



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

IURY DE AMORIM GASPAR FILGUEIRAS

SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO

FORTALEZA

2019

IURY DE AMORIM GASPAR FILGUEIRAS

SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Wilkley Bezerra
Correia

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- F512s Filgueiras, Iury de Amorim Gaspar.
Simulação e controle de um manipulador robótico / Iury de Amorim Gaspar Filgueiras. – 2019.
79 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,
Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia.
1. Robótica. 2. Manipulador Robótico. 3. Indústria 4.0. I. Título.

CDD 621.3

IURY DE AMORIM GASPAR FILGUEIRAS

SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Msc. Felipe José de Sousa Vasconcelos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Msc. Marcus Davi do Nascimento Forte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Deus;

À meus pais, Mirian e Paulo Sergio;

Aos meus avós, Raimunda (que a senhora
descanse em paz) e Gaspar - Raimunda Lopes e
João Filgueiras;

Aos meus irmãos, João Victor e Benjamim.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pois durante todo este percurso estive sempre comigo, me concedendo força e de sua misericórdia.

À minha mãe Mirian e ao meu pai Paulo Sergio que sempre se entregaram de corpo e alma para que eu chegasse até aqui. Aos meus dois irmãos João Victor e Benjamim, constituindo peças fundamentais para minha vida. Aos meus avós por parte de mãe Raimunda e Gaspar, e , por parte de pai Raimunda e João Filgueiras, que sempre me amaram de uma forma com que eu sempre pude me sentir seguro. Agradeço aos meus tios, em especial Paula, Carlos Alberto, Alexandre e Silas, que sempre me ajudaram quando não tinha recursos e materiais para meus estudos, além de me motivarem a estar sempre de pé.

Ao meu grande amigo e irmão Arley. Sua existência em minha vida me tornou/torna sempre um alguém melhor, me motivando, escutando e aconselhando sempre que possível. Nossos momentos de descontração sempre me renovavam.

À minha mais que querida e amável amiga Gláucia Pereira, sem a qual devida ajuda e apoio, este processo de pesquisa teria se tornando muito mais laborioso. Agradeço a Deus por nossos caminhos terem se cruzado nesta etapa tão complexa. E espero podermos um dia estarmos juntos de fato.

Às minha amigas Thayna, Thayane e Soraya. Vocês são especiais na minha vida, nunca me deixando na mão e sempre bem presente em todos os momentos, sejam eles bons ou maus.

Aos meus amigos Kalil e João Rodrigo, que desde o período de escola nunca se esqueceram do valor de nossa amizade, dando o apoio e a força durante esta jornada.

Aos meu querido amigo Leonardo Milfont, o qual serviu como um grande apoio durante este percurso. Suas aulas, apoios em momentos difíceis e dicas me ajudaram de uma forma inexplicável.

Ao meu amigo João Paulo, por sua companhia em laboratórios, conversas e apoio nos trabalhos nas mais variadas disciplinas,

Aos meus líderes da igreja, em especial Hilton, que sempre se dedicou a dar o exemplo do qual tomo para minha vida. Os melhores sábados foram ao seu lado em trabalhos de evangelização. Não poderia finalizar melhor minhas semanas quase sempre atarefadas.

Ao meu professor e orientador Wilkley Bezerra. Suas orientações não me serviram só para trabalhos de disciplinas, artigos e TCC, mas também para a vida toda.

Aos meus colegas de laboratório Juscelino e Vinícius, dos quais sempre foram solícitos em me ajudar nos trabalhos realizados durante minha permanência no LAMOTRIZ, inclusive no TCC.

Ao meu amigo Marcus Davi, do qual durante o período de curso nos tornamos próximos não só em atividades em laboratório, mas amigos para a vida toda, compartilhando dos nossos bons e maus momentos

Ao meu caro colega de laboratório, colaborador de artigo, e, principalmente, a pessoa na qual me inspiro por sua dedicação Felipe Vasconcelos. Nunca me esquecerei de suas ajudas e do nosso artigo que chegou no momento certo.

Ao meu amigo e colega de estágio e monitoria Pedro Victor. Sua ajuda nestes últimos dois anos foi sem precedentes, nunca me esquecerei de seu companheirismo.

Ao meu amigo Guilherme Bezerra, ao seu companheirismo nas merendas da tarde, nas idas ao Ivan, e caronas concedidas.

Ao meu amigo Davi Gomes, você foi uma pessoa sem igual durante todo este período de graduação. Nossas equipes de trabalho sempre obtiveram sucesso por seu empenho e dedicação. Nunca esquecerei suas caronas economizando um enorme tempo ao me deslocar para casa.

Aos técnicos Gledson, Hernandes e Eliezer. O apoio de vocês foram indispensáveis em muitos trabalhos complexos.

Aos colaboradores do PET Engenharia Elétrica, em especial Saynarah e Cecília.

Ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

“Não to mandei eu? Esforça-te, e tem bom ânimo; não te atemorizes, nem te espantes; porque o Senhor teu Deus está contigo, por onde quer que andares.”

(Josué 1:9)

RESUMO

Este trabalho traz consigo os principais conceitos, orientações e regras para o desenvolvimento de um modelo matemático de um manipulador robótico voltado para a simulação em qualquer pacote computacional. Para isto, se faz necessária uma fundamentação teórica dos principais conceitos envolvendo representações de variáveis no espaço tridimensional, bem como das transformações de quadro. De posse desse arcabouço, para o estudo do movimento aplica-se os conceitos de cinemática inversa levando-se em consideração a geometria do robô, possibilitando-se a obtenção de pontos de coordenadas cartesianos em termos das variáveis de juntas do manipulador. Utilizando-se de um controlador Proporcional Derivativo (PD) linear, o experimento simulado baseia-se no seguimento de trajetória para um manipulador robótico de 2 Graus de Liberdade (GDL). Para isto, incorporam-se situações que afetam de forma significativa a atuação do robô em um experimento real. Várias são as considerações acerca do projeto em um ambiente computacional, simplificando-se as equações de forma com que a aplicação torne-se viável. Por fim, apresenta-se os resultados e discussões.

Palavras-chave: Robótica. Manipulador Robótico. Indústria 4.0.

ABSTRACT

This work brings with it the main concepts, orientations and rules for developing a mathematical model of a robotic manipulator for simulation on any computational package. This requires a theoretical foundation of the main concepts involving representations of variables in three-dimensional space as well as of frame transformations. Having this framework, the study of motion applies the concepts of inverse kinematics, taking into account the geometry of the robot, enabling cartesian coordinate points to be obtained in terms of the manipulator's joint variables. Using a linear Proportional Derivative (PD) controller, the simulated experiment is based on trajectory tracking for a 2 Degree of Freedom (DOF) robotic manipulator. For this, situations that significantly affect the robot performance in a real experiment are incorporated. There are several considerations about designing in a computational environment, simplifying the equations so that the application becomes viable. Finally, the results and discussions are presented.

Keywords: Robotics. Robotic Manipulator. Industry 4.0.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do ponto P^A como um vetor no espaço.	23
Figura 2 – Referenciação de um sistema de coordenadas em relação a outro.	24
Figura 3 – Sistema transladado.	25
Figura 4 – Sistema rotacionado.	26
Figura 5 – Representação dos dois tipos de juntas básicas de um manipulador robótico. À esquerda dois modelos de junta prismática e à direita uma junta rotacional comum.	28
Figura 6 – Estrutura de uma junta esférica. Note que cada articulação está associado ao movimento de uma junta rotacional com um único GDL. Os Ângulos de Tait-Bryan são: empinamento (<i>pitch</i>), cabeceio (<i>yaw</i>) e balanceio (<i>roll</i>).	29
Figura 7 – Esquema do problema de cinemática direta.	30
Figura 8 – Manipulador planar simples de 2 elos.	31
Figura 9 – Exemplo de cadeias cinemáticas.	33
Figura 10 – Manipulador com uma junta prismática na base e duas juntas rotacionais nos demais elos.	35
Figura 11 – Posicionamento dos eixos para um manipulador com uma junta prismática e duas rotacionais.	36
Figura 12 – Robô PUMA 560 com seus sistemas de referências.	38
Figura 13 – Representação do espaço de trabalho para um manipulador planar de dois elos, sem restrições.	38
Figura 14 – Dois exemplos de configurações possíveis para um manipulador de 3 elos.	39
Figura 15 – Manipulador planar simples de 2 elos.	40
Figura 16 – Representação da geometria para um manipulador planar de dois elos.	44
Figura 17 – Diagrama de blocos representando o sistema de controle para o manipulador.	46
Figura 18 – Sistema massa-mola.	48
Figura 19 – Sistema em malha fechada. Note que não há trajetória de referência, tratando- se apenas de um regulador de posição.	52
Figura 20 – Sistema de controle em malha fechada utilizando-se o particionamento da lei de controle.	53
Figura 21 – Definindo-se os pontos iniciais e finais, podem existir vários caminhos possí- veis para o robô seguir.	55

Figura 22 – Esquema de controle para seguimento de trajetória.	56
Figura 23 – Esquema de posicionamento dos eixos. Este esquema é baseado na adoção de um sistema de coordenadas B para cada componente do manipulador que se deseja representar no simulador, tanto os elos como o sistema de juntas. Cada componente também é referenciado com um eixo de coordenadas R estabelecendo-se apenas referenciais para conexão entre dois corpos.	58
Figura 24 – Exemplo geral de uma translação entre eixos de um elo e de uma junta rotacional.	59
Figura 25 – Esquematização do circuito equivalente para um motor CC.	60
Figura 26 – Modelo mecânico equivalente de um motor CC.	62
Figura 27 – Diagrama de blocos para o modelo do manipulador adotado.	64
Figura 28 – Diagrama de blocos para o esquema de um controlador PD para cada junta.	65
Figura 29 – Trajetória vertical em linha reta.	67
Figura 30 – Seguimento para uma trajetória triangular.	68
Figura 31 – Seguimento para uma trajetória circular.	69
Figura 32 – Seguimento para uma trajetória em espiral.	69
Figura 33 – Seguimento para uma trajetória senoidal.	70
Figura 34 – Trajetória vertical em linha reta.	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para um manipulador com um junta prismática e duas rotacionais.	35
Tabela 2 – Especificações dos parâmetros do manipulador para simulação	65
Tabela 3 – Parâmetros calculados para o controlador PD.	66

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CC	Corrente Contínua
D-H	Denavit-Hartenberg
GDL	Graus de Liberdade
MIMO	<i>multiple-input;multiple-output</i>
PD	Proporcional Derivativo
SISO	<i>single-input;single-output</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

ζ	Taxa de Amortecimento
b	Coefficiente de atrito
k	Coefficiente de amortecimento
k_p	Constante de proporcionalidade
k_v	Constante de velocidade
t_i	Instante de tempo inicial
t_f	Instante de tempo final
q	Carga elétrica
B	Densidade de campo magnético
k_m	Constante de torque do motor
i_a	Corrente de armadura
v_b	Força contraeletromotriz
k_b	Constante da força contraeletromotriz
η	Relação de engrenagens
I_m	Inércia do atuador
I_c	Inércia da carga
b_m	Coefficiente de atrito viscoso do atuador
b_c	Coefficiente de atrito da carga
ω_n	Frequência natural de laço fechado
ω_{res}	Frequência de ressonância estrutural
f_c	Frequência de corte
L_a	Indutância de armadura
T_{sim}	Tempo de simulação
T_s	Tempo de amostragem
f_s	Taxa de amostragem

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Objetivos	20
<i>1.1.1</i>	<i>Objetivos gerais</i>	<i>20</i>
<i>1.1.2</i>	<i>Objetivos específicos</i>	<i>20</i>
1.2	Justificativa	20
1.3	Motivação	21
1.4	Organização do trabalho	21
2	TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS E REPRESENTAÇÃO DOS MOVIMENTOS	23
2.1	Descrição da posição e da orientação	23
2.2	Transformações homogêneas	24
<i>2.2.1</i>	<i>Translação</i>	<i>25</i>
<i>2.2.2</i>	<i>Rotação</i>	<i>26</i>
3	CINEMÁTICA DOS MANIPULADORES	28
3.1	Descrição do mecanismo	28
3.2	Cinemática direta	30
<i>3.2.1</i>	<i>Convenção de Denavit-Hartenberg</i>	<i>32</i>
3.3	Cinemática inversa	37
<i>3.3.1</i>	<i>Método Algébrico</i>	<i>40</i>
<i>3.3.2</i>	<i>Método geométrico</i>	<i>44</i>
4	CONTROLE LINEAR DOS MANIPULADORES	46
4.1	Sistemas de segunda ordem: modelo massa-mola	47
<i>4.1.1</i>	<i>Resposta sobreamortecida</i>	<i>48</i>
<i>4.1.2</i>	<i>Resposta subamortecida</i>	<i>49</i>
<i>4.1.3</i>	<i>Resposta criticamente amortecida</i>	<i>50</i>
4.2	Controle independente para as juntas	51
4.3	Controle de trajetória	54
<i>4.3.1</i>	<i>Trajетória desejada</i>	<i>54</i>
<i>4.3.2</i>	<i>Controle de seguimento de trajetória</i>	<i>56</i>
5	MODELAGEM COMPUTACIONAL E RESULTADOS	57

5.1	Transformação de quadros e referenciação dos eixos para os componentes do manipulador	57
5.2	Modelagem de uma junta	59
5.2.1	<i>Indutância do motor</i>	61
5.2.2	<i>Considerações de inércia</i>	61
5.2.3	<i>Flexibilidade e ressonância</i>	63
5.2.4	<i>Controle para o modelo de uma junta</i>	63
5.3	Experimento simulado	64
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	72
	REFERÊNCIAS	74
	APÊNDICES	76
	APÊNDICE A – Metodologia de simulação para o seguimento de trajetória de um manipulador	76
	APÊNDICE B – Códigos-fontes utilizados para as trajetórias e cinemática inversa	77

1 INTRODUÇÃO

A primeira vez em que o conceito da palavra *robô* foi utilizado se tratava de uma peça teatral ocorrida em 1920, utilizando-se da palavra "robota- escravidão, servidão (GROOVER *et al.*, 1986). De fato, o que muitos filmes de ficção científica mostravam na época era a personalização de máquinas, atribuindo-lhes comportamentos inerentes ao ser humano, humanoides. Essa popularização instigou muitos ao desenvolvimento de trabalhos que buscassem o desenvolvimento de máquinas tão eficientes quanto, ou até melhores, do que os serviços que um ser humano pudesse realizar.

Para a indústria, a definição de eficiência aliada à rapidez são cruciais nos seus processos produtivos. Desta forma, a utilização de instrumentos que viabilizassem uma produção em larga escala, a automatização de atividades e a realização de tarefas complexas possibilitou um caminho para o progresso nos estudos em áreas relacionadas à robótica. O desenvolvimento de sistemas mais sofisticados foi possível após o fim da Primeira Guerra Mundial com o crescimento da indústria bélica experimentado pelos Estados Unidos (STEFFEN, 2011), assim, tem-se a origem do primeiro robô industrial criado pela *General Motors* chamado UNIMATE, instalando-o em sua linha de montagem (SICILIANO; KHATIB, 2007).

Os robôs são divididos basicamente em três categorias: os Manipuladores - Robôs Industriais; Veículos Autoguiados (AGV) e os Robôs Móveis. Cada grupo possui especificidades distintas, no entanto, restringindo-se a análise para os manipuladores, este grupo possui uma versatilidade muito alta, podendo ser usados na manipulação de materiais, soldadura, pintura a *spray*, na pulverização de produtos agrícolas e entre outras aplicações. Hoje em dia, a propagação desta tecnologia torna em alguns casos a sua aplicação imprescindível, como é o caso das linhas de montagens, estimulando cada vez mais a parceria entre indústrias e instituições acadêmicas para o desenvolvimento de sistemas mais complexos e que atendam à realidade de cada serviço requisitado.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos gerais

O presente trabalho dedica-se à apresentação de um método de implementação em softwares matemáticos com o complemento de visualizadores gráficos para a modelagem, o controle e a representação do movimento de robôs manipuladores. Desta forma, utiliza-se das principais abordagens clássicas difundidas pela literatura para a composição de um ambiente simulado que seja generalista em sua aplicabilidade. As discussões apresentadas visam um modelo simplificado em suas equações cinemáticas e dinâmicas para uma melhor absorção dos conceitos apresentados.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho podem ser resumidos em

- Modelagem matemática de um robô manipulador;
- Estudo da implementação de um método de controle, com vistas para o controlador PD;
- Implementação de um ambiente simulado observando-se as características do robô em relação ao seu desempenho quanto aos sinais de referência estabelecidos.

1.2 Justificativa

Através dos tempos, houve uma grande disseminação dos robôs manipuladores em ambiente industrial (STEFFEN, 2011). A parceria entre indústria e unidades acadêmicas se tornou um instigador importante para a inovação tecnológica, chegando-se ao conceito da indústria 4.0. Este termo atual explica a aplicação das tecnologias em ascensão nas principais atividades industriais. Os manipuladores robóticos constituem-se como um pilar desta nova revolução industrial, oferecendo dinamismo e agilidade ao processo de automação. Desta forma, a apreensão dos principais conceitos quanto ao estudo dos manipuladores se torna relevante, de forma que o desenvolvimento de ferramentas para a implementação destes mecanismos seja cada vez mais ampliado e possibilite uma familiarização com esta área.

1.3 Motivação

Tendo em vista a grande complexidade de tarefas que os robôs manipuladores são capazes de realizar, muitos se utilizam de uma linguagem de programação própria, assim, os trabalhos desenvolvidos no meio acadêmico são limitados pelas restrições impostas pelo fabricante (BOMFIM, 2013). Assim, a agregação do conhecimento básico quanto aos princípios sólidos sobre a matemática e implementação computacional de um robô manipulador industrial facilita o desenvolvimento de sistemas sem a necessidade de perscrutar peculiaridades de cada fabricante. Ademais, se estabelece uma base para a estruturação do próprio modelo computacional.

1.4 Organização do trabalho

Para a estruturação do presente trabalho, adota-se a seguinte metodologia de estudo

1. **Introdução:** Este capítulo contém uma contextualização geral sobre os manipuladores robóticos, suas aplicações e como o seu desenvolvimento está entrelaçado com as necessidades de inovação dos processos produtivos. Ainda inclui-se os princípios básicos de apresentação do projeto tais como os objetivos, a justificativa e a motivação do estudo.
2. **Transformações Homogêneas e Representação dos Movimentos:** Partindo-se do princípio mais básico do estudo do movimento, este capítulo traz consigo as formas de representação no espaço de corpos rígidos e as relações entre pontos no espaço. Assim, definem-se as representações de pontos, vetores, orientações num espaço vetorial, e, o conceito de transformações de quadros. Esta definição é de suma importância, pois serve de base para vários outros princípios a serem apresentados.
3. **Cinemática dos Manipuladores:** Para o entendimento de como o manipulador movimentase no espaço geométrico, a cinemática é responsável pelo estudo da posição, velocidade e aceleração correlacionado-se as variáveis de juntas com as variáveis cartesianas, desconsiderando-se a aplicação de força no sistema. Partindo-se disto, a cinemática pode ser dividida em duas problemáticas: a cinemática direta e inversa, A escolha do método a ser aplicado dependerá da abordagem desejada para montagem computacional.
4. **Controle Linear dos Manipuladores:** Sabendo-se do comportamento cinemático dos

manipuladores, é possível estender o conceito para a utilização de um controlador. Neste capítulo, será abordada uma metodologia para o desenvolvimento de uma lei de controle que se adéque ao modelo de um manipulador. Para isto, será considerado cada componente do robô separadamente para o desenvolvimento de modelos mais simplistas e que sejam razoáveis para a utilização de um controlador linear.

