



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LEANDRO ALCÂNTARA LESSA

**SOLUÇÕES DO TIPO BURACO-NEGRO EM TEORIAS COM VIOLAÇÃO DA
SIMETRIA DE LORENTZ GERADAS POR CAMPOS TENSORIAIS
ANTI-SIMÉTRICOS**

FORTALEZA

2020

LEANDRO ALCÂNTARA LESSA

SOLUÇÕES DO TIPO BURACO-NEGRO EM TEORIAS COM VIOLAÇÃO DA
SIMETRIA DE LORENTZ GERADAS POR CAMPOS TENSORIAIS ANTISSIMÉTRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva .

FORTALEZA
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

-
- A000p Lessa, Leandro Alcântara.
Soluções do tipo buraco-negro em teorias com violação da simetria de Lorentz geradas por campos tensoriais antissimétricos / Leandro Alcântara Lessa. – Fortaleza, 2020.
69.:il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2020.
Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.
Orientação: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva .
1. Violação de Simetria de Lorentz. 2. Modelo Padrão Estendido. 3. Modelo Kalb-Ramond I.
Título.

CDD:000.0

LEANDRO ALCÂNTARA LESSA

SOLUÇÕES DO TIPO BURACO-NEGRO EM TEORIAS COM VIOLAÇÃO DA
SIMETRIA DE LORENTZ GERADAS POR CAMPOS TENSORIAIS ANTISSIMÉTRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 17 / 01 / 2020 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Ceará, Campos de Tianguá (IFCE/Tianguá)

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares que sempre me apoiaram e me ajudaram ao longo de minha vida, em especial à minha mãe que sempre foi minha eterna fonte de inspiração.

À meu orientador Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva pela competência e lucidez em transmitir seus ensinamentos a mim, sobretudo agradeço sua amizade e sua contribuição para a minha formação acadêmica durante esse tempo que tive sob sua orientação.

Aos meus amigos da vida que sempre foram um porto seguro e um lugar de inspiração. Agradeço também aos meus amigos de grupo de pesquisa do LASSCO que tive o prazer de compartilhar conhecimentos e aos demais professores do grupo, os quais contribuíram tanto pela amizade quanto pelas discussões.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

RESUMO

Nós estudamos os efeitos gravitacionais no espaço-tempo com simetria esférica e estática devido ao valor esperado no vácuo (VEV) de um campo de Kalb-Ramond. O VEV de Kalb-Ramond é um campo de fundo que produz uma quebra espontânea da simetria local de Lorentz (LSB) do espaço-tempo. Considerando um acoplamento não-mínimo entre Kalb-Ramond (VEV) e o tensor de Ricci, nós obtemos uma solução exata de buraco negro modificado dependente de parâmetro tipo lei de potência. Para uma escolha particular do parâmetro de LSB, a violação de Lorentz produz uma solução similar à solução de Reissner-Nordstrom, porém com ausência de carga. A geometria próxima do horizonte é modificada por incluir um novo horizonte de evento interno e um aumento no horizonte de Schwarzschild. Assintoticamente, o espaço-tempo Minkowski usual com um campo tensorial de fundo é recuperado. Análises sobre o tensor energia-tensão para verificar se viola ou não as condições de energia foram feitas. Através do teste do periélio de Mercúrio, um *upper bound* para a violação de Lorentz local foi obtida. Além disso, outros tipos de acoplamentos não-mínimos entre Kalb-Ramond (VEV) e gravidade foram analisados brevemente.

Palavras-chave: Violação de Simetria de Lorentz. Modelo Padrão Estendido. Modelo Kalb-Ramond

ABSTRACT

We study the gravitation effects on a static and spherically symmetric spacetime due to the vacuum expectation value (VEV) of a Kalb-Ramond field. The Kalb-Ramond VEV is a background tensor field which produces a local Lorentz symmetry breaking (LSB) of spacetime. Considering a non-minimal coupling between the Kalb-Ramond (VEV) and the Ricci tensor, we obtain an exact parameterdependent power-law modified black hole. For a particular choice of the LSB parameter, the Lorentz violation produces a solution similar to the Reissner-Nordstrom, despite the absence of charge. The near-horizon geometry is modified by including a new inner horizon and shifting the Schwarzschild horizon. Asymptotically, the usual Minkowski spacetime with a background tensor field is recovered. Analyzes of the stress-energy tensor to verify whether or not it violates the energy conditions were performed. By means of the Mercury perihelion test, an upper bound to the local Lorentz violation (LV) is obtained. In addition, other types of non-minimal couplings between Kalb-Ramond (VEV) and gravity were briefly analyzed.

Keywords: Lorentz Symmetry Breaking. Standard Model Extension. Kalb-Ramond Model.

LISTA DE SÍMBOLOS

As regras serão implícitas ao longo de texto. Casos excepcionais ficarão claros pelo contexto.

- Índices latinos (a, b, c, ...) referem-se a tensores de referenciais em bases não coordenadas.
- Índices gregos (μ, ν, λ, \dots) referem-se a coordenadas de tensores em base coordenadas.
- Índices latinos (i, j, k, ...) referem-se a coordenadas espaciais, usualmente 1, 2, 3 ou x, y, z , em um sistema de coordenadas.
- As coordenadas naturais no espaço \mathfrak{R}^n são representados por x^μ .
- A assinatura da métrica $\eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$.
- Será adotada a soma de Einstein, ou seja, índices repetidos indicam um somatório implícito correndo sobre o índice.
- A velocidade da luz será unitária.

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas	
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico	
GR	Relatividade Geral, na sigla em inglês (<i>General Relativity</i>)	
QFT	Teoria Quântica de Campos, na sigla em inglês (<i>Quantum Field Theory</i>)	
LSB	Violação da Simetria de Lorentz na sigla em inglês (<i>Lorentz Symmetry Breaking</i>)	
VEV	Valor esperado no vácuo ou <i>vacuum expectation value</i> , na sigla em inglês	
SME	Standard-Model Extension, na sigla em inglês.	
BN	Buraco Negro	.
BNR	Buraco Negro Regulares	.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	A FÍSICA DOS BURACOS NEGROS	14
2.1	Revisão Histórica	14
2.2	Fundamentos Matemáticos da Relatividade Geral	16
2.2.1	Espaço Métrico	19
2.2.2	Vetores de Killing	20
2.2.3	Equação de Einstein	21
2.3	Zoológico de Buracos Negros	22
2.4	Conjectura No-Hair	25
3	MODELO PADRÃO ESTENDIDO: SETOR GRAVITACIONAL	27
3.1	Teoria de Campo Efeítiva	27
3.2	Violação de Lorentz	28
3.2.1	Mecanismo de Violação de Lorentz	28
3.2.2	Transformação da Partículas, transformação do Observador e Violação da Invariância Difeomórfica	29
3.3	Ação do Modelo Padrão Estendido	31
3.3.1	Setor Gravitacional	32
3.3.2	Campo de Bumblebee	34
3.3.3	Fenomenologia	35
4	MODELO KALB-RAMOND	37
4.1	Campo 2-forma	37
4.2	Ação de Kalb-Ramond	38
4.3	Modelo Não-Mínimo	40
5	SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS MODIFICADAS COM CAMPO DE FUNDO DE KALB-RAMOND	43
5.1	Soluções Simetricamente Esféricas no Vácuo para acoplamento $\xi_2 \neq 0$	43
5.2	Outras Soluções	46
6	ANÁLISE DA SOLUÇÃO DE BURACO NEGRO CABELUDO TIPO LEI DE POTÊNCIA	49
6.1	Propriedades Gerais	49
6.1.1	Horizontes de Eventos	50
6.1.2	Tensor Energia-Tensão e Condições de Energia	51

6.2	Efeitos Clássicos	54
7	CONCLUSÃO	58
	APÊNDICE A - FORMALISMO DE VIELBEIN	60
A.1	Tetrada	60
A.1.1	Conexão de Spin e Equações de Estrutura de Cartan	61
	APÊNDICE B - EQUAÇÕES DE LANDAU-RAYCHAUDHURI	65
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

A teoria da relatividade de Einstein que foi publicada há mais de 100 anos [1] é a base teórica para estudar gravitação e outras teorias em regimes de altas velocidades. Ela é dividida em Restrita (1905) e em Geral (1915). A teoria da relatividade restrita é baseada no princípio da invariância de Lorentz, cujas leis da física e a velocidade da luz são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Nesse caso, a geometria que descreve essa teoria é a de Minkowski, que é uma variedade quadridimensional, ou seja, três dimensões espaciais e uma dimensão temporal. Já a teoria da relatividade geral (GR) é baseada na geometria do espaço-tempo, que por sua vez é descrito pela métrica, $g_{\mu\nu}$, que é uma quantidade essencial na teoria da relatividade geral, capaz de descrever o espaço-tempo. Mais adiante, pois, iremos ver que essa métrica é a solução das equações de Einstein. A geometria é a riemanniana (mais precisamente, pseudo-riemanniana) e ela deve ser invariante sobre transformações gerais de coordenadas, algo que nos parece bem óbvio, uma vez que a escolha das coordenadas não deveria influenciar na física do modelo. E a simetria de Lorentz, nesse caso, vira uma simetria local, onde cada ponto da variedade pode ser escolhido como um referencial inercial local, que ao invés de ser descrito pela métrica de um espaço curvo seria descrito pela métrica de Minkowski. Essas sutilezas entre transformações de Lorentz locais e transformações de coordenadas gerais serão esclarecidas mais adequadamente mais a frente, pois são importantes no contexto de violação de Lorentz.

A teoria da gravitação pode ser tratada através de transformações que são análogas as de calibre [2], através do formalismos de *vierbein*. No referencial de Lorentz local, a derivada covariante dos tensores terá uma nova quantidade, a chamada conexão spin, $\omega_{\mu}{}^{ab}$. A geometria que melhor trata isso é a de Riemann-Cartan, que tem torção não nula [3]. No limite de torção igual a zero, recuperamos a geometria de Riemann. Esse novo formalismo é interessante por alguns motivos: ele pode ser utilizado para introduzir campos fermiônicos à gravitação e pode ser utilizado para diferenciar transformações de Lorentz locais e transformações gerais de coordenadas. Essa diferença é muito importante para estudos de quebra espontânea de simetria de Lorentz, pois como iremos ver depois, tais teorias continuam covariantes, ou seja, continuam invariantes sobre transformações gerais de coordenadas.

Por outro lado, a teoria que descreve as partículas elementares é o Modelo Padrão. Essa teoria é uma teoria relativística, portanto é uma teoria essencialmente de Lorentz. Quando estamos tratando o Modelo Padrão no espaço-tempo plano, ou seja, de Minkowski, tal teoria é invariante sobre transformações de Lorentz global, porém se estamos trabalhando em espaço curvo, ou seja, em Riemann, a teoria é invariante sob transformação geral de coordenadas e de

Lorentz local. Além disso, o modelo das partículas elementares é um teoria de *gauge*, ou seja, é invariante sobre transformadas de calibre.

O desejo de uma teoria que seja capaz de unificar todas as forças fundamentais da natureza vai além da ficção científica, pois essa teoria seria capaz não só de nos responder dúvidas que nos acompanham há anos, como os mistérios da singularidades, mas também poderia nos indicar uma "nova física". É nessa esperança que cientistas estão desenvolvendo pesquisas que tentam juntar, em uma só teoria, as duas áreas mais importantes da física teórica: o modelo Padrão das partículas elementares e a teoria da Relatividade Geral de Einstein. Tal teoria teria de ser capaz de descrever e prever o possível comportamento quântico da gravidade, a chamada gravidade quântica. Apesar de nunca ter sido observado nenhum traço quântico dessa força que governa os planetas e as galáxias, acredita-se que esses efeitos quânticos só são observados mais nitidamente na escala de Planck $m_p \simeq 10^{19} GeV$. No entanto, tentar observar experimentalmente sinais dessa teoria quântica da gravidade na escala de Planck é impossível no sentido prático da coisa, pois os experimentos em altas energias realizáveis hoje estão muito distantes dessa escala. Porém talvez haja uma luz no fim do túnel. Talvez alguns pequenos efeitos suprimidos da teoria quântica da gravidade remanescentes da escala de Planck podem ser detectados. E um candidato para esses efeitos são fenômenos que violam a simetria de Lorentz.

Apesar de parecer uma ideia um tanto quanto dramática, violar a simetria de Lorentz para algumas teorias, como a teoria das cordas [4], relatividade muito especial [5,6], relatividade duplamente especial [7], espaço-tempo não-comutativo [8], gravidade Horava [9] e gravidade quântica em laços [10], entre outras, é possível. Elas assumem que a simetria de Lorentz pode ser violada em um regime gravitacional. Mas essas teorias que preveem a violação não foram suficientemente desenvolvidas para fazer previsões testáveis em baixas energias. Por isso, a necessidade de desenvolver uma teoria de campo efetiva [11]. A teoria efetiva que iremos abordar nesse trabalho é o Modelo Padrão Estendido (SME) com ênfase no setor gravitacional.

Mas, afinal de contas, onde podemos observar esses efeitos de violação de Lorentz em um contexto gravitacional? Como iremos ver mais adiante, tais efeitos talvez são mais facilmente observados em locais com bastante curvatura. E onde temos muito efeitos de curvatura? Nos buracos negros! Portanto, o tema dessa dissertação é como a violação de Lorentz modifica a física dos buracos negros.

Vamos estudar uma quebra espontânea de simetria de Lorentz (esse tipo de quebra é a mais adequada para teorias gravitacionais, como ficará mais claro depois) causada por um campo de fundo que adquire um valor esperado no vácuo (VEV) diferente de zero. O campo que iremos utilizar é um campo tensorial de rank 2 antissimétrico, conhecido na literatura como Kalb-Ramond.

Nesse trabalho de dissertação, iremos no capítulo 1 inicialmente fazer uma breve re-

visão da física de buracos negros. Depois iremos desenvolver o arcabouço teórico para estudar a violação de Lorentz, ou seja, iremos construir o Modelo Padrão Estendido, mais especificamente, o setor gravitacional no capítulo 2. Posteriormente, vamos investigar no capítulo 3 as propriedades do campo de Kalb-Ramond e construir a ação desse campo, e de mão do modelo não-mínimo de Kalb-Ramond, iremos aplicar tal modelo em soluções com simetria esférica tipo buracos negros. Uma vez obtida uma solução modificada de buraco negro, no capítulo 4 vamos investigar suas propriedades e as modificações devido à violação de Lorentz em efeitos clássicos, como a precessão do periélio de Mercúrio.

2 A FÍSICA DOS BURACOS NEGROS

Provavelmente, dentre todos os objetos astrofísicos o que mais desperta a imaginação de nós seres humanos são os buracos negros. Basta perguntar a uma criança que gosta de *Star Wars* ou um apaixonado pelo cosmos se eles acreditam que esses gigantes galácticos existem mesmo, e a resposta é simples: eles existem. Mas e a comunidade científica acredita em sua existência? Para responder a essa pergunta, iremos fazer uma pequena revisão histórica desses objetos negros que têm uma gravidade tão intensa que nem a luz é capaz de escapar de sua atração gravitacional, em teoria.

2.1 Revisão Histórica

Como surgiu a ideia de um objeto cósmico que é completamente negro e que tem, portanto, uma gravidade tão forte que nem a luz é capaz de escapar de sua atração gravitacional? Essa ideia veio em 1783, com um reverendo britânico chamado John Michell, que ensinava geologia em Cambridge, que teve a seguinte ideia: será possível uma estrela ser tão massiva ao ponto que a velocidade de escape da luz (que já era conhecida na época, aproximadamente) não seja suficiente para fugir da sua atração gravitacional? Se houve tal objeto, ele por definição seria completamente negro. Ele chamou essas estrelas de "estrelas escuras", porém essas estrelas hoje são conhecidas como buracos negros.

As bases teóricas para esses objetos astrofísicos remontam o século XX com a publicação dos artigos de Albert Einstein que iriam mudar o nosso conceito de espaço e tempo completamente, a chamada Teoria da Relatividade [1]. Mais precisamente é a Relatividade Geral em 1915, que descreve o mecanismo da gravidade, que contem as bases teóricas para a existência de buracos negros. Mas como? Bom, foi através do trabalho de um físico austríaco chamado Karl Schwarzschild em 1916 que o mundo teve a primeira evidência teórica que talvez possam existir buracos negros [12]. Porém essa descoberta não levou de imediato à essa interpretação que tal solução é a mesma que descreve um objeto que consegue absorver até a luz, na verdade essa ideia veio a ser amadurecida com M. Kruskal, em 1960 [13], estudando o que se designa por "máxima extensão analítica " da solução de Schwarzschild, obtida independentemente por G. Szekers. A terminologia " buraco negro ", no entanto, foi cunhada um pouco mais tarde, em 1967, por J. Wheeler. Karl Schwarzschild foi o primeiro a resolver as equações de campo de Einstein exatamente, tal solução no vácuo, revelou algumas estranhezas: como as singularidades, ou seja, regiões onde há divergências matemáticas. Uma outra região característica desse buraco negro ficou conhecida como raio de Schwarzschild, definida como

$R_s = 2G_N M$, que seria o horizonte de evento do buraco negro, que faz o perímetro da singularidade. Essa superfície $r = R_s$ é também uma superfície de *red-shift* infinito, relativo a $r \rightarrow \infty$, ou seja, se nós colocássemos um relógio próximo do horizonte de evento, o relógio "correria" infinitamente mais lento em comparação a um relógio no infinito, uma vez que o tempo próprio é dado por:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r}} dt \quad (2.1)$$

onde G_N é a constante gravitacional, M a massa do buraco negro e c a velocidade da luz. Observe que em $r = R_s$ de fato $d\tau \rightarrow \infty$. Além disso, essa solução apresentava simetria esférica e era estática. Outras soluções foram encontradas com algumas características semelhantes: o buraco negro carregado, cuja solução é conhecida como solução de Reissner-Nordström, ou buracos negros com rotação, cuja solução é conhecida como solução de Kerr. Depois disso, a física teórica só avançou nessa área. Outras soluções de buracos negros foram encontrados, alguns sem a singularidade, conhecidos como buracos negros regulares ou até mesmo buracos negros "cabeludos", um exemplo foi encontrado por nós e será apresentado mais adiante, cabelos em buracos negros serão discutidos na próxima seção. Além de tudo isso, todo um campo de pesquisa se formou em torno da real natureza dos buracos negros, podemos citar a termodinâmica de buracos negros, o estudo das singularidades (teorema da singularidade), os avanços da teoria quântica de campos em espaço curvo, entre outros.

Mas o que não foi discutido até agora é como de fato os buracos negros são formados. A ideia mais aceita na comunidade científica é que tais objetos são originados da morte de alguma estrela extremamente massiva, da ordem de dez massas solares, essas estrelas são conhecidas como supernovas. A primeira detecção de um objeto que apresentava essas características foi Cygnus X-1 [14], que se acreditava ser um buraco negro estelar com aproximadamente 15 massas solares. A detecção desses candidatos à buracos negros vem de evidências astrofísicas por observações electromagnéticas, no rádio e nos raios X. Apesar de haver muitos trabalhos teóricos sobre buracos negros, sempre foi um desafio provar de fato a existência dessas entidades cósmicas. Porém recentemente, foi possível ter indícios mais fortes que realmente esses objetos negros de fato existem através da detecção das ondas gravitacionais produzidas pela colisão de dois buracos negros [15], mais recentemente ainda foi fotografado, finalmente, um buraco negro [16], (figura 1). E a comunidade científica é firme em dizer: eles existem, e estão em todos os lugares em nosso universo!

