UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

SERGIO MANUEL GONZÁLEZ ACOSTA

RIGIDEZ E INEXISTÊNCIA DE HIPERSUPERFÍCIES COMPLETAS TIPO ESPAÇO NO STEADY STATE SPACE

FORTALEZA

2020

SERGIO MANUEL GONZÁLEZ ACOSTA

RIGIDEZ E INEXISTÊNCIA DE HIPERSUPERFÍCIES COMPLETAS TIPO ESPAÇO NO STEADY STATE SPACE

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A167r Acosta, Sergio Manuel.
Rigidez e inexistência de hipersuerfícies completas tipo espaço no steady state space / Sergio Manuel Acosta. – 2020.
53 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Camina Muniz Neto.

1. Steady State Space. Hipersuperfícies tipo espaço. Hiperplanos tipo espaço. Curvatura médias de ordem superior.. I. Título.

CDD 510

SERGIO MANUEL GONZÁLEZ ACOSTA

RIGIDEZ E INEXISTÊNCIA DE HIPERSUPERFÍCIES COMPLETAS TIPO ESPAÇO NO STEADY STATE SPACE

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 28 de Fevereiro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC) - Fortaleza

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC) - Fortaleza

Prof. Dr. Francisco Yure Santos do Nacimento
Universidade Federal do Ceará (UFC) - Crateús

Dedicado a Ana Victoria, Anita, Brenda, Cesar, Marlene, Paola e ao Deportes Tolima.

AGRADECIMENTOS

‘‘AD MAIOREM DEI GLORIAM”. A Deus pela resiliência e fortaleza.

São muitas as adversidades que devemos aprender a superar durante a caminhada, porem, são incontáveis as pessoas que aparecem no caminho, varias delas para nos acompanhar nas trilhas, ainda de longe.

Quero reconhecer por escrito o humilde esforço da minha mãe Luz Marlene Acosta, mulher inesgotável que sempre cuidou do meu bem-estar, dos meus irmãos, Cesar Enciso, homem exemplar e trabalhador que me ensinou o dom da reflexão, e Paola Enciso, amiga e conselheira que me leva a seguir em frente nesta luta, eles também me ensinaram o valor do respeito pelos outros e uma outra maneira de me apaixonar pelo hábito de estudar. Agradeço a minha avó Ana Victoria, quem eu amo de todo coração por ter me dado motivos para seguir em frente, a minha querida Brenda Hernandez que decidiu aprender comigo a suportar a distância sem esquecer o amor. Graças a eles renovo as minhas forças para continuar andando, com eles sou eternamente grato por seu amor incondicional e monumental apoio emocional, ademais, por me manter em suas orações.

Os Professores Arnold Oostra e Leonardo Solanilla Chavarro da Universidade del Tolima apareceram na minha vida para me apoiar nos primeiros anos do meu processo de formação Matemática, ser aluno deles é para mim motivo de orgulho e é talvez por isso que assistir aos seus seminários foi fundamental para me convencer mais ainda de que vale a pena destinar grande parte do nosso curto tempo aos estudos. Eles são pessoas exemplares e eminentes Matemáticos, então, não posso deixar de lhes agradeçer pelo seu aporte nesta marcha, especialmente ao professor Leonardo pelo seu constante apoio.

Os professores Antonio Caminha, Alexander Fernandez, Ederson Braga, Fabio Montenegro, Frederico Girão, Jonatan Silva, Marcos Melo e Rodrigo Rodriguez, estavam sempre prontos para dar o melhor de si durante as aulas e tirar as minhas dúvidas, além de fornecer alguma frase de apoio que motivou-me a continuar batalhando quando eu mais precisei. Todos eles são Matemáticos fenomenais e extremadamente brilhantes; em ocasiões, fiquei surpreso durante as aulas pela maneira cativante e elegante pela qual eles entendem e explicam a Matemática. Para cada um deles eu tenho uma palavra de agradecimento, em especial "mil veces gracias"para o meu Orientador Antonio Caminha que me deu a mão num momento difícil, ele pacientemente me acompanhou e me guiou de maneira excepcional, suas valiosas sugestões e as conversas com ele sobre Análise e Geometria foram de grande benefício para mim, ele me ofereceu uma grande oportunidade e espero ter aproveitado ela ao máximo.

À secretária da Pós-Graduação Andrea Costa agradeço por ajudar-me, a lidar com todos os problemas burocráticos que lhe apresentei. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Minha gratidão também à OEA (Organização dos Estados Americanos), ao CGUB (Grupo Coimbra de Universidades Brasileiras) e ao departamento de Matemática junto com o programa da Pós-Graduação em Matemática por me fornecer a chance de participar deste lindo processo. Aos colegas das turmas de mestrado e doutorado, pelo seu tempo pra discutir sobre Matemática, pelas críticas, reflexões e sugestões, em particular a Atila Andrade De Oliveira, Cícero Fagner Alves Da Silva, Daniel Francisco Bustos, Elisafã Braga Dos Santos e Valricélio Menezes Xavier. Aos professores participantes da banca examinadora, Jonatan Floriano da Silva, Ulisses Lima Parente e Francisco Yure Santos Do Nascimento pelo tempo e pelas sugestões criteriosas que me ajudaram para fazer desta dissertação um dever cumprido.

“Nacer, vivir, morir amando el Magdalena la pena se hace buena y alegra el existir”

(Alberto Castilla - Bunde Tolimense)

“A reader lives a thousand lives before he dies, said Jojen. The man who never reads lives only one”

(George R.R. Martin - A Dance with Dragons)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos e provamos alguns Teoremas sobre rigidez e inexistência de hipersuperfícies completas tipo-espaço Σ^n imersas no Steady State Space $\mathscr{H}^{n+1}$. Tal espaço resulta ser uma região aberta da variedade de Lorentz de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, que por sua vez está contida no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$. Para cumprir nosso objetivo, usamos uma extensão do princípio generalizado do máximo de Omori-Yau, devida a Alías, Impera e Rigoli em (ALÍAS *et al.*, 2012). As condições geométricas adequadas sobre o comportamento das curvaturas médias de ordem superior destas hipersuperfícies completas tipo-espaço vão nos garantir a rigidez, isto é, que elas devem ser hiperplanos de $\mathscr{H}^{n+1}$. A inexistência é uma consequência de alguns resultados de rigidez.
Palavras-chave: Steady State Space. Hipersuperfícies tipo-espaço. Hiperplanos tipo-espaço. Curvaturas médias de ordem superior.

ABSTRACT

In this work, we study and prove some theorems on the rigidity and nonexistence of complete spacelike hypersurfaces immersed in the Steady State Space $\mathscr{H}^{n+1}$. Such space turns out to be an open region of the De Sitter Lorentz manifold $\mathbb{S}_1^{n+1}$ that is immersed in the Lorentz-Minkowzki space $\mathbb{L}^{n+2}$. To accomplish our objective, we use a suitable extension of the Omori-Yau's generalized maximum principle, due to Alías, Impera and Rigoli in (ALÍAS *et al.*, 2012). The assumed geometric conditions on the behavior of the higher order mean curvatures of these complete spacelike hypersurfaces are going to give us rigidity, so that, they will be hyperplanes of $\mathscr{H}^{n+1}$. The nonexistence will be a consequence of some of the rigidity results.

Keywords: Steady Stae Space. Spacelike hypersurfaces. Spacelike hyperplanes. Higher order mean curvatures.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o interesse de estudar as condicões geométricas que permitan validar ou contradizer a existência de hipersuperfícies completas tipo-espaço Σ^n imersas no Steady State Space $\mathscr{H}^{n+1}$, consideramos uma extensão adequada do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, conforme vê-se em (ALÍAS *et al.*, 2012), (ALíAS *et al.*, 2016) e (OMORI, 1967). Ademais, baseados em (BARBOSA; COLARES, 1997), (ALÍAS *et al.*, 2003), (ALÍAS; COLARES, 2007) e (CAMINHA, 2004), provamos alguns resultados que garantem a elipticidade dos operadores L_r. Nosso propósito principal é, segundo (BARBOZA *et al.*,) abordar o problema de rigidez e inexistência de hipersuperfícies completas tipo-espaço Σ^n imersas em $\mathscr{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, onde $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$ respresentam o espaço de De Sitter e o espaço $(n+2)$ - dimensional de Lorentz-Minkowski respectivamente, no caso $n \geq 2$, e $\mathscr{H}^{n+1}$. Essa dissertação se encontra organizada da seguinte forma:

Capítulo 2 - PRELIMINARES: Grosso modo, fixamos a notação a ser usada e definimos o que se deve entender por uma variedade de Lorentz e por uma hipersuperfície completa tipo-espaço $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ de uma tal variedad. Também, definimos o operador de Weingarten e as r-ésimas trasformações de Newton $P_r : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$, para as quais, mostramos algumas das suas propriedades.

Capítulo 3 - HIPERSUPERFÍCIES DO STEADY STATE SPACE: Estudaremos o Steady State Space e a geometria de certas hipersuperfícies em $\mathscr{H}^{n+1}$, veremos que é possível associar a $\mathscr{H}^{n+1}$ uma folheação por folhas tipo-espaço orientadas por um campo de vetores conforme, fechado e completo. Doravante, as funções auxiliares da imersão ϕ são dadas por $l_a = \langle \phi, a \rangle$ e $f_a = \langle \eta, a \rangle$, onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo-luz apontando para o passado e η é um campo de vetores normal, unitario, apontando para o futuro e que orienta a hipersuperfície tipo-espaço Σ^n. Ademais, estabelecemos algumas das propriedades para o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$ associado a P_r. Finalizamos enunciando a versão do princípio do máximo de Omori-Yau que usaremos para atingir o objetivo principal deste trabalho.

Capítulo 4 - RIGIDEZ E INEXISTÊNTENCIA EM $\mathscr{H}^{n+1}$: Começamos com o primeiro resultado sobre rigidez, quando consideramos o comportamento das curvaturas média usual $H_1 = H$ e H_2 de Σ^n em $\mathscr{H}^{n+1}$. Provaremos que, quando Σ^n (completa) está contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$ ortogonal ao vetor não nulo $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, onde $\tau > 0$, certas condições impostas sobre H e H_2 forçam Σ^n a ser um hiperplano tipo-espaço em $\mathscr{H}^{n+1}$. O segundo resultado dado generaliza o primeiro se considerarmos condições sobre as curvaturas de ordem superior H_{r+1}, sob as mesmas hipóteses anteriores. Como consequência, obtemos o primeiro resultado de inexistência. Imediatamente, definimos o conceito de hipersuperfície localmente tangente por acima a um hiperplano $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$ de $\mathscr{H}^{n+1}$; daí, poderemos garantir mais um resultado de rigidez, que implica um resultado de inexistência.

Capítulo 5 - FUNÇÕES AUXILIARES RELACIONADAS LINEARMENTE: Dizemos que as funções altura l_a e ângulo f_a da hipersuperfície completa tipo-espaço estão relacionadas linearmente se $l_a = \lambda f_a$, para alguma constante positiva $\lambda \in \mathbb{R}$. Nesse caso, apresentamos mais um resultado de rigidez para hipersuperfícies completas tipo-espaço contidas no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tau}$, e localmente tangentes por acima a um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$, com $\tilde{\tau} \leq \tau$. Supondo que $l_a = \lambda f_a$ e que a r-ésima curvatura média H_r é limitada e tal que $H_{r+2} \geq H_r \geq \beta$, para uma constante $\beta > 0$, concluimos que Σ^n é $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$.

2 PRELIMINARES

Sem nos aprofundar muito, neste capítulo vamos descrever o contexto geométrico no qual surge o problema que desejamos atacar nesta dissertação, isto é, estabelecer teoremas de rigidez e inexistência de hipersuperfícies completas tipo-espaço no Steady State Space. Além de fixar a notação a ser utilizada no trabalho, as ideias aqui expostas serão de grande utilidade para uma compreensão razoável dos resultados principais. Pode-se encontrar uma informação mais extensa nos capítulos 2, 3 de (BEEM *et al.*, 1996) e 3, 4 de (O'NEILL, 1983).

2.1 Variedades Lorentzianas

Partindo de noções elementares oriundas da Álgebra linear, falaremos sobre formas bilineares simétricas e produtos escalares em espaços vetoriais de dimensão finita. Posteriormente, conexões, curvaturas e métricas serão tratadas, também sem maiores detalhes.

Denotamos por $V = V(\mathbb{R})$ um espaço vetorial real de dimensão finita, por exemplo de dimensão n. Uma função bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$ satisfazendo $b(v,w) = b(w,v)$ para todos $v, w \in V$ é chamada de forma bilinear simétrica sobre V.

Definição 2.1.1. *Uma forma bilinear simétrica b sobre V é dita:*

(a) *positiva definida, se $b(v,v) > 0$, para todo $v \in V \backslash \{0\}$;*

(b) *negativa definida, se $b(v,v) < 0$, para todo $v \in V \backslash \{0\}$;*

(c) *não degenerada, se $b(v,w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.*

Sejam W um subespaço de V e b uma forma bilinear simétrica sobre V. Então, a restrição de b a W, isto é, $b_{|W \times W}$, é uma forma bilinear simétrica sobre W. O índice de b é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b_{|W \times W}$ é negativa definida. Além disso, diremos que um produto escalar sobre V é uma forma bilinear simétrica b que satisfaz o item (c) da definição anterior. Se V está munido com um produto escalar, então diz-se que V é um espaço vetorial com produto escalar, cujo índice é o mesmo índice de seu produto escalar.

Definição 2.1.2. *Sejam b um produto escalar sobre o espaço vetorial real V. Um vetor $v \in V \backslash \{0\}$ é dito:*

(a) *Tipo-espaço, se $b(v,v) > 0$;*

(b) *Tipo-tempo, se $b(v,v) < 0$;*

(c) *Tipo-luz, se $b(v,v) = 0$.*

Escrevendo $b = \langle , \rangle$ e sendo $W \subset V$ um subespaço não degenerado, isto é, tal que $\langle , \rangle_{|W \times W}$ é não degenerada. O conjunto $W^{\perp} = \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$ é chamado de complemento ortogonal de W em relação a $\langle , \rangle$.

