall f \in \mathcal{I}_S.$$

Demonstração: Inicialmente seja $f \in \mathcal{I}_S$ um mergulho. Sabemos que a diferencial $df_p : T_pS \longrightarrow T_p\mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $p \in S$ e $f : S \longrightarrow f(S)$ é um homeomorfismo. Por outro lado, sabemos que M é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ sobre si mesmo. Assim para cada $p \in S$

$$d(M \circ f)_p : T_pS \longrightarrow T_{(M \circ f)(p)}$$

é injetiva, pois é a composição de aplicações injetivas, a saber, df_p e $dM_{f(p)}$. Portanto, $M \circ f$ é também uma imersão diferenciável de S sobre $\mathbb{R}^3$ e claramente $M \circ f : S \longrightarrow M(f(S))$ é uma composição de homeomorfismos e assim um homeomorfismo logo faz sentido em $\mathcal{W}(M \circ f)$. Feita essa observação devemos mostrarmos que

$$\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(M \circ f).$$

Em outros termos, escrevendo $S' = f(S)$ devemos mostrar que

$$\int_{S'} H^2 dA = \int_{M(S')} \widehat{H}^2 d\widehat{A},$$

onde H e dA, $\widehat{H}$ e $\widehat{dA}$ são as funções curvatura média e os elementos área definidos em S e S', respectivamente. Como S' e $M(S')$ são superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$, suas compacidades implicam, pelo Teorema de Brower-Samelson (Ver MONTIEL e ROS (2009), Teorema 4.21, pág. 118) que S' e $M(S')$ são superfícies orientáveis. Tomemos $N : S' \longrightarrow \mathbb{S}^2$ um aplicação normal de Gauss definida em S'. Assim, sabemos que N é diferenciável, $\|N(p)\| = 1$ e $N(p) \perp T_pS'$, para todo $p \in S'$. A partir dessa normal de Gauss em S', afirmamos que $N' = A \circ N \circ M^{-1} : M(S') \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é uma normal de Gauss para $M(S')$.

De fato, inicialmente note que N' está bem definida, pois para todo $p \in M(S')$, existe $q \in S'$ tal que $M(q) = p$ e daí

$$\|N'(p)\| = \|(A \circ N)(M^{-1}(M(q)))\| = \|A \circ N(q)\| = \|N(q)\| = 1,$$

onde usamos na penúltima igualdade o fato que A preserva norma, uma vez que, A é transformação ortogonal. Logo, N' está bem definida. Além disso, N' é aplicação diferenciável pela Regra da Cadeia, uma vez que, N' é a composição de A, N e M^{-1} que são aplicações diferenciáveis. Ademais,

$$(dN')_p v = \big((dA)_{N(M^{-1}((p))} \circ (dN)_{M^{-1}(p)} \circ (dM^{-1})_p\big)\, v,\ \forall v \in T_p(M(S')),\ \forall p \in M(S').$$

Para concluir que N' é uma normal de Gauss definida em $M(S')$, resta verificarmos que $N'(p) \perp T_p(M(S'))$, $\forall p \in M(S')$. Para ver isso, considere $p \in M(S')$ e $v \in T_p(M(S'))$, por M ser difeomorfismo(em particular, bijeção), existem $q \in S'$ e $w \in TqS'$ tais que $M(q) = p$ e $(dM)_q w = v$. Agora usando o fato de A preservar produto interno (isto é, $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^3$) por ser ortogonal, obtemos que

$$\langle N'(p), v\rangle = \langle (A \circ N)(M^{-1}(M(q))), (dM)_q w\rangle = \langle A(N(q)), A(w)\rangle = \langle N(q), w\rangle = 0,$$

pois $N(q) \perp T_q S'$ e $dM_q w = A(w), \forall w \in T_q S'$. Desta forma, $N'(p) \perp T_p(M(S'))$, para todo $p \in M(S')$ e assim podemos concluir que N' é uma aplicação normal de Gauss para a superfície $M(S')$.
Agora mostraremos que $\widehat{H} = H \circ M^{-1}$. Com efeito, consideremos $p \in M(S')$ e escrevamos $q = M^{-1}(p)$. Seja

$$[(dN')_p] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a matriz da transformação linear $(dN')_p : T_p(M(S')) \longrightarrow T_p(M(S'))$ a qual está associada a uma base $\{e_1', e_2'\} \subset T_p(M(S'))$. Como $(dM)_q = A$ e A é um isomorfismo linear(pois é uma transformação linear ortogonal) então existem $e_1, e_2 \in T_q S'$ tais que

$$e_i' = (dM)_q e_i = A(e_i),\ i = 1, 2$$

e ainda temos que e_1 e e_2 formam uma base para $T_q S'$. Assim pela matriz de $(dN')_p$ temos que

$$(dN')_p e_i' = a_{1i} e_1' + a_{2i} e_2',\ i = 1, 2.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} ((dA)_{N(q)} \circ (dN)_q)((dM^{-1})_p((dM)_q e_i)) &= a_{1i} A(e_1) + a_{2i} A(e_2) = A(a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2) \\ \Longrightarrow (A \circ (dN)_q)(A^{-1}(A(e_i))) &= A(a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2) \\ \Longrightarrow A((dN)_q e_i) &= A(a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2),\ i = 1, 2, \end{aligned}$$

donde a injetividade de A implica

$$(dN)_q e_i = a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2,\ i = 1, 2.$$

Logo, a matriz $[(dN)_q]_{2\times 2}$ em relação a base $\{e_1, e_2\}$ é

$$[(dN)_q] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\widehat{H}(p) = -\frac{1}{2}\text{traço}[(dN')_p] = -\frac{1}{2}\text{traço}[(dN)_q] = H(q).$$

O que nos diz que M preserva curvatura média de superfícies. Finalmente, para provar o desejado consideremos uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS'. Por definição,

$$\begin{aligned} |\text{Jac}M|(p) &= |(dM)_p e_1 \wedge (dM)_p e_2| \\ &= |A(e_1) \wedge A(e_2)| \\ &= |\det A| = 1. \end{aligned}$$

Com isso podemos usar o Teorema da Mudança de Variáveis (Ver MONTIEL e ROS (2009), Teorema 5.14, pág. 144) e obter

$$\int_{M(S')} \widehat{H}^2 d\widehat{A} = \int_{S'} (\widehat{H} \circ M)^2 |\text{Jac}M| dA = \int_{S'} [(H \circ M^{-1}) \circ M] dA = \int_{S'} H^2 dA,$$

o que finaliza a prova. ∎

Corolário 3.11 (Invariância por simetrias) *Se S é uma superfície e $\mathcal{S} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a aplicação simetria definida por $\mathcal{S}(x) = -x$, então,*

$$\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(\mathcal{S} \circ f), \ \forall f \in \mathcal{I}_S.$$

Prova: Basta só notarmos que $\mathcal{S}$ é um movimento rígido. Uma vez que:

(i) $\mathcal{S}$ é linear

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x+y) &= -(x+y) = (-x) + (-y) = \mathcal{S}(x) + \mathcal{S}(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^3. \\ \mathcal{S}(\lambda x) &= -(\lambda x) = \lambda(-x) = \lambda \mathcal{S}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^3, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) $\mathcal{S}$ é transformação linear ortogonal

Para isso consideremos $x, y \in \mathbb{R}^3$ arbitrários e perceba que

$$\langle \mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y) \rangle = \langle -x, -y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Mostrando que $\mathcal{S}$ preserva produto interno. Logo, $\mathcal{S}$ é ortogonal

De (i) e (ii) vemos que

$$\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(x) + 0, \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Logo, pelo Lema 3.10 concluímos o corolário. ∎

Lema 3.12 (Invariância sob homotetias) *Sejam S superfície e $\mathcal{H}_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma* *homotetia com coeficiente* $\lambda > 0$. *Então,*

$$\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(\mathcal{H} \circ f), \ \forall f \in \mathcal{I}_S.$$

