UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CRISTINA BOAZ DA MOTTA

TEOREMAS DE JAMES SOBRE A NÃO-DISTORÇÃO DE NORMAS EM ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÕES

FORTALEZA

2019

CRISTINA BOAZ DA MOTTA

TEOREMAS DE JAMES SOBRE A NÃO-DISTORÇÃO DE NORMAS EM ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M873t Motta, Cristina Boaz da.
Teoremas de James sobre a não-distorção de normas em espaços de Banach e aplicações / Cristina Boaz da Motta. – 2019.
48 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso.

1. Espaço c0. 2. Espaço l1. 3. Banach, Espaços de. 4. Teoria isomórfica. I. Título.
CDD 510

CRISTINA BOAZ DA MOTTA

TEOREMAS DE JAMES SOBRE A NÃO-DISTORÇÃO DE NORMAS EM ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico a Deus por ter me concedido o poder de realizar um sonho, que foi fazer um mestrado, no qual adquirir e compartilhei conhecimentos, estes que levarei eternamente em minha vida. Aos meus pais que muito se dedicaram e investiram em mim para que pudesse ter um estudo digno, pois sempre estiveram ao meu lado nos momentos mais difíceis da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que me deu forças ao longo dessa caminhada na universidade e por ter me capacitado para fazer essa dissertação. Aos meus pais que me apoiaram em tudo para que um dia pudesse me formar naquilo que desejava. Ao meu namorado Rodrigo por ter me ajudado nessa dissertação, e por sempre está presente nos momentos que mais precisei. Quero agradecer aos meus amigos que sempre que precisei estavam sempre por perto Josafá, Peron, Israel e Junior. Ao meu orientador Cleon da Silva Barroso, por me aceitar como aluna, pela dedicação em me orientar, pelo tema sugerido e por toda ajuda que sempre me prestou durante o mestrado. Aos professores que me ensinaram ao longo dessa jornada e que me mostraram a verdadeira essência no conhecimento adquirido. A Universidade Federal do Ceará (UFC) por ter aberto as portas do conhecimento para que pudesse aprender e crescer a cada dia. A CNPq pela ajuda financeira. Trabalho realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

"Um especialista em resolver problemas deve ser dotado de duas qualidades incompatíveis – uma imaginação inquieta e uma paciente obstinação."

(HOWARD W. EVES)

RESUMO

A presente dissertação de mestrado tem como objetivo mostrar que cópias isomórficas de c_0 e ℓ_1 em espaços de Banach são não-distorcíveis. Em outras palavras, geram cópias quasi-isométricas desses espaços. Na abordagem do tema principal dessa dissertação, tomaremos como base teórica os trabalhos científicos de vários autores, principalmente R.C. James (1964). A área de Análise Funcional fornece ferramentas primordiais para a resolução de vários problemas tanto na teoria do espaços de Banach quanto em diversas áreas do conhecimento. Daí a importância deste trabalho.

Palavras-chave: Espaço c_0. Espaço ℓ_1. Espaço de Banach.Teoria isomórfica.

ABSTRACT

This dissertation aims to show that isomorphic copies of c_0 and ℓ_1 in Banach spaces are undistorted. In other words, they generate quasi-isometric copies of these spaces. In approaching the main theme of this dissertation, we will take as theoretical base the scientific works of several authors, especially James (1964). The Functional Analysis area provides primary tools for solving various problems in both Banach space theory and various areas of knowledge. Hence the importance of this work.

Keywords: Space c_0. Space ℓ_1. Banach Space. Isomorphic Theory.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação iremos discorrer sobre um dos temas mais importantes na teoria dos espaços de Banach. O tema que trataremos versa sobre espaços de Banach que contém cópias isomorfas do espaço c_0 e ℓ_1. Todavia, não pretendemos embarcar naquilo que seria uma ousada tarefa, a saber, a tarefa de escrever um compêndio sobre o tema. A importância de estudar tais espaços vem do fato de que ambos c_0 e ℓ_1 possuem uma rica e bem definida estrutura do ponto de vista da teoria dos espaços de Banach. Portanto, é natural tentar inferir sobre a estrutura dos espaços de Banach que possuem subespaços isomorfos a c_0 ou ℓ_1. Por exemplo, um resultado clássico (GODEFROY, 2001, Corollary II.2) nessa linha garante se X é um espaço de Banach, separável e Y é um subespaço de X isomorfo a c_0, então Y é complementado em X, ou seja, a grosso modo podemos escrever $X \approx \mathrm{c}_0 \oplus Z$, para algum subespaço fechado Z de X. Um segundo exemplo interessante ilustra o impacto global quando se tem subespaços isomorfos a c_0 em que suas respectivas translações também são isomorfas a c_0. Trata-se do seguinte resultado (veja (GODEFROY, 2001, Corollary II.3)):

Teorema 1.0.1. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Se ambos Y e X/Y são isomorfos a c_0, então X é isomorfo a c_0.*

No Capítulo 2 reuniremos diversas proposições e corolários utilizados no decorrer do trabalho. Além disso, relembraremos diversas definições básicas e estabeleceremos algumas notações.

No Capítulo 3, enuncionaremos e provaremos o Teorema de James sobre a não-distorcionalidade do espaço c_0. A noção de distorção em espaço de Banach X versa sobre a possiblidade de se provar a existência de cópias quasi-isométrica em X de um espaço Y, sabendo que Y é isomorfo a um subespaço de X. Ao passo em que a existência de cópias isomórficas de c_0 não garante a existência de cópias isómetricas de c_0, o Teorema de James entretanto assegura que cópias quasi-isométricas de c_0 sempre adveem de cópias isomórficas desse espaço. Um outro questionamento que abordaremos é se cópias isomórficas geram cópias asimptoticamente isométricas do espaço c_0. No caso limítrofe, tem-se claramente que cópias isométricas de c_0 sempre são assimptoticamente isométricas; todavia, veremos que em geral cópias isomórficas não favorecem a existência de cópias asimptoticamente isométricas.

No Capítulo 4, enunciaremos e provaremos o Teorema de James sobre a não-distorcionalidade do espaço ℓ_1.

Em ambos casos, c_0 e ℓ_1, há similaridades na demonstração. Um fato importante a ser destacado é a simplicidade da técnica usada na demonstração desses resultados. Além do mais, o surgimento dos resultados de James relativo a não-distorcionalidade das normas usuais dos espaços c_0 e ℓ_1, deu origem a uma linha de pesquisa de grande impacto na Teoria dos Espaços de Banach. A saber, se existem espaços de Banach cuja norma é distorcível. E se c_0 e ℓ_1 são os únicos espaços cujas normas usuais não são distorcíveis. Em 1994 Schlumprecht (ODELL, 1994) mostrou que o espaço ℓ_2 é distorcível. Contudo, Milman (MILMAN, 1971) provou que se um espaço de Banach X é não-distorcível, então necessariamente X deve conter uma cópia isomórfica de um dos espaços ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ou do espaço c_0.

Finalizaremos essa dissertação com o Capítulo 5. Nele apresentaremos algumas aplicações relacionadas aos espaços de Banach que contém cópias isomórficas dos espaços c_0 e ℓ_1. Existe de fato uma vasta gama de resultados dessa natureza.

Em suma, o propósito primordial dessa dissertação é estudar os clássicos resultados de R. C. James (JAMES, 1964) sobre a não-distorcionalidade dos espaços c_0 e ℓ_1, e apresentar algumas implicações desses resultados em áreas aplicadas da teoria dos espaços de Banach.

2 PRELIMINARES

Todos os espaços vetoriais considerados nesta dissertação são espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais. A notação doravante utilizados é padrão e, em sua maioria, está em consonância com a notação das referências bibliográficas.(TEIXEIRA GERALDO BOTELHO, 2015; FABIAN P. HABALA,).

2.1 Espaços de Banach

Começaremos esta seção com a definição de espaço de Banach. Para isso, lembremos que um espaço métrico é completo quando toda sequência de Cauchy converge para um elemento deste espaço.

Definição 2.1.1. *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma.*

Exemplo 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *em mais geral, qualquer espaço de dimensão finita.*

Definição 2.1.2. *Dados X e Y espaços vetoriais, uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é dita linear se:*

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in X.$
2. $T(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}.$

Definição 2.1.3. *X^* é conhecido como o espaço dual de X. A norma natural de X^* é difinida por:*

$$\|f\|_{X^*} = \sup\{|f(x)|; x \in X\}.$$

Sabe-se que $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ é um espaço de Banach.