5. **Modelagem Computacional e Resultados:** Este capítulo se aplica às regras e orientações para o desenvolvimento de uma simulação que se adéque a qualquer pacote computacional. Desta forma, ele aborda os principais problemas e considerações a serem feitas quanto à aplicabilidade da fundamentação teórica a ser desenvolvida. Uma destas considerações é a dinâmica do manipulador, e, as considerações sobre imperfeições físicas do sistema. Ao se estabelecer isto, segue-se a implementação de um exemplo de simulador, apresentando-se os resultados de seguimento de trajetória.

6. **Conclusão:** Por fim, este último capítulo trata das considerações gerais sobre os conceitos apresentados e uma discussão crítica acerca dos resultados de simulação.

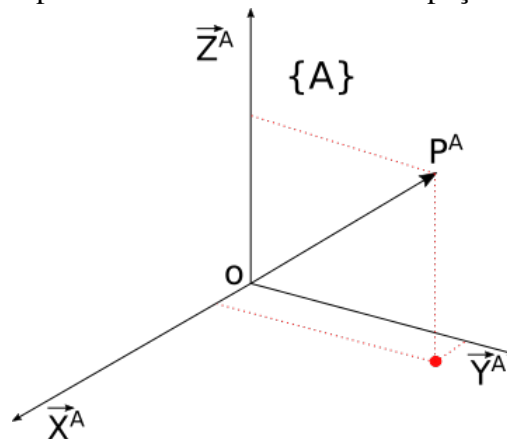
2 TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS E REPRESENTAÇÃO DOS MOVIMENTOS

Antes do desenvolvimento matemático a respeito do movimento do manipulador, torna-se necessário estabelecer o sistema de referência ou coordenadas dos quais se pode designar a orientação e a posição de corpos no espaço de n dimensões. As peças e os próprios elos do robô podem constituir estes objetos. Além disso, necessita-se saber os atributos vetoriais destes corpos, tais como posição, velocidade e aceleração, de um sistema de referência para outro o que é evidenciado pelas transformações homogêneas entre os quadros.

2.1 Descrição da posição e da orientação

Considerando um sistema no \mathcal{R}^3 , a posição de um ponto no espaço tridimensional pode ser representada por um vetor de dimensões 3×1 . Considere a Figura 1

Figura 1 – Representação do ponto P^A como um vetor no espaço.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Pode-se definir o ponto P_A referenciado ao sistema de referência $\{A\}$ em que seus valores individuais representam a projeção em relação à cada eixo do sistema. Seus elementos são representados da seguinte forma $P_A = [p_x, p_y, p_z]$.

Desta forma, pode-se ter uma representação da localização da extremidade de cada junta, se assim for requerido. No entanto, somente esta informação é insuficiente para a formulação matemática do modelo. Faz-se necessário a compreensão da orientação do objeto. Ao se fixar um sistema de coordenadas no próprio corpo $\{B\}$ (CRAIG, 2009) e referenciá-lo em relação a $\{A\}$ são estabelecidas condições suficientes para a orientação do objeto (Figura 2). As

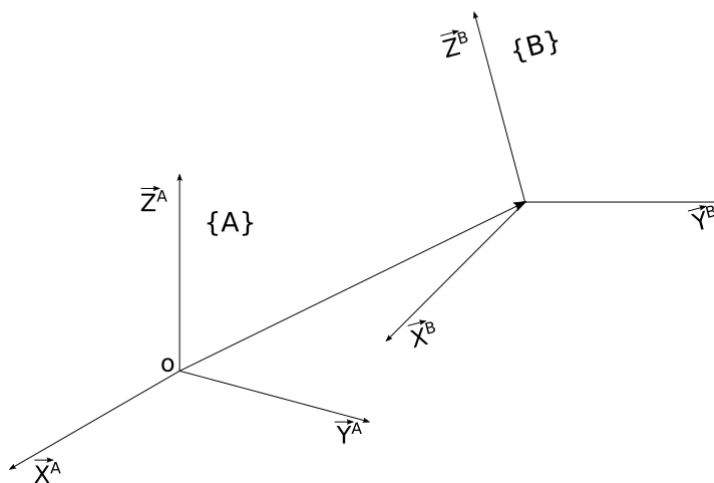
direções de cada eixo em relação ao sistema referenciado podem ser representadas por vetores unitários da forma \vec{X}_B^A , \vec{Y}_B^A e \vec{Z}_B^A . A composição destes vetores resultará numa matriz 3x3 com produto escalar de pares de vetores unitários denominada de **matriz rotacional** R_B^A .

$$R_B^A = \begin{bmatrix} \vec{X}_B^A & \vec{Y}_B^A & \vec{Z}_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \cdot x_A & y_B \cdot x_A & z_B \cdot x_A \\ x_B \cdot y_A & y_B \cdot y_A & z_B \cdot y_A \\ x_B \cdot z_A & y_B \cdot z_A & z_B \cdot z_A \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A matriz R possui colunas ortonormais, desta forma e de acordo com (SPONG *et al.*, 2005), pode-se destacar algumas propriedades da matriz rotacional:

- As colunas de R^{-1} são mutuamente ortonormais;
- O inverso de uma matriz rotacional é igual a sua transposta. $R^{-1} = R^T$;
- $\det(R) = 1$.

Figura 2 – Referenciação de um sistema de coordenadas em relação a outro.



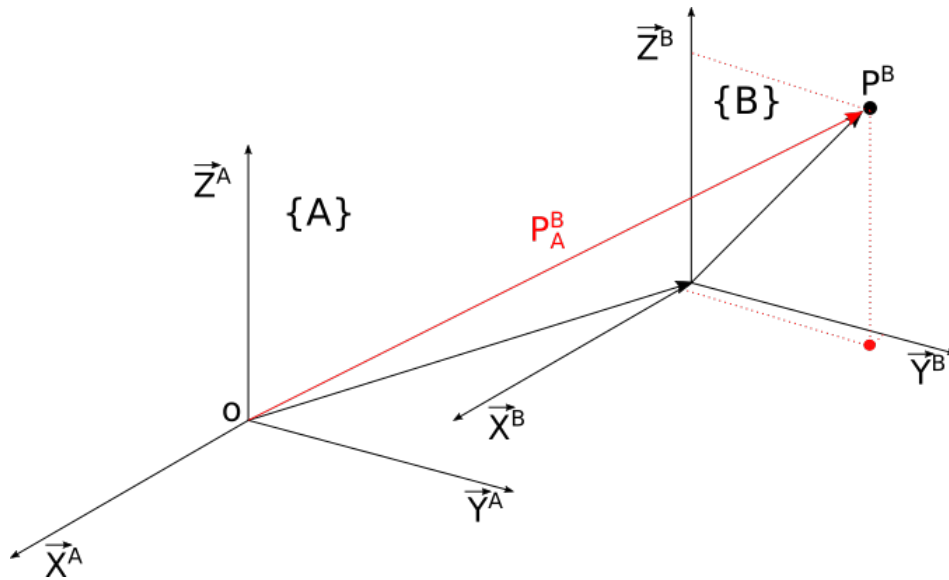
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

2.2 Transformações homogêneas

Em um espaço euclidiano, pode-se relacionar os conceitos de posição e orientação de um corpo de um quadro em relação ao outro de forma simultânea através de transformações matriciais. Desta forma é possível definir algumas operações no plano cartesiano tridimensional como a translação e a rotação.

2.2.1 Translação

Figura 3 – Sistema transladado.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Sejam os vetores $P = [p_1, p_2, p_3]$ e $Q = [q_1, q_2, q_3] \in \mathfrak{R}^3$, a transformação

$$T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$$

$$(p_1, p_2, p_3) \rightarrow T(p_1, p_2, p_3) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$$

é denominada uma **translação**.

Um ponto no espaço é deslocado por uma distância finita ao longo de uma direção estabelecida. Assim, para a Figura 3, tem-se:

$$P_A^B = P_2^A = T(q_A)P_1^A = P_1^A + Q^A \quad (2.2)$$

onde

$$T(q_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

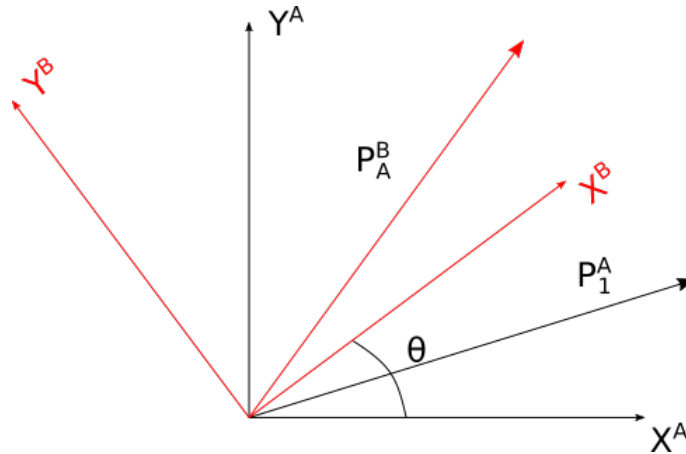
e

$$q_A = | Q^A | \quad (2.4)$$

2.2.2 Rotação

Considere o sistema dextrogiro representado na Figura 4

Figura 4 – Sistema rotacionado.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A rotação de P_1^A em torno do eixo z resultará no novo ponto P_2^A dado da seguinte forma:

$$P_A^B = P_2^A = R_z(\theta)P_1^A \quad (2.5)$$

onde

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que $R(\theta)$ realiza uma rotação R em torno de \mathbf{Z} de θ graus. A representação matricial para uma rotação pura anula todos os elementos do vetor posição. Como a matriz de rotação R é idêntica à matriz que rotaciona os sistemas de referência, a representação matricial da rotação para os outros eixos é dado na forma:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta & -s\psi & 0 \\ -c\phi s\theta + s\phi s\psi c\theta & c\phi c\theta + s\phi s\psi s\theta & s\phi c\psi & 0 \\ s\phi s\theta + c\phi s\psi c\theta & -s\phi c\theta + c\phi s\psi s\theta & c\phi c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Sendo R_{xyz} a matriz rotacional que compõe as rotações em todos os eixos na ordem indicada.

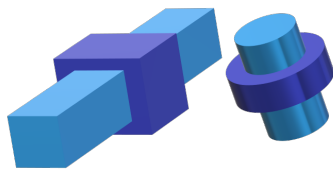
3 CINEMÁTICA DOS MANIPULADORES

A cinemática é responsável pelo estudo do movimento do robô em relação a um sistema de referência sem levar em consideração as forças que atuam sobre ele (SPONG *et al.*, 2005). Ela se preocupa com a descrição analítica do movimento espacial do robô bem como todas as propriedades que traz consigo baseadas no tempo. De acordo com as propriedades e o sistema de referência de cada junta, pode-se obter a posição e orientação de cada mecanismo que compõe o robô em relação ao quadro global e como função das variáveis dessas juntas. A cinemática aborda dois problemas fundamentais: **cinemática direta** e **cinemática inversa**.

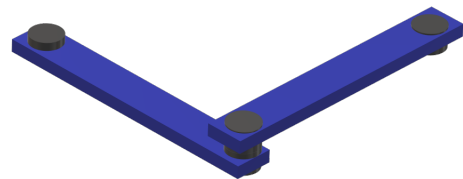
3.1 Descrição do mecanismo

Um manipulador robótico é composto por uma sequência de elos ligados entre si através das juntas, e ao final da sequência, localiza-se o punho ou efetuador (LIMA, 2016). Os variados movimentos e alcances que este pode tomar baseiam-se na constituição dessas juntas e do respectivo tamanho de cada elo. Basicamente pode-se destacar dois tipos de juntas: rotacionais e prismáticas, Figura 5. Cada uma delas possui um único grau de liberdade - rotacional: o ângulo de rotação; prismática: deslocamento linear.

Figura 5 – Representação dos dois tipos de juntas básicas de um manipulador robótico. À esquerda dois modelos de junta prismática e à direita uma junta rotacional comum.



(a) Modelo de junta prismática.
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

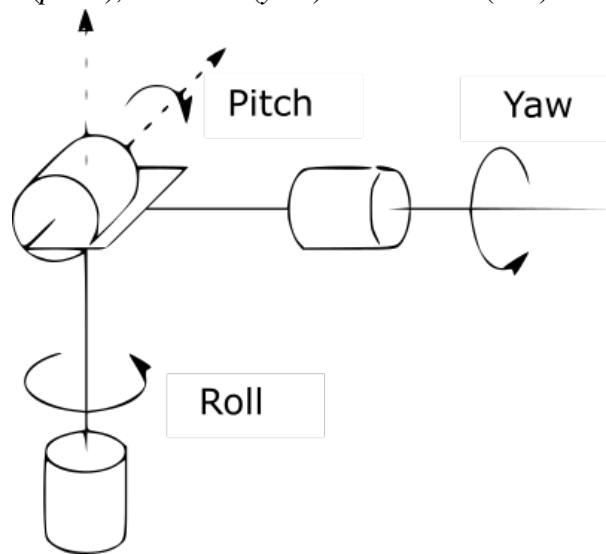


(b) Modelo de junta rotacional.
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Todas as outras juntas podem ser baseadas na combinação destas duas básicas. Sem perdas de generalidade, uma junta esférica e em soquete, com dois graus de liberdade, podem ser compostas por uma composição de juntas rotacionais com um único grau de liberdade cada,

onde o comprimento de cada elo é nulo. Cada uma dessas componentes realiza um movimento específico no espaço que pode ser representado a partir dos **Ângulos de Tait-Bryan** (Figura 6). Utilizados normalmente nas aplicações aeroespaciais, são um tipo específico dos ângulos de Euler usados para descrever a orientação de um corpo rígido girante num espaço cartesiano tridimensional.

Figura 6 – Estrutura de uma junta esférica. Note que cada articulação está associado ao movimento de uma junta rotacional com um único GDL. Os Ângulos de Tait-Bryan são: empinamento (*pitch*), cabeceio (*yaw*) e balanceio (*roll*).



Fonte: Adaptado de (SPONG *et al.*, 2005).

A Figura 6 representa a composição de uma junta esférica. Como se pode observar, esta estrutura possibilita a rotação nos três eixos cartesianos partindo-se do princípio apresentado na equação 2.6. Normalmente, em aplicações industriais, este tipo de junta é utilizada para a representação da dinâmica do efetuador final, tendo em vista as poucas restrições relacionadas ao seu alcance. Apesar de sua grande aplicabilidade, este tipo de efetuador é omitido neste trabalho, interessando-se apenas o estudo do movimento do manipulador como um todo.

Cada parte do manipulador pode ser enumerada. Desta forma, o elo da base imóvel começa em 0, e, as demais partes móveis são incrementadas em uma unidade. Desde que cada junta conecte dois elos, para n juntas tem-se $n - 1$ elos. Para cada junta é considerado um sistema de referência local, sendo o sistema de referência da base imóvel chamado de referencial inercial

ou quadro inercial. Por assim dizer, cada elo é responsável por fixar rigidamente dois eixos de juntas.

3.2 Cinemática direta

Para robôs manipuladores industriais, é de grande interesse a aplicabilidade do controle e da programação como um todo a partir das observações das coordenadas existentes com relação ao efetuador final. Naturalmente é mais fácil associar um movimento do efetuador relacionado às variáveis de coordenadas articulares do que as variáveis relacionadas às articulações em si. Desta forma, para que haja esta correspondência entre as variáveis, existe uma intermediação dada por uma transformação geométrica, Figura 7.

Figura 7 – Esquema do problema de cinemática direta.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Considerando a i – esima junta variando de 1 a N , pode-se associar a cada junta uma variável q_i . Para o caso de uma junta de revolução $q_i = \theta_i$; caso seja uma junta prismática $q_i = d_i$. Desta forma é possível expressar a cinemática direta da forma:

$$X = f(q) \quad (3.1)$$

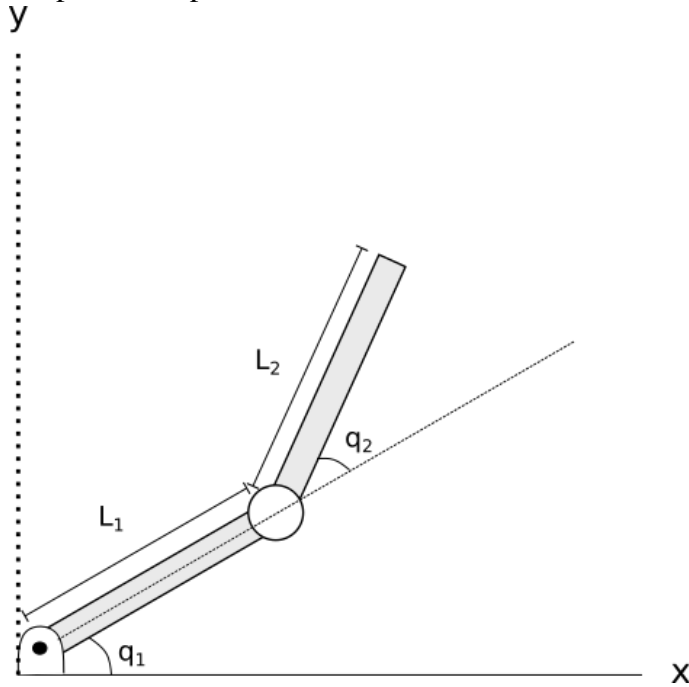
onde

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_N) \text{ e}$$

$$X = [X_I^T \ X_{II}^T], \text{ em que } X_I \text{ se refere à posição e } X_{II} \text{ à orientação.}$$

Geralmente é um pouco complicado encontrar estas relações, no entanto, para os casos mais simples, mediante uma consideração geométrica, este problema se torna mais fácil de ser resolvido. Considere o manipulador planar de 2 GDL

Figura 8 – Manipulador planar simples de 2 elos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

De acordo com o sistema da Figura 8 as equações cinemáticas podem ser expressas como

$$\begin{aligned} x &= L_1 \cos(q_1) + L_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y &= L_1 \sin(q_1) + L_2 \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para manipuladores com um número maior de graus de liberdade, as equações podem ser expressas em termos matriciais considerando a matriz de transformação homogênea T_N . Com esta matriz é possível associar um sistema de coordenadas solidária a base do robô com o sistema de coordenadas do efetuador através do produto sucessivo das matrizes de transformação A_i^{i-1} , representando as sucessivas transformações entre um quadro e outro. Por exemplo, A_1^0 representa uma transformação do quadro de referência 0 para o sistema 1, A_2^1 representa do sistema 1 para 2 e assim por diante. Assim, tem-se:

$$T_N = A_N^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 \dots A_{N-1}^{N-2} A_N^{N-1} \quad (3.3)$$

Então, para o manipulador considerado na Figura 8, as transformações se resumem em

$$T_2 = A_2^0 = A_1^0 A_2^1 \quad (3.4)$$

Para se estabelecer uma relação entre dois elementos do manipulador, vários são os sistemas de referências que podem ser estabelecidos a cada elemento, no entanto, Denavit-Hartenberg Denavit-Hartenberg (D-H) estabeleceram um sistema mais habitual utilizado em robótica. Denavit-Hartenberg desenvolveram em 1955 (DENAVID; HARTENBERG, 1955)(HARTENBERG; DENAVIT, 1964) um sistema padronizado de quatro parâmetros para se estabelecer um sistema de referência a cada elo de um manipulador, contribuindo para a análise cinemática completa de sistemas robóticos, já que poderia se determinar a continuação das equações cinemáticas da cadeia como um todo. (PAUL, 1981). De acordo com o esquema proposto, determinando-se de forma adequada o sistema de referência para cada elo, somente seria necessário 4 transformações simples para passar ao sistema do elo seguinte, dependendo apenas da geometria do robô.