Demonstração: Inicialmente, perceba que $\mathcal{H}_\lambda$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ sobre si mesmo com

$$d(\mathcal{H}_\lambda)_p(v) = \lambda v, \forall v \in T_p\mathbb{R}^3.$$

Agora dado $f \in \mathcal{I}_S$ mergulho suave temos que $\mathcal{H}_\lambda \circ f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ também é um mergulho, pois $d(\mathcal{H}_\lambda \circ f)_p : T_pS \longrightarrow T_{(\mathcal{H}_\lambda \circ f)(p)}\mathbb{R}^3$ é injetiva, para todo $p \in S$, pois trata-se de uma composição de aplicações injetivas(df_p e $d(\mathcal{H}_\lambda)_{f(p)}$) e $\mathcal{H}_\lambda \circ f$ é um homeomorfismo de S sobre a $\mathcal{H}_\lambda(f(S))$. Assim, faz sentido em falar de $\mathcal{W}(\mathcal{H}_\lambda \circ f)$. Para provar o desejado, denotando por $S' = f(S)$ devemos mostrar que

$$\int_{S'} H^2 dA = \int_{\mathcal{H}_\lambda(S')} H_\lambda^2 dA_\lambda,$$

onde H(respc. H_λ) e dA(respc. dA_λ) são a função curvatura média em S'(resp. em $\mathcal{H}_\lambda(S')$) e o elemento de área de S'(respc. de $\mathcal{H}_\lambda(S')$), respectivamente. Para isso, sabemos já que S' e $\mathcal{H}_\lambda(S')$ são superfícies compactas e assim pelo Teorema de Brower-Samelson (Ver MONTIEL e ROS (2009), Teorema 4.21, pág. 118) elas são orientáveis. Considere $N : S' \longrightarrow \mathbb{S}^2$ aplicação normal de Gauss em S'. Afirmamos que a aplicação composta $N' = N \circ \mathcal{H}_\lambda^{-1} : \mathcal{H}_\lambda(S') \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é uma normal de Gauss para $\mathcal{H}_\lambda(S')$. De fato, primeiro N' está bem definida, pois para todo $p \in \mathcal{H}_\lambda(S')$ temos

$$\|N'(p)\| = \|(N \circ \mathcal{H}_\lambda^{-1})(p)\| = \|N(\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p))\| = 1.$$

Além disso, N' é diferenciável pela Proposição 2.27, uma vez que, N e $\mathcal{H}_\lambda^{-1}$ são aplicações diferenciáveis. Ademais, a Proposição 2.34 ainda nos diz que

$$(dN')_p = (dN)_{\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)} \circ (d\mathcal{H}_\lambda^{-1})_p, \forall p \in \mathcal{H}_\lambda(S').$$

Agora observe que $N'(p) \perp T_p(\mathcal{H}_\lambda(S'))$, para todo $p \in \mathcal{H}_\lambda(S')$. Para ver isso, dado um vetor $v \in T_p(\mathcal{H}_\lambda(S'))$ sabemos por $(d\mathcal{H}_\lambda)_{\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)}$ ser um isomorfismo linear que existe $w \in T_{\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)}S'$ tal que $v = (d\mathcal{H}_\lambda)_{\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)}w$ e daí

$$\langle N'(p), v\rangle = \langle (N \circ \mathcal{H}_\lambda^{-1})(p), (d\mathcal{H}_\lambda)_{\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)}w\rangle = \langle N(\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)), \lambda w\rangle = \lambda\langle N(\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)), w\rangle = 0,$$

pois $N(\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)) \perp T_{\mathcal{H}_\lambda^{-1}(p)}S'$. Portanto, N' é uma aplicação normal de Gauss para $\mathcal{H}_\lambda(S')$. Mostraremos que vale a seguinte relação,

$$H_\lambda \circ \mathcal{H}_\lambda = \frac{1}{\lambda}H.$$

De fato, seja $q \in S'$, escrevamos $p = \mathcal{H}_\lambda(q)$ e considere

$$[(dN')_p] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a matriz da transformação linear $(dN')_p$ associada a base $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(\mathcal{H}_\lambda(S'))$. Assim vale as seguintes igualdades

$$
\begin{aligned}
(dN')_p e_1 &= ae_1 + ce_2\\
(dN')_p e_2 &= be_1 + de_2.
\end{aligned}
$$

Mas por $(d\mathcal{H}_\lambda)_q$ ser isomorfismo linear tem-se que existem $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ em T_qS' tais que $\{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2\}$ formam uma base para T_qS' e $\lambda\widetilde{e}_i = (d\mathcal{H}_\lambda)_q\widetilde{e}_i,\ i = 1, 2$. Dessa forma, pelo exposto acima temos

$$
\begin{aligned}
((dN)_q \circ (d\mathcal{H}_\lambda^{-1})_p)e_1 &= (\lambda a)\widetilde{e}_1 + (\lambda c)\widetilde{e}_2\\
\Longrightarrow (dN)_q\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\widetilde{e}_1\right) &= (\lambda a)\widetilde{e}_1 + (\lambda c)\widetilde{e}_2\\
\Longrightarrow (dN)_q\widetilde{e}_1 &= (\lambda a)\widetilde{e}_1 + (\lambda c)\widetilde{e}_2.
\end{aligned}
$$

Analogamente tem-se

$$
(dN)_q\widetilde{e}_2 = (\lambda b)\widetilde{e}_1 + (\lambda d)\widetilde{e}_2,
$$

mostrando que a matriz da transformação linear $(dN)_q$ é

$$
[(dN)_q] = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b\\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
H_\lambda(\mathcal{H}_\lambda(q)) &= -\frac{1}{2}\text{traço}[(dN')_p]\\
&= -\frac{1}{2}(a+d)\\
&= \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{2}(\lambda a + \lambda d)\right]\\
&= \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{2}\text{traço}[(dN)_q]\right]\\
&= \frac{1}{\lambda}H(q),
\end{aligned}
$$

provando a relação afirmada. Agora dada $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de T_qS' note que

$$
|\text{Jac}\mathcal{H}_\lambda|(q) = |(d\mathcal{H}_\lambda)_q e_1 \wedge (d\mathcal{H}_\lambda)_q e_2| = |\lambda e_1 \wedge \lambda e_2| = \lambda^2 |e_1 \wedge e_2| = \lambda^2 \underbrace{|N(q)|}_{=1} = \lambda^2.
$$

Finalmente, usando o fato que $\mathcal{H}_\lambda$ é um difeomorfismo e as observações acima temos pelo Teorema da Mudança de Variáveis (Ver MONTIEL e ROS (2009), Teorema 5.14, pág. 144) que

$$
\int_{\mathcal{H}_\lambda(S')} H_\lambda^2 dA_\lambda = \int_{S'} (H_\lambda \circ \mathcal{H}_\lambda)^2 |\text{Jac}\mathcal{H}_\lambda| dA = \int_{S'} \left(\frac{1}{\lambda}H\right)^2 \lambda^2 dA = \int_{S'} H^2 dA,
$$

isto é, $\mathcal{W}(\mathcal{H}_\lambda \circ f) = \mathcal{W}(f)$. Provando a invariância do funcional de Willmore por homotetias. $\blacksquare$

Lema 3.13 (Invariância sob inversões) *Considere S uma superfície e uma inversão $\varphi : \mathbb{R}^3 - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{a\}$ da esfera de centro $a \in \mathbb{R}^3$ e raio $r > 0$. Então,*

$$\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(\varphi \circ f),\ \forall f \in \mathcal{I}_S.$$

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{I}_S$ mergulho suave. Observe que podemos supor, a menos de translações(que são movimentos rígidos), que o centro da inversão a é a origem de $\mathbb{R}^3$ e que $0 \notin f(S)$. A partir dessa observação podemos considerar que

$$\varphi(x) = r^2 \frac{x}{\|x\|^2},\ \forall x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}.$$

Veja que $\varphi \circ f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um mergulho de S sobre $\mathbb{R}^3$. Com efeito, perceba que φ é um difeomorfismo com

$$d\varphi_p v = r^2 \frac{v}{\|p\|^2} - 2r^2 \frac{\langle p, v\rangle}{\|p\|^4} p,\ \forall p \in S,\ \forall v \in T_pS.$$

Consequentemente, para cada $p \in S$, $d(\varphi \circ f)_p = d\varphi_{f(p)} \circ df_p$ é injetiva, pois trata-se de uma composição de aplicações injetivas. E por fim, $\varphi \circ f$ é claramente uma composição de homeomorfismos e portanto um homeomorfismo.
Agora denotaremos $S' = f(S)$. Dado $p \in S'$, considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset S'$ uma parametrização de S' em torno de p com $X(q) = p$. A partir dessa parametrização e pelo fato de φ ser diferenciável temos que

$$d(\varphi \circ X)_q u = r^2 \frac{dX_q u}{\|X(q)\|^2} - 2r^2 \frac{\langle X(q), dX_q u\rangle}{\|X(q)\|^4} X(q),\ \forall u \in T_q\mathbb{R}^2, \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned}
\langle d(\varphi \circ X)_q u, d(\varphi \circ X)_q v\rangle &= r^4 \frac{\langle dX_q u, dX_q v\rangle}{\|X(q)\|^4} - 2r^4 \frac{\langle X(q), dX_q v\rangle \langle X(q), dX_q u\rangle}{\|X(q)\|^6} - \\
&- 2r^4 \frac{\langle X(q), dX_q u\rangle \langle X(q), dX_q v\rangle}{\|X(q)\|^6} + \\
&+ 4r^4 \frac{\langle X(q), dX_q u\rangle \langle X(q), dX_q v\rangle \langle X(q), X(q)\rangle}{\|X(q)\|^8},\ \forall u, v \in T_q\mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned}
\langle d(\varphi \circ X)_q u, d(\varphi \circ X)_q v\rangle &= r^4 \frac{\langle dX_q u, dX_q v\rangle}{\|X(q)\|^4} - 4r^4 \frac{\langle X(q), dX_q u\rangle \langle X(q), dX_q v\rangle}{\|X(q)\|^6} + \\
&+ 4r^4 \frac{\langle X(q), dX_q u\rangle \langle X(q), dX_q v\rangle}{\|X(q)\|^6} \\
&= r^4 \frac{\langle dX_q u, dX_q v\rangle}{\|X(q)\|^4},\ \forall u, v \in T_q\mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Agora, denotando por dA e $d\overline{A}$ os elementos de área para S' e $\varphi(S')$, respectivamente, afirmamos que