Proposição 2.1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, existe $M > 0$ tal que:*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Por hipótese T é contínua, em particular será contínua em $x = 0$. Portanto, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|T(x)\| < 1.$$

Dado qualquer $x \in X \setminus \{0\}$,note que $\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \in B(0,\delta)$, pois

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Portanto,

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right) \right\| < 1$$

Como T é linear, vale que:

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot T(x) = T\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right),$$

o que implica,

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \|T(x)\| < 1$$

ou seja,

$$\|T(x)\| < \frac{2}{\delta}\|x\|, \quad \forall x \neq 0.$$

Tomando $M = \frac{2}{\delta}$, para $x = 0$, obtemos o resultado

$$T(0) = 0 \Rightarrow \|T(0)\| = 0 \leq \frac{2}{\delta}\|0\|.$$

($\Leftarrow$) Por hipótese vale que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Então,

$$\|T(x-y)\| \leq M\|x-y\| \Rightarrow \|T(x)-T(y)\| \leq M\|x-y\|.$$

Provando que T é lipschitziana, em particular, contínua em X. $\square$

2.2 Bases de Schauder

Em 1927, Juliusz Schauder descreveu a noção de Base de Schauder. A noção de Base de Schauder desempenha um papel importante na investigação estrutural dos espaços de Banach.

Definição 2.2.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ é dita ser uma base de Schauder para X se para todo $x \in X$ existe uma única sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares reais tais que:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n,$$

onde a série converge na norma de X.

2.3 Sequências Básicas

Sabe-se hoje em dia que nem todo espaço de Banach possui uma base de Schauder (ENFLO, 1973). Todavia, veremos que todo espaço de Banach de dimensão infinita possui um subespaço com uma base de Schauder. Nesse contexto, a seguinte noção é pertinente.

Definição 2.3.1. *Sejam um espaço vetorial X e uma sequência (x_n) contida nesse espaço. Definimos o espaço vetorial gerado pela sequência (x_n) por $[(x_n)] = \overline{span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.*

Definição 2.3.2. *Uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ é dito ser uma sequência básica se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder para $[(x_n)]$.*

Notação: Seja X espaço de Banach. Dada uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qualquer em X,

$$(1^{\text{o}}) \quad \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n : m \in \mathbb{N}, (\lambda_n) \subset \mathbb{R} \right\}$$

$$(2^{\text{o}}) \quad [(x_n)] = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\text{span}}\Big\{x_n : n \in \mathbb{N}\Big\}$$

Definição 2.3.3. *Sejam X e Y espaços de Banach. Uma sequência básica $(x_n) \subset X$ é dita ser equivalente à uma sequência básica $(y_n) \subset Y$ se*

$$[(x_n)] \approx [(y_n)].$$

Aqui a notação $\approx$ é usada para indicar um isomorfismo, ou seja, para indicar que existe uma aplicação linear bijetiva contínua, com inversa também contínua, entre esses espaços (Veja detalhes da noão de isomorfismo na Definição 2.4.1).

Para cada base de Schauder (x_n) de um espaço normado X, podemos associar uma sequência de funcionais lineares (x_i^*) tal que

$$x_i^*(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Exemplo 2 (Espaço c_0). *Defina o espaço das sequências de números reais que convergem para zero como sendo o espaço*

$$X = c_0 = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : \ a_n \in \mathbb{R} \ \textit{para todo } n \textit{ e } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}.$$

É um fato conhecido que c_0 *munido com sua norma usual do sup dada por*

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

é um espaço de Banach. Note que:

- $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...) \in c_0$.

- $(n)_{n=1}^{\infty} = (1, 2, 3, ...) \notin c_0$.

A seguir exibiremos uma base de Schauder para o espaço c_0.

Proposição 2.3.1. *Considere a sequência* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *definida por*

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \cdots), \ldots, \quad e_n = (\underbrace{0, 0, \cdots, n, 0, \cdots}_{n\text{-ésima posição}}), \ldots$$

Então $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma base de Schauder para* c_0*. Mais precisamente, se* $y = (a_n) \in c_0$ *então*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

onde a série converge na norma do sup.

Demonstração. Defina $y_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n = (a_1, a_2, \cdots, a_N, 0, 0, \cdots)$. Os funcionais (e_n^*) associados a (e_n) são definidas por:

$$e_j^*(x) = x_j, \quad \forall x = (x_1, x_2, ...).$$

Afirmação 1. $(y_N)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em c_0.

De fato, para quaisquer $M, N \in \mathbb{N}$, com $M < N$ temos:

$$y_N - y_M = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n - \sum_{n=1}^{M} a_n e_n = \sum_{n=M+1}^{N} a_n e_n = (0, 0, \cdots, a_{M+1}, \cdots, a_N, 0, \cdots).$$

Como $a_n \to 0$, então

$$\|y_N - y_M\|_{\infty} = \sup_{M+1 \le i \le N} |a_i|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon$, para todo $n > n_\varepsilon$. Portanto, $||y_N - y_M||_\infty < \varepsilon$, para todo $N > M > n_\varepsilon$ provando a afirmação. Como c_0 é de Banach, existe $z \in \mathrm{c}_0$ tal que:

$$y_N \to z,$$

na norma do supremo, ou seja, $z = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$. Escrevamos $z = (b_1, b_2, \cdots)$.

Afirmação 2. Os funcionais (e_i^*) são contínuos.

De fato, dado qualquer $x = (a_n) \in \mathrm{c}_0$ note que:

$$|e_i^*(x)| = |a_i| \le \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| = ||x||_\infty,$$

ou seja,

$$|e_i^*(x)| \le ||x||_\infty, \quad \forall x \in \mathrm{c}_0.$$

Pela Proposição 2.1.1, cada e_i^* é contínua. Portanto, $e_i^* \in (\mathrm{c}_0)^*, \quad$ para todo $\quad i \in \mathbb{N}$.

Afirmação 3. $z = y$.

Combinando o fato de que $z = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$, com os funcionais e_j^* serem contínuos temos:

$$\begin{aligned} b_j = e_j^*(z) &= e_j^*\Big(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n e_n\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} e_j^*\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} e_j^*((a_1, a_2, \cdots, a_N, 0, \cdots)) = a_j. \end{aligned}$$

Provando assim a afirmação, e logo, a proposição.

$\square$

Definição 2.3.4. *(Base Canônica de* c_0*) A sequência* $(e_n)_{n=1}^\infty$ *definida acima é conhecida como a base canônica do espaço* c_0.

Corolário 2.3.1. *A sequência* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ *(base canônica de* c_0*) é uma base de Schauder para* c_0.

Finalizaremos essa seção com a seguinte definição que será útil nos próximos capítulos.

Definição 2.3.5. *Seja* c_{00} *um subespaço de* c_0*, formado pelas sequências eventualmente nulas, isto é,*

$$\mathrm{c}_{00} := \Big\{(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} : \ \textit{apenas um número finito de termos } a_n \neq 0\Big\}.$$

2.4 Espaços Isomorfos

Definição 2.4.1. *Seja $T : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear. Dizemos que T é um isomorfismo se T é contínua, bijetiva e a sua inversa $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é contínua. Neste caso, também dizemos que X é isomorfo a Y e usaremos a notação $X \approx Y$.*

A próxima proposição dá um critério para analisar se T é um isomorfismo entre X e Y.

Proposição 2.4.1. *Seja $T : X \longrightarrow Y$ aplicação linear. Então, T é isomorfismo se, e somente se, T é bijetiva e existem constantes $d, D > 0$ tais que*

$$d\|x\| \leq \|T(x)\| \leq D\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pela Proposição 2.1.1 como T é contínua temos que existe $D > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq D\|x\|, \forall x \in X.$$

Como T^{-1} é contínua temos, novamente pela Proposição 2.1.1, que existe $M > 0$ tal que

$$\|T^{-1}(y)\| \leq M\|y\|, \quad \forall y \in Y.$$

Seja $d = \frac{1}{M} > 0$. Dado qualquer $x \in X$, fazendo $y = T(x)$ obtemos

$$\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq M\|T(x)\|, \quad \text{e logo,} \quad d\|x\| \leq \|T(x)\|,$$

onde $d = \frac{1}{M}$.
($\Leftarrow$) Como por hipótese T é bijetiva, resta provar que T e T^{-1} é contínua. Para isso, por hipótese existem $d, D > 0$ tal que:

$$d\|x\| \leq \|T(x)\| \leq D\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

Segue da segunda desigualdade em (2.1) combinado com a Proposição 2.1.1 que T é contínua. Para provar que T^{-1} é contínua, dado qualquer $y \in Y$, como T é bijetiva existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$. Usando a desigualdade (2.1) temos:

$$d\|T^{-1}(y)\| \leq \|T(T^{-1}(y))\| = \|y\|.$$

O que mostra que T^{-1} é contínua. Portanto, T é um isomorfismo. $\square$

Proposição 2.4.2. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um isomorfismo. Suponha que X possui uma base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Então, $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ define uma base de Schauder para Y.*

Demonstração. Seja $y \in Y$ qualquer. Como T é um isomorfismo existe $x \in X$ tal que $x = T^{-1}(y)$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder para X, existe $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sequência de escalares reais (que são únicos) tais que:

$$T^{-1}(y) = x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n.$$

Segue que:

$$\begin{aligned} y = T(T^{-1}(y)) = T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) \\ = \lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n). \end{aligned}$$

□

A seguinte proposição relaciona as sequências básicas com a noção de isomorfismos.

