



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**IGOR DE SOUZA GONÇALVES**

**PROJETO DE UM CONTROLADOR RST PARA O SISTEMA BARRA E BOLA**

**FORTALEZA**

**2019**

IGOR DE SOUZA GONÇALVES

PROJETO DE UM CONTROLADOR RST PARA O SISTEMA BARRA E BOLA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira

Coorientador: Msc. Adriano Rodrigues de Paula

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

G625p Gonçalves, Igor de Souza§.  
Projeto de um controlador rst para o sistema barra e bola / Igor de Souza§ Gonçalves. – 2019.  
51 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,  
Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

Coorientação: Prof. Me. Adriano Rodrigues de Paula.

1. Controle Digital de Posição. 2. Ferramenta Didática. 3. Alocação de Polos. 4. Barra e Bola. 5. Controle RST. I. Título.

CDD 621.3

---

IGOR DE SOUZA GONÇALVES

PROJETO DE UM CONTROLADOR RST PARA O SISTEMA BARRA E BOLA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Msc. Adriano Rodrigues de Paula (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Luiz Henrique Silva Colado Barreto  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Bismark Claire Torrico  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Que os benefícios deste trabalho se expandam e toquem a todos. Que todos os seres, em todos os lugares, sejam felizes e livres.

## AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Fátima, e a toda minha família, pelo apoio incondicional.

Aos meus amigos da Engenharia Elétrica pelo companheirismo e compartilhamento de angústias e alegrias durante todos esses anos.

Ao Programa de Educação Tutorial(PET) dos vários cursos da UFC, por permitirem o contato com pessoas de todas as áreas de dentro da Universidade e de fora, permitindo uma formação mais humana e voltada a trazer benefícios à sociedade.

A todas as pessoas que participaram das aulas de Yoga que ministrei na UFC.

Ao Centro de Estudos Budistas Bodisatva, CEBB Fortaleza, e a Lama Padma Samten.

A Ednardo Moreira Rodrigues e Alan Batista de Oliveira, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

"Devagar é rápido."

(Lama Padma Samten)

## RESUMO

Protótipos didáticos são muito importantes para fixar conhecimentos teóricos vistos na sala de aula. Este trabalho apresenta a montagem, modelagem e controle de posição de um sistema Barra e Bola, que é um sistema instável em malha aberta amplamente utilizado para demonstrar aplicações reais de controle em laboratório. O trabalho descreve as etapas de construção, modelagem da planta, projeto de controle e avaliação do desempenho do sistema em malha fechada. A barra é composta por uma extremidade fixa, onde o sensor laser que capta a posição da bola é acoplado, e uma extremidade móvel, onde o servo motor atua. Um microcontrolador é responsável por fazer a aquisição de dados do sensor e implementar o controle digital de posição, além de enviar os dados de posição e inclinação do motor em tempo real ao computador. A modelagem presente nesse trabalho considera o servo motor como uma planta linear e restringe a faixa de operação da barra para tratar o sistema todo como uma planta linear. Essa consideração permite o projeto de controladores lineares a parâmetros fixos. O controlador RST implementado utiliza a técnica de alocação de polos e tem por finalidade obter uma resposta sem erro de estado estacionário, pequeno sobressinal e rápido tempo de assentamento. Como resultado, conclui-se que o projeto do controlador fixo linear utilizado é suficiente para controlar o sistema instável proposto, o protótipo pode ser usado como ferramenta didática para trabalhos futuros e que haveriam melhoras ao controlar o modelo fora da faixa de linearização por meio do controle adaptativo.

**Palavras-chave:** Controle RST. Barra e Bola. Ferramenta didática. Controle digital de posição. Alocação de polos.



## ABSTRACT

Educational equipment are very important to apply theoretical knowledge seen in the classroom. This work presents the assembly, modeling, and position control of a Ball and Beam system, which is an unstable open loop system widely used for demonstrating actual laboratory control applications. The work describes the steps of construction, plant modeling, control design and performance evaluation of the closed-loop system. The bar is composed of a fixed end, where the laser sensor that captures the position of the ball is coupled, and a movable end, where the servo motor operates. A microcontroller is responsible for acquiring sensor data and implementing digital position control, as well as sending real-time motor position and tilt data to the computer. The modeling present in this paper considers the servo motor as a linear plant and restricts the operating range to treat the whole system as a linear plant. This consideration allows the design of linear controllers to fixed parameters. The implemented RST controller uses the pole placement technique and aims to obtain a response without stationary state error, small overshoot and fast settling time. As a result, it is concluded that the design of the linear fixed controller used is sufficient to control the proposed unstable system, the prototype can be used as a didactic tool for future work and that there would be improvements when controlling the model outside the linearization range through the adaptive control.

**Keywords:** RST control. Ball and Beam. Teaching tool. Digital control of position. Pole placement.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Produto da Quanser . . . . .	14
Figura 2 – Boeing 757 pousando no aeroporto internacional de Toncontín . . . . .	16
Figura 3 – Barra com extremidade fixa . . . . .	17
Figura 4 – Barra com interface rotacional . . . . .	17
Figura 5 – Barra com motor acoplado . . . . .	17
Figura 6 – Protótipo . . . . .	18
Figura 7 – Sensor laser DT35-B15851 . . . . .	20
Figura 8 – Servo motor TowerPro MG995 . . . . .	21
Figura 9 – Placa Mega 2560 R3 . . . . .	22
Figura 10 – Bola de tênis de mesa utilizada no projeto . . . . .	22
Figura 11 – Circuito esquemático . . . . .	23
Figura 12 – Fluxograma do algoritmo implementado na placa de controle . . . . .	23
Figura 13 – Modelo do sistema barra e bola . . . . .	25
Figura 14 – Diagrama de corpo livre do sistema barra e bola . . . . .	26
Figura 15 – Identificação do sistema em malha aberta . . . . .	30
Figura 16 – Lugar das raízes do sistema em malha aberta . . . . .	30
Figura 17 – Diagrama de blocos de um controlador geral de dois graus de liberdade . . .	32
Figura 18 – Localização dos polos e zero do modelo de referência . . . . .	36
Figura 19 – Simulação no Simulink . . . . .	38
Figura 20 – Resposta do sistema real x simulação para referência de 15 centímetros . . .	39
Figura 21 – Ângulo de inclinação do servo motor para referência de 15 centímetros . . .	39
Figura 22 – Resposta ao degrau variando referência de 5 em 5 segundos . . . . .	40
Figura 23 – Sinal de controle variando referência de 5 em 5 segundos . . . . .	40
Figura 24 – Resposta ao degrau variando referência de dez em dez segundos . . . . .	41
Figura 25 – Sinal de controle variando referência de 10 em 10 segundos . . . . .	41
Figura 26 – Resposta do sistema durante a aplicação de distúrbios . . . . .	42
Figura 27 – Sinal de controle durante a aplicação de distúrbios . . . . .	42
Figura 28 – Mudança da planta - resposta ao degrau variando referência . . . . .	43
Figura 29 – Mudança da planta - sinal de controle variando referência . . . . .	43
Figura 30 – Peças do protótipo . . . . .	48

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do Sistema Barra e Bola . . . . .	26
Tabela 2 – Parâmetros de resposta . . . . .	40

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDM	Método do Diagrama de Coeficientes, do inglês <i>Coefficient Diagram Method</i>
CNC	Comando Numérico Computadorizado
DAUD	Departamento de Arquitetura, Urbanismo e Design
ESO	Observador de Estados Estendido, do inglês <i>Extended State Observer</i>
GPAR	Grupo de Pesquisa em Automação, Controle e Robótica
LQR	Regulador Quadrático Linear, do inglês <i>Linear Quadratic Regulator</i>
MDF	Placa de Fibra de Média Densidade, do inglês <i>Medium-Density Fiberboard</i>
MIT	<i>Massachusetts Institute of Technology</i>
MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo, do inglês <i>Model-based Predictive Control</i>
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
UFC	Universidade Federal do Ceará

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Apresentação do Tema e Contextualização do Projeto</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b>	<b>14</b>
<b>1.3</b>	<b>Escopo</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>PLANTA DIDÁTICA BARRA E BOLA</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Construção do Protótipo</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Escolha do Sensor</b>	<b>19</b>
<b>2.3</b>	<b>Escolha do Motor</b>	<b>21</b>
<b>2.4</b>	<b>Placa de Controle</b>	<b>22</b>
<b>2.5</b>	<b>Bola</b>	<b>22</b>
<b>2.6</b>	<b>Circuito Esquemático</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelagem Matemática do Sistema Físico Barra e Bola</b>	<b>26</b>
<b>3.2</b>	<b>Modelagem Experimental</b>	<b>28</b>
<b>3.3</b>	<b>Resultados da Modelagem</b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>PROJETO DOS CONTROLADORES</b>	<b>31</b>
<b>4.1</b>	<b>Critérios de Projeto</b>	<b>31</b>
<b>4.2</b>	<b>Sobre o Controlador RST</b>	<b>32</b>
<b>4.3</b>	<b>Projeto do Controlador RST</b>	<b>32</b>
<b>4.4</b>	<b>Cálculo dos parâmetros do RST</b>	<b>35</b>
<b>4.5</b>	<b>Implementação do Controlador</b>	<b>37</b>
<b>4.6</b>	<b>Simulação Numérica no Simulink</b>	<b>38</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>44</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>45</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>48</b>
	<b>APÊNDICE A – DESENHOS DAS PEÇAS DO PROTÓTIPO</b>	<b>48</b>
	<b>APÊNDICE B – CÓDIGO-FONTE GRAVADO NO MICROCONTROLADOR</b>	<b>49</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o tema da pesquisa, a definição do problema e sua justificativa, assim como a definição dos objetivos gerais e específicos, além da limitação da pesquisa e a estrutura da dissertação.

### 1.1 Apresentação do Tema e Contextualização do Projeto

O controle do sistema Barra e Bola é um problema clássico na área de controle de sistemas e é um dos mais populares experimentos de laboratório devido à facilidade de sua construção. Apesar de amplamente utilizado, esse não é um experimento trivial caso se deseje uma resposta precisa no posicionamento da bola. Isso se deve ao fato de haver uma série de variáveis de difícil estimação, como o atrito entre as partes móveis do sistema e irregularidades na construção das peças, que provocam interferência direta no desempenho do posicionamento, dificultando a correta modelagem do sistema, e conseqüentemente, do controlador. Segundo Ibrahim (2006), as alternativas mais utilizadas atualmente na Engenharia de Controle, para controle com precisão, são microcontroladores ou computadores. O uso de microcontroladores tem como grande vantagem, segundo Rothe-Neves *et al.* (2004), um custo reduzido na aquisição de dados, já que nesse caso não são necessárias as placas exclusivas para aquisição de dados na arquitetura do sistema.

Existem diversos programas, como Matlab e LabVIEW, que permitem que os estudantes da área de Controle realizem simulações dos mais variados processos, contínuos ou discretos, mas alguns fatores operacionais e aspectos práticos dificultam a verificação dos resultados experimentalmente (ASSIS *et al.*, 2008). Existem vários protótipos didáticos que são utilizados nos curso de Automação e Controle e estão disponíveis no mercado, mas estes possuem certas limitações, como restrição do acesso a determinadas áreas, dificultando alterações físicas na planta, manutenções e mudanças no algoritmo dos dispositivos programáveis (ROTHER-NEVES *et al.*, 2004).

Dentro da própria Universidade estão sendo criadas soluções para resolver as limitações citadas anteriormente. Vários assuntos já foram abordados, como geração de energia solar fotovoltaica (PAINES, 2014), controle de velocidade de motores de corrente contínua (TEIXEIRA; SALLES, 2009), projeto de um sistema *Ball and Beam* para o ensino de Controle Automático (RAMOS *et al.*, 2016), plataforma didática para treinamento em automação de

subestações utilizando sistemas embarcados (MACHADO *et al.*, 2014), Plataforma didática de baixo custo para experiências em laboratório de controle (MOREIRA *et al.*, 2014), Protótipo didático de um Robô Quadbot Explorador (ALVES *et al.*, 2018), dentre outros.

Carmo *et al.* (2006) reforça a importância da construção de protótipos didáticos na Universidade:

Um protótipo construído numa instituição de ensino Superior, pelos seus alunos e professores, resulta num equipamento de manutenção facilitada, personalizado para uma dada finalidade e proporciona, ao mesmo tempo, um processo de independência tecnológica, bem como contato com as tecnologias mais atuais, além de ser uma oportunidade singular para seus construtores sedimentarem grande parte do conhecimento teórico adquirido na sala de aula (Carmo *et al.*, 2006).