No caso de W não ser não degenerado pode acontecer que $W + W^{\perp} \neq V$. Em relação aos subespaços W e $W^{\perp}$ temos as seguintes propriedades:

Lema 2.1.1. *Sejam V um espaço com produto escalar e W um subespaço de V. Então:*

(i) $dimW + dimW^{\perp} = dimV$.

(ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(iii) *W é não degenerado se, e somente se, $W + W^{\perp} = V$. (Em particular $W^{\perp}$ é não degenerado.)*

Demonstração.
(i) Seja $\{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n\}$ uma base para V tal que $\{e_1, ..., e_r\}$ é uma base para W. Para $v \in V$, escrevemos $v = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$. Daí,

$$
\begin{aligned}
v \in W^{\perp} &\iff \langle v, e_i \rangle = 0, \forall 1 \leq i \leq r \\
&\iff \sum_{j=1}^{n} g_{ij} a^i = 0, \forall 1 \leq i \leq r
\end{aligned}
$$

onde $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Como g é não degenerada, o subespaço $W^{\perp}$ é dado pelas soluções de um sistema linear de r equações independentes em n variáveis, portanto, $dimW^{\perp} = n - r$.
(ii) Pelo item (i) temos $dim(W^{\perp})^{\perp} = dimW$, ademais, não é difícil ver que $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$. Logo, vale a igualdade.
(iii) A ida segue de (i), e o fato de $W^{\perp}$ ser não degenerado segue de (ii).

$\square$

Para o espaço vetorial V munido de um produto escalar $\langle , \rangle$, pode acontecer que se $v \in V$, então $\langle v, v \rangle$ seja negativo. Um vetor $v \in V$ é unitário se $|v| = 1$, onde $|v| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ denota a norma de v. Também, dizemos que $v, w \in V$ são ortogonais quando $\langle v, w \rangle = 0$. Além disso, um conjunto de vetores é ortonormal se seus elementos forem unitários e mutuamente ortogonais. Se V for não nulo e estiver munido com um produto escalar, V possui uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle = \pm 1$.

Sabe-se que, dado V espaço vetorial real com produto escalar e uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ tal que $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$, podemos escrever cada $v \in V$ de maneira única como $v =$

$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \langle v, e_j \rangle e_j$. Além disso, o número de elementos com sinais negativos em $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ é igual do que o índice de V (ver capítulo 2 de (O'NEILL, 1983)).

Dado um espaço vetorial V com produto escalar de índice 1, e sendo Ω o conjunto de todos os vetores tipo-tempo em V, definimos os conjuntos

$$C(u) = \{v \in \Omega; \langle u, v \rangle < 0\}, \forall u \in \Omega$$

e

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \Omega; \langle u, v \rangle > 0\}, \forall u \in \Omega,$$

denominados cone tipo-tempo de V e cone oposto de $C(u)$, respectivamente. De acordo com o capítulo 1 de (SANTOS, 2013), temos as observações subsequentes:

Observação 2.1.1. *Se $u^{\perp}$ só contém vetores tipo-espaço, então $\Omega = C(u) \overset{\circ}{\bigcup} C(-u)$, (união disjunta).*

Observação 2.1.2. $v, w \in C(u) \Longleftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$.

Para o que segue, $M^n = M$ denotará uma variedade diferenciável de dimensão n, salvo quando mensão em contrário. Uma carta para uma variedade M é o que se conhece como um sistema de coordenadas para M.

Definição 2.1.3. *Uma métrica semi-Riemanniana é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica e não degenerada (produto escalar) $\langle , \rangle_p$ em T_pM, que varia diferenciavelmente com p no sentido seguinte: Se $x_1, ..., x_n$ são as funções coordenadas de uma carta para M definida num aberto $U \subset M$, temos que as funções $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p$ são diferenciáveis em U, para $i, j \in \{1, ..., n\}$. Ademais, precisa-se que o índice de $\langle , \rangle_p$ seja constante em M.*

Um par $(M, \langle , \rangle)$ é uma variedade semi-Riemanniana se $\langle , \rangle$ é uma métrica semi-Riemanniana em uma variedade diferenciável M. No caso em que o índice de $\langle , \rangle$ é igual a 1, M será chamada de variedade Lorentziana. $(M, \langle , \rangle)$ será escrita como M, quando não houver perigo de confusão.

O interesse físico no estudo das variedades de Lorentz reside no fato de que, quando $n = 4$, elas servem como modelos de espaços-tempo na Relatividade Geral. Como exemplos de variedades de Lorentz, ressaltamos os seguintes:

Exemplo 1. *Seja o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^m_1$*, de dimensão* $m = n+2$*, com* $n \geq 2$*. Podemos munir* $\mathbb{R}^m_1$ *com a métrica de Lorentz* $\langle , \rangle : \mathbb{R}^m_1 \times \mathbb{R}^m_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *para obter o espaço de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{L}^m$*. Para,* $v, w \in \mathbb{R}^m_1$*, tal métrica é dada por:*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{m-1} v_i w_i - v_m w_m,$$

onde $v = (v_1, ..., v_{m-1}, v_m)$ *e* $w = (w_1, ..., w_{m-1}, w_m)$*.*

Em seguida, estabeleceremos uma série de definições e um par de resultados que são generalizações de conceitos estudados pela Geometria Riemanniana. Denotamos por

$$\mathfrak{X}(M) = \{X : M \longrightarrow TM; X(p) \in T_pM\}$$

e

$$C^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é suave}\}$$

o espaço dos campos de vetores diferenciáveis e o anel das funções diferenciáveis, respectivamente, ambos definidos sobre M. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, denotamos por $X_p \in T_pM$ o vetor X que o campo associa ao ponto $p \in M$ e por $X(f) \in C^\infty(M)$ a função definida por $X(f)(p) = X_p(f)$, onde $X_p(f)$ é a derivada de f com relação ao vetor X_p. A Geometria Riemanniana ensina que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos denotar por $\langle X, Y \rangle$ a função $\langle X, Y \rangle(p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p$. Ela também associa a X e Y o campo de vetores $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, o qual é denominado o colchete dos campos X e Y.

Mais precisamente, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos (ver capítulo 1 de (CARMO, 2008)) que $[X, Y] = XY - YX$ satisfaz:

$$[X, Y] = -[Y, X];$$

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z];$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0;$$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Definição 2.1.4. *Uma conexão afim* ∇ *numa variedade diferenciável* M *é uma função* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *que satisfaz as seguintes condições:*

(a) $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z;$

(b) $\nabla_X(aY+bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z;$

(c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f,g \in C^\infty(M)$, $a,b \in \mathbb{R}$. *Tal aplicação é dada por* $(X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$, *onde o campo* $\nabla_X Y$ *é chamado de derivada covariante de* Y *com respeito a* X.

Teorema 2.1.3. *Em uma variedade semi-Riemanniana* M *existe uma única conexão afim* ∇, *chamada de conexão de Levi-Civita de* M*, satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, $\forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$;
2. $X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, $\forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Veja o capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Para o que segue, a menos que seja dito o contrário, ∇ será a conexão de Levi-Civita. Passamos a definir o que se entende pela curvatura de uma variedade semi-Riemanniana M, por suas curvaturas seccionais e algumas combinações de curvaturas seccionais que frequentemente aparecem na literatura.

Definição 2.1.5. *A curvatura de uma variedade semi-Riemanniana* M *é a aplicação* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, *dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

R mede quanto uma variedade semi-Riemanniana deixa de ser euclidiana. Observe que R é bilinear em $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$ e também $C^\infty(M)$ linear, isto é, $\forall f,g \in C^\infty(M), X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$, valem (ver capítulo 4 de (CARMO, 2008))

$$R(fX+gY,Z) = fR(X,Z) + gR(Y,Z);$$

$$R(X,fZ+gW) = fR(X,Z) + gR(X,Y);$$

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)(W);$$

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z.$$

Dados um ponto $p \in M$ e dois vetores $v,w \in T_pM$ que determinam um plano $\sigma \subset T_pM$, consideramos a forma bilinear simétrica $Q : \sigma \times \sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Q(v,w) = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2.$$

Definição 2.1.6. *Sejam $\sigma \subset T_pM$ um plano não-degenerado e $\{v,w\}$ uma base para σ. O número*

$$K(v,w) = \frac{\langle R(v,w)w,v\rangle}{Q(v,w)}.$$

é chamado de curvatura seccional de σ, sendo denotado por $K(\sigma)$.

O plano σ é não-degenerado se $Q(v,w)$ o for em σ. Em virtude do lema 2.1.1 Note que, $K(\sigma)$ independe da escolha da base para o plano $\sigma \in T_pM$. Com efeito, tome {s,t} uma outra base para σ, logo, podemos escrever v,w nesta base como segue; $v = at+bs$ e $w = ct+ds$, onde $ad-bc \neq 0$. Daí, $\langle R(v,w)w,v\rangle = (ad-bc)^2\langle R(s,t)t,s\rangle$ e $Q(v,w) = (ad-bc)^2Q(s,t)$.

Quando $K(\sigma)$ não depende do ponto $p \in M$ nem do plano não-degenerado $\sigma \subset T_pM$, diz-se que a variedade M possui curvatura seccional constante.

Proposição 2.1.4. *Se M é uma variedade semi-Riemanniana de curvatura seccional constante $K(\sigma) = C$, vale a seguinte identidade:*

$$R(X,Y)Z = C(\langle Y,Z,\rangle X - \langle X,Z\rangle Y).$$

Demonstração. Veja o capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Definição 2.1.7. *Seja M^n uma variedade semi-Riemanniana, $p \in M$ e $(E_1,...,E_n)$ um referencial ortonormal definido numa vizinhança de p, com $\varepsilon_i = \langle E_i,E_i\rangle$. A aplicação $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, definida em p por*

$$Ric(X,Y)(p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\langle R(X,E_i)E_i,Y\rangle(p)$$

é chamada de tensor de Ricci da variedade M.

Pode-se provar (Veja o capítulo 4 de (CARMO, 2008)) que Ric não depende da escolha do referencial. No caso de existir uma constante K tal que $Ric(X,X) \geq K\langle X,X\rangle$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, diz-se que o tensor de *Ricci* é limitado inferiormente. A curvatura de Ricci em p na direção de $v \in T_pM$ é $Ric_p(v) = \frac{1}{n-1}Ric(v,v)$. A curvatura escalar de M em p é $K(p) = \frac{1}{n}\sum_j Ric_p(E_j)$, onde $\{E_1,...,E_n\}$ é base ortonolmal de T_pM.

Antes de passar ao estudo das imersões isométricas, concluímos está seção com uma definição de certos objetos que vão aparecer mais tarde. Por um abuso da notação, o símbolo ∇ representará simultaneamente a conexão de Levi-Civita numa variedade semi-Riemanniana M e o operador gradiente atuando sobre funções suaves definidas em M, o que não vai gerar confusão.

Definição 2.1.8. *Sejam M^n uma variedade semi-Riemanniana, $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

1. *O gradiente de f é o campo de vetores ∇f tal que $\langle \nabla f, V\rangle = df(V)$ para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$.*
2. *A divergência de X é a função $div(X) \in C^\infty(M)$, definida em $p \in M$ como o traço da aplicação $V_p \longmapsto (\nabla_V X)(p)$. Particularmente, se $(E_1,...,E_n)$ é um referencial ortonormal definido numa vizinhança de p e $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$, então*
$$div(X)(p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle(p).$$
3. *O Laplaciano de f é a função $\Delta f \in C^\infty(M)$, definida como $\Delta f = div(\nabla f)$.*
4. *O hesssiano de f é o operador linear $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, definido por*
$$\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f.$$

2.2 Imersões Isométricas

Definição 2.2.1. *Sejam $(M^n, \langle,\rangle_M)$, e $(\bar{M}^{n+k}, \langle,\rangle_{\bar{M}})$ duas variedades semi-Riemannianas, onde $k \geq 0$. Uma imersão de M em $\bar{M}$ é uma aplicação diferenciável $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ tal que $d\phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}\bar{M}$ é injetiva para todo $p \in M$.*

Definição 2.2.2. *Uma imersão isométrica entre M e $\bar{M}$ é uma imersão $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ tal que $\langle X_p, Y_p\rangle_M = \langle d\phi_p(X_p), d\phi_p(Y_p)\rangle_{\bar{M}}$, $\forall p \in M$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se, além disto, ϕ é um homeomorfismo sobre $\phi(M) \subset \bar{M}$ com a topologia induzida por $\bar{M}$, então ϕ é dito um mergulho.*

O número k é chamado de codimensão da imersão. Para o caso particular de $k = 1$, diz-se que M é uma hipersuperfície de $\bar{M}$. Se M é Riemanniana e $\bar{M}$ é uma variedade de Lorentz, diremos que M é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\bar{M}$.