Proposição 2.4.3. *X contém uma cópia isomorfa de* c_0 *se, e somente se, X contém uma sequência básica $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ com a seguinte propriedade: Existem $d, D > 0$, constantes, tais que*

$$d \sup_{n\geq 1} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq D \sup_{n\geq 1} |a_n|, \quad \forall (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0. \tag{2.2}$$

Demonstração. Se Y é um subespaço de X e $T :\ c_0 \to Y$ é um isomorfismo, então pela Proposição 2.4.1 existem constantes $d, D > 0$ tais que

$$d \sup_{n\geq 1} |a_n| \leq \|T\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right)\| \leq D \sup_{n\geq 1} |a_n|, \quad \forall x = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0.$$

Portanto, se definirmos $x_n = T(e_n)$ para todo n onde $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é a base canônica do c_0, vemos que a desigualdade acima fornece a desigualdade (2.2). Além disso, da Proposição 2.4.2, vemos também que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ define uma sequência básica em X. De modo análogo, pode-se usar a recíproca da Proposição 2.4.1 para concluir que a desigualdade (2.2) implica que X possui uma cópia isomorfa a c_0. □

Concluímos esta seção com alguns comentários adicionais sobre o espaço c_0. Se X é um espaço de Banach e $(x_n) \subset X$ é uma sequência básica equivalente à base canônica de c_0, então tem-se claramente que

$$[(x_n)] \approx [(e_n)] = \mathrm{c}_0.$$

Consequentemente, conforme vimos anteriormente, existem constantes $d, D > 0$ tais que :

$$d \sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq D \sup_{i \geq 1} |a_i|, \quad \forall (a_i) \in \mathrm{c}_0.$$

Naturalmente, pode-se indagar se a existência de cópias isomorfas de c_0 implica na existência de cópias isométricas. A resposta (em geral) é não.
A partir de agora, quando os espaços X e Y forem isométricos denotaremos apenas por $X \equiv Y$. Observe que uma condição suficiente para tal fenômeno é a seguinte.
Se $d = D$, então

$$\left[\left(\frac{x_n}{D} \right) \right] \equiv \mathrm{c}_0.$$

De fato, se $d = D$ então a desigualdade acima se escreve:

$$D \sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq D \sup_{i \geq 1} |a_i|,$$

e, portanto,

$$\sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\frac{x_i}{D} \right) \right\| \leq \sup_{i \geq 1} |a_i|, \quad \forall (a_i) \in \mathrm{c}_0.$$

Entretanto, em situações gerais tem-se na realidade que $d < D$ com $\dfrac{D}{d}$ grande. Todavia, veremos no próximo capítulo que uma surpreeendente resposta favorável pode ser obtida no tocante a quase-isométrica.

3 PRIMEIRO RESULTADO DE JAMES SOBRE c_0-DISTORÇÃO

Nesta capítulo estudaremos sobre o primeiro Teorema de James em espaço c_0.

3.1 Primeiro Teorema de James sobre c_0-distorção

Definição 3.1.1. *Diremos que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial X são equivalentes se existem constantes $d, D > 0$ tais que*

$$d\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq D\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Defina $\mathscr{D} := D/d$. Note que $\mathscr{D} \geq 1$. Observe ainda que quando $\mathscr{D} = 1$, tem-se a igualdade

$$\|x\|_2 = d\|x\|_1 \quad \forall x \in X,$$

ou seja, a normas $\|\cdot\|_2$ e $d\|\cdot\|_1$ são isométricas. Assim, podemos dizer que o fator $\mathscr{D}$ mede o quanto a norma $\|\cdot\|_2$ deixa de ser isométrica à norma $d\|\cdot\|_1$. Por essa razão, $\mathscr{D}$ é denominado como a distorção da norma $\|\cdot\|_2$ em relação à norma $\|\cdot\|_1$.

O objetivo deste capítulo, é demonstrar o Primeiro Teorema de James que versa sobre a não-distorcionalidade da norma de um espaço de Banach ao longo de uma cópia isomorfa ao espaço c_0 munido com sua norma usual. Em outras palavras, veremos que ao longo de tais cópias $\mathscr{D}$ pode assumir valores arbitrariamente próximos de 1. E isso é o que se entende por não-distorcionalidade.

Definição 3.1.2. *Dizemos que X contém uma cópia isomórfica de c_0 se X contém um subespaço Y isomorfo a c_0.*

Definição 3.1.3. *Dizemos que X possui uma cópia quase-isométrica de um espaço E, se para todo $\varepsilon \in (0,1)$ existir um subespaço $Y \subset X$ e, além disso, existir um isomorfismo $T : E \longrightarrow Y$ tal que*

$$(1-\varepsilon)\|u\|_E \leq \|T(u)\|_X \leq (1+\varepsilon)\|u\|_E \quad \forall u \in E.$$

Antes de enunciarmos o principal resultado de James deste capítulo, estudaremos o seguinte resultado preliminar que será útil em seguida.

Proposição 3.1.1 (Espaços Isomorfos a c_0)**.** *Sejam* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach e* Y *um subespaço de* X*. Suponha que* $T : c_0 \longrightarrow Y$ *é um isomorfismo. Então, existem constantes* $d, D > 0$ *e uma base de Schauder* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *em* Y *tal que*

$$d \sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq D \sup_{i \geq 1} |a_i|,$$

para todo $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

Demonstração. Como T é um isomorfismo existem constantes $d, D > 0$ tais que

$$d \sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \|T(x)\| \leq D \sup_{i \geq 1} |a_i|, \quad \forall x = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0. \tag{3.1}$$

Seja $x_i = T(e_i)$, onde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ é a base canônica de c_0, então

$$x = (a_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Usando que T é linear temos

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Segue-se de (3.1) que

$$d \sup_{n \geq 1} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq D \sup_{n \geq 1} |a_n|,$$

conforme queríamos demonstrar. $\square$

Observação: Convém destacar que a proposição acima é apenas uma forma equivalente da Proposição 2.4.3.

Agora estamos aptos a enunciar e demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1.1 (R. C. James – c_0-Distorção)**.** *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach. Então* X *possui uma cópia isomórfica de* c_0 *se, e somente se, para todo* $\varepsilon \in (0,1)$ *existe uma sequência básica* (x_n) *tal que*

$$(1-\varepsilon) \sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq \sup_{i \geq 1} |a_i|, \tag{3.2}$$

para toda sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty} \subset c_{00}$.

Observemos que se (x_n) satisfaz a Desigualdade (3.1) então segue da Proposição 3.1.1. que $[(x_n)] \approx c_0$. Portanto, para demonstrar o Teorema 3.1.1. é suficiente demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Suponha que X possui uma cópia isomórfica de* c_0*. Então, X possui uma cópia quase-isométrica de* c_0.

Demonstração. Por hipótese, X contém um subespaço Y isomorfo a c_0. Da Proposição 3.1.1, conclui-se que existe uma sequência básica (y_n) em X e existem constantes $d, D > 0$ satisfazendo:

$$d \sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i \geq 1} a_i y_i \right\| \leq D \sup_{i \geq 1} |a_i|, \quad \forall (a_i)_{i=1}^{\infty} \in c_{00}. \tag{3.3}$$

Antes de prosseguirmos, façamos uma pausa para estabelecer alguns aspectos notacionais visando uma melhor exposição do texto. Doravante, por um intervalo de números naturais entenderemos um subconjunto $E \subset \mathbb{N}$ da forma

$$E = \{n \in \mathbb{N} : a \leq n \leq b\} \quad \text{com } a, b \in \mathbb{N}.$$

Por conveniência, usaremos a notação $E \subset [\mathbb{N}]^{<\infty}$ para indicar um intervalo finito de números naturais. Ademais, a expressão $n \leq E$ significa $n \leq \min(E)$. Com estas notações em mente, podemos continuar com a demonstração do lema. Considere os seguintes números:

$$k_n = \sup \left\{ \left\| \sum_{i \in E} a_i y_i \right\| : n \leq E \in [\mathbb{N}]^{<\infty},\ (a_i)_{i \in E} \subset \mathbb{R},\ \sup_{i \in E} |a_i| = 1 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Afirmação 1.

$$d \leq k_n \leq D, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso decorre imediatamente da desigualdade (3.3). Defina agora $K := \inf\{k_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ e fixe $0 < \theta < 1 < \gamma$. Como $\gamma \cdot K > K$, segue da definição de ínfimo de conjuntos que $\gamma \cdot K$ não é cota inferior para $\{k_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Segue que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \leq k_{n_1} < \gamma K.$$