$$d\overline{A}(\varphi(X(q))) = \frac{r^4}{\|X(q)\|^4} dA(X(q)). \tag{2}$$

De fato, dados $x, y \in T_pS'$ e $\overline{x}, \overline{y} \in T_{\varphi(p)}\varphi(S')$ suas respectivas imagens pelo isomorfismo $d\varphi_p$, observe que, $z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x$ é a componente do vetor y que é ortogonal ao vetor x e a partir dela temos pela leariedade de $d\varphi_p$ que,

$$\overline{z} = d\varphi_p(z) = d\varphi_p y - \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} d\varphi_p x = \overline{y} - \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}\overline{x} = \overline{y} - \frac{\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle}{\|\overline{x}\|^2}\overline{x}$$

(na última igualdade acima, usamos o fato que $\langle d\varphi_p a, d\varphi_p b\rangle = \frac{r^4}{\|p\|^4}\langle a, b\rangle,\ \forall a, b \in T_pS'$.) é a componente do vetor $\overline{y}$ a qual é ortogonal ao vetor $\overline{x}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|\overline{x} \times \overline{z}\| &= \sqrt{\|\overline{x}\|^2 \cdot \|\overline{z}\|^2 - \langle \overline{x}, \overline{z}\rangle^2} \\
&= \sqrt{\|\overline{x}\|^2 \cdot \|\overline{z}\|^2} \\
&= \sqrt{\|\overline{x}\|^2 \cdot \left(\|\overline{y}\|^2 - \frac{\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle^2}{\|\overline{x}\|^2}\right)} \\
&= \sqrt{\|\overline{x}\|^2 \cdot \|\overline{y}\|^2 - \langle \overline{x}, \overline{y}\rangle^2} \\
&= \|\overline{x} \times \overline{y}\|.
\end{aligned}$$

Analogamente tem-se $\|x \times z\| = \|x \times z\|$. Assim,

$$\begin{aligned}
d\overline{A}(\varphi(X(q)))(\overline{x}, \overline{y}) &= d\overline{A}(\varphi(p))(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} \times \overline{y}\| = \|\overline{x} \times \overline{z}\| = \|\overline{x}\| \cdot \|\overline{z}\| \\
&= \sqrt{\frac{r^4}{\|X(q)\|^4}\|x\|^2} \cdot \sqrt{\frac{r^4}{\|X(q)\|^4}\|z\|^2} = \frac{r^4}{\|X(q)\|^4}\|x\|\|z\| \\
&= \frac{r^4}{\|X(q)\|^4}\|x \times z\| = \frac{r^4}{\|X(q)\|^4}|x \times y\| \\
&= \frac{r^4}{\|X(q)\|^4} dA(X(q))(x, y),
\end{aligned}$$

o que prova o afirmado.
Por outro lado, se N é uma normal de Gauss para S', então

$$\overline{N}(\varphi(X(u))) = \frac{2}{\|X(u)\|^2}\langle X(u), N(X(u))\rangle X(u) - N(X(u)),\ \forall u \in U$$

é uma normal de Gauss para $\varphi(S')$. De fato, inicialmente observe que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{N}(\varphi(X(u))), \overline{N}(\varphi(X(u)))\rangle &= \frac{4}{\|(X(u))\|^4}\langle X(u), N(X(u))\rangle^2 \|X(u)\|^2 - \\
&- \frac{4}{\|X(u)\|^2}\langle X(u), N(X(u))\rangle\langle X(u), N(X(u))\rangle + \\
&+ \|N(X(u))\|^2 \\
&= \frac{4}{\|(X(u))\|^2}\langle X(u), N(X(u))\rangle^2 - \\
&- \frac{4}{\|(X(u))\|^2}\langle X(u), N(X(u))\rangle^2 + \|N(X(u))\|^2 \\
&= \|N(X(u))\|^2 \\
&= 1, \forall u \in U,
\end{aligned}$$

uma vez que, N é uma normal de Gauss local em V. Além disso, cada $\overline{u} = \varphi(u) \in \varphi(V)$ pode ser escrito como $u = X(u')$ para algum $u' \in U$ e assim para todo $v \in T_{\overline{u}}\varphi(S')$ que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{N}(\overline{u}), v\rangle &= \langle \overline{N}(\varphi(X(u'))), v\rangle = \left\langle \frac{2}{\|X(u')\|^2}\langle X(u'), N(X(u'))\rangle X(u') - N(X(u')), v\right\rangle \\
&= \frac{2}{\|X(u')\|^2}\langle X(u'), N(X(u'))\rangle\langle X(u'), v\rangle - \langle N(X(u')), v\rangle
\end{aligned}$$

mas pelo fato de $d\varphi_u : T_uS' \longrightarrow T_{\overline{u}}\varphi(S')$ ser um isomorfismo, existe $w \in T_uS'$ tal que $d\varphi_u w = v$ e por $T_uS' = dX_{u'}\mathbb{R}^2$, existe $z \in T_{u'}\mathbb{R}^2$ tal que $dX_{u'}z = w$. Assim, por (1) obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{N}(\overline{u}), v\rangle &= \frac{2\langle X(u'), N(X(u'))\rangle}{\|X(u')\|^2}\left\langle X(u'), r^2\frac{dX_{u'}z}{\|X(u')\|^2} - 2r^2\frac{\langle X(u'), dX_{u'}z\rangle}{\|X(u')\|^4}X(u')\right\rangle - \\
&- \left\langle N(X(u')), r^2\frac{dX_{u'}z}{\|X(u')\|^2} - 2r^2\frac{\langle X(u'), dX_{u'}z\rangle}{\|X(u')\|^4}X(u')\right\rangle \\
&= \frac{2r^2}{\|X(u')\|^4}\langle X(u'), N(X(u'))\rangle\langle X(u'), dX_{u'}z\rangle - \\
&- \frac{4r^2}{\|X(u')\|^6}\langle X(u'), N(X(u'))\rangle\langle X(u'), dX_{u'}\rangle\langle X(u'), X(u')\rangle - \\
&- \frac{r^2}{\|X(u')\|^2}\langle N(X(u')), dX_{u'}z\rangle + \frac{2r^2}{\|X(u')\|^4}\langle X(u'), dX_{u'}z\rangle\langle N(X(u')), X(u')\rangle \\
&= \frac{4r^2}{\|X(u')\|^4}\langle X(u'), N(X(u'))\rangle\langle X(u'), dX_{u'}z\rangle - \\
&- \frac{4r^2}{\|X(u')\|^4}\langle X(u'), N(X(u'))\rangle\langle X(u'), dX_{u'}z\rangle - \frac{r^2}{\|X(u')\|^2}\langle N(X(u')), dX_{u'}z\rangle \\
&= -\frac{r^2}{\|X(u')\|^2}\langle N(X(u')), dX_{u'}z\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $dX_{u'} \in T_uS'$ e por N ser uma normal de Gauss é sabido que $T_uS' \perp N(u)$. E por último, perceba que $\overline{N}$ é diferenciável e vale que

$$\begin{aligned}
d(\overline{N} \circ \varphi \circ X)_q &= \frac{2}{\|X(q)\|^2}\langle dX_qu, N(X(q))\rangle X(q) + \frac{2}{\|X(q)\|^2}\langle X(q), dN_{X(q)}(dX_qu)\rangle X(q) + \\
&+ \frac{2}{\|X(q)\|^2}\langle X(q), N(X(q))\rangle dX_qu - \\
&- \frac{4}{\|X(q)\|^4}\langle X(q), N(X(q))\rangle\langle X(q), dX_qu\rangle X(q) - dN_{X(q)}(dX_qu) \\
&= \frac{2}{\|X(q)\|^2}\langle X(q), dN_{X(q)}(dX_qu)\rangle X(q) + \frac{2}{\|X(q)\|^2}\langle X(q), N(X(q))\rangle dX_qu - \\
&- \frac{4}{\|X(q)\|^4}\langle X(q), N(X(q))\rangle\langle X(q), dX_qu\rangle X(q) - \\
&- dN_{X(q)}(dX_qu),\ \forall u \in T_q\mathbb{R}^2,
\end{aligned}$$

uma vez que, $dx_qu \in T_pS'$ e $T_pS' \perp N(p)$. Agora, se $k_1(p), k_2(p) \in \mathbb{R}$ são as curvaturas principais de S' em p, sabemos que existem $e_1, e_2 \in T_pS'$ satisfazendo