Antes de abordar as soluções de buracos negros, iremos fazer uma pequena revisão sobre os fundamentos matemáticos da Relatividade Geral, destacando, sobretudo, o caráter geométrico dessa teoria.

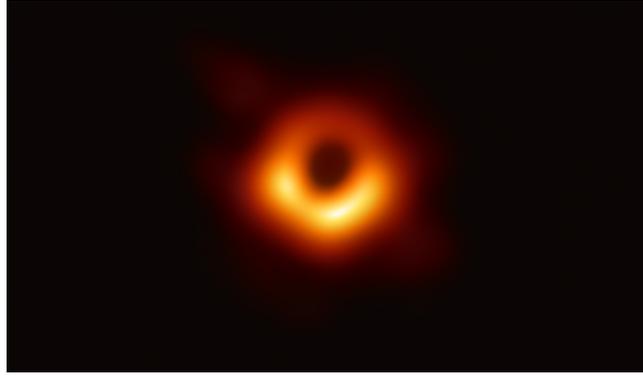


Figura 1: Usando o Event Horizon Telescope, os cientistas obtiveram uma imagem do buraco negro no centro da galáxia M87, delineada pela emissão de gás quente que gira em torno dele sob a influência de forte gravidade perto do horizonte de eventos. **Crédito: Event Horizon Telescope collaboration et. al.**

2.2 Fundamentos Matemáticos da Relatividade Geral

Iremos trabalhar com variedades que são espaços topológicos que se parecem localmente, ou seja, um pedaço ou fragmento (em inglês se costuma chamar de *patch*), com um pedaço de \mathbb{R}^n , onde n é a dimensão da variedade. Para diferentes *patch* podemos relacioná-los através de transformações gerais de coordenadas (TGC) $x'^{\mu}(x)$. Chamamos de tensores os objetos que podem ser definidos globalmente na variedade, ou seja, que apresentem boas propriedades de transformações sobre TGC.

O primeiro exemplo de tensor é o vetor. Definimos um campo tensorial contravariante (ou do tipo-(0,1)), $\xi(x) = \xi^{\mu}(x)\partial_{\mu}$, em cada ponto de uma variedade suave de dimensão n agindo em outra função, f , como:

$$\xi : f \rightarrow \xi f = \xi^{\mu}\partial_{\mu}f \quad (2.2)$$

na qual define uma outra função. Chamamos de espaço tangente, $T_p^{(0,1)}$, o espaço vetorial gerado ponto a ponto na variedade pelo campo vetorial. Aqui temos que as n funções $\xi^{\mu}(x)$ são as componentes vetoriais na base coordenada ∂_{μ} . Além disso, podemos definir um espaço vetorial dual, chamado de campo vetorial covariante (ou do tipo-(1,0)ou 1-forma) que tem seu espaço cotangente $T_p^{(1,0)}$ e , portanto, transforma vetor em função. Nesse caso, os elementos da base dual para as bases coordenadas dos vetores covariantes são denotados por dx^{μ} , e por definição,

$$\langle dx^{\mu} | \partial_{\nu} \rangle \equiv \delta^{\mu}_{\nu} \quad (2.3)$$

implica que a ação de $\omega = \omega_{\mu}dx^{\mu}$ em $\xi = \xi^{\mu}\partial^{\mu}$ vai gerar uma função:

$$\langle \omega | \xi \rangle = \omega_{\mu}\xi^{\mu} \quad (2.4)$$

Uma transformação geral de coordenada (TGC) infinitesimal pode ser escrita como:

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu \equiv \epsilon^\mu. \quad (2.5)$$

de modo que as transformações infinitesimais para campos escalares, vetoriais contravariantes e covariantes são dados por, respectivamente:

$$\delta\phi = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda \phi \equiv -\mathcal{L}_\epsilon \phi \quad (2.6)$$

$$\delta\xi^\mu = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda \xi^\mu + \partial_\nu \epsilon^\mu \xi^\nu \equiv -\mathcal{L}_\epsilon \xi^\mu \equiv -[\epsilon, \xi]^\mu \quad (2.7)$$

$$\delta\omega_\mu = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda \omega_\mu - \partial_\mu \epsilon^\nu \omega_\nu \equiv -\mathcal{L}_\epsilon \omega_\mu \quad (2.8)$$

onde \mathcal{L}_ϵ é a derivada de Lie em relação ao campo vetorial ϵ e $[\epsilon, \xi]$ é o comutador de Lie. Podemos resumir as principais propriedades dessa derivada como:

- \mathcal{L}_ϵ transforma um tensor de um dado tipo em um do mesmo tipo;
- Obedece a lei de Leibniz: $\mathcal{L}_\epsilon(T_1 T_2) = (\mathcal{L}_\epsilon T_1) T_2 + T_1 (\mathcal{L}_\epsilon T_2)$;
- Satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[\mathcal{L}_{\xi_1}, [\mathcal{L}_{\xi_2}, \mathcal{L}_{\xi_3}]] + [\mathcal{L}_{\xi_2}, [\mathcal{L}_{\xi_3}, \mathcal{L}_{\xi_1}]] + [\mathcal{L}_{\xi_3}, [\mathcal{L}_{\xi_1}, \mathcal{L}_{\xi_2}]] = 0; \quad (2.9)$$

Outra derivada que podemos definir na variedade é a covariante da seguinte forma:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi \quad (2.10)$$

$$D_\mu \xi^\nu = \partial_\mu \xi^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \xi^\lambda \quad (2.11)$$

$$D_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \omega_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.12)$$

onde Γ é a conexão afim. Podemos ver que a derivada de Lie da conexão é dada por:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = -\mathcal{L}_\epsilon \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^\lambda \quad (2.13)$$

portanto, a conexão não é um tensor. Além disso, podemos enumerar também algumas propriedades para a derivada covariante:

- D_μ transforma um tensor do tipo (p, q) em um tensor do tipo $(p, q + 1)$;

- Obedece a lei de Leibniz;
- Satisfaz a identidade de Jacobi.

Agora podemos decompor a conexão em uma parte simétrica e outra anti-simétrica, da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{\lambda} + \Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} \quad (2.14)$$

a parte anti-simétrica no índices, $\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda}$, é chamada de torção e, diferentemente, da conexão é um tensor:

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = -2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} \quad (2.15)$$

Uma aplicação da conexão afim é o transporte paralelo. Essa ideia é útil, uma vez que paralelismo em espaço curvo não é bem definido. Para esse tipo de estrutura, portanto, precisamos transportar um vetor mantendo-o "paralelo a si mesmo" ao ponto em que o outro vetor está definido. Então podemos comparar os dois vetores no mesmo ponto. Desse modo, podemos definir o deslocamento paralelo infinitesimal de um vetor covariante ω_{μ} na direção de ϵ^{μ} como:

$$\delta_{p\epsilon} \omega_{\mu} = \epsilon^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \omega_{\lambda} \quad (2.16)$$

o que se mostra facilmente [17, 18] é que diferença entre os valores dos vetores depois do transporte paralelo é proporcional a um quantidade que está relacionada a curvatura do espaço, essa quantidade é chamada de tensor curvatura, $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}$, isso pois:

$$\Delta\omega_{\mu} = \epsilon_1^{\lambda} \epsilon_2^{\nu} R_{\lambda\nu\mu}^{\rho} \omega_{\rho} \quad (2.17)$$

onde ϵ_1^{λ} e ϵ_2^{ν} são campos vetoriais que serviram de comparação. E por fim temos que:

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = 2\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\rho}^{\sigma} + 2\Gamma_{[\mu|\lambda}\Gamma_{\nu]\rho}^{\lambda\sigma} \quad (2.18)$$

Uma outra forma de definir o tensor curvatura é através das identidades de Ricci [19]:

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]\phi = T_{\mu\nu}^{\sigma} D_{\sigma}\phi \quad (2.19)$$

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]\xi^{\rho} = R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} \xi^{\sigma} + T_{\mu\nu}^{\sigma} D_{\sigma}\xi^{\rho} \quad (2.20)$$

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]\omega_{\rho} = -\omega_{\sigma} R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} + T_{\mu\nu}^{\sigma} D_{\sigma}\omega_{\rho} \quad (2.21)$$

e com essas identidades, com a antissimetria dos comutadores da derivada covariante e com a identidade Jacobi que essas derivadas satisfazem, podemos obter as famosas identidades de

Bianchi:

$$R_{(\mu\nu)\lambda}{}^\sigma = 0 \quad (2.22)$$

$$R_{[\mu\nu\lambda]}{}^\sigma + D_{[\mu}T_{\nu\lambda]}{}^\sigma + T_{[\mu\nu}{}^\rho T_{\lambda]\rho}{}^\sigma = 0 \quad (2.23)$$

$$D_{[\mu}R_{\nu\lambda]\rho}{}^\sigma + T_{[\mu\nu}{}^\delta R_{\lambda]\delta\rho}{}^\sigma = 0 \quad (2.24)$$

2.2.1 Espaço Métrico

Nessa seção, iremos introduzir uma estrutura muito importante na variedade: a métrica. Uma métrica no espaço tangente é um produto interno para os vetores do espaço tangente (simétricos e bilineares) associado a uma função $g(\xi, \epsilon)$ com um par de vetores (ξ, ϵ) . Isso corresponde a um tensor do tipo $(0, 2)$ simétrico, conhecido como tensor métrico, $g_{\mu\nu}$:

$$\xi \cdot \epsilon \equiv g(\xi, \epsilon) = \xi^\mu \epsilon^\nu g_{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

Além disso, iremos considerar que esse tensor não é singular, ou seja, $g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ e que localmente é Minkowski: $\eta_{\mu\nu} = (-, +, \dots, +)$. A métrica inversa, $g^{\mu\nu}$, pode ser usada como uma métrica no espaço cotangente e suas componentes podem ser obtidas pela matriz inversa.

Até agora construímos dois campos independentes: a métrica e a conexão afim. Um espaço-tempo equipado por essas duas quantidades é chamado de (L_n, g) . A conexão entre essas duas quantidades, por sua vez, é dada pelo tensor de metricidade, definido por:

$$Q_{\lambda\mu\nu} \equiv -D_\lambda g_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

essa conexão pode ser obtida se considerarmos a seguinte combinação, $D_\lambda g_{\mu\nu} + D_\mu g_{\nu\lambda} - D_\nu g_{\lambda\mu}$ e depois expandir isso. Dessa maneira, obtemos a seguinte relação:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} + K_{\mu\nu}{}^\lambda - L_{\mu\nu}{}^\lambda \quad (2.27)$$

onde

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (2.28)$$

é conhecido como símbolo de Christoffel. Perceba que essa quantidade é completamente determinada pela métrica. Além desse, $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ que é conhecida por tensor cotorção também depende

da métrica e é dado por:

$$K_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(T_{\mu\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\mu} - T_{\mu\nu\sigma}) \quad (2.29)$$

$$K_{[\mu\nu]}{}^\lambda = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu}{}^\lambda, \quad K_{\mu\nu\lambda} = -K_{\mu\lambda\nu} \quad (2.30)$$

Por fim, temos:

$$L_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu}{}^\lambda + Q_{\nu\mu}{}^\lambda - Q^\lambda{}_{\mu\nu}) \quad (2.31)$$

que, diferentemente das outras duas quantidades, não depende diretamente da métrica.

Para teorias de gravitação padrões (com métrica e conexão afim) que desejam descrever os graus de liberdade de uma partícula de spin-2, o *postulado métrico* é necessário:

$$Q_{\lambda\mu\nu} \equiv -D_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.32)$$

se a conexão obedece essa condição, então ela é conhecida como compatível com a métrica. Temos que se o espaço-tempo é (L_n, g) e é compatível com a métrica, então o chamamos de espaço-tempo de Riemann-Cartan, U_n . Se considerarmos apenas a métrica como campo independente, ou seja, torção zero, temos o espaço-tempo de Riemann, V_n . Nesse caso a conexão é dada apenas por 2.27 e é conhecida por conexão de Levi-Civita.

Há outra maneira de reduzir os campos independentes: considerando a curvatura zero. A conexão nesse caso é conhecida como Weitzenböck, e a métrica e a conexão são determinadas pelo **vielbein** (mais detalhes no apêndice A). O espaço-tempo de Riemann-Cartan sem curvatura é, portanto, conhecido como o espaço-tempo de Weitzenböck, A_n .

2.2.2 Vetores de Killing

Até aqui não falamos sobre simetrias em espaços curvos. Esse assunto é de grande relevância para a gravitação, pois para modelos desse tipo a presença de simetrias é a chave para a solução das equações de campo complicadíssimas de Einstein. O método para estudar essas simetrias é através dos **vetores de Killing**. O que queremos encontrar é uma curva integral onde a métrica não mude ao longo dessa. Essa curva que estamos atrás, chamada de k^μ , precisa obedecer a seguinte relação:

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = -2\nabla_{(\mu} k_{\nu)} = 0 \quad (2.33)$$

ou em função do 4-momento, definido como $p^\mu = mv^\mu$, sendo v^μ é a 4-velocidade,

$$p^\mu \nabla_\mu (k^\nu p_\nu) = 0 \quad (2.34)$$

onde \mathcal{L}_k é a derivada de Lie na direção da curva k^μ e essas equações são conhecidas como equações de Killing. Dessa maneira, dizemos que a métrica $g_{\mu\nu}$ admite o vetor de Killing k^μ . Além disso, dizemos que a métrica possui uma isometria na direção k^μ .

O que nos falta é associar esses vetores a quantidades conservadas ao longo de movimentos geodésicos na variedade. Afinal de contas, é bem conhecido na física através dos teoremas de Noether que simetrias estão relacionadas a quantidades conservadas. Podemos ver isso fisicamente: se a métrica não muda na direção k^μ , então é como se a partícula livre não sentisse nenhuma força nessa direção, logo a componente do momento, p^μ , nessa direção vai ser conservado. Em espaços tempos mais gerais, como no de Schwarzschild, outras quantidades, como energia, serão conservadas, como veremos mais adiante.

2.2.3 Equação de Einstein

Desenvolvemos até aqui a base matemática para o entendimento clássico do mecanismo da gravidade, ou seja, apresentamos as principais características da geometria diferencial que é base teórica da Relatividade Geral, porém não mostramos como funciona de fato a dinâmica dos corpos no espaço curvo. Para compreendermos como a natureza gravitacional funciona em escala macroscópica precisamos obter uma equação que leve em conta o objeto central na nossa discussão que é a métrica, tal equação de caráter tensorial é conhecida como equação de Einstein ¹. Há duas maneiras de derivar essa equação, através do princípio variacional ou através de uma analogia com o eletromagnetismo de Maxwell. Iremos utilizar essa última abordagem.

Uma boa alternativa para começar seria considerar uma equação análoga à equação de Poisson para o potencial newtoniano:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G_N\rho \quad (2.35)$$

onde Φ é o potencial newtoniano e ρ é a densidade de massa. Porém o que Einstein percebeu, através do Princípio da Equivalência ², é que a gravidade é uma manifestação geométrica do espaço-tempo, portanto essa equação 2.35 deveria ser tensorial. A generalização do lado direito 2.35 é fácil, basta substituir por $T_{\mu\nu}$, o tensor energia-tensão (iremos explorar mais as propriedades desse tensor mais adiante). E, por fim, podemos generalizar o outro lado levando em conta que para campos fracos, a componente temporal da métrica é dado por:

$$g_{tt} = (1 + 2\Phi). \quad (2.36)$$

¹Aqui iremos considerar apenas uma geometria riemanniana, ou seja, iremos desconsiderar as contribuições de torção e, além disso, iremos levar em conta que nosso espaço-tempo obedece a condição de metricidade, $Q_{\lambda\mu\nu} = 0$.

²Esse princípio de enorme importância para a Relatividade Geral afirma que um referencial acelerado é análogo a um campo gravitacional uniforme de igual valor e sentido contrário.

ou seja, podemos dizer que:

$$\nabla^2 g_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

Até aqui estamos indo bem, porém estamos atrás de uma equação tensorial, no entanto o lado esquerdo de 2.37 não se transforma como um tensor. Uma substituição imediata seria o d'Alembertiano, $\square = D_\mu D^\mu$, porém pela condição de metricidade o lado esquerdo de 2.37 seria imediatamente zero. Felizmente, há uma quantidade óbvia que não é zero e é construída das segundas derivadas da métrica: o tensor de Riemann, $R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$, de modo que podemos alcançar o tensor de Ricci, e finalmente escrever a primeira tentativa de Einstein de escrever uma equação de campo que descreve o universo:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.38)$$

onde κ é uma constante. Porém essa equação ainda não está correta, pois se considerarmos a conservação de energia, ou seja, $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$, então $D^\mu R_{\mu\nu} = 0$, que não é sempre verdade em uma geometria arbitrária. Para resolver finalmente esse problema, Einstein introduziu o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, que explorando a simetria da métrica, resolveu o problema, pois $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Portanto, temos que a equação de Einstein é dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

onde R é o escalar de Ricci, definido como: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. A única coisa que nos falta é descobrir a constante κ , mas isso não é tão difícil, uma vez que podemos utilizar o limite newtoniano na equação 2.39 é encontrar que $\kappa = 8\pi G_N$.

2.3 Zoológico de Buracos Negros

Até aqui fizemos apenas uma breve revisão histórica sobre os buracos negros e desenvolvemos a base teórica da Relatividade Geral. O que iremos fazer agora é nos aprofundar um pouco mais nessa física. As três soluções tipo buracos negros mais conhecidas na literatura são soluções exatas de 2.39 que apresentam simetria esférica ou axial. Elas são soluções da equação de Einstein que na verdade são equações diferenciais não-lineares bastante complicadas. A solução dessa equação é a métrica (em uma geometria riemanniana). Se estivermos no vácuo, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$, então a solução encontrada é dado por:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{R_s}{r} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{R_s}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.40)$$

essa é a famosa solução de Schwarzschild e $R_s = 2G_N M$ é o raio de Schwarzschild. Perceba que essa solução diverge na origem e no raio de Schwarzschild, que delimita a região que

chamamos de horizonte de evento(para encontrar o(s) horizonte(s) de evento, basta encontrar os zeros de ds^2 , ou seja, $ds^2 = 0$). Porém é possível mostrar que essa divergência fora da origem pode ser contornada com uma escolha adequada de coordenadas, por exemplo: coordenadas de Kruskal [17]. No entanto, ainda temos uma divergência em zero (origem), chamamos isso de singularidade física. Uma maneira de descobrir se a singularidade é realmente física é através do escalar de Kretschmann que é um invariante escalar quadrático, definido como:

$$K = K_{\kappa\lambda\mu\nu}K^{\kappa\lambda\mu\nu} \quad (2.41)$$

no caso da solução 2.40, temos que:

$$K = \frac{48R_s^2}{r^6} \quad (2.42)$$

ou seja, há uma divergência apenas na origem. Além disso, vemos que essa solução é bem definida externamente, ou seja, $r > 2G_N M$, uma aplicação, portanto, disso foi a correção da precessão de Mercúrio, uma discrepância entre as observações e a gravitação newtoniana.