Por outro lado, como $\theta k_{n_1} < k_{n_1}$, segue da definição de supremo de conjuntos que θk_{n_1} não é cota superior para

$$\left\{ \left\| \sum_{i \in E} \lambda_i y_i \right\| : n_1 \leq E \in [\mathbb{N}]^{<\infty}, \sup_{i \in E} |\lambda_i| = 1 \right\}.$$

Por essa razão, existem um conjunto $E_1 \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ e com $n_1 \leq E_1$ escalares $(\lambda_i^1)_{i\in E_1} \subset \mathbb{R}$, com $\sup_{i\in E_1} |\lambda_i^1| = 1$, tais que

$$\theta k_{n_1} < \left\| \sum_{i\in E_1} \lambda_i^1 y_i \right\| \leq k_{n_1}.$$

Seja $n_2 = \max(E_1) + 1$. Repetiremos o processo acima para k_{n_2} em vez de k_{n_1}. De fato, como $\theta k_{n_2} < k_{n_2}$, existem um conjunto $n_2 \leq E_2 \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ e escalares $(\lambda_i^2)_{i\in E_2} \in \mathbb{R}$, com $\sup_{i\in E_2} |\lambda_i^2| = 1$, tais que:

$$\theta k_{n_2} < \left\| \sum_{i\in E_2} \lambda_i^2 y_i \right\|.$$

Repetindo esse processo indutivamente, obtém-se uma sequência infinita de combinações lineares:

$$\left(\sum_{i\in E_1} \lambda_i^1 y_i, \sum_{i\in E_2} \lambda_i^2 y_i, \sum_{i\in E_3} \lambda_i^3 y_i, \ldots \right),$$

com

$$\max E_1 < minE_2 \leq \max E_2 < minE_3 \leq maxE_3 \ldots,$$

tal que:

$$(\star) \quad \theta K \leq \theta k_{n_1} \leq \left\| \sum_{i\in E_1} \lambda_i^1 y_i \right\| \leq k_{n_1} < \gamma K, \text{ e}$$

$$(\star\star) \quad \theta K \leq \theta k_{n_j} < \left\| \sum_{i\in E_j} \lambda_i^j y_i \right\| \quad \forall j \geq 2.$$

Defina agora, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \frac{z_n}{\gamma K},$$

onde $z_n = \sum_{i\in E_n} \lambda_i^n y_i$. Escolha θ e γ tais que:

$$\frac{2\theta}{\gamma} - 1 \geq 1 - \varepsilon.$$

Afirmação 2: $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma cópia quase-isométrica de c_0.

Para isso, é suficiente provarmos que:

(i) $\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n z_n \right\| \leq \gamma K \max_{1\leq n\leq m} |a_n|.$

(ii) $\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n z_n \right\| \geq \left(\frac{2\theta}{\gamma} - 1 \right) \cdot \gamma K \max_{1\leq i\leq m} |a_i|.$

para quaisquer $(a_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$.

Provemos (i), para isso suponhamos inicialmente que $\max\limits_{1\le i\le m} |a_i| = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m a_n z_n &= a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_m z_m \\
&= a_1 \sum_{i\in E_1} \lambda_i^1 y_i + a_2 \sum_{i\in E_2} \lambda_i^2 y_i + \cdots + a_m \sum_{i\in E_m} \lambda_i^m y_i \\
&= \sum_{i\in E_1} a_1 \lambda_i^1 y_i + \sum_{i\in E_2} a_2 \lambda_i^2 y_i + \cdots + \sum_{i\in E_m} a_m \lambda_i^m y_i = \sum_{i\in E} \lambda_i y_i,
\end{aligned}$$

onde $E = \cup_{i=1}^m E_i$ e $\lambda_i = a_i \lambda_k$, para cada $k \in E_i$, onde usamos na última igualdade que:

$$E_i \cap E_j = \varnothing, \text{ para } i \neq j.$$

Agora observe que da definição de k_{n_1} tem-se que:

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n z_n \right\| \le k_{n_1} < \gamma K.$$

Para o caso geral, $\max |a_i| \neq 1$, para quaisquer $(a_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos que:

$$\left\| \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{\max_{1\le i\le m} |a_i|} z_n \right\| \le \gamma K.$$

Finalmente, note que:

$$\max_{1\le i\le m} \left| \frac{a_n}{\max\limits_{1\le i\le m} |a_i|} \right| = 1,$$

pois

$$\frac{1}{\max\limits_{1\le i\le m} |a_i|} \cdot \max_{1\le i\le m} |a_i| = 1.$$

(ii) Suponha inicialmente que $\max\limits_{1\le i\le m} |a_i| = 1$. Seja $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $|a_{j_0}| = 1$. Segue que:

$$a_{j_0} = \begin{cases} 1, \\ -1. \end{cases}$$

.

Sem perda de generalidade podemos supor $a_{j_0} = 1$. Então,

$$\sum_{n=1}^{m} a_n z_n = z_{j_0} + \sum_{n \neq j_0} a_n z_n.$$

Note que,

$$2z_{j_0} = z_{j_0} + z_{j_0} = \left(z_{j_0} + \sum_{n \neq j_0} a_n z_n \right) + \left(z_{j_0} - \sum_{n \neq j_0} a_n z_n \right)$$

Portanto,

$$2z_{j_0} = \sum_{n=1}^{m} a_n z_n + \left(z_{j_0} - \sum_{n \neq j_0} a_n z_n \right)$$

donde segue que:

$$\begin{aligned} 2||z_{j_0}|| &\leq \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n z_n \right\| + \left\| z_{j_0} - \sum_{n \neq j_0} a_n z_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n z_n \right\| + \gamma K. \end{aligned}$$

Concluímos que:

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n z_n \right\| \geq 2||z_{j_0}|| - \gamma K.$$

Agora da construção dos $z_n' s$, segue que,

$$||z_{j_0}|| \geq \theta K.$$

E portanto,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n z_n \right\| \geq 2\theta K - \gamma K = \frac{2\theta}{\gamma} \cdot \gamma K - \gamma K = \left(\frac{2\theta}{\gamma} - 1 \right) \cdot \gamma K,$$

e isso conclui a prova do teorema.

Em suma, o resultado demonstrado acima nos diz que se X possui uma cópia isomorfa de c_0 então X possui uma cópia quasi-isométrica de c_0. Todavia, é pertinente indagar o seguinte:

Questão 1: Se X possui uma cópia isomórfica de c_0 é verdade que X possui uma cópia isométrica de c_0?

Veremos a seguir que a resposta para essa questão é negativa. De fato, mesmo em um contexto mais geral não se pode expor uma resposta afirmativa. A definição a seguir foi introduzida em (P.N.DOWLING C.J.LENNARD, 1998).

Definição 3.1.4. *Dizemos que um espaço de Banach X possui uma cópia assimptoticamente isométrica a* c_0 *se existem uma sequência básica* $(x_n)_n \in X$ *e uma sequência* $(\varepsilon_n)_n \subset (0,1)$*, com* $\varepsilon_j \to 0$*, tais que:*

$$\sup_{n\geq 1}(1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sup_{n\geq 1}(1+\varepsilon_n)|a_n|,$$

para todo $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$.

Observe que cópias isométricas de c_0 definem cópias assimptoticamente isométricas.

A próxima proposição foi extraída de (P.N.DOWLING C.J.LENNARD, 1998) veja o exemplo 5.

Proposição 3.1.2. *(Exemplo 5) Considere o espaço* c_0 *munido com a seguinte norma:*

$$\|(a_n)\| = \sup_{n\geq 1}|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|a_n|, \quad (a_n) \in c_0.$$

Então $(c_0, \|\cdot\|)$ *é isomorfo a* c_0*, no entanto não possui cópias assimptoticamente isométricas a* c_0.

Demonstração. É claro que $(c_0, \|\cdot\|) \approx (c_0, \|\cdot\|_\infty)$. De fato, suponha que $(c_0, \|\cdot\|)$ contém uma cópia assimptoticamente isométrica de c_0. Isto é, existem uma sequência que converge a zero $(\varepsilon_n)_n$ em $(0,1)$ e uma sequência $(x_n)_n$ em c_0 de modo que

$$\max_{1\leq j\leq n}(1-\varepsilon_j)|a_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \leq \max_{1\leq j\leq n}|a_j|, \tag{3.4}$$

para quaisquer escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. É mostrar que a base canônica de c_0 converge fracamente para zero. Por outro lado, note que a desigualdade 3.4 implica que (x_n) é equivalente à base canônica de c_0. Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que a sequência $(x_n)_n$ converge pontualmente para zero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escrevamos $x_n = (\xi_j^n)_{j=1}^{\infty}$. Desse modo, como $\|x_1\| \geq 1-\varepsilon_1 > 0$, existe $j \in \mathbb{N}$ de modo que $\xi_j^1 \neq 0$. Seja $k = \min\{j : \xi_j^1 \neq 0\}$ e $\alpha = \left(\frac{1}{3\cdot 2^k}\right)|\xi_k^1|$. Escolhamos $N_1 \geq k$ de modo que:

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\alpha}{4}.$$

Escolha $N_2 \in \mathbb{N}$ de modo que $\varepsilon_n < \alpha$, para todo $n \geq N_2$. Como $(x_n)_n$ converge pontualmente para zero, podemos escolher $N_3 > N_2$ tal que $|\xi_j^n| < \frac{\alpha}{4}$ para $j = 1, 2, ..., N_1$ e para todo $n \geq N$.