3.2.1 *Convenção de Denavit-Hartenberg*

Para se entender melhor o conceito, faz-se necessário abordar algumas definições básicas. Todo manipulador é caracterizado pela composição de corpos rígidos ligados entre si através dos elos, o que se chama de **cadeia cinemática**, Figura 9. Esta pode ser dividida de duas formas (CARRARA, 2015) :

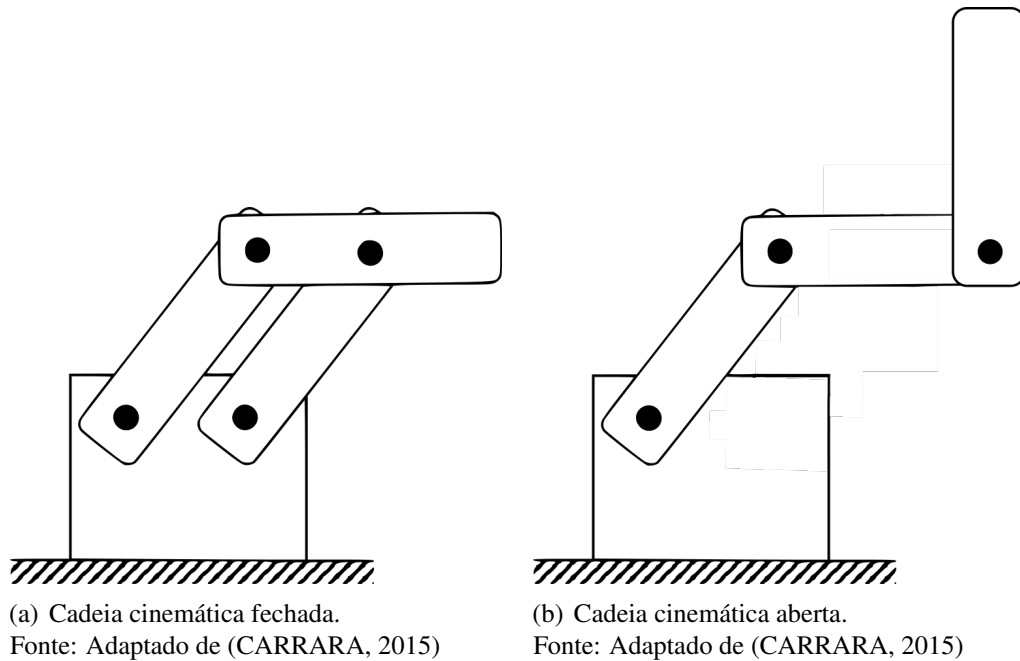
- **Cadeia cinemática aberta:** Nessa configuração, a origem é mantida fixa e os movimentos são realizados pelas inserções. Ou seja, partindo-se da base chega-se ao efetuador final através de um único caminho;
- **Cadeia cinemática fechada:** Neste tipo de configuração as extremidades distais (ponto mais afastado da origem) são fixas. Não existe um único caminho para se chegar ao efetuador.

A representação D-H permite obter-se as coordenadas de um elo ligado a uma junta em relação às coordenadas da junta anterior. Desta forma, por meio de rotações e translações sucessivas é possível obter as coordenadas do efetuador final sendo expressas matematicamente em termos das coordenadas fixadas na base.

As regras básicas para se estabelecer o sistema de referência para cada elo se dá da seguinte forma:

1. O eixo Z_{i-1} fica na direção do eixo da junta i .
2. O eixo X_i é normal ao eixo Z_{i-1} .

Figura 9 – Exemplo de cadeias cinemáticas.



3. O eixo \mathbf{Y}_i complementa o sistema de coordenadas cartesiano.

Conforme verificado, uma transformação está associada ao eixo \mathbf{Z} e a outra associada ao eixo \mathbf{X} . Assim, as transformações associadas ao robô de N elos podem ser representadas como

$$T_N = Z_1 X_1 Z_2 X_2 \dots Z_{N-1} X_{N-1} Z_N. \quad (3.5)$$

Os quatro parâmetros das juntas e elos são:

- \mathbf{d}_i : Caso haja uma junta prismática, representa o deslocamento na direção de \mathbf{Z}_{i-1} na interseção entre este e \mathbf{X}_i ;
- \mathbf{a}_i : Representa o deslocamento na direção do eixo \mathbf{X}_i a partir da intersecção entre os eixos \mathbf{Z}_{i-1} e \mathbf{X}_i à origem do sistema;
- θ_i : Caso haja uma junta rotacional, representa o deslocamento angular em torno de \mathbf{Z}_{i-1} medido entre \mathbf{X}_{i-1} e \mathbf{X}_i ;
- α_i : Representa o deslocamento angular em torno de \mathbf{X}_i medido entre \mathbf{Z}_{i-1} e \mathbf{Z}_i .

Como o produto de matrizes não é cumulativo, as transformações podem ser agora melhor especificadas de acordo com a seguinte ordem:

1. Deslocamento angular de θ_i em torno de \mathbf{Z}_i .

$$R_z(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Deslocamento d_i na direção do eixo \mathbf{Z}_i .

$$D_z(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Deslocamento de a_i na direção de \mathbf{X}_i .

$$D_x(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Deslocamento angular de α_i em torno de \mathbf{X}_i .

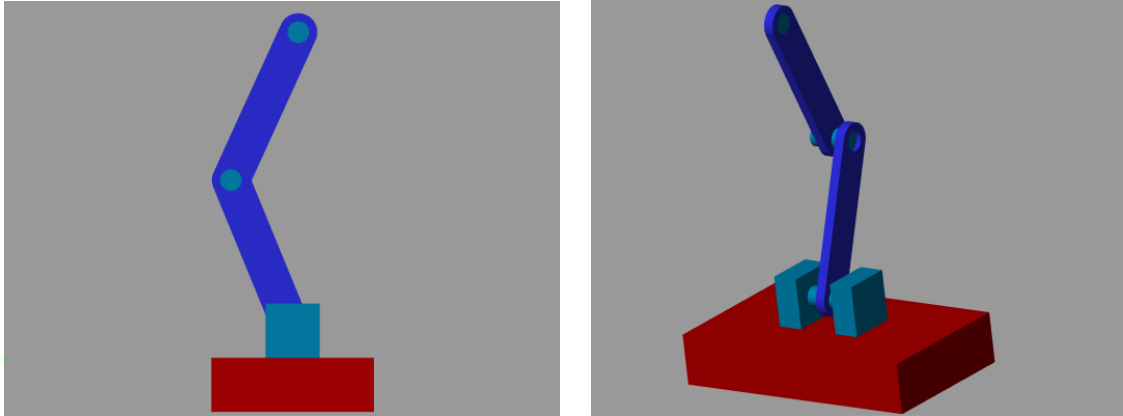
$$R_x(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$T_i^{i-1} = R_z(\theta_i)D_z(d_i)D_x(a_i)R_x(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Considere agora um manipulador robótico com uma junta prismática localizada na base e duas juntas rotacionais entre os demais elos como se verifica na Figura 10.

Figura 10 – Manipulador com uma junta prismática na base e duas juntas rotacionais nos demais elos.



(a) Vista lateral. Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

(b) Vista em perspectiva.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O manipulador possui 2 GDL, onde as duas juntas rotacionais permitem seu movimento em um plano estabelecido e a junta prismática possibilita o movimento na direção de um eixo ortogonal a este plano. De acordo com a notação de Denavit-Hartenberg, o sistema de referência de cada junta pode ser posicionado como mostra a Figura 11.

Tomando-se θ_2 e θ_3 como os respectivos ângulos de cada elo no plano xy e d o deslocamento do manipulador na direção do eixo Z , os parâmetros podem ser dados conforme a Tabela 1.

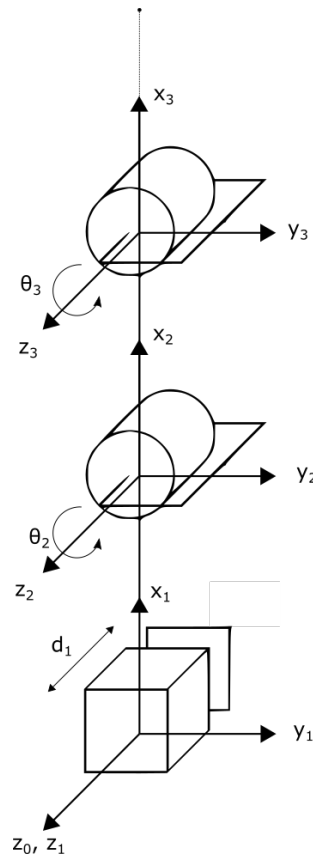
Tabela 1 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para um manipulador com um junta prismática e duas rotacionais.

Elo	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	0
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Usando-se como referência a matriz de transformação 3.6, o manipulador da Figura 10 possui as consecutivas transformações

Figura 11 – Posicionamento dos eixos para um manipulador com uma junta prismática e duas rotacionais.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_3 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & a_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & -x_3 - x_4 & 0 & a_3(x_1 - x_2) + a_2 \cos \theta_2 \\ x_4 + x_3 & -x_2 + x_1 & 0 & a_3(x_4 + x_3) + a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde $x_1 = \cos \theta_2 \cos \theta_3$, $x_2 = \sin \theta_2 \sin \theta_3$, $x_3 = \cos \theta_2 \sin \theta_3$, $x_4 = \sin \theta_2 \cos \theta_3$

3.3 Cinemática inversa

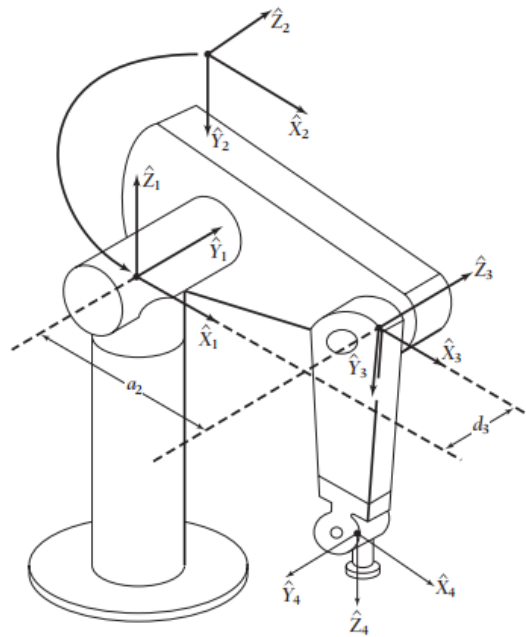
Na cinemática direta, o problema se resume em encontrar a posição e a orientação do efetuador dadas as variáveis de juntas do manipulador. Ao contrário deste método, o problema de cinemática inversa é mais complexo. Este, ao contrário do anterior, busca obter as variáveis de juntas do manipulador de acordo com a posição e orientação final estabelecidas para o efetuador final. Para se encontrar os valores de cada variável é necessário dividir o problema em duas partes relevantes:

1. Fazer as transformações de quadros do punho **B** em relação ao sistema de referência inercial, ou global **W**, para que se determine seu sistema de coordenadas.
2. Usar a cinemática inversa para se encontrar as variáveis de cada junta.

A complexidade em se trabalhar com a cinemática inversa é atestada quando o número de graus de liberdade é grande. Ou seja, para um robô composto somente de juntas rotacionais com $n = 6$, tem-se uma matriz de transformação T_6^0 com doze valores numéricos, excluindo-se os quatro triviais, resultando nos ângulos $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_6$ como é o caso do robô PUMA 560 (ROBERTO, 2012), Figura 12. Ou seja, tem-se doze equações e seis incógnitas. Como é o caso deste e de muitos robôs com um grau de liberdade elevado, estas equações podem ser não lineares e transcendentais, o que as tornariam muito complexas de serem resolvidas.

Uma grande preocupação em se trabalhar com a cinemática inversa é a possível inexistência de solução e, de outra forma, a existência de múltiplas soluções. Para o primeiro caso, é essencial a definição de um termo importante para se trabalhar com a existência ou não de solução para a cinemática inversa, o **espaço ou volume de trabalho** (COSTA, 2003)(CRAIG, 2009)(OLIVEIRA, 2012). O espaço de trabalho representa a localização no espaço do volume

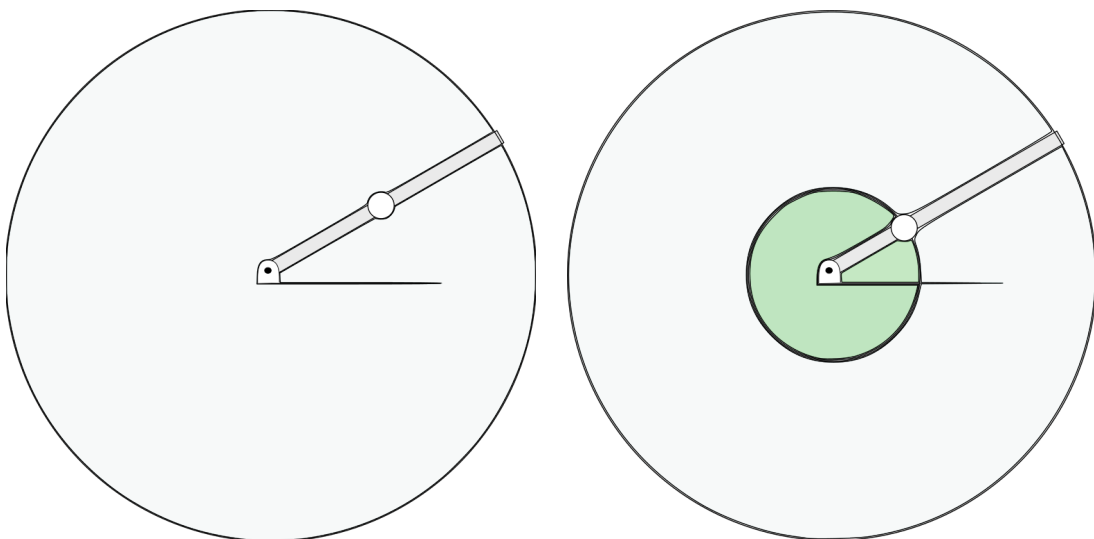
Figura 12 – Robô PUMA 560 com seus sistemas de referências.



Fonte: (CRAIG, 2009).

alcançável pelo manipulador robótico. A grosso modo, se um manipulador consegue alcançar um ponto definido dentro deste espaço de trabalho, é possível achar pelo menos uma solução.

Figura 13 – Representação do espaço de trabalho para um manipulador planar de dois elos, sem restrições.



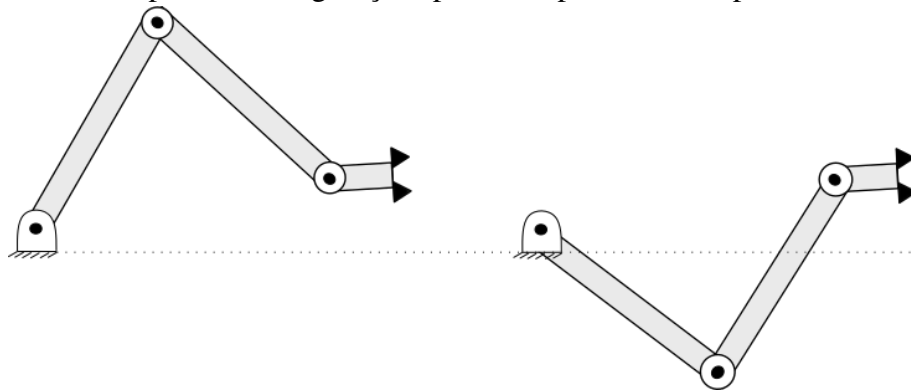
(a) Elos com o mesmo comprimento.
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

(b) Elos com comprimentos diferentes.
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Para um robô manipulador planar simples com apenas 2 elos, o seu espaço de trabalho pode ser definido por um círculo se os dois elos possuírem o mesmo comprimento, ou seja, $L_1 = L_2$ - Figura 13 (a), sendo o raio definido por $L_1 + L_2$. Se o comprimento dos elos forem diferentes, o espaço de trabalho é definido por um anel de raio externo $L_1 + L_2$ e raio interno $|L_1 - L_2|$ - Figura 13 (b), considerando que todas as juntas podem mover-se livremente em 360° . No entanto, para a maioria dos casos existentes, os limites de cada junta é um subespaço dentro do total de 360° . No exemplo da Figura 10, a junta 2 não poderia ultrapassar um ângulo de 180° , permitindo somente uma orientação para cada ponto.

Do contrário da inexistência de solução para uma configuração desejada pelo usuário, o manipulador pode apresentar para certos pontos e orientações um número variado de soluções possíveis. Para um manipulador planar de três elos, a Figura 14 exemplifica as possíveis configurações que ele pode tomar para alcançar o mesmo ponto com a mesma orientação.

Figura 14 – Dois exemplos de configurações possíveis para um manipulador de 3 elos.



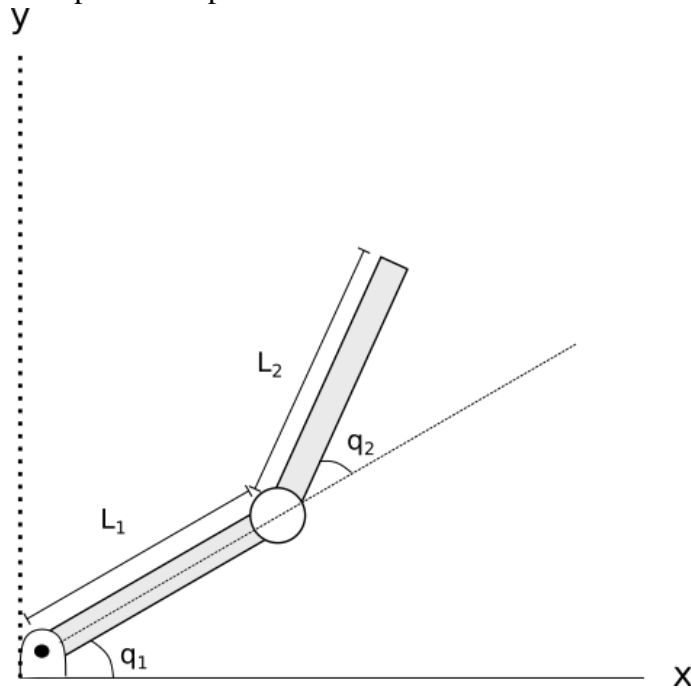
Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Assim, é necessário um critério que faça com que o algoritmo identifique qual a melhor configuração para o caso. Uma das formas é definir aquela da qual haverá menor movimentação até o ponto desejado, desta forma, é preciso a inclusão em código sobre informações da posição atual do manipulador. Essa estratégia pode não se aplicar para o caso da existência de obstáculos no caminho, o que pode favorecer a escolha de outra posição que não a mais próxima. O número de soluções aumenta conforme o número de juntas, ela também depende dos parâmetros dos elos e de seus respectivos alcances (CRAIG, 2009).