Sabe-se que toda imersão é localmente um mergulho. Logo, para cada $p \in M$ podemos identificar uma vizinhança $U_p \subset M$ de p com sua imagem $\phi(U_p)$, e pensar em ϕ como sendo localmente a aplicação inclusão. Isso nos permite fazer as identificações
$$\phi(p) \approx p,\ T_pM \approx d\phi_p(T_pM) \subset T_{\phi(p)}\bar{M},\ d\phi_p(v) \approx v.$$

No caso em que T_pM é um subespaço não-degenerado de $T_{\phi(p)}\bar{M}$ para cada $p \in M$, diremos que a imersão ϕ é não-degenerada. Assim, em virtude do Lema 2.1.1, escrevemos $T_{\phi(p)}\bar{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$, $\forall p \in M$. Se ϕ é uma imersão não-degenerada de uma variedade diferenciável M numa variedade semi-Riemanniana $(\bar{M}, \langle,\rangle_{\bar{M}})$, para tornar ϕ uma imersão isométrica, definimos uma métrica $\langle,\rangle_M$ em M (denominada métrica induzida pela imersão ϕ) pondo

$$\langle v, w\rangle_M = \langle d\phi_p(v), d\phi_p(w)\rangle_{\bar{M}}, \forall p \in M, \forall v, w \in T_pM.$$

Denotamos por $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de uma variedade semi-Riemaniana $\bar{M}$. Também $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ denota uma imersão não - degenerada de uma variedade diferenciável M em $\bar{M}$, e tornamos M uma variedade semi-Riemanniana com a métrica induzida por ϕ. Nesse caso, denotamos por ∇ a conexão de Levi-Civita de M. Por abuso de notação, $\langle,\rangle$ vai representar simultaneamente as métricas de M e $\bar{M}$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $d\phi(X)$ é um campo diferenciável ao longo de ϕ, e o conjunto $\bar{\mathfrak{X}}(M)$ representará todos os campos diferenciáveis ao longo ϕ. Ademais, um campo X ao longo de ϕ é tangente se, para todo $p \in M$ tem-se $X_p \in d\phi_p(T_pM) \approx T_pM$. O conjunto $\bar{\mathfrak{X}}(M)^{\top}$ é composto por todos os campos diferenciáveis tangentes ao longo ϕ. No caso em que $X_p \in d\phi_p(T_pM)^{\perp} \approx (T_pM)^{\perp}$, para todo $p \in M$, dizemos que X é um campo normal. Denotamos por $\bar{\mathfrak{X}}(M)^{\perp}$ o conjunto de todos os campos normais ao longo de ϕ.

De novo usando o Lema 2.1.1, podemos escrever $\bar{\mathfrak{X}}(M) = \bar{\mathfrak{X}}(M)^{\top} \oplus \bar{\mathfrak{X}}(M)^{\perp}$ e considerar as projeções ortogonais

$$\top : \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)^{\top} \ e \ \perp: \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)^{\perp}.$$

Note que o conjunto dos campo tangentes ao longo de ϕ pode ser identificado com $\mathfrak{X}(M)$ via $X \approx d\phi(X)$. Chamaremos de conexão induzida a aplicação $\tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)$, dada em $p \in M$ por:

$$\tilde{\nabla}(V,X)(p) = \tilde{\nabla}_V X(p) = \bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{X}(p), \ \forall V \in \mathfrak{X}(M), \ X \in \bar{\mathfrak{X}}(M),$$

onde $\bar{V}$ e $\bar{X}$ representam extensões a $\bar{M}$, numa vizinhança de p, dos campos $d\phi(V)$ e X, respectivamente, como $(\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{X})(p)$ só depende de $\bar{V}_p$ e do valor de X ao longo de uma curva tangente a $\bar{V}_p$ em p, temos que $\tilde{\nabla}$ está bem definida e satisfaz a propriedades seguintes:

$$\tilde{\nabla}_{fV+gW}X = f\tilde{\nabla}_V X + g\tilde{\nabla}_W X,$$

$$\tilde{\nabla}_V(aX+bY) = a\tilde{\nabla}_V X + b\tilde{\nabla}_V Y,$$

$$\tilde{\nabla}_V(fX) = f\tilde{\nabla}_V X + V(f)X,$$

$$\tilde{\nabla}_V W - \tilde{\nabla}_W V = d\phi([V,W]) \approx [V,W],$$

$$V\langle X,Y\rangle = \langle \tilde{\nabla}_V X, Y\rangle + \langle \tilde{\nabla}_V Y, X\rangle,$$

para todos $X,Y \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$, $V,W \in \mathfrak{X}(M)$, $f,g \in C^\infty(M)$ e $a,b \in \mathbb{R}$. Essas propriedades seguem dos seguintes fatos: se $\bar{f}$, $\bar{V}$, e $\bar{W}$ são extensões de f, V e W sobre $\bar{M}$, então $\bar{V}(\bar{f})_{|M} = V(f)$, $(\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{W})_{|M} = \tilde{\nabla}_V W$; $\langle \bar{V}, \bar{W}\rangle_{|M} = \langle V,W\rangle$ e $[\bar{V},\bar{W}]_{|M} = [V,W]$.

Proposição 2.2.1. *Se $\tilde{\nabla}$ é a conexão induzida pela imersão ϕ e $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top$.*

Demonstração. As propriedades anteriores mostram que $(\tilde{\nabla}_X Y)^\top$ é uma conexão bem definida em M, a qual satisfaz a simetria e compatibilidade do Teorema 2.1.3. Logo coincide con a conexão de Levi-Civita de M, pela unicidade desta conexão. □

Chamando de $\bar{\nabla}$ a conexão induzida, temos pelo resultado anterior que, para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y \oplus (\nabla_X Y)^\perp$. Passamos a definir a segunda forma fundamental da imersão ϕ como a aplicação $C^\infty(M)$-bilinear e simétrica $\Pi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)^\perp$ dada por $\Pi(X,Y) = (\nabla_X Y)^\perp$. A fórmula de Gauss da imersão ϕ é dada pela expressão

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X,Y).$$

Tomando $\eta \in \bar{\mathfrak{X}}(M)^\perp$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar $(\bar{\nabla}_X \eta)^\top \in \mathfrak{X}(M)$, a aplicação linear $A : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por $A(X) = -(\bar{\nabla}_X \eta)^\top$ é chamada de Operador de Forma ou operador de Weingarten da imersão $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ com respeito ao campo normal η. Note que, para cada $p \in M$, a restrição do operador A ao ponto p é uma aplicação linear auto-adjunta $A_p : T_pM \longrightarrow T_pM$.

Definição 2.2.3. *Seja $\bar{M}$ uma variedade de Lorentz. Uma aplicação $p \longmapsto \tau_p$, que associa a cada $p \in \bar{M}$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p\bar{M}$, é suave se, para cada $p \in M$, existem uma vizinhança aberta U de p e $V \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, tais que $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in U$. Caso uma tal aplicação τ_p exista, dizemos que a variedade $\bar{M}$ é temporalmente orientável.*

Uma variedade de Lorentz é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo de vetores tipo-tempo $K \in \bar{M}$, (veja o capítulo 1 de (JR., 2009)). A partir de agora, vamos supor que as nossas variedades são temporalmente orientáveis, de sorte que podemos tomar um campo vetorial normal unitário $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, apontando para o futuro.

Proposição 2.2.2. *Se A é o operador de Weingarten da imersão ϕ associado ao campo η, e Π é a segunda forma fundamental dessa imersão, então*

$$\langle A(X), Y\rangle = \langle \Pi(X,Y), \eta\rangle, \ \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Supondo $\langle Y, \eta\rangle = 0$, temos pela compatibilidade da conexão que $0 = X\langle Y, \eta\rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta\rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X \eta\rangle$. Daí,

$$\langle A(X), Y\rangle = \langle -(\bar{\nabla}_X \eta)^{\top}, Y\rangle = -\langle \bar{\nabla}_X \eta, Y\rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta\rangle = \langle \Pi(X,Y), \eta\rangle.$$

□

Concluimos está seção enunciando duas das equações fundamentais das imersões isométricas, as equações de *Codazzi* e *Gauss*, que relacionam a curvatura $\bar{R}$ de $\bar{M}$ com a curvatura R de M.

Proposição 2.2.3. *Seja $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica de M^n em $\bar{M}^{n+1}$, e η um campo normal unitário com $\varepsilon = \langle \eta, \eta\rangle$. Então, Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos:*

(a) *(Equação de Codazzi)*

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \varepsilon\langle(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, Z\rangle\eta.$$

(b) *(Equação de Gauss)*

$$R(X,Y)Z = (\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} + \varepsilon\langle AY, Z\rangle AX - \varepsilon\langle AX, Z\rangle AY.$$

Demonstração. Veja o capítulo 1 de (NASCIMENTO, 2013). □

2.3 As transformações de Newton

Para o que segue, vamos supor que M^n é uma hipersuperfície imersa em $\bar{M}^{n+1}$ com um campo de vetores normais unitário η, globalmente definido sobre M e apontando para o futuro. Seja $S_r(p)$ a r-ésima função simétrica elementar nos autovalores de A_p, para $r \in \{0, ..., n\}$. Portanto, obtemos n funções $S_r : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$det(tI-A)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}S_{r}t^{n-r},$$

onde $S_0 = 1$ por convenção. Se $p \in M$ e $\{e_i\}$ é uma base para T_pM formada por autovetores de A_p, com autovalores correspondentes $\{\lambda_i\}$, é fácil ver que as S_r são dadas por

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, ..., \lambda_n),$$

onde $\sigma_r \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ é o r-ésimo polinômio simétrico[1] elementar[2] nas indeterminadas $x_1, ..., x_n$. Com essas notações, definimos, a partir dos polinômios simétricos elementares e para $r \in \{0, ..., n\}$, a r-ésima curvatura média H_r de M^n por

$$\binom{n}{r}H_r = (-1)^r S_r = \sigma_r(-\lambda_1, ..., -\lambda_n).$$

Observe que $H_0 = 1$ e que $H_1 = -\frac{1}{n}S_1$ coincide com a curvatura média usual H de M^n, a qual é a principal curvatura da hipersuperfície. Para as r-ésimas curvaturas H_r temos um par de desigualdades importantes dadas pelo seguinte

Teorema 2.3.1. *Para cada $1 \le r \le n$, se $H_1, H_2, ..., H_r$ são positivas, então:*

(a) $H_{r-1}H_{r+1} \le H_r^2$.

(b) $H_r^{\frac{1}{r}} \le ... \le H_3^{\frac{1}{3}} \le H_2^{\frac{1}{2}} \le H_1$.

Demonstração. Ver capítulo 2, página 25 de (PINHEIRO, 2010). □

Se escrevemos M^n como Σ^n, vimos anteriormente que em cada ponto $p \in \Sigma^n$ o operador de Weingarten induz um operador linear auto adjunto $A_p : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$ cujos autovalores denotamos $\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)$. Eles fornecem n funções suaves $S_r : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$det(tI-A)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}S_{r}t^{n-r},$$

onde I representa o operador identidade em $T\Sigma$ e $S_0 = 1$. Note que

$$S_r(p) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_r \le n} \lambda_{i_1}(p) \dots \lambda_{i_r}(p).$$

Ademais, convencionamos que a r-ésima curvatura média H_r de Σ^n é dada por $\binom{n}{r}H_r = (-1)^r S_r$, de modo que $H_0 = 1$ e $H_1 = \frac{-1}{n}S_1$, sendo $H_1 := H$ a curvatura média de Σ^n.

[1] Simétrico significa que ao aplicar uma permutação qualquer às variáveis, o polinômio resultante é o mesmo.

[2] Elementar significa que é soma de todos os produtos possíveis de tamanho n das variáveis involucradas.

Definimos a r-ésima transformação de Newton $P_r : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ pela recursão seguinte: para $r = 0$, pomos $P_0 = I$, o operador identidade; para $0 \leq r \leq n$, definimos

$$P_{r+1} = \binom{n}{r+1} H_{r+1} I + AP_r. \tag{2.1}$$

Por indução sobre r na equação 2.1, obtemos

$$P_{r+1} = \binom{n}{r+1} H_{r+1} I + \binom{n}{r} H_r A + \binom{n}{r-1} H_{r-1} A^2 + ... + A^{r+1}. \tag{2.2}$$

De fato, supondo que, para $r = k < n$, vale $P_k = \binom{n}{k} H_k I + \binom{n}{k-1} H_{k-1} A + \binom{n}{k-2} H_{k-2} A^2 + ... + A^k$, temos

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= \binom{n}{k+1} H_{k+1} I + AP_k \\
&= \binom{n}{k+1} H_{k+1} I + A\{\binom{n}{k} H_k I + \binom{n}{k-1} H_{k-1} A + \binom{n}{k-2} H_{k-2} A^2 + ... + A^k\} \\
&= \binom{n}{k+1} H_{k+1} I + \binom{n}{k} H_k AI + \binom{n}{k-1} H_{k-1} A^2 + ... + A^{k+1}.
\end{aligned}$$

Deste modo, o Teorema de Cayley-Hamilton fornece $P_n = 0$. Também, como P_r é um polinômio em A, segue que ele é também linear, autoadjunto e comuta com A. Daí, cada base de $T_p\Sigma$ que diagonaliza A em $p \in \Sigma^n$ também diagonaliza todos os P_r em $p \in \Sigma^n$. Além disso, tomando uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ em $T_p\Sigma$ diagonalizando A_p, com $A_p(e_i) = \lambda_i(p)e_i$, teremos (conforme a proposição 1.6 de (NASCIMENTO, 2013))

$$(P_r)_p e_i = (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n, i_j \neq i} \lambda_{i_1}(p) \ldots \lambda_{i_r}(p) e_i = (-1)^r S_r(A_i) e_i,$$

onde $S_k(A_i)$ representa a soma dos termos de S_k onde não aparece λ_i. Um calculo imediato dá $S_r = S_r(A_i) + \lambda_i S_{r-1}(A_i)$.

O seguinte lema possui mais algumas propriedades das transformações de Newton.

Lema 2.3.1. *Com as notações acima e tomando $c_r = (n-r)\binom{n}{r}$, vale o seguinte:*

(a) $tr(P_r) = (-1)^r \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (-1)^r (n-r) S_r = c_r H_r$;

(b) $tr(AP_r) = (-1)^r \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(A_i) = (-1)^r (r+1) S_{r+1} = -c_r H_{r+1}$;

(c) $tr(A^2 P_r) = (-1)^r \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_r(A_i) = \binom{n}{r+1} (nHH_{r+1} - (n-r-1) H_{r+2})$.

Demonstração.