O outro buraco negro na linhagem é o de Reissner-Nordström [20], uma buraco negro estático e simetricamente esférico e carregado. Esse buraco negro tem como fonte o campo eletromagnético, ou seja, nosso tensor tensão-energia é $T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, sendo $F_{\mu\nu}$ é o campo de força, ou em inglês *field strength*, do eletromagnetismo. A solução com essa fonte é:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{R_s}{r} + \frac{G_N Q^2}{r^2} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{R_s}{r} + \frac{G_N Q^2}{r^2} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.43)$$

onde Q é a carga elétrica total desse buraco negro. Nesse caso temos um horizonte de eventos (externo) e um horizonte de Cauchy (interno):

$$r_{\pm} = G_N M \pm \sqrt{G_N^2 M^2 - G_N Q^2} \quad (2.44)$$

A terceira e mais realista das soluções é a do buraco negro com rotação, o buraco negro de Kerr [21]. Essa solução é bem mais complicada do que as duas anteriores, uma vez que não iremos mais considerar a simetria esférica, ao invés disso, iremos escolher uma simetria axial em torno de eixos de rotações que são também estacionários. Essa solução nas coordenadas de Boyer-Lindquist [17] é dada por:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{R_s r}{\Sigma^2} \right] dt^2 - \frac{R_s a r \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \left[dt d\phi + d\phi dt \right] + \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 + \Sigma^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] d\phi^2. \quad (2.45)$$

onde

$$\Delta(r) = r^2 - R_s r + a^2 \quad (2.46)$$

$$\Sigma^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.47)$$

podemos ver que a solução de Kerr depende de dois parâmetros, que são M (que está no raio de Schwarzschild, $R_s = 2G_N M$) e a . De imediato, vemos que em $a \rightarrow 0$ (com $M \neq 0$), recuperamos a solução de Schwarzschild, por outro lado com $M \rightarrow 0$ (com $a \neq 0$) recuperamos a métrica do espaço plano em coordenadas esféricas. Além disso temos que a solução de Kerr é estacionária, porém não estática (não é invariante sobre reversão temporal, $t \rightarrow -t$) e tem simetria axial, ou seja, não depende diretamente de ϕ . Sobre as singularidades dessa solução, podemos ver que em $\Delta = 0$ temos uma singularidade regular, por outro lado, em $\Sigma = 0$ a singularidade é física, para chegar a essa conclusão [19], basta calcular o escalar de Kretschmann. Na década de 1970 foram estabelecidos vários “ Teoremas de Unicidade ” demonstrando que – com certas hipóteses – a métrica de Kerr é a única solução da RG que descreve BNs relevantes para a astrofísica [22]. Além disso, temos uma solução mais geral para Kerr, além da rotação, um buraco negro também carregado, chamamos essa solução de Kerr-Newman.

Esses são os três mais conhecidos buracos negros na literatura, todos são soluções exatas das equações de Einstein (portanto, tem uma fonte, no caso de Schwarzschild é a massa, Reissner-Nordström é a carga e, por fim, Kerr é o momento angular). Além dessas três soluções, uma outra que merece uma atenção especial é a solução com constante cosmológica. Nesse caso, se considerarmos uma solução no vácuo, $T_{\mu\nu}^M = 0$, mas com um termo proporcional à métrica no lado direito em 2.35, ou seja, $\propto \Lambda g_{\mu\nu}$, iremos obter a seguinte solução:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{R_s}{r} + \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right] dt^2 + \left[1 - \frac{R_s}{r} + \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.48)$$

onde Λ é a famosa constante cosmológica. Se $\Lambda < 0$ a solução é dita Schwarzschild-de-Sitter (SdS), se for $\Lambda > 0$ é anti-de-Sitter (ASdS). Além disso, podemos ver que nosso espaço-tempo (a variedade) não é mais assintoticamente plana, quer dizer, a constante cosmológica quebra isso. Mas além dessas soluções clássicas existem outros exemplos, na verdade existe uma gama gigantesca de exemplos de buracos negros, entre eles podemos citar os buracos negros regulares (BNR), essas soluções são interessantes, dentre vários motivos, temos que os BNR violam as condições de energia, portanto não obedecem pelo menos uma condição dos teoremas de singularidades de Hawking-Penrose [23]; em especial podemos citar a solução de Bardeen, uma solução exata tipo buraco negro sem singularidades que viola condição de energia

forte [24]. No entanto, estamos mais interessados em uma outra classe de buracos negros, os "cabeludos". Para entendermos melhor o que são esses buracos negros, precisamos entender a chamada *conjectura de No-Hair*.

2.4 Conjectura No-Hair

Acreditar que existem objetos cósmicos que podem engolir estrelas inteiras e que em seu interior pode existir uma região onde as leis da física não funcionam mais (singularidade) é bastante difícil, esses são os buracos negros. Mas eles existem e estão por todo nosso universo. Agora o que você diria se alguém lhe dissesse que os buracos negros podem ter cabelos? Calma, buracos negros com cabelos não existem, pelo menos não literalmente. Essa história de que buracos negros podem ou não ter cabelos vem de uma declaração bem conhecida do físico John Wheeler, que afirmou que "os buracos negros não têm cabelos" pela crença de que nada escaparia de seu horizonte de eventos. Para esse cientista, após o colapso gravitacional de uma estrela supermassiva todas as informações (clássicas) se perderiam e o buraco negro criado dessa morte estelar seria descrito apenas pelas três quantidades físicas básicas: massa, carga e momento.

Mais formalmente, essa declaração pode ser expressa através de uma conjectura, conhecida como *No Hair*, que afirma: todas as soluções de buracos negros estacionárias e assintoticamente plano em 4 dimensões das equações de Einstein no vácuo ou com campo eletromagnético são caracterizadas pelos parâmetros de massa, de carga elétrica e de momento angular. Portanto, segundo essa conjectura, os buracos negros são objetos extraordinariamente simples. Apesar de ser uma conjectura matematicamente forte, ela pode ser violada facilmente, basta, portanto, que nós não consideremos algumas das hipóteses acima. Esses novos buracos negros são importantes, pois uma nova fenomenologia pode ser explorada a partir dessas soluções, para mais detalhes Ref. [[25]]. Com o avanço da astrometria [26] e detectores de ondas gravitacionais [27] talvez seja possível confirmar experimentalmente a validade da conjectura para buracos negros astrofísicos através da verificação da relação entre massa (M), momento angular (J) e momento de quadrupolo (Q_2), $Q_2 = \frac{J^2}{M}$, que se mantém para os buracos negros de Kerr.

Existem algumas soluções de buracos negros com cabelos na literatura, por exemplo: solução *black ring* em 5 dimensões [28], buraco negro BBMB [29], que tem a mesma métrica da solução de Reissner-Nordström, mas possui um campo escalar acoplado conformemente. Porém essas soluções apresentam alguns problemas de estabilidade. Na verdade, o primeiro buraco negro cabeludo considerado, portanto, na literatura foi o de Gibbons [30], que descreve um buraco negro de Reissner-Nordström com um campo de *dilaton* não trivial. Um outro exemplo muito importante na literatura dos buracos negros com cabelo é a solução de

Einstein-Yang-Mills (EYM), onde a matéria é descrita por uma teoria de *gauge* não-abeliana. Apesar de quase todas as soluções EYM assintoticamente plano serem instáveis, há alguns exemplos na literatura de soluções estáveis desse tipo, como solução de Einstein-Skyrme [31], Einstein-non-Abelian-Proca [32] e Einstein-Yang-Mills-Higgs [33]. Nessa dissertação, iremos também mostrar uma solução de buraco negro com cabelo obtida através de uma quebra espontânea de simetria de Lorentz.

3 MODELO PADRÃO ESTENDIDO: SETOR GRAVITACIONAL

Nesse capítulo que se inicia, iremos abordar uma teoria de campos efetiva, o chamado Modelo Padrão Estendido (SME). Nessa teoria, iremos investigar as extensões da relatividade geral devido às modificações que os coeficientes de violação de Lorentz devem provocar no espaço-tempo. Além disso, estamos interessados apenas nos termos líderes na teoria, ou seja, estamos trabalhando com o Modelo Padrão Estendido mínimo.

3.1 Teoria de Campo Efetiva

Como já foi discutido anteriormente, uma teoria unificada que emerge da escala de Plack é demasiada difícil de se realizar testes experimentais para comprová-la, é impraticável; mas se acredita ser possível detectar com experimentos ultra-sensíveis em baixas escalas energéticas sinais dessa teoria quântica da gravidade [34]. Um dos candidatos para esses sinais é a quebra de uma simetria muito importante na física: a simetria de Lorentz. E esse progresso pode ser feito utilizando uma teoria de campo efetiva que deve conter o Modelo Padrão e a Relatividade Geral com quaisquer acoplamentos de ordem superior entre eles [11, 34, 35]. Essa teoria será a base teórica dessa dissertação. O SME basicamente estende a teoria das partículas elementares e do Cosmos através de um mecanismo de violação de simetria de Lorentz.

A ideia de violar a simetria de Lorentz não é mera especulação, em teorias candidatas para teorias fundamentais como teoria das cordas [36, 37], gravidade quântica em laços [38], multiverso [39] e para várias teorias cosmológicas, esse fenômeno já foi previsto [41, 42]. Mas foi com os trabalhos pioneiros [43], no final da década de oitenta, de Kostelecký e Samuel que a ideia de violar a simetria de Lorentz ganhou um contexto fenomenológico. O que eles encontraram foi que quando a teoria das cordas tem um vácuo não-perturbativo, um campo tensorial adquire um valor de vácuo (VEV) diferente de zero, $\langle T \rangle \neq 0$. Dessa maneira, eles mostraram que a simetria de Lorentz é localmente quebrada de maneira espontânea. E a consequência disso, é que a teoria efetiva a baixas energias resultante vai conter um número ilimitado de termos da forma:

$$\mathcal{L} \sim \frac{\lambda}{m_p^\kappa} \langle T \rangle \Gamma \bar{\Psi} (i\partial)^\kappa \chi \quad (3.1)$$

onde λ é uma constante de acoplamento, κ é uma potência inteira e os campos fermiônicos são representados pelas letras Ψ e χ . Mas é no vev, $\langle T \rangle$, que nossa atenção deve ser direcionada. Esse VEV do campo tensorial, apesar de não estar de maneira explícita, carrega índices espaço-temporais e pode ser representado por um conjunto de funções ou de constantes que podem ser fixadas em dado referencial, dessa maneira os termos que interagem com esses coeficientes

podem ter uma direção preferencial no espaço-tempo ou dependência de velocidade (*boost*), e é devido a esse direção preferencial que dizemos que a simetria de Lorentz é violada. Essa interação com esses termos, que são conhecidos como coeficientes de violação de Lorentz, é o que se espera detectar experimentalmente através de modificações na teoria que foi estendida, que no caso desse trabalho seria na teoria da Relatividade Geral. Vale também ressaltar que existem violações de Lorentz que ocorrem explicitamente ou de uma maneira alternativa [44], porém esses casos não são de nosso interesse, uma vez que tais violações apresentam incompatibilidades com a teoria gravitacional, por exemplo, não obedecem as identidades de Bianchi 2.22.

3.2 Violação de Lorentz

Já sabemos que a violação de Lorentz foi prevista em algumas teorias; na teoria das cordas, por exemplo, essa violação acontece espontaneamente. Mas como essa violação realmente acontece? Vamos responder a essa pergunta, nem um pouco trivial, em seguida. E no final dessa seção, iremos construir o setor gravitacional do Modelo Padrão Estendido (SME), que será usado *a posteriori*.

3.2.1 Mecanismo de Violação de Lorentz

Vimos que algumas teorias preveem a violação da simetria de Lorentz local de maneira espontânea, basta o valor esperado de vácuo (VEV) dos campos tensoriais ser diferente de zero, mas essa violação só acontece no estado de vácuo, uma vez que a lagrangiana original continua um invariante de Lorentz [43]. Porém existe um outro tipo de violação, a violação de Lorentz explícita. Nesse caso, a lagrangiana, que deve conter os termos descritos pelo Modelo Padrão Estendido (SME), não é mais um invariante de Lorentz. Essa violação não será utilizada por nós, pois a quebra explícita é incompatível com as identidades de Bianchi na geometria de Riemann e, portanto, é um problema para teorias com gravitação [34].

As violações espontâneas de simetrias na natureza já foram bastante estudadas e têm, portanto, consequências bem conhecidas. A existência do valor esperado no vácuo não-nulo de um campo tensorial afeta diretamente o comportamento das partículas que estão interagindo com esse campo de fundo, conseqüentemente, os campos que estão acoplados com esse VEV irão sofrer modificações [37]. E são essas modificações que estamos investigando nesse trabalho.

A quebra espontânea de simetria de Lorentz é induzida pelo potencial da nossa teoria. A construção desse potencial deve ser feita com o objetivo de, no estado de vácuo, o VEV do campo tensorial tenha um valor diferente de zero, gerando assim um direção preferencial. Em nosso trabalho, iremos construir potenciais que dependerão apenas dos campos de fundo e

da métrica, apesar de ser possível construir potenciais que dependam também de derivadas do campo de fundo [44].

Em suma, podemos dizer que estamos interessados em estudar os efeitos de uma quebra espontânea da simetria em um referencial de Lorentz local que é obtida com um valor esperado de vácuo não-nulo de quantidades que carregam índices de Lorentz, os chamados coeficientes de violação de Lorentz. Mas essa violação só ocorre em transformações de partícula [36]. Essa transformação e outras serão discutidas detalhadamente a seguir.

3.2.2 Transformação da Partículas, transformação do Observador e Violação da Invariância Difeomórfica

O que não deve ter ficado claro ainda é como essa simetria é realmente violada, ou seja, como nossa teoria deixa de ser um invariante sob uma determinada transformação. Todavia para esclarecer esse "furo" no texto, temos que lembrar um pouco sobre as transformações de Lorentz.

Sabemos que a Relatividade de Einstein, assim como o modelo padrão das partículas elementares, são teorias que são invariantes sobre as chamadas transformações de Lorentz [45]. E essas transformações, por sua vez, podem ser divididas entre passivas e ativas. Porém essa nomenclatura só é válida quando estamos em um sistema constituído por partículas livres e, nesse caso, ambas as transformações são um inverso da outra [46]. Mas é no cenário, onde um campo de fundo permeia o espaço-tempo, que estamos interessados. Nesse caso, as transformações ganham um novo nome: transformação de observador (transformações passivas) e transformação da partícula (transformação ativa).

As transformações de observador são aquelas que vão relacionar as coordenadas entre os dois referenciais, que na prática, são as já conhecidas rotações e *boosts*, além disso o campo de fundo também vai sofrer uma mudança de coordenadas, se comportando, portanto, covariantemente como um 4-vetor. Veremos um exemplo depois, que nesse tipo de transformação, a simetria de Lorentz continua inalterada.

A violação acontecerá nas transformações de partículas, cujas rotações e *boosts* das partículas e dos campos localizados em um ponto do referencial de Lorentz local são realizadas mantendo o campo de fundo inalterado, dessa maneira esse campo de fundo se comporta como um conjunto de quatro escalares [35].

Um exemplo simples com um elétron na presença de campo elétrico, o campo de fundo, gerado por um capacitor de placas paralelas é suficiente para perceber que a transformação de partícula (transformação ativa) é a responsável pela violação [46]. Vamos imaginar que o vetor posição do elétron, \mathbf{R} , é perpendicular a direção do campo elétrico e em seguida iremos realizar a seguinte transformação: uma rotação de ϕ , como mostra a figura [2]. Para a

transformação do observador, o observador inicial concorda com o observador rotacionado, pois a posição do elétron continua perpendicular ao campo de fundo. Mas para a transformação de partícula, o referencial continua inalterado e é a posição da partícula que é alterada, nesse caso para $\phi = \frac{-\pi}{2}$, logo teremos que a posição do elétron será paralela ao do campo elétrico, como mostra a figura [3]. É nesse sentido que dizemos que a simetria de Lorentz é violada, apenas em transformação de partícula.

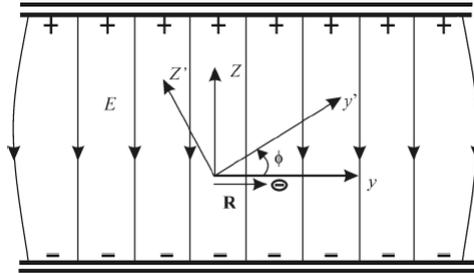


Figura 2: Rotação passiva de ângulo ϕ em presença de um campo de fundo

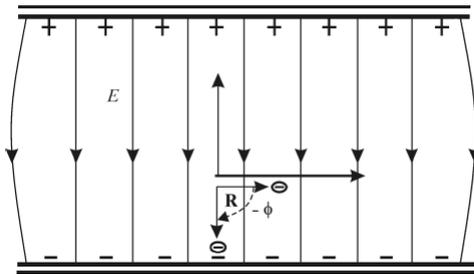


Figura 3: Rotação passiva de ângulo $-\phi$ em presença de um campo de fundo

Outra transformação que é violada e que nos é importante no cenário da violação de Lorentz no setor gravitacional é de defeomorfismo [44]. Primeiro, vamos esclarecer o que é invariância de difeomorfismo, depois vamos ver como a sua quebra se relaciona a violação espontânea da simetria de Lorentz.

Transformações de defeomorfismo são aquelas que deixam a lagrangiana da relatividade geral (GR) invariante, ou seja, seriam o análogo às transformações de calibre do modelo padrão [47]. Essas transformações são do tipo ativas, portanto, seriam representadas por um mapeamento entre variedades. Diferentemente, as transformações passivas na relatividade geral são representadas por transformações gerais de coordenadas. O que Bluhm e Kostelecký mostraram é que a violação da simetria de Lorentz leva à violação da simetria de defeomorfismo, e vice-versa [48]. Essa conexão fica mais clara, quando estamos utilizando o formalismo de *vierbein*. Tal formalismo será mais explorado adiante.

3.3 Ação do Modelo Padrão Estendido

O que iremos fazer agora nessa seção é desenvolver a ação do Modelo Padrão Estendido. Como já foi discutido, nossa teoria de campo efetiva deve conter o modelo padrão da física de partículas, junto com os termos que são acoplados à gravidade e o setor gravitacional puro, além dos coeficientes de violação de Lorentz. Mas o que iremos abordar nesse trabalho é apenas o setor gravitacional, ou seja, o modelo padrão é deixado de lado.

O formalismo de *vierbein* é o mais eficaz no cenário gravitacional, uma vez que a distinção entre uma transformação de coordenadas gerais e uma transformação de Lorentz local é de fácil visualização [35]. Tal escolha tem sua motivação no fato da teoria precisar ser independente de coordenadas, ou seja, covariante sob transformação geral de coordenadas e de Lorentz-observador local, por isso adotar esse formalismo para estudos de violação de Lorentz é útil. Portanto o espaço-tempo de Riemann-Cartan é a geometria que melhor se adapta a nosso teoria.