Restringindo-se a análise para as soluções fechadas é possível garantir que todas as soluções possíveis sejam encontradas, do contrário, soluções numéricas demonstram-se geralmente muito mais lentas em detrimento de suas correspondentes da forma fechada (ETHAL, 1992). Além do mais é de extrema importância um projeto de um manipulador que possua solução analítica, de forma que hoje em dia muitos manipuladores industriais são projetados de forma a simplificar bastante sua configuração para que uma solução de forma fechada seja facilmente desenvolvida. A seguir serão exemplificados dois métodos para a obtenção da solução de cinemática inversa. Para uma descrição clara de cada um deles, o problema será simplificado para o caso de um manipulador planar com duas juntas rotacionais.

3.3.1 Método Algébrico

Figura 15 – Manipulador planar simples de 2 elos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Considerando novamente o braço robótico planar mostrado na Figura 15, a descrição

do subespaço (LIMA, 1995) T_W^B , ou T_0^2 , para o manipulador em questão pode ser dada por

$$T_W^B = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & x \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Em que x e y informam a posição e ϕ a orientação do efetuador final. Logo, o subespaço é gerado à medida em que são atribuídos valores a essas variáveis. De acordo com os parâmetros dos elos do robô, fazendo-se $q_1 = \theta_1$ e $q_2 = \theta_2$, as equações cinemáticas são dadas da seguinte forma:

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Assim, qualquer sistema de referência do efetuador final que não tenha a estrutura da equação 3.9, estará fora do subespaço, e por conseguinte, fora do espaço de trabalho. O sistema de quatro equações lineares obtidas deve ser resolvido para θ_1 e θ_2

$$\cos \phi = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.10)$$

$$\sin \phi = \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.11)$$

$$x = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.12)$$

$$y = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.13)$$

Elevando-se as equações 3.12 e 3.13 ao quadrado e somando-se as duas obtém-se

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 \cos \theta_2 \quad (3.14)$$

Resolvendo para $\cos \theta_2$

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \quad (3.15)$$

Para que haja pelo menos uma solução faz-se $-1 \leq \cos \theta_2 \leq 1$, de outra forma, significaria que o efetuador final não poderia alcançar o alvo. Considerando a expressão para $\sin \theta_2$ como:

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (3.16)$$

Pode-se obter θ_2 através da função da tangente inversa de quatro quadrantes¹ como sendo:

$$\theta_2 = \text{Atan2}(\sin \theta_2, \cos \theta_2) \quad (3.17)$$

A equação 3.16 representa a obtenção de mais de uma solução. Como se trata de um manipulador com dois elos em um plano, significa que ele pode chegar ao alvo com o "cotovelo" para cima ou para baixo. Assim, através da determinação do cosseno e do seno, o arco tangente aplicado para descobrir o ângulo permite a obtenção de todas as soluções e o quadrante mais adequado.

Para θ_1 , considera-se novamente as equações 3.12 e 3.13, porém escritas da seguinte forma (CRAIG, 2009):

$$x = A_1 \cos \theta_1 - A_2 \sin \theta_1, \quad (3.18)$$

$$y = A_1 \sin \theta_1 - A_2 \cos \theta_1, \quad (3.19)$$

onde

$$A_1 = L_1 + L_2 \cos \theta_2, \quad (3.20)$$

$$A_2 = L_2 \sin \theta_2$$

¹ Equivale à função \tan^{-1} , no entanto, usa-se os sinais das duas variáveis para identificar em qual quadrante resultante o ângulo está.

Realizando-se uma troca de variáveis da forma

$$\beta = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad (3.21)$$

$$\gamma = \text{Atan2}(A_1, A_2) \quad (3.22)$$

então

$$A_1 = \beta \cos \gamma, \quad (3.23)$$

$$A_2 = \beta \sin \gamma.$$

Assim as equações 3.18 e 3.19 podem ser reescritas como

$$x = \beta(\cos \gamma \cos \theta_1 - \sin \gamma \sin \theta_1) \quad (3.24)$$

e

$$y = \beta(\cos \gamma \sin \theta_1 + \sin \gamma \cos \theta_1) \quad (3.25)$$

logo

$$\cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{\beta}, \quad (3.26)$$

$$\sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{\beta}. \quad (3.27)$$

Desta forma, utilizando-se o arco tangente de quatro quadrantes, obtem-se

$$\gamma + \theta_1 = \text{Atan2}\left(\frac{y}{\beta}, \frac{x}{\beta}\right), \quad (3.28)$$

então

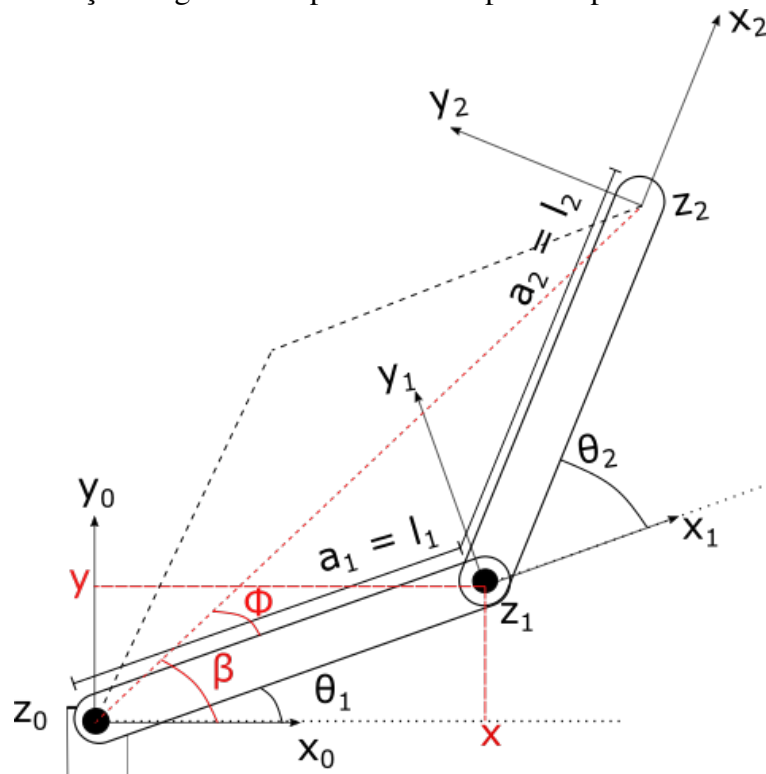
$$\theta_1 = \text{Atan2}(y, x) - \text{Atan2}(A_2, A_1). \quad (3.29)$$

Observe que θ_1 possui múltiplas soluções dependendo do argumento A_2 . E este, por sua vez, de θ_2 . Logo, mudando-se o sinal de θ_2 , altera-se θ_1 .

3.3.2 Método geométrico

A partir da geometria do robô, pode-se considerar o procedimento geométrico para encontrar-se as equações cinemáticas geralmente mais simples. O problema se resume em decompor a geometria espacial do manipulador em outros mais simples de geometria plana. Para exemplificar a análise, considera-se o modelo geométrico do braço robótico planar de dois elos, Figura 16.

Figura 16 – Representação da geometria para um manipulador planar de dois elos.



Fonte: Adaptado de (VASCONCELOS *et al.*, 2019)

Pode-se verificar duas possíveis posições, a primeira através do triângulo formado por l_1, l_2 e a resultante vetorial destes dois catetos, e, a segunda posição através da linha pontilhada. Considerando a primeira configuração, pode-se aplicar a lei dos cossenos para se obter (VASCONCELOS *et al.*, 2019):

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(180 - \theta_2) \quad (3.30)$$

Assim,

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}, \quad (3.31)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left[\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right]. \quad (3.32)$$

Para a existência de soluções, o ponto alvo deve estar a uma distância menor ou igual a $l_1 + l_2$. Admitindo-se a existência de uma solução, o valor do ângulo deve estar contido em $-180^\circ \leq \theta_2 \leq 0^\circ$, pois somente nestes valores o triângulo pode existir.

Para encontrar θ_1 faz-se

$$\beta = \text{Atan2}(y, x). \quad (3.33)$$

Sabendo-se que a reta que liga a origem até o alvo é representada por $\sqrt{x^2 + y^2}$, então:

$$l_2^2 = (x^2 + y^2) + l_1^2 - 2l_1 \sqrt{x^2 + y^2} \cos \phi, \quad (3.34)$$

$$\cos \phi = \left[\frac{(x^2 + y^2) + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \right] \quad (3.35)$$

Logo:

$$\phi = \cos^{-1} \left[\frac{(x^2 + y^2) + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \right], \text{ para } 0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ. \quad (3.36)$$

Então

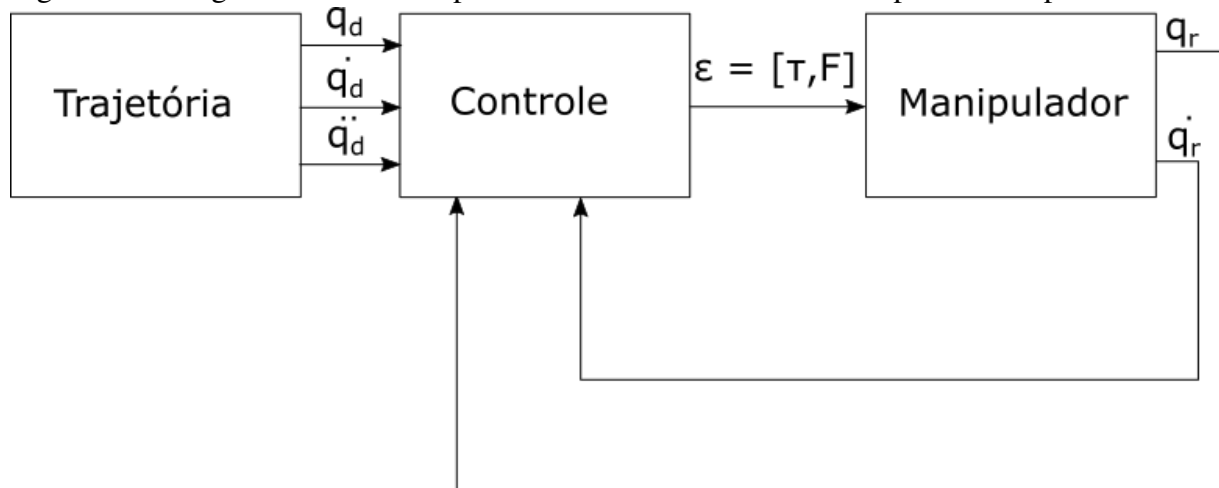
$$\theta_1 = \begin{cases} \beta - \phi, & \text{para } \theta_2 > 0 \\ \beta + \phi, & \text{para } \theta_2 < 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

4 CONTROLE LINEAR DOS MANIPULADORES

Para o movimento efetivo do manipulador em si é necessário verificar as técnicas de controle para a realização do movimento desejado. Adotando-se a estratégia de controlar cada junta de forma independente, a utilização de equações lineares se torna muito viável, principalmente, para o caso de aplicações industriais (CARVALHO, 2009). Desta forma, as técnicas utilizadas serão aproximações razoáveis para que seja possível a utilização de um **controle linear**.

É considerado que cada elo do manipulador está munido de um sensor que informe o ângulo, e, a velocidade angular. Cada junta deverá seguir uma trajetória que é especificada de forma independente. Assim, os comandos são passados para os atuadores de cada junta de forma com que o torque (junta rotacional) ou a força (junta prismática) seja coerente para o ângulo ou posição requerida. Desta forma, é imprescindível que haja um processo de **realimentação** dos sensores para que a força, ou, o torque respectivo seja o necessário para se alcançar o ponto no instante requerido.

Figura 17 – Diagrama de blocos representando o sistema de controle para o manipulador.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na Figura 17 é ilustrado um sistema de controle em **malha fechada**, utilizando-se das informações dos sensores de posição e velocidade. Para construir um sistema de controle de alto desempenho para este mecanismo, a realimentação é feita de forma com que o **erro de**

servomecanismo (HERNÁNDEZ-RIVEROS, 2014) seja o menor possível, ou mesmo nulo:

$$E = q_d - q_r, \quad (4.1)$$

$$\dot{E} = \dot{q}_d - \dot{q}_r.$$

em que

$$q = \begin{cases} \theta, & \text{para juntas rotacionais} \\ d, & \text{para juntas prismáticas} \end{cases} \quad (4.2)$$

O prefixo d significa a posição desejada e r a posição real. Desta forma, o torque ou a força necessária para cada atuador pode ser calculado em função do erro de servomecanismo. Como cada controlador atuará nas respectivas juntas do manipulador de forma separada, pode-se considerar cada junta como um sistema *single-input; single-output* (SISO), ou seja, **uma entrada, uma saída**. Esta abordagem é muito adotada para robôs industriais.

4.1 Sistemas de segunda ordem: modelo massa-mola

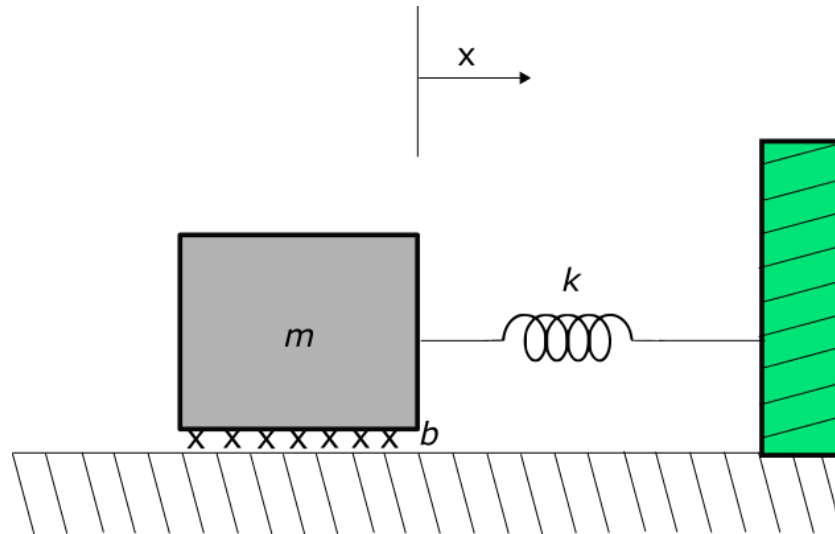
Considera-se o sistema representado na Figura 18.

O modelo massa-mola apresentado contém três variáveis intrínsecas: a massa do bloco (m), o atrito (b) e a rigidez da mola (k). Ao se analisar cada junta de um manipulador separadamente é possível constatar que seu coeficiente de atrito viscoso e seu coeficiente de amortecimento são equivalentes à b e k respectivamente do modelo representado na Figura 18. Desta forma, é prudente modelar cada junta de um manipulador através de seu equivalente modelo massa-mola (CHENG *et al.*, 2017)(AL-SHUKA *et al.*, 2018). Dito isto, cada junta pode ser representada por um sistema de segunda ordem de acordo com o diagrama de corpo livre de seu sistema equivalente

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = 0. \quad (4.3)$$

A equação 4.3 trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes (BOYCE *et al.*, 2004), essa função varia com o tempo e especifica o movimento do

Figura 18 – Sistema massa-mola.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

corpo. Para determinar a solução da equação 4.3, deve-se levar em conta o tipo de resposta que essa função apresentará com o passar do tempo, ou seja, faz-se necessário encontrar a solução de sua equação característica 4.4 e saber quais são suas condições iniciais (FRANKLIN *et al.*, 1993). A equação característica do modelo em questão é dada como

$$ms^2 + bs + k = 0, \quad (4.4)$$

em que

$$s_1 = \frac{-b}{2m} + \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{e} \quad (4.5)$$

$$s_2 = \frac{-b}{2m} - \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

Estas raízes podem ser chamadas de **polos** do sistema (FRANKLIN *et al.*, 1993), e, são responsáveis pela característica do comportamento do movimento. Existem basicamente três tipos de comportamentos esperados a depender do tipo de resultado obtido, a saber: resposta **sobreamortecida**, **subamortecida** e **criticamente amortecida**.

4.1.1 Resposta sobreamortecida

Este tipo de comportamento se caracteriza pela resposta transitória se dar de forma lenta e não oscilatória. Neste caso, tem-se pela equação 4.5 que as raízes obtidas são **diferentes**

e reais. Para que isto ocorra é necessário que $b^2 > 4mk$, ou seja, o atrito da junta seja predominante. Para a proposição de uma solução, considera-se os conceitos de soluções para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Para isso, considerando o fato que as derivadas de funções exponenciais são semelhantes à função original e o princípio da superposição para dois termos exponenciais para o caso de uma equação quadrática, a solução para 4.5 pode ser dada da seguinte forma (FRANKLIN *et al.*, 1993)

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad (4.6)$$

onde A_1 e A_2 são constantes que dependem das condições iniciais de posição e velocidade do elo. Uma característica deste sistema é que um dos polos encontrados pode ser de maior em magnitude (**polo dominante**), sendo este responsável pela caracterização da dinâmica do sistema.

4.1.2 Resposta subamortecida

Para a resposta subamortecida basta que a equação 4.5 tenha $b^2 < 4mk$. Ou seja, a rigidez da junta seja predominante. O que se tem como resposta natural do sistema é um comportamento oscilatório. Verifica-se matematicamente que as raízes da equação característica 4.4 são complexas, assim, a solução proposta para este caso em específico possui a seguinte forma

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad (4.7)$$

em que

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha + j\mu, \\ s_2 &= \alpha - j\mu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Utilizando-se a identidade de Euler

$$e^{jx} = \cos x + jx, \quad (4.9)$$

a solução proposta pode ser reescrita como sendo

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(\alpha+j\mu)t} + A_2 e^{-(\alpha+j\mu)t} \quad \therefore \\ x(t) &= A_1 e^{\alpha t} \cos \mu t + A_2 e^{\alpha t} \sin \mu t. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A equação 4.10 pode ser rearranjada de forma que se possa reconhecer facilmente as componentes responsáveis pela amplitude e oscilação da resposta. Tomando-se

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad e \\ \phi &= \text{Atan2}(A_2, A_1), \end{aligned} \quad (4.11)$$

então

$$x(t) = r e^{\alpha t} \cos(\mu t - \phi) \quad (4.12)$$

4.1.3 Resposta criticamente amortecida

Para a resposta criticamente amortecida tem-se que $b^2 = 4km$, ou seja, a **taxa de amortecimento** (ζ) é unitária. Verifica-se para este caso em especial que o atrito da junta é balanceado com sua rigidez. A resposta torna-se a mais rápida possível sem oscilação. Como existe uma igualdade entre o quadrado do atrito e a rigidez, ponderada por uma constante ($4k$), as raízes da equação característica 4.4 são reais e iguais, na forma

$$s_1 = s_2 = \alpha = -\frac{b}{2m}. \quad (4.13)$$

Para este caso em especial em que há raízes repetidas, a solução proposta possui a seguinte forma (FRANKLIN *et al.*, 1993)

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 t e^{s_2 t}. \quad (4.14)$$

Combinando as equações 4.14 e 4.13, tem-se

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\frac{b}{2m} t}. \quad (4.15)$$

Nota-se que com o decaimento exponencial de $-\frac{b}{2m}$, em regime permanente a resposta natural do sistema, quando se aplica um degrau unitário por exemplo, tenderá a zero.