Daí, para cada $n \geq N_3$ teremos:

$$\begin{aligned}
\|x_n\| &= \|x_n\|_\infty + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\xi_j^n| \\
&= \|x_n\|_\infty + \sum_{j=1}^{N_1} 2^{-j} |\xi_j^n| + \sum_{j=N_1+1}^{\infty} 2^{-j} |\xi_j^n|, \quad |\xi_j^n| \leq 1 \text{ por (3.4)} \\
&\leq \|x_n\|_\infty + \sum_{j=1}^{N_1} 2^{-j} \frac{\alpha}{4} + \sum_{j=N_1+1}^{\infty} 2^{-j} \\
&\leq \|x_n\|_\infty + \frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Pela convexidade da norma $\|.\|_\infty$ temos $\|x_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}(\|x_1 + x_n\|_\infty + \|x_1 - x_n\|_\infty)$. Então, ou $\|x_1 + x_n\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ ou $\|x_1 - x_n\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$. Se $n \geq N_3$ e $\|x_1 + x_n\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$, então

$$\begin{aligned}
1 &\geq \|x_1 + x_n\| \\
&= \|x_1 + x_n\|_\infty + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\xi_j^1 + \xi_j^n| \\
&\geq \|x_n\|_\infty + 2^{-k} |\xi_k^1 + \xi_k^n| \\
&\geq \|x_n\| - \frac{\alpha}{2} + 2^{-k}(|\xi_k^1| - |\xi_k^n|) \\
&\geq \|x_n\| - \frac{\alpha}{2} + 2^{-k}\left(|\xi_k^1| - \frac{\alpha}{4}\right) \\
&\geq \|x_n\| - \alpha + 2^{-k}(|\xi_k^1|) \\
&\geq 1 - \varepsilon_n - \alpha + 2^{-k} |\xi_k^1| \\
&\geq 1 - \alpha - \alpha + 2^{-k} |\xi_k^1| \\
&= 1 + \alpha.
\end{aligned}$$

Logo $\alpha \leq 0$ o que é um absurdo.

$\square$

4 PRIMEIRO RESULTADO DE JAMES SOBRE ℓ_1 - DISTORÇÃO

4.1 Resultado de James sobre ℓ_1- Distorção

Objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema da distorção de James para o espaço ℓ_1 (JAMES, 1964). Lembremos que já definimos no Capítulo 3 a noção de distorção de normas em espaços arbitrários. Nosso ponto de partida para este capítulo começa por definirmos o seguinte espaço

$$\ell_1 = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \right\}.$$

Seguem abaixo exemplos de uma sequência que pertence e outra que não pertence ao espaço ℓ_1.

(1º) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

(2º) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1$, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Lembremos que a norma natural em ℓ_1 é dada por:

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

É um fato clássico em análise funcional que o par $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$ define um espaço de Banach.

Conforme vimos no capítulo anterior, espaços de Banach que contém cópias isomorfas do espaço c_0 também admitem uma cópia quasi-isométrica desse espaço. No presente capítulo, mostraremos que um resultado similar também continua válido para espaços de Banach X que possuem cópias isomorfas de ℓ_1. Mais precisamente, o principal resultado deste capítulo é o seguinte resultado clássico de R. C. James (JAMES, 1964).

Teorema 4.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que exista uma sequência básica (y_n) em X tal que,*

$$d\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \leq D \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset c_{00}$ e $d, D > 0$ fixos. Então para todo $\varepsilon \in (0,1)$ existem uma sequência de blocos de inteiros (E_n) em $[\mathbb{N}]^{<\infty}$, escalares $(\lambda_i^n)_{i\in E_n} \subset \mathbb{R}$, com $\sum_{i\in E_n} |\lambda_i^n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma constante Λ tal que a sequência (z_n) dada por

$$z_n = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i\in E_n} \lambda_i^n y_i$$

satisfaz

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n z_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,$$

para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset c_{00}$.

Demonstração. Por hipótese, sabemos que X possui uma sequência básica (y_n) então, existem constantes $d, D > 0$ que satisfazem a seguinte desigualdade:

$$d\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n y_n\right\| \leq D\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,$$

para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset c_{00}$. Primeiro vamos definir Λ_n como sendo

$$\Lambda_n = \inf\left\{\left\|\sum_{i\in E}a_i y_i\right\| : n \leq E \in [\mathbb{N}]^{<\infty}, \sum_{i\in E}|a_i| = 1\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Em seguida, definamos $\Lambda = \sup_n \Lambda_n$. Em analogia ao que foi feito no capítulo anterior, fixemos $\theta < 1 < \gamma$. Como $0 < \theta < 1$, existe $n_1 \in [\mathbb{N}]$ tal que $\theta\Lambda < \Lambda_{n_1} \leq \Lambda$. Por sua vez, como $\gamma > 1$ segue que $\Lambda_{n_1} < \gamma\Lambda_{n_1}$. Por essa razão, da definição de ínfimo de conjuntos concluímos que $\gamma\Lambda_{n_1}$ não é cota inferior para o conjunto associado a definição de Λ_n. Portanto, existe $E_1 \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ com $n_1 \leq E_1$ e existem escalares $(\lambda_i^1)_{i\in E_1}$ relativo aos quais tem-se $\sum_{i\in E_1}|\lambda_i^1| = 1$ e, além disso, tem-se ainda que:

$$\Lambda_{n_1} \leq \left\|\sum_{i\in E}\lambda_i^1 y_i\right\| < \gamma\Lambda_{n_1}.$$

Façamos agora $n_2 = \max E_1 + 1$. Como vimos que $\gamma > 1$, temos que $\Lambda_{n_2} < \gamma\Lambda_{n_2}$, com isso, pela definição de ínfimo de conjuntos, concluímos que $\gamma\Lambda_{n_2}$ não é cota inferior para o conjunto associado a definição de Λ_{n_2}. Portanto existe $E_2 \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ com $n_2 \leq E_2$ e existem escalares $(\lambda_i^2)_{i\in E_2}$ relativo aos quais tem-se $\sum_{i\in E_2}|\lambda_i^2| = 1$, no qual temos a seguinte desigualdade:

$$\Lambda_{n_2} \leq \left\|\sum_{i\in E_2}\lambda_i^2 y_i\right\| < \gamma\Lambda_{n_2}.$$

Repetindo esse processo indutivamente, obtém-se uma sequência infinita de combinações lineares:

$$\left(\sum_{i\in E_1}\lambda_i^1 y_i, \sum_{i\in E_2}\lambda_i^2 y_i, \sum_{i\in E_3}\lambda_i^3 y_i, \ldots\right)$$

tal que:

$$(\star) \quad \theta\Lambda \leq \theta\Lambda_{n_1} < \left\| \sum_{i\in E_1} \lambda_i^1 y_i \right\| \leq \Lambda_{n_1} < \gamma\Lambda, \quad \text{e}$$

$$(\star\star) \quad \theta\Lambda \leq \theta\Lambda_{n_j} < \left\| \sum_{i\in E_J} \lambda_i^j y_i \right\| \leq \Lambda_{n_j} < \gamma\Lambda, \quad \forall j \geq 2.$$

Agora vamos definir z_n como:

$$z_n = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i\in E_n} \lambda_i^n y_i.$$

Seja $(a_i)_{i=1}^m \subset [\mathbb{R}]$ com $\sum_{i=1}^m |a_i| = 1$, logo obteremos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^m a_n z_n \right\| &= \|a_1 z_1 + \ldots + a_m z_m\| \\ &= \left\| \sum_{i\in E_1} a_1 \lambda_i^1 y_i + \ldots + \sum_{i\in E_m} a_m \lambda_i^m y_i \right\| \geq \Lambda_{n_1}, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in E_1} |a_1||\lambda_i^1| + \sum_{i\in E_2} |a_2||\lambda_1^2| + \cdots + \sum_{i\in E_m} |a_m||\lambda_i^m| \\ &\qquad = |a_1| \sum_{i\in E_1} |\lambda_i^1| + |a_2| \sum_{i\in E_2} |\lambda_i^2| + \ldots + |a_m| \sum_{i\in E_m} |\lambda_i^m| \\ &\qquad = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m| = 1. \end{aligned}$$

<u>Conclusão 1</u>: Podemos notar que:

$$\theta\Lambda \leq \Lambda_{n_1} \leq \left\| \sum_{n=1}^m a_n z_n \right\|.$$

<u>Conclusão 2</u>: Para todo $(a_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, observe que a Conclusão 1 implica na desigualdade abaixo:

$$\theta\Lambda \leq \left\| \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{\sum_{n=1}^m |a_n|} \right\| \implies \theta\Lambda \sum_{i=1}^m |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i z_i \right\|.$$

Pela desigualdade acima, podemos concluir que:

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty a_i z_i \right\| \leq \gamma\Lambda \sum_{n=1}^\infty |a_i|.$$

Finalmente, vemos que (z_n) satisfaz a desigualdade abaixo:

$$\frac{\theta}{\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}|a_i| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i z_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|.$$

Agora, podemos escolher θ e γ tais que:

$$1-\varepsilon < \frac{\theta}{\gamma}.$$

Isso conclui a demonstração do teorema.