## 1.2 Justificativa

Vários tipos de controladores fixos lineares já foram utilizados para comandar plantas do tipo Barra e Bola. A empresa Quanser<sup>®</sup> tem um produto comercial que possui um controlador Proporcional, Integral e Derivativo (PID), chamado *Ball and Beam Experiment* (QUANSER INC., 2011a). A posição da bola é medida a partir de um divisor de tensão e a barra é movimentada por um servo motor, como mostrado na Figura 1:

Figura 1 – Produto da Quanser



Fonte: Quanser Ball and Beam User Manual

Ramos *et al.* (2016) fez um projeto voltado para o ensino de controle automático, e justificou a utilização do PID pela sua grande aplicação nos mais diversos tipos de projeto, além de ser um controlador bem didático, já que o usuário pode ver como cada parte do controlador (proporcional, integral e derivativa) afeta o sistema. Normalmente, controladores do tipo PID são

utilizados para sistemas estáveis, mas não são comumente vistos em sistemas instáveis com duplo integrador. Por isso, Maalini *et al.* (2016) implementou um controlador PID em seu trabalho, mas utilizando o Método do Diagrama de Coeficientes, do inglês *Coefficient Diagram Method* (CDM), uma metodologia de projeto de controlador desenvolvida recentemente baseada em uma abordagem algébrica. No fim de seu trabalho, Maalini *et al.* (2016) mostra que o percentual de erro foi menor que o de um PID clássico, que utiliza o método Ziegler-Nichols. Choudhary e Kumar (2016) utilizou um Regulador Quadrático Linear, do inglês *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Nesse projeto, a estimação de um estado virtual (perturbação) é realizada *on-line* a partir de um Observador de Estados Estendido, do inglês *Extended State Observer* (ESO), e esses estados são usados no controlador para anular os efeitos de perturbações e incertezas reais na planta. Essa abordagem permite que qualquer termo não linear ou desconhecido da planta possa ser considerado como uma perturbação interna ou externa. Para contornar as não linearidades e perturbações do sistema, Jain e Nigam (2013) usou um controle adaptativo baseado na regra MIT (pois foi desenvolvida no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT)) para que a planta pudesse seguir um modelo de referência.

Na literatura de controladores também é possível encontrar abordagens baseadas na modelagem não linear da planta, como no trabalho de Martínez e Ruiz (2012), que fez um Controle Preditivo Baseado em Modelo, do inglês *Model-based Predictive Control* (MPC) para validar o fato de que esse tipo de controle é um dos mais utilizados pela comunidade científica por lidar muito bem com as não linearidades e satisfazer as restrições elétricas e mecânicas do sistema.

Ainda dentro da modelagem não linear, alguns trabalhos baseados em lógica nebulosa, ou modelagem *fuzzy*, podem ser mencionados, como os de Eaton *et al.* (2000) e Chang *et al.* (2012).

### **1.3 Escopo**

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um Sistema Barra e Bola, bem como de um Controlador que possa atender as especificações estabelecidas pelo usuário, podendo servir de ferramenta para o ensino da disciplina de Controle de Sistemas Dinâmicos dentro do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará.

Os seus componentes básicos são: um motor, responsável por controlar a inclinação da rampa, um sensor, responsável por determinar a posição da bola, um microprocessador, que



comandar o ângulo do motor, de modo a colocar a bola na posição desejada, e a estrutura do sistema.

Esse sistema simples é muito importante na área aeroespacial. É largamente utilizado, pela sua simplicidade, para demonstrar aplicações reais de controle, já que experimentos reais nessa área são difíceis de serem realizados. Exemplos de aplicação: estabilização horizontal de um avião durante a decolagem e pouso, ou durante turbulência no voo (SONI *et al.*, 2018).

Figura 2 – Boeing 757 pousando no aeroporto internacional de Toncontín



Fonte: Enrique Galeano Morales

Esse sistema é instável em malha aberta, pois para qualquer inclinação não nula da barra, a posição da bola varia com aceleração constante indefinidamente (OGATA, 2011).

Neste trabalho, foi utilizado um controlador com dois graus de liberdade na estrutura denominada RST. O controlador PID, por exemplo, atua no sinal de erro da planta, e, por isso, se diz que possui apenas um grau de liberdade. Já o controlador RST permite um tratamento independente do sinal de referência e do sinal da variável controlada (DOYLE *et al.*, 2013). Esse controlador será explicado em detalhes no Capítulo 4.

Para superar as dificuldades com as não linearidades da planta, foram usadas simplificações para que se pudesse projetar um controlador linear. O RST é ideal para ser aplicado em um controlador adaptativo, uma solução possível para lidar com as não linearidades do sistema.

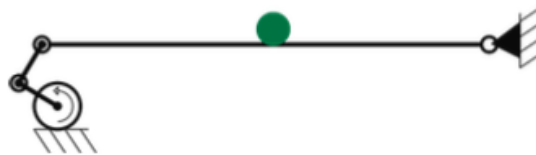
## 2 PLANTA DIDÁTICA BARRA E BOLA

A construção da Planta didática é descrita aqui. O material da barra, projeto, bem como a escolha do sensor, motor, placa de controle e bola são detalhados nas seções a seguir.

### 2.1 Construção do Protótipo

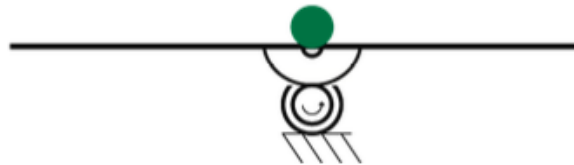
Várias estruturas diferentes para a plataforma Barra e Bola são encontradas na literatura, tais como as apresentadas nas Figuras 3, 4 e 5:

Figura 3 – Barra com extremidade fixa



Fonte: Wieneke e White (2011).

Figura 4 – Barra com interface rotacional



Fonte: Wieneke e White (2011).

Figura 5 – Barra com motor acoplado



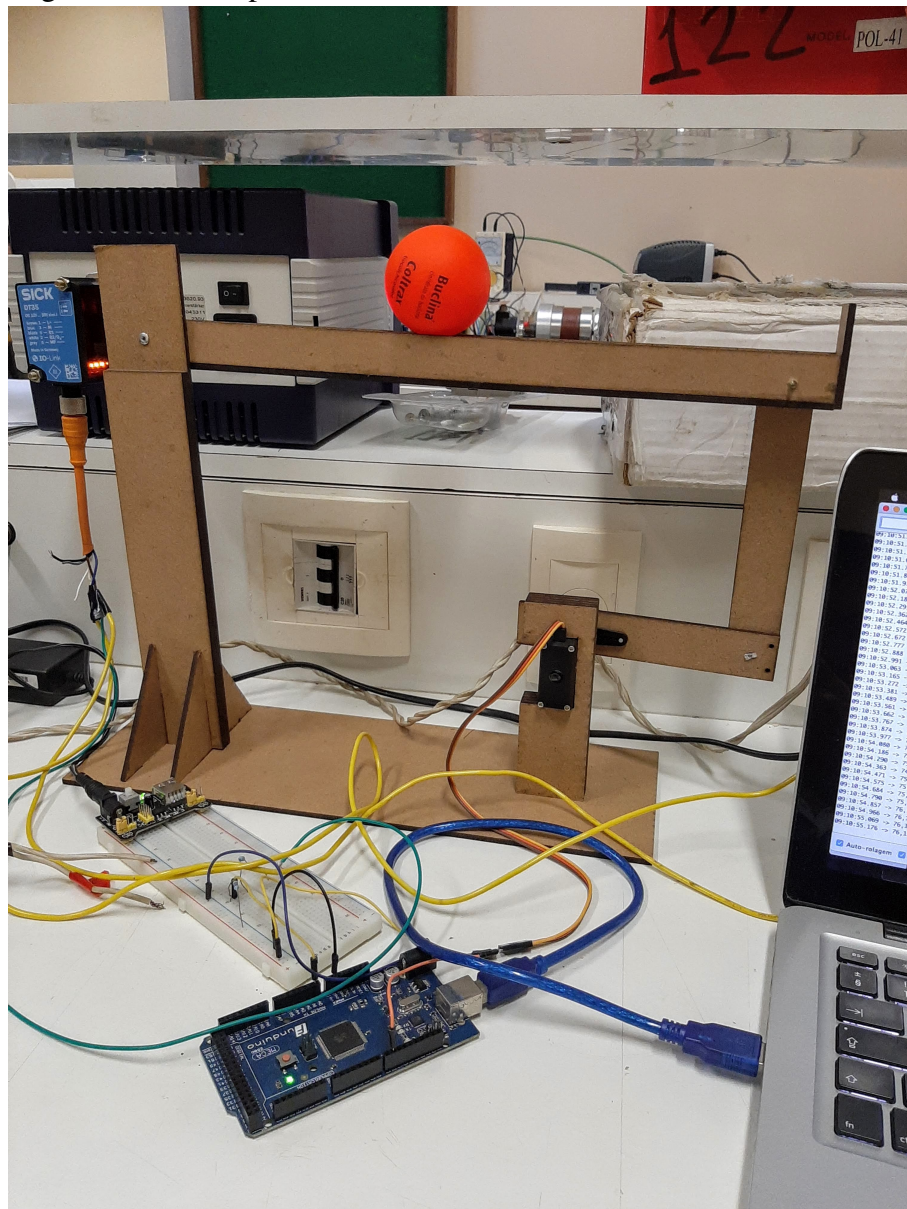
Fonte: Wieneke e White (2011).

Após análise dos diferentes métodos de construção, observou-se que o modelo da Figura 3 permite que o sistema seja controlado de forma mais suave, pois a inclinação do motor, quando transferida para a barra, é reduzida de acordo com a proporção entre o tamanho do braço do servo e o tamanho da barra, permitindo maior precisão na inclinação da barra. Por isso, optou-se pelo modelo com extremidade fixa.

A barra deve ser leve para que o servomotor possa movimentá-la facilmente, deve permitir que a bola role sem escorregamento e deve suportar o peso do sensor, que será acoplado em uma das extremidades, e o peso da bola. Para a construção do protótipo, foi utilizada

uma Placa de Fibra de Média Densidade, do inglês *Medium-Density Fiberboard* (MDF) de 3 milímetros. As peças do protótipo foram desenhadas no programa Adobe Illustrator, usinadas em uma máquina de corte a laser de Comando Numérico Computadorizado (CNC) da Oficina Digital do Departamento de Arquitetura, Urbanismo e Design (DAUD) da Universidade Federal do Ceará (UFC), e posteriormente coladas. Elas podem ser vistas em detalhe no Apêndice A. As partes móveis foram unidas por parafusos de aço. O resultado final pode ser visto na Figura 6:

Figura 6 – Protótipo



Fonte: O Autor.

Como pode ser observado, as peças tem um desenho simples, podendo ser facilmente replicadas, caso se deseje fazer outros protótipos. O material utilizado pode variar, e alguns

modelos encontrados na literatura são feitos de acrílico, alumínio, ou uma combinação dos dois, dependendo da função da peça.

Na Figura 6, pode-se notar que o protótipo montado, com todos os componentes conectados, ocupa pouco espaço, podendo ser facilmente transportado ou conectado a um computador numa bancada didática. Além disso, uma placa pode ser contruída de forma a fazer todas as conexões entre servo, sensor e microcontrolador, eliminando a necessidade da *protoboard*, deixando o sistema todo ainda mais organizado.

## 2.2 Escolha do Sensor

Uma grande dificuldade dentro de projetos de engenharia é encontrar um sensor que possua boa precisão para a aplicação desejada, baixo nível de ruídos e baixo custo.

No trabalho de Rosales (2004) várias versões de potenciômetros lineares usando bola e trilhos condutores foram testadas. Essa é a solução exibida na Figura 1. Um trilho conduz uma corrente constante, o que gera uma tensão que aumenta linearmente ao longo do mesmo. A tensão do outro trilho é medida para determinar a posição da bola à medida que esta rola ao longo dos trilhos. Este método já foi utilizado em diversos trabalhos (KESHMIRI *et al.*, 2012; PETROVIC *et al.*, 2002; ROSALES *et al.*, 2004). De acordo com Rosales *et al.* (2004), esse tipo de medição tem baixo custo. Porém, Ito (2004) afirma que algumas desvantagens são o ruído produzido pelo contato entre bola e superfície condutora e a perda de sinais devido a cavidades e irregularidades dos trilhos.

Outra alternativa são sensores baseados em aquisição de sinais refletidos, como sensores infravermelhos, ultrassônicos, laser e câmeras.

Os sensores infravermelhos são não lineares, e Ito (2004) afirma que sistemas usando esse tipo de sensor necessitariam de uma série de ganhos. Um benefício é a detecção sem contato. Seu alcance, no entanto, é bem limitado, e sua precisão é baixa quando o objeto é esférico.

Assim como os sensores infravermelhos, os sensores ultrassônicos, câmeras e laser não necessitam de contato. O sensor ultrassônico pode ser barato, mas nesse caso apresenta bastante ruído e pode ter dificuldades na detecção de objetos esféricos, e por isso essa alternativa foi descartada no trabalho de Šitum e Petrić (2008). Já Ramos *et al.* (2016) teve bons resultados apesar dos ruídos de medição.

Hasanzade *et al.* (2008) utilizou uma câmera digital e Frank *et al.* (2015) utilizou a câmera de um *tablet* para medir a posição da bola. Nos dois casos a precisão foi um ponto

positivo, mas a capacidade de processamento das imagens do microcontrolador ou computador é um fator limitante. É possível que o tempo de amostragem seja muito grande e se torne insuficiente para promover o adequado controle da bola.

Sensores laser são outra possibilidade, mas não são fáceis de serem encontrados na literatura para esse tipo de aplicação. Esse fato se deve, provavelmente, ao alto custo das unidades, ou ao seu limitado alcance, quando o preço é mais baixo. O sensor laser DT35-B15851 da Sick foi utilizado nessa aplicação, pois estava disponível no laboratório do Grupo de Pesquisa em Automação, Controle e Robótica (GPAR) da UFC, onde este trabalho foi desenvolvido. O sensor pode ser visto na Figura 7 a seguir:

Figura 7 – Sensor laser DT35-B15851



Fonte: Sick (2019).