4.2 Controle independente para as juntas

Tratando-se a princípio da resposta natural do sistema robótico, a ideia fundamental para a obtenção da resposta desejada é a de mudar os parâmetros de cada elo a fim de se ter o comportamento requerido. De acordo com a seção anterior, a depender dos valores atribuídos ao atrito mecânico das juntas, bem como à rigidez, pode-se determinar o tipo de movimento que a junta exibirá. Se o atrito é predominante, a tendência é que o sistema apresente uma resposta lenta, de outra forma, se o coeficiente de amortecimento é nulo, o sistema não retornará à posição desejada se perturbado, pelo contrário, se tornará instável. Através do uso dos sensores em cada elo, pode-se projetar um sistema de controle de forma que estes parâmetros em específicos possam ser calculados e o movimento a ser realizado seja o especificado pelo usuário.

Modificando-se a Figura 18, uma força f é aplicada ao corpo. Com esta força, pode-se atuar no sistema de forma com que seja possível formular uma lei de controle dada como

$$f(t) = -k'x(t) - b' \frac{d}{dt}x(t), \quad (4.16)$$

assim, a equação 4.3 passa a ser

$$m \frac{d^2}{dt^2}x(t) + b \frac{d}{dt}x(t) + kx(t) = f(t). \quad (4.17)$$

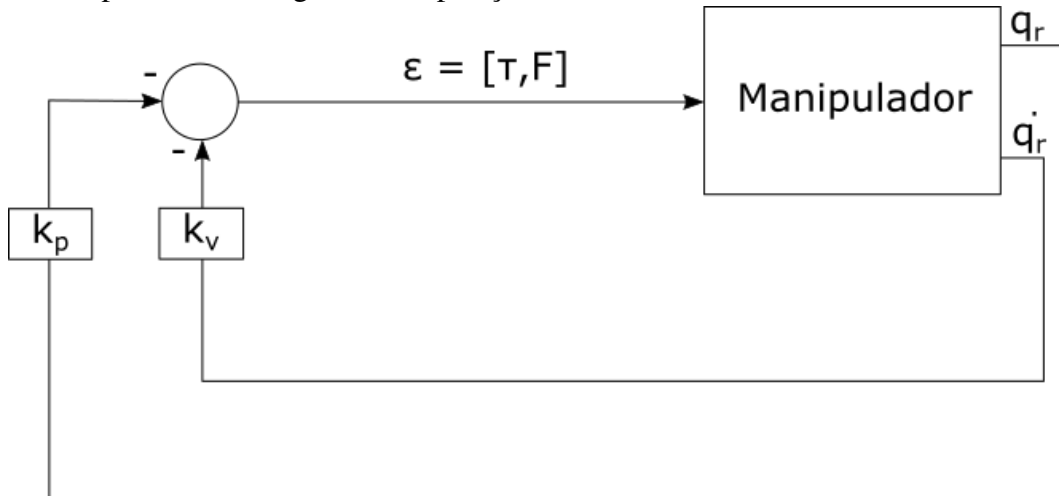
A força aplicada ao bloco do sistema equivalente massa-mola age simplesmente apenas para manter a posição do corpo fixada. Este tipo de controle adotado se caracteriza como um **regulador de posição** (Siciliano; Villani, 1996), Figura 19.

Inserindo 4.16 em 4.17 pode-se obter

$$m \frac{d^2}{dt^2}x + (b + b') \frac{d}{dt}x + (k + k')x = 0. \quad (4.18)$$

Verifica-se através desta equação que o comportamento da resposta pode ser ajustada através dos ganhos do controlador. Estes ganhos alteram as características para qualquer uma das formas abordadas anteriormente no caso de uma resposta natural. Ademais, k' ou b' podem assumir valores negativos dependendo do sistema original, no entanto, se $k + k'$ ou $b + b'$ forem negativos, o erro (4.1) será amplificado, o que tornará o sistema instável.

Figura 19 – Sistema em malha fechada. Note que não há trajetória de referência, tratando-se apenas de um regulador de posição.



Fonte: Adaptado de (CRAIG, 2009)

Ao se observar bem a estrutura da equação 4.18, os ganhos relacionados ao atrito e à rigidez da junta constituem uma ação proporcional e derivativa sobre os parâmetros da junta, ou seja, a lei de controle formulada nada mais é do que um simples controlador PD, em que

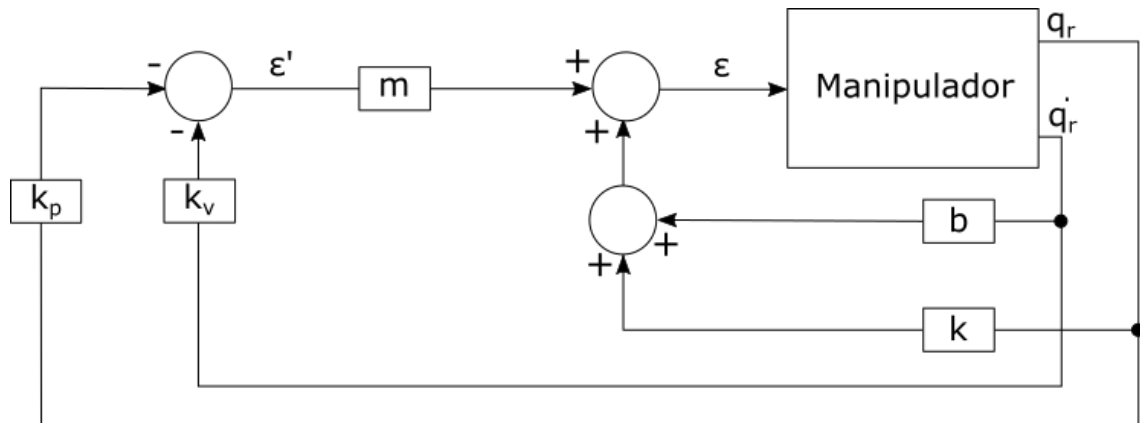
$$\begin{aligned} k_p &= k + k' \quad e \\ k_v &= b + b' \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para a simplificação da análise, analisa-se o controlador de forma separada do sistema robótico (CRAIG, 2009), Figura 20. Decompondo-se o controlador em duas partes, a lei de controle baseada no modelo poderá usar o suposto conhecimento dos valores dos parâmetros da junta m, b e k e ser projetada de forma que o sistema seja reduzido para um sistema com apenas unidade de massa. Por outro lado, a segunda parte da lei de controle usa a realimentação com os ganhos para a alteração do comportamento do sistema quando necessário. A consideração de haver uma unidade de massa simplifica o projeto do controle do servomotor, já que é desconsiderado o atrito e a rigidez (Figura 20).

Para a demonstração desse fato, considere que a força aplicada ao modelo seja modificada com o acréscimo de duas constantes

$$f(t) = \alpha f'(t) + \beta. \quad (4.20)$$

Figura 20 – Sistema de controle em malha fechada utilizando-se o particionamento da lei de controle.



Fonte: Adaptado de (CRAIG, 2009)

Combinando-se as equações 4.17, 4.19 e 4.20, a equação do sistema será

$$m \frac{d^2}{dt^2} x + b \frac{d}{dt} x + kx = \alpha f'(t) + \beta. \quad (4.21)$$

Para que o sistema pareça ter somente uma unidade de massa, a nova lei de controle formulada f deverá ter suas constantes escritas na forma

$$\begin{aligned} \alpha &= m, \\ \beta &= b \frac{d}{dt} x + kx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Estabelecendo-se estas considerações

$$\frac{d^2}{dt^2} x = f'. \quad (4.23)$$

Assim, de 4.21, para uma massa unitária, tem-se

$$\frac{d^2}{dt^2} x + k_v \frac{d}{dt} x + k_p x = 0. \quad (4.24)$$

De posse dos parâmetros do sistema de massa unitária, e, das raízes da solução da equação característica, o comportamento pode então ser moldado a partir das seguintes considerações

$$k_v \begin{cases} > 2\sqrt{k_p}, & \text{resposta sobreamortecida} \\ < 2\sqrt{k_p}, & \text{resposta subamortecida} \\ = 2\sqrt{k_p}, & \text{resposta criticamente amortecida} \end{cases} \quad (4.25)$$

4.3 Controle de trajetória

Ao invés de somente manter o elo numa posição fixa, o controlador pode ser melhorado de forma que o elo possa seguir uma trajetória especificada. Para um manipulador constituído de vários segmentos, cada trajetória é gerada para cada elo de forma independente, a composição deste movimento resultará num trajeto descrito pelo efetuador final.

4.3.1 Trajetória desejada

Uma maneira muito usual para que um manipulador realize um movimento que leve o punho de um ponto a outro é a especificação de trajetórias suaves em função do tempo. De um modo geral, cada junta é coordenada de forma que elas finalizem seu movimento simultaneamente. Assim, os geradores de trajetórias devem planejar cada detalhe do movimento, como a velocidade e a duração.

Uma das formas de abordagem é a especificação do ponto em que se está no instante atual e o ponto onde se quer chegar em um dado intervalo de tempo. Através da cinemática inversa, esses pontos são convertidos em variáveis de juntas. A partir daí uma função polinomial é definida, onde seu valor em t_i seja a da posição inicial e em t_f a final. Para a realização destes movimentos suaves, são necessárias quatro condições. Duas delas é que a velocidade inicial e final sejam zero, e, as outras duas é a escolha do ponto inicial e final das variáveis de posição (CRAIG, 2009)

$$\begin{aligned}
 \theta(0) &= \theta_i, \\
 \theta(t_f) &= \theta_f, \\
 \dot{\theta}(0) &= 0, \\
 \dot{\theta}(t_f) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Para exemplificar, considera-se um polinômio de menor grau possível que atenda às restrições, ou seja, de terceiro grau

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3,
 \tag{4.27}$$

em que

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2.
 \tag{4.28}$$

Combinando 4.26, 4.27 e 4.28 obtém-se o seguinte sistema matricial

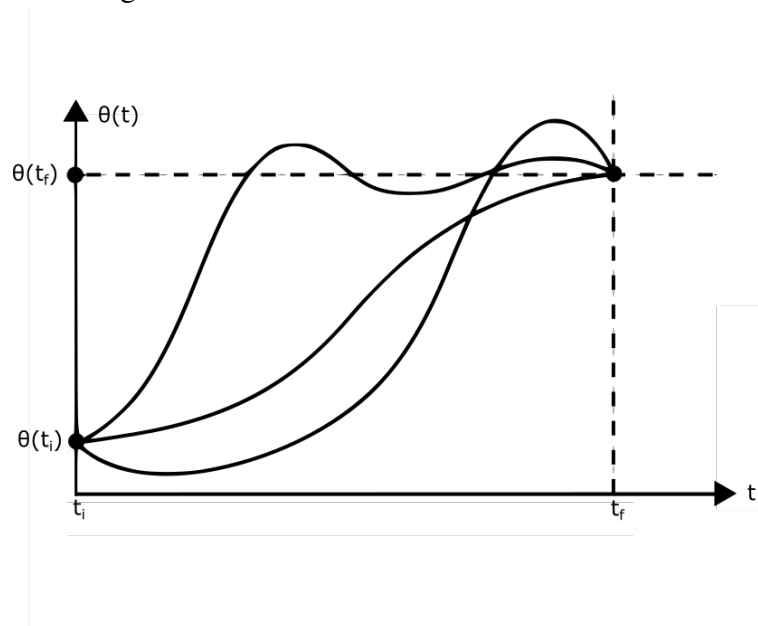
$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \theta(t_f) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta(0), \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta(t_f) - \theta(0)), \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta(t_f) - \theta(0)). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Desta forma, a partir de 4.30, é possível calcular um polinômio cúbico que conecta dois pontos levando em consideração os ângulos de juntas, desde que a velocidade inicial e final sejam zero, Figura 21.

Figura 21 – Definindo-se os pontos iniciais e finais, podem existir vários caminhos possíveis para o robô seguir.



Fonte: Adaptado de (CRAIG, 2009)

4.3.2 Controle de seguimento de trajetória

Para o acompanhamento da trajetória é necessário verificar em cada instante de tempo dado o quão distante o trajeto real está distante do trajeto especificado pelo gerador de trajetórias. Considerando que o trajeto real e o desejado são simbolizados por q_r e q_d respectivamente, onde q assume as variáveis da equação 4.2, o intuito do controlador é zerar o erro de servomecanismo (4.1). Presumindo-se que a trajetória é suave e que o gerador de trajetórias fornece a posição q , a velocidade \dot{q} e a aceleração \ddot{q} , a lei de servocontrole pode ser dada como

$$f'(t) = \frac{d^2}{dt^2}q_d(t) + k_v \frac{d}{dt}e + k_p e. \quad (4.31)$$

Aplicando-se o particionamento de controle para uma unidade de massa unitária

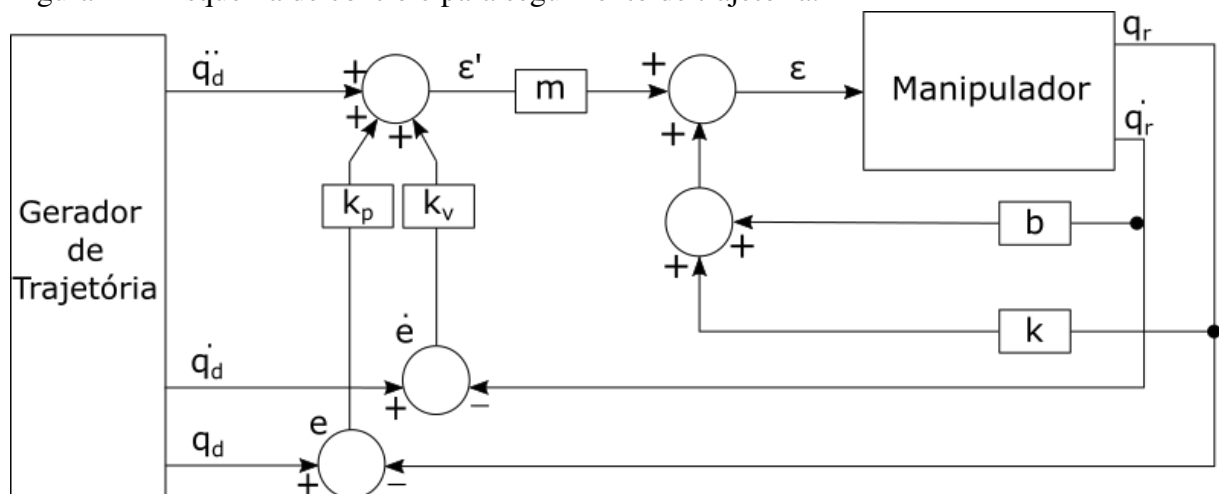
$$\frac{d^2}{dt^2}q_r = \frac{d^2}{dt^2}q_d + k_v \frac{d}{dt}e + k_p e, \quad (4.32)$$

assim

$$\frac{d^2}{dt^2}e + k_v \frac{d}{dt}e + k_p e = 0. \quad (4.33)$$

Desta forma, tem-se uma equação escrita em termos do erro de percurso, ou seja, é possível verificar a evolução temporal do erro com relação ao trajeto que se deseja acompanhar, Figura 22.

Figura 22 – Esquema de controle para seguimento de trajetória.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

5 MODELAGEM COMPUTACIONAL E RESULTADOS

A ideia principal adotada para o desenvolvimento computacional para a simulação de um manipulador é a generalização dos resultados. Os conceitos podem ser aplicados para qualquer pacote computacional desde que as equações cinemáticas e dinâmicas estejam coerentes com o sistema a ser considerado. Além disso, algumas considerações e limitações devem ser respeitadas para a dedução do modelo. Uma das principais considerações é a facilidade com que os movimentos realizados pelo manipulador são descritos e como os resultados baseados em sensores podem ser obtidos.

O modo de simulação a ser adotado está mais voltado para uma **programação offline**. Ou seja, a computação gráfica é estendida o suficiente para que o desenvolvimento dos programas de aplicação não necessitem do acesso do robô em si, assim, numa utilização industrial, as fábricas automatizadas não perdem em produção quando há a necessidade de reprogramação.

O procedimento para estudo será dividido entre referenciação dos eixos dos componentes do robô, a modelagem de cada junta, e, a aplicação do controlador no sistema. O modelo do manipulador a ser utilizado será o mesmo esquematizado na Figura 10. Este modelo simples é suficiente para a exemplificação do simulador.

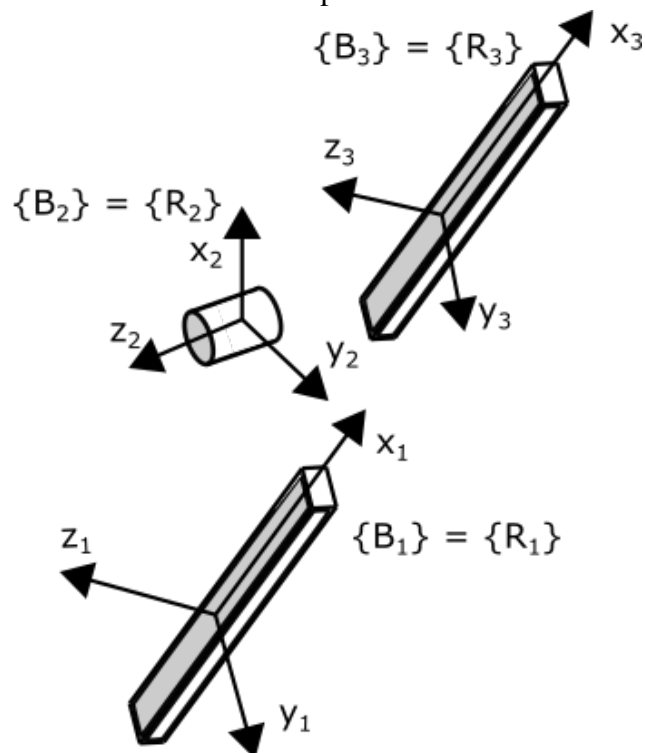
5.1 Transformação de quadros e referenciação dos eixos para os componentes do manipulador

Uma abordagem muito importante para a construção de qualquer modelo robótico em um ambiente de simulação gráfica é a consideração de cada componente do robô. O primeiro passo é a consideração física de cada um deles. A depender do ambiente de simulação, estas considerações podem abranger desde a geometria do corpo em questão até informações de massa, densidade, volume, e, até mesmo, o momento de inércia.

Para a montagem de cada peça, é necessário especificar a localização exata de cada uma delas em relação ao quadro global através da adoção de um sistema de referência para o corpo em questão. Este conceito pode ser dividido em dois pontos importantes: A referenciação

do próprio corpo **B** e seu ponto para conexão **R**. A regra para uma montagem simples inicia-se pela simplificação do manipulador como um todo constituindo-o apenas de elos e juntas. Desta forma, cada elo possui um sistema de referência **B** com os eixos definidos da mesma forma como o da junta que o precede. Esta, por sua vez, seguirá os padrões regidos pelos parâmetro de D-H. Assim, o movimento do elo acompanhará o movimento da junta. Por fim, para que exista uma conexão entre dois componentes consecutivos, um sistema **R** é definido com os mesmos eixos do respectivo sistema **B** do componente em questão. Esta modelagem é exemplificada na Figura 23.