Nesse caso os campos gravitacionais podem ser descritos pelos *vierbein* e_μ^a e pela conexão spin ω_μ^{ab} . Por sua vez, a variedade de Riemann-Cartan é determinada pelo tensor curvatura $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$ e pelo tensor torção $T^\lambda{}_{\mu\nu}$. Apesar de haver uma crescente leva de trabalhos investigando modelos de gravidade modificada com torção [49, 50], nós iremos considerar nesse trabalho o caso limite, onde essa torção é zero, conseqüentemente, iremos trabalhar com a **geometria de Riemann**. A escolha desse limite não é meramente para facilitar as contas, mas porque os efeitos devido à torção em cenários de grande curvatura (buracos negros, evolução cósmica, etc.) são bem menores em comparação ao tensor de Riemann, $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$.

O Modelo Padrão Estendido como uma teoria de campo efetiva deve conter em sua ação uma infinidade de termos, porém é de se esperar que apenas termos cujo operador com dimensão de massa baixa seja importante fisicamente, além disso, como já foi mencionado antes, estamos interessados no setor mínimo do SME, ou seja, apenas considerando os termos líderes na ação. O pedaço da ação do SME que carrega a violação de Lorentz pode ser construído através da contração entre o operador, que iremos chamar de J^μ , e o coeficiente de violação de Lorentz, chamado por nós de k_μ , e é dado por:

$$S_{LV} \supset \int d^4x e k_\mu J^\mu \quad (3.2)$$

onde e é o determinante da ação. No nosso trabalho, o operador J^μ é representado pela quantidade na Relatividade Geral que está relacionado à curvatura.

3.3.1 Setor Gravitacional

Vamos agora, finalmente, escrever nossa ação que deve conter a densidade lagrangiana que não viola Lorentz (LI), sendo essa o já conhecido termo de Einstein-Hilbert, pois consideramos torção nula, e a densidade lagrangiana que viola Lorentz (LV), esse iremos construir tomando alguns cuidados. Nossa ação pode ser escrita como:

$$S_{gravity} = \frac{1}{2\kappa} \int \mathcal{L}_{gravity} d^4x. \quad (3.3)$$

onde $\kappa \equiv \frac{1}{16\pi G_N} \approx 3 \times 10^{36} GeV^2$ é a constante de acoplamento gravitacional usual. Como já foi mencionado, a $\mathcal{L}_{gravity}$ pode ser dividida em:

$$\mathcal{L}_{gravity} = \mathcal{L}^{LI} + \mathcal{L}^{LV}. \quad (3.4)$$

se espera que essa densidade lagrangiana se combine com o setor de matéria e de *gauge* do SME em uma conexão que leve à teoria fundamental na escala de Planck.

O primeiro termo da equação 3.4 é o de Einstein-Hilbert:

$$\mathcal{L}^{LI} = eR - 2e\Lambda... \quad (3.5)$$

onde e é o determinante da métrica e Λ é a constante cosmológica. Essas reticências que aparecem na equação 3.5 são porque \mathcal{L}^{LI} pode ser escrita como um série de potência da curvatura, torção e derivadas covariantes [35]. Porém como já mencionado estamos interessados apenas no limite riemanniano, $T_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow 0$.

O segundo termo da equação 3.4 deve ser construído de uma maneira que os coeficientes de violação de Lorentz juntos com os operadores de campo gravitacionais produzam uma quantidade que seja ao mesmo tempo um invariante sobre transformação geral de coordenadas e sobre transformação de Lorentz do observador local. Dessa maneira, podemos escrever \mathcal{L}^{LV} como uma série [35]

$$\mathcal{L}^{LV} = e(k_R)^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} ... \quad (3.6)$$

estamos desconsiderando os termos com torção. O coeficiente de violação de Lorentz $(k_R)^{\kappa\lambda\mu\nu}$ é adimensional e herda a simetria do tensor de Riemann, $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ [35]. É interessante de maneira especial esses termos com coeficientes de violação de Lorentz com número par de índices, uma vez que tais termos podem contribuir no pedaço da lagrangiana sem violação de Lorentz, pois tais termos podem ser proporcionais à métrica, $g_{\mu\nu}$, e ao tensor de Levi-Civita, $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$, podendo levar, portanto, a novas interpretações para a constante cosmológica, por exemplo [35].

Além disso, sabemos que o tensor de Riemann pode ser decomposto em tensor de

Weyl, $W_{\kappa\lambda\mu\nu}$, em escalar de curvatura, R , e em tensor de Ricci sem traço, $R_{\mu\nu}^T = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/4$, logo podemos decompor $(k_R)^{\kappa\lambda\mu\nu}$ em u , $s^{\mu\nu}$ e $t^{\kappa\lambda\mu\nu}$ [17, 18]. Podemos escrever explicitamente esse coeficiente de violação da forma:

$$(k_R)^{\kappa\lambda\mu\nu} = t^{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(g^{\kappa[\mu} s^{\nu]\lambda} - g^{\lambda[\mu} s^{\nu]\kappa} \right) - g^{\kappa[\mu} g^{\nu]\lambda} u. \quad (3.7)$$

Como estamos interessados em uma teoria que possa ser testada em baixas energias, os termos-líderes que aparecem nas equações 3.5 e 3.6 são os que irão descrever os efeitos da violação de Lorentz. O que nos resta fazer agora é obter as equações do movimento da teoria. Para tanto, basta variar a ação 3.3 em relação à métrica, utilizar teoria variacional e obter a equação de Einstein modificada:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

e o que iremos obter são diferentes tensores energia-momento $T_{\mu\nu}$ para diferentes teorias com violação.

As soluções gravitacionais obtidas da equação 3.8 podem mostrar anisotropias no espaço-tempo que geram várias consequências físicas [35]. Essas correções oriundas dos coeficientes de violação de Lorentz são o grande objetivo dessas teorias, pois aqui a fenomenologia ganha força.

Diante de tudo isso, podemos escrever nossa ação baseada no SME mínimo setor gravitacional com torção nula, limite riemanniano, da seguinte forma:

$$S_{gravity} = \frac{1}{2\kappa} \int e [R - 2\Lambda - uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu}] d^4x \quad (3.9)$$

ou seja, nossa ação é composta basicamente do termo de Einstein-Hilbert, com constante cosmológica, e os termos de acoplamentos não-mínimos com a gravidade. Os coeficientes u , $s^{\mu\nu}$ e $t^{\kappa\lambda\mu\nu}$ são os responsáveis pela violação de Lorentz. Mas adiante, o que será feito é investigar um modelo que viola Lorentz espontaneamente devido à um campo de fundo 2-forma, ou seja, iremos reescrever esses coeficientes em função de campo antissimétrico e introduzir um potencial que leva à violação de Lorentz.

O que ficará mais claro adiante também é a física por detrás de cada acoplamento, por exemplo: para uma escolha apropriada de potencial e de módulo do campo de fundo responsável pela violação, é possível absorver o acoplamento uR na parte da ação que não tem violação de Lorentz. Além disso, o acoplamento $t^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ carrega por si próprio todo um mistério, que será discutido mais a diante. E finalmente, o acoplamento $s^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o que mais nos interessa nesse trabalho, devido aos resultados obtidos por nós em cenários de buracos negros. Para exemplificar, iremos a seguir analisar um exemplo de modelo vetorial de violação de

Lorentz bastante utilizado na literatura.

3.3.2 Campo de Bumblebee

Na literatura, o exemplo que encontramos mais simples que leva a quebra espontânea da simetria de Lorentz é o modelo de *bumblebee*. Esse modelo vetorial foi utilizado excessivamente como *toy model* no SME devido à sua simplicidade, como em [51, 52]. Podemos agora construir a ação desse modelo como:

$$\mathcal{S}^B = \mathcal{S}^g + \mathcal{S}^{gB} + \mathcal{S}^K + \mathcal{S}^V + \mathcal{S}^M. \quad (3.10)$$

onde \mathcal{S}^g é a ação de Einstein-Hilbert, \mathcal{S}^{gB} é o termo de acoplamento entre a gravidade e o campo de *bumblebee*, que é dado pela equação 3.6, \mathcal{S}^K é o termo cinético, \mathcal{S}^V é o termo de potencial e \mathcal{S}^M é termo de matéria. Antes de escrever nossa ação explicitamente, vamos fazer algumas considerações. Primeiramente, vamos supor que o potencial do nosso modelo, que é o responsável pela quebra espontânea da simetria de Lorentz, é dado por uma combinação do campo de fundo B_μ e da métrica $g_{\mu\nu}$ [34]

$$V \equiv V(B^\mu B_\mu \pm b^2). \quad (3.11)$$

onde b^2 é uma constante positiva. Apesar dessa escolha de combinação entre B_μ e $g_{\mu\nu}$ (em 3.11 a métrica está implícita, pois $B^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} B_\nu B_\mu$), é possível também que esse potencial dependa de derivadas de B_μ , no entanto não iremos explorar esse caso. Dessa maneira, o potencial V carrega a violação de Lorentz com a escolha de um mínimo em $B^\mu B_\mu \pm b^2 = 0$. E essa equação é resolvida quando o campo B_μ adquire um valor esperado no vácuo diferente de zero:

$$\langle B_\mu \rangle = b_\mu. \quad (3.12)$$

quando a condição $b^\mu b_\mu \pm b^2 = 0$ é obedecida, então esse campo de fundo b_μ quebra espontaneamente a simetria de Lorentz.

Finalmente, podemos agora escrever ação de *bumblebee* explicitamente. Vamos, portanto, adotar a seguinte escolha para \mathcal{S}^{LV} , bem comum nos artigos com campo de *bumblebee* [34]

$$u = \frac{1}{4} \xi B^\mu B_\mu. \quad (3.13)$$

$$s^{\mu\nu} = \xi (B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha). \quad (3.14)$$

$$t^{\kappa\lambda\mu\nu} = 0. \quad (3.15)$$

Considerando todas essas escolhas, temos que a ação que será utilizada nessa seção é dada por:

$$\mathcal{S}^B = \int d^4x e \left[\frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) + \mathcal{L}^M \right]. \quad (3.16)$$

onde consideramos a constante cosmológica nula. Podemos ver imediatamente que essa lagrangiana não é invariante de calibre, por conta do potencial, logo nossa teoria não é uma teoria de *gauge* [34], apesar de apresentar um termo cinético que é invariante de calibre, composto pelo campo de força $B_{\mu\nu}$, definido como:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (3.17)$$

Trabalhos que se utilizaram da ação não-mínima 3.16, como [53], [54, 55] em cenários gravitacionais (buracos negros e *wormhole*), serão utilizados por nós como referências diretas, uma vez que iremos abordar o mesmo tema. A diferença, todavia, é que iremos violar Lorentz com um campo tensorial, ao invés de um campo vetorial. Antes de explorar esse campo tensorial próximo de um buraco negro, vamos discutir um pouco sobre a viabilidade das teorias com violação de Lorentz, ou seja, vamos falar sobre possibilidades de detecção dessa "nova física".

3.3.3 Fenomenologia

Ciência só é ciência se teoria e experimento andarem lado a lado, essa é a base do método científico. É nesse intuito que iremos discutir um pouco sobre as possibilidades empíricas para as teorias com violação de Lorentz. Até agora só falamos sobre a parte teórica do Modelo Padrão Estendido e comentamos que a violação de Lorentz é um sinal dessa teoria. Mas como detectar esse sinal que é presumidamente pequeno?

Do ponto de vista gravitacional, acredita-se que em regiões com grande curvatura, como buracos negros, Universo primordial, contextos cosmológicos envolvendo constante cosmológica, matéria escura, e energia escura, tais sinais possam ser detectados [34, 35]. Uma outra maneira de estudar essas violações e fazer a partir disso um conexão com a parte experimental é através das teorias que estudam os modos de Nambu-Goldstone e de modos massivos que surgem da violação espontânea da simetria de Lorentz [56]. O estudo das propagações ou não dos modos massivos e não massivo de Nambu-Goldstone tem todo um interesse especial na comunidade que estuda violações de simetria, uma vez que a partir desses modos é possível

estudar a estabilidade e viabilidade da teoria.

Mas , atualmente, são os experimentos com ondas gravitacionais que estão interessando mais a comunidade científica, por conta da detecção de tais ondas pelo LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) [15]. Alguns trabalhos com soluções tipo ondas gravitacionais em cenário de violação de Lorentz são estudados em [57].

Porém desde quando foi mostrado que a simetria local de Lorentz poderia ser quebrada espontaneamente em 1989, não foi detectado nenhuma indício dessa nova física. No entanto, a busca por esse efeito Plack-suprimido está cada vez mais forte e com experimentos mais precisos [58]. Se há violação de Lorentz na natureza é possível que um dia possamos detectá-la.

Do ponto de vista desse trabalho, o que estamos procurando é uma solução tipo buraco negro com violação de Lorentz. Uma vez obtida essa solução, espera-se que essa se apresente como uma correção de alguma solução já conhecida da literatura. Nas duas partes seguintes desse trabalho, iremos abordar uma teoria com violação de Lorentz devido a um campo antissimétrico e estudaremos as implicações físicas das correções obtidas desse campo.

4 MODELO KALB-RAMOND

Até agora o que fizemos foi definir como a simetria de Lorentz pode ser violada teoricamente através do SME. Além disso, vimos que, em especial, em cenários gravitacionais é importante que essa quebra seja espontânea. Mas o que iremos fazer agora é escolher um modelo específico de violação. A nossa escolha é um campo de fundo tensorial de *rank* 2 antissimétrico que é responsável por gerar modificações no espaço-tempo devido à sua interação com a gravidade (curvatura), esse campo é conhecido na literatura como Kalb-Ramond.

Esse campo 2-forma, no formalismo de p-formas, que junto com os campos de gráviton e diláton, tem sua origem no espectro bosônico da teoria das cordas [59]. Suas características e como ele pode ser incorporado no setor gravitacional do SME será explorado a seguir.

4.1 Campo 2-forma

Antes de construir a ação da nossa teoria, que nos dará as equações do movimento, vamos definir o que seria o campo de Kalb-Ramond. Esse campo tensorial é antissimétrico de *rank* 2, que será representado por $B_{\mu\nu}$, ou seja, $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. Além disso, é possível definir também o tensor dual de $B_{\mu\nu}$ como sendo [60]:

$$\mathcal{B}_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

onde $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ é tensor de Levi-Civita. Já é possível ver as semelhanças desse campo com o campo eletromagnético e *foi essa analogia que nos motivou a estudar esse modelo*. Sabemos que o campo eletromagnético apresenta uma forma bem simples quando é tratado do ponto de vista das p-formas [61], por isso iremos adotar esse formalismo no campo de Kalb-Ramond. Dessa maneira, temos que $B_{\mu\nu}$ é uma 2-forma.

O campo de força é uma combinação de derivadas de $B_{\mu\nu}$ e é dado por:

$$H_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}. \quad (4.2)$$

as derivadas ∂_μ podem ser substituídas pelas derivadas covariantes D_μ , que não há problema, uma vez que estamos adotando o espaço-tempo de Riemann [19], portanto os símbolos de Christoffel se cancelam. Como podemos ver, $H_{\lambda\mu\nu}$ é uma 3-forma. No formalismo das p-formas podemos representar nossos tensores como [62]:

$$B_2 = \frac{1}{2}B_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (4.3)$$

$$H_3 = \frac{1}{3} H_{\mu\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \quad (4.4)$$

onde \wedge é o produto wedge. Temos imediatamente que as componentes de H_3 são construídas através do produto exterior de B_2 , ou seja, $H_3 = dB_2$. Algo interessante acontece quando nosso 3-forma é nula, ou seja, $dB_2 = 0$, logo nosso campo 2-forma se torna uma diferencial exata e pode ser dada por:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu. \quad (4.5)$$

se continuarmos a analogia com o eletromagnetismo, podemos chamar \mathbb{A}_ν de um pseudo-potencial eletromagnético.

Assim como foi definido o dual de B_2 , é possível definir o dual do seu campo de força como sendo:

$$\mathcal{H}_\kappa = \frac{1}{6} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} H^{\lambda\mu\nu} \quad (4.6)$$

além disso, é possível notar que esse campo é invariante sobre a seguinte transformação de *gauge* $\delta_\Lambda B = d\Lambda$, onde Λ é um parâmetro de calibre 1-forma.

4.2 Ação de Kalb-Ramond

Nessa seção, iremos construir a ação de Kalb-Ramond considerando o setor gravitacional e de matéria, esse último será apenas citado, pois sua construção não nos interessa nesse trabalho, uma vez que estamos procurando soluções de vácuo, ou seja, o único campo considerado por nós aqui além do gravitacional é o do Kalb-Ramond. Podemos escrever a referida ação como:

$$\mathcal{S}^{KR} = \mathcal{S}^g + \mathcal{S}^K + \mathcal{S}^V + \mathcal{S}^M. \quad (4.7)$$

onde \mathcal{S}^g é a ação de Einstein-Hilbert (iremos considerar a constante cosmológica sendo igual a zero, $\Lambda = 0$), \mathcal{S}^K é o termo cinético, \mathcal{S}^V é o termo potencial e , por fim, temos o termo de matéria \mathcal{S}^M .

O termo cinético da nossa densidade lagrangiana é o responsável pela dinâmica do modelo. Por isso, ele é composto pelas derivadas de $B_{\mu\nu}$ e pelos termos com o acoplamento com a gravidade [60]. Nesse trabalho vamos considerar apenas os termos de derivada segunda de $B_{\mu\nu}$ e, em relação ao acoplamento gravitacional, vamos considerar apenas os termos sem derivadas e lineares na curvatura, embora os termos com derivadas de ordem superior associados a teorias de campos com violação de Lorentz sejam previstos no nível de uma teoria de campo efetiva [48], todavia como já foi mencionado anteriormente, estamos interessados no

setor mínimo do SME. Para os propósitos desse trabalho, vamos considerar apenas o termo invariante de calibre na parte dos termos cinéticos quadráticos independentes da densidade lagrangiana e os termos com acoplamento gravitacional linear na curvatura, ou seja, o termo cinético será dado por:

$$e\mathcal{L}^K = -\frac{1}{12}eH_{\lambda\mu\nu}H^{\lambda\mu\nu} + \tau_1 eB^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu}R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \tau_2 eB^{\kappa\nu}B^\mu{}_\nu R_{\lambda\mu} + \tau_3 eB^{\mu\nu}B_{\mu\nu}R. \quad (4.8)$$

onde τ_1 , τ_2 e τ_3 são constantes arbitrárias. Perceba que o termo $H_{\lambda\mu\nu}H^{\lambda\mu\nu}$ de fato é um invariante de calibre, pois o campo de força, $H_{\lambda\mu\nu}$, se mantém invariante sobre a transformação de calibre $\delta_\Lambda B = d\Lambda$.

A partir de 4.8 é possível identificar quem são nossos coeficientes de violação de Lorentz, basta comparar com a ação do SME construída por nós em 3.9, e notar que:

$$t^{\kappa\lambda\mu\nu} \propto B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu} \quad (4.9)$$

$$s^{\kappa\mu} \propto B^{\kappa\nu}B^\mu{}_\nu \quad (4.10)$$

$$u \propto B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

Vamos abordar agora o termo na ação que é o responsável por levar a quebra espontânea da simetria de Lorentz, o termo potencial. Assim como foi considerado na 3.12, o potencial V vai levar a formação de um valor esperado no vácuo não nulo:

$$\langle B_{\mu\nu} \rangle = b_{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

perceba que temos o VEV de um 2-tensor, que será responsável por quebrar localmente a simetria de Lorentz. A construção do potencial pode ser feita considerando que o V vai depender do campo $B_{\mu\nu}$ [48], do tensor de Levi-Civita e da métrica (o potencial pode depender da derivada covariante de $B_{\mu\nu}$, porém não iremos explorar essa possibilidade novamente), em uma combinação que preserve o fato de a densidade lagrangiana ser um escalar do observador. Portanto, a combinação dessas quantidades devem ser feitas da seguinte forma: $B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}\mathcal{B}^{\mu\nu}$, salientando que temos nessas combinações a dependência implícita da métrica, pois $B^{\mu\nu} = g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}B_{\kappa\lambda}$, e a dependência do tensor de Levi-Civita vem da equação 4.1.