$$dN_p e_i = -k_i(p)e_i, \ i = 1, 2, \tag{3}$$

onde e_1, e_2 são os autovetores do endomorfismo auto-adjunto $-dN_p$ associados aos autovalores $k_1(p)$ e $k_2(p)$. Afirmamos que, $d\varphi_p e_1$ e $d\varphi_p e_2$ são os autovetores do endomorfismo auto-adjunto $-d\overline{N}_{\varphi(p)}$. De fato, para cada $e_i \in T_pS'(i \in \{1,2\})$ sabemos que existe $u_i \in T_q\mathbb{R}^2$ tal que

$$dX_q u_i = e_i, \ i = 1, 2.$$

Assim, usando este fato e (3) obtemos para $i \in \{1,2\}$ que

$$\begin{aligned}
-d\overline{N}_{\varphi(p)}(d\varphi_p e_i) &= -d(\overline{N} \circ \varphi \circ X)_q u_i = -\frac{2}{\|X(q)\|^2}\langle X(q), dN_{X(q)}(dX_q u_i)\rangle X(q) - \\
&- \frac{2}{\|X(q)\|^2}\langle X(q), N(X(q))\rangle dX_q u_i + \\
&+ \frac{4}{\|X(q)\|^4}\langle X(q), N(X(q))\rangle\langle X(q), dX_q u_i\rangle X(q) + dN_{X(q)}(dX_q u_i) \\
&= \frac{2k_i(p)}{\|X(q)\|^2}\langle X(q), dX_q u_i\rangle X(q) - \frac{2}{\|X(q)\|^2}\langle X(q), N(X(q))\rangle dX_q u_i + \\
&+ \frac{4}{\|X(q)\|^4}\langle X(q), N(X(q))\rangle\langle X(q), dX_q u_i\rangle X(q) - k_i(p) dX_q u_i \\
&= -\frac{k_i(p)\|X(q)\|^2}{r^2}\left[r^2\frac{dX_q u_i}{\|X(q)\|^2} - 2r^2\frac{\langle X(q), dX_q u_i\rangle}{\|X(q)\|^4}X(q)\right] - \\
&- \frac{2\langle X(q), N(X(q))\rangle}{r^2}\left[r^2\frac{dX_q u_i}{\|X(q)\|^2} - 2r^2\frac{\langle X(q), dX_q u_i\rangle}{\|X(q)\|^4}X(q)\right],
\end{aligned}$$

e assim usando (1)

$$\begin{aligned}
-d\overline{N}_{\varphi(p)}(d\varphi_p e_i) &= -\left(\frac{k_i(p)\|X(q)\|^2}{r^2} + \frac{2\langle X(q), N(X(q))\rangle}{r^2}\right)\left(r^2\frac{dX_q u_i}{\|X(q)\|^2} - \right. \\
&\left. - \ 2r^2\frac{\langle X(q), dX_q u_i\rangle}{\|X(q)\|^4}X(q)\right) \\
&= -\left(\frac{k_i(p)\|X(q)\|^2}{r^2} + \frac{2\langle X(q), N(X(q))\rangle}{r^2}\right)d(\varphi \circ X)_q u_i \\
&= -\left(\frac{k_i(p)\|X(q)\|^2}{r^2} + \frac{2\langle X(q), N(X(q))\rangle}{r^2}\right)d\varphi_p e_i, \ i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Provando o afirmado. Assim, se denotarmos por $\overline{k}_1(\varphi(p))$ e $\overline{k}_2(\varphi(p))$ as curvaturas principais de $\varphi(S')$ em $\varphi(p)$ temos pelo visto acima que

$$\overline{k}_i(\varphi(p)) = -\frac{k_i(p)\|X(q)\|^2}{r^2} - \frac{2\langle X(q), N(X(q))\rangle}{r^2}, \ i = 1, 2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\overline{k}_1(\varphi(p)) - \overline{k}_2(\varphi(p)) &= -\frac{k_1(p)\|X(q)\|^2}{r^2} - \frac{2\langle X(q), N(X(q))\rangle}{r^2} - \\ &- \left(-\frac{k_2(p)\|X(q)\|^2}{r^2} - \frac{2\langle X(q), N(X(q))\rangle}{r^2}\right) \\ &= \frac{\|X(q)\|^2}{r^2}(k_1(p) - k_2(p)).\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado obtemos

$$(\overline{k}_1(\varphi(p)) - \overline{k}_2(\varphi(p)))^2 = \frac{\|X(q)\|^4}{r^4}(k_1(p) - k_2(p))^2,$$

mas denotando por $H(p)$ e $K(p)$, respectivamente as curvaturas média e gaussiana de S' em p temos que

$$\begin{aligned}H^2(p) - K(p) &= \left(\frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}\right)^2 - k_1(p)k_2(p) \\ &= \frac{k_1^2(p) + 2k_1(p)k_2(p) + k_2^2(p)}{4} - k_1(p)k_2(p) \\ &= \frac{k_1^2(p) + 2k_1(p)k_2(p) + k_2^2(p) - 4k_1(p)k_2(p)}{4} \\ &= \frac{k_1^2(p) - 2k_1(p)k_2(p) + k_2^2(p)}{4} \\ &= \frac{(k_1(p) - k_2(p))^2}{4}.\end{aligned}$$

Se $\overline{H}(\varphi(p))$ e $\overline{K}(\varphi(p))$ são as curvaturas média e gaussiana de $\varphi(S')$ em $\varphi(p)$, respectivamente, um cálculo análogo ao da igualdade acima, mostra-se que

$$\overline{H}^2(\varphi(p)) - \overline{K}(\varphi(p)) = \frac{(\overline{k}_1(\varphi(p)) - \overline{k}_2(\varphi(p)))^2}{4}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{H}^2(\varphi(p)) - \overline{K}(\varphi(p)) &= \frac{(\overline{k}_1(\varphi(p)) - \overline{k}_2(\varphi(p)))^2}{4} = \frac{\|X(q)\|^4}{r^4} \cdot \frac{(k_1(p) - k_2(p))^2}{4} \\ &= \frac{\|X(q)\|^4}{r^4}(H^2(p) - K(p)).\end{aligned}$$

Assim, por essa igualdade e por (2) obtemos

$$\overline{H}^2(\varphi(p)) - \overline{K}(\varphi(p))d\overline{A}(\varphi(p)) = \frac{\|p\|^4}{r^4}(H^2(p) - K(p))\frac{r^4}{\|p\|^4}dA(p) = (H^2(p) - K(p))dA(p).$$

Como p foi tomado arbitrariamente temos que

$$(\overline{H}^2 - \overline{K})d\overline{A} = (H^2 - K)dA$$

Com isso, invocando o Teorema de Gauss-Bonnet 2.121 ganhamos que

$$\mathcal{W}(\varphi \circ f) - 2\pi\chi(\varphi(S')) = \int_{\varphi(S')} (\overline{H}^2 - \overline{K})d\overline{A} = \int_{S'} (H^2 - K)dA = \mathcal{W}(f) - 2\pi\chi(S').$$

Mas por φ, em particular, ser um homeomorfismo, $\chi(S') = \chi(\varphi(S'))$ e assim

$$\mathcal{W}(\varphi \circ f) = \mathcal{W}(f),$$

concluindo o desejado. ∎

Teorema 3.14 (Blaschke-1929) *Seja S uma superfície. O funcional de Willmore*

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : \ \mathcal{I}_S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \mathcal{W}(f) = \int_S H^2 dA \end{aligned}$$

é invariante sob transformações conformes em $\mathbb{R}^3$. Isto é, se $f \in \mathcal{I}_S$, então

$$\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(T \circ f),$$

para toda $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ transformação conforme.

Demonstração: Considere $f \in \mathcal{I}_S$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação conforme. Pelo Teorema de Liouville (Teorema 2.129) temos que T é a composição de movimento rígidos, dilatações e inversões, no máximo uma de cada. Se $T = (M \circ \mathcal{H}_\beta \circ I)$, onde M é um movimento rígido, $\mathcal{H}_\beta$ é uma homotetia e I uma inversão, então pelos lemas 3.10, 3.12 e 3.13

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(T \circ f) &= \mathcal{W}((M \circ \mathcal{H}_\beta \circ I) \circ f) = \mathcal{W}(M(\mathcal{H}_\beta \circ I \circ f)) = \mathcal{W}(\mathcal{H}_\beta(I \circ f)) \\ &= \mathcal{W}(I \circ f) = \mathcal{W}(f). \end{aligned}$$

Caso a ordem da composição das aplicações seja outra a demonstração é análoga ao caso acima. Além disso, caso seja a composição de dois desses três tipos de aplicações e prova também é análoga. E finalmente, se T for a restrição de apenas uma dessas aplicações segue o resultado dos lemas 3.10, 3.12 ou 3.13. Isso conclui a demostração. ∎

4 DUAS GENERALIZAÇÕES DO FUNCIONAL DE WILLMORE

Neste capítulo apresentaremos duas generalizações para o funcional de Willmore. A primeira, o funcional de Willmore de dimensão n para $n \geq 3$ onde consideraremos imersões de uma superfície fechada e orientável S sobre $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$. Já a segunda, definiremos o funcional de Willmore relativo a uma variedade Riemanniana $M^n (n \geq 3)$, onde o domínio desse funcional é o espaço de todas as imersões de uma superfície fechada e orientável S sobre M. E por fim, nessa segunda generalização apresentaremos o Teorema principal que afirma que o funcional de Willmore relativo a M^n é invariante por mudanças conformes de métrica.