Ele conseguiu captar bem a posição das diferentes bolas testadas, independentemente do tamanho e cor das mesmas, ao longo de toda a rampa, mesmo com baixa luminosidade. Para luminosidade de 90% ele é capaz de captar objetos a 12.000 milímetros de distância. Ele mede 32 milímetros de largura, 42,7 milímetros de profundidade e 71,1 milímetros de altura. Sua conexão é realizada por um conector macho M12 de 5 pinos. É alimentado com tensão contínua entre 12 Volts e 30 Volts e sua tensão de saída varia linearmente entre 0 Volt e 10 Volts. A tensão

máxima de saída pode ser programada de acordo com a distância máxima que o objeto vai se posicionar do sensor, que é de 30 centímetros neste trabalho. Um divisor de tensão foi criado, de modo que a tensão do sensor é dividida pela metade antes de ser enviada ao microcontrolador. Esse divisor de tensão se faz necessário pois a placa de controle utilizada está limitada a fazer leituras analógicas de sinais entre 0 Volt e 5 Volts, podendo queimar caso receba tensões maiores.

### 2.3 Escolha do Motor

O servo motor TowerPro MG995 pode ser visto na Figura 8 a seguir:

Figura 8 – Servo motor TowerPro MG995



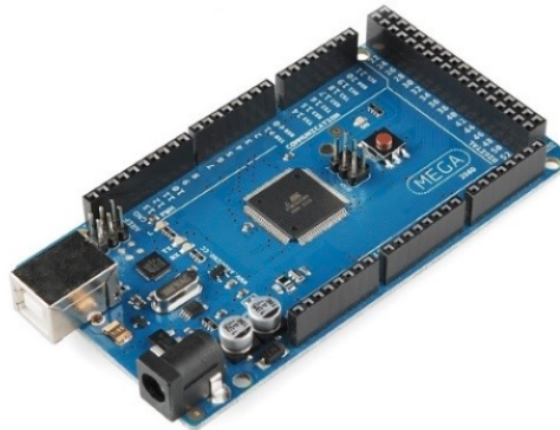
Fonte: FilipeFlop (2019b).

Este modelo foi escolhido por ter um preço acessível, ter um bom torque para a aplicação ( $9,4\text{kg}\cdot\text{cm}$  para um tensão de  $4,8\text{V}$ ), boa precisão, estabilidade, fácil controle e boa velocidade angular ( $0,17\text{s}/60\text{graus}$ ). Como a amplitude máxima de giro será de 40 graus (20 graus no sentido horário e 20 graus no sentido anti-horário), ele precisará de  $0,09\text{s}$  para fazer esse giro, caso seja necessário. O período de amostragem de  $0,1\text{s}$  permite que entre uma amostragem e outra o servo possa atuar de forma correta.

## 2.4 Placa de Controle

A placa Mega 2560 R3 pode ser vista na Figura 9 a seguir:

Figura 9 – Placa Mega 2560 R3



Fonte: FilipeFlop (2019a).

Esta placa foi escolhida para a aplicação devido ao baixo custo (versão open-hardware baseada na placa Arduino), bom microcontrolador (ATmega2560, clock de 16MHz) e por possuir sua própria IDE baseada na linguagem C, o que facilita bastante a programação e o controle do servo motor.

## 2.5 Bola

Uma bola oficial de tênis de mesa pode ser vista na Figura 10 a seguir:

Figura 10 – Bola de tênis de mesa utilizada no projeto



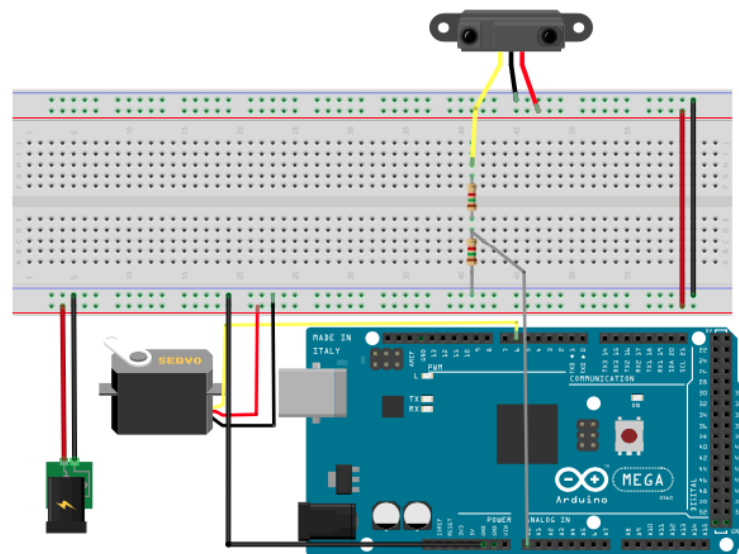
Fonte: JoolaBrasil (2019).

Esta bola feita de plástico foi escolhida devido à sua leveza e precisão na sua confecção. Esse tipo de bola tem medidas padronizadas de 40 milímetros de diâmetro e massa de 2,74 gramas.

## 2.6 Circuito Esquemático

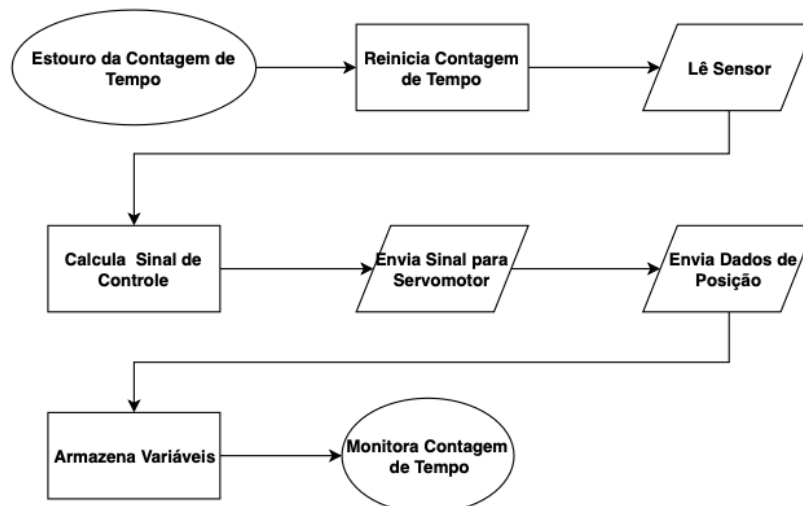
Na Figura 11, podemos ver o circuito esquemático e, na Figura 12, o fluxograma implementado na placa de controle:

Figura 11 – Circuito esquemático



Fonte: O Autor.

Figura 12 – Fluxograma do algoritmo implementado na placa de controle



Fonte: O Autor.

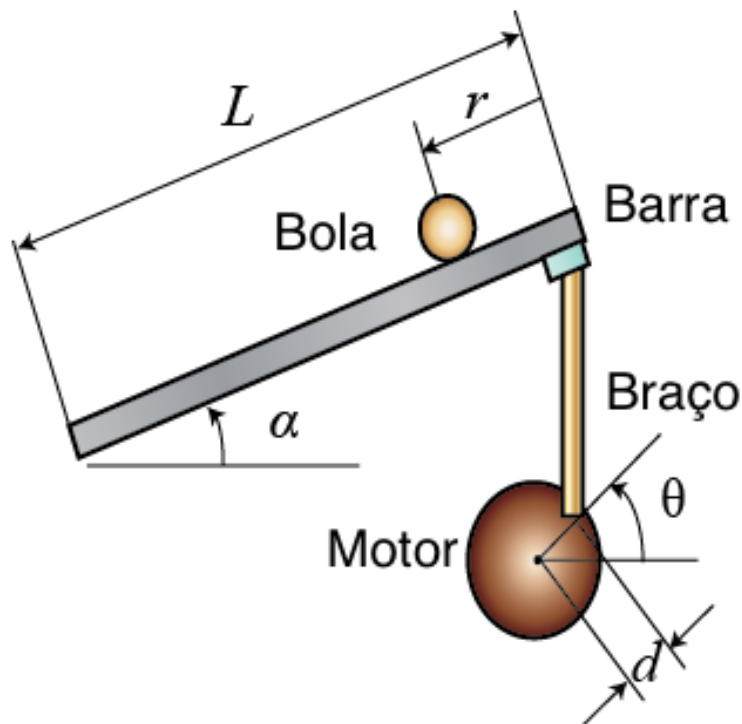


Este é o esquema de montagem do circuito utilizado no controle do servo motor. O sensor capta a posição da bola. A tensão é dividida pela metade, enviada para a entrada analógica A0 da placa de controle e convertida para centímetros. O controlador implementado calcula o sinal de controle, em graus, que por sua vez é enviado para o servomotor através da saída digital D9, movimentando a barra e, conseqüentemente, a bola.

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

O sistema Barra e Bola é apresentado na Figura 13:

Figura 13 – Modelo do sistema barra e bola



Fonte: Adaptado de Control Tutorials for Matlab and Simulink (2019).

Ele é composto de uma base, uma barra, um suporte para a barra, uma bola, um braço de alavanca e um motor. A barra é fixada ao suporte de um lado, e do outro é conectada ao braço de alavanca, que se movimenta de acordo com a rotação do motor, ao qual está fixado em sua extremidade inferior. A bola pode se mover livremente ao longo da barra, e sua aceleração é proporcional à inclinação da barra.

O objetivo é manter a bola na posição determinada pelo usuário. O controlador é responsável por alterar o ângulo da barra, que se inclina de acordo com o ângulo do motor.

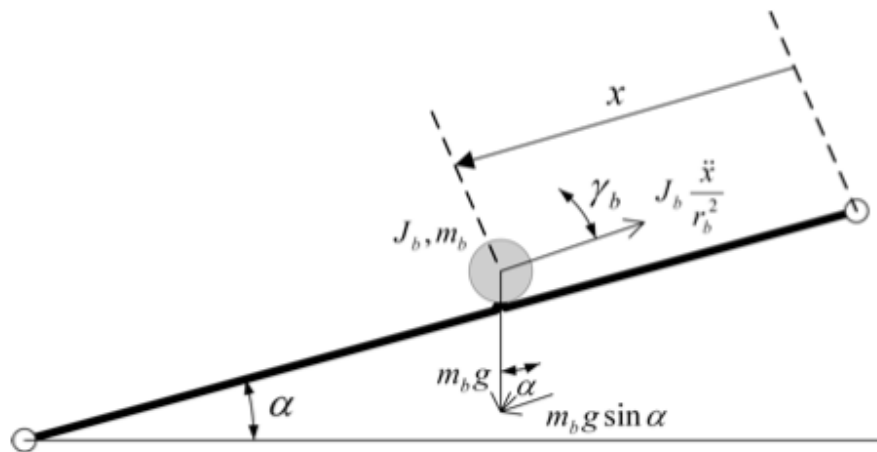
Uma propriedade importante desse sistema é que ele é instável em malha aberta, já que para uma entrada fixa (ângulo da barra), a saída aumenta indefinidamente (posição da bola) (OGATA, 2011). Portanto, faz-se necessária a utilização de um controle em malha fechada para que a bola se mantenha na posição desejada.

### 3.1 Modelagem Matemática do Sistema Físico Barra e Bola

Uma forma segura e de baixo custo que possibilita a análise do comportamento do sistema sem a necessidade de experimentos diretos é a criação de um modelo matemático. No entanto, vale ressaltar, segundo Coelho e Coelho (2004), que a qualidade do modelo é crucial na validade dos resultados obtidos através de simulações.

A dinâmica da bola está sujeita à ação da gravidade. Vamos considerar que bola rola pelo plano inclinado sem deslizamento, e vamos usar as leis de Newton para descobrir a função de transferência que associa o ângulo de inclinação da barra com a posição da bola. O diagrama de corpo livre do sistema pode ser visto na Figura 14 abaixo:

Figura 14 – Diagrama de corpo livre do sistema barra e bola



Fonte: Quanser Inc. (2011b).

Na Tabela 1, os parâmetros do sistema são descritos:

Tabela 1 – Parâmetros do Sistema Barra e Bola

Símbolo	Descrição	Valores
$m$	Massa da bola	2.74g
$R$	Raio da bola	20mm
$d$	Braço de Alavanca	12cm
$g$	Aceleração da gravidade	9,8m/s <sup>2</sup>
$L$	Comprimento da rampa	36cm
$I_{cm}$	Momento de Inércia	$7,3 \times 10^{-7} \text{Kgm}^2$
$r$	Posição da bola	
$\alpha$	Inclinação da rampa	
$\theta$	Inclinação do motor	

Fonte: O Autor.

No eixo  $x$ , no sentido da rampa, temos as seguintes forças atuando:

$$mg \sin \alpha - f_s = m\ddot{r} \quad (3.1)$$

No eixo  $k$ , perpendicular ao plano da rampa, temos o torque na bola:

$$f_s R = I_{cm} \beta \quad (3.2)$$

em que  $\beta$  é a aceleração angular da bola.