(a) Calculamos o traço de P_r:

$$tr(P_r) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle (-1)^r S_r(A_i) e_i, e_i \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i).$$

Logo, como temos por definição que $S_r = S_r(A_i) + \lambda_i S_{r-1}(A_i)$ escrevemos a última igualdade como

$$(-1)^r \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (-1)^r \sum_{i=1}^{n} (S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i)) = (-1)^r (\sum_{i=1}^{n} S_r - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i)).$$

Mas, como cada parcela que compõe S_r é contada r vezes em $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i)$, temos

$$tr(P_r) = (-1)^r (nS_r - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i)) = (n-r)(-1)^r S_r = (n-r)\binom{n}{r} H_r = c_r H_r.$$

(b) Observe que

$$P_{r+1} = \binom{n}{r+1} H_{r+1} I + AP_r = (-1)^{r+1} S_{r+1} I + AP_r = AP_r - (-1)^r S_{r+1} I.$$

Então, $AP_r = P_{r+1} + (-1)^r S_{r+1} I$, logo,

$$tr(AP_r) = tr(P_{r+1} + (-1)^r S_{r+1} I) = tr(P_{r+1}) + tr((-1)^r S_{r+1} I),$$

agora pelo item (a), resulta que

$$tr(AP_r) = (-1)^r [nS_{r+1} - (n-(r+1))] S_{r+1} = (-1)^r (r+1) S_{r+1} = -c_r H_{r+1}.$$

(c) Multiplicando $AP_r = P_{r+1} + (-1)^r S_{r+1} I$, por A, temos que

$$A^2 P_r = AP_{r+1} + (-1)^r S_{r+1} AI.$$

Então, segue de (b) que

$$\begin{aligned} tr(A^2 P_r) &= tr(AP_{r+1} + (-1)^r S_{r+1} A) \\ &= tr(AP_{r+1}) + (-1)^r S_{r+1} tr(A) \\ &= (-1)^{r+1} (r+2) S_{r+2} - (-1)^r S_{r+1} nH \\ &= \binom{n}{r+1} (nHH_{r+1} - (n-(r+1)) H_{r+2}). \end{aligned}$$

$\square$

3 HIPERSUPERFÍCIES DO STEADY STATE SPACE

3.1 O Steady State Space

Depois de ter estudado o espaço de Lorentz Minkowski, temos como um outro exemplo de variedade Lorentziana o seguinte

Exemplo 2. *Uma variedade de Lorentz de curvatura seccional constante e igual a 1, a qual é estudada com grande interesse, é o chamado espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Ele é dado como a esfera unitária em $\mathbb{R}_1^{n+2}$, isto é:*

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p\rangle = 1\},$$

aqui, $\langle , \rangle$ é a métrica induzida pela variedade do exemplo anterior. O espaço tangente, para cada $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, é dado por:

$$T_p\mathbb{S}_1^{n+1} = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle v, p\rangle = 0\}.$$

Além disso, seja $a \in \mathbb{L}^{n+2} - \{0\}$ um vetor tipo-luz (não nulo) apontando para o passado, isto é, tal que $\langle a, a\rangle = 0$ e $\langle a, e_{n+2}\rangle > 0$, onde $e_{n+2} = (0, ..., 0, 1)$. Então, a região aberta $\mathscr{H}^{n+1}$ da variedade de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, definida por

$$\mathscr{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle > 0\},$$

é denominada Steady State Space (veja a Figura 1). O subíndice 1 que aparece em $\mathbb{R}_1^m$ e em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ indica o índice do produto escalar associado. Em particular, o espaço de De Sitter é um modelo de variedade lorentziana de curvatura seccional constante.

No que segue, vamos estudar a geometria de certas hipersuperfícies de $\mathscr{H}^{n+1}$. Para tanto, começamos recordando a seguinte definição genérica.

Definição 3.1.1. *Um campo de vetores V numa variedade de Lorentz $(\bar{M}^{n+1}, g)$ é dito conforme se $L_V g = 2\psi g$ para alguma função $\psi \in C^\infty(\bar{M})$, onde $L_V g$ denota a derivada de Lie da métrica g de $\bar{M}^{n+1}$ e ψ é uma função suave em $\bar{M}^{n+1}$, denominada o fator conforme de V.*

Um caso particular importante de campo conforme V em $\bar{M}^{n+1}$ é aquele de um campo conforme fechado, isto é, tal que $\bar{\nabla}_W V = \psi W$ para todo $W \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\bar{M}$.

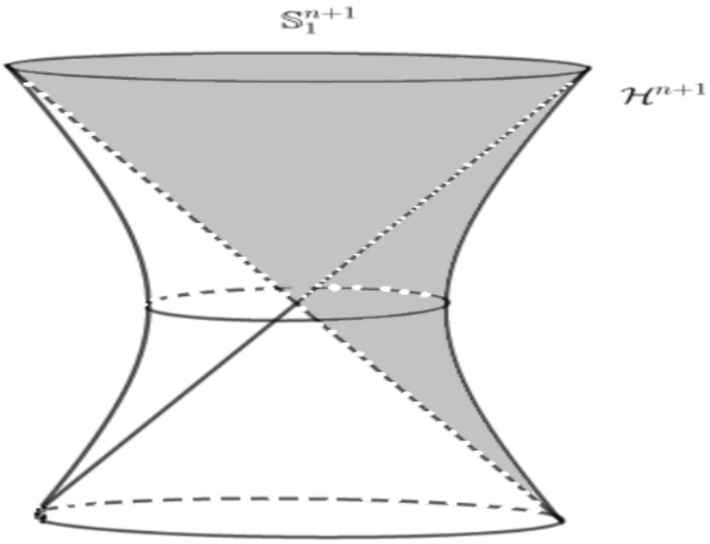


Figura 1 – Espaço de De Sitter contendo $\mathscr{H}^{n+1}$.

Recordamos também que um campo V em $\bar{M}$ é completo se suas curvas integrais[1] maximais estiverem definidas em $\mathbb{R}$.

Doravante, nos restringiremos ao caso em que $\bar{M}^{n+1}$ é $\mathscr{H}^{n+1}$. Se V é o campo em $\mathscr{H}^{n+1}$ tal que

$$V_p = \langle p, a \rangle p - a,$$

então é imediato verificar que V é tipo-tempo, e é possível provar que V é completo.

Observação 3.1.1. *V_p é conforme fechado, com efeito, $\langle V_p, p \rangle = \langle p, a \rangle \langle p, p \rangle - \langle p, a \rangle = 0$. Logo, $V_p \in T_p\mathscr{H}^{n+1}$. Além disso, sendo $\tilde{\nabla}$ a conexão de $\mathbb{L}^{n+2}$, temos*

$$(\bar{\nabla}_W V)_p = (\tilde{\nabla}_W V)_p^{\top} = (\tilde{\nabla}_W V)_p - \langle (\tilde{\nabla}_W V)_p, p \rangle p. \tag{3.1}$$

Como

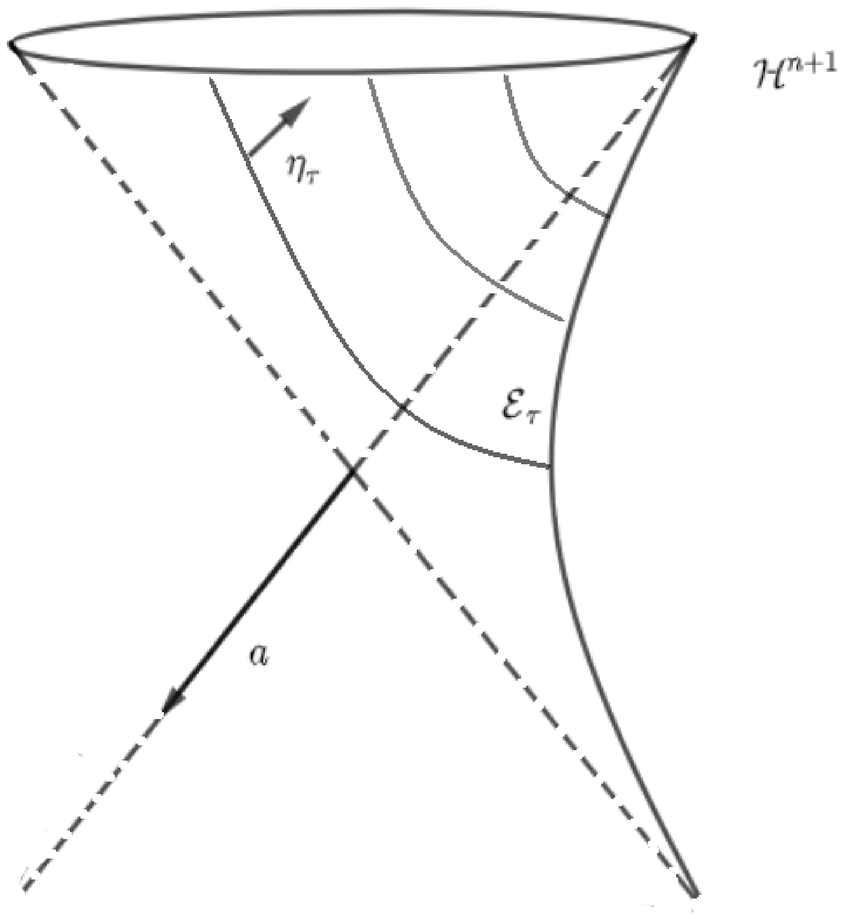
$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_W V)_p &= \tilde{\nabla}_W(\langle p, a \rangle p - a) \\ &= W_p \langle p, a \rangle p + \langle p, a \rangle \tilde{\nabla}_{W_p} p - \tilde{\nabla}_{W_p} a \\ &= \langle \tilde{\nabla}_{W_p} p, a \rangle p + \langle p, a \rangle W_p \\ &= \langle W_p, a \rangle p + \langle p, a \rangle W_p,\end{aligned}$$

[1] A curva integral de um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ partindo de um ponto $q \in \bar{M}$ é a única curva suave $\gamma_q : I \longrightarrow \bar{M}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervalo) tal que $\gamma_q(0) = q$ e $\gamma_q'(t) = V_{\gamma_q(t)}$, para todo $t \in I$.

notando que $\langle W_p, p\rangle = 0$, *de* (3.1) *temos*

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_W V)_p &= \langle W_p, a\rangle p + \langle p, a\rangle W_p - \langle\langle W_p, a\rangle p + \langle p, a\rangle W_p, p\rangle p\\ &= \langle W_p, a\rangle p + \langle p, a\rangle W_p - (\langle W_p, a\rangle + \langle p, a\rangle\langle W_p, p\rangle)p\\ &= \langle p, a\rangle W_p.\end{aligned}$$

Figura 2 – Folheação de $\mathscr{H}^{n+1}$ por hiperplanos tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O Teorema de Frobenius garante (veja a proposição 1 de (MONTIEL, 1999)) que a distribuição n-dimensional $\mathscr{D}_V$ em $\mathscr{H}^{n+1}$, dada por

$$\mathscr{D}_V(p) = \{v \in T_p\mathscr{H}^{n+1}; \langle V_p, v\rangle = 0\},$$

é integrável. Em particular, a folheação correspondente $\mathscr{F}_V$ é formada por folhas tipo-espaço orientadas por V (veja a Figura 2).

Para identificar tais folhas ponha, para $\tau > 0$,

$$\mathscr{E}_\tau = \{p \in \mathscr{H}^{n+1}; \langle p, a\rangle = \tau\}.$$

O teorema da imagem inversa de um valor regular garante que cada $\mathscr{E}_\tau$ é ortogonal a V, e um cálculo simples mostra que $\mathscr{E}_\tau$ é também conexa. Então, é imediato que

$$\mathscr{F}_V = \{\mathscr{E}_\tau; \tau > 0\}.$$

Pode ser mostrado que $\mathscr{E}_\tau$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica[2] de $\mathscr{H}^{n+1}$, isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. De fato, $\mathscr{E}_\tau$ é uma hipersuperfície tipo-espaço pois $\mathscr{E}_\tau = F^{-1}(\tau)$, onde $F : \mathscr{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $x \longmapsto \langle x, a\rangle$, e τ é valor regular de F. Se v é tangente a $\mathscr{E}_\tau$ em x, com $v = \gamma'(0)$, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathscr{E}_\tau$ tal que $\gamma(0) = x$, então

$$\langle \gamma(t), a\rangle = \tau \Longleftrightarrow \langle \gamma'(0), a\rangle = \langle v, a\rangle = 0.$$

Logo $T_x\mathscr{E}_\tau = \{v \in T_x\mathscr{H}^{n+1}; \langle v, a\rangle = 0\}$. Se $x \in \mathscr{E}_\tau$ e $V_x = \langle x, a\rangle x - a$, vimos que $V_x \in T_x\mathscr{H}^{n+1}$ e $\langle V_x, v\rangle = \langle x, a\rangle\langle p, p\rangle - \langle a, x\rangle = 0$, $\forall v \in T_x\mathscr{E}_\tau$. Assim, $V_x \in T_x^{\perp}\mathscr{E}_\tau$, de sorte que $T_x\mathscr{E}_\tau = \mathscr{D}(x)$. Então, $\{\mathscr{E}_\tau; \tau > 0\}$ é o conjunto das folhas de $\mathscr{D}$. Para $v \in T_x\mathscr{E}_\tau$, já sabemos que $(\bar{\nabla}_v V)_x = \langle x, a\rangle v = \tau v$. Como V é normal, temos $-A_V v = \tau v$, e $\mathscr{E}_\tau$ é totalmente umbílico.