4.1 Funcional de Willmore de dimensão $n(n \geq 3)$

Definição 4.1 *Seja S uma superfície fechada e orientável. Considere $\mathcal{I}^n(S)(n \geq 3)$ o espaço de todas as imersões diferenciáveis $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos o funcional de Willmore de dimensão n como*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n : \ \mathcal{I}^n(S) \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \qquad &\longmapsto \mathcal{W}_n(f) = \int_S \|\vec{H}\|^2 dA_g, \end{aligned}$$

onde dA_g é o elemento de volume da métrica euclidiana g induzida pela imersão f para S e $\vec{H}$ é o vetor curvatura média de S pela imersão.

Observações 4.2 *A respeito da definição acima:*

i) Como no funcional de Willmore na Definição 3.1 a integração é sobre a imagem $f(S)$, $\forall f \in \mathcal{I}^n(S)$.

ii) O funcional de Willmore de dimensão 3, $\mathcal{W}_3$ coincide com funcional da Definição 3.1. De fato, veja inicialmente que $\mathcal{I}^3(S) = \mathcal{I}_S$. Além disso, dada $f \in \mathcal{I}^3(S)$ note que a codimensão da imersão é igual a 1 e assim, dado campo normal unitário $N \in \mathfrak{X}(U)^\perp$, onde f é um mergulho em uma vizinhança aberta U de p, temos que

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{2} traço S_N N,$$

mas por S_N ser simétrica sabemos do Teorema Espectral da Álgebra Linear que existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\} \subset T_pM$ de autovetores associados a autovalores $k_1(p), k_2(p)$ que são as curvaturas principais. Assim,

$$traço S_N = \langle S_N(e_1), e_1 \rangle + \langle S_N(e_2), e_2 \rangle = k_1(p) + k_2(p),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3(f) &= \int_S \|\vec{H}(p)\|^2 dA_g = \int_S \left[\left(\frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} \right)^2 \underbrace{\|N(p)\|^2}_{=1} \right] dA_g \\ &= \int_S H^2(p) dA = \mathcal{W}(f), \end{aligned}$$

onde H é a curvatura média da imersão e dA é o elemento de área induzido pela *métrica canônica de* $\mathbb{R}^3$*. Assim,* $\mathcal{W}_3 \equiv \mathcal{W}$*.*

iii) $\mathcal{W}_n$ *está bem definido. Pelo item ii) no caso* $n = 3$ *já temos uma boa definição. Agora para ver a boa definição quando* $n > 3$*, perceba inicialmente que* $\mathcal{I}^n(S) \neq \emptyset$*, pois pela Versão Forte do Teorema da Imersão de Whitney(Teorema* 2.57*), existe uma imersão* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$*. Por outro lado, definindo a aplicação* $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *por* $g(x, y, z) = (x, y, z, 0, \cdots, 0)$ *onde as últimas* $n-3$ *coordenadas são nulas, temos que* $g \circ f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é uma imersão, pois trata-se de uma composição de imersões. Além disso,* $\mathcal{W}_n(f) < +\infty$*,* $\forall f \in \mathcal{I}^n(S)$*. De fato, seja* $f \in \mathcal{I}^n(S)$*. Se* f *for um mergulho, então pelos fatos da função* $p \longmapsto \|\vec{H}(p)\|^2$ *ser contínua em* $f(S)$ *e esta ser compacta, existe uma constante positiva* C *tal que* $\|\vec{H}(p)\|^2 = |\|\vec{H}(p)\|^2| \leq C$*,* $\forall p \in f(S)$*. Assim,*

$$\mathcal{W}_n(f) = \int_S \|\vec{H}(p)\|^2 dA_g \leq \int_S C dA_g = C \operatorname{vol}(f(S)) < +\infty.$$

Agora se f *for apenas imersão para cada* $p \in S$*, sabemos que existe uma vizinhança aberta de* S *tal que* $f|_{U_p} : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é um mergulho e o vetor curvatura média está bem definido em* $f(U_p)$*. Por outro lado, como* S *é superfície, podemos tomar cartas* $\varphi_p : V_p \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \varphi(V_p) \subset S$ *(*V_p *aberto de* $\mathbb{R}^2$*) tais que* $\varphi(V_p) \subset U_p, \forall p \in S$*. Por* V_p *ser aberto podemos escolher uma bola fechada* B_p *centrada em* p *e de raio suficientemente pequeno tal que* $B_p \subset V_p$ *e assim* $\varphi_p(B_p)$ *é compacto e consequentemente* $W_p = (f \circ \varphi_p)(B_p)$ *também é compacto que está contido em* $f(U)$*. Logo,*

$$f(S) = \bigcup_{p \in S} W_p$$

que podemos extrair uma subcobertura finita $W_1, \cdots, W_l$ *onde por construção, o vetor curvatura média está bem definido em cada uma desses* l *conjuntos e além disso, a aplicação* $p \longmapsto \|\vec{H}(p)\|^2$ *é contínua em cada um desses conjuntos. Assim, tomando uma partição da unidade* ξ_i *para a cobertura finita* $\{f(U_i)\}$ *e notando que existe constante* $C_i > 0$ *tal que* $\|\vec{H}(p)\|^2 < C_i$*,* $\forall p \in W_i$*,* $i = 1, \cdots, l$*. Assim,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_n(f) &= \sum_{i=1}^{l} \int_{U_i} \xi_i \|\vec{H}\|^2 \chi_{W_i} dA_g \leq \sum_{i=1}^{l} \int_{U_i} \xi_i C_i \chi_{W_i} dA_g = \sum_{i=1}^{l} C_i \int_{U_i} \xi_i \chi_{W_i} dA_g \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} \max_{1 \leq j \leq n} C_j \int_{W_i} \xi_i dA_g = \max_{1 \leq j \leq n} C_j \int_{f(S)} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \right)}_{\substack{\parallel \\ 1}} dA_g = \\
&= \max_{1 \leq j \leq n} C_j \operatorname{vol}(f(S)) < +\infty.
\end{aligned}$$

Provando a boa definição do funcional.

iv) O valor real $\mathcal{W}_n(f)$ *é chamado a energia n-dimensional de Willmore da superfície* $f(S)$*.*

O funcional de Willmore de dimensão n pode ser visto em termos do quadrado da parte sem traço da segunda forma fundamental e da característica de Euler da superfície S, mais precisamente, temos a

Proprosição 4.3 *Seja S superfície fechada e orientável. Então, para toda imersão $f \in \mathcal{I}^n(S)$ vale*

$$\mathcal{W}_n(f) = \frac{1}{2}\int_S \|B^\circ\|^2 dA_g + 2\pi\chi(S).$$

Demonstração: Consideremos $f \in \mathcal{I}^n(S)$ e $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de T_pM. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|B^\circ\|^2 &= \frac{1}{2}\left[\|B^\circ(e_1,e_1)\|^2 + 2\|B^\circ(e_1,e_2)\|^2 + \|B^\circ(e_2,e_2)\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\big[\|B(e_1,e_1)\|^2 - \langle B(e_1,e_1), B(e_1,e_1)+B(e_2,e_2)\rangle + \|\vec{H}\|^2 + \\
&+ 2\|B(e_1,e_2)\|^2 + \|B(e_2,e_2)\|^2 - \langle B(e_2,e_2), B(e_1,e_1)+B(e_2,e_2)\rangle + \|\vec{H}\|^2\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[\|B(e_1,e_1)\|^2 - \|B(e_1,e_1)\|^2 - \langle B(e_1,e_1), B(e_2,e_2)\rangle + \|\vec{H}\|^2 + \\
&+ 2\|B(e_1,e_2)\|^2 + \|B(e_2,e_2)\|^2 - \langle B(e_2,e_2), B(e_1,e_1)\rangle - \|B(e_2,e_2)\|^2 + \|\vec{H}\|^2\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[2\|\vec{H}\|^2 - 2\langle B(e_1,e_1), B(e_2,e_2)\rangle + 2\|B(e_1,e_2)\|^2\big] \\
&= \|\vec{H}\|^2 - \big(\langle B(e_1,e_1), B(e_2,e_2)\rangle - \|B(e_1,e_2)\|^2\big).
\end{aligned}$$