Diante disso, podemos utilizar a abordagem já conhecida [48] e escrever o potencial

como:

$$V = V(B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \pm \langle g^{\mu\kappa} \rangle \langle g^{\nu\lambda} \rangle b_{\kappa\lambda}b_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}\mathcal{B}^{\mu\nu} \pm \langle g^{\mu\kappa} \rangle \langle g^{\nu\lambda} \rangle b_{\kappa\lambda}\mathcal{b}_{\mu\nu}). \quad (4.13)$$

onde $\mathcal{b}_{\mu\nu}$ é o dual de $b_{\mu\nu}$. Tanto $\langle g^{\mu\kappa} \rangle \langle g^{\nu\lambda} \rangle b_{\kappa\lambda}b_{\mu\nu}$ quanto $\langle g^{\mu\kappa} \rangle \langle g^{\nu\lambda} \rangle b_{\kappa\lambda}\mathcal{b}_{\mu\nu}$ são dois números reais que representam o valor no vácuo dos campos, quando assumimos que $\langle V \rangle = 0$. O que será feito na prática aqui é considerar um situação de permanência no estado de vácuo, ou seja, sem nos importar com a dinâmica do campo de fundo. Essa mesma abordagem já foi adotada nesses artigos [53] e [54]. Essa abordagem será mais detalhada nas próximas seções.

Apesar da forma genérica do nosso potencial em 4.13, iremos assumir a partir desse ponto que nosso potencial será construído da seguinte forma:

$$V = V(B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \pm b_{\mu\nu}b^{\mu\nu}) \quad (4.14)$$

Vamos voltar às analogias com a eletrodinâmica de Maxwell para construir explicitamente o campo de fundo 2-formas, $b_{\mu\nu}$. Assim como é feito na teoria clássica do eletromagnetismo [63], vamos dividir o campo de força em dois outros campos da seguinte forma [64]:

$$b_{\mu\nu} = \mathbb{E}_{[\mu}v_{\nu]} + \epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}v_{\alpha}\mathbb{B}_{\beta} \quad (4.15)$$

onde \mathbb{E} e \mathbb{B} podem ser interpretados como pseudos campos elétrico e magnético, respectivamente, e v^{μ} é um 4-vector tipo-tempo. Os pseudo-campos \mathbb{E} e \mathbb{B} são tipo espaço, i.e., $\mathbb{E}_{\mu}u^{\mu} = \mathbb{B}_{\mu}u^{\mu} = 0$. Assim, o Kalb-Ramond VEV produz dois campos vetoriais de fundo, ao invés de apenas um produzido pelo *bumblebee* VEV [53].

4.3 Modelo Não-Mínimo

Como já foi mencionado anteriormente, estamos estudando os efeitos da violação de Lorentz na gravitação, e é esperado que esses efeitos se mostrem mais fortemente quando estamos trabalhando com modelos que levam em consideração os acoplamentos não-mínimos com a gravidade [34], ou seja, aqueles termos na densidade lagrangiana que contém o campo que adquire valor esperado no vácuo não nulo acoplado à curvatura. No caso do modelo Kalb-Ramond, essas quantidades são representadas pelos tensores: Ricci com traço nulo, Weyl e escalar de Ricci, que são os três últimos termos da equação 4.8. Vale lembrar que estamos considerando apenas os termos líderes, que são lineares e sem derivadas no tensor curvatura.

Diante de tudo isso e retomando as seguintes escolhas: $\Lambda = 0$ e $\mathcal{L}^M = 0$ (soluções no vácuo), temos que a ação não-mínima que iremos explorar a partir de agora é dado por [60]

:

$$\mathcal{S}_{nonmin}^{KR} = \int e d^4x \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{12} H_{\lambda\mu\nu} H^{\lambda\mu\nu} - V + \frac{1}{2\kappa} \left(\xi_1 B^{\kappa\lambda} B^{\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \xi_2 B^{\lambda\nu} B^\mu{}_\nu R_{\lambda\mu} + \xi_3 B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} R \right) \right] \quad (4.16)$$

onde o invariante de *gauge* $H_{\lambda\mu\nu}$ é dado por 4.2 e o potencial V é dado por 4.14. As constantes ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são na verdade renomeações das constantes τ_1 , τ_2 e τ_3 da equação 4.8, pois escolhemos extrair o fator de $\frac{1}{2\kappa}$ das antigas constantes para facilitar a análise.

Com a ação em mãos, podemos obter as equações do movimento. Primeiramente, vamos escrever a equação de Einstein modificada, ou seja, basta variar a ação 5.23 em relação à métrica $[\delta\mathcal{S}_{nonmin}^{KR}(g_{\mu\nu}) = 0]$, assim obtemos:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{KR} \quad (4.17)$$

onde $T_{\mu\nu}^{KR}$ é o tensor energia-momento do campo Kalb-Ramond. Podemos dividir esse tensor em quatro termos:

$$T_{\mu\nu}^{KR} = \kappa \left[T_{\mu\nu}^B + T_{\mu\nu}^{\xi_1} + T_{\mu\nu}^{\xi_2} + T_{\mu\nu}^{\xi_3} \right]. \quad (4.18)$$

tais termos são escritos explicitamente como [60]:

$$T_{\mu\nu}^B = \frac{1}{2} H^{\alpha\beta}{}_\mu H_{\nu\alpha\beta} - \frac{1}{12} g_{\mu\nu} H^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma} - g_{\mu\nu} V + 4B^\alpha{}_\mu B_{\alpha\nu} V_1 + g_{\mu\nu} \mathcal{B}_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} V_2. \quad (4.19)$$

$$T_{\mu\nu}^{\xi_1} = \frac{\xi_1}{\kappa} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} B^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{3}{2} B^{\beta\gamma} B^\alpha{}_\mu R_{\nu\alpha\beta\gamma} + \frac{3}{2} B^{\beta\gamma} B^\alpha{}_\nu R_{\mu\alpha\beta\gamma} + D_\alpha D_\beta (B^\alpha{}_\mu B_\nu{}^\beta) + D_\alpha D_\beta (B^\alpha{}_\nu B_\mu{}^\beta) \right] \quad (4.20)$$

$$T_{\mu\nu}^{\xi_2} = \frac{\xi_2}{\kappa} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} B^{\alpha\gamma} B^\beta{}_\gamma R_{\alpha\beta} - B^\alpha{}_\mu B^\beta{}_\nu R_{\alpha\beta} - B^{\alpha\beta} B_{\mu\beta} R_{\nu\alpha} - B^{\alpha\beta} B_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} D_\alpha D_\mu (B_{\nu\beta} B^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} D_\alpha D_\nu (B_{\mu\beta} B^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} D^2 (B^\alpha{}_\mu B_{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_\alpha D_\beta (B^{\alpha\gamma} B^\beta{}_\gamma) \right]. \quad (4.21)$$

$$T_{\mu\nu}^{\xi_3} = \frac{\xi_3}{\kappa} \left[D_\mu D_\nu (B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}) - g_{\mu\nu} D^2 (B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}) - B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} G_{\mu\nu} + 2B^\alpha{}_\mu B_{\nu\alpha} R \right].$$

onde V_1 e V_2 são as derivadas parciais do potencial (condições de vácuo) [60] e $G_{\mu\nu}$ é o tensor usual de Einstein.

Iremos explorar bastante as possibilidades dessas equações, para diferentes *ansätze*, mas antes de discutir sobre isso, vamos obter a equação do movimento para o campo $B_{\mu\nu}$, que é obtida variando a ação 5.23 em relação ao próprio campo, [$\delta S_{nonmin}^{KR}(B_{\mu\nu}) = 0$] [60]

$$D_\alpha H^{\alpha\mu\nu} = j_V^{\mu\nu} + j_R^{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

onde $j_V^{\mu\nu}$ é a densidade de corrente do potencial [60], sua forma não nos interessa nesse trabalho, pois como será considerado mais adiante, iremos usar novamente o fato que nosso campo de fundo está "congelado" no vácuo, ou seja, não iremos considerar a dinâmica desse campo. E por sua vez, $j_R^{\mu\nu}$ é a densidade de corrente da curvatura e é dado por:

$$j_R^{\mu\nu} = -\frac{2\xi_1}{\kappa} B_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{2\xi_2}{\kappa} B_\alpha [\mu R^\nu]^\alpha - \frac{2\xi_3}{\kappa} B^{\mu\nu} R. \quad (4.23)$$

onde $[\mu, \nu]$ representa o comutador entre os índices.

Além disso, temos que o lado direito da equação 4.22 é covariantemente conservado (*on shell*) [60], ou seja:

$$D_\mu (j_V^{\mu\nu} + j_R^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.24)$$

O que iremos fazer a seguir é considerar algumas hipóteses e aplicar esse modelo não-mínimo à física dos buracos negros, tentando encontrar soluções no vácuo, tendo como campo de fundo, responsável pela quebra espontânea da simetria de Lorentz, o campo de Kalb-Ramond, para fazer isso, iremos resolver as equações de Einstein modificadas 4.17.

5 SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS MODIFICADAS COM CAMPO DE FUNDO DE KALB-RAMOND

Finalmente, vamos aplicar o modelo de violação de Lorentz não-mínimo de Kalb-Ramond em um contexto físico: buracos negros. Esses objetos astrofísicos, que já fazem parte do imaginário humano, são misteriosos e fascinantes; há anos a comunidade científica vem tentando entender melhor sua natureza. Trabalhos importantes nesse sentido foram desenvolvidos nas últimas décadas como [65], [66] e [67].

Escolher soluções tipo buraco negro em um contexto de quebra espontânea da simetria de Lorentz devido a um campo antissimétrico é motivada por: se a natureza viola Lorentz, essa violação do ponto de vista gravitacional deve ocorrer em lugares com bastante gravidade (curvatura), que é o caso dos buracos negros, e, como foi mostrado acima, eles de fato existem! Portanto, iremos estudar como as soluções conhecidas na literatura de buracos negros são modificadas pela violação de Lorentz.

5.1 Soluções Simetricamente Esféricas no Vácuo para acoplamento $\xi_2 \neq 0$

As soluções no vácuo que são esféricamente simétricas em um cenário de violação de Lorentz com o campo 2-forma é o foco principal desse trabalho. Iremos considerar algumas hipóteses para esse modelo de Kalb-Ramond com violação, que são análogas às feitas por Casana no seu trabalho com campo de *bumblebee*, que é um campo vetorial que leva à violação espontânea de Lorentz, [53]. Para tanto, iremos considerar a seguinte métrica:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (5.1)$$

logo o que estamos atrás é como $A(r)$ e $B(r)$ são modificados pela LV.

Para obter essas componentes da métrica, iremos resolver a equação de Einstein modificada 4.17 apenas para o acoplamento não-mínimo com o tensor de Ricci não nulo, ou seja, $\xi_2 \neq 0$. Mas antes de reescrever a equação 4.17 de uma maneira mais fácil, vamos fazer algumas considerações.

Iremos investigar apenas os efeitos do VEV do campo de fundo Kalb-Ramond no campo gravitacional, ou seja:

$$B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = b_{\mu\nu}b^{\mu\nu} \quad (5.2)$$

portanto não estamos interessados na dinâmica do *background*. Além disso, podemos melhor definir $b_{\mu\nu}$ considerando que ele tem uma norma constante, ou seja:

$$b_{\mu\nu}b^{\mu\nu} = -b^2 = \text{constante}. \quad (5.3)$$

Consequentemente, temos que o campo de força, $H_3 = db_2$ se anula. Essas condições nos garantem que o Hamiltoniano se anula. Essa condição 5.3 é suficiente para nossos propósitos como veremos a seguir; não iremos utilizar, por exemplo, a condição do Ref. [54], que considera que o campo de fundo é covariantemente constante, ou seja, $D_\lambda b_{\mu\nu} = 0$.

Nesse parte da dissertação, iremos considerar apenas a configuração do pseudo-campo elétrico com a seguinte forma:

$$b_2 = -\mathbb{E}(x^1)dx^0 \wedge dx^1 \quad (5.4)$$

onde $dx^0 = dt$ e $dx^1 = dr$. Facilmente, podemos ver que esse ansatz 5.4 satisfaz: $H_3 = db_2 = 0$. Além disso, podemos escrever esse pseudo-campo elétrico em função das componentes da métrica através de 5.3, logo temos que:

$$\mathbb{E}(r) = |b| \sqrt{\frac{A(r)B(r)}{2}} \quad (5.5)$$

note que a função $\mathbb{E}(r)$ define um pseudo-campo elétrico estático e radial, $\vec{\mathbb{E}}(r) = \mathbb{E}(r)\hat{r}$, que é consistente com a simetria espaço-temporal estática e esférica. Além disso, temos que esse campo, $\vec{\mathbb{E}}$, é ortogonal aos vetores de killing do tipo-espaço e do tipo-tempo responsáveis pela simetria estática e esférica.

Diante de tudo isso e lembrando que estamos interessados apenas em solução de vácuo, $T_{\mu\nu}^M = 0$, podemos reescrever nossa equação de Einstein 4.17 como:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = \xi_2 \left[g_{\mu\nu} b^{\alpha\gamma} b^\beta{}_\gamma R_{\alpha\beta} - b^\alpha{}_\mu b^\beta{}_\nu R_{\alpha\beta} \right. \\ \left. - b^{\alpha\beta} b_{\mu\beta} R_{\nu\alpha} - b^{\alpha\beta} b_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} D_\alpha D_\mu (b_{\nu\beta} b^{\alpha\beta}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} D_\alpha D_\nu (b_{\mu\beta} b^{\alpha\beta}) - \frac{1}{4} D^2 (b^\alpha{}_\mu b_{\alpha\nu}) \right], \quad (5.6) \end{aligned}$$

é possível simplificar ainda mais essa equação antes de resolvê-la, e isso pode ser feito mostrando que para a condição 5.3 as derivadas covariantes em 5.6 são nulas, que é de se esperar, afinal de contas, o campo de fundo, b_2 , está "congelado" no vácuo. Para vermos isso, basta derivar covariantemente os dois lados de 5.3 e considerar que as únicas componentes não nulas do campo de fundo são $b_{01} = -b_{10}$, o que obtemos é:

$$D_\lambda (b_{01}) = 0 \quad (5.7)$$

ou seja, as derivadas covariantes de 5.6 são todas nulas. Vale salientar que essa condição, que as derivadas covariantes do campo de fundo são nulas, acontecem apenas nesse caso específico

adotado por nós, na escolha do pseudo-campo elétrico com componentes radiais 5.4, isso em geral não é verdade, como adotado, por exemplo, em [54].

Finalmente, podemos resolver as equações oriundas de 5.6. O que iremos obter são quatro equações diferenciais, dados por:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) R_{tt} = 0 \quad (5.8)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) R_{rr} = 0 \quad (5.9)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{\lambda r^2}{2} \left(\frac{R_{tt}}{A(r)} - \frac{R_{rr}}{B(r)} \right). \quad (5.10)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \quad (5.11)$$

onde $\lambda := |b|^2 \xi_2$ é o parâmetro de violação. Os tensores de Ricci são dados por:

$$R_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB}, \quad (5.12)$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB}, \quad (5.13)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right), \quad (5.14)$$

esses tensores foram calculados no apêndice A, através do formalismo de *vierbein*.

Antes de substituir as componentes de $b_{\mu\nu}$ em 5.6, vamos escrevê-las explicitamente em função do módulo do campo e das componentes da métrica com o auxílio da equação 5.3:

$$b_{tr} = -|b| \sqrt{\frac{A(r)B(r)}{2}}. \quad (5.15)$$

$$b^{tr} = |b| \sqrt{\frac{1}{2A(r)B(r)}}. \quad (5.16)$$

$$b_{rt} = |b| \sqrt{\frac{A(r)B(r)}{2}}. \quad (5.17)$$

$$b^{rt} = -|b| \sqrt{\frac{1}{2A(r)B(r)}}. \quad (5.18)$$

Diante disso, estamos prontos para resolver as equações 5.6. Primeiro iremos mul-

tiplicar a equação 5.8 por $B(r)$ e a equação 5.9 por $A(r)$, depois iremos soma-las, o que obteremos é:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \quad (5.19)$$

Depois nos basta substituir esse vínculo 5.19 na equação 5.10, o que obteremos para $\lambda \neq 2$ é a seguinte equação diferencial:

$$\frac{r^2\lambda}{2}A'' + (\lambda + 1)rA' + A - 1 = 0, \quad (5.20)$$

que tem como solução:

$$A(r) = 1 + \frac{C(1)}{r} + \frac{C(2)}{r^{\frac{2}{\lambda}}}. \quad (5.21)$$

podemos imediatamente identificar a constante $C(1)$ como sendo o raio de Schwarzschild (utilizando o fato de para campos fracos g_{tt} é proporcional ao potencial newtoniano). Por outro lado, a constante $C(2)$ apresenta um certa limitação em sua interpretação. O que se espera é que sua real interpretação seja desvendada considerando a dinâmica do campo de fundo, ou seja, acessando as equações do movimento de b_2 , porém esse não é o objetivo desse trabalho.

Finalmente o que obtemos é uma solução de buraco negro cabeludo (esse possível cabelo será discutido mais adiante) tipo lei de potência, dado por:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{R_s}{r} + \frac{\Upsilon}{r^{\frac{2}{\lambda}}} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{R_s}{r} + \frac{\Upsilon}{r^{\frac{2}{\lambda}}} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.22)$$

onde $R_s = 2GM$ é o raio de Schwarzschild usual e Υ é uma constante (com dimensão de $[\Upsilon]=L^{\frac{2}{\lambda}}$) que controla os efeitos da violação de Lorentz na solução Schwarzschild. Vale notar que no limite $\lambda \rightarrow 0$, i.e., para $|b|^2 \rightarrow 0$ ou $\xi_2 \rightarrow 0$, nós recuperamos a métrica usual de Schwarzschild, como esperado.

Nas próximas seções iremos explorar mais essa solução, bem como suas propriedades e fazer alguns testes sobre ela. Mas agora iremos discutir brevemente, outras possibilidades de acoplamentos além de ξ_2 .

5.2 Outras Soluções

Até aqui só investigamos as modificações oriundas do acoplamento não-mínimo ξ_2 . Mas quais modificações (se existirem) podem surgir de acoplamentos com o escalar de Ricci ou com o tensor de Riemann em 5.23?

