



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE RUSSAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

HISMAEL COSTA DE OLIVEIRA

**COLORAÇÃO HARMÔNICA DE GRAFOS: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO
PROGRAMAÇÃO INTEIRA**

RUSSAS

2019

HISMAEL COSTA DE OLIVEIRA

COLORAÇÃO HARMÔNICA DE GRAFOS: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO
PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Software do Campus de Russas da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Software.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Costa Santos

Co-Orientadora: Prof. Ms. Tatiane Fernandes Figueiredo

RUSSAS

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O47c Oliveira, Hismael Costa de.
Coloração hamôinica de grafos : uma abordagem utilizando programação inteira / Hismael Costa de Oliveira. – 2019.
40 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas, Curso de Engenharia de Software, Russas, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Marcio Costa Santos.

Coorientação: Prof. Me. Tatiane Fernandes Figueiredo.

1. Problema de coloração de grafos. 2. Otimização combinatória . 3. Programação linear. 4. Combinatória poliédrica . I. Título.

CDD 005.1

HISMAEL COSTA DE OLIVEIRA

COLORAÇÃO HARMÔNICA DE GRAFOS: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO
PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia de Software
do Campus de Russas da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia de Software.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Costa Santos (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Tatiane Fernandes
Figueiredo (Co-Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Pablo Luiz Braga Soares
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família e meus amigos, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Em especial a minha mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a minha família, em especial a minha mãe, por demonstrar força em situações difíceis e sempre me confortar quando eu achava que todo o meu mundo iria acabar.

Agradeço aos meus amigos por me darem uma nova família numa cidade onde não conhecia ninguém. Agradeço a irmandade e cumplicidade do Isaac, da Vitória Rafaelly, do Rodrigo, da Fernanda, da Milenny, do Júnior Sombra, do Matheus, da Ívina, da Anna, da Maria Victoria e de diversos outros que passaram por minha vida nessa grande trajetória. Agradeço por todas as conversas jogadas fora e até mesmo as saídas no meio da semana. Muito obrigado por fazerem minha estadia na cidade de Russas ser mais feliz do que eu poderia imaginar.

Agradeço a todos os meus professores, em especial ao Alexandre Arruda, Tatiane Fernandes, Marcio Costa e Marília Mendes, por me acompanharem em diversos projetos de pesquisa e me repassarem seus conhecimentos da melhor maneira possível. Grande parte do profissional que sou hoje eu devo a vocês.

E por fim, agradeço a mim por sempre manter o foco mesmo em tempo de adversidades.

“Sempre vai haver outra montanha, eu sempre vou querer escalá-la mesmo sabendo que será uma batalha difícil. Mas o importante não será o quão rápido eu vou chegar, nem o que está me esperando, e sim, a escalada.”

(Miley Cyrus)

RESUMO

Para vários pesquisadores, os problemas de coloração de grafos são o assunto mais popular em teoria dos grafos. Essa popularidade deve-se ao fato destes problemas serem amplamente aplicados em inúmeros outros do mundo real. Entre as suas variações, encontra-se o Problema da Coloração Harmônica de Grafos (PCHG), que consiste em encontrar o menor número de cores capaz de colorir os vértices de um grafo, permitindo que vértices adjacentes possuam as mesmas cores, porém fazendo com que as arestas sejam distinguíveis pelo conjunto de cores dos seus vértices. Atualmente, não é encontrado na literatura nenhuma técnica exata para a resolução do PCHG. Em contraponto, este trabalho apresenta o desenvolvimento de modelos de programação linear inteira, baseados no conjunto de cores e de representantes, para auxiliar na resolução do PCHG para diversos tipos de instâncias. Também são apresentadas desigualdades válidas para cada modelo matemático, como também, um estudo sobre o seu poliedro. Para as instâncias observadas, os modelos apresentam bom desempenho mostrando-se eficientes para um uso em problemas reais.

Palavras-chave: Problema de Coloração de Grafos. Otimização Combinatória. Programação Linear. Combinatória Poliédrica.