Mas pelo Teorema de Gauss 2.119, obtemos

$$\frac{1}{2}\|B^\circ\|^2 = \|\vec{H}\|^2 - \left(\underbrace{K_S}_{=K} - \underbrace{K^S_{\mathbb{R}^n}}_{=0}\right) = \|\vec{H}\|^2 - K \Longrightarrow \|\vec{H}\|^2 = \frac{1}{2}\|B^\circ\|^2 + K,$$

onde K é a curvatura Gaussiana de S e $K^S_{\mathbb{R}^n}$ é a curvatura seccional em $\mathbb{R}^n$ relativa ao plano tangente T_pS. Mas podemos controlar K pela norma da segunda forma fundamental $\|B\|$, pois pelo Teorema de Gauss 2.119 sabemos

$$K = \langle B(e_1,e_1), B(e_2,e_2)\rangle - \|B(e_1,e_2)\|^2,$$

donde em módulo sabemos pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e da médias geométrica e aritmética,

$$\begin{aligned}
|K| &= |\langle B(e_1,e_1), B(e_2,e_2)\rangle - \|B(e_1,e_2)\|^2| \leq |\langle B(e_1,e_1), B(e_2,e_2)\rangle| + \\
&+ \|B(e_1,e_2)\|^2 \leq \|B(e_1,e_1)\|\|B(e_2,e_2)\| + \|B(e_1,e_2)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}(\|B(e_1,e_1)\|^2 + \|B(e_2,e_2)\|^2) + \|B(e_1,e_2)\|^2 = \\
&= \frac{1}{2}(\|B(e_1,e_1)\|^2 + \|B(e_2,e_2)\|^2 + 2\|B(e_1,e_2)\|^2) = \\
&= \frac{1}{2}\|B\|^2.
\end{aligned}$$

Logo, K é integrável em S. Assim, pelo Teorema de Gauss-Bonnet 2.121 sabemos que

$$\int_S K dA_g = 2\pi\chi(S),$$

donde, pelas observações acima concluímos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n(f) &= \int_S \left(\frac{1}{2}\|B^\circ\|^2 + K\right) dA_g = \frac{1}{2}\int_S \|B^\circ\|^2 dA_g + \int_S K dA_g \\ &= \frac{1}{2}\int_S \|B^\circ\|^2 dA_g + 2\pi\chi(S). \end{aligned}$$

Mostrando o desejado. ■

4.2 Funcional de Willmore relativo a uma n-variedade Riemanniana M

Agora tentaremos estender o funcional de Willmore de uma forma mais abrangente. Considere S uma superfície de classe C^∞, fechada, orientável e $f : S \longrightarrow M$ imersão suave de S sobre uma n-variedade Riemanniana (M, g) com $n \geq 3$.

Definição 4.4 *Seja $\mathcal{I}_M(S)$ o espaço de todas as imersões de uma superfície fechada S sobre uma n-variedade Riemanniana (M, g). Definimos o funcional de Willmore relativo a M como*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_M : \ \mathcal{I}_M(S) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \mathcal{W}_M(f) = \int_S (\|\vec{H}\|^2 + K_M^S) dA_g, \end{aligned}$$

onde $\vec{H}$, K_M^S e dA_g são, respectivamente, o vetor curvatura média da imersão, a curvatura seccional de M com respeito ao plano tangente de S e o elemento de volume da métrica induzida pela imersão.

Observações 4.5

i) A definição acima generaliza a Definição 4.1. De fato, no caso em que $M = \mathbb{R}^n (n \geq 3)$ sabemos inicialmente que $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(S) = \mathcal{I}^n(S)$. Além disso, dada imersão $f \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(S)$ sabemos ainda que dada $\{e_1, e_2\}$ uma base do espaço tangente T_pS de S e se denotarmos por $K_{\mathbb{R}^n}^S(p)$ a curvatura seccional de M com respeito ao plano tangente T_pM temos pelo Exemplo 2.103

$$K_{\mathbb{R}^n}^S(p) = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{W}_{\mathbb{R}^n}(f) = \int_S (\|\vec{H}\|^2 + \underbrace{K_{\mathbb{R}^n}^S}_{\equiv 0}) dA_g = \int_S \|\vec{H}\|^2 dA_g = \mathcal{W}_n(f).$$

Com isso, vemos que essa definição generaliza o funcional de Willmore visto na Definição 3.1.

ii) Note que, se adicionarmos a hipótese da variedade Riemanniana M ser orientável, temos que a forma elemento de volume está bem definida em M, nesse caso, podemos olhar para a integração acima na imagem $f(S)$ em vez de S, onde usamos a identificação $S \equiv f(S)$. Caso M não seja uma variedade orientável, integramos na superfície S.

Vejamos um exemplo simples para o funcional acima, quando $M = S^3 \subset \mathbb{R}^4$ é a esfera unitária e centrada na origem

Exemplo 4.6 *Seja $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ a esfera unitária e centrada na origem do espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$. Sabemos por CARMO, 2008, Exemplo 2.8, pág. 145 que a curvatura seccional $K^S_{S^3}(p)$ de S^3 relativa ao plano tangente de S é 1 para todo $p \in S$. Logo,*

$$\mathcal{W}_{S^3}(f) = \int_S (\|\vec{H}\|^2 + \underbrace{K^S_{S^3}}_{\equiv 1})dA_g = \int_S \|\vec{H}\|^2 dA_g + \int_S dA_g = \int_S \|\vec{H}\|^2 dA_g + \mathrm{vol}(f(S)),$$

para toda imersão $f \in \mathcal{I}_{S^3}(S)$.

Agora caminharemos na direção de mostrar o teorema principal dessa seção, que é de certo modo uma generalização do Teorema de Blaschke 3.14. Para isso, temos um resultado análogo a Proposição 4.3 que nos ajudará a demonstrar essa invariância conforme.

Proprosição 4.7 *Seja S uma superfície fechada e M^n uma variedade Riemanniana, onde S e M são ambas orientáveis. O Funcional de Willmore relativo M é dado por*

$$\mathcal{W}_M(f) = \frac{1}{2}\int_S \|B^\circ\|^2 dA_g + 2\pi\chi(S),$$

para toda imersão $f \in \mathcal{I}_M(S)$.

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{I}_M(S)$. Dada uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ temos de forma análoga a demonstração da Proposição 4.3 que

$$\|\vec{H}\|^2 = \frac{1}{2}\|B^\circ\|^2 + K - K^S_M,$$

onde K é a curvatura Gaussiana de S e K^S_M é a curvatura seccional em M relativa ao plano tangente T_pM. Logo,

$$\|\vec{H}\|^2 + K^S_M = \frac{1}{2}\|B^\circ\|^2 + K,$$

donde integrando em S e usando o Teorema de Gauss-Bonnet 2.121 obtemos,

$$\mathcal{W}_M(f) = \int_S \left(\|\vec{H}\|^2 + K^S_M\right) dA_g = \left(\frac{1}{2}\|B^\circ\|^2 + K\right) dA_g = \frac{1}{2}\int_S \|B^\circ\|^2 dA_g + 2\pi\chi(S),$$

encerrando a demonstração da proposição. ∎

Para o que segue, definiremos o conceito de métricas conformes em uma variedade diferenciável.

Definição 4.8 *Seja M uma variedade diferenciável. Duas métricas Riemannianas g e $\overline{g}$ definidas em M são ditas conformes, quando existe uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\overline{g}_p(u, v) = e^{2f(p)} g_p(u, v), \forall u, v \in T_pM, \ \forall p \in M.$$

A função f é denominada o coeficiente de conformidade das métricas $\overline{g}$ e g. Além disso, usaremos a notação $\overline{g} = e^{2f}g$ para dizer que as métricas $\overline{g}$ e g são conformes com coefi-

ciente de conformidade f.

A conformidade de métricas em uma variedade Riemanniana relaciona as conexões Riemannianas definidas nelas pelo

Lema 4.9 *Seja M uma n-variedade diferenciável com duas métricas em M conformes $\overline{g} = e^{2f}g$. Denotemos por $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões Riemannianas de $(M, \overline{g})$ e (M, g), nesta ordem, $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ e Γ_{ij}^k os símbolos de Christoffel das conexões $\overline{\nabla}$ e ∇, respectivamente. Então, em coordenadas locais,*

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^{n} \left(\delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \delta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_j} - g_{ij} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right), \ i, j, k = 1, \cdots, n,$$

onde (g_{ij}) é a matriz da métrica g e (g^{ij}) sua matriz inversa.