$\square$

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, estudaremos algumas aplicações relacionadas a espaços de Banach contendo cópias isomorfas dos espaços clássicos c_0 e ℓ_1.

5.1 Teorema de Peano em Espaços de Banach contendo c_0

O primeiro problema que abordaremos é o seguinte:

Problema 5.1. *Seja X um espaço de Banach. Existe uma aplicação contínua $f : X \to X$ tal que a E.D.O.:*

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ u(t_0) = u_0, \quad u_0 \in X, \end{cases}$$

tem sempre solução?

Para entendermos este problema necessitaremos de algumas definições e proposições que veremos ao longo deste capítulo.

Definição 5.1.1. *Seja M um subespaço fechado de um espaço de Banach X. Dizemos que M é complementado em X se existe um subespaço fechado $N \subset X$ tal que:*

(1^o) $M \cap N = 0$

(2^o) $M + N = X$.

Proposição 5.1.1. *Se M é complementado em X, então existe uma aplicação linear limitada $P : X \to M$ tal que $P(x) = x$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Defina $P : X \to M$ pondo $P(m+n) := m$. É fácil mostrar que o gráfico $G = \{(x, Px); x \in X\}$ é fechado em $X \times X$(veja detalhes em (FABIAN P. HABALA, , pg. 180, Proposition 4.2)). Pelo Teorema do Gráfico Fechado, P é limitada. □

O primeiro resultado que se conhece sobre o Problema 5.1 deve-se ao matemático Dieudonné [(J.DIEUDONNÉ, 1950)] que forneceu uma resposta negativa para o caso exclusivo em que $X = c_0$ (veja Lema 5.1.1). O resultado a seguir é uma consequência da demonstração do resultado de Dieudonné.

Teorema 5.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que X contém uma cópia complementada de* c_0. *Então, existe uma aplicação contínua* $F : X \to X$ *tal que a EDO* $u'(t) = F(u(t))$ *não admite solução em qualquer intervalo* $I \subset \mathbb{R}$.

Para mostrar esse resultado, usaremos o seguinte lema cuja prova está contida essencialmente na demonstração do resultado de Dieudonné.

Lema 5.1.1 ((J.DIEUDONNÉ, 1950)). *Existe uma aplicação contínua* $f : c_0 \to c_0$ *tal que a EDO* $u' = f(u)$ *não admite solução em qualquer intervalo* $I \subset \mathbb{R}$, *ou seja, não existe curva* $u : I \to c_0$ *satisfazendo* $u'(t) = f(u(t))$ *para todo* $t \in I$.

Demonstração. Defina $f\colon c_0 \to c_0$ pondo

$$f((a_n))_{n=1}^{\infty} = \left(\sqrt{|a_n|} + \frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}, \quad \forall (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0.$$

Suponha que exista uma curva derivável $u : I \to c_0$ tal que $u'(t) = f(u(t))$ para todo $t \in I$. Para cada $t \in I$, podemos escrever $u(t) = (u_n(t))_{n=1}^{\infty}$. Então

$$(u_n'(t))_{n=1}^{\infty} = \left(\sqrt{|u_n(t)|} + \frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}, \quad \forall t \in I,$$

e portanto,

$$u_n'(t) = \sqrt{|u_n(t)|} + \frac{1}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I.$$

Isso implica:

$$1 = \frac{u_n'(t)}{\sqrt{|u_n(t)|} + \frac{1}{n+1}} \quad \forall t \in I.$$

Fixe agora $t_0 \in I$. Integrando essa equação de t_0 a $t \in I$, com $t_0 < t$, obtemos:

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} 1\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{u_n'(s)}{\sqrt{|u_n(s)|} + \frac{1}{n+1}} ds.$$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixado, a mudança de variável:

$$\begin{cases} y = u_n \\ dy = u_n'(s) ds \end{cases},$$

resulta em:

$$t - t_0 = \int_{u_n(t_0)}^{u_n(t)} \frac{dy}{\sqrt{|y|} + \frac{1}{n+1}}.$$

$\square$

Agora provaremos a desigualdade abaixo:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{|y|}+\gamma} \leq 2(\sqrt{|\alpha|}+\sqrt{|\beta|}). \tag{5.1}$$

De fato, inicialmente, consideremos o caso em que $\alpha < 0 < \beta$. Note que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{|y|}+\gamma} = \int_{\alpha}^{0} \frac{dy}{\sqrt{|y|}+\gamma} + \int_{0}^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{|y|}+\gamma}.$$

Agora como

$$\alpha < y < 0 \rightarrow -\alpha > -y > 0,$$

Podemos concluir que

$$0 < |y| = -y < -\alpha = |\alpha|$$

logo,

$$0 < \sqrt{|y|} < \sqrt{|\alpha|},$$

Consequentemente, temos:

$$\sqrt{|y|} < \sqrt{|y|}+\gamma < \sqrt{|\alpha|}+\gamma$$

Portanto,

$$\int_{\alpha}^{0} \frac{dy}{\sqrt{|y|}+\gamma} \leq \int_{\alpha}^{0} \frac{1}{\sqrt{|y|}} dy \quad = \int_{\alpha}^{0} \frac{1}{\sqrt{-y}} dy.$$

Vamos calcular a integral $\int_{\alpha}^{0} \frac{1}{\sqrt{-y}} dy$. Usando a mudança de variável $u = -y$, temos

$$\int_{\alpha}^{0} \frac{1}{\sqrt{-y}} dy = \int_{-\alpha}^{0} \frac{-1}{\sqrt{u}} du = \int_{-\alpha}^{0} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_{-\alpha}^{0} u^{\frac{-1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} \Bigg|_{-\alpha}^{0} = 2(-\alpha)^{\frac{1}{2}} = 2|\alpha|^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{|\alpha|}.$$

Agora façamos o procedimento similar para a seguinte integral:

$$\int_{0}^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{|y|}+\gamma} \leq \int_{0}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{|y|}} dy$$

$$= \int_{0}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{-y}} dy.$$

Repetindo o argumento anterior é fácil verificar que

$$= \int_0^{\beta} \frac{-1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{|\beta|}.$$

Agora analisaremos o primeiro caso em que $\alpha \geq 0$. Então $\alpha \leq \beta$.

Logo vemos que:

$$\alpha \leq y \leq \beta \rightarrow y \geq 0 \rightarrow |y| = y,$$

Daí temos,

$$\sqrt{|y|} = \sqrt{y}.$$

Portanto segue que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{y} + \gamma} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{y}} dy.$$

Fazendo os cálculos obtemos,

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} y^{-1/2} dy$$

$$= 2y^{1/2} \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$= 2(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$$

$$\leq 2\sqrt{\beta}$$

$$\leq 2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$$

$$= 2(\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{|\beta|}).$$

Agora façamos para o caso em que $\alpha < 0 \leq \beta$.

Daí temos,

$$\int_{\alpha}^{0} \frac{dy}{\sqrt{|y|} + \gamma} + \int_{0}^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{|y|} + \gamma}.$$

Pelo caso anterior, temos que:

$$\int_0^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{|y|+\gamma}} \leq 2\sqrt{|\beta|}.$$

Basta mostrarmos que:

$$\int_{\alpha}^{0} \frac{dy}{\sqrt{|y|+\gamma}} \leq 2\sqrt{|\alpha|}.$$

Como $\alpha < y < 0$, temos $|y| = -y > 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{0} \frac{dy}{\sqrt{|y|+\gamma}} &= \int_{\alpha}^{0} \frac{dy}{\sqrt{-y}+\gamma} \\
&= \int_{-\alpha}^{0} \frac{-du}{\sqrt{u}+\gamma} \\
&= \int_{0}^{-\alpha} \frac{du}{\sqrt{u}+\gamma}.
\end{aligned}$$

Façamos $u = -y \to du = -dy$, então temos $dy = -du$.