Além disso, temos a seguinte relação entre aceleração linear e angular:

$$\ddot{r} = R\beta \quad (3.3)$$

Substituindo as Equações 3.2 e 3.3 na Equação 3.1, temos:

$$mg \sin \alpha - \frac{I_{cm} \ddot{r}}{R^2} = m\ddot{r} \quad (3.4)$$

Isolando  $\ddot{r}$ , temos:

$$\ddot{r} = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{I_{cm}}{R^2} + m} \quad (3.5)$$

Linearizando a Equação 3.5 em torno do ângulo  $\alpha = 0$  da barra, considerando que a inclinação será pequena, temos:

$$\ddot{r} = \frac{mg\alpha}{\frac{I_{cm}}{R^2} + m} \quad (3.6)$$

Quando o motor gira de um ângulo  $\theta$ , a rampa gira de um ângulo  $\alpha$  e o braço sobe uma certa altura  $h$ . Então temos a seguinte relação:

$$h = d \sin \theta = L \sin \alpha \quad (3.7)$$

Considerando que a inclinação será pequena, o seno do ângulo é aproximadamente igual ao ângulo em radianos, do qual tiramos a seguinte relação:

$$\alpha = \frac{d}{L} \theta \quad (3.8)$$

Substituindo a Equação 3.8 na Equação 3.6, temos:

$$\ddot{r} = \frac{mg \left( \frac{d}{L} \theta \right)}{\frac{I_{cm}}{R^2} + m} \quad (3.9)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na Equação 3.9 e rearranjando os termos, encontramos a Função de Transferência entre a posição da bola e o ângulo do motor:

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \left( \frac{mg \left( \frac{d}{L} \right)}{\frac{I_{cm}}{R^2} + m} \right) \frac{1}{s^2} \quad (3.10)$$

Para o caso particular em que a bola é oca, temos que seu momento de inércia é dado por:

$$I_{cm} = \frac{2}{3}mR^2 \quad (3.11)$$

Substituindo o Equação 3.11 na Equação 3.10, temos:

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \left( \frac{3g d}{5 L} \right) \frac{1}{s^2} \quad (3.12)$$

Substituindo os valores dos parâmetros dados na Tabela 1 na Equação 3.12, obtemos a seguinte Função de Transferência:

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{1,96}{s^2} \quad (3.13)$$

Da Equação 3.13 observamos que a Função de Transferência do sistema possui um duplo integrador, o que torna o sistema instável em malha aberta e marginalmente estável em malha fechada. Caso seja aplicada uma entrada em degrau, a resposta do sistema em malha aberta será parabólica, e do sistema em malha fechada será senoidal (NISE, 2013).

Uma série de considerações e simplificações foram feitas para que se pudesse linearizar esse sistema. Supomos que não ocorra deslizamento entre a bola e a rampa, e que a bola nunca perde contato com a rampa. A bola não gira sobre uma superfície plana, mas sim sobre dois trilhos, tornando sua rotação um pouco mais lenta. A resistência do ar foi desconsiderada. Supomos que para qualquer inclinação da rampa, a bola se mova. Na prática, nem sempre isso acontece. Há uma zona morta na qual o motor atua, mas a bola fica imóvel. Essas não linearidades não foram consideradas no projeto do controlador. O ganho encontrado, na prática, deve ser menor, já que os fatores desconsiderados deixariam o movimento da bola mais lento.

## 3.2 Modelagem Experimental

Segundo Kara e Eker (2004), há casos em que se torna difícil a obtenção de um modelo matemático, seja por conta da indisponibilidade dos parâmetros ou da dependência desses

ao tempo ou a condições de operação. Nesses casos, são utilizados métodos de identificação de sistemas. A identificação de um sistema é composta por três etapas: determinação da estrutura, estimação dos parâmetros e validação do modelo (COELHO; COELHO, 2004).

O teste de resposta ao degrau é um dos principais métodos de identificação. O comportamento da saída fornece os dados para a criação da função de transferência. Essa técnica é utilizada em sistemas de primeira e segunda ordens. Para sistemas de ordens mais altas ela não é adequada, já que o sinal degrau é muito pobre na sua composição de frequências (COELHO; COELHO, 2004). O tempo de amostragem utilizado na aquisição de dados é um fator que merece atenção. A escolha desse tempo influencia diretamente na qualidade da identificação (CARVALHO *et al.*, 2009; MARIANO *et al.*, 2006).

Foi realizado um ensaio de malha aberta através da resposta ao degrau, em que o servo motor foi inclinado de 15 graus. A partir daí foi obtido um gráfico da posição da bola em função do tempo. Como foi visto na Seção 3.1 que a forma geral do modelo matemático do sistema é uma constante sobre dois integradores ( $K/s^2$ ), basta achar a constante que melhor se adequa à curva obtida experimentalmente.

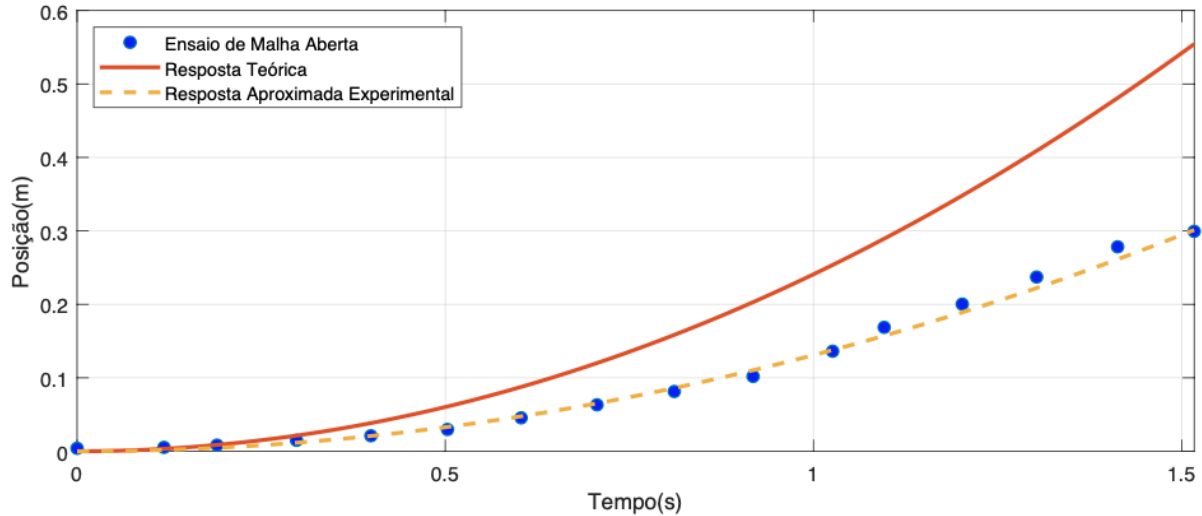
Usando ferramentas de ajuste de curvas chegamos ao valor de  $K = 1,065$ . Daí temos que a função de transferência encontrada experimentalmente é

$$G(s) = \frac{1,065}{s^2} \quad (3.14)$$

### 3.3 Resultados da Modelagem

Os gráficos de resposta ao degrau do modelo teórico e experimental, além do ensaio de malha aberta são apresentados na Figura 15:

Figura 15 – Identificação do sistema em malha aberta

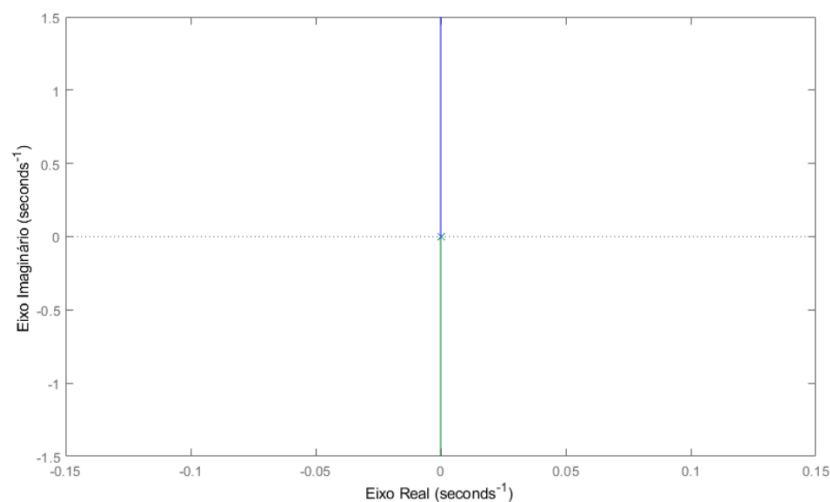


Fonte: O Autor.

Observa-se que o modelo Experimental é o que melhor representa o sistema real. Esse resultado era esperado, já que na modelagem teórica uma série de fatores e informações do sistema foi desconsiderada para se chegar naquela função de transferência. Desse modo, para fazer o projeto do Controlador RST, o modelo Experimental foi o escolhido.

Na Figura 16, podemos ver o lugar das raízes do sistema em malha aberta:

Figura 16 – Lugar das raízes do sistema em malha aberta



Fonte: O Autor.

Como os dois polos estão na origem, à medida que o ganho aumenta, as raízes do sistema em malha fechada percorrem o eixo imaginário até o infinito. Isso significa que, para qualquer ganho, o sistema nunca se estabiliza em malha fechada. Daí a importância de projetar um controlador para essa planta.

## 4 PROJETO DOS CONTROLADORES

Como foi visto no Capítulo 3 a modelagem da planta Barra e Bola mostra a necessidade de um sistema de controle para que a bola possa permanecer estável na posição desejada.

Desta forma, neste capítulo será apresentado o projeto do controlador de posição.

### 4.1 Critérios de Projeto

Como visto no Capítulo 3, a planta possui um duplo integrador, ou seja, é um sistema do tipo 2. Sabe-se que para esse tipo de sistema em malha fechada, o erro será nulo tanto para entrada em degrau como para entrada em rampa (OGATA, 2011).

Para este projeto, os seguintes critérios de desempenho foram escolhidos: tempo de assentamento  $T_s(2\%) < 5$  segundos e ultrapassagem percentual máxima  $UP\% < 25\%$ .

Temos as seguintes Equações 4.1 e 4.2 para tempo de assentamento(2%)  $T_s$  e coeficiente de amortecimento  $\zeta$  (NISE, 2013):

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (4.1)$$

$$\zeta = \frac{-\left(\ln \frac{UP\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{UP\%}{100}\right)^2}} \quad (4.2)$$

em que  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida.

Das Equações 4.1 e 4.2, considerando  $T_s = 4$  segundos e sobressinal  $UP\% = 20\%$ , achamos:  $\zeta = 0,4559$  e  $\omega_n = 2,1932$  rad/s.

A equação canônica de segunda ordem é dada por (DORF; BISHOP, 2012):

$$G_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.3)$$

Substituindo os valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  na Equação 4.3, achamos a Equação:

$$G_m(s) = \frac{4,81}{s^2 + 2s + 4,81} \quad (4.4)$$

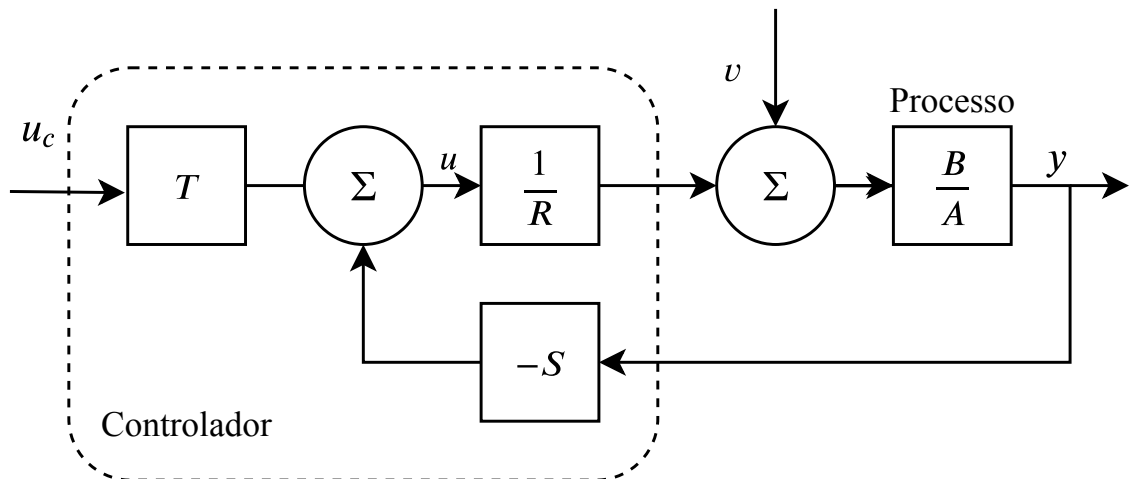
que será a Equação de Referência a partir da qual calcularemos os polinômios  $R$ ,  $S$  e  $T$ .



## 4.2 Sobre o Controlador RST

O controlador RST utiliza a técnica de alocação de polos. A estrutura canônica do controlador digital RST é representada na Figura 17:

Figura 17 – Diagrama de blocos de um controlador geral de dois graus de liberdade



Fonte: O Autor.

Esta estrutura tem dois graus de liberdade, ou seja, os filtros digitais R e S são projetados para alcançar a performance desejada de regulação e o filtro digital T é projetado em seguida para atingir a performance desejada de rastreamento (LANDAU, 1998). Os dois graus de liberdade permitem que tanto o sinal de referência como de saída do sistema possam ser tratados de forma independente (DOYLE *et al.*, 2013).

Como o polinômio  $S(q)$  é diferente de  $T(q)$ , essa estrutura tem como vantagem separar o acompanhamento das mudanças de referência do tratamento da rejeição de distúrbios e das variações nos parâmetros (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1995). Também pode-se acrescentar a condição de que o sinal de controle não oscile excessivamente devido a erros de medição (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1995).

## 4.3 Projeto do Controlador RST

A partir da Figura 17 acima, a planta pode ser descrita assim:

$$Ay(t) = B(u(t) + v(t)) \quad (4.5)$$

em que  $y$  é a saída,  $u$  é a entrada do processo e  $v$  é uma perturbação.