ABSTRACT

For many researchers the graphs coloring problems are the most popular subject in Graph Theory. This popularity is given by the fact of those problems being widely used in uncounted problem in the real life. Amongst its variations lies the Harmonic Coloring of Graphs Problem (HCGP), whose object is find the lower number of colors able to color the vertices of graph, allowed adjacent vertices share the same color, and making the edges distinguishable by the color set associated with their vertices. Currently it's not find in the literature an exact form to solve the HCGP. In counterpoint the present work introduce the development of integer linear programming models, based in the set colors and vertices representatives, to auxiliate in resolution of HCGP for various types of instances. It also presented valid inequalities for each mathematical model, also too, a mathematical study about the polyedra associated to the problem. For the observed instances, the model present a good performance and showing up efficient to use in real problems.

Graph Coloring Problems. Combinatorial Optimization. Linear Programming. Polyhedral Combinatorial.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de um grafo	14
Figura 2 – Problema de Orientação de Aviação	15
Figura 3 – Coloração harmônica de um grafo	19
Figura 4 – Conjunto de vizinhos do vértice i	29
Figura 5 – Representantes de um subgrafo H	31

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Grafos com densidade de 0.2	34
Tabela 2 – Grafos com densidade de 0.3	34
Tabela 3 – Grafos com densidade de 0.5	35
Tabela 4 – Grafos com densidade de 0.7	35
Tabela 5 – Grafos com densidade de 0.9	35

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

HCGP	Harmonic Coloring of Graphs Problem
PCG	Problema da Coloração de Grafos
PCHG	Problema da Coloração Harmônica de Grafos
PL	Programação Linear
PLI	Programação Linear Inteira
PLIB	Programa Linear Inteiro Binário
PO	Pesquisa Operacional

LISTA DE SÍMBOLOS

$\delta(G)$	Grau mínimo de um grafo G
$\Delta(G)$	Grau máximo de um grafo G
C_n	Ciclo com n arestas
P_n	Caminho com n arestas
K_n	Grafo completo com n arestas
$\chi(G)$	Número cromático de um grafo G
$\chi'(G)$	Índice cromático de um grafo G
$\lambda(G)$	Número cromático harmônico de um grafo G

SUMÁRIO

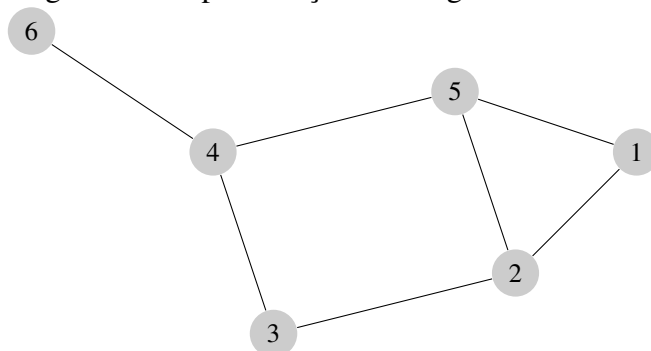
1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Contribuições	15
1.2	Organização do Trabalho	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Teoria dos Grafos	17
2.2	Problemas de Coloração de Grafos	18
2.3	Pesquisa Operacional	19
2.3.1	<i>Programação Linear</i>	20
2.3.2	<i>Programação Linear Inteira Binária</i>	21
2.4	Combinatória Poliédrica	22
3	TRABALHOS RELACIONADOS	24
3.1	Resolução de Problemas de Coloração Utilizando Programação Inteira	24
3.2	Problema de Coloração Harmônica de Grafos	25
4	PROBLEMA DE COLORAÇÃO HARMÔNICA DE GRAFOS	27
4.1	Definição do Problema	27
4.2	Formulação Matemática Baseada no Conjunto de Cores	27
4.2.1	<i>Desigualdades Válidas</i>	28
4.3	Formulação Matemática Baseada em Representantes	29
4.3.1	<i>Desigualdades Válidas</i>	30
4.3.2	<i>Estudo do Poliedro</i>	31
5	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	33
5.1	Configuração do ambiente computacional	33
5.2	Instâncias	33
5.3	Estudo comparativo entre as formulações	33
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	37
6.1	Conclusões	37
6.2	Trabalhos Futuros	37
	REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos é uma das mais importantes áreas da computação e matemática. Esta importância deve-se ao fato da sua aplicação em diversos problemas práticos. Um dos mais conhecidos problemas de Teoria dos Grafos é o Problema da Coloração de Grafos (PCG). Este problema tem aplicações em problemas reais importantes, como a separação de elementos explosivos, alocação de frequências e modelagem de problemas de atribuição de tarefas. O problema abordado neste trabalho é um tipo de PCG e é conhecido como Problema da Coloração Harmônica de Grafos.