Pelo primeiro caso, temos:

$$\int_{0}^{-\alpha} \frac{du}{\sqrt{u}+\gamma} \leq 2\sqrt{|-\alpha|} = 2\sqrt{|\alpha|}.$$

Agora iniciaremos a demonstração do Teorema 5.1.1 .

Demonstração. Seja $P : X \to c_0$ uma projeção sobre c_0. Fixe $e \in Ker(P)$ com $e \neq 0$. Seja $f : c_0 \to c_0$ a aplicação contínua dada pelo Lema 5.1.1. Defina $F : X \to X$ pondo:

$$F(x) = e + f(Px)$$

Suponha que existe curva derivável $u : I \to X$ tal que $u'(t) = F(u(t))$. Defina $\gamma(t) = P(u(t))$.

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}P(u(t)) = P\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) &= P(u'(t)) \\
= P(F(u(t))) = P(e + f(P(u(t))) &= P(e) + P(f(P(u(t)))) \\
= 0 + f(P(u(t))) = f(\gamma(t)).&
\end{aligned}$$

Assim podemos concluir

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = f(\gamma(t)).$$

Como queríamos demonstrar. □

É um fato conhecido que o espaço ℓ_∞ possui uma cópia isomorfa de c_0, mas nunca admite uma cópia complementetada desse espaço. Todavia, a classe de espaços de Banach que possuem cópias complementadas do espaço c_0 é muito grande. Veremos a seguir que existe uma família de espaços X não-triviais que contém cópias complementadas de c_0.

Proposição 5.1.2. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então para todo espaço topológico compacto de Hausdorff K, e infinito, o espaço $C(K;E)$ sempre possui uma cópia complementada do espaço c_0.*

Demonstração. A demonstração desse resultado não é difícil e pode ser encontrado no artigo (MENDOZA, 1997). □

5.2 Aplicações na Teoria Métrica de Pontos Fixos

Nesta seção, iremos definir o que é um ponto fixo e uma aplicação não expansiva em um espaço de Banach. Reuniremos alguns exemplos e proposições na teoria métrica de pontos fixos. Além disso, iremos delinear a propriedade do ponto fixo, o ponto fixo fraco e o ponto fixo fraco*.

Definição 5.2.1. *Seja X um epaço de Banach. Uma aplicação $T : C \subset X \to X$ é dita ser não expansiva se*

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y||, \quad \forall x, y \in C.$$

Definição 5.2.2. *Dizemos que $x \in C$ é um ponto fixo de T se $Tx = x, \quad x \in C$.*

Definição 5.2.3. *Dizemos que um espaço de Banach X possui a propriedade do ponto fixo se para todo subconjunto não vazio, fechado, convexo e limitado C de X, e toda aplicação não expansiva $T : C \to C$ possui um ponto fixo.*

Definição 5.2.4. *Da mesma maneira da definição acima, dizemos que o espaço X tem a propriedade do ponto fixo fraco se para todo subconjunto C fracamente compacto, convexo e não vazio em X, toda aplicação não expansiva $T : C \to C$ tem um ponto fixo.*

Definição 5.2.5. *Se X é o espaço dual de um espaço de Banach E, isto é, $X = E^*$, dizemos que X tem a propriedade do ponto fixo fraco* se para todo subconjunto C compacto, convexo em X e toda aplicação não expansiva $T : C \to C$ temos um ponto fixo.*

Agora mencionaremos alguns exemplos.

Exemplo 3. *O espaço c_0 não possui a propriedade do ponto fixo.*
Seja, $C = B_{c_0}^+ = \{(x_n) \in c_0 : 0 \leq x_n \leq 1, \forall n\}$ e definamos duas aplicações afins por:

$$T_1(x_n) = (1, x_1, x_2, ...)$$

e

$$T_2(x_n) = (1 - x_1, x_1, x_2, ...).$$

Para $i = 1, 2$ e qualquer $x, y \in c_0$ vemos facilmente que $||T_i x - T_i y|| = ||x - y||$. Então, ambos T_1 e T_2 são não-expansiva, de fato isometria de C em C. Por outro lado, o único ponto fixo possível *para T_1 é $(1,1,1,...)$, e para T_2 vemos que o único ponto fixo será $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},...\right)$. Note que nenhum deles pertence a* c_0.

Exemplo 4. *O espaço c_0 não possui a propriedade do ponto fixo para contrações, ou seja, estas são as apliacações T tais que $||Tx-Ty|| < ||x-y||$ sempre que $x \neq y$. Neste exemplo, usaremos a base de Schauder padrão $e_1, e_2, e_3, ...$ de c_0, onde $e_n = (\delta_{n,i})$ com $\delta_{n,n} = 1$ e $\delta_{n,i} = 0$ para $i \neq n$. Seja λ_n uma sequência decrescente de números reais convergindo para 1. Definamos agora,*

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda_n e_n; (t_n) \in c_0, \quad 0 \leq t_n \leq 1 \right\}$$

e uma aplicação afim T em C,

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda_n e_n\right) = \lambda_i e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda_{n+1} e_{n+1}.$$

Alguns cáculos diretos mostram que T é uma aplicação de C em C que é sempre não expansiva e uma contração, desde que a sequência (λ_n) seja estritamente decrescente, cujo único ponto fixo possível é $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...) \notin c_0$.

Proposição 5.2.1. *Existe uma aplicação 2-Lipschitz que deixa a bola de ℓ_1 invariante e não possui pontos fixos.*

Definamos agora $T : B(\ell_1) \to \ell_1$ pondo $T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|, a_1, a_2, a_3, ...\right)$, onde

$$B(\ell_1) = \left\{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1; ||(a_i)_{i=1}^{\infty}||_{\ell_1} \leq 1\right\}.$$

Temos que $T : B(\ell_1) \to B(\ell_1)$. De fato, se

$$||(a_i)_{i=1}^{\infty}||_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 1$$

então observe que

$$\left|1 - \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... = 1.$$

Afirmação 1:: $Tx \neq x$ para todo $x \in B(\ell_1)$.

De fato, suponhamos por contradição que exista $x = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in B(\ell_1)$ tal que

$$(a_i)_{i=1}^{\infty} = T((a_i)_{i=1}^{\infty}).$$

Logo teremos que $(a_1,a_2,a_3,a_4,...) = \left(1-\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|,a_1,a_2,a_3,...\right)$. Consequentemente,

$$a_1 = 1-\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|, \quad a_2 = a_1 = a_3 = a_2 = ... = a_n$$

para todo $n \geq 2$.

Como $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i| \leq 1$ e $a_n = a_1$ para todo $n \geq 1$, segue que $a_n = 0$ para todo n. Por outro lado, como $a_1 = 1-\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ e $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$, tem-se que $a_1 = 1$, com contradição. Logo T não possui pontos fixos.

Afirmação 2: $||Tx-Ty|| \leq 2\,||x-y||_{\ell_1}$ para todo $x,y \in B(\ell_1)$.

Nesse caso, T é chamada 2-lipschitz. Note que:

$Tx = (1-\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|,a_1,a_2,a_3,...)$ e $Ty = (1-\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|,b_1,b_2,b_3,...)$, onde $x = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ e $y = (b_i)_{i=1}^{\infty}$. Fazendo a diferença de Tx e Ty obteremos:

$$Tx-Ty = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(|b_i|-|a_i|),a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3,...\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
||Tx-Ty||_{\ell_1} &= \left(\left|\sum_{i=1}^{\infty}(|b_i|-|a_i|)\right| + |a_1-b_1| + |a_2-b_2| + |a_3-b_3| + ...\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\Big||b_i|-|a_i|\Big| + \sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}|a_i-b_i| + \sum_{i=1}^{N}|a_i-b_i| \\
&= 2\,||x-y||_{\ell_1}.
\end{aligned}$$

Proposição 5.2.2. *Suponha que X contém uma cópia isomórfica de c_0. Então, para todo $\varepsilon \in (0,1)$ existe um conjunto fechado, limitado e convexo $C \subset X$ e existe uma aplicação $T : C \to C$ que é afim, não possui pontos fixos e satisfaz*

$$(1-\varepsilon)||x-y|| \leq ||Tx-Ty|| \leq (1+\varepsilon)||x-y||$$

para todo $x,y \in C$.

Demonstração. Se X possui uma cópia isomorfa de c_0, então pelo Teorema de James para c_0, existe uma sequência $(x_n) \in X$ tal que

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sup_{i\geq N}|t_i| \leq \left|\left|\sum_{i=N}^{\infty} t_i x_i\right|\right| \leq \sup_{i\geq N}|t_i|, \quad \forall (t_i) \in c_0.$$

□

Defina,

$$C = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n; \quad 0 \leq t_n \leq 1\right\}$$

e $\quad T: C \to C \quad$ *pondo* $\quad \mathrm{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right) = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1} = x_1 + t_1 x_2 + t_2 x_3 + \ldots$

Afirmação 1: $T(C) \subset C$.