Um controle linear geral pode ser descrito da seguinte forma:

$$Ru(t) = Tu_c(t) - Sy(t) \quad (4.6)$$

Os polinômios  $A, B, R, S$  e  $T$  podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-na} \\ B &= b_1q^{-1} + \dots + b_n bq^{-nb} \\ R &= 1 + r_1q^{-1} + \dots + r_n r q^{-nr} \\ S &= s_0 + s_1q^{-1} + \dots + s_n s q^{-ns} \\ T &= 1 + t_1q^{-1} + \dots + t_n t q^{-nt} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Manipulando as Equações 4.5 e 4.6 temos as seguintes expressões:

$$y(t) = \frac{BT}{AR+BS}u_c(t) + \frac{BR}{AR+BS}v(t) \quad (4.8)$$

$$u(t) = \frac{AT}{AR+BS}u_c(t) - \frac{BS}{AR+BS}v(t) \quad (4.9)$$

O polinômio característico em malha fechada é:

$$AR + BS = A_c \quad (4.10)$$

O polinômio  $A_c$  será especificado de modo a satisfazer os requisitos do projeto, como sobressinal, tempo de acomodação e esforço de controle. Ele representa os polos desejados em malha fechada. Conhecendo-se os polinômios  $A, B$  e  $A_c$ , pode-se montar a chamada *Equação Diofantina*. Esse tipo de equação sempre tem solução se os polinômios  $A$  e  $B$  não tem fatores em comum. Resolvendo essas Equações achamos os coeficientes dos polinômios  $R$  e  $S$ .

A malha fechada do sistema pode ser escrita assim:

$$A_m y_m(t) = B_m u_c(t) \quad (4.11)$$

em que  $G_m = B_m/A_m$  é o modelo de referência desejado.

Logo, das Equações 4.8, 4.9 e 4.11 temos:

$$\frac{BT}{AR+BS} = \frac{BT}{A_c} = \frac{B_m}{A_m} \quad (4.12)$$

De acordo com Åström e Wittenmark (1995), existem alguns casos especiais que podem ser usados para calcular os parâmetros do controlador: *Todos os Zeros são cancelados* ou

*Nenhum Zero é Cancelado.* Para cancelar os zeros, é importante que os zeros do sistema sejam bem amortecidos. Caso contrário, o controlador possuirá polos pouco amortecidos, provocando um sinal de saída muito oscilatório.

Discretizando com um segurador de ordem zero a função de transferência encontrada na modelagem experimental da planta (Equação 3.14) para um tempo de amostragem  $T_a = 0,1s$ , temos:

$$G(q) = \frac{0,005325q + 0,005325}{q^2 - 2q + 1} = \frac{0,005325(q + 1)}{q^2 - 2q + 1} \quad (4.13)$$

O zero do sistema está em  $-1$ , o que significa que ele possui  $\zeta = 0$ , ou seja, nenhum amortecimento, impossibilitando o cancelamento desse zero.

Já que não vamos eliminar o zero do polinômio  $B$ , ele permanece como um termo de  $B_m$ :

$$B_m = BB'_m \quad (4.14)$$

O polinômio  $A_m$  faz parte do polinômio característico  $A_c$ :

$$A_c = A_mA_0 \quad (4.15)$$

A Equação Diofantina fica:

$$AR + BS = A_0A_m \quad (4.16)$$

O polinômio  $T$  pode ser encontrado a partir da manipulação das Equações 4.12, 4.14 e 4.15:

$$T = B'_mA_0 \quad (4.17)$$

Para que a Equação Diofantina não tenha infinitas soluções, devemos aplicar as chamadas condições de compatibilidade. Algumas restrições surgem devido ao fato de que o sistema discreto obedece o princípio da causalidade. Restringindo o grau dos polinômios, faz-se necessário que:

$$\deg S \leq \deg R \quad (4.18)$$

$$\deg T \leq \deg R$$

Aplicando as condições de causalidade à Equação 4.10, temos:

$$\deg R = \deg A_c - \deg A \quad (4.19)$$

Para achar uma solução única, deve-se considerar a solução de ordem mínima para a Equação Diofantina:

$$\deg A_c \geq 2\deg A - 1 \quad (4.20)$$

$$\deg A_m - \deg B'_m \geq \deg A = d_0$$

em que  $d_0$  é o número de polos excedentes no modelo da planta.

Quanto menor a ordem do controlador, menos níveis de atraso ele terá. Em ordem mínima, os polinômios  $R$ ,  $S$  e  $T$  têm a mesma ordem. Logo, conclui-se que a ordem dos polinômios será:

$$\deg A_m = \deg A$$

$$\deg B_m = \deg B \quad (4.21)$$

$$\deg A_0 = \deg A - 1$$

#### 4.4 Cálculo dos parâmetros do RST

Esta planta tem entrada em *radianos* e saída em *metros*. Para facilitar a compreensão dos resultados, podemos converter as unidades para entrada em *graus* e saída em *centímetros*. Para isso, multiplicamos a Equação 4.13 por:

$$H(q) = G(q) \frac{\pi rad}{180 graus} \frac{100 cm}{1 m} = \frac{0,009289q + 0,009289}{q^2 - 2q + 1} \quad (4.22)$$

Discretizando a função de transferência de referência  $G_m(s)$  da Equação 4.4 com um segurador de ordem zero e tempo de amostragem de 0,1s, temos:

$$G_m(q) = \beta \frac{b_0q + b_1}{q^2 + a_{m1}q + a_{m2}} = \frac{b_{m0}q + b_{m1}}{q^2 + a_{m1}q + a_{m2}} = \frac{0,02244q + 0,02099}{q^2 - 1,775q + 0,8187} \quad (4.23)$$

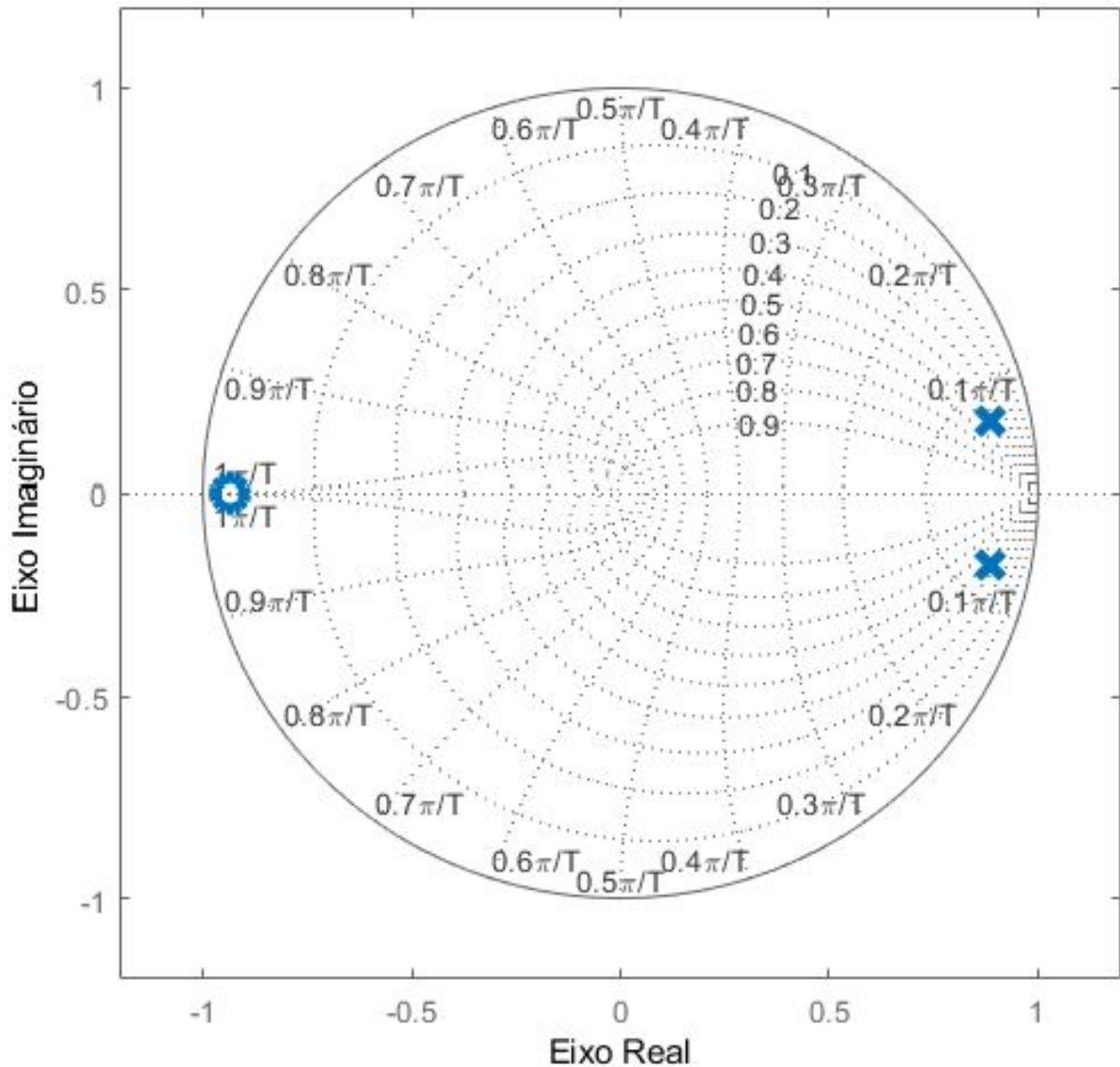
em que  $b_{m0} = \beta b_0$  e

$$\beta = \frac{1 + a_{m1} + a_{m2}}{b_0 + b_1} \quad (4.24)$$

de modo que o ganho estático é unitário.

Os polos do modelo de referência discretizado se localizam em  $p_1 = 0,8877 + 0,1755i$  e  $p_2 = 0,8877 - 0,1755i$  e o zero se localiza em  $z_1 = -0,9354$ . Podemos ver que os polos desejados do sistema de malha fechada possuem uma ordem de grandeza que revela a escolha adequada do tempo de amostragem. Na Figura 18, pode-se ver a localização dos polos e zero dentro do círculo unitário:

Figura 18 – Localização dos polos e zero do modelo de referência



Fonte: O Autor.

A Equação Diofantina 4.10 fica:

$$(q^2 + a_1q + a_2)(q + r_1) + (b_0q + b_1)(s_0q + s_1) = (q^2 + a_{m1}q + a_{m2})(q + a_0) \quad (4.25)$$

Após algumas manipulações algébricas chegamos às seguintes equações:

$$r_1 = \frac{a_0a_{m2}b_0^2 + (a_2 - a_{m2} - a_0a_{m1})b_0b_1 + (a_0 + a_{m1} - a_1)b_1^2}{b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2} \quad (4.26)$$

$$s_0 = \frac{b_1(a_0a_{m1} - a_2 - a_{m1}a_1 + a_1^2 + a_{m2} - a_1a_0) + b_0(a_{m1}a_2 - a_1a_2 - a_0a_{m2} + a_0a_2)}{b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2} \quad (4.27)$$

$$s_1 = \frac{b_1(a_1a_2 - a_{m1}a_2 + a_0a_{m2} - a_0a_2) + b_0(a_2a_{m2} - a_2^2 - a_0a_{m2}a_1 + a_0a_2a_{m1})}{b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2} \quad (4.28)$$

Além disso, da Equação 4.17, temos:

$$T(q) = \beta A_0(q) = \beta(q + a_0) \quad (4.29)$$

Substituindo os valores dos coeficientes da planta e do modelo de referência nas Equações acima, e fazendo  $a_0 = 0$  temos que:

$$\begin{aligned} S(q) &= s_0q + s_1 = 13,2633q - 10,9259 \\ R(q) &= r_0q + r_1 = q - 0,10149 \\ T(q) &= t_0q + t_1 = 2,3374q \end{aligned} \quad (4.30)$$

#### 4.5 Implementação do Controlador

O controlador RST pode ser implementado no sistema físico de diversas maneiras. Neste TCC, foi usada a placa de controle Mega 2560 R3.

O tempo de amostragem é um fator crucial para o bom funcionamento do sistema em malha fechada. Nesse trabalho, foi escolhido  $T_a = 0,1s$ , pois para esse valor, o sistema mecânico opera de forma suave e eficiente. Para tempos de amostragem menores, o servomotor, responsável por atuar inclinando a barra, trepida bastante, podendo até mesmo derrubar a bola da barra. Para tempos de amostragem maiores, a atuação fica muito lenta.

O sensor laser utilizado para a aquisição da posição da bola tem uma boa precisão e baixo nível de ruídos, de modo que não foi necessária a utilização de filtros.

Com os parâmetros calculados na Seção 4.4, podemos substituir os valores na Equação 4.6, obtendo a equação de diferenças, em que  $u$  é o sinal de controle em graus,  $u_1$  é o sinal de controle da amostra passada, *referencia* é a posição desejada,  $d$  é a posição atual da bola em centímetros e  $d_1$  é a posição da amostra passada:

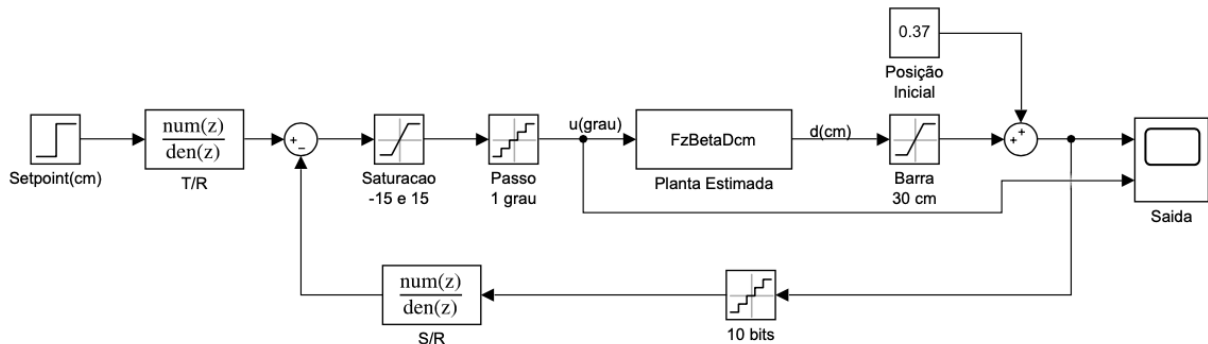
$$u = \frac{(-r_1u_1 + (t_0 + t_1)referencia - s_0d - s_1d_1)}{r_0} \quad (4.31)$$

O código implementado no microcontrolador pode ser visto no Apêndice B.