Figura 23 – Esquema de posicionamento dos eixos. Este esquema é baseado na adoção de um sistema de coordenadas **B** para cada componente do manipulador que se deseja representar no simulador, tanto os elos como o sistema de juntas. Cada componente também é referenciado com um eixo de coordenadas **R** estabelecendo-se apenas referenciais para conexão entre dois corpos.

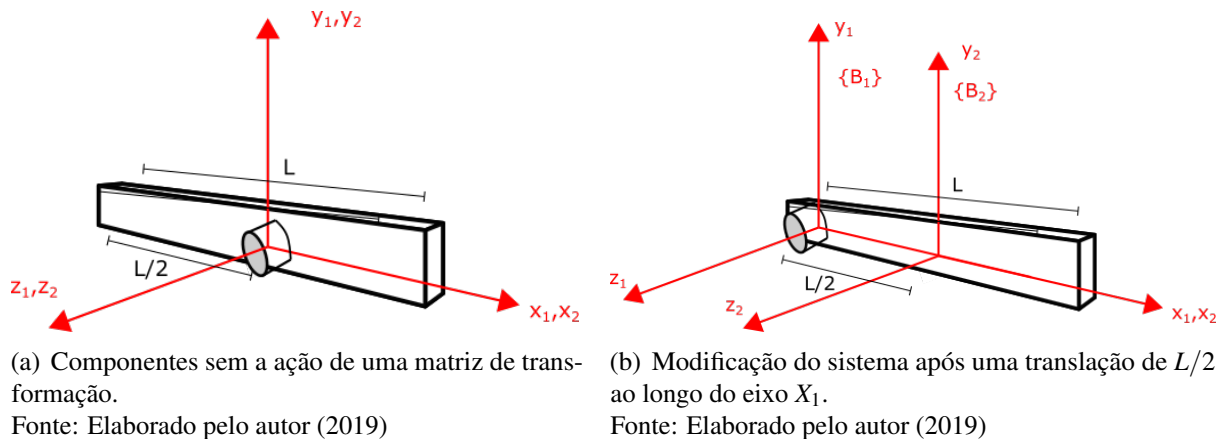


Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Cada componente do manipulador precisa ser posicionado de forma adequada em relação ao ambiente de simulação gráfica. Para que isto ocorra, é necessário que as transformações entre os quadros estejam definidas de forma correta. Assim, é importante definir bem a posição dos eixos de referência de forma que as transformações ocorram da forma mais simples possível. Uma forma de se fazer isso é o posicionamento dos eixos no próprio centro de massa

do corpo, e, a partir daí transladar ou rotacionar de acordo com a característica geométrica do manipulador com um todo. É importante destacar que esse deslocamento ocorra na direção do eixo do componente que o precede. Um exemplo bem prático de se visualizar isto é observando a Figura 24.

Figura 24 – Exemplo geral de uma translação entre eixos de um elo e de uma junta rotacional.



Como se verifica na Figura 24 (a), o elo está centralizado juntamente com a junta. Para o correto posicionamento basta uma translação de $L/2$ na direção do eixo do componente precedente, ou seja, a junta na qual está conectado. O resultado é o que se verifica na Figura 24 (b).

5.2 Modelagem de uma junta

Baseando-se num modelo linear de segunda ordem, alguns pressupostos são feitos a fim de simplificar a modelagem de uma única junta, para uma abordagem mais aprofundada, ver (Luh, 1983). A grande maioria dos atuadores encontrados em robôs industriais se tratam de um motor de Corrente Contínua (CC). Esta alimentação vem de baterias ou outras fontes. Ele é composto por uma parte fixa chamada de **estator**, onde estão os ímãs ou eletroímãs, e o rotor, cuja bobina que o compõe é alimentada pelo comutador onde circula uma corrente. Toda vez que a corrente entra em contato com o campo magnético gerado pelos ímãs do estator, o condutor experimenta uma força mecânica, produzindo um torque de giro no eixo do rotor. O princípio físico responsável pelo movimento do comutador é dado por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.1)$$

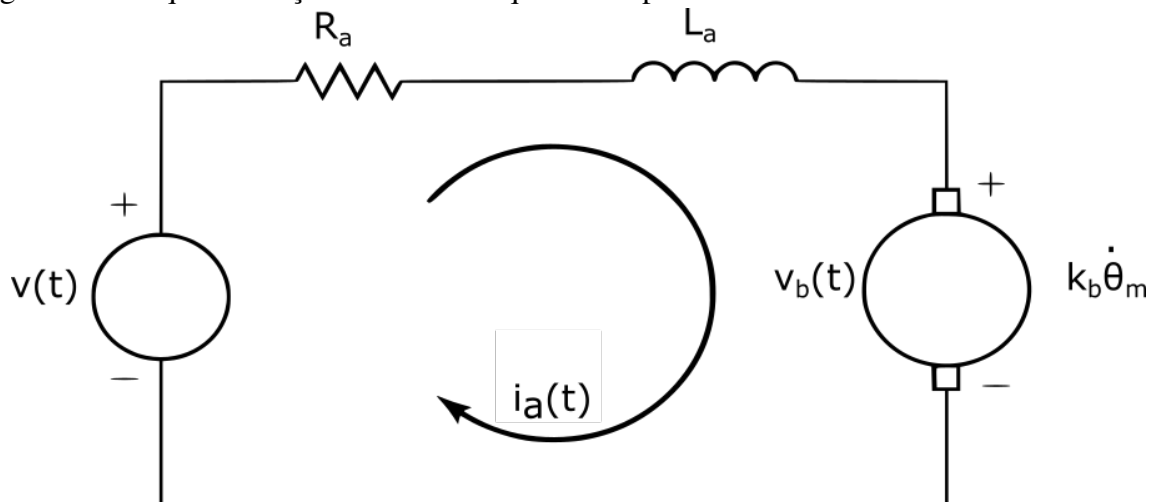
A equação 5.1 traduz o movimento dos elétrons q que se movem através das bobinas através das linhas de fluxo de um campo magnético de densidade B produzidas pelos ímãs do estator, gerando uma força F . Considerando que o motor esteja na sua faixa de operação linear, pode-se relacionar a corrente do induzido à saída de torque através de

$$\tau_m(t) = k_m i_a, \quad (5.2)$$

em que k_m é a constante de torque em $oz \cdot in/A$, e, i_a é a corrente de armadura.

Considera-se a Figura 25

Figura 25 – Esquemática do circuito equivalente para um motor CC.



Fonte: Adaptado de (Luh, 1983)

A partir desta figura, a **força contraeletromotriz** expressa em tensão $v_b(t)$ no rolamento de armadura pode ser representada por

$$v_b(t) = k_b \dot{\theta}_m(t), \quad (5.3)$$

onde k_b representa a **constante da força contraeletromotriz** em $V \cdot s/rad$. Para a modelagem do atuador, a oscilação contida no torque quando o comutador troca corrente com as bobinas poderá ser desconsiderada.

5.2.1 Indutância do motor

Ainda observando a Figura 25, a partir da lei da tensão de Kirchhoff's para o circuito de armadura, obtém-se

$$v(t) - v_b(t) = L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + R_a i_a(t). \quad (5.4)$$

O circuito é escrito, então, por uma equação diferencial de primeira ordem. Combinando-se 5.3 e 5.4 tem-se

$$v(t) - k_b \frac{d}{dt} \theta_m(t) = L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + R_a i_a(t). \quad (5.5)$$

Ao montar-se um modelo para um atuador, geralmente nos simuladores o que se espera é o controle de torque ao invés da velocidade. Para simplificar ainda mais a simulação, a indutância do motor pode ser desconsiderada. Isto se dá devido à baixa frequência do sistema de controle em malha fechada quando comparada com a frequência de corte, f_c , de um filtro passa-baixa que pode estar contido em circuitos que seriam necessários para o acionamento por corrente em um experimento real. De posse destas simplificações, a implementação de um atuador em um simulador gráfico pode ser representado por uma **fonte de torque pura**.

5.2.2 Considerações de inércia

Considera-se agora a Figura 26. Esta ilustração representa o modelo mecânico de um motor alimentado por CC. Este motor está conectado a uma carga inerte através de uma redução por engrenagens. A relação de engrenagens η por um lado aumenta o torque recebido pela carga, mas por outro, diminui a velocidade dela, ou seja

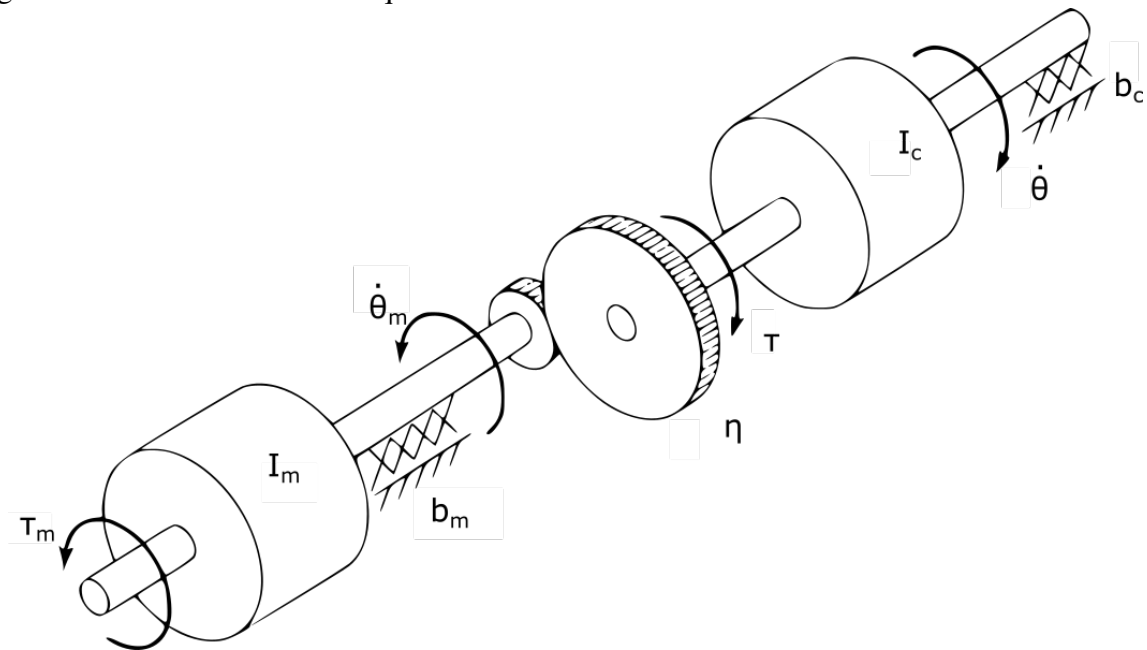
$$\begin{aligned} \tau &= \eta \tau_m, \\ \dot{\theta} &= \left(\frac{1}{\eta}\right) \dot{\theta}_m, \\ \ddot{\theta} &= \left(\frac{1}{\eta}\right) \ddot{\theta}_m, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $\eta > 1$. aplicando-se o princípio de D'Alembert's no rotor, obtém-se o equilíbrio para o torque

$$\tau_m - I_m \ddot{\theta}_m - b_m \dot{\theta}_m = \frac{1}{\eta} (I_c \ddot{\theta} + b_c \dot{\theta}) \quad (5.7)$$

I_m e I_c representam a inércia do atuador e da carga, no caso o elo, respectivamente. E b_m e b_c representam o coeficiente de atrito do rotor e da carga, respectivamente. Combinando-se as

Figura 26 – Modelo mecânico equivalente de um motor CC.



Fonte: Adaptado de (CRAIG, 2009)

equações 5.6 e 5.7, tem-se

$$\tau_m = \left(I_m + \frac{I_c}{\eta^2} \right) \ddot{\theta}_m + \left(b_m + \frac{b_c}{\eta^2} \right) \dot{\theta}_m. \quad (5.8)$$

Para se expressar o torque com relação ao lado do eixo da carga, basta fazer-se as relações em 5.6, assim combinando com 5.7, tem-se

$$\tau_c = (I_c + I_m \eta^2) \ddot{\theta} + (b_c + b_m \eta^2) \dot{\theta}. \quad (5.9)$$

Os termos $I_m + I_c/\eta^2$ e $I_c + I_m \eta^2$ são respectivamente a **inércia efetiva** do lado do atuador e do lado do elo. De igual modo $b_m + b_c/\eta^2$ e $b_c + b_m \eta^2$ representam respectivamente o **amortecimento efetivo** do lado do atuador e do lado do elo.

Observando-se a equação 5.8, verifica-se que para a simulação de uma junta que tenha uma alta taxa de redução nas engrenagens, $\eta \gg 1$, a inércia do atuador é parte significativa da respectiva inércia efetiva. Desta forma, pode-se pressupor que a inércia efetiva para estes casos seja uma constante. Apesar de que na prática a inércia da junta possa variar dependendo das condições do experimento, uma maneira de fixar este valor para uma correta simplificação em um ambiente simulado é a escolha de I_c para o elo de forma que este assumira um valor máximo dentre todas as variações que este possa assumir. Assim, o sistema apresentará um comportamento para amortecimento crítico, eliminando as oscilações que possa haver.

5.2.3 Flexibilidade e ressonância

Uma outra simplificação que ainda pode ser considerar para o modelo em simulação é a adoção do pressuposto de que os rolamentos, engrenagens, eixos e os elos não são flexíveis. Desta forma, a ordem das equações do sistema não precisa ser elevada. Para um sistema suficientemente rígido, significa que as frequências de ressonância são muito elevadas e podem ser desconsideradas com relação à frequência dos polos do sistema de segunda ordem do modelo em questão. Assim, pode-se considerar o modelo dinâmico equacionado em 5.9.

Para se assegurar que não se atinja a frequência de ressonância, uma regra prática (PAUL, 1981) é a de limitar a frequência natural de malha fechada ω_n tendo em vista a menor ressonância estrutural ω_{res} da forma

$$\omega_n \leq \frac{1}{2} \omega_{res}. \quad (5.10)$$

Assim, obtém-se uma orientação para a escolha dos ganhos do controlador.

5.2.4 Controle para o modelo de uma junta

De posse de todas as considerações feitas até o momento, pode-se destacar alguns pontos relevantes quanto ao modelo simulado:

- Considerando $f_c \gg \omega_n$, a indutância do motor L_a pode ser desconsiderada;
- Para $\eta \gg 1$, a inércia efetiva vista do lado da carga pode ser dada por $I_{max} + I_m \eta^2$;
- A flexibilidade da estrutura do manipulador pode ser descartada, no entanto, a menor ressonância estrutural é utilizada para se obter os ganhos do controlador

Partindo-se destes pressupostos, a implementação do controle num experimento simulado pode ser realizada partindo-se do conceito de controle particionado apresentado no capítulo 4, desta forma

$$\begin{aligned} \alpha &= I_{max} + I_m \eta^2, \\ \beta &= (b_c + b_m \eta^2) \dot{q}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Então, a lei de controle pode ser dada por

$$\varepsilon'(t) = \frac{d^2}{dt} q_d + k_v \frac{d}{dt} e(t) + k_p e(t), \quad (5.12)$$

em que ε pode ser o torque ou a força aplicada dependendo do tipo de junta a ser considerada. Combinando-se as equações 5.11 e 5.12, a dinâmica em malha fechada resultante é

$$\frac{d^2}{dt^2}e(t) + k_v \frac{d}{dt}e(t) + k_p e(t) = \varepsilon(t). \quad (5.13)$$

Por fim, partindo-se dos princípios básicos de flexibilidade e ressonância apresentados, os ganhos do controlador podem ser orientados da seguinte forma

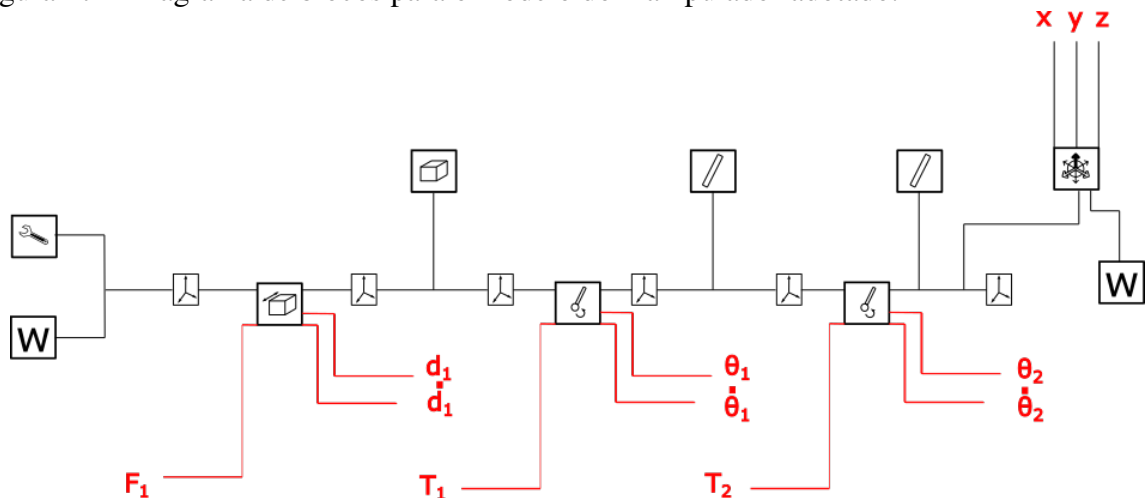
$$k_p = \omega_n^2 = \frac{1}{4} \omega_{res}^2 \quad e \quad (5.14)$$

$$k_v = 2\sqrt{k_p} = \omega_{res}.$$

5.3 Experimento simulado

Para a aplicação dos conceitos apresentados, tem-se um robô manipulador conforme a Figura 10. Este manipulador é constituído de duas juntas rotacionais e uma prismática localizada na base, Figura 27. Assim, pode-se obter representações de trajetórias nas três dimensões.

Figura 27 – Diagrama de blocos para o modelo do manipulador adotado.