Para provar isso, seja $w \in T(C)$ e mostremos que $w \in C$. Existe $c \in C$ tal que $T(c) = w$. Como $c \in C$ temos que $c = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$. Daí segue que

$$w = T(c) = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1} = x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} t_{n-1} x_n.$$

Reescrevemos como $\sum_{n=1}^{\infty} t_n' x_n$, onde

$$t_n' = \begin{cases} t_{n-1}, & n \leq 2 \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Portanto, $w \in C$, assim provamos o resultado desejado.

Afirmação 2: $T(x) \neq x \quad \forall x \in C$.

Suponha que exista $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ em C tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n = x = T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1} + x_1.$$

então,

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots = x_1 + t_1 x_2 + t_2 x_3 + \cdots$$

Mas, (x_n) é uma sequência básica, logo, $t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 1, t_4 = 1, \cdots$

Contudo isso não é possível, pois $x \in c_0$ implica que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

Afirmação 3: $||Tx - Ty|| \leq (1-\varepsilon)\,||x-y|| \quad \forall x, y \in C$.

Para provar a afirmação escrevamos $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ e $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$. Note que

$$
\begin{aligned}
Tx - Ty &= x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1} - x_n \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_{n+1}. \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) x_{n+1}
\end{aligned}
$$

Lembremos agora que:

$$
(1-\varepsilon) \sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq \sup_{i \geq 1} |a_i|, \qquad \forall (a_i) \in \mathrm{c}_0.
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\|Tx - Ty\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) x_{n+1} \right\| \leq \sup_{n \geq 1} |t_n - s_n| \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon/2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sup_{n \geq 1} |t_n - s_n| \\
&\leq \frac{1}{1-\varepsilon/2} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) x_n \right\| = \frac{1}{1-\varepsilon/2} \|x - y\|.
\end{aligned}
$$

Agora note que:

$$
x - y = \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) x_n,
$$

e que

$$
\frac{1}{1-\varepsilon/2} < 1 + \varepsilon.
$$

Portanto, $\|Tx - Ty\| \leq (1+\varepsilon)\|x - y\|$. Analogamente, mostra-se que $\|Tx - Ty\| \geq (1-\varepsilon)\|x-y\|$. Isso conclui a demonstração da Afirmação 3.

Afirmação 4:: C é fechado, convexo e limitado.

Suponha $u_k = \sum_{n=1}^{\infty} t_i^{(k)} x_i \to u \in X$. Devemos mostrar que $u \in C$. Como (x_n) é uma sequência básica, podemos concluir que $u \in [(x_n)]$.Em particular, como (x_n) é base de Schauder, temos:

$$
u = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i.
$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ notemos,

$$
\begin{cases}
x_n^*(x_n) = 1, \\
x_n^*(x_m) = 0, m \neq n.
\end{cases}
$$

Como cada $x_n^* \in X^*$, então

$$x_n^*(u_k) \to x_n^*(u), \text{ quando } k \to \infty.$$

Mas,

$$x_n^*(u_k) = \sum t_i^{(k)} x_n^*(x_i) = t_n^{(k)},$$

logo tomando o limite quando $k \to \infty$, temos:

$$x_n^*(u) = t_n.$$

Consequentemente

$$\begin{cases} 1 \geq t_1^{(k)} \geq t_2^{(k)} \geq \cdots \\ \quad 1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots, \end{cases}$$

Como $t_n^{(k)} \to t_n$ quando $k \to \infty$, cada t_n satisfaz $1 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq 0$. Isso mostra que $u \in C$. Portanto, C é fechado.

Agora, mostremos C é limitado. Se $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in C$ então,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq (1+\varepsilon) \sup |t_n| \leq (1+\varepsilon),$$

pois $\sup |t_n| \leq 1$.

Finalmente, mostremos que C é convexo, com efeito se $u = \sum t_n x_n \in C$ e $v = \sum s_n x_n \in C$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, então,

$$\lambda u + (1-\lambda) v = \lambda \sum t_n xn + (1-\lambda) \sum s_n x_n = \sum [\lambda t_n + (1-\lambda) s_n] x_n.$$

De maneira análoga, ao provado para c_0, podemos provar a seguinte proposição para espaços ℓ_1.

Proposição 5.2.3. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que X contém uma cópia isomorfa de ℓ_1. Então, para todo $\varepsilon \in (0,1)$, existe um subconjunto $C \subset X$ fechado, convexo e limitado, e existe uma aplicação $T : C \longrightarrow C$ tal que:*

(1) $||Tx - Ty|| \leq (1+\varepsilon) ||x-y||$.

(2) *T é afim,*

(3) $Tp \neq p \quad \forall p \in C.$

Concluímos este capítulo com alguns problemas em aberto.

Problema 1: Seja X um espaço de Banach contendo uma cópia isomorfa de c_0. Então, existe um subconjunto $C \subset X$ fechado, convexo e limitado e existe uma aplicação $T : C \to C$ tal que:

(i) $||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$.

(ii) $Tp \neq p \quad \forall p \in C$.

Problema 2: Existe uma norma $\|.\|$ equivalente em c_0 segundo a qual $(c_0, \|.\|)$ possui a propriedade de ponto fixo.

Problema 3: Todo espaço de Banach reflexivo possui a propriedade de ponto fixo.

Problema 4: Se X é um espaço de Banach isomorfo a ℓ_2, então X possui a propriedade do ponto fixo.

Problema 5: Se X um espaço de Banach. Existe uma aplicação contínua $F : X \to X$ tal que a EDO $u' = F(u)$ não admite solução em nenhum intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

6 CONCLUSÃO

No decorrer deste trabalho ilustramos a importância de cópias isomórficas dos espaços c_0 e ℓ_1 na Teoria dos espaços de Banach bem como em problemas relacionados a duas linhas de pesquisas em Análise Funcional. O trabalho foi dividido essencialmente em duas partes. Na primeira parte, estudamos a noção de distorção em espaços de Banach e como esse conceito se relaciona com os espaços c_0 e ℓ_1. Vimos que tal conexão se deu através dos Teoremas de James, sobre a não-distorcionalidade desses espaços. Em particular, vimos que a técnica de não-distorcionalidade de normas em um espaço contendo uma cópia de c_0 não garante a existência de cópias isométricas. Vimos também que em geral cópias isomórficas de c_0 não implica na existência de cópias assimptoticamente isométricas de c_0. Um estudo análogo foi feito para o espaço ℓ_1.

Na segunda parte dessa dissertação, abordamos duas linhas de pesquisas. A primeira diz respeito a E.D.O.s em espaços de Banach. Mais precisamente, estuda o problema de Peano em espaços de Banach que versa sobre a possibilidade de EDOs abstratas autônomas possuirem soluções. Vimos que se um espaço de Banach X contém uma cópia complementada do espaço c_0, então existe um campo contínuo $F: X \to X$ tal que $u'(t) = F(u(t))$ não admite soluções em nenhum ponto da reta real. A segunda diz sobre a Teoria métrica de pontos fixos em um espaço de Banach no qual colocamos alguns exemplos de aplicações onde o espaço c_0 não possui ponto fixo. Finalizamos essa dissertação com alguns problemas em aberto relacionado ao ponto fixo.

REFERÊNCIAS

ENFLO, P. A counterexample to the approximation problem in banach spaces. **Acta Math.**, v. 130, p. 309–317, 1973.

FABIAN P. HABALA, P. H. V. M. V. Z. M. **Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis**. [*S. l.*]: Springer, 2011. (CMS Books in Mathematics).

GODEFROY, G. The banach space c_0. **Extracta Math.**, v. 16, n. 1, p. 1–25, 2001.

JAMES, R. C. Uniformly non-square banach spaces: Uniformly non-square banach spaces. **The Annals of Mathematics.**, v. 80, n. 3, p. 542–550, 1964.

J.DIEUDONNÉ. Deux exemples singuliers d'équations différentielles. **Acta Sci. Math.**, v. 12, p. 38–40, 1950.

MENDOZA, C. e J. **Banach Spaces of Vector-Valved Functions**. [S.l.]: Springer, 1997.

MILMAN, V. Geometry theory of banach space ii: Geometry of the unit sphere. **Russian Math**, v. 26, p. 79–163, 1971.

ODELL, T. S. E. The distortion problem. **Acta Math**, v. 173, p. 259–281, 1994.

P.N.DOWLING C.J.LENNARD, B. Asymptotically isometric copys of c_0 in banach spaces. **Journal of Mathematics and applications.**, v. 219, n. 2, p. 377–391, 1998.

TEIXEIRA GERALDO BOTELHO, D. P. E. **Fundamentos de Análise Funcional**. [*S. l.*]: SBM, 2015.