#### 4.6 Simulação Numérica no Simulink

O diagrama de blocos feito no programa Simulink é apresentado na Figura 19:

Figura 19 – Simulação no Simulink



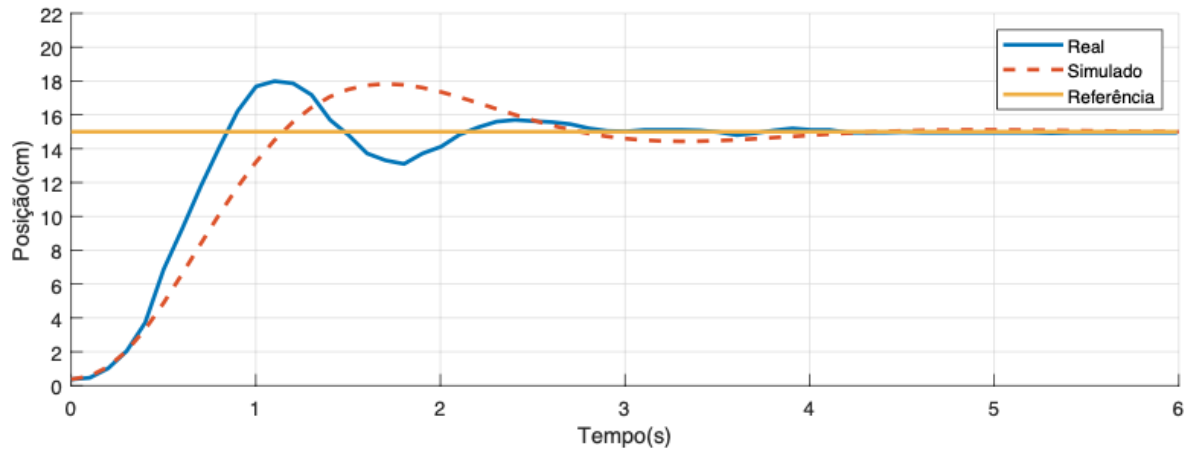
Fonte: O Autor.

Os blocos  $R$ ,  $S$  e  $T$  foram condensados em  $T/R$  e  $S/R$  para tornar a simulação causal. Foram aplicados blocos de *saturação*, um colocando limites máximo e mínimo de 20 graus e  $-20$  graus para limitar a ação de controle na região linear, e outro para limitar o movimento da bola, que oscila entre 0 centímetro e 30 centímetros, o comprimento da barra. Foi colocado um bloco para definir a posição inicial da bola. Foram colocados *quantizadores*: um para indicar o passo do servomotor, que foi de 1 grau para essa aplicação específica, e outro, para realizar a conversão digital-analógica da saída.

## 5 RESULTADOS

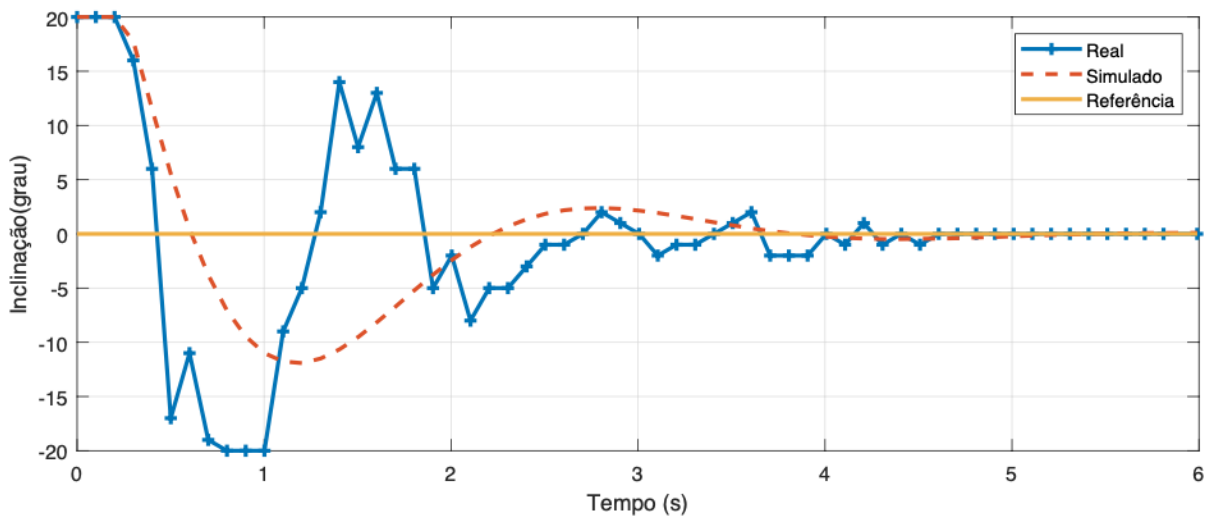
Nas Figuras 20 e 21 pode-se verificar as curvas dos sistemas real e simulado em malha fechada para uma entrada em degrau de 15 centímetros:

Figura 20 – Resposta do sistema real x simulação para referência de 15 centímetros



Fonte: O Autor.

Figura 21 – Ângulo de inclinação do servo motor para referência de 15 centímetros



Fonte: O Autor.

Pode-se observar que o sistema real se aproxima da simulação, provando que a equação de controle está cumprindo os pré-requisitos estabelecidos anteriormente. Na Tabela 2 são comparados tempo de assentamento ( $T_s$ ), sobressinal ( $UP\%$ ) e erro de regime permanente ( $E_{ss}$ ) dos sistemas:



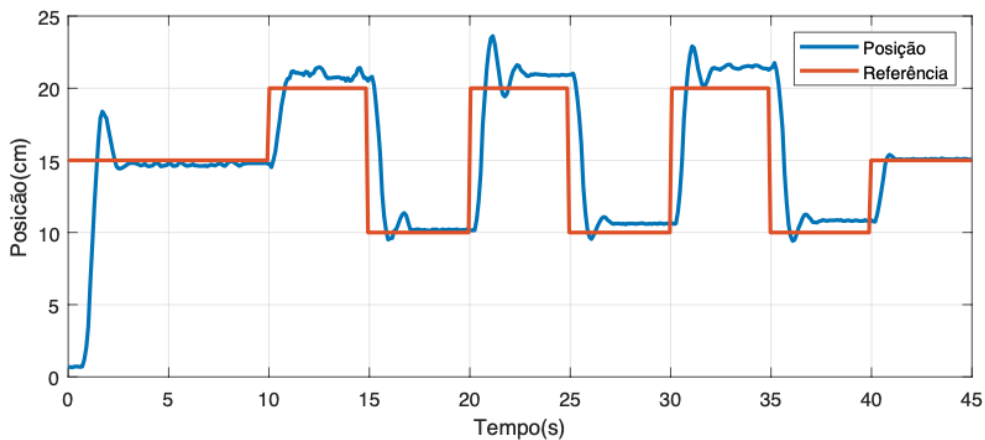
Tabela 2 – Parâmetros de resposta

Parâmetros	Real	Simulado	Desejado
$T_s(s)$	3	4	<5
$UP\%$	20	20	<25
$E_{ss}(cm)$	0,08	0	0

Fonte: O Autor.

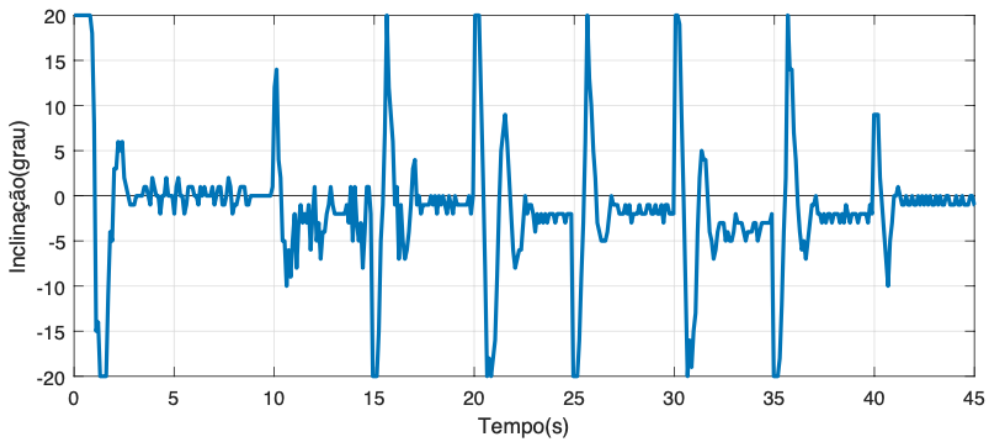
Também foi feito um ensaio trocando a Referência de 10 centímetros para 20 centímetros de 5 em 5 segundos como pode ser visto nas Figuras 22 e 23:

Figura 22 – Resposta ao degrau variando referência de 5 em 5 segundos



Fonte: O Autor.

Figura 23 – Sinal de controle variando referência de 5 em 5 segundos



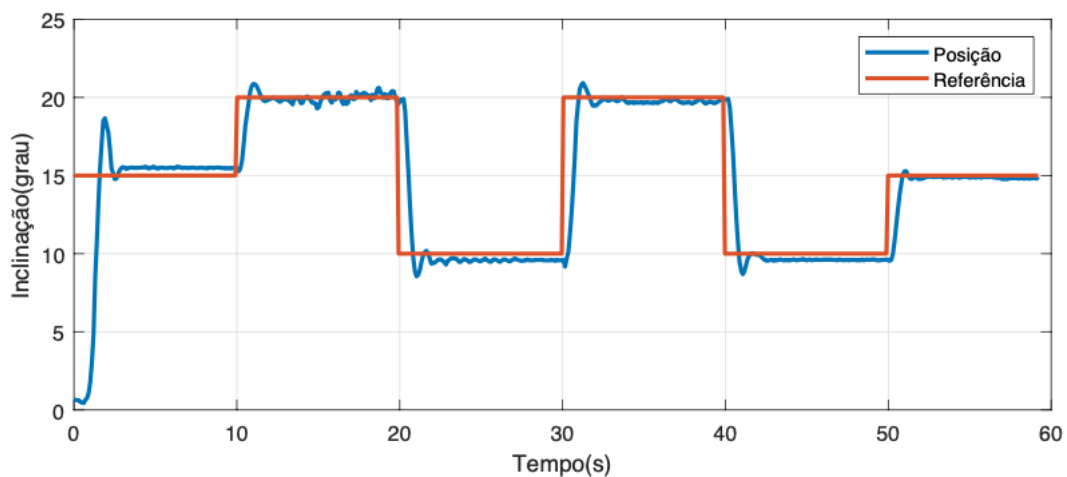
Fonte: O Autor.

Pode-se observar que o controlador opera melhor quando a Referência está em 10 centímetros e em 15 centímetros. Em 20 centímetros, o erro estático aumenta bastante e a bola não mantém uma posição tão estável. Isso provavelmente se deve ao fato de a bola estar mais próxima da extremidade móvel do sistema, que se encontra no fim da barra. Quanto mais

próxima a bola está do sensor, mais firme a barra está, pois nessa ponta, a extremidade está fixa. Pode-se notar que o sinal do controlador não está zerando nos momentos nos quais o erro estático permanece. Isso mostra que há uma "zona morta", uma região de não linearidade em que há uma inclinação na rampa, mas esta não é suficiente para fazer a bola se mover. Um integrador teria que ser adicionado ao controlador para que o sinal aumentasse com o passar do tempo, inclinando mais a rampa até que a bola saísse do lugar, podendo, desta forma, zerar completamente o erro estático.

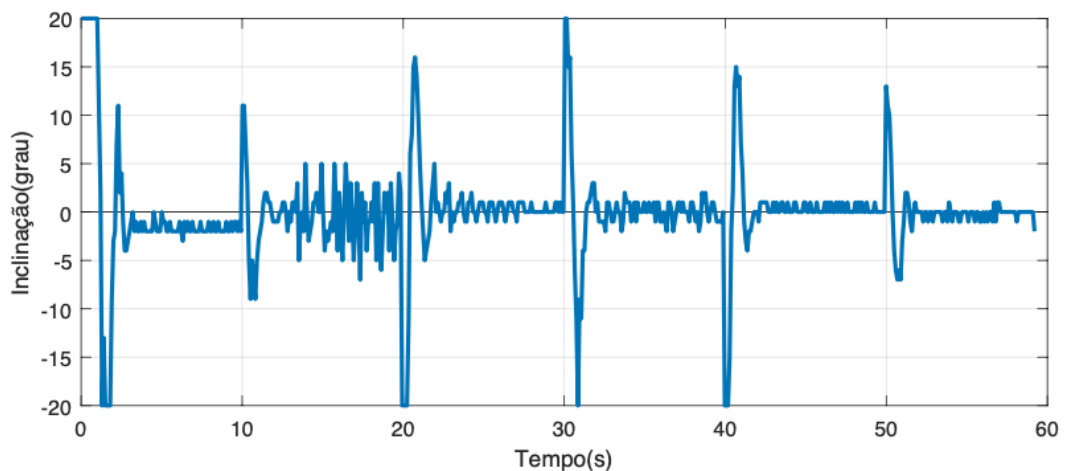
Também foi feito um ensaio trocando a Referência de 10 centímetros para 20 centímetros de 10 em 10 segundos como pode ser visto nas Figuras 24 e 25:

Figura 24 – Resposta ao degrau variando referência de dez em dez segundos



Fonte: O Autor.