Considerem o seguinte exemplo de um sistema de orientação de aviação. Nesse sistema crítico, devemos manter a confiança e fazer com que os aviões naveguem sem risco algum de colisão. Uma excelente abordagem para a resolução desse problema é utilizando um grafo. Numa definição informal, podemos definir um grafo como um conjunto de nós conectados através de arestas. Na Figura 1 temos a representação simples de um grafo.

Figura 1 – Representação de um grafo

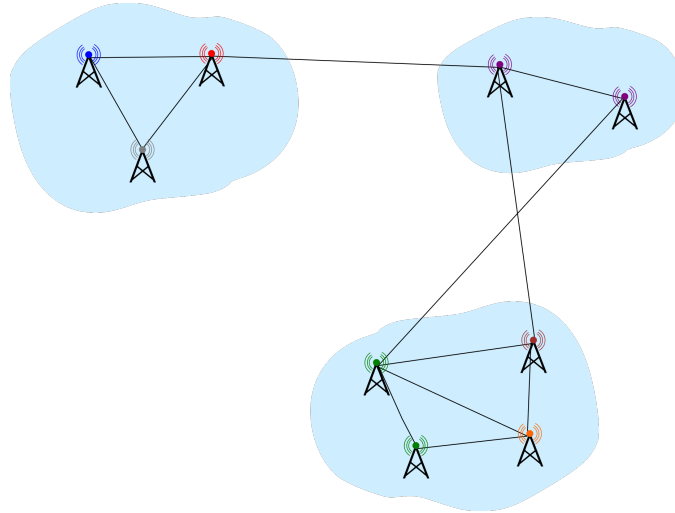


Fonte: Elaborado pelo Autor (2019).

Considerando o problema de orientação de aviação, os nós seriam as posições das torres faróis de cada aeroporto e as arestas seriam as vias aéreas. Poderíamos representar as torres faróis através de cores. Para realizar esta coloração sempre buscaríamos o número mínimo de cores. As vias aéreas, por sua vez, seriam representadas pelo conjunto contendo a torre farol de início e a de fim, onde cada via aérea deve conter um conjunto único, ou seja, não pode aparecer em numa outra aresta, para não confundir com as outras vias aéreas existentes no grafo. Uma representação simples para esse problema encontra-se na Figura 2.

Essa é apenas uma das aplicações reais do problema de coloração harmônica, apresentado neste trabalho. O problema de coloração harmônica pode ser visto como uma extensão do problema de orientação de aviação.

Figura 2 – Problema de Orientação de Aviação



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019).

A resolução desse problema não é tão simples como parece. A formulação teórica aconteceu no ano de 1983 (HOPCROFT; KRISHNAMOORTHY, 1983) e até hoje não é encontrado na literatura nenhum algoritmo escalável para sua resolução. Também é encontrada uma deficiência na quantidade de trabalhos relacionados a este problema.

Govindarajan (2012) retrata diversos outros problemas com aplicações reais onde a coloração harmônica tem potencial aplicação. Portanto, com a resolução deste problema diversas aplicações reais seriam beneficiadas, assim como os métodos desenvolvidos poderiam ser utilizados em outros problemas e abrir espaço para o desenvolvimento de métodos eficientes para outros problemas de otimização combinatória.

Como forma de preencher essa deficiência encontrada na literatura, e utilizando conceitos de Teoria dos Grafos para a representação dos dados de entrada do problema, neste trabalho serão desenvolvidas formulações matemáticas que buscam por soluções de maneira eficiente para grafos arbitrários.

1.1 Contribuições

- Desenvolvimento de formulações matemáticas lineares inteiras para o Problema de Coloração Harmônica de Grafos;
- Elaboração de desigualdades válidas para cada formulação proposta;
- Estudo sobre o poliedro gerado pela formulação baseada em representantes;
- Desenvolvimento de uma análise estatística do desempenho das formulações matemáticas e melhorias propostas apresentadas.

1.2 Organização do Trabalho

O restante do trabalho se divide em 5 capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os conceitos base necessários para entendimento e resolução do problema proposto. O Capítulo 3 apresenta os trabalhos relacionados ao tema do problema. No Capítulo 4 são detalhados os modelos matemáticos desenvolvidos, desigualdade válidas e um estudo sobre a dimensão