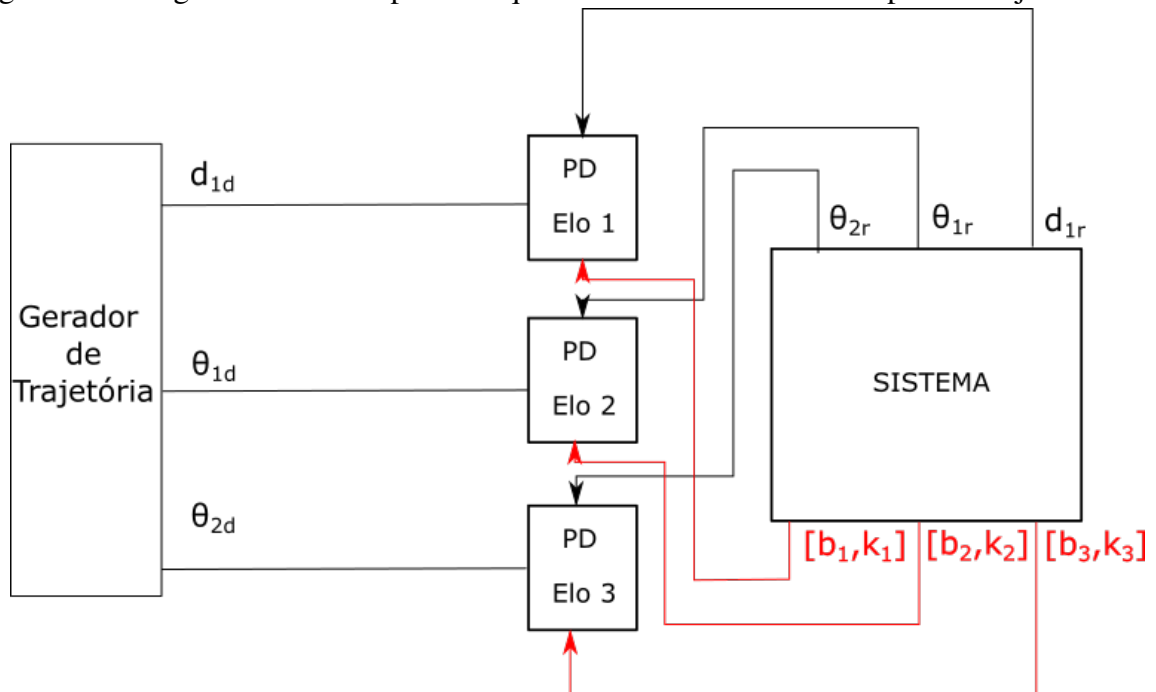
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O método de cinemática adotado para o movimento do robô é a inversa através do cálculo geométrico, desta forma, pode-se obter de forma analítica os ângulos e a posição linear da junta prismática da base dada a trajetória requerida. Como as trajetórias repassadas possuem características que requerem um seguimento mais fiel, a prática adotada foi a adoção de vários pontos infinitesimais, e, a partir deles, aplicar a cinemática inversa em cada. Desta forma, é possível obter-se as variáveis de junta em função de cada ponto específico em um dado instante

de tempo.

Geralmente o comportamento desejado para o movimento de cada elo é uma resposta rápida, porém não oscilatória (amortecimento crítico). Neste caso, o sistema já anula as condições iniciais diferentes de zero e se aproxima da condição desejada o mais rápido possível, porém, sem oscilar. Para o cálculo dos ganhos do controlador PD, Figura 28, faz-se $k_v = 2\sqrt{k_p}$. Para a simulação, os parâmetros construtivos do modelo adotado estão representados na Tabela 2.

Figura 28 – Diagrama de blocos para o esquema de um controlador PD para cada junta.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Tabela 2 – Especificações dos parâmetros do manipulador para simulação

Parâmetros do robô						
	Massa (kg)	Comp./Lar./Esp. (cm)	Coeficiente de Amortecimento		Coeficiente de Atrito	
			Revolução (N*m/(rad/s))	Prismática (N/(m/s))	Revolução (N*m/(rad/s))	Prismática (N/m)
Elo 1	0.4	50/30/10	-	0.105	-	0.092
Elo 2	0.3	30/7/2	22.37	-	60.572	-
Elo 3	0.3	30/7/2	20.3	-	60.686	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na a grande maioria dos robôs industriais, os valores típicos de ressonância estrutural compreendem uma faixa entre 5 Hz e 25 Hz, atualmente é possível encontrar até mesmo em níveis mais elevados como 70 Hz (PAUL, 1981)(ASADA; YOUCEF-TOUMI, 1987). Para a simulação, considera-se a menor frequência de ressonância estrutural de valor 10 Hz. Desta forma, obedecendo-se 5.14 e considerando um sistema criticamente amortecido 4.25, os ganhos para o controlador PD podem ser dados de acordo com a Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros calculados para o controlador PD.

Ganhos do Controlador PD		
	K_p	K_v
Elo 1	100	20
Elo 2	20	8.9443
Elo 3	20	8.9443

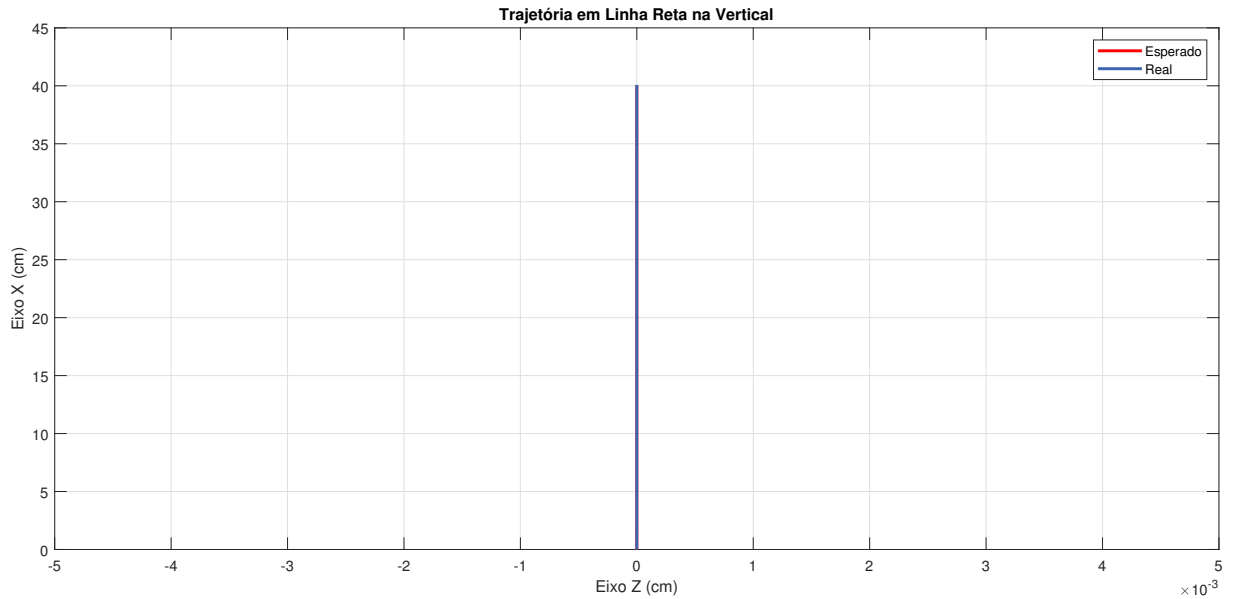
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Por fim, uma das últimas considerações sobre as configurações de simulação é sobre a escolha do tempo de simulação T_{sim} e do tempo de amostragem T_s . O tempo de simulação é escolhido conforme a velocidade que o robô avança em relação à trajetória especificada, logo, se trata de um valor sujeito à escolha do usuário. Com relação ao tempo de amostragem, uma boa prática sugerida em (CRAIG, 2009) é que a taxa de amostragem f_s seja pelo menos o dobro do tempo correspondente à frequência natural das ressonâncias estruturais. Assim, escolhe-se um tempo de simulação de 10 segundos, e um tempo de amostragem de 0.0021 segundos, que corresponde a aproximadamente 476 Hz ($f_s \gg 1/10$). Em aplicações industriais, a aceleração geralmente não é levada em consideração, assim sendo, para uma velocidade constante, a sua derivada é zero. Para este exemplo em específico a velocidade considerada será de 0,1m/s

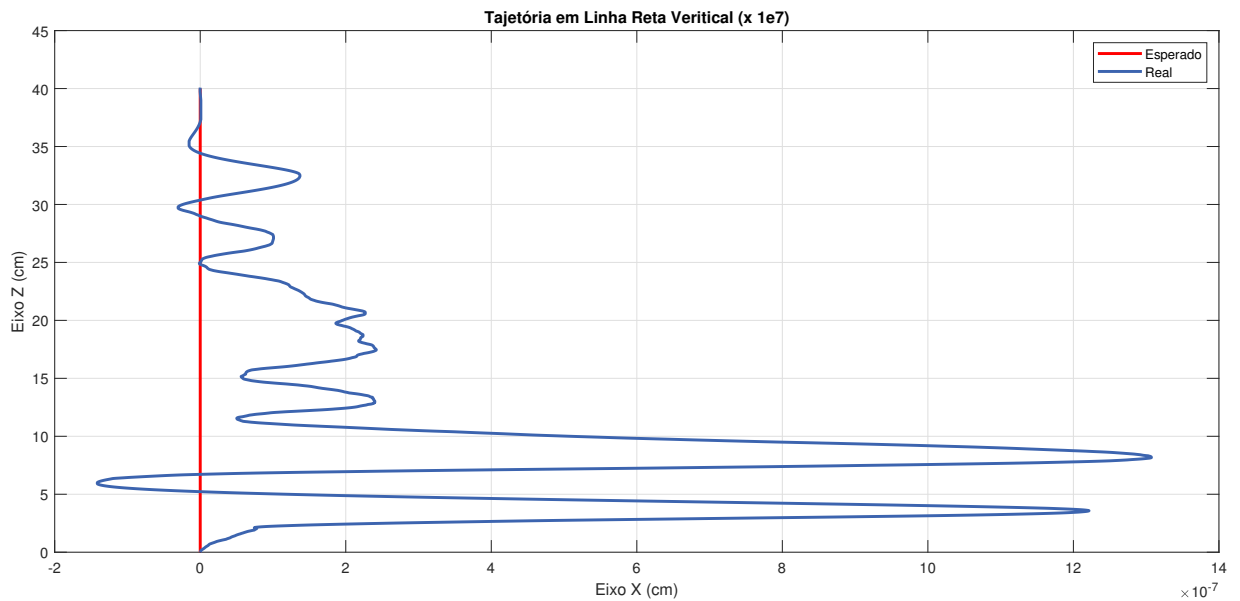
Na Figura 29(a) é muito claro o quão eficiente foi o uso do controlador PD. É quase imperceptível a diferença entre o trajeto real e o desejado. Na Figura 29(b), apenas com um aumento da ordem de 10^7 é possível notar claramente esta diferença. Quando é necessário uma mudança brusca entre retas interconectadas como é o caso do trajeto representado na Figura 30, o erro é mais evidente.

Para o caso de trajetórias curvilíneas, o erro é mais significativo. Pode-se perceber que a discrepâncias entre as trajetórias é bem maior na Figura 31, onde a medida do erro mantém certa estabilidade depois de um certo tempo.

Figura 29 – Trajetória vertical em linha reta.



(a) Seguimento de trajetória em escala normal.

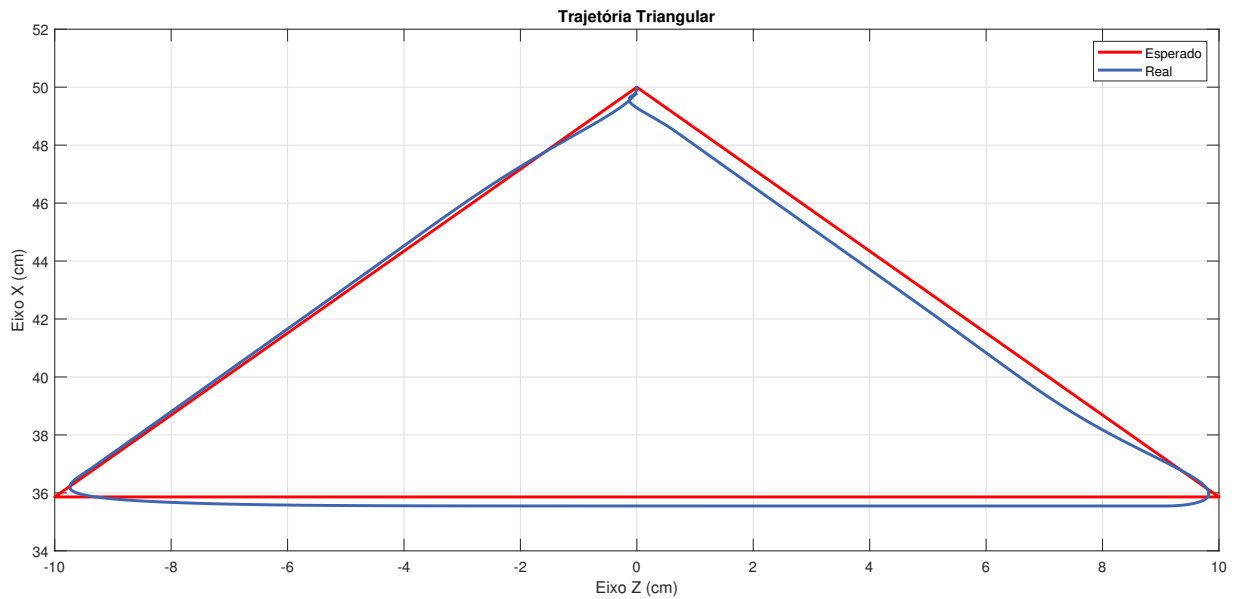


(b) Seguimento de trajetória ampliado em $\times 10^7$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Figura 34(a), pode-se observar claramente o efeito do movimento das três juntas em conjunto. O resultado é uma figura curvilínea tridimensional com vistas diferentes de cada ângulo. Nota-se que enquanto para a vista frontal o trajeto se assemelha a um círculo, na vista superior esta figura mais se parece com um elipsoide com pontas.

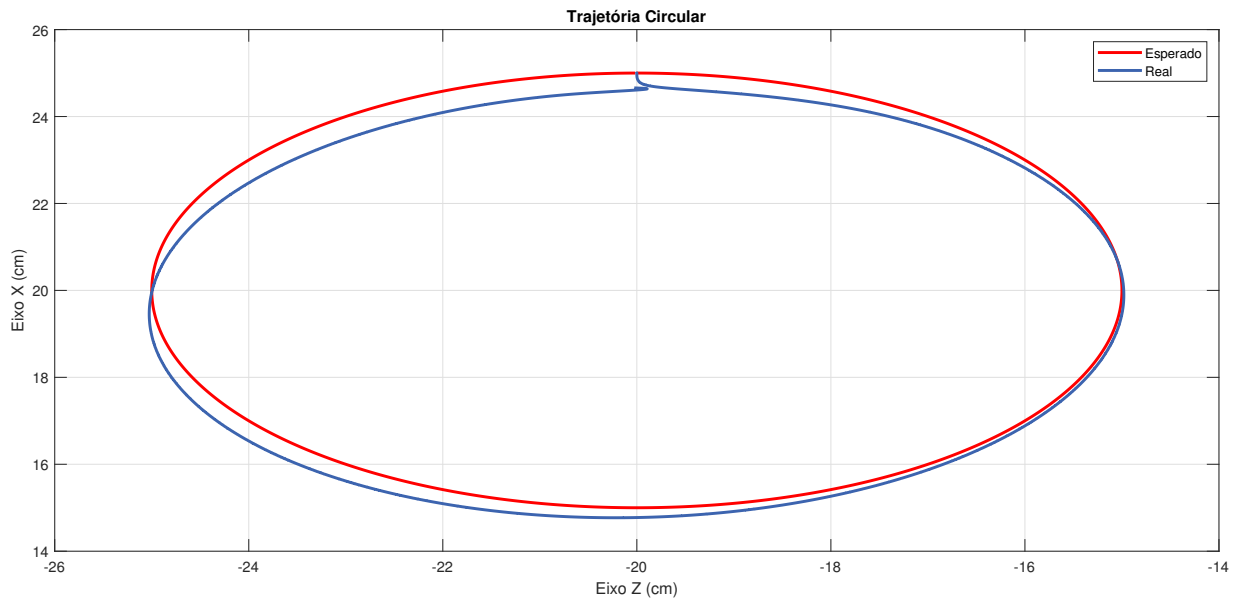
Figura 30 – Seguimento para uma trajetória triangular.



Fonte: Elaborado pelo autor.

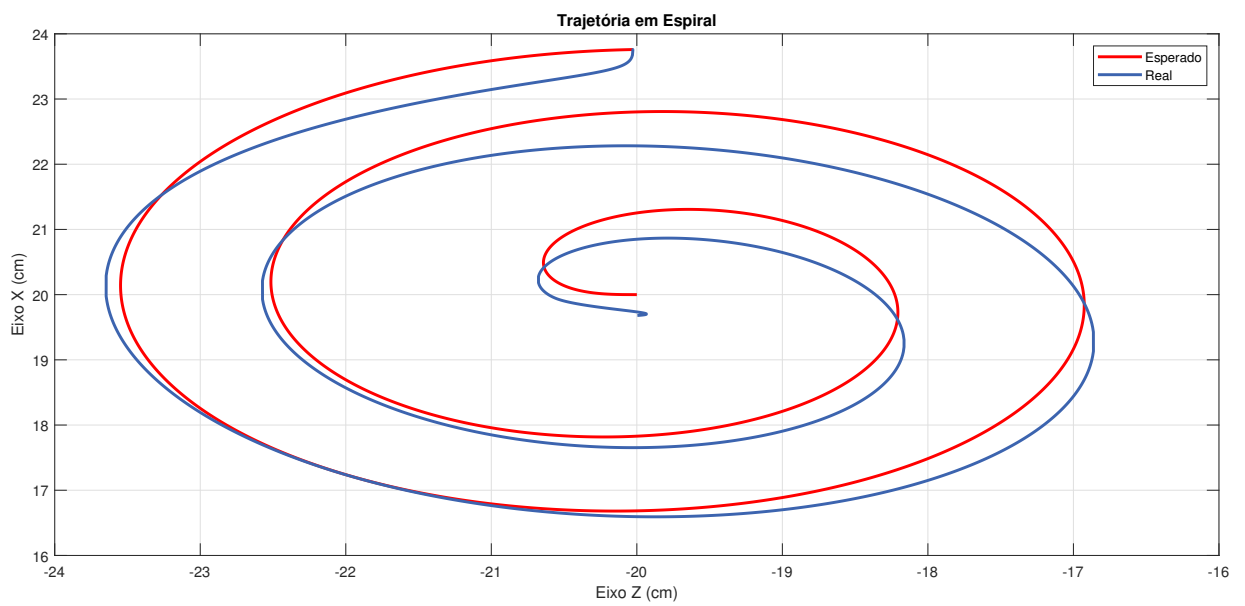
Assim como a abordagem pressuposta, a Figura 34(b) apresenta de forma mais clara o resultado da cinemática inversa. O gerador de trajetórias como um todo especifica cada ângulo para cada ponto do trajeto no plano cartesiano que se deseja percorrer. Desta forma, obtém-se as variáveis de juntas necessárias em função do tempo. Assim, ao invés de se especificar uma função polinomial para cada junta, basta colher as informações geométricas e repassá-las em termos de posição e orientação para cada elo.

Figura 31 – Seguimento para uma trajetória circular.