Prova: Denotemos por $(\overline{g}_{ij})$ a matriz da métrica $\overline{g}$ e $(\overline{g}^{ij})$ sua matriz inversa correspondente. Sabemos pela conformidade das métricas $\overline{g}$ e g que $(\overline{g}_{ij}) = e^{2f}(g_{ij})$, donde $(\overline{g}^{ij}) = e^{-2f}(g^{ij})$. A partir desse fato temos que,

$$\begin{aligned}
2\overline{\Gamma}_{ij}^k &= \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial \overline{g}_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{g}_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x_l} \right) \overline{g}^{kl} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial (e^{2f} g_{jl})}{\partial x_i} + \frac{\partial (e^{2f} g_{li})}{\partial x_j} - \frac{\partial (e^{2f} g_{ij})}{\partial x_l} \right) e^{-2f} g^{kl} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(e^{2f} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + 2e^{2f} \frac{\partial f}{\partial x_i} g_{jl} + e^{2f} \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} + 2e^{2f} \frac{\partial f}{\partial x_j} g_{li} - e^{2f} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} - \right. \\
&- \left. 2e^{2f} \frac{\partial f}{\partial x_l} g_{ij} \right) e^{-2f} g^{kl} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial f}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial f}{\partial x_l} g_{ij} \right) \right) \underbrace{e^{2f} e^{-2f}}_{=1} g^{kl} \\
&= \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{kl}}_{2\Gamma_{ij}^k} + 2 \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial f}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial f}{\partial x_l} g_{ij} \right) g^{kl} \\
&= 2\Gamma_{ij}^k + 2 \sum_{l=1}^{n} \left(\underbrace{g_{jl} g^{kl}}_{=\delta_{jk}} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \underbrace{g_{li} g^{kl}}_{=\delta_{ki}} \frac{\partial f}{\partial x_j} - g_{ij} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \\
&= 2 \left(\Gamma_{ij}^k + \sum_{l=1}^{n} \left(\delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \delta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_j} - g_{ij} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \right),
\end{aligned}$$

donde,

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^{n} \left(\delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \delta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_j} - g_{ij} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right).$$

O que prova o lema. ■

Esse lema será de muita utilidade para demonstrar o

Teorema 4.10 (Chen-1974) *Sejam M uma n-variedade diferenciável orientável com duas métricas conformes $\overline{g} = e^{2f}g$ e $\Sigma \subset M$ uma m-subvariedade de M. Então, as segundas formas fundamentais $\overline{B}$ e B de Σ com respeito as métricas ambientes $\overline{g}$ e g, respectivamente satisfazem*

$$\overline{B}_{ij} - B_{ij} = -g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp}$$

em coordenadas locais para Σ, onde $\mathrm{grad}_g\, f$ *é o campo gradiente da função f com respeito a métrica g e $(\cdot)^{\perp}$ denota a componente normal para Σ com respeito a métrica g ou $\overline{g}$. Em particular,*

$$\bar{B}^{\circ}_{ij} = B^{\circ}_{ij}$$

para as partes sem traço das segundas formas fundamentais $\overline{B}$ e B. Além disso, para $m = 2$ ainda vale,

$$\|\bar{B}^{\circ}\|^2_{\overline{g}} dA_{\overline{g}} = \|B^{\circ}\|^2_g dA_g,$$

onde $\|\cdot\|_{\overline{g}}$ e $\|\cdot\|_g$ são as normas relativas a $\overline{g}$ e g, respectivamente, $dA_{\overline{g}}$ e dA_g são os elementos de volume de Σ associados as métricas $\overline{g}$ e g, nesta ordem.

Demonstração: Consideremos $\{X_1, \cdots, X_m\}$ uma base coordenada de $T_p\Sigma$ e estendemos essa base para obter uma base coordenada $\{X_1, \cdots, X_m, \cdots, X_n\}$ de T_pM. Sabemos que,

$$\overline{B}_{ij} = (\overline{\nabla}_{X_i} X_j)^{\perp \overline{g}} \;\text{ e }\; B_{ij} = (\nabla_{X_i} X_j)^{\perp g},\; i, j = 1, \cdots, m,$$

onde $\overline{\nabla}$ e ∇ são as conexões Riemannianas de Σ induzidas por $(M, \overline{g})$ e (M, g), respectivamente, $(\cdot)^{\perp \overline{g}}$ e $(\cdot)^{\perp g}$ são as componentes normais para Σ com respeito as métricas $\overline{g}$ e g, nesta ordem. Mas pela conformidade destas métricas, podemos não distinguir as componentes com respeito as duas métricas, pois dois vetores são ortogonais na métrica g se, e somente se, eles são ortogonais na métrica $\overline{g}$. Logo, usaremos apenas a notação $(\cdot)^{\perp}$. Desta forma,

$$\overline{B}_{ij} - B_{ij} = (\overline{\nabla}_{X_i} X_j)^{\perp} - (\nabla_{X_i} X_j)^{\perp} = (\overline{\nabla}_{X_i} X_j - \nabla_{X_i} X_j)^{\perp}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\overline{\nabla}_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Gamma}^k_{ij} X_k \;\text{ e }\; \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} X_k,$$

onde $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ e Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel das conexões $\overline{\nabla}$ e ∇, respectivamente. E desse fato, podemos reescrever a penúltima equação acima da seguinte forma,

$$\overline{B}_{ij} - B_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{\Gamma}^k_{ij} X_k - \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} X_k \right)^{\perp} = \left(\sum_{k=1}^{n} (\overline{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}) X_k \right)^{\perp}.$$

E portanto, usando o Lema 4.9, obtemos na equação acima que

$$\begin{aligned}
\overline{B}_{ij} - B_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\delta_{jk}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \delta_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_j} - g_{ij}g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)\right)X_k\right)^{\perp}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{jk}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \delta_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_j} - g_{ij}g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)X_k\right)^{\perp}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}X_j + \frac{\partial f}{\partial x_j}X_i\right) - g_{ij}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}X_k\right)^{\perp}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}X_j + \frac{\partial f}{\partial x_j}X_i\right)\right)^{\perp} - g_{ij}\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}X_k\right)^{\perp}\\
&= n\frac{\partial f}{\partial x_i}\underbrace{X_j^{\perp}}_{=0} + n\frac{\partial f}{\partial x_j}\underbrace{X_i^{\perp}}_{=0} - g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp}\\
&= -g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp},
\end{aligned}$$

uma vez que, usamos o fato de $X_i, X_j \in T_pM$ para $i, j = 1, \cdots, n$. Em particular, se denotarmos por $\vec{H}_{\overline{g}}$ e $\vec{H}_g$ os vetores curvatura média em Σ relativos as métricas $\overline{g}$ e g, nessa ordem, temos que

$$\begin{aligned}
\bar{B}^{\circ}_{ij} - B^{\circ}_{ij} &= \overline{B}_{ij} - \overline{g}_{ij}\vec{H}_{\overline{g}} - (B_{ij} - g_{ij}\vec{H}_g)\\
&= \overline{B}_{ij} - B_{ij} - \overline{g}_{ij}\frac{1}{m}\sum_{k,l=1}^{m}\overline{g}^{kl}\overline{B}_{kl} + g_{ij}\frac{1}{m}\sum_{k,l=1}^{m} g^{kl}B_{kl}\\
&= -g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp} - \left(e^{2f}\frac{1}{m}\sum_{k,l=1}^{m} e^{-2f}g^{kl}\overline{B}_{kl} - g_{ij}\frac{1}{m}\sum_{k,l=1}^{m} g^{kl}B_{kl}\right)\\
&= -g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp} - \left(g_{ij}\frac{1}{m}\sum_{k,l=1} g^{kl}\overline{B}_{kl} - g_{ij}\frac{1}{m}\sum_{k,l=1}^{m} g^{kl}B_{kl}\right)\\
&= -g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp} - g_{ij}\frac{1}{m}\sum_{k,l=1}^{m} g^{kl}\left(\overline{B}_{kl} - B_{kl}\right)\\
&= -g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp} - g_{ij}\frac{1}{m}\sum_{k,l=1}^{m} g^{kl}(-g_{kl}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp})\\
&= -g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp} + g_{ij}\frac{1}{m}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp}\underbrace{\sum_{k,l=1}^{m} g^{kl}g_{kl}}_{=m}
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{B}^{\circ}_{ij} - B^{\circ}_{ij} = -g_{ij}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp} + g_{ij}\frac{1}{m}(\mathrm{grad}_g\, f)^{\perp}m = 0.$$

Logo, $\bar{B}^\circ_{ij} = B^\circ_{ij}$. Finalmente, usando esse fato para o caso em que $m = 2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|\bar{B}^\circ\|^2_{\overline{g}}\sqrt{\det(\overline{g})} &= \sum_{i,j,k,l=1}^{2} \overline{g}^{ij}\overline{g}^{kl}\overline{g}(\bar{B}^\circ_{ik}, \bar{B}^\circ_{jl})\sqrt{\det(\overline{g})} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{2} e^{-2f}g^{ij}e^{-2f}g^{kl}e^{2f}g(\bar{B}^\circ_{ik}, \bar{B}^\circ_{jl})\sqrt{\det(e^{2f}g)} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{2} e^{-2f}g^{ij}g^{kl}g(B^\circ_{ik}, B^\circ_{jl})\sqrt{e^{4f}\det(g)} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{2} e^{-2f}g^{ij}g^{kl}g(B^\circ_{ik}, B^\circ_{jl})e^{2f}\sqrt{\det(g)} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{2} g^{ij}g^{kl}g(B^\circ_{ik}, B^\circ_{jl})\sqrt{\det(g)} \\
&= \|B^\circ\|^2_g\sqrt{\det(g)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\bar{B}^\circ\|^2_{\overline{g}}dA_{\overline{g}} = \|B^\circ\|^2_g dA_g,$$

o que finaliza a demonstração. ∎

Definição 4.11 *Uma aplicação $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ entre duas variedades Riemannianas M e M' é dita conforme se existe uma função diferenciável $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$g'_{f(p)}(df_p u, df_p v) = e^{2u(p)}g_p(u, v), \forall u, v \in T_pM.$$

Um difeomorfismo entre duas variedades Riemannianas (M, g) e (M', g'), $f : M \longrightarrow M'$ é dito conforme, quando a aplicação f é conforme.