Se $\eta_\tau(x) = x - \frac{1}{\tau}a = \frac{1}{\tau}(\tau x - a)$, então η_τ é unitário e é imediato que $\eta_\tau(x) \in T_x\mathscr{H}^{n+1} \cap (T_x\mathscr{E}_\tau)^{\perp}$, com $A_x v = -(\bar{\nabla}_v \eta_\tau)_x = -v$. Portanto, $A_x = -Id$ e, daí, $H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}}(-1)^r S_r = 1$. A equação de Gauss dá, para $v, w \in T_x\mathscr{E}_\tau$ ortonormais

$$\begin{aligned} K_{\mathscr{E}_\tau}(v,w) &= K_{\mathscr{H}^{n+1}}(v,w) - \langle Av, v\rangle\langle Aw, w\rangle + \langle Av, w\rangle^2 \\ &= 1 - \langle -v, v\rangle\langle -w, w\rangle + \langle -v, w\rangle^2 \\ &= 1 - \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por fim, se $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathscr{E}_\tau$ satisfaz $p = \gamma(0)$, então $\gamma_s(t) = \frac{sp + (1-s)\gamma(t)}{|sp + (1-s)\gamma(t)|}$ é tal que $\gamma_0(t) = \gamma(t)$, $\gamma_1(t) = \gamma(0) = p$ e $\langle \gamma_1(t), a\rangle = s\langle p, a\rangle + (1-s)\langle \gamma(t), a\rangle = s\tau + (1-s)\tau = \tau$, $|\gamma_s(t)| = 1$. Portanto, $(s,t) \longmapsto \gamma_s(t)$ é homotopia entre γ e a curva constante p, de sorte que $\mathscr{E}_\tau$ é simplesmente conexa. Pelo Teorema de Cartan, $\mathscr{E}_\tau$ é isométrica a $\mathbb{R}^n$.

Orientando $\mathscr{E}_\tau$ pelo campo normal unitário $\eta_\tau(p) = p - \frac{1}{\tau}a$, temos que $\mathscr{E}_\tau$ tem r-ésima curvatura constante e igual a 1, para $1 \le r \le n$.

[2] Uma hipersuperfície $\phi : M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+1}$ é totalmente umbílica se, para todo $p \in M$, a segunda forma fundamental Π de ϕ em p satisfaz $\langle \Pi(X,Y), \eta\rangle(p) = \lambda(p)\langle X, Y\rangle$, para um certo $\lambda(p) \in \mathbb{R}$ e todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$.

3.2 Hipersuperfícies em $\mathscr{H}^{n+1}$

Dada uma hipersuperfície tipo-espaço $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$, orientada pelo campo normal unitário η apontando para o futuro, consideramos as funções altura e ângulo, $l_a, f_a : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas respectivamente por

$$l_a = \langle \phi(x), a \rangle \ \text{ e } \ f_a = \langle \eta(x), a \rangle.$$

No que segue, por vezes nos referiremos a tais funções simplesmente como as funções auxiliares da imersão ϕ. Sendo $a^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ a componente tangencial de a ao longo da imersão ϕ, segue de $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ e $\langle \eta, \eta \rangle = -1$ que $a = a^\top - \langle \eta, a \rangle \eta + \langle \phi, a \rangle \phi$ ou, ainda,

$$a^\top = a + l_a \phi - f_a \eta.$$

Mais adiante, precisaremos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 3.2.1. *Sejam $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço e l_a, f_a as funções auxiliares de ϕ. Então,*

$$\nabla l_a = a^\top \ \text{ e } \ \nabla f_a = -A(a^\top).$$

Demonstração. Denotemos por ∇, $\bar{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de Σ^n, $\mathscr{H}^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$ respectivamente. Mediante a identificação $\phi(x) \approx x$, temos, para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, que

$$\langle \nabla l_a, X \rangle = dl_a(X) = X\langle \phi, a \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X x, a \rangle = \langle X, a^\top \rangle.$$

Também, como

$$(\tilde{\nabla}_x \eta)_x = \langle \tilde{\nabla}_X \eta, x \rangle x + \bar{\nabla}_X \eta = (X\langle \eta, x \rangle - \langle \eta, \tilde{\nabla}_X x \rangle)x + \bar{\nabla}_X \eta = \bar{\nabla}_X \eta,$$

temos

$$\langle \nabla f_a, X \rangle = df_a(x) = X\langle \eta, a \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \eta, a \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \eta, a \rangle = \langle -AX, a^\top \rangle = \langle -A(a^\top), X \rangle.$$

Daí, $\nabla l_a = a^\top$ e $\nabla f_a = -A(a^\top)$. □

Como na demonstração anterior, denotemos por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões riemannianas de Σ^n e $\mathbb{L}^{n+2}$, respectivamente (e continuemos a denotar por $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana de $\mathscr{H}^{n+1}$). Para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\bar{\nabla}_X a^\top = \nabla_X a^\top - \langle AX, a^\top \rangle \eta.$$

Substituindo esta expressão em

$$\tilde{\nabla}_X a^\top = \bar{\nabla}_X a^\top - \langle X, a^\top \rangle \phi,$$

obtemos

$$\tilde{\nabla}_X a^\top = \nabla_X a^\top - \langle AX, a^\top \rangle \eta - \langle X, a^\top \rangle \phi.$$

Como $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é fixo, as fórmulas de Gauss e de Weingarten nos dizem que

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\nabla}_X a \\
&= \tilde{\nabla}_X (a^\top - f_a \eta + l_a \phi) \\
&= \tilde{\nabla}_X a^\top - \tilde{\nabla}_X (f_a \eta) + \tilde{\nabla}_X (l_a \phi) \\
&= \tilde{\nabla}_X a^\top - X(f_a)\eta - f_a \tilde{\nabla}_X \eta + X(l_a)\phi + l_a \tilde{\nabla}_X \phi \\
&= \nabla_X a^\top - \langle AX, a^\top \rangle \eta - \langle X, a^\top \rangle \phi - X(f_a)\eta - f_a \tilde{\nabla}_X \eta + X(l_a)\phi + l_a \tilde{\nabla}_X \phi \\
&= \nabla_X a^\top - \langle AX, a^\top \rangle \eta - \langle X, a^\top \rangle \phi - X(f_a)\eta + f_a AX + X(l_a)\phi + l_a X \\
&= \nabla_X a^\top - \langle AX, a^\top \rangle \eta - \langle X, a^\top \rangle \phi + \langle Aa^\top, X \rangle \eta + f_a AX + \langle X, a^\top \rangle \phi + l_a X \\
&= \nabla_X a^\top + f_a AX + l_a X.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla_X \nabla l_a = \nabla_X a^\top = -(f_a AX + l_a X). \tag{3.2}$$

3.3 O operador L_r em $\mathscr{H}^{n+1}$

Nas notações da discussão anterior, associado a cada transformação de Newton P_r em Σ, temos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$ definido por

$$L_r(f) = tr(P_r \nabla^2 f), \tag{3.3}$$

aqui, $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ denota o Hessiano de $f \in C^\infty(\Sigma)$, isto é, o operador linear autoadjunto dado por:

$$\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Uma vez que $\mathscr{H}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, temos o seguinte resultado, para cuja prova sugerimos (ROSENBERG, 1993).

Teorema 3.3.1 (Rosenberg)**.** *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço. Então, para cada $f \in C^\infty(M)$ tem-se*

$$L_r(f) = div(P_r \nabla f).$$

Contudo, o lema 2.3.1 e (3.2), dão, já a partir da definição de L_r, que

$$\begin{aligned} L_r l_a &= tr(P_r \nabla^2 l_a) \\ &= -tr(f_a A P_r + l_a P_r) \\ &= -f_a tr(AP_r) - l_a tr(P_r) \\ &= c_r f_a H_{r+1} - c_r l_a H_r \\ &= c_r(f_a H_{r+1} - l_a H_r), \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $c_r = (n-r)\binom{n}{r}$.

Definição 3.3.1. *O operador L_r é elíptico se, em todo ponto, P_r é um operador linear positivo definido. Um ponto elíptico em Σ^n, é um ponto $p_0 \in \Sigma^n$ em que todas as curvaturas principais são negativas.*

Particularmente, para $r = 0$, obtemos o já definido operador Laplaciano $L_0 = \Delta$, o qual sempre é elíptico. O lema subsequente provê uma condição geométrica que garante a elipticidade do operador L_1.

Lema 3.3.1. *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço em $\mathscr{H}^{n+1}$. Se $H_2 > 0$ em Σ^n, então L_1 é elíptico, ou equivalentemente, P_1 é positivo definido para uma escolha adequada de uma orientação η.*

Demonstração. Observe que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $H_1^2 \geq H_2 > 0$ e H_1 não é nulo em Σ^n. Fazendo uma escolha adequada da aplicação de Gauss η, podemos assumir $H_1 > 0$. Notando que a escolha de H_2 independe de η, como $n^2 H_1^2 = \sum \lambda_i^2 + n(n-1)H_2 > \lambda_i^2$, temos $nH > |\lambda_i| \geq \lambda_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Então, $(P_1)_p e_i = nH_1 + \lambda_i > 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$, e P_1 é positivo definido, como queríamos. □

Quando $r \geq 2$, o seguinte lema estabelece condições suficientes para garantir a elipticidade de L_r

Lema 3.3.2 (Barbosa-Colares)**.** *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa tipo-espaço em $\mathscr{H}^{n+1}$, com $S_{r+1} \neq 0$. Se Σ^n tem um ponto elíptico, então, L_k é elíptico para $k \in \{2, ..., r\}$ e $H_k > 0$ em Σ^n para $k \in \{2, ..., r+1\}$.*

Demonstração. Note que a elipticidade de L_r é equivalente a P_r ser positivo definido, e daí, a ser $S_k(A_i) > 0$ para $k \in \{2,...,r\}$ e $i \in \{2,...,n\}$. Se $p \in \Sigma^n$ é um ponto elíptico, como os autovalores de A são funções contínuas em Σ^n, quando ordenamos $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$, existe um aberto $U \subset \Sigma^n$ contendo p no qual $\lambda_i > 0$ para cada $i \in \{1,...,n\}$. Em particular, $H_{r+1} > 0$ em Σ^n, e $H_k, S_k(A_i) > 0$ em U para $1 \leq i,k \leq n$.

Fixado i, seja U_k o maior subconjunto conexo de Σ^n contendo U e tal que $S_k(A_i) > 0$.

Afirmação: $U_n \subset U_{n-1} \subset ... \subset U_1$. De fato, definindo $V = U_1 \cap, ..., \cap U_t$, basta mostrar que $V = U_t$ para cada $1 \leq t \leq n$. Como $V \subset U_t$ e U_t é aberto e conexo, basta provarmos que $\partial V \subset \partial U_t$. Em V, tem-se pelo item (b) do Teorema 2.3.1 que

$$H_1(A_i) \geq ... \geq H_t^{\frac{1}{t}}(A_i), \tag{3.5}$$

e tais desigualdades continuando válidas em ∂V por continuidade. Se $q \in \partial V \cap U_t$, então $H_k(A_i) > 0$ em q, para todo $k \in \{1,...,t\}$. Daí, $q \in V$, o que é uma contradição.

Para provar que $U_k = \Sigma^n$, $\forall\ 1 \leq k \leq r$, devemos provar que $U_r = \Sigma^n$. Como U_r é aberto e conexo, basta provarmos que ∂U_r é vazio. Por absurdo, se $q \in \partial U_r$, então $H_r(A_i) = 0$ em q, e segue da equação 3.5 que $H_k(A_i) \geq 0$ em q, para $1 \leq k \leq n$. Por outro lado, tem-se em q

$$0 < S_{r+1} = \lambda_i S_r(A_i) + S_{r+1}(A_i) = S_{r+1}(A_i),$$

de modo que $H_{r+1}(A_i) > 0$ em q. Agora, pelo item (a) do Teorema 2.3.1 tem-se em q

$$0 = H_r^2(A_i) \geq H_{r-1}(A_i) + H_{r+1}(A_i) > 0,$$

e, daí $H_{r-1}(A_i) = 0$ em q. Portanto, $H_k(A_i) = 0$ para cada $k \geq r-1$. Mas isto contradiz o fato de $H_{r+1}(A_i) > 0$. Assim, não acontece que $q \in \partial U_r$ e, portanto, ∂U_r é vazio.

Finalmente, como i foi fixado arbitrariamente, temos que P_k é definido positivo, isto é, L_k é um operador elíptico. Ademais, como $H_{r+1} > 0$, para $1 \leq k \leq r$, temos que

$$\binom{n}{k} H_k = S_k = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{i=1}^{n} S_k(A_i) > 0,$$

o que conclui a prova do Lema. $\square$

3.4 O princípio do máximo de Omori-Yau generalizado

Continuando, enunciaremos uma extensão do princípio do máximo de Omori-Yau, devida a Alías, Impera e Rigoli em (ALÍAS *et al.*, 2012). Ela vai ser de grande utilidade mais adiante, para estudarmos a rigidez e inexistência de hipersuperfícies tipo-espaço completas em $\mathscr{H}^{n+1}$.

Uma variedade de Lorentz $\bar{M}$ que possui um campo de vetores tipo-tempo conforme globalmente definido é dita conformemente estacionária. O resultado, a seguir é devido a Alías e Colares, em (ALÍAS *et al.*, 2003).