Figura 25 – Sinal de controle variando referência de 10 em 10 segundos



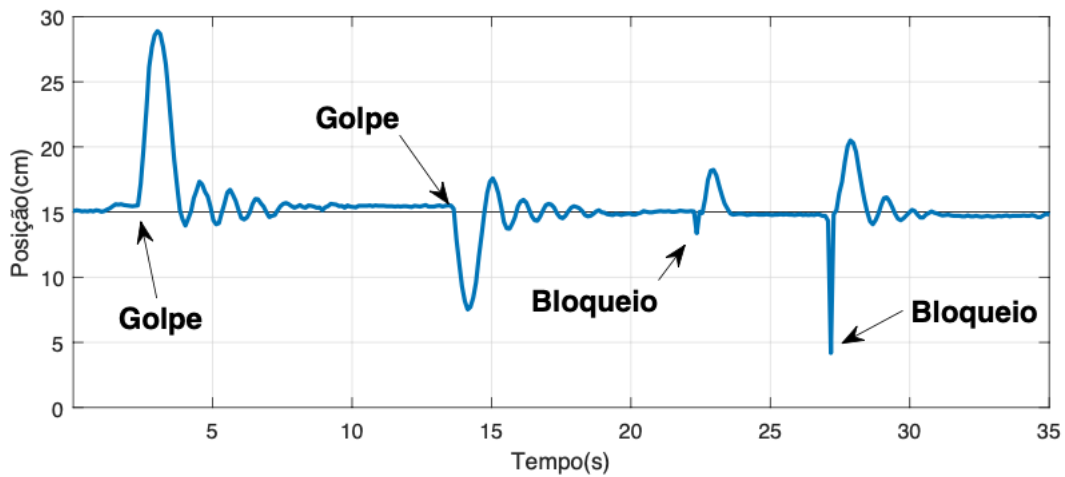
Fonte: O Autor.

Neste ensaio a resposta foi bem melhor que no ensaio anterior. Em parte, isso se

deve à troca menos constante de referência, o que permite que o sinal de controle e posição se acomodem melhor. Mas, devidos às não linearidades desse sistema, vale ressaltar que cada ensaio é único, então a resposta ao degrau sempre varia um pouco. Na maioria dos ensaios, a resposta está dentro dos critérios de performance.

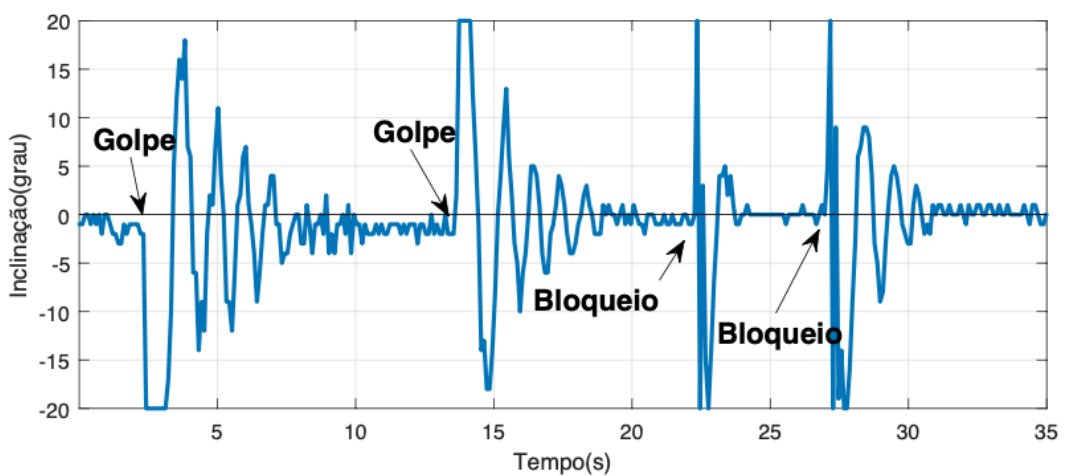
É importante que um sistema de controle possua a capacidade de rejeitar distúrbios eventuais que possam surgir (TEIXEIRA *et al.*, 2010). Nas Figuras 26 e 27 a seguir, foram aplicados dois tipos de distúrbio: golpe na bola (para frente e para trás) e bloqueio da luz do sensor (próximo da bola e próximo do sensor):

Figura 26 – Resposta do sistema durante a aplicação de distúrbios



Fonte: O Autor.

Figura 27 – Sinal de controle durante a aplicação de distúrbios



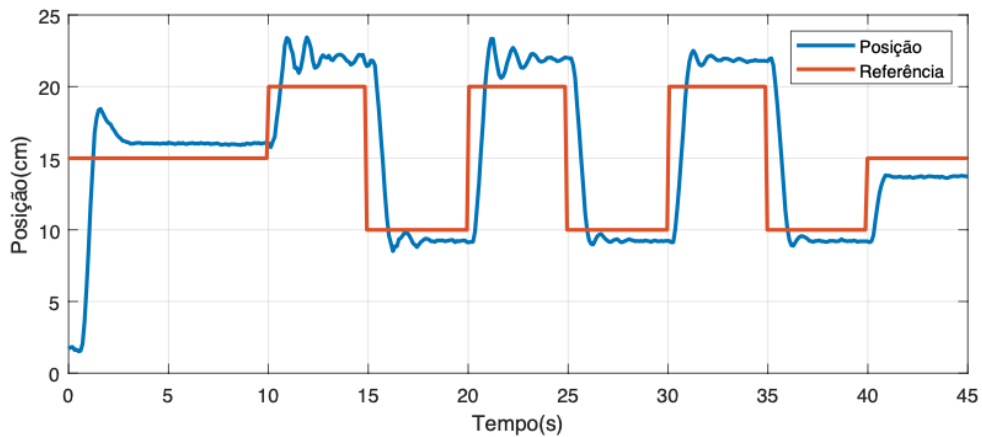
Fonte: O Autor.

Para os dois tipos de perturbação o sistema reagiu muito bem, retornando rapidamente para a referência de 15 centímetros. O sinal do controlador oscila bastante após os golpes e

demora um pouco para estabilizar. Oscila um pouco menos após os bloqueios, mesmo no caso no qual a barreira é colocada bem próxima ao sensor. O sinal do controlador saturou por pouco tempo, se mantendo na região linear, entre -15 graus e 15 graus, a maior parte do tempo.

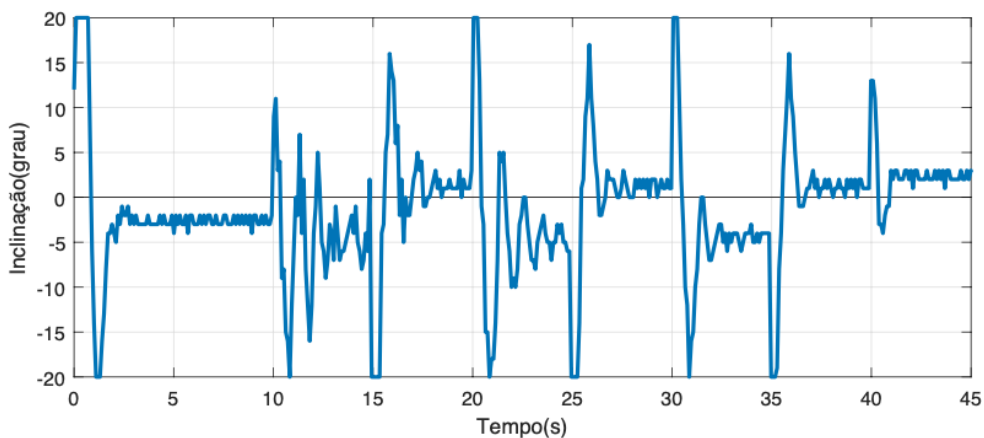
Também foi realizado um ensaio trocando a bola de tênis de mesa por uma bola um pouco maior e mais pesada. Isso vai tornar o sistema mais lento, pois o momento de inércia da nova bola é maior, tornando-a mais difícil de movimentar e parar. Este ensaio serve para testar a robustez do controlador quando a planta é alterada. A Referência é alterada de 10 centímetros para 20 centímetros de 5 em 5 segundos. O resultado pode ser observado nas Figuras 28 e 29:

Figura 28 – Mudança da planta - resposta ao degrau variando referência



Fonte: O Autor.

Figura 29 – Mudança da planta - sinal de controle variando referência



Fonte: O Autor.

O erro estático aumentou bastante, principalmente quando a Referência foi alterada para 20 centímetros, assim como foi observado no ensaio com a bola menor e mais leve. Ainda assim o controlador foi capaz de estabilizar a bola em menos de 5 segundos.

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Como mencionado no Capítulo 2, as etapas do projeto do Controlador RST para o sistema Barra e Bola foram: medição, atuação, planta didática e controle.

A medição foi precisa, graças ao sensor laser DT35-B15851 da Sick utilizado. Pequenos ruídos não geraram problemas, mas podem ser contornados com a implementação de filtros, caso se deseje.

O servomotor TowerPro MG995 funcionou bem para o tempo de amostragem e amplitude de rotação estabelecidos no controlador.

A planta didática foi bem montada. A leveza da estrutura permitiu que o servomotor atuasse suavemente, e sustentou bem o peso do sensor laser acoplado. Ao mesmo tempo, a fixação de algumas peças não estava firme, de modo que em alguns momentos a barra oscilava lateralmente, fora do plano vertical. Quanto mais próximo da extremidade móvel, maior era a instabilidade da barra. Um problema observado é que em algumas regiões da barra, a bola não rolava tão bem, devido a imprecisões no corte das peças. Esse fato também se deve a irregularidades nas bolas utilizadas.

O controlador RST apresentou resultados satisfatórios para os critérios estabelecidos, funcionando bem tanto para diferentes referências como na rejeição de perturbações.

Melhorias possíveis podem ser realizadas na construção da planta, utilizando materiais mais resistentes e um acoplamento mais firme. Em trabalhos futuros, a identificação do sistema pode ser feita em tempo real, permitindo que um controlador adaptativo possa ser implementado no sistema. Como o controlador RST é calculado a partir dos parâmetros da planta, ele pode ser ajustado a cada amostragem, tornando a atuação ainda mais precisa, contornando problemas devido à linearização da planta. Um observador de estados pode ser implementado para aumentar a robustez do sistema frente a perturbações ou interrupções na leitura do sensor devido a obstáculos ou falhas internas. Isso permitiria a utilização de sensores mais baratos, pois reduziria a sensibilidade a ruídos.

Outra melhoria possível é a criação de uma interface que facilite a interação entre usuário final e protótipo, permitindo alteração de critérios de performance e variação da referência enquanto o sistema está operando.

O trabalho mostrou-se satisfatório pois pôde-se aplicar na prática conceitos que só eram vistos em simulação, enriquecendo o conhecimento nessa área tão importante da Engenharia Elétrica que é o Sistema de Controle Dinâmico.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, S. A.; MENEZES, S. C. de; PINTO, V. P.; ALMEIDA, R. N. de C. Desenvolvimento de um protótipo didático de um robô quadbot explorador. In: . [S.l.: s.n.], 2018.
- ASSIS, W. O.; COELHO, A. D.; LIMA, F. Um programa didático para ensino de sistemas de controle em laboratório do curso de engenharia. In: **Anais: COBENGE 2008–XXXVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. [S.l.: s.n.], 2008.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive control**. 2. ed. New York: Dover Publications Inc., 1995.
- CARMO, E.; SILVA, O.; BARREIROS, J.; FERREIRA, A. Construção de protótipo didático: uma abordagem diferenciada no processo de ensino/aprendizagem de engenharia. **Proc. of XVI CBA**, p. 3445–3450, 2006.
- CARVALHO, J. S. F. d. *et al.* **Controle adaptativo aplicado em um robô manipulador de dois graus de liberdade planar**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, 2009.
- CHANG, Y.-H.; CHAN, W.-S.; CHANG, C.-W. Ts fuzzy model-based adaptive dynamic surface control for ball and beam system. **IEEE transactions on industrial electronics**, IEEE, v. 60, n. 6, p. 2251–2263, 2012.
- CHOUDHARY, M.; KUMAR, G. N. Eso based lqr controller for ball and beam system. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 49, n. 1, p. 607–610, 2016.
- COELHO, A. A. R.; COELHO, L. dos S. **Identificação de sistemas dinâmicos lineares**. Florianópolis: UFSC, 2004. 181 p. ISBN 85.328.0280-X.
- Control Tutorials for Matlab and Simulink. **Ball & Beam: System Modeling**. 2019. Disponível em: <<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=BallBeam&section=SystemModeling>>. Acesso em: 11 nov. 2019.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos, 12<sup>a</sup>**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- DOYLE, J. C.; FRANCIS, B. A.; TANNENBAUM, A. R. **Feedback control theory**. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- EATON, P. H.; PROKHOROV, D. V.; WUNSCH, D. C. Neurocontroller alternatives for "fuzzy" ball-and-beam systems with nonuniform nonlinear friction. **IEEE transactions on Neural Networks**, IEEE, v. 11, n. 2, p. 423–435, 2000.
- FILIFEFLOP. **Placa Mega 2560 R3**. 2019. Disponível em: <<https://www.filipeflop.com/produto/placa-mega-2560-r3-cabo-usb-para-arduino/>>. Acesso em: 01 nov. 2019.
- FILIFEFLOP. **Servo Motor TowerPro MG995**. 2019. Disponível em: <<https://www.filipeflop.com/produto/servo-towerpro-mg995-metalico/>>. Acesso em: 01 nov. 2019.
- FRANK, J. A.; GÓMEZ, J. A. D. G.; KAPILA, V. Using tablets in the vision-based control of a ball and beam test-bed. In: IEEE. **2015 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)**. [S.l.], 2015. v. 2, p. 92–102.