Com o Teorema de Chen em mãos, temos uma generalização do Teorema de Blaschke, mas precisamente temos o

Teorema 4.12 (Invariância por difeomorfismos conformes) *Sejam S uma superfície fechada e orientável e $f : S \longrightarrow \Omega$ imersão suave de S sobre um aberto Ω de $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$. Então, para todo difeomorfismo conforme $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ com o pull-back da métrica euclidiana g_{euc} dado por $\overline{g} = \phi^* g_{euc} = e^{2u}g_{euc}$ vale*

$$\mathcal{W}_{\Omega'}(\phi \circ f) = \mathcal{W}_{\Omega}(f).$$

Demonstração: Com efeito, claramente $\phi \circ f$ é uma imersão suave de S sobre Ω'. Afirmamos que as métricas $(\phi \circ f)^* g_{\text{euc}}$ e $f^* g_{\text{euc}}$ são conformes. De fato, para cada $p \in S$

tomemos $u, v \in T_pS$, temos pela hipótese que

$$\begin{aligned}((\phi \circ f)^*(g_{\text{euc}}))_p(u,v) &= (g_{\text{euc}})_{(\phi\circ f)(p)}(d(\phi \circ f)_p u, d(\phi \circ f)_p v)\\ &= (g_{\text{euc}})_{(\phi\circ f)(p)}(d\phi_{f(p)}(df_p u), d\phi_{f(p)}(df_p v))\\ &= e^{2u(f(p))}(g_{\text{euc}})_{f(p)}(df_p u, df_p v)\\ &= e^{2(u\circ f)(p)}(f^*(g_{\text{euc}}))_p(u,v),\end{aligned}$$

onde usamos que ϕ é bijeção e a métrica euclidiana $(g_{\text{euc}})_{(\phi\circ f)(p)}$ ser igual a $(g_{\text{euc}})_{f(p)}$. Assim podemos usar o Teorema de Chen 4.10 juntamente com a Proposição 4.7 para obtermos que

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\Omega'}(\phi \circ f) &= \frac{1}{2}\int_S \|B^\circ_{\phi\circ f}\|^2 dA_{\phi\circ f} + 2\pi\chi(S)\\ &= \frac{1}{2}\int_S \|B^\circ_f\|^2_{\overline{g}} dA_{\overline{g}} + 2\pi\chi(S)\\ &= \mathcal{W}_\Omega(f).\end{aligned}$$

O que encerra a demonstração. ∎

Observação 4.13 *O Teorema acima generaliza o Teorema de Blaschke* 3.14. *De fato, pelo Teorema de Liouville* 2.129 *toda transformação conforme $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a composição de movimentos rígidos, homotetias e inversões, no máximo, uma de cada. Em particular, T é a composição de difeomorfismos conformes e portanto, T é um difeomorfismo conforme. Logo, dados $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ imersão de uma superfície fechada e orientável S em $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ transformação conforme temos pelo Teorema acima (onde $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^3$) e concluir que $\mathcal{W}(T \circ f) = \mathcal{W}(f)$.*

Além de generalizar o Teorema de Blaschke o Teorema de Chen é a ferramenta principal para demonstrar o principal resultado dessa seção.

Teorema 4.14 *O funcional de Willmore relativo a uma n- variedade Riemanniana (M, g) de uma superfície fechada e orientável S é invariante sob mudança conforme de métrica, isto é, para toda métrica $\overline{g}$ em M tal que $\overline{g} = e^{2f}g$ vale*

$$\mathcal{W}_M(f, \overline{g}) := \int_S (\|\vec{H}\|^2_{\overline{g}} + \overline{K}^S_M) dA_{\overline{g}} = \mathcal{W}_M(f),$$

onde $\overline{K}^S_M$ é a curvatura seccional de $(M, \overline{g})$ relativo ao plano tangente de S.

Demonstração: De fato, pelo Teorema de Chen 4.10 sabemos que

$$\|\bar{B}^\circ\|^2_{\overline{g}} dA_{\overline{g}} = \|B^\circ\|^2_g dA_g$$

donde,

$$\int_S \|\bar{B}^\circ\|^2_{\overline{g}} dA_{\overline{g}} = \int_S \|B^\circ\|^2_g dA_g.$$

Por outro lado, notemos que a característica de Euler de S, $\chi(S)$, é um invariante topológico e assim independe da mudança de métrica conforme. Portanto, usando a Proposição 4.7 ganhamos que

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_M(f,\overline{g}) &= \int_S (\|\vec{H}\|^2_{\overline{g}} + \overline{K}^S_M) dA_{\overline{g}} = \int_S \|\bar{B}^\circ\|^2_{\overline{g}} dA_{\overline{g}} + 2\pi\chi(S) \\ &= \int_S \|B^\circ\|^2_g dA_g + 2\pi\chi(S) = \mathcal{W}_M(S).\end{aligned}$$

Provando a invariância do funcional de Willmore relativo a M por mudança de métrica conforme. ■

Observação 4.15 *O teorema acima retrata a invariância conforme do funcional de Willmore relativo a uma n-variedade Riemanniana.*

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho vimos o funcional de Willmore de uma superfície S fechada e orientável, o qual exploramos algumas propriedades, em particular, a invariância do funcional por transformações conformes. Além disso, apresentamos duas generalizações desse funcional e conseguimos apresentar um resultado para essas duas generalizações que é equivalente a invariância conforme do funcional de Willmore. Algumas indagações são naturais, como por exemplo, se existe uma generalização para o funcional de Willmore para uma n variedade fechada e orientável S com $n \geq 3$, em vez de uma superfície fechada e orientável. Se existir tal generalização, quais propriedades ele ainda mantém em relação as propriedades do funcional inicial? Deixamos essas indagações para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

BLASCHKE, Wihelm Johann Eugen. **Vorlesungen über differentialgeometrie,3**. Berlin: Springer,1929.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

CHERN, Shing-Shen. Some new characterizations of the euclidean sphere. **Duke Math. J.**, v.12, no.2, p.279-290, 1945.

KUWERT, Ernst; SCHÄTZLE, Reiner. **The Willmore fuctional**. New York: Springer, 2012.

LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2 ed. New York: Springer, 2013.

LEE, John M. **Riemannian Manifolds***:* An Introduction to Curvature. New York: Springer, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise volume 2**. 11.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

MARQUES, Fernando Codá; NEVES, André. The Willmore Conjecture. **Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, v. 116, no. 4, p. 201-222, 2014.

MONTIEL, Sebastián;ROS, Antonio. **Curves and Surfaces**. 2.ed. American Mathematical Society: Real Sociedad Matemática Espanhõla, 2009.

POISSON, Siméon Denis. Mémoire sur les surfaces élastiques. **Mem. Cl. Sci. Math. PhysCurves and Surfaces., Inst. de France**, p. 167-225, 1814.

TODA, Magdalena;ATHUKORALAGE, Bhaya. Geometry of biological membranes and Willmore energy. **AIP Conference Proccedings**, v. 1558, no. 1, p. 883-886, 2013.

VIEIRA, Fracisca Damiana. **Primeira autovalor do operador de Laplace penalizado pela curvatura média e o funcional de Willmore**. 2019. 57f. Tese(Doutorado em Matemática)-Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

WILLMORE, Thomas James. Note on embedded surfaces. **An. Sti. Univ. Al. I.**

Cuza Iasi Sect. I a Mat.(NS) B, v. 11, p. 493-496, 1965.

WILLMORE, Thomas James. **Total curvature in Riemannian Geometry**. Viley: Ellis Horwood, 1982.

WILLMORE, Thomas James. **Riemannian Geometry**. Oxford: Clarendon Press;New York: Oxford University Press, 1993.(Oxford Science Publications)

WHITNEY, Hassler. The Singularities of a Smooth n-Manifold in (2n-1)-Space. **Annals of Mathematics**, v. 45, 2 ed. 274-293, 1944.