Iremos primeiramente tratar o caso:

$$\mathcal{S}_{nonmin}^{KR} = \int e d^4x \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{12} H_{\lambda\mu\nu} H^{\lambda\mu\nu} - V + \frac{1}{2\kappa} \left(\xi_3 B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} R \right) \right] \quad (5.23)$$

aqui iremos nos utilizar de todas hipóteses anteriores 5.2, 5.3 e 5.7. Nesse caso, o que iremos obter é uma solução de Schwarzschild sem modificações. Não foi necessário resolver a equação do movimento, pois quando olhamos para a densidade lagrangiana nesse caso apenas com acoplamento de ξ_3 podemos perceber que ela pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$e\mathcal{L}^{\xi_3} = \frac{e}{2\kappa'} R \quad (5.24)$$

onde $\kappa' = \frac{1 - |b|^2 \xi_3}{\kappa}$, ou seja, nesse caso a nova lagrangiana é igual a lagrangiana que gera a solução de Schwarzschild apenas com uma constante diferente, logo ambas terão a mesma solução. Esse resultado já era previsto na literatura de LV [44], uma vez que quando estamos trabalhando com potenciais de violação quadráticos suaves, que é nosso caso 4.14, o termo de acoplamento com o escalar de Ricci pode ser absorvido na parte do termo de gravidade pura (termo de Einstein-Hilbert).

A outra possibilidade de acoplamento é com tensor de Riemann, ou seja, nossa ação é dada por:

$$\mathcal{S}_{nonmin}^{KR} = \int e d^4x \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{12} H_{\lambda\mu\nu} H^{\lambda\mu\nu} - V + \frac{1}{2\kappa} \left(\xi_1 B^{\kappa\lambda} B^{\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} \right) \right] \quad (5.25)$$

se aplicarmos de maneira idêntica as condições que nós utilizamos para obter 5.22, mas agora considerando a equação de movimento para a ação 5.25 que é dado por:

$$R_{\mu\nu} = \xi_1 \left[g_{\mu\nu} b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\sigma} + \frac{3}{2} b^{\beta\gamma} b^{\alpha}{}_{\mu} R_{\nu\alpha\beta\gamma} + \frac{3}{2} b^{\beta\gamma} b^{\alpha}{}_{\nu} R_{\mu\alpha\beta\gamma} \right] \quad (5.26)$$

Substituindo 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18 em 5.26, obtemos as seguintes equações:

$$R_{tt} = \frac{\varpi}{2B(r)} R_{rtrt} \quad (5.27)$$

$$R_{rr} = \frac{3\varpi}{2A(r)} R_{rtrt} \quad (5.28)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{r^2 \varpi}{A(r)B(r)} R_{rtrt} \quad (5.29)$$

onde $\varpi = |b|^2 \xi_1$, além disso esses tensores de Riemann podem ser calculados a partir de 2.18. Essas equações acopladas são potencialmente mais complicadas do que as para o caso com o

acoplamento com tensor de Ricci. Mas não estamos totalmente perdidos. Podemos avançar da seguinte maneira: multiplique a equação 5.27 por $B(r)$ e a equação 5.28 por $A(r)$, depois iremos somá-las, o que obteremos é:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(A(r)B(r)) = 2\varpi B(r)R_{trt}. \quad (5.30)$$

Essa equação não pode ser resolvida exatamente, então podemos escolher o seguinte *ansatz*:

$$A(r) = \frac{h(r)}{B(r)} \quad (5.31)$$

o que iremos obter é uma equação diferencial para h , ainda muito complicada de ser resolvida. Porém o que nos interessa aqui é que uma vez substituída em 5.29, algo no mínimo curioso acontece: o parâmetro de violação de Lorentz, ϖ , desaparece, pois ele é eliminado na equação diferencial resultante, ou seja, os efeitos de violação de Lorentz devido ao acoplamento com o tensor de Riemann somem!

Embora esse efeito seja curioso, ele não é novo. É comum em teoria de violação de Lorentz em cenários gravitacionais que os efeitos devido ao tensor de Riemann sejam nulos. Esse efeito ficou conhecido na literatura como *t puzzle*, como mostra as referências: [68], [69], [70]. Esse nome se deve ao coeficiente de violação de Lorentz, $t_{\kappa\lambda\mu\nu}$, que acopla à $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$.

6 ANÁLISE DA SOLUÇÃO DE BURACO NEGRO CABELUDO TIPO LEI DE POTÊNCIA

Nesse capítulo iremos investigar as propriedades da solução encontrada por nós 5.22. Inicialmente, iremos explorar as características mais gerais, como os horizontes de eventos, e, por fim, iremos fazer alguns testes clássicos nessa métrica com o intuito de encontrar *bounds* para os parâmetros de violação de Lorentz.

6.1 Propriedades Gerais

Primeiro, vemos que nossa solução é uma modificação na solução de Schwarzschild 2.40. Mas como garantir que de fato essa solução devido à LV não é na verdade a própria solução de Schwarzschild com uma mudança de coordenadas? Para garantir que essa solução é realmente nova, temos que calcular o escalar de Kretschmann, definido em 2.41. O escalar de Kretschmann da nossa solução com violação de Lorentz é dado por:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{12r^{\frac{4}{\lambda}}R_s^2 - 8r^{\frac{2}{\lambda}+1}R_s\Upsilon(1 + \frac{3}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}) + 4r^2\Upsilon^2(1 + \frac{5}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^3} + \frac{4}{\lambda^4})}{r^{\frac{4}{\lambda}}r^6}, \quad (6.1)$$

vemos que esse escalar difere do escalar da solução de Schwarzschild 2.42, portanto, essa nossa solução com LV é de fato uma modificação na solução no vácuo clássica (Schwarzschild). Além disso, é possível notar que no limite $\lambda \rightarrow 0$, i.e., para $|b|^2 \rightarrow 0$ ou $\xi_2 \rightarrow 0$, nós recuperamos o escalar de Kretschmann usual de Schwarzschild, como esperado.

Uma característica interessante de nossa solução é seu formato lei de potência, pois é possível recuperar algumas soluções já conhecidas da literatura. Por exemplo, se nós fixarmos o parâmetro de violação $\lambda = |b|^2\xi_2 = -1$. Nesse caso, $A(r) = 1 - \frac{R_s}{r} + \Upsilon r^2$, que é igual a solução Schwarzschild-de Sitter (SdS) 2.48 (para $\Lambda < 0$). Logo, podemos dar uma nova origem da constante cosmológica como sendo originada de um mecanismo de quebra espontânea de simetria de Lorentz. Uma outra solução recuperada é a do buraco negro carregado (Reissner-Nordström) para $\lambda = |b|^2\xi_2 = 1$, logo nossa constante de violação de Lorentz é proporcional a carga total, ou seja, $\Upsilon \propto Q$. Porém, essa semelhança só é no nível de solução, pois é fácil ver, que diferentemente da solução de Reissner-Nordström, não existem cargas criando o nosso campo de fundo, B_2 . Para provar isso, basta utilizarmos a lei de Gauss:

$$\int_S (\vec{\mathbb{E}} \cdot \hat{n}) ds = \frac{Q}{\varepsilon} \quad (6.2)$$

onde \hat{n} é o vetor normal à superfície S e Q é a carga total. Mas como nós sabemos de 5.3 and 5.5 que $\vec{\mathbb{E}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}}\hat{r}$, então a integral em 6.2 diverge em $R \rightarrow \infty$. Diante disso, surge a seguinte

pergunta: afinal de contas, o que é essa constante Υ ? O que podemos dizer é que sua real natureza só pode ser desvendada se nós considerarmos as equações dinâmicas do problema, ou seja, é preciso investigar a evolução dinâmica do campo de fundo, b_2 , para tanto, seria necessário acionar as equações de movimento do campo de Kalb-Ramond 4.22. Porém esse não é o objetivo desse trabalho, portanto deixaremos essa abordagem como uma perspectiva de trabalhos futuros. E é exatamente por esse natureza desconhecida de Υ que nós dizemos que essa solução descreve um buraco negro cabeludo, uma vez que esse parâmetro de violação de Lorentz é uma quantidade que não é nem massa, nem carga e nem momento angular, portando um observador assintótico iria medir uma quantidade além daquelas prevista pela conjectura *No-Hair*.

6.1.1 Horizontes de Eventos

Uma das características mais marcantes de um buraco negro é a fronteira teórica que esconde a singularidade e que nem mesmo a luz pode escapar, pois a sua velocidade é inferior à velocidade de escape do buraco negro, esse é o horizonte de evento. Formalmente, podemos definir essas fronteiras como uma hipersuperfície que separa os pontos no espaço-tempo que são conectados ao infinito por um caminho (*path*) tipo-tempo aqueles que não são. Vimos que no caso da solução de Schwarzschild, o horizonte de evento é o próprio raio de Schwarzschild, além disso nós vimos também que basta igualar a zero nosso ds^2 e achar os zeros da função para encontrar os horizontes. Para solução 5.22, iremos inicialmente fixar λ e depois encontrar os zeros da função (se existir).

PARA $\lambda = 1$

Nesse caso, temos uma solução semelhante a de um buraco negro carregado. Vamos fazer $A(r^*) = 0$, onde r^* é o possível horizonte de evento. O que iremos obter é a seguinte equação para $\lambda = 1$:

$$r^{*2} - R_s r^* + \Upsilon = 0 \quad (6.3)$$

e suas soluções são dadas por:

$$r^* = \frac{R_s \pm \sqrt{R_s^2 - 4\Upsilon}}{2} \quad (6.4)$$

logo teremos dois horizontes de eventos, como esperado. Podemos ainda expandir a raiz quadrada em uma série, pois partimos da hipótese que o parâmetro de violação Υ é pequeno ($\Upsilon \ll R_s^2$), portanto teremos os seguintes horizontes de eventos:

$$r_+ \approx R_s - \frac{\Upsilon}{R_s} - \frac{\Upsilon^2}{R_s^3} \quad (6.5)$$

e

$$r_- \approx \frac{\Upsilon}{R_s} + \frac{\Upsilon^2}{R_s^3} \quad (6.6)$$

onde no $\lim_{R_s \rightarrow \infty} r_+ = \infty$ e $\lim_{R_s \rightarrow \infty} r_- = 0$. Portanto, a violação de Lorentz produz um novo horizonte mais interno, r_- , e no caso do horizonte mais externo a violação reduz (em relação ao horizonte de evento de Schwarzschild) por $r_+ = R_s - r_-$.

O que podemos ver é que com o aumento da potência no termo de violação de Lorentz na solução 5.22, $\frac{\Upsilon}{r^\lambda}$, as correções no horizonte de evento diminuem. Por exemplo, no caso $\lambda = 2/3$, vamos ter três raízes, no entanto, apenas uma é real. Para a solução física (a solução real) a modificação no raio de Schwarzschild usual tem a forma:

$$r_h \approx R_s + \mathcal{O}\left(\frac{\Upsilon^2}{R_s^6}\right). \quad (6.7)$$

que é bem menor que as correções devido à $\lambda = 1$.

6.1.2 Tensor Energia-Tensão e Condições de Energia

Uma maneira de investigar a natureza de um buraco negro ou até mesmo sua estabilidade é através das condições de energia que foram estabelecidas para pôr restrições sobre o tensor de energia-tensão, $T_{\mu\nu}$. A maneira correta de estudar as condições de energia é através das equação de Landau-Raychaudhuri [71]. Essas equações foram desenvolvidas juntamente com os avanços da cosmologia padrão. Além disso, essas equações foram muito importantes para o desenvolvimento dos teoremas de singularidade elaborados por Penrose e Hawking [72, 73]. Mas, afinal de contas, o que essas equações descrevem? De maneira resumida, podemos dizer que é o comportamento cinético dos fluídos, que são gerados por campos vetoriais. As curvas integrais desses campos podem ser geodésicas ou não, no contexto gravitacional - que é o nosso caso - escolhemos as geodésicas como as curvas integrais, que podem ser nulas ou tipo-tempo. A dedução das equações de Landau-Raychaudhuri, que na verdade são identidades, serão feitas no apêndice B. Para nossa análise das condições de energia, basta a identidade que está relacionada com a expansão, ou seja:

$$\frac{d\Theta}{dt} + \frac{1}{3}\Theta^2 + \sigma^2 - \omega^2 = -R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \quad (6.8)$$

onde Θ está relacionado à geometria da área da seção transversal (incluindo um número fixo de geodésicas) ortogonais às linhas de fluxo, $\sigma = \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ e $\omega = \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$. Nota-se que a expansão Θ nada mais é do que a taxa de variação da área da seção transversal ortogonal ao *bundle* de geodésias tipo-tempo. Logo a expansão aproximando do infinito negativo implica na convergência de *bundle*, por outro lado, no infinito positivo há uma divergência. Porém, é possível mostrar com a ajuda do conhecido Teorema de Comparação de Sturm que podemos

alcançar a convergência se:

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu + \sigma^2 - \omega^2 \geq 0 \quad (6.9)$$

porém podemos simplificar mais ainda essa condição desconsiderando rotação, logo teremos:

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (6.10)$$

essa condição se chama *geodesic focusing*.

Mas até agora não falamos nada sobre condições de energia. Como essas equações podem extrair física do tensor energia-tensão? Basta reescrever as equações de Einstein dessa maneira: $R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right)$. Ou seja, de 6.10 temos as seguinte restrições sobre o tensor energia-tensão:

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (6.11)$$

essa é conhecida como condição de energia forte (SEC), além disso se o tensor energia-tensão for diagonal ($T^0_0 = \rho$ sendo densidade de energia e $T^i_i = p_i$ sendo pressão isotrópica), então temos que $\rho + p_i \geq 0$ e $\rho + \sum_i p_i \geq 0$. Temos também a condição de energia fraca (WEC), dada por:

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (6.12)$$

novamente, para um tensor energia-tensão diagonal, temos que $\rho \geq 0$ e $\rho + p_i \geq 0$. No caso de $v^\mu v_\mu = 0$ (nulo), a condição 6.12 se torna uma condição de energia nula (NEC). Podemos ainda citar um caso de condição de energia que implica que a massa-energia observada nunca pode fluir mais rápida do que a luz no vácuo, conhecida como condição de energia dominante (DEC), que no caso de um $T_{\mu\nu}$ diagonal, diz que: $\rho \geq |p_i|$.

Em cosmologia é comum decompor o tensor energia-tensão da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)v^\mu v^\nu + pg_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} + q_{(\mu}v_{\nu)} \quad (6.13)$$

onde esses dois últimos termos representam pressões anisotrópicas e fluxo de calor, respectivamente(esses dois termos são mais comumente utilizados em modelagens que descrevem eras cosmológicas anteriores a da radiação). No caso se desconsiderarmos essas pressões (cisalhamento) e a condução de calor, teremos como fonte um fluido perfeito, nesse caso o tensor energia-tensão será dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)v^\mu v^\nu + pg_{\mu\nu} \quad (6.14)$$

ou seja, a matéria é dita isotrópica:

$$(T^\mu{}_\nu)^M = (-\rho, p, p, p) \quad (6.15)$$

O que iremos fazer agora é calcular a densidade de energia e as pressões, especificamente, de $T_{\mu\nu}^{\xi_2}$ em 4.21. Os elementos da diagonal do nosso tensor energia-tensão considerando as hipóteses já apresentadas anteriormente, é dado por:

$$(T^{\mu}_{\nu})^{\xi_2} = \xi_2 \left(\frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} b^{\alpha\gamma} b^{\beta}_{\gamma} R_{\alpha\beta} - b^{\alpha\mu} b^{\beta}_{\nu} R_{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta} b^{\mu}_{\beta} R_{\nu\alpha} - b^{\alpha\beta} b_{\nu\beta} R^{\mu}_{\alpha} \right) \quad (6.16)$$

Para obtermos a densidade de energia em função dos parâmetros de violação de Lorentz, precisamos calcular $(T^0_0)^{\xi_2}$, para fazer isso basta substituir as componentes 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18 em 6.16, logo obtemos que:

$$\rho = \left(\frac{2}{\lambda} - 1 \right) \frac{\Upsilon}{r^{(2+\frac{2}{\lambda})}} \quad (6.17)$$

Agora, vamos calcular as pressões, para fazer isso vamos calcular $(T^1_1)^{\xi_2}$, $(T^2_2)^{\xi_2}$ e $(T^4_4)^{\xi_2}$ através de 6.16, o que obtemos é:

$$p_1 = - \left(\frac{2}{\lambda} - 1 \right) \frac{\Upsilon}{r^{(2+\frac{2}{\lambda})}} = -\rho \quad (6.18)$$

$$p_2 = p_3 = \left(\frac{2}{\lambda} - 1 \right) \frac{\Upsilon}{2r^{(2+\frac{2}{\lambda})}} = \frac{\rho}{2}. \quad (6.19)$$

podemos perceber de imediato de 6.18 e 6.19 que nosso modelo não é descrito por pressões isotrópicas. Uma vez que calculamos a densidade de energia e as pressões, podemos aplicar as condições de energia:

CONDIÇÃO DE ENERGIA FORTE (SEC)

Para que a SEC não seja violada precisamos que:

$$\rho + p_i \geq 0 \quad (6.20)$$

e

$$\rho + \Sigma_i p_i \geq 0 \quad (6.21)$$

então de 6.18 e 6.19 temos que a SEC é obedecida se $0 < \lambda \leq 2$ para $\Upsilon \geq 0$ ou se $\lambda \leq 0$ para $\Upsilon \leq 0$. Temos, portanto, que a solução semelhante à solução de buraco negro carregado, i.e., $\lambda = 1$, não viola a SEC se $\Upsilon \geq 0$. Por outro lado, se $\Upsilon \leq 0$, então a solução tipo constante cosmológica não viola a SEC, e nesse caso essa solução é Schwarzschild-Anti-de-Sitter.

CONDIÇÃO DE ENERGIA DOMINANTE (DEC)

Para que a DEC não seja violada precisamos que:

$$\rho \geq |p_i| \quad (6.22)$$

podemos ver de imediato que a condição de energia dominante é obedecida, pois $\rho \geq |p_1| = \rho$ e $\rho \geq |p_2| = |p_3| = \frac{\rho}{2}$.

CONDIÇÃO DE ENERGIA FRACA (WEC) E NULA (NEC)

Tanto a condição de energia fraca, ou seja, $\rho \geq 0$ e $\rho + p_i \geq 0$, quanto a nula com $\rho + p_i \geq 0$, levam a mesma conclusão da SEC.

6.2 Efeitos Clássicos

A última análise sobre nossa solução com violação de Lorentz é como o movimento de uma partícula massiva de teste é influenciado pela atração gravitacional do buraco negro de Kalb-Ramond com LSB, ou seja, vamos estudar as geodésicas da nossa métrica 5.22; não iremos considerar as interações entre o acoplamento da partícula e do campo de Kalb-Ramond. O efeito que iremos abordar aqui é o avanço do periélio do planeta Mercúrio, que foi corrigido pela teoria da Relatividade Geral e comprovado experimentalmente com grande precisão. Porém existe uma margem de erro pequeno no teste experimental que nos servirá como *upper bound* para o parâmetro de violação Υ . As equações geodésicas são muito complicadas para serem resolvidas, porém devido ao alto grau de simetrias de nossa métrica de Schwarzschild modificada, podemos fazer uso de algumas quantidades conservadas para investigar alguns efeitos gravitacionais. Portanto, iremos explorar a simetria de nossa métrica.