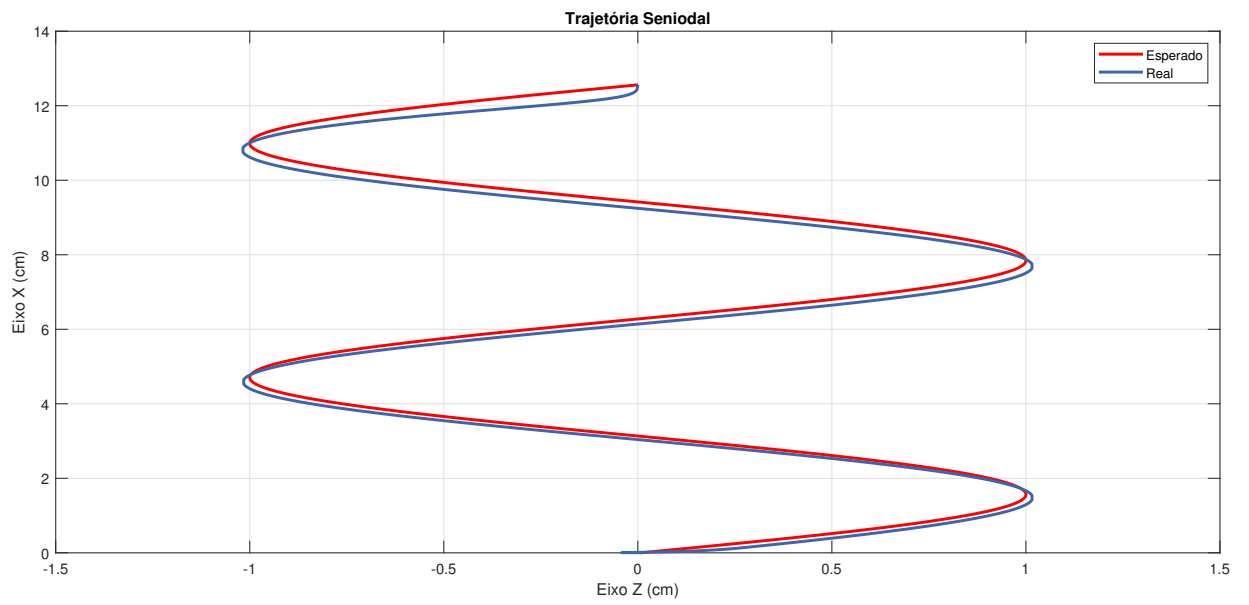
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 – Seguimento para uma trajetória em espiral.



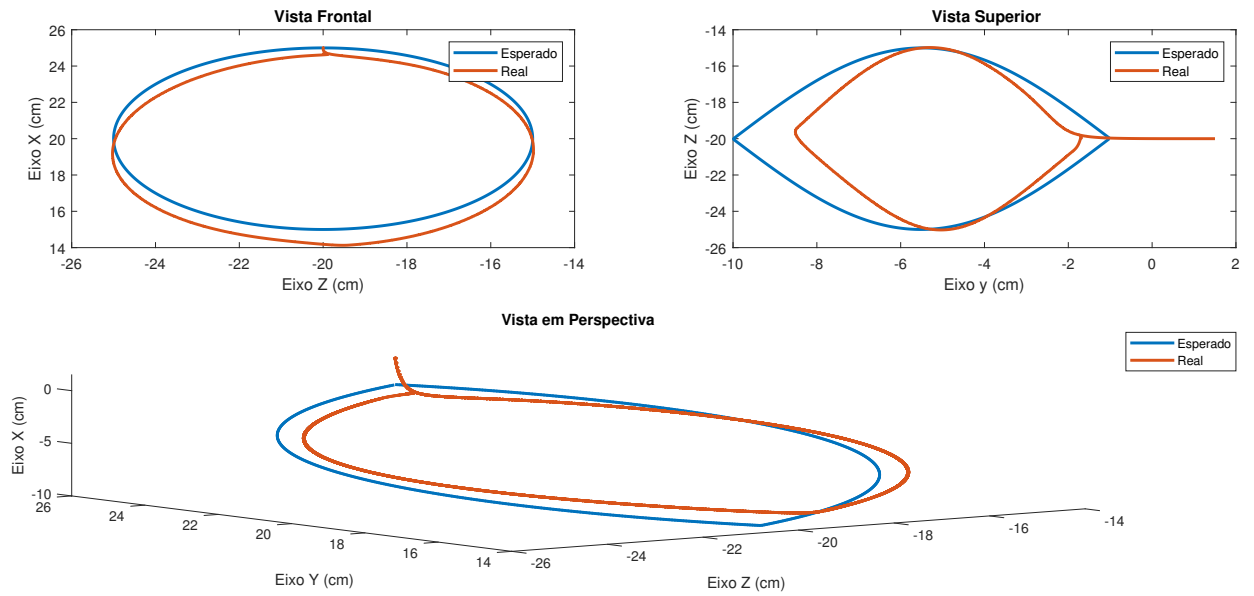
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 33 – Seguimento para uma trajetória senoidal.

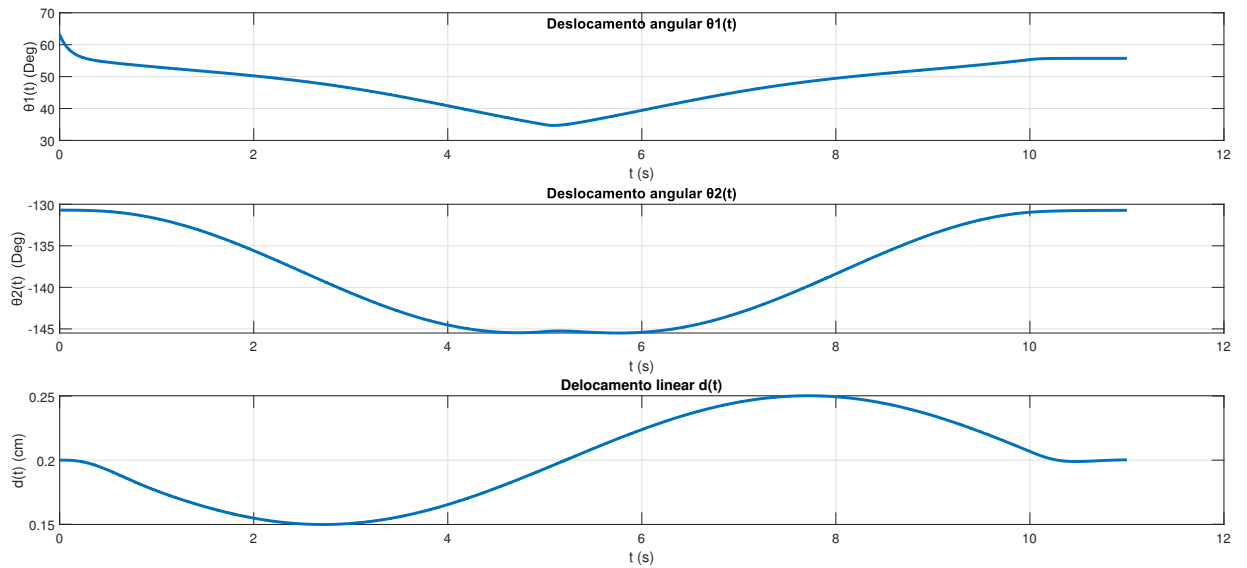


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 – Trajetória vertical em linha reta.



(a) Seguimento de trajetória feito em perspectiva.



(b) Trajetórias geradas para cada elo.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Para este trabalho utiliza-se a posição e a orientação de cada componente do manipulador a adoção de coordenadas cartesianas para estabelecer-se um sistema referencial próprio e que se relacione com os demais componentes do manipulador.

A aplicação das matrizes de transformação serve como artifício matemático para a representação espacial do manipulador como um todo. Com base no sistema de referência global e dos sistemas relativos de um eixo com relação ao seu precedente, é possível obter as translações e rotações adequadas para o correto posicionamento e orientação dos componentes do robô em termos de simulação.

Para a simulação do seguimento de trajetória, adota-se o método de cinemática inversa através das características geométricas do manipulador. Esta escolha é razoável para uma melhor representação do processo de acompanhamento do trajeto. Ou seja, dadas as referências em coordenadas cartesianas, o gerador de trajetórias, através da cinemática inversa, converte cada ponto em cada período de amostragem em variáveis de juntas. Desta forma, é possível descrever o trajeto em termos de ângulos e deslocamento linear para cada respectiva junta.

Tomando-se como base que cada junta do manipulador é analisada separadamente, é possível estabelecer uma lei de controle através de uma abordagem linear. O comportamento desejado é uma resposta criticamente amortecida desejando-se eliminar qualquer oscilação em frequências que possam dificultar a análise dinâmica. É coerente dizer que, mesmo com as considerações dinâmicas dos atuadores e as características físicas dos elos, o controlador PD apresenta resultados condizentes com o esperado. As simplificações são feitas também com relação a estas restrições dinâmicas e físicas, de forma que as equações desenvolvidas não apresentem uma ordem elevada e torne o sistema demasiadamente complexo.

Os resultados de simulação para o acompanhamento de cada trajetória são satisfatórios, visto que o principal objetivo é a realização do deslocamento em si de um ponto a outro definidos pelo usuário, o que importa para aplicações industriais. Nestes ambientes, a precisão não conta como fator preponderante, já que as operações fundamentais consistem apenas na movimentação de objetos, por exemplo, estando restritos a movimentos como *Pick-and-Place*.

Como trabalhos futuros vale as seguintes análises:

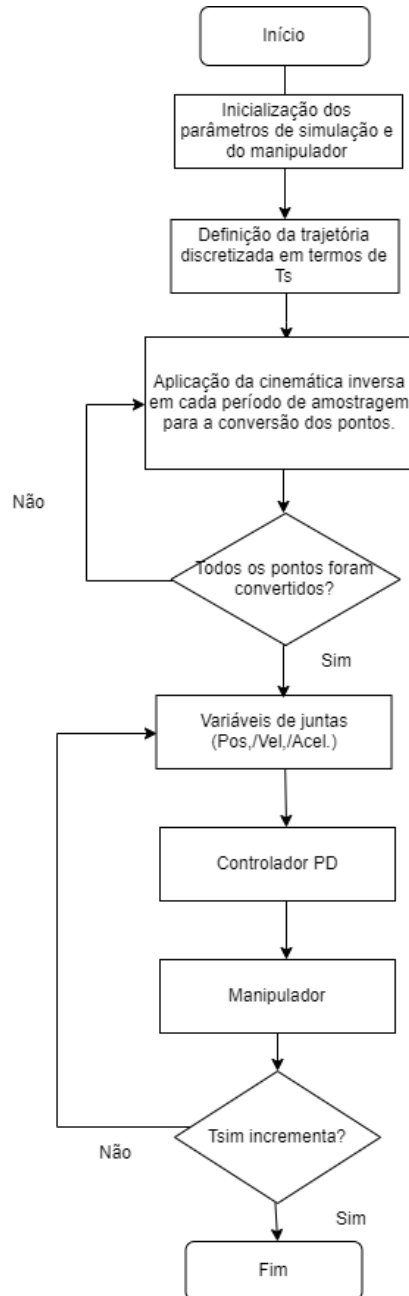
- Utilização de um sistema embarcado para a implementação em um sistema experimental físico e, assim, coletar dados para a comparação com os resultados do simulador proposto;
- Utilização de técnicas de fusão-integração sensorial para a coleta de resultados o mais fidedignos possíveis;
- Explorar outras técnicas de rotação de quadros como é o caso dos *quatérnios*;
- A aplicação de técnicas de controle multivariáveis que tratem do acoplamento do manipulador como um sistema *multiple-input;multiple-output* (MIMO).

REFERÊNCIAS

- AL-SHUKA, H. F.; LEONHARDT, S.; ZHU, W.-H.; SONG, R.; DING, C.; LI, Y. Active impedance control of bioinspired motion robotic manipulators: An overview. **Applied bionics and biomechanics**, Hindawi, v. 2018, 2018.
- ASADA, H.; YOUCEF-TOUMI, K. **Direct-drive Robots: Theory and Practice**. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1987. ISBN 0-262-01088-7.
- BOMFIM, M. H. S. **REMANUFATURA DE MANIPULADORES ROBÓTICOS INDUSTRIAIS UTILIZANDO ARQUITETURA ABERTA**. 131 p. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, Belo Horizonte, 2013.
- BOYCE; BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Elementary Differential Equations, with ODE Architect CD**. Wiley, 2004. ISBN 9780471433392. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iQwXAQAAMAAJ>>.
- CARRARA, V. **Introdução à robótica industrial**. [S.l.: s.n.], 2015.
- CARVALHO, J. S. F. de. **Controle Adaptativo Aplicado em um Robô Manipulador de Dois Graus de Liberdade Planar**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, 2009.
- CHENG, Y.; YIN, C.; XUE, J.; ZHANG, B.; HUANG, X.; HU, B.; SHI, X. Design of trajectory tracking control for adaptive intelligent detection based on 6-dof manipulator. In: IEEE. **2017 Chinese Automation Congress (CAC)**. [S.l.], 2017. p. 7255–7260.
- COSTA, E. R. F. **Simulação de Movimento e Planejamento de Trajetória para Robôs manipuladores**. 74 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2003.
- CRAIG, J. J. **Introduction to robotics: mechanics and control, 3/E**. [S.l.]: Pearson Education India, 2009.
- DENAVIT, J.; HARTENBERG, R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. **Trans. ASME E, Journal of Applied Mechanics**, v. 22, p. 215–221, June 1955.
- ETHAL, J. L. **Estudo de Métodos para a Solução da Cinemática Inversa de Robôs Industriais para Implementação Computacional**. 173 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 1992.
- FRANKLIN, G. F.; EMAMI-NAEINI, A.; POWELL, J. D. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 3rd. ed. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1993. ISBN 0201527472.
- GROOVER, M. P.; WEISS, M.; NAGEL, R. N. **Industrial Robotics: Technology, Programming and Application**. 1st. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 1986. ISBN 007024989X.
- HARTENBERG, R.; DENAVIT, J. **Kinematic synthesis of linkages**. McGraw-Hill, 1964. (McGraw-Hill series in mechanical engineering). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=kWRaDQEACAAJ>>.
- HERNÁNDEZ-RIVEROS, J.-A. Sospd controllers tuning by means of an evolutionary algorithm. 03 2014.

- LIMA, E. **Álgebra linear**. IMPA, 1995. (Coleção matemática universitária). ISBN 9788524400896. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=QKDqtgAACAAJ>>.
- LIMA, P. V. S. e B. Manipuladores robóticos industriais. **Caderno de Graduação - Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIT**, v. 3, n. 3, p. 85, 2016. ISSN 2316-3135.
- Luh, J. Y. S. Conventional controller design for industrial robots — a tutorial. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, SMC-13, n. 3, p. 298–316, May 1983. ISSN 2168-2909.
- OLIVEIRA, G. T. da S. **Projeto Ótimo de Robôs Manipuladores 3R Considerando a Topologia do Espaço de Trabalho**. 122 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2012.
- PAUL, R. **Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control : the Computer Control of Robot Manipulators**. MIT Press, 1981. (Artificial Intelligence Series). ISBN 9780262160827. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=UzZ3LAYqvRkC>>.
- ROBERTO, T. A. **Cálculo da Cinemática Inversa do Robô Manipulador PUMA 560 Utilizando Algoritmos genéticos**. 2012. Monografia (Bacharel em Engenharia da Computação), EESC-USP (Escola de engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo), São Carlos, Brasil.
- SICILIANO, B.; KHATIB, O. **Springer Handbook of Robotics**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. ISBN 354023957X.
- Siciliano, B.; Villani, L. A force/position regulator for robot manipulators without velocity measurements. In: **Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation**. [S.l.: s.n.], 1996. v. 3, p. 2567–2572 vol.3. ISSN 1050-4729.
- SPONG, M.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. **Robot Modeling and Control**. Wiley, 2005. ISBN 9780471649908. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=jyD3xQEACAAJ>>.
- STEFFEN, A. R. MONOGRAFIA - ESPECIALIZAÇÃO, **UTILIZAÇÃO DE UMA TOOLBOX COMO FERRAMENTA DE SIMULAÇÃO DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO**. Curitiba: [s.n.], 2011. 80 p.
- VASCONCELOS, F. J. de S.; F., I. de A. G.; CORREIA, W. B. Auto-tuning of gpc weights based on particle swarm optimization applied to a manipulator end-effector trajectory tracking. **In Anais do 19th International Conference on Advanced Robotics**, Belo Horizonte, MG - Brasil, 2019.

APÊNDICE A – METODOLOGIA DE SIMULAÇÃO PARA O SEGUIMENTO DE TRAJETÓRIA DE UM MANIPULADOR



APÊNDICE B – CÓDIGOS-FONTES UTILIZADOS PARA AS TRAJETÓRIAS E CINEMÁTICA INVERSA

Código-fonte 1 – Obtenção de trajetórias no plano cartesiano

```

1
2           % | 1 = Reta vertical
3           % | 2 = Circular
4 operator = 2 %< 3 = Espiral
5           % | 4 = Senoide
6           % \ 5 = Triangular
7
8
9 switch operator
10
11     case 1 %%Trajet  ria Vertical em linha reta
12
13     P_ini = [30,00,00];
14     P_fim = [30,40,00];
15
16     if P_ini(2) > P_fim
17         Y = [P_ini(2):-0.01:P_fim(2)];
18     else
19         Y = [P_ini(2):0.01:P_fim(2)];
20     end
21     X = 30*ones(1, length(Y));
22
23     x1 = [X(1):0.01:X(1)];
24     y1 = Y(1)*ones(1, length(x1));
25     x = [fliplr(x1) X];
26     y = [y1 Y];
27     z = 0*y;
28

```

```

29     case 2 %% Trajet      ria circular
30
31
32     th = pi/2:0.01:5*pi/2;
33     Z =5 * cos(th) ;
34     Y =5 * sin(th) ;
35
36     limite = 10
37     z = 20+[Z];
38     y = 20+[Y];
39     x1 = [1:(limite-1)*2/length(y):limite]
40     x2 = fliplr([1+(limite-1)*2/length(y):(limite-1)*2/
41                length(y):limite])
42     x = [x1 x2];
43 %     x = ones(1,length(y));
44     case 3 %% Espiral
45     a = 1;
46     theta = 0:0.01:(9*pi/2)
47     r_pos= a*(theta.^(1/2));
48
49     for i=1:length(r_pos)
50     Z(i) = (r_pos(i)*cos(theta(i)));
51     Y(i) = (r_pos(i)*sin(theta(i)));
52     end
53     Z = fliplr(Z);
54     Y = fliplr(Y);
55     z1 = [Z(1):0.01:Z(1)+2];
56     y1 = Y(1)*ones(1,length(z1));
57     z = 20+Z;
58     y = 20+Y;
59     x = ones(1,length(z));

```

```

60     case 4 %% Senoide
61     a = 1
62     Y = ([0:0.01:4*pi])
63     Z = a.*sin(Y)
64     z1 = [Z(1)-2:0.01:Z(1)];
65     y1 = Y(1)*ones(1,length(z1));
66     z = [ Z];
67     y = fliplr(Y);
68     x = ones(1,length(z));
69
70
71
72     case 5 %%Tri ngulo
73     y1 = [60:-0.01:60-20/sqrt(2)];
74     z1 = [0:10/(length(y1)-1):10];
75     z2 = z1(end):-0.01:-10;
76     y2 = y1(end)*ones(1,length(z2));
77     y3 = [60-20/sqrt(2):+0.01:60];
78     z3 = [z2(end):10/(length(y1)-1):0];
79     y = -10+[y1 y2 y3];
80     z = [z1 z2 z3]
81     x = ones(1,length(z));
82
83
84
85 end

```

Código-fonte 2 – Cinemática inversa pelo método geométrico

```

1 t = [0:ts:Tsim];
2 l1=30;
3 l2=30;

```



```
4 for i=1:length(x)
5     beta(i) = atan2(y(i),x(i));
6     qsi(i) = acos((x(i)^2+y(i)^2+l1^2-l2^2)/(2*l1*sqrt(x(i)
7         ^2+y(i)^2)));
8     theta1(i) = (beta(i)+qsi(i))*180/pi - 90;
9     theta2(i)=-acos((x(i)^2+y(i)^2-l1^2-l2^2)/(2*l1*l2))
10         *180/pi;
11 end
12 theta1SIM = timeseries(theta1,t);
13 theta2SIM = timeseries(theta2,t);
14 ZSIM = timeseries(z/100,t);
```