HASANZADE, I.; ANVAR, S. M.; MOTLAGH, N. T. Design and implementation of visual servoing control for ball and beam system. In: IEEE. **2008 5th International Symposium on Mechatronics and Its Applications**. [S.l.], 2008. p. 1–5.

IBRAHIM, D. **Microcontroller based applied digital control**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.

ITO, B. T. **Stabilizing the ball on beam system with analog feedback**. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 2004.

JAIN, P.; NIGAM, M. Real time control of ball and beam system with model reference adaptive control strategy using mit rule. In: IEEE. **2013 IEEE International Conference on Computational Intelligence and Computing Research**. [S.l.], 2013. p. 1–4.

JOOLABRASIL. **Bola de t nis de mesa Flash 40 3 Estrelas**. 2019. Disponível em: <<https://www.joolabrasil.com/bola-de-plastico-sem-costura-joola-flash40-3estrelas-caixa-com-6-unidade>>. Acesso em: 01 nov. 2019.

KARA, T.; EKER, I. Nonlinear modeling and identification of a dc motor for bidirectional operation with real time experiments. **Energy Conversion and Management**, Elsevier, v. 45, n. 7-8, p. 1087–1106, 2004.

KESHMIRI, M.; JAHROMI, A. F.; MOHEBBI, A.; AMOOZGAR, M. H.; XIE, W.-F. Modeling and control of ball and beam system using model based and non-model based control approaches. **International Journal on Smart Sensing & Intelligent Systems**, v. 5, n. 1, 2012.

LANDAU, I. The rst digital controller design and applications. **Control Engineering Practice**, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 155–165, 1998.

MAALINI, P. M.; PRABHAKAR, G.; SELVAPERUMAL, S. Modelling and control of ball and beam system using pid controller. In: IEEE. **2016 International Conference on Advanced Communication Control and Computing Technologies (ICACCCT)**. [S.l.], 2016. p. 322–326.

MACHADO, D. S.; RODRIGUES, M.; ALMEIDA, R. M. Platafo rma didática para treinamento em automa o de subesta es utilizando sistemas embarcados. In: **XX Congresso Brasileiro de Automática, Belo Horizonte - MG**. [S.l.: s.n.], 2014.

MARIANO, V.; SILVA, J. F. da; SILVA, J. B. d. A.; NASCIMENTO, J. F. d. L.; SILVA, J. C. B. da. Simula o da dinâmica e identifica o de parâmetros em uma mesa xy de máquina-ferramenta. **Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecânica**, v. 10, n. 1, p. 57–70, 2006.

MARTÍNEZ, D.; RUIZ, F. Nonlinear model predictive control for a ball&beam. In: IEEE. **2012 IEEE 4th Colombian Workshop on Circuits and Systems (CWCAS)**. [S.l.], 2012. p. 1–5.

MOREIRA, R. M.; MUNHOZ, H. B.; KAIRALLA, A. D.; VELOSO, G. F.; ALMEIDA, R. M. Plataforma didatica de baixo custo para experiências em laboratorios de controle. In: **XX Congresso Brasileiro de Automática, Belo Horizonte - MG**. [S.l.: s.n.], 2014.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 1285 p. ISBN 978-85-216-2136-2.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 801 p. ISBN 978-85-7605-810-6.

PAINES, P. d. A. **Desenvolvimento de Kit Didático de Geração de Energia Solar**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2014.

PETROVIC, I.; BREZAK, M.; CUPEC, R. Machine vision based control of the ball and beam. In: IEEE. **7th International Workshop on Advanced Motion Control. Proceedings (Cat. No. 02TH8623)**. [S.l.], 2002. p. 573–577.

QUANSER INC. **Quanser Ball and Beam**: User manual. Markham, Ontario, 2011.

QUANSER INC. **Quanser Student Workbook**: Ball and beam experiment for matlab/simulink users. Markham, Ontario, 2011.

RAMOS, J. dos S.; MACHADO, L. T.; NETO, A. F. dos S.; SANTOS, M. F. dos. Projeto de um sistema ball and beam para o ensino de controle automático. In: **Congresso Brasileiro de Automática, Vitória-ES**. [S.l.: s.n.], 2016.

ROSALES, E. A. **A ball-on-beam project kit**. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 2004.

ROSALES, E. A.; ITO, B. T.; LILIENKAMP, K. A.; LUNDBERG, K. H. An open-ended ball-balancing laboratory project for undergraduates. In: IEEE. **Proceedings of the 2004 American Control Conference**. [S.l.], 2004. v. 2, p. 1314–1318.

ROTHER-NEVES, M.; SILVA, O. F.; BARREIROS, J. A. L. Metodologia para a construção de protótipos didáticos para os cursos de controle e automação de sistemas. In: **Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. COBENGE**. [S.l.: s.n.], 2004.

SICK. **DT35-B15851 Sensor Data Sheet**. 2019. Disponível em: <[https://cdn.sick.com/media/pdf/5/55/055/dataSheet\\_DT35-B15851\\_1057653\\_en.pdf](https://cdn.sick.com/media/pdf/5/55/055/dataSheet_DT35-B15851_1057653_en.pdf)>. Acesso em: 05 nov. 2019.

ŠITUM, Ž.; PETRIĆ, J. A pneumatically actuated ball and beam system. **International Journal of Mechanical Engineering Education**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 36, n. 3, p. 225–234, 2008.

SONI, R. *et al.* Robust control of a ball and beam system through sliding mode controller. In: IEEE. **2018 International Conference on Emerging Trends and Innovations In Engineering And Technological Research (ICETIETR)**. [S.l.], 2018. p. 1–5.

TEIXEIRA, E. H. C. G. *et al.* **Controles típicos de equipamentos e processos industriais**. [S.l.]: Editora Blucher, 2010.

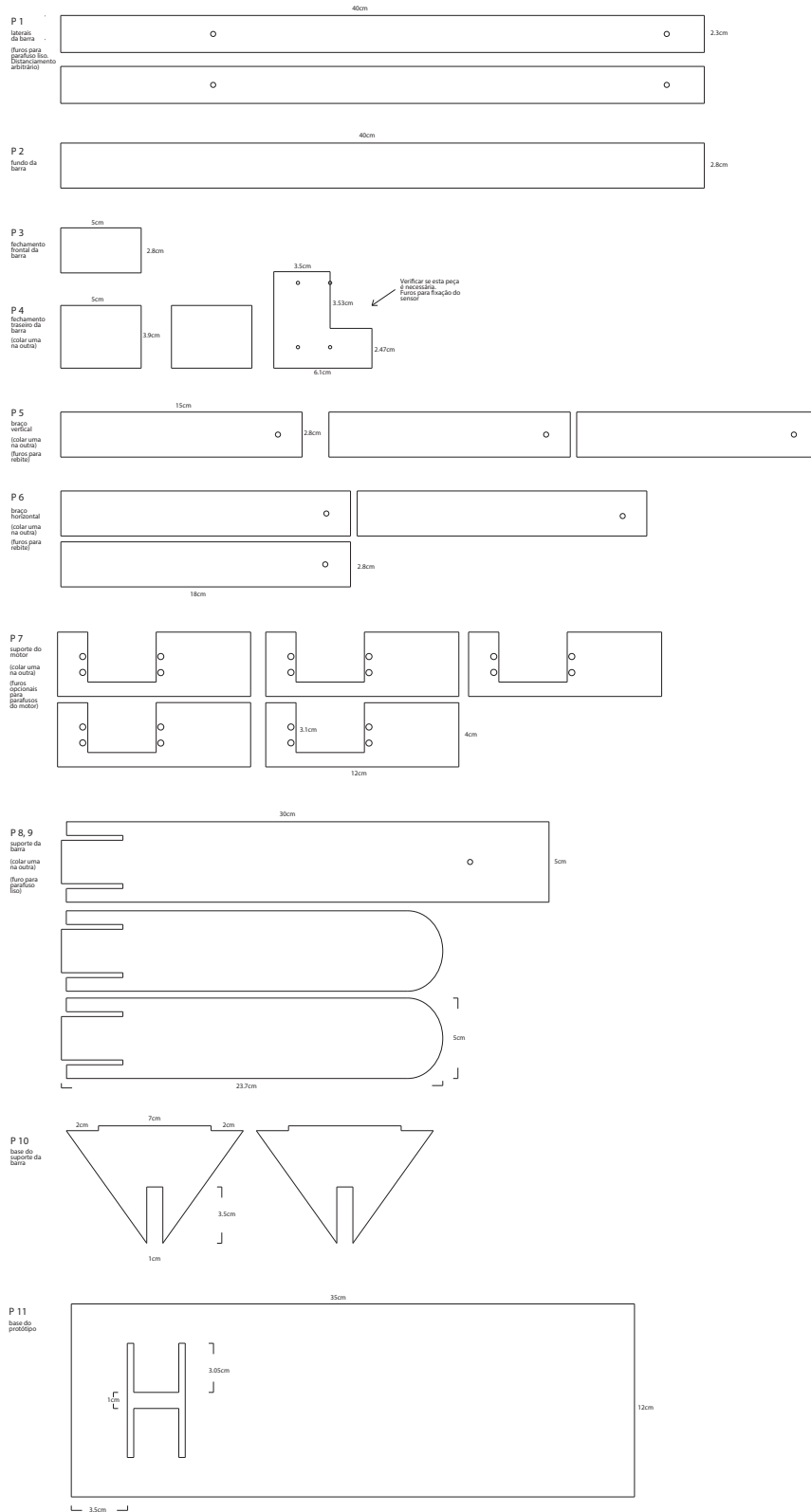
TEIXEIRA, H. T.; SALLES, J. L. F. Desenvolvimento de uma interface com o usuário no matlab para controle e monitoramento de processos para o laboratório de ensino de controle da ufes. COBENGE, 2009.

WIENEKE, J.; WHITE, W. N. A feasibility assessment of using ultrasonic sensor position feedback for a ball-and-beam apparatus. In: IEEE. **Proceedings of the 2011 American Control Conference**. [S.l.], 2011. p. 687–692.



## APÊNDICE A – DESENHOS DAS PEÇAS DO PROTÓTIPO

Figura 30 – Peças do protótipo



Fonte: O Autor.

**APÊNDICE B – CÓDIGO-FONTE GRAVADO NO MICROCONTROLADOR**

```
1 #include <Servo.h>
2 const int servoPin = 9;    //Servo Pin
3
4 float d = 0;
5 float d1 = 0;
6 float d2 = 0;
7 float u = 0;
8 float u1 = 0;
9 float u2 = 0;
10 float e = 0;
11 float de = 0;
12 float del1 = 0;
13 float se = 0;
14 float e1 = 0;
15 float e2 = 0;
16
17 //Variaveis de Tempo
18 unsigned long Timer;
19 unsigned long delta;
20
21
22 float setpoint = 15; //em cm
23 float alpha = 0;
24 int ServoOutput = 0;
25
26 float Ts = 0.1; //Periodo de Amostragem em segundos
27 int horizontal = 75;
28
29 //RST sem cancelamento de zeros A0=q+0 FzBetaDcm
```

```
30 //PO = 20; %Percentual Overshoot
31 //ta = 4; %Tempo de assentamento
32 const float s0 = 13.2633;
33 const float s1 = -10.9259;
34 const float t0 = 2.3374;
35 const float t1 = 0;
36 const float r0 = 1;
37 const float r1 = 0.10149;
38
39
40 unsigned long Inicio = millis();
41
42 Servo myServo; //Initialize Servo.
43
44 void setup() {
45
46     myServo.attach(servoPin); //Attach Servo
47
48     Serial.begin(9600);
49
50     pinMode(LED_BUILTIN, OUTPUT);
51
52 }
53
54 void loop() {
55     if(millis() - Timer >= Ts*1000)
56     {
57
58         Timer = millis(); //Tempo Atual
59
60         //posicao da bola
61         d = analogRead(A0)*30/969.0; //em cm
```

```
62     delta = Timer - Inicio;
63     e = setpoint - d; //Erro
64
65     //Calcula Sinal de Controle (entrada-cm saida-rad)
66     //RST
67     u = (-r1*u1+(t0+t1)*setpoint-s0*d-s1*d1)/r0;
68
69     //Saida do Servo. Barra horizontal em 75 graus
70     ServoOutput = u + horizontal;
71
72     //Limite de Inclinaçao do Servo - 20 graus
73     if (ServoOutput > 95) {ServoOutput = 95;}
74     if (ServoOutput < 55) {ServoOutput = 55;}
75
76     //Envia sinal para servo motor
77     myServo.write(ServoOutput);
78
79     //Angulo em graus
80     Serial.print( ServoOutput );
81     Serial.print(",");
82     //Serial.print("\t");    // prints a tab
83     Serial.print( d );
84     Serial.print(",");
85     //Posicao da bola
86     Serial.println( setpoint );
87
88
89     //armazena variaveis
90     //Ultimo erro = erro atual
91     e2 = e1;
92     e1 = e;
93     de1 = de;
```

```
94     u2 = u1;  
95     u1 = u;  
96     d1 = d;  
97  
98 }  
99 }
```