Para uma partícula massiva, a 4-velocidade $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ satisfaz:

$$g_{\mu\nu}(x)u^\mu u^\nu = -1. \quad (6.23)$$

Apesar de nossa solução ser fruto de um mecanismo de quebra espontânea da simetria de Lorentz, ela ainda preserva simetrias temporais e isotrópicas do buraco negro. Logo, temos que os vetores de Killing tipo-tempo $t^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ e tipo-espaço $\psi^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$ nos fornecem duas constantes do movimento, dadas por:

$$E = \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{\Upsilon}{r^{\frac{2}{s}}}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (6.24)$$

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}, \quad (6.25)$$

onde para partículas massivas essas quantidades representam a conservação de energia e momento angular por unidade de massa da partícula, respectivamente. Além disso, se supõe que a partícula teste se move no plano equatorial, isso implica em fazer $\theta = \frac{\pi}{2}$, o que por sua vez implica em $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$.

Agora podemos utilizar a relação 6.23 e as quantidades 6.24 e 6.25 para obter a seguinte equação:

$$\frac{E}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{eff}(r), \quad (6.26)$$

onde $V_{eff}(r)$ representa o potencial efetivo dado por:

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2} - \frac{R_s}{2r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2 R_s}{2r^3} + \frac{\Upsilon}{2r^{\frac{2}{\lambda}}} + \frac{L^2 \Upsilon}{2r^{\frac{2}{\lambda}+2}}. \quad (6.27)$$

onde os últimos termos de $V_{eff}(r)$ são os termos oriundos da LSB. Além disso, podemos notar que a geometria de LSB induz uma força de curto alcance tipo lei de potência que sua intensidade depende o parâmetro de LV.

Iremos a partir de agora nos preocupar apenas com o caso $\lambda = 1$. Para facilitar nas contas, vamos considerar a variação de r em relação a ϕ , ao invés do tempo próprio, τ , em 6.26, para isso temos que:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{L}{r^2} \quad (6.28)$$

substituindo 6.28 em 6.26, obtemos:

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{r^4}{L^2} - \frac{R_s r^3}{L^2} + \left(1 + \frac{\Upsilon}{L^2} \right) r^2 - R_s r + \Upsilon = \frac{E^2 r^4}{L^2} \quad (6.29)$$

Podemos agora fazer o seguinte procedimento usual [17], introduzir a seguinte variável: $x = r^{-1}$. E depois derivar em relação ϕ . Logo teremos a seguinte equação:

$$\frac{d^2 x}{d\phi^2} + \left(1 + \frac{\Upsilon}{L^2} \right) x = \frac{R_s}{2L^2} + \frac{3R_s}{2} x^2 - 2\Upsilon x^3. \quad (6.30)$$

note que agora temos uma equação diferencial de segunda ordem. Além disso, podemos observar que a geometria de LSB nos fornece um termo cúbico e um linear.

Para resolver a equação 6.30, iremos introduzir o seguinte parâmetro:

$$\chi = \frac{3R_s^2}{4L^2} \quad (6.31)$$

e iremos negligenciar o termo cúbico (aqui a correção para esse termo é muito pequena, muito menos que a do termo linear, que por sua vez já é pequena), portanto podemos reescrever 6.30 como:

$$\frac{d^2 x}{d\phi^2} + \left(1 + \frac{\Upsilon}{L^2} \right) x = \frac{R_s}{2L^2} + \chi \left(\frac{2L^2}{R_s} \right) x^2. \quad (6.32)$$

agora iremos resolver 6.32 perturbativamente:

$$x = x_0 + \chi x_1 \quad (6.33)$$

onde x_0 é a solução newtoniana e χx_1 é uma pequena derivação. Substituindo 6.33 em 6.32 e negligenciando os termos de segunda ordem para χ , obtemos:

$$\frac{d^2 x_0}{d\phi^2} + \left(1 + \frac{\Upsilon}{L^2}\right) x_0 - \frac{R_s}{2L^2} + \chi \left(\frac{d^2 x_1}{d\phi^2} + \left(1 + \frac{\Upsilon}{L^2}\right) x_1 - \frac{2L^2}{R_s} x_0^2 \right) = 0. \quad (6.34)$$

Logo temos que a solução de ordem-zero x_0 é dada por:

$$x_0 = \frac{R_s}{2L^2(1 + \frac{\Upsilon}{L^2})} \left(1 + e \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\Upsilon}{L^2}} \phi\right) \right), \quad (6.35)$$

onde e é a excentricidade da elipse. E por fim, temos que a solução de primeira-ordem é dada por:

$$x_1 = \frac{R_s}{2L^2(1 + \frac{\Upsilon}{L^2})^2} \left[\frac{1 + e^2}{2(1 + \frac{\Upsilon}{L^2})} + \frac{e}{\sqrt{1 + \frac{\Upsilon}{L^2}}} \phi \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\Upsilon}{L^2}} \phi\right) - \frac{e^2}{6(1 + \frac{\Upsilon}{L^2})} \cos\left(2\sqrt{1 + \frac{\Upsilon}{L^2}} \phi\right) \right]. \quad (6.36)$$

A solução geral, portanto, é dada por:

$$x \approx \frac{R_s}{2L^2(1 + \frac{\Upsilon}{L^2})} \left[1 + e \cos\left[(1 - \beta)\sqrt{1 + \frac{\Upsilon}{L^2}} \phi\right] \right], \quad (6.37)$$

onde

$$\beta = \frac{3R_s^2}{4L^2(1 + \frac{\Upsilon}{L^2})^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.38)$$

podemos notar que no caso limite sem violação de Lorentz, ou seja, $\Upsilon \rightarrow 0$, obtemos que a solução geral é:

$$x \approx \frac{R_s}{2L^2} \left[1 + \cos\left[\left(1 - \frac{3R_s^2}{4L^2}\right) \phi\right] \right], \quad (6.39)$$

a solução para a métrica de Schwarzschild usual, como esperado. Podemos ver que a órbita descrita pela partícula massiva é uma elipse. A órbita ainda é periódica, mas não mais de 2π , ao invés disso, ela é dada por:

$$\frac{2\pi}{1 - \beta} \approx 2\pi(1 + \beta) \quad (6.40)$$

Portanto o período da órbita com correção de LV vai ser dado por:

$$\Phi = 2\pi + \Delta\Phi_{GR} + \Delta\Phi_{LV}, \quad (6.41)$$

onde a correção devido à Relatividade Geral é:

$$\Delta\Phi_{GR} = \frac{3\pi R_s}{(1 - e^2)a} \quad (6.42)$$

onde a é o semi-eixo maior da elipse. E finalmente, a correção para a período devido à LV é

dado por:

$$\Delta\Phi_{LV}^{\lambda=1} = -\frac{2\pi\Upsilon}{R_s(1-e^2)a}. \quad (6.43)$$

A mesma conta pode ser feita para valores maiores no expoente de $\frac{\Upsilon}{r^\lambda}$, como $\lambda = 2/3$:

$$\Delta\Phi_{LV}^{\lambda=2/3} = -\frac{6\pi\Upsilon}{R_s(1-e^2)^2 a^2}, \quad (6.44)$$

porém, como esperado, a correção fica cada vez menor, à medida que aumentamos em $\frac{2}{\lambda}$. Outra coisa que levamos em conta tanto em 6.43 e em 6.44 é que usamos a seguinte relação encontrada em [17]:

$$L^2 = \frac{R_s(1-e^2)a}{2} \quad (6.45)$$

Uma vez que encontramos a correção teórica para o período de precessão da órbita de um corpo de teste massivo, podemos utilizar dados experimentais da órbita do Mercúrio para obter um *upper bound* para Υ . Para fazer isso, precisamos utilizar dados astronômicos atuais. No ref. [74] temos que o erro observado é $e^{\check{\Upsilon}} = 0.003''/C$ (em arco segundo por século) em relação ao período de precessão de Mercúrio calculado pela Relatividade Geral na equação 6.42, que por sua vez tem o valor: $\Delta\Phi_{GR}^{\check{\Upsilon}} = 42.9814''/C$. Logo para fazer essa estimativa, vamos considerar que a contribuição da LV, ou seja, 6.43 é menor que o erro experimental. Fazendo todas as contas, lembrando que nesse caso temos que reintroduzir a velocidade da luz na expressão 6.43 para fazer as contas certas, temos que nosso *upper bound* é dado por:

$$\Upsilon_{\lambda=1} < 1.8 \times 10^{-3} km^2 \quad (6.46)$$

algumas conversões de unidade foram necessárias para obter essa estimativa, como arco segundos para radianos: $1'' \approx 4.848 \times 10^{-6} rad$. O interessante sobre essa estimativa é que ela tem unidade de área, logo podemos compará-la ao raio de Schwarzschild ao quadrado. Para um buraco negro pequeno de dez massas solares, portanto, o *shift* no seu horizonte de evento é da ordem de:

$$\frac{\Upsilon^{\lambda=1}}{(R_s)^2} \approx 0.20 \times 10^{-6} \quad (6.47)$$

7 CONCLUSÃO

Nesse trabalho de dissertação foi abordadas soluções de buracos negros modificadas devido a um campo antissimétrico em um contexto de quebra espontânea da simetria de Lorentz. Foi assim obtida uma solução estática e simetricamente esférica de um acoplamento não-mínimo com a gravidade e o VEV de campo de Kalb-Ramond (KR). O potencial de auto-interação quebrou a invariância de calibre de KR e produziu um VEV de um campo de fundo tensorial, $b_{\mu\nu}$, o qual viola a simetria de Lorentz.

O campo de fundo tensorial foi escolhido para sumir com o potencial de auto-interação, uma vez que não estávamos interessados com o dinâmica desse campo. Além disso vimos que o hamiltoniano também some para essa escolha de VEV. Foi possível notar também que a violação de Lorentz preservou a simetria estática e esférica do vácuo gravitacional, pois o VEV é perpendicular aos vetores de Killing tipo-tempo e tipo-espaco. Assumindo o acoplamento não-mínimo entre o VEV de KR e o tensor de Ricci, nós encontramos uma correção tipo lei de potência para a solução de Schwarzschild. Nossa solução de buraco negro tem dois parâmetro de violação de Lorentz, λ e Υ . Para $\lambda = 1$, a solução com LSB tem dois horizontes de eventos, similarmente ao buraco negro carregado. O raio do horizonte mais externo é o raio usual de Schwarzschild menos o raio mais interno do horizonte de eventos. Outro resultado interessante é o caso de $\lambda = -1$, onde temos uma solução com constante cosmológica, ou um buraco negro Schwarzschild-De Sitter (para $\Upsilon < 0$) com LSB, portanto teríamos que o nosso parâmetro de violação Υ seria proporcional à constante cosmológica, Λ . Para valores maiores de λ as correções ficam cada vez menores, por isso nos concentramos mais nesses casos citados, principalmente em $\lambda = 1$. Vale a pena ressaltar que diferentemente dos buracos negros com LSB gerados por campos de *bumblebee*(campos vetoriais de LSB), a solução de Kalb-Ramond com LSB não só encontrou modificações no horizonte de evento de Schwarzschild como também encontrou novos horizontes de eventos. Investigamos também as condições de energia para nosso tensor energia-tensão, e encontramos que condição de energia dominante não é violada e que as condições de energia forte, fraca e nula só são obedecidas se $\lambda \geq 2$ para $\Upsilon \geq 0$ ou se $\lambda \leq 2$ para $\Upsilon \leq 0$.

No nível clássico, a solução encontrada produz um potencial gravitacional adicional que depende do parâmetro de violação de Lorentz λ . Para $\lambda = 1$, nós estudamos a correção para o avanço do periélio de Mercúrio, nós obtemos um *upper-bound* para o parâmetro Υ . Desse *bound*, foi possível estimar para um buraco negro de dez massas solares uma mudança no horizonte de eventos externos com cerca de 20 mm em comparação com 30 km do raio de Schwarzschild usual.

Outros tipos de acoplamentos foram tratados também. No caso com o acoplamento não-mínimo entre o VEV de KR e o escalar de Ricci, nós não encontramos nenhuma correção tipo lei de potência para a solução de Schwarzschild. Esse resultado já havia sido previsto por Kostelecký devido à escolha de um potencial de auto-interação quadrático suave. Além desse caso, escolhemos também investigar o acoplamento não-mínimo entre o VEV de KR e o tensor de Riemann, e novamente nenhuma correção foi encontrada, aumentando, portanto, o mistério desse tipo de acoplamento (*t puzzle*).

Como possibilidades de extensão desse trabalho, podemos apontar as análises de estabilidade da solução encontrada através das correções devido às flutuações do campo de Kalb-Ramond em torno do VEV. Além disso, podemos estender esse modelo para outros tipos de buracos negros, como os regulares e *wormhole*.

APÊNDICE A - FORMALISMO DE VIELBEIN

Esse formalismo, inicialmente introduzido por Weyl em seu artigo clássico [75] para introduzir campos de férmions, ou seja, campos de spin em espaço curvo, é para nós muito importante, sobretudo para os estudos de violação de simetria de Lorentz. Isso porque, como já mencionado, tal formalismo além de ser capaz de tratar a gravidade como uma simetria de *gauge*, também faz a distinção entre transformações de Lorentz local e transformações gerais de coordenadas, algo essencial para teorias com violação de Lorentz. Portanto, iremos obter as equações de Cartan de estrutura, e depois iremos utilizar essas equações para calcular os tensores de Ricci de um espaço com simetria esférica e estática.

A.1 Tetrada

Até aqui utilizamos as bases coordenadas, $\{\partial_\mu\}$, como base para nossos tensores. Apesar de ser uma base diferencial natural para o espaço tangente, existe uma outra base orthonormal que é independente das coordenadas, a base das tetradas (vierbein). O que iremos fazer aqui é localmente expressar um vetor como uma combinação linear em uma base tetrada fixa em dado ponto do espaço tangente. Dado uma base tetrada, $\{\hat{e}_a\}$, podemos relacioná-la a base coordenada através da combinação linear:

$$\partial_\mu(x) = e_\mu{}^a(x)\hat{e}_a \quad (\text{A.1})$$

onde $e_\mu{}^a(x)$ é uma matriz 4×4 que caracteriza o formalismo de vierbein (vielbein, seria para um espaço-tempo de dimensão n). Essa mesma matriz tem como inversa $e^\mu{}_a$ que obedece às seguintes condições de ortogonalidade:

$$e^\mu{}_a e_\nu{}^a = \delta^\mu{}_\nu, \quad e_\mu{}^a e^\mu{}_b = \delta^a{}_b \quad (\text{A.2})$$

logo podemos escrever:

$$\hat{e}_a = e^\mu{}_a(x)\partial_\mu \quad (\text{A.3})$$

Além disso, temos que:

$$g_{\mu\nu} e^\mu{}_a(x)e^\nu{}_b(x) = \eta_{ab} \quad (\text{A.4})$$

de modo que utilizando A.2, podemos ver que campo de vierbein é a "raiz quadrada" da métrica,

ou seja:

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}{}^a(x)e_{\nu}{}^b(x)\eta_{ab}. \quad (\text{A.5})$$

Assim como foi feito para a base coordenada, vamos construir uma base dual de vierbein, denotada por $\{\hat{e}^a\}$. Similarmente, temos que:

$$dx^{\mu}(x) = e^{\mu}{}_a(x)\hat{e}^a \quad (\text{A.6})$$

e como essa 1-forma é uma base para o espaço cotangente, então a condição de produto de vetores é válida, ou seja:

$$\hat{e}^a \otimes \hat{e}_b = \delta_a{}^b \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, podemos escrever um vetor qualquer tanto na base coordenada, quanto na base tetrada:

$$\mathbf{V} = V^{\mu}\partial_{\mu} = V^a\hat{e}_a. \quad (\text{A.8})$$

A.1.1 Conexão de Spin e Equações de Estrutura de Cartan

Em uma geometria diferencial em base não-coordenada, a conexão afim ordinária $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é substituída pela conexão de spin $\omega_{\mu}{}^a{}_b$. Assim como foi definido em 2.11, temos que:

$$D_{\mu}X^a{}_b = \partial_{\mu}X^a{}_b + \omega_{\mu}{}^a{}_cX^c{}_b - \omega_{\mu}{}^c{}_bX^a{}_c \quad (\text{A.9})$$

podemos agora escrever a derivada covariante em bases mistas e encontrar uma correspondência entre as conexões.

$$\begin{aligned} D(X) &= (D_{\mu}X^a)dx^{\mu} \otimes \hat{e}_a \\ &= (\partial_{\mu}X^a + \omega_{\mu}{}^a{}_bX^b)dx^{\mu} \otimes \hat{e}_a \\ &= (\partial_{\mu}(e_{\nu}{}^aX^{\nu}) + \omega_{\mu}{}^a{}_be_{\lambda}{}^bX^{\lambda})dx^{\mu} \otimes (e^{\sigma}{}_a\partial_{\sigma}) \\ &= (\partial_{\mu}X^{\sigma} + e^{\sigma}{}_a\partial_{\mu}e_{\nu}{}^aX^{\nu} + e^{\sigma}{}_ae_{\lambda}{}^b\omega_{\mu}{}^a{}_bX^{\lambda})dx^{\mu} \otimes \partial_{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

comparando A.10 com 2.11, temos que:

$$\omega_{\mu}{}^a{}_b = e_{\nu}{}^ae^{\lambda}{}_b\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} - e^{\lambda}{}_b\partial_{\mu}e_{\lambda}{}^a \quad (\text{A.11})$$

Uma maneira de obter novamente essa relação A.11 é através do *postulado da tetrada* que diz que $D_{\mu}e_{\nu}{}^a = 0$. Uma maneira de vermos isso é multiplicar por $e_{\nu}{}^b$ a equação A.11 e depois reagrupar os termos, o que obtemos é:

$$D_{\mu}e_{\nu}{}^a = \partial_{\mu}e_{\nu}{}^a - e_{\sigma}{}^a\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \omega_{\mu}{}^a{}_be_{\nu}{}^b = 0 \quad (\text{A.12})$$

Antes de obter as equações de estrutura de Cartan que iremos utilizar para calcular

os tensores de Riemann e Ricci, vamos fazer uma breve revisão de formas diferenciais. Uma k -forma é um campo vetorial de rank k totalmente antissimétrico, $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} = \omega_{[\mu_1, \dots, \mu_k]}$, definido por:

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \quad (\text{A.13})$$

onde \wedge é o produto wedge, definido como:

$$A \wedge B \equiv A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu. \quad (\text{A.14})$$

além disso, existe uma operação diferencial muito importante, chamada de derivada externo, definida por:

$$(d\omega)_{\mu_1, \dots, \mu_{k+1}} = (k+1)(\partial\omega)_{\mu_1, \dots, \mu_{k+1}}. \quad (\text{A.15})$$

Vamos considerar a notação de Cartan, ou seja:

$$e^a = e_\mu^a dx^\mu \quad (\text{A.16})$$

$$\omega^a_b = \omega_\mu^a{}_b dx^\mu \quad (\text{A.17})$$

dessa maneira podemos escrever a torção da seguinte maneira:

$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b. \quad (\text{A.18})$$

essa é a primeira equação de estrutura de Cartan. A outra equação de estrutura nos dar a curvatura:

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c \wedge e^d \quad (\text{A.19})$$