Lema 3.4.1. *Seja V um campo de vetores completo, conforme, fechado e tipo-tempo, globalmente definido no Steady State Space $\mathscr{H}^{n+1}$, e seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa em $\mathscr{H}^{n+1}$. Suponha que $div(V) \neq 0$ num ponto de Σ^n onde a restrição $|V|_\Sigma = \sqrt{-\langle V,V\rangle}|_\Sigma$ de $|V|$ a Σ^n atinge um mínimo local. Então, existe um ponto elíptico $p_0 \in \Sigma^n$.*

Demonstração. Por hipótese, existe um ponto $p_{min} \in \Sigma^n$ onde a função positiva $|V|_{\Sigma^n}$, ou equivalentemente a função $u = -\langle V,V\rangle|_{\Sigma^n}$, atinge um mínimo local, com $div(p_{min}) \neq 0$ (equivalentemente, $\phi(p_{min}) \neq 0$, $\phi = \frac{1}{n+1} divV$). Portanto, $\nabla u(p_{min}) = 0$ e $\nabla^2 u_{p_{min}}(v,v) \geq 0$ para todo $v \in T_{p_{min}}\Sigma^n$. Como $\bar{\nabla}_X V = \phi X$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos (para um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em $T_{p_{min}}\Sigma$) $\nabla u = -2\sum_i \varepsilon_i \langle \nabla_{e_i} V, V\rangle e_i = -2\sum_i \varepsilon_i \langle \phi V, e_i\rangle e_i = -2\phi V^\top$. Para essa Hessiana obtemos que cada campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u(X,X) &= \langle \nabla_X(\nabla u), X\rangle \\
&= -2X(\phi)\langle X, V^\top\rangle - 2\phi\langle \nabla_X V^\top, X\rangle \\
&= -2X(\phi)\langle X, V^\top\rangle - 2\phi^2|X|^2 + 2\phi\langle V,\eta\rangle\langle AX, X\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Escrevendo $V^\top = V + \langle V,\eta\rangle\eta$ segue que

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_X V^\top, X\rangle &= \langle \nabla_X(V + \langle V,\eta\rangle\eta), X\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_X V, X\rangle + \langle X(\langle V,\eta\rangle)\eta, X\rangle + \langle V,\eta\rangle\langle \bar{\nabla}_X \eta, X\rangle \\
&= \langle \phi X, X\rangle + \langle V,\eta\rangle\langle -AX, X\rangle \\
&= \phi(\langle X, X\rangle) - \langle V,\eta\rangle\langle AX, X\rangle,
\end{aligned}
$$

e $V^\top(p_{min}) = 0$. Assim, $0 = (V + \langle V,\eta\rangle\eta)(p_{min})$, logo $\langle V,\eta\rangle^2(p_{min}) = -\langle V,V\rangle(p_{min}) = u(p_{min})$, portanto

$$\langle V,\eta\rangle(p_{min}) = -\sqrt{u(p_{min})},$$

temos da equação (3.6) que

$$\frac{1}{2}\nabla^2 u_{p_{min}}(v,v) = -\phi^2(p_{min})|v|^2 - \phi(p_{min})\sqrt{u(p_{min})}\langle A_{p_{min}}v,v\rangle \geq 0 \tag{3.7}$$

para cada $v \in T_{p_{min}}\Sigma^n$.

Suponhamos que $div(V)(p_{min})$ (ou, equivalentemente $\phi(p_{min})$) é positivo. A prova para o caso $divV$ negativo é similiar, mas existe uma diferença essencial no sinal das curvaturas principais, como vemos na seguinte observação: Vale a pena notar que, se $divV(p_{min}) < 0$, então o ponto é elíptico; com isto, no ponto onde u atinge o mínimo, temos

$$\lambda_i(p_{min}) \geq \frac{-\phi(p_{min})}{\sqrt{u(p_{min})}} > 0, \forall i \in \{1,...,n\}.$$

Agora, podemos fazer a escolha de uma base $\{e_1,...,e_n\}$ nas direções principais no ponto mínimo p_{min}. Com ajuda de 3.7, concluímos o desejado, isto é, que $\lambda_i(p_{min}) \leq \frac{-\phi(p_{min})}{\sqrt{u(p_{min})}} < 0, \forall i.$ □

Se Σ^n é uma variedade Riemanniana completa, estendemos a ideia de transformação de Newton P_r como segue: Denotamos por $\mathscr{P} : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ um operador autoadjunto e, em seguida, consideremos o operador diferencial linear de segunda ordem $\mathscr{L} : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ naturalmente associado ao operador autoadjunto $\mathscr{P}$, isto é, dado por

$$\mathscr{L}(f) = tr(\mathscr{P}\nabla^2 f). \tag{3.8}$$

Podemos finalmente enunciar o seguinte resultado fundamental, para cuja prova sugerimos (ALíAS *et al.*, 2016)

Lema 3.4.2. *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana completa e com curvatura seccional limitada inferiormente, $f \in C^\infty(\Sigma)$ uma função limitada superiormente e $\mathscr{L}$ o operador definido a partir de $\mathscr{P}$ como acima. Se $\mathscr{P}$ é positivo semi-definido e $tr(\mathscr{P})$ é limitado superiormente em Σ^n, então existe uma sequência $(p_k)_{k\geq 0}$ em Σ^n tal que:*

(a) $\lim_k f(p_k) = \sup_\Sigma f.$

(b) $\lim_k |\nabla f(p_k)| = 0.$

(c) $\limsup_k \mathscr{L}f(p_k) \leq 0.$

4 RIGIDEZ E INEXISTÊNCIA EM $\mathscr{H}^{n+1}$

Depois de organizar os preliminares e apresentar o Steady State Space, estamos em condições de exibir os resultados principais deste trabalho. As hipersuperfícies completas tipo-espaço $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ imersas em $\mathscr{H}^{n+1}$ serão consideradas contidas no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço. Tomaremos $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ vetor tipo luz apontando para o passado, fixemos sobre Σ^n um campo de vetores η, normal, unitário, globalmente definido e apontando para o futuro, e denotaremos por A o operador de Wingarten correspondente. Ademais, $l_a = \langle \phi, a \rangle$ e $f_a = \langle \eta, a \rangle$ representarão as funções auxiliares da imersão ϕ, altura e ângulo respectivamente.

4.1 Rigidez

Conforme comentamos na introdução ao capítulo, suporemos que Σ^n está contida no fecho de um domínio interior limitado pelo hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$, com $\tau > 0$, (ver Figura 3). Isto é o mesmo que pedir que a função altura l_a satizfaça $l_a \leq \tau$ e que a função ângulo f_a seja positiva. Com a notação fixada, chegamos no primeiro resultado de rigidez quando consideramos apenas restrições sobre as curvaturas médias H e H_2.

Teorema 4.1.1. *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathscr{H}^{n+1}$ contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$. Suponha que a curvatura média H de Σ^n é limitada e tal que $0 \leq H \leq H_2$. Se*

$$|a^\top| \leq C \inf(H_2 - H), \tag{4.1}$$

para alguma constante positiva C, então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$ com $\tilde{\tau} \leq \tau$.

Demonstração. Sendo $a^\top$ a projeção ortogonal de a sobre Σ^n, escrevemos $a^\top = a + f_a\eta - l_a\phi$. Além disso, recorde que $\nabla l_a = a^\top$ e $\nabla f_a = -A(a^\top)$. Daí, uma vez que a é tipo luz e η é ortogonal a ϕ, as propriedades do produto interno dão

$$|\nabla l_a|^2 = |a^\top|^2 = |a + f_a\eta - l_a\phi|^2 = f_a^2 - l_a^2.$$

Em particular, $f_a \geq l_a > 0$ (lembre-se que l_a e f_a são positivas, pois estamos em $\mathscr{H}^{n+1}$) e, como $L_r l_a = c_r(f_a H_{r+1} - l_a H_r)$, temos

$$L_1 l_a = c_1(f_a H_2 - l_a H_1) = c_1 f_a H_2 - c_1 l_a H \geq c_1 l_a H_2 - c_1 l_a H = c_1(H_2 - H)l_a. \tag{4.2}$$

Em virtude da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos $H_2 \leq H^2$ e, pela hipótese de H ser limitada, temos que H_2 também é limitada. Ademais, sendo $\lambda_1, ..., \lambda_n$ as curvaturas principais de Σ^n, álgebral elementar dá

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2, \tag{4.3}$$

de sorte que, todas as curvaturas principais também são limitadas. Se K_Σ denota a curvatura seccional de Σ^n, a equação de Gauss dá

$$K_\Sigma(e_i, e_j) = 1 - \lambda_i \lambda_j. \tag{4.4}$$

Logo, K_Σ é limitada inferiormente. Também temos que l_a é limitada, pois por hipótese Σ^n está contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$. Como $0 \leq H \leq H_2$, temos pelo lema 3.3.1 que L_1 é elíptico; em particular, P_1 é positivo semidefinido e $tr(P_1) = c_1 H$ é limitado. Pela equação 4.2,

$$L_1 l_a \geq c_1(H_2 - H) l_a \geq 0.$$

Agora, somos livres para usar o Lema 3.4.2, e obter uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ^n tal que

$$\lim_k l_a(p_k) = \sup_\Sigma l_a,$$

$$\lim_k |\nabla l_a(p_k)| = 0,$$

e

$$\limsup_k L_1 l_a(p_k) \leq 0.$$

Assim,

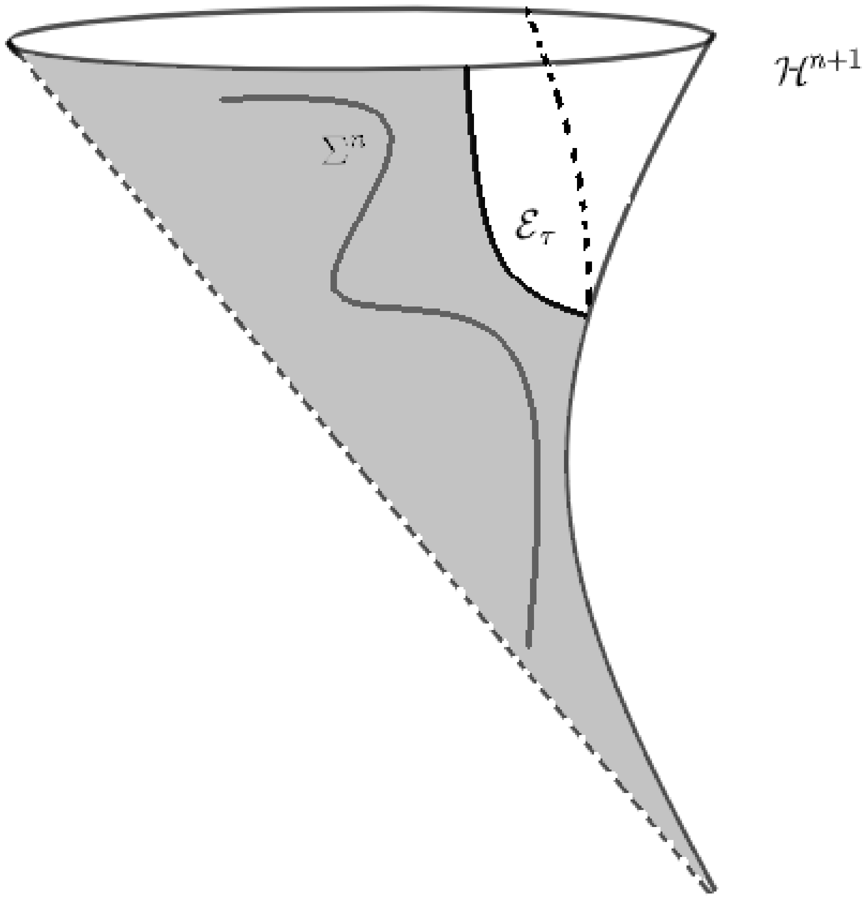
$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_k L_1 l_a(p_k) \\ &\geq \limsup_k [c_1(H_2 - H) l_a](p_k) \\ &= c_1(\sup_\Sigma l_a) \limsup_k (H_2 - H)(p_k) \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $\sup_{\Sigma} l_a > 0$, então $\lim_{k} \sup(H_2 - H)(p_k) = 0$. Em particular, obtemos que $\inf_{\Sigma}(H_2 - H) = 0$. Pela hipótese (4.1)

$$0 \leq |a^{\top}| \leq C \inf_{\Sigma}(H_2 - H) = 0.$$

Então, $a^{\top} = \nabla l_a$ é identicamente nulo em Σ^n, portanto, l_a é uma função constante em Σ^n, o que implica que Σ^n é um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$ onde $\tilde{\tau} \leq \tau$. $\square$

Figura 3 – Σ^n contida no fecho de um domínio interior limitado pelo hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tau}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez que podemos escrever $H_2 = 1 - R$, onde R é a curvatura escalar normalizada de uma hipersuperfície Σ^n, da prova anterior decorrerá o seguinte

Corolário 4.1.1. *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathscr{H}^{n+1}$, com curvatura escalar R, contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano* *tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$. Suponha que a curvatura média H de Σ^n é limitada, positiva e tal que $H+R \leq 1$. Se*

$$|a^\top| \leq C\{1 - \sup_\Sigma (H+R)\}, \tag{4.6}$$

para alguma constante positiva C, então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$ com $\tilde{\tau} \leq \tau$.

Demonstração. Mutatis mutandis na prova do Teorema 4.1.1. □

4.2 Inexistência e curvaturas de ordem superior

Agora, vamos considerar a rigidez via restrições adequadas nas curvaturas médias de ordem superior. Estudar as curvaturas médias de ordem superior pode ser complicado, mas a prova do seguinte resultado vai trazer como consequência a inexistência desejada quando tem-se $H_r < H_{r+1}$.

Teorema 4.2.1. *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathscr{H}^{n+1}$ contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$. Suponha que a curvatura seccional $K_\Sigma \leq 1$ de Σ^n é limitada inferiormente e que para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_{r+1} é limitada satisfazendo $\beta \leq H_r \leq H_{r+1}$, para uma constante positiva β. Se*

$$|a^\top| \leq C \inf_\Sigma (H_{r+1} - H_r), \tag{4.7}$$

para alguma constante positiva C, então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$ com $\tilde{\tau} \leq \tau$.

Demonstração. Como $|a^\top|^2 = f_a^2 - l_a^2 \geq 0$, então $f_a \geq l_a$. Ademais, (3.4) implica que $L_r l_a \geq c_r(H_{r+1} - H_r)l_a$, onde $c_r = \binom{n}{r}(n-r)$. Definamos em Σ^n o seguinte operador autoadjunto $\mathscr{P}_r : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, dado por

$$X \longmapsto \mathscr{P}_r(X) := H_r P_r(X), \tag{4.8}$$

e tomemos localmente uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ tal que $Ae_i = \lambda_i e_i$. Sabemos que $H_r = \binom{n}{r}^{-1}(-1)^r S_r$ e $(P_r)_p e_i = (-1)^r \sum\limits_{1\leq i_1,...,i_r\leq n, i_j \neq i} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} e_i$, então, escrevendo $S_r = \sum\limits_{1\leq j_1,...,j_r\leq n} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_r}$

temos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{P}_r e_i, e_i\rangle &= \langle H_r P_r(e_i), e_i\rangle\\
&= \langle \binom{n}{r}^{-1} (-1)^r S_r (-1)^r \sum_{i_1<\ldots<i_r, i_j\neq i} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r} e_i, e_i\rangle\\
&= \langle \binom{n}{r}^{-1} S_r \sum_{i_1<\ldots<i_r, i_j\neq i} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r} e_i, e_i\rangle\\
&= \binom{n}{r}^{-1} \langle S_r \sum_{i_1<\ldots<i_r, i_j\neq i} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r} e_i, e_i\rangle\\
&= \binom{n}{r}^{-1} \langle \sum_{j_1<\ldots<j_r} \lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_r} \sum_{i_1<\ldots<i_r, i_j\neq i} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r} e_i, e_i\rangle\\
&= \binom{n}{r}^{-1} \sum_{j_1<\ldots<j_r, i_j\neq i, i_1<\ldots<i_r} (\lambda_{i_1}\lambda_{j_1})\ldots(\lambda_{i_r}\lambda_{j_r})
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle \mathscr{P}_r e_i, e_i\rangle = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{j_1<\ldots<j_r, i_j\neq i, i_1<\ldots<i_r} (\lambda_{i_1}\lambda_{j_1})\ldots(\lambda_{i_r}\lambda_{j_r}). \tag{4.9}$$

Por hipótese $K_\Sigma \leq 1$, então pela equação de Gauss, $0 \leq 1 - K_\Sigma(e_i, e_j) = \lambda_i\lambda_j$, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$, daí, $\langle \mathscr{P}_r e_i, e_i\rangle \geq 0$, consequentemente, $\mathscr{P}_r$ é positivo semidefinido. H_r é limitada em Σ^n, assim, obtemos que o mesmo acontece para $tr(\mathscr{P}_r) = c_r H_r^2$.

Agora podemos extender a ideia da prova do Teorema 4.1.1, para isso, consideramos o seguinte operador diferenciável linear de segunda ordem $\mathscr{L}_r : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$ definido por

$$f \longmapsto \mathscr{L}_r f = tr(\mathscr{P}_r \nabla^2 f) \tag{4.10}$$

Como $\mathscr{P}_r$ é positivo semidefinido, e valem $L_r l_a \geq c_r(H_{r+1} - H_r) l_a$ e $\beta \leq H_r \leq H_{r+1}$, temos que

$$\mathscr{L}_r(l_a) \geq c_r(H_{r+1} - H_r) l_a H_r \geq 0. \tag{4.11}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_r(l_a) &= tr(\mathscr{P}_r \nabla^2 l_a)\\
&= tr((H_r P_r)\nabla^2 l_a)\\
&= H_r tr(P_r \nabla^2 l_a)\\
&= H_r L_r(l_a)\\
&\geq c_r(H_{r+1} - H_r) l_a H_r\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, como Σ^n está contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau = \{x \in \mathscr{H}^{n+1}; \langle x, a\rangle = \tau\}$, com $\tau > 0$, segue que l_a é limitada. Logo, em virtude do lema 3.4.2, obtemos uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ^n tal que

$$\lim_k l_a(p_k) = \sup_\Sigma l_a,$$

$$\lim_k |\nabla l_a(p_k)| = 0,$$

e

$$\lim_k \sup \mathscr{L}_r l_a(p_k) \leq 0.$$

Assim, a equação (4.11) e as 3 expressões anteriores nos fornecem as desigualdades seguintes

$$\begin{aligned}
0 &\geq \lim_k \sup \mathscr{L}_r l_a(p_k) \\
&\geq \lim_k \sup [c_r(H_{r+1} - H_r) l_a H_r](p_k) \\
&= c_r \lim_k \sup l_a(p_k) \lim_k \sup H_r(p_k) \lim_k \sup (H_{r+1} - H_r)(p_k) \\
&\geq c_r \beta (\sup_\Sigma l_a) \lim_k \sup (H_{r+1} - H)(p_k) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Daí, como $\sup_\Sigma l_a > 0$, então $\lim_k \sup (H_{r+1} - H_r)(p_k) = 0$, em particular, obtemos que $\inf_\Sigma (H_{r+1} - H_r) = 0$. Pela hipótese (4.7),

$$0 \leq |a^\top| \leq C \inf_\Sigma (H_{r+1} - H_r) = 0.$$

para alguma constante positiva C. Logo, $a^\top = \nabla l_a$ é identicamente nulo em Σ^n, isto significa que l_a é uma função constante em Σ^n, assim, concluimos que Σ^n é um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$, onde $\tilde{\tau} \leq \tau$, como queríamos. $\square$

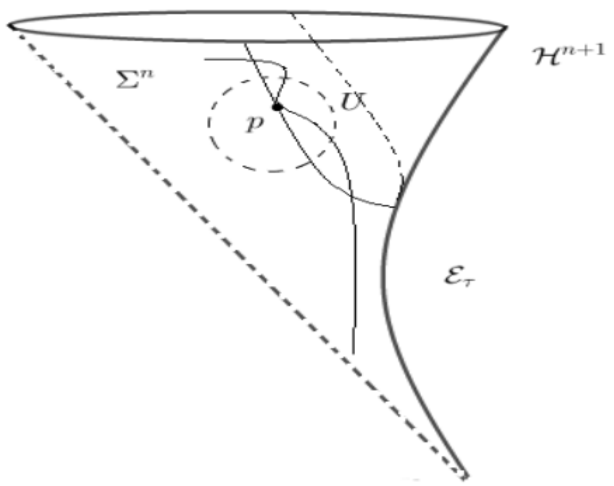
Teorema 4.2.2. *Não existe uma hipersuperfície tipo-espaço completa $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$, com curvatura seccional $K_\Sigma \leq 1$ e limitada inferiormente, tal que para $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são constantes positivas de tal sorte que $H_r < H_{r+1}$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma tal hipersuperfície completa tipo-espaço $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$. Então, pela prova do Teorema 4.2.1, temos que $\inf_\Sigma(H_{r+1} - H_r) = 0$. Isto é, $H_{r+1} = H_r$, o que contradiz a hipótese de $H_{r+1} > H_r$. □

4.3 Hipersuperfícies localmente tangentes por acima

Na prova dada para os Teoremas 4.1.1 e 4.2.1, o ingrediente essencial para concluir as demonstrações foi o lema 3.4.2. Agora, também usaremos dois resultados apresentados previamente ao lema do principio do máximo de Omori-Yau, (os lemas 3.3.2 e 3.4.1).

Figura 4 – Σ^n é localmente tangente por acima a um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 4.3.1. *Uma hipersuperfície Σ^n imersa em $\mathscr{H}^{n+1}$ é dita localmente tangente por acima ao hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$ de $\mathscr{H}^{n+1}$, quando existe um ponto $p \in \Sigma^n$ e uma vizinhança $U \subset \Sigma^n$ de p tal que $l_a(p) = \tilde{\tau}$ e $l_a(q) \geq \tilde{\tau}$, para cada $q \in U$, (Ver Figura 4).*

A Definição 4.3.1 motiva mais um resultado sobre rigidez para as hipersuperfícies tipo-espaço completas de $\mathscr{H}^{n+1}$. Antes disso, apresentamos a seguinte proposição auxiliar

Proposição 4.3.1. *Dado o campo de vetores $V(p) = \langle p,a\rangle p - a$, são validas as expressões*

$$|V|_\Sigma = l_a, \tag{4.12}$$

e

$$divV(p) = (n+1)\langle p,a\rangle. \tag{4.13}$$

Demonstração. Como $|V|_\Sigma = \sqrt{-\langle V,V\rangle}|_\Sigma$, a equação 4.12 segue da linearidade do produto interno e da identificação $\phi(p) = p$, com efeito,

$$\begin{aligned}
|V(p)|_\Sigma &= \sqrt{-\langle\langle p,a\rangle p - a, \langle p,a\rangle p - a\rangle} \\
&= \sqrt{-(\langle p,a\rangle^2\langle p,p\rangle - \langle p,a\rangle^2 - \langle p,a\rangle^2)} \\
&= \sqrt{-(-\langle p,a\rangle^2)} \\
&= \sqrt{(\langle\phi(p),a\rangle^2)} \\
&= \sqrt{l_a^2}. \\
&= l_a.
\end{aligned}$$

Vimos que V é um campo conforme, logo $\nabla_{E_i}V = \langle p,a\rangle E_i$. Daí, 4.13 segue da definição do divergente para um referencial ortonormal $\{E_1,...,E_n\}$ definido numa vizinhança do ponto p.

$$\begin{aligned}
div(V) &= \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i\langle\nabla_{E_i}V, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \langle p,a\rangle\langle\nabla_{E_i}p, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \langle p,a\rangle\langle E_i, E_i\rangle \\
&= (n+1)\langle p,a\rangle.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.2. *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathscr{H}^{n+1}$ contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$, e localmente tangente por acima ao hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$. Suponha que a curvatura H de Σ^n é limitada e que para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_{r+1} é positiva satisfazendo $H_r \leq H_{r+1}$. Se*

$$|a^\top| \leq C\inf_\Sigma(H_{r+1} - H_r), \tag{4.14}$$

para alguma constante positiva C, então Σ^n deve ser o hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$.

Demonstração. Consideremos em $\mathscr{H}^{n+1}$ o campo de vetores $V(p) = \langle p,a\rangle p - a$, como $|V|_\Sigma = l_a$, $divV(p) = (n+1)\langle p,a\rangle \neq 0$ e Σ^n é localmente tangente por acima ao hiperplano $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$ de $\mathscr{H}^{n+1}$, temos que existe um ponto $p \in \Sigma^n$ e uma vizinhança $U_p \subset \Sigma^n$ de p tal que $l_a(p) = \tilde{\tau}$ e $l_a(q) \geq \tilde{\tau} = l_a(p)$. Daí, a função altura $l_a = |V|_\Sigma$ atinge um mínimo local em Σ^n.

Portanto, o lema (3.4.1) garante a existência de um ponto elíptico em Σ^n, e desta maneira, o lema (3.3.2) junto com a hipótese de $H_{r+1} > 0$ implicam que para $2 \leq j \leq n$, P_j é positivo definido. Pelo item (a) de (2.3.1) tem-se $tr(P_j) = c_j H_j$, resulta que H_j é positivo para cada $1 \leq j \leq r$. Sabemos também que, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2$ e $H_2 > 0$, então,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq n^2H^2. \tag{4.15}$$

O fato de H ser limitada implica que todas as curvaturas principais de Σ^n são limitadas, particularmente, H_r é limitada e a equação de Gauss dá $K_\Sigma(e_i,e_j) = 1 - \lambda_i\lambda_j$, deduzimos que K_Σ é limitada inferiormente. Como antes, vale

$$L_r(l_a) \geq c_r(H_{r+1} - H_r)l_a \geq 0,$$

e por (3.4.2), existe uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ^n tal que

$$\lim_k l_a(p_k) = \sup_\Sigma l_a,$$

$$\lim_k |\nabla l_a(p_k)| = 0,$$

e

$$\lim_k \sup L_r l_a(p_k) \leq 0.$$

Assim,

$$0 \geq \lim_k \sup L_r(l_a)(p_k) \geq c_r(\sup_\Sigma l_a) \lim_k \sup(H_{r+1} - H)(p_k) \geq 0.$$

Como $\sup_\Sigma l_a > 0$, deduzimos que $\lim_k \sup(H_{r+1} - H_r)(p_k) = 0$, em particular,

$$\inf_\Sigma(H_{r+1} - H_r) = 0.$$

De (4.14), segue que para alguma constante positiva C, $0 \leq |a^\top| \leq C \inf_\Sigma(H_{r+1} - H_r) = 0$, portanto, $a^\top = \nabla l_a$ é identicamente nulo em Σ^n, isto significa que l_a é constante em Σ^n, logo, concluímos que Σ^n é o hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$. $\square$

Corolário 4.3.1. *Não existem hipersuperfícies completas tipo-espaço* $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ *contidas no fecho de um domínio interior de* $\mathscr{H}^{n+1}$ *limitadas por um hiperplano tipo-espaço* $\mathscr{E}_{\tau}$*, localmente tangentes por acima a um hiperplano tipo-espaço* $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$*, com* $\tau \geq \tilde{\tau}$*, tendo curvatura média limitada e de tal sorte que para algum* $1 \leq r \leq n-1$*, se tenha que* H_r *e* H_{r+1} *sejam constantes positivas satisfazendo* $H_r < H_{r+1}$*.*

Demonstração. Suponhamos que exista Σ^n completa tipo-espaço e localmente tangente por acima a um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$, tal que para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são constantes positivas tais que $H_r < H_{r+1}$. Pela prova do Teorema 4.3.2, temos que $\inf_{\Sigma}(H_{r+1} - H_r) = 0$ implica $H_{r+1} = H_r$, o que é uma contradição. $\square$

5 FUNÇÕES AUXILIARES RELACIONADAS LINEARMENTE

Com as convenções do capítulo anterior, estudamos o caso das hipersuperfícies completas tipo-espaço Σ^n imersas em $\mathscr{H}^{n+1}$ serem localmente tangentes por acima. Estabelecer a rigidez se faz de maneira semelhante ao procedimento desenvolvido nos teoremas anteriores, com isso alcançamos o objetivo principal deste trabalho.

5.1 Relação de linearidade

Motivados pelo fato de que os hiperplanos tipo-espaço $\mathscr{E}_\tau$ em $\mathscr{H}^{n+1}$ satisfazem a condição $l_a = f_a$, consideramos o campo normal e unitario $\eta_\tau = x - \frac{1}{\tau}a$. Estudaremos o caso em que as funções auxiliares altura l_a e ângulo f_a das hipersuperfícies completas tipo-espaço Σ^n em $\mathscr{H}^{n+1}$, se relacionam linearmente.

Teorema 5.1.1. *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa tipo-espaço imersa em $\mathscr{H}^{n+1}$ e contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano $\mathscr{E}_\tau$. Supondo que para alguma constante positiva $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se $l_a = \lambda f_a$, que a curvatura média H de Σ^n é limitada e que $H_2 \geq 1$. Então, Σ^n é um hiperplano $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$, com $\tilde{\tau} \leq \tau$.*

Demonstração. Como $l_a = \lambda f_a \Leftrightarrow \lambda^{-1} l_a = f_a$, temos que

$$|\nabla l_a|^2 = f_a^2 - l_a^2 = (\lambda^{-1} l_a)^2 - l_a^2 = \lambda^{-2} l_a^2 - l_a^2 = (\lambda^{-2} - 1) l_a^2. \tag{5.1}$$

Em particular, $\lambda^{-2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^2} \geq 1$. Agora, definamos em Σ^n o seguinte operador diferencial de segunda ordem $\mathscr{L} : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$ dado por

$$\mathscr{L} f = \frac{\lambda^{-1}}{n(n-1)} L_1 f + \frac{1}{n} \Delta f. \tag{5.2}$$

Note que pela equação (3.2), e as definições de divergente e curvatura média tem-se

$$\begin{aligned} div(a^\top) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} a^\top, E_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle f_a A E_i + l_a E_i, E_i \rangle \\ &= -n l_a - f_a \sum_{i=1}^n \langle A E_i, E_i \rangle \\ &= -n l_a - f_a S_1 \\ &= -n l_a - f_a(-n H_1) \\ &= n(f_a H_1 - l_a) \end{aligned}$$

Como sabemos que $L_r l_a = c_r(f_a H_{r+1} - l_a H_r)$ e $H_2 \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} l_a &= \frac{\lambda^{-1}}{n(n-1)} L_1 l_a + \frac{1}{n}\Delta l_a \\
&= \frac{\lambda^{-1}}{n(n-1)}[c_1(f_a H_2 - l_a H)] + \frac{1}{n}\Delta l_a \\
&= \frac{\lambda^{-1}}{n(n-1)}[n(n-1)(\lambda^{-1} l_a H_2 - l_a H)] + \frac{1}{n} div(\nabla l_a) \\
&= \lambda^{-2} l_a H_2 - \lambda^{-1} H l_a + \frac{1}{n} div(\nabla l_a) \\
&= \lambda^{-2} l_a H_2 - \lambda^{-1} H l_a + \frac{1}{n} div(a^{\top}) \\
&= \lambda^{-2} l_a H_2 - \lambda^{-1} H l_a + \frac{1}{n}[n(f_a H_1 - l_a)] \\
&= \lambda^{-2} l_a H_2 - \lambda^{-1} H l_a + \frac{1}{n}[n(\lambda^{-1} l_a H - l_a)] \\
&= \lambda^{-2} l_a H_2 - \lambda^{-1} H l_a + \lambda^{-1} H l_a - l_a \\
&= \lambda^{-2} l_a H_2 - l_a \\
&\geq (\lambda^{-2} - 1) l_a \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\mathscr{L} l_a \geq (\lambda^{-2} - 1) l_a \geq 0. \tag{5.3}$$

Como $H_2 > 0$, o lema 3.3.2 garante que P_1 é positivo definido, isto implica que H é positivo, ademais

$$tr(P_1) = c_1 H. \tag{5.4}$$

Por hipótese $H_2 \geq 1$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $H_2 < H^2$, como $H_2 > 0$ obtemos $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq n^2 H^2$. Daí, o fato de H ser limitada implica que todas as curvaturas principais são limitadas em Σ^n.

Invocando a equação de Gauss, deduzimos que K_Σ é limitada inferiormente, e como Σ^n está contida no fecho de um domínio interior de $\mathscr{H}^{n+1}$ limitado por $\mathscr{E}_\tau$, teremos que a função altura l_a é limitada. Aplicando o lema 3.4.2, existe uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ^n satisfazendo

$$\lim_k l_a(p_k) = \sup_\Sigma l_a,$$

$$\lim_k |\nabla l_a(p_k)| = 0,$$

e

$$\limsup_{k} \mathscr{L}_r l_a(p_k) \leq 0.$$

Logo, de (5.3) decorrerá que

$$0 \geq \limsup_{k} \mathscr{L}_r(l_a)(p_k) \geq (\lambda^{-2} - 1)(\sup_{\Sigma} l_a) \geq 0.$$

Como $\sup_{\Sigma} l_a > 0$, segue que $0 \geq \lambda^{-2} - 1 \geq 0$, isto é, $\frac{1}{\lambda^2} = 1 \iff \lambda = 1$. Por (5.1), temos $|\nabla l_a|^2 = 0$ em Σ^n, isto significa que $\nabla l_a = 0$, portanto a função altura l_a é constante em Σ^n, em resumo, provamos que Σ^n é um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$, para algum $\tilde{\tau} \leq \tau$. □

Teorema 5.1.2. *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa contida no fecho de um domínio interior de $\mathscr{H}^{n+1}$ limitado pelo hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tau}$. Se para alguma constante positiva λ tem-se $l_a = \lambda f_a$, supondo que a curvatura média H de Σ^n é limitada e que a curvatura escalar normalizada é não positiva. Então, Σ^n é um hiperplano $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$, com $\tilde{\tau} \leq \tau$.*

Demonstração. Escrevendo $H_2 = 1 - R$, onde R é a curvatura escalar normalizada de Σ^n, termos por hipótese que $R \leq 0$, portanto $H_2 \geq 1$. Assim, do Teorema 5.1.1 segue que Σ^n é um hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$, com $\tilde{\tau} \leq \tau$. □

5.2 Outro resultado de Rigidez em $\mathscr{H}^{n+1}$

A teoria desenvolvida nos trouxe até aqui. O Teorema seguinte é o fruto do que foi semeado, ele reúne as idéias estudadas durante todo esse trabalho e sua demonstração é de alguma forma, semelhante as provas dadas para os resultados anteriores.

Teorema 5.2.1. *Seja $\phi : \Sigma^n \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa tipo-espaço imersa em $\mathscr{H}^{n+1}$ e contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano $\mathscr{E}_{\tau}$. Supondo que Σ^n é localmente tangente por acima a um hiperplano $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$, com $\tilde{\tau} \leq \tau$, e que para alguma constante positiva $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que $l_a = \lambda f_a$, além disso, se para algum $1 \leq r \leq n-2$, a r-ésima curvatura média H_r de Σ^n é limitada e de tal sorte que*

$$\beta \leq H_r \leq H_{r+2}, \tag{5.5}$$

onde β é uma constante positiva. Então, Σ^n deve ser o hiperplano $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$.

Demonstração. Como $l_a = \lambda f_a \Leftrightarrow \lambda^{-1} l_a = f_a$, temos que

$$|\nabla l_a|^2 = f_a^2 - l_a^2 = (\lambda^{-1} l_a)^2 - l_a^2 = \lambda^{-2} l_a^2 - l_a^2 = (\lambda^{-2} - 1) l_a^2. \tag{5.6}$$

Em particular, $\lambda^{-2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^2} \geq 1$. Agora, definamos em Σ^n o operador diferencial de segunda ordem $\mathscr{L} : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$ dado por

$$f \longmapsto \mathscr{L} f = \frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}} L_{r+1} f + \frac{1}{c_r} L_r f, \tag{5.7}$$

Onde, $c_{i+1} = (i+1)\binom{n}{i+1}$.
De (5.5) e de $L_r l_a = c_r(f_a H_{r+1} - l_a H_r)$ segue que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(l_a) &= \frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}} L_{r+1} l_a + \frac{1}{c_r} L_r l_a \\
&= \frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}} \{c_{r+1}(f_a H_{r+2} - l_a H_{r+1})\} + \frac{1}{c_r}\{c_r(f_a H_{r+1} - l_a H_r)\} \\
&= \lambda^{-2} l_a H_{r+2} - \lambda^{-1} l_a H_{r+1} + \lambda^{-1} l_a H_{r+1} - l_a H_r \\
&= \lambda^{-2} l_a H_{r+2} - l_a H_r \\
&= (\lambda^{-2} H_{r+2} - H_r) l_a \\
&\geq (\lambda^{-2} H_r - H_r) l_a \\
&= (\lambda^{-2} - 1) H_r l_a \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Em resumo,

$$\mathscr{L}(l_a) \geq (\lambda^{-2} - 1) H_r l_a \geq 0. \tag{5.8}$$

Em outras palavras, podemos raciocinar como no começo da prova do Teorema (4.3.2) para garantir a existência de um ponto elíptico em Σ^n. Por hipótese $H_r > 0$, assim, usando o lema (3.3.2) temos que P_j é positivo definido, e como concequência, H_j é positiva para $1 \leq j \leq r-1$. Além disso, uma vez que $0 < H_2 < H^2$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq n^2 H^2.$$

O fato de H ser limitada, implica que todas as curvaturas principais de Σ^n são limitadas, portanto, $tr(P_j) = c_j H_j$ é também limitado. Pela equação de Gauss, K_Σ é limitada inferiormente, como Σ^n está contida no fecho de um domínio interior limitado por um hiperplano $\mathscr{E}_\tau$, deduzimos que l_a é limitada.

Finalmente, do lema (3.4.2) existe uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ^n satisfazendo

$$\lim_k l_a(p_k) = \sup_\Sigma l_a,$$

$$\lim_k |\nabla l_a(p_k)| = 0,$$

e

$$\limsup_k \mathscr{L}_r l_a(p_k) \leq 0.$$

Logo, das equações (5.5) e (5.8) temos que

$$\begin{aligned}
0 &\geq \limsup_k \mathscr{L}_r(l_a)(p_k)\\
&\geq \limsup_k (\lambda^{-2}-1)H_r l_a(p_k)\\
&= (\lambda^{-2}-1)\limsup_k l_a(p_k)\limsup_k H_r(p_k)\\
&\geq (\lambda^{-2}-1)(\sup_\Sigma l_a)H_r\\
&\geq (\lambda^{-2}-1)\beta(\sup_\Sigma l_a)\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Como $\sup_\Sigma l_a > 0$ e $\beta > 0$, resulta que $0 \geq \lambda^{-2} - 1 \geq 0$, em particular, $\frac{1}{\lambda^2} = 1 \iff \lambda = 1$. Pela equação (5.6) temos que $|\nabla l_a|^2 = 0$ em Σ^n, isto é, $\nabla l_a = 0$, o que implica que a função l_a é constante em Σ^n. Assim, para algum $\tilde{\tau} \leq \tau$, Σ^n coincide com o hiperplano tipo-espaço $\mathscr{E}_{\tilde{\tau}}$.

$\square$

REFERÊNCIAS

AKUTAGAWA, K. On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de sitter space. **Mathematische Zeitschrift**, v. 2, p. 13–19, 1987.

ALBUJER, A. L.; ALíAS, L. J. Spacelike hipersurfaces with constant mean curvature in the steady state space. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 137, p. 711–721, 2009.

ALEDO, J. **Hipersuperficies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio de De Sitter**. Murcia - Espanha: [s.n.], 1998. Monografia (Tesina de Licenciatura).

ALÍAS, L. J.; COLARES, A. G. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized robertson-walker spacetime. **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, v. 143, p. 703–729, 2007.

ALÍAS, L. J.; IMPERA, D.; RIGOLI, M. Spacelike hypersurfaces of constant higher order mean curvature in generalized robertson-walker spacetimes. **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.**, v. 152, p. 365–383, 2012.

ALÍAS, L. J.; JR., A. B.; COLARES, A. G. Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications. **Proc. Edinburgh Math. Soc.**, v. 46, p. 465–488, 2003.

ALíAS, L. J.; RIGOLI, M.; MASTROLIA, P. **Maximum Principles and Geometric Applications**. Nova Iorque: Springer Nature, 2016.

BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 15, p. 277–297, 1997.

BARBOZA, W. F.; LIMA, H. de; VELÁSQUEZ, M. A. Rigidity and nonexistence of complete spacelike hypersurfaces in the steady state space. **Preprint**.

BEEM, J. K.; EHRLICH, P. E.; EASLEY, K. L. **Global Lorentzian Geometry**. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1996.

BEZERRA, K. **Um Teorema de Rigidez para Hipersuperfícies Completas CMC em Variedades de Lorentz**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - Ceará, 2009.

CAMINHA, A. **Sobre Hipersuperfícies em Espaços de Curvatura Seccional Constante**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - Ceará, 2004.

CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. Rio de janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2008.

CARVALHO, E. **Variedades Riemannianas Folheadas por Hipersuperfícies $(n-1)$-umbílicas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - Ceará, 2012.

ELBERT, M. F. Constant positive 2-mean curvature hypersuperfaces. **Illinois. J. Math.**, v. 46, p. 247–267, 2012.

JR., E. de S. **Estabilidade de hipersuperfícies tipo-espaço em folheações espaço-tempo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - Ceará, 2009.

MONTIEL, S. Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some riemannian manifolds. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 48, p. 711–748, 1999.

NASCIMENTO, F. Y. do. **Sobre a Geometria das horoesferas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - Ceará, 2013.

OMORI, H. Isometric immersions of the riemannian manifolds. **J. Math. Soc. Japan**, v. 19, p. 205–214, 1967.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity**. Londres: Academic Press, 1983.

PINHEIRO, A. J. **Hipersuperfícies com r-ésima curvatura média constante positiva em** $M^m \times \mathbb{R}$. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - Ceará, 2010.

ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. **Bull. Sci. Math.**, v. 117, p. 211–239., 1993.

SANTOS, F. R. dos. **Hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura de ordem superior constante no espaço de Sitter**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande - Paraíba, 2013.