Uma vez obtidos as equações de estrutura de Cartan e ter esclarecido os métodos matemáticos necessários, vamos agora calcular o tensor de Ricci através dessas equações de um espaço-tempo com simetria esférica e estático, ou seja, iremos considerar a seguinte métrica geral:

$$g_{\mu\nu} = (-A(r), B(r), r^2, r^2 \text{sen}^2\theta). \quad (\text{A.20})$$

de A.16, podemos escrever a base das tetradas em função das componentes da métrica:

$$e^0 = A^{1/2} dt; \quad e^1 = B^{1/2} dr; \quad e^2 = r d\theta; \quad e^3 = r \text{sen}\theta d\varphi. \quad (\text{A.21})$$

Uma vez obtido as bases, podemos agora se utilizar da primeira equação de estrutura de Cartan A.18, considerando torção nula, ou seja, no limite riemanniano $T^a = 0$. Mas antes

temos que calcular a derivada externo das bases tetradas:

$$de^0 = \frac{1}{2}A^{-1/2}A'dr \wedge dt = \frac{A'}{2B^{1/2}A}e^1 \wedge e^0 \quad (\text{A.22})$$

$$de^1 = \frac{1}{2}B^{-1/2}B'dr \wedge dr = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$de^2 = dr \wedge d\theta = \frac{1}{B^{1/2}r}e^1 \wedge e^2 \quad (\text{A.24})$$

$$de^3 = \text{sen}\theta dr \wedge d\varphi + r\text{cos}\theta d\theta \wedge d\varphi = \frac{1}{rB^{1/2}}e^1 \wedge e^3 + \frac{\text{cotg}\theta}{r}e^2 \wedge e^3 \quad (\text{A.25})$$

onde ' é a derivada em relação à r . Agora podemos substituir essas derivadas externas na primeira equação de Cartan e obter as 1-formas de conexão de spin:

$$\omega^0{}_1 = \frac{A'}{2B^{1/2}A}e^0 = \frac{A'}{2(AB)^{1/2}}dt \quad (\text{A.26})$$

$$\omega^2{}_1 = \frac{1}{rB^{1/2}}e^2 = \frac{1}{B^{1/2}}d\theta \quad (\text{A.27})$$

$$\omega^3{}_1 = \frac{1}{rB^{1/2}}e^3 = \frac{\text{sen}\theta}{B^{1/2}}d\varphi \quad (\text{A.28})$$

$$\omega^3{}_2 = \frac{\text{cotg}\theta}{r}e^3 = \text{cos}\theta d\varphi \quad (\text{A.29})$$

Finalmente, podemos calcular os tensores de Ricci através da segunda equação de estrutura de Cartan A.19, uma vez que temos as 1-formas de conexão de spin. Iremos calcular R_{tt} , passo a passo, e os outros tensores de Ricci serão mostrados. Temos que R_{00} pode ser decomposto em:

$$R_{00} = R^1{}_{010} + R^2{}_{020} + R^3{}_{030} \quad (\text{A.30})$$

agora substituindo as derivadas externas já calculas na equação A.19, teremos que:

$$\begin{aligned} R^1{}_0 &= d\omega^1{}_0 + \omega^1{}_c \wedge \omega^c{}_0 \\ &= d\left(\frac{A'}{2(AB)^{1/2}}dt\right) + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_0 + \omega^1{}_3 \wedge \omega^3{}_0 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{(AB)^{1/2}}\right)'dr \wedge dt \\ &= \frac{1}{2}(AB)^{-1/2}\left(\frac{A'}{(AB)^{1/2}}\right)'e^1 \wedge e^0 \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

de modo que:

$$R^1_{010} = \frac{1}{2}(AB)^{-1/2} \left(\frac{A'}{(AB)^{1/2}} \right)' \quad (\text{A.32})$$

Similarmente, podemos calcular R^2_{0} e R^3_{0} , e, portanto, R^2_{020} e R^3_{030} :

$$R^2_{0} = \frac{1}{2}(rAB)^{-1} A' e^2 \wedge e^0 \quad (\text{A.33})$$

e

$$R^3_{0} = \frac{1}{2}(rAB)^{-1} A' e^3 \wedge e^0 \quad (\text{A.34})$$

logo,

$$R^2_{020} = \frac{1}{2}(rAB)^{-1} A' \quad (\text{A.35})$$

$$R^3_{030} = \frac{1}{2}(rAB)^{-1} A' \quad (\text{A.36})$$

Assim, temos que:

$$R_{00} = \frac{1}{2(AB^{1/2})} \left(\frac{A'}{(AB)^{1/2}} \right)' + \frac{A'}{rAB} \quad (\text{A.37})$$

e para obter R_{tt} , basta lembrar: $R_{tt} = e^0_t e^0_t R_{00}$, sendo $e^0_t = A^{1/2}$, logo temos o seguinte tensor de Ricci:

$$R_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB} \quad (\text{A.38})$$

O mesmo procedimento pode ser feito para calcular outros tensores de Ricci e obtemos que:

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB} \quad (\text{A.39})$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - B^{-1} - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \quad (\text{A.40})$$

APÊNDICE B - EQUAÇÕES DE LANDAU-RAYCHAUDHURI

Como já foi mencionado anteriormente, as equações de Landau-Raychaudhuri são utilizadas para obter as condições de energia na cosmologia. Isso se deve ao fato dessas equações descreverem a cinemática dos fluídos gerados por campos vetoriais. No caso gravitacional, as curvas integrais desses fluídos são geodésicas. Aqui iremos obter tais equações, para fazer isso, temos que considerar inicialmente, uma folha tipo- espaço Σ_s englobada pela métrica $g_{\mu\nu}$, onde um 4-vetor u_μ tipo-espaço, ou seja, $u_\mu u^\mu = -1$ pode ser decomposto em componentes perpendiculares e paralelas ao eixo temporal, desse modo introduzimos um tensor projetor:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu \quad (\text{B.1})$$

esse projetor se encontra na folha-espaço e, desse modo, podemos escrever o quadrado de comprimento de arco como:

$$ds^2 = -(u_\mu dx^\mu)^2 + h_{\mu\nu}^{(3)} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.2})$$

Agora para estudar cinemática dos fluídos vamos considerar o gradiente do campo de velocidade, ou seja, $B_{\mu\nu} = \nabla_\nu u_\mu$. Depois podemos decompor essa quantidade da seguinte maneira:

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{n-1} \Theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \quad (\text{B.3})$$

onde n é a dimensão, em nossas contas futuras iremos considerar $n = 4$; Θ é parte do traço, $\sigma_{\mu\nu}$ é a parte simétrica sem traço e $\omega_{\mu\nu}$ é a parte antissimétrica sem traço. O significado geométrico dessas quantidades é, respectivamente: expansão, cisalhamento e rotação. Essa interpretação vem da relação da geometria da área da seção transversal (incluindo um número fixo de geodésicas) ortogonais às linhas de fluxo. Como elas se movem de um ponto para outro, ao longo do fluxo, a forma dessa área muda. O que queremos agora é saber como essas quantidades evoluem no tempo, as equações que vão nos dizer isso são as equações de Landau-Raychaudhuri.

Uma maneira de derivar essas equações é considerando a seguinte quantidade $\frac{dB_{\mu\nu}}{d\tau} =$

$u^\lambda \nabla_\lambda B_{\mu\nu}$. Agora podemos expandir essa equação:

$$\begin{aligned}
\frac{dB_{\mu\nu}}{d\tau} &= u^\lambda D_\lambda D_\nu u_\mu \\
&= u^\lambda D_\nu D_\lambda u_\mu + u^\lambda R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} u_\sigma \\
&= D_\nu (u^\lambda D_\lambda u_\mu) - (D_\mu u^\lambda)(D_\lambda u_\mu) - R_{\rho\mu\sigma\lambda} u^\rho u^\sigma \\
&= D_\nu a_\mu - B_\nu{}^\lambda B_{\lambda\mu} - R_{\rho\mu\sigma\lambda} u^\rho u^\sigma.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

onde $a_\mu = u^\lambda D_\lambda u_\mu$. Além disso, utilizamos o comutador 2.20 na segunda linha de B.4, desconsiderando torção. Agora temos que na contração nós obtemos:

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -B^{\mu\nu} B_{\nu\mu} - R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \tag{B.5}$$

se levarmos em conta as devidas simetrias, o fato de $h^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 0$ e de $\omega^{\mu\nu} \omega_{\nu\mu} = -\omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$, teremos que:

$$B^{\mu\nu} B_{\nu\mu} = \frac{\Theta^2}{9} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}. \tag{B.6}$$

considerando que $h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 3$, finalmente temos a equação de Landau-Raychaudhuri:

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \tag{B.7}$$

REFERÊNCIAS

- [1] A. Einstein, *Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, 354, 7, 769–822, 1916.
- [2] R. Utiyama, "Invariant theoretical interpretation of interaction" Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
- [3] For reviews of gravitation in Riemann-Cartan spacetimes see, for example, F.W. Hehl et al., Rev. Mod. Phys. 48, 393 (1976); I.L. Shapiro, Phys. Rep. 357, 113 (2002).
- [4] V. A. Kostelecký and S. Samuel, "Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory," Phys. Rev. D, vol. 39, pp. 683–685, Jan 1989.
- [5] A. G. Cohen and S. L. Glashow, "Very special relativity" Phys. Rev. Lett. 97, 021601 (2006).
- [6] R. V. Maluf, J. E. G. Silva, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, "Dirac equation in very special relativity for hydrogen atom" Phys. Lett. B 738, 341 (2014).
- [7] J. Magueijo and L. Smolin, "Lorentz invariance with an invariant energy scale", Phys. Rev. Lett. 88, 190403 (2002).
- [8] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecký, C. D. Lane, and T. Okamoto, "Noncommutative field theory and Lorentz violation", Phys. Rev. Lett. 87, 141601 (2001).
- [9] P. Horava, "Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator", Phys. Rev. D 79, 084008 (2009).
- [10] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, "Quantum gravity corrections to neutrino propagation", Phys. Rev. Lett. 84, 2318 (2000).
- [11] V.A. Kostelecký and R. Potting, "CPT, strings, and meson factories", Phys. Rev. D 51, 3923 (1995).
- [12] Karl Schwarzschild, Sitzungsber. "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory". Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) 1916 (1916) 189-196
- [13] M. D. Kruskal, "Maximal extension of Schwarzschild metric", Phys. Rev. 119 (1960) 1743.
- [14] Tananbaum, H., Gursky, H., Kellogg, E., Giacconi, R., Jones, C. "Observation of a Correlated X-Ray Transition in Cygnus X – 1". Astrophysical Journal, vol. 177, p.L5
- [15] Abbott, B.P. et al.; [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration] GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. Phys. Rev. Lett. 2017, 119, 161101.
- [16] Heino Falcke 2017 J. "Imaging black holes: past, present and future". Phys.: Conf. Ser. 942 012001
- [17] Carroll, S. M., An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry, Addison Wesley, (2004).

- [18] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Nova Yorque: John Wiley and Sons, 1972.
- [19] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press; Edição: 1
- [20] H. Reissner, "Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach "Ann. Physik, 50, 106-120 (1916).
- [21] B. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* 11, 287 (1963).
- [22] P. T. Chrusciel, J. L. Costa and M. Heusler, *Living. "Stationary black holes: uniqueness and beyond"*, *Rev. Rel.* 15 (2012) 7.
- [23] R. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [24] J. M. Bardeen, in *Conference Proceedings of GR5, Tbilisi, URSS* (1968), p. 174.
- [25] E. Barausse, J. Bellovary, E. Berti, K. Holley-Bockelmann, B. Farris, B. Sathyaprakash and A. Sesana, "Massive Black Hole Science with eLISA". *J. Phys. Conf. Ser.* 610 (2015) 1, 012001
- [26] C. M. Will, "Testing the general relativistic no-hair theorems using the Galactic center black hole SgrA*," *Astrophys. J.* **674** (2008) L25 doi:10.1086/528847 [arXiv:0711.1677 [astro-ph]].
- [27] Leor Barack and Curt Cutler. "Using LISA extreme-mass-ratio inspiral sources to test off-Kerr deviations in the geometry of massive black holes", *Phys. Rev. D* 75, 042003.
- [28] Roberto Emparan and Harvey S. Reall, "A rotating black ring solution in five dimensions", *Phys. Rev. Lett.* 88, 101101.
- [29] J.D. Bekenstein, *Exact Solutions of Einstein-conformal scalar equations.* *Ann. Phys. (NY)***82**, 535-547 (1974).
- [30] Gibbons, G.W. "Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields", *Nucl.Phys.* B207 (1982).
- [31] P. Bizon and T. Chmaj, *Gravitating skyrmions*, *Physics Letters B*, Volume 297, Issues 1–2, 1992,
- [32] Brian R. Greene, Samir D. Mathur, and Christopher M. O'Neill. "Non-Abelian Black Holes in Higher Derivative Gravity". *Phys. Rev. D* 47, 2242.
- [33] Peter C. Aichelburg and Piotr Bizon. "Magnetically charged black holes and their stability". *Phys. Rev. D* 48, 607
- [34] V.A. Kostelecký, "Gravity, Lorentz violation, and the standard model", *Phys. Rev. D* 69, 105009 (2004).
- [35] D. Colladay and V.A. Kostelecký, "Lorentz-violating extension of the standard model" *Phys. Rev. D* 55, 6760 (1997).
- [36] V.A. Kostelecký and S. Samuel, "Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories" *Phys. Rev. Lett.* 63, 224 (1989).

- [37] V.A. Kostelecký, M. Perry, and R. Potting, "Off-shell structure of the string sigma model" *Phys. Rev. Lett.* 84, 4541 (2000).
- [38] J. Alfaro, H.A. Morales-Técolt, and L.F. Urrutia, "Alternative approaches to Lorentz violation invariance in loop quantum gravity inspired models" *Phys. Rev. D* 66,
- [39] J.D. Bjorken, "Cosmology and the standard model" *Phys. Rev. D* 67, 043508 (2003).
- [40] C.D. Froggatt and H.B. Nielsen, "Derivation of Lorentz invariance and three space dimensions in generic field theory" hep-ph/0211106.
- [41] V.A. Kostelecký, R. Lehnert, and M. Perry, "Spacetime-varying couplings and Lorentz violation" *Phys. Rev. D* 68, 123511 (2003).
- [42] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M.A. Luty, and S. Mukohyama, "Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity" hep-th/0312099.
- [43] V. A. Kostelecký, S. Samuel, Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory, *Physical Review D*, 39, 2, 683–685, 1989.
- [44] Bluhm, Robert, Fung, Shu-Hong; Kostelecký, V. Alan. Spontaneous Lorentz and diffeomorphism violation, massive modes, and gravity. *Physical Review D*. v. 77, 6 mar. de 2008. p. 065020.
- [45] A. Einstein, *The Principle of Relativity*, (Dover, New York, 1952)
- [46] Belich, H.; Costa-Soares, T.; Santos, M.A. e Orlando, M.T.D.. Violação da simetria de Lorentz. *Rev. Bras. Ensino Fís.* [online]. 2007, vol.29, n.1, pp.57-64. ISSN 1806-1117. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172007000100011>.
- [47] Chung, John P., "Diffeomorphism invariance in general relativity"(2008). Honors Theses. Paper 53. <https://digitalcommons.colby.edu/honorstheses/53>
- [48] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity, *Physical Review D*, 71, 6, 065008-1–065008-17, 2005.
- [49] A. F. Ferrari, J. A. S. Neto, R. da Rocha. "The role of singular spinor fields in a torsional gravity, Lorentz-violating, framework". arXiv:1607.08670
- [50] Russell, N. Lorentz Violation and Torsion. arXiv:0803.2228.
- [51] Michael D. Seifert, "Generalized bumblebee models and Lorentz-violating electrodynamics", *Phys. Rev. D* 81, 065010.
- [52] R. V. Maluf, C.A.S Almeida, R. Casana, and Ferreira, Jr. "Einstein-Hilbert graviton modes modified by the Lorentz-violating bumblebee field", *Phys. Rev. D* 90, 025007.
- [53] R. Casana ; A. Cavalcante ; F. P. Poulis ; E. B. Santos . "Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model". *PHYSICAL REVIEW D* , v. 97, p. 104001, 2018.
- [54] O. Bertolami, J. Paramos, "Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous Lorentz symmetry breaking", *Physical Review D*, 72, 4, 044001-1–044001-12, 2005.

- [55] Ali Övgün, Kimet Jusufi, and İzzet Sakallı. "Exact traversable wormhole solution in bumblebee gravity". *Phys. Rev. D* 99, 024042.
- [56] V.A. Kostelecký and S. Samuel, "Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories" *Phys. Rev. Lett.* 63, 224 (1989).
- [57] LIGO Collaboration, B. Abbott et al., gr-qc/0312088; VIRGO Collaboration, B. Caron et al., *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* 54, 167 (1997); GEO Collaboration, B. Willke et al., *Class. Quant. Grav.* 19, 1377 (2002); TAMA Collaboration, M. Ando, *Class. Quant. Grav.* 19, 1409 (2002); LISA Collaboration, K. Danzmann et al.
- [58] V. Alan Kostelecký and Neil Russell, "Data tables for Lorentz and CPT violation" *Rev. Mod. Phys.* 83, 11
- [59] M. Kalb and P. Ramond, "Classical direct interstring action", *Phys. Rev. D* 9, 2273 (1974).
- [60] Brett Altschul, Quentin G. Bailey, and V. Alan Kostelecký. "Lorentz violation with an antisymmetric tensor" *Phys. Rev. D* 81, 065028
- [61] Ryder, Lewis H. "Quantum Field Theory". Cambridge University Press, 1996.
- [62] Chandrasekhar, S. "The Mathematical Theory of Black Holes". Clarendon Press. 1998.
- [63] D.J. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics" (Prentice Hall, New Jersey, 1999), 3rd ed.
- [64] L.A. Lessa, J.E.G. Silva, R.V. Maluf, C.A.S. Almeida. "Modified black hole solution with a background Kalb-Ramond field", arXiv:1911.10296.
- [65] R. Penrose, "Gravitational collapse and space-time singularities" *Phys. Rev. Lett.* 14, 57 (1965).
- [66] S. W. Hawking, "Black holes and thermodynamics" *Phys. Rev. D* 13, 191 (1976).
- [67] W. G. Unruh, "Notes on black-hole evaporation" *Phys. Rev. D* 14, 870 (1976).
- [68] Q.G. Bailey, "Combined search for Lorentz violation in short-range gravity" *Phys. Rev. D* 80, 044004 (2009).
- [69] Q.G. Bailey, V.A. Kostelecký, Short-range gravity and Lorentz violation R. Xu, *Phys. Rev. D* 91, 022006 (2015).
- [70] Bonder, Yuri. "Lorentz violation in the gravity sector: The t puzzle" *Physical Review D* · April 2015
- [71] A. Raychaudhuri, "Relativistic cosmology. I" *Phys. Rev.* 98, 1123 (1955)
- [72] S. W. Hawking, "Occurrence of singularities in open universes" *Phys. Rev. Lett.* 15, 689 (1965)
- [73] S. W. Hawking, "Singularities in the universe" *Phys. Rev. Lett.* 17, 444 (1966)
- [74] N. P. Pitjev and E. V. Pitjeva, *Astron.* "Gravitational anomalies in the solar system?" *Lett.* 39, 141 (2013).
- [75] H. Weyl, Z. "A remark on the coupling of gravitation and electron", *Phys.* 56 (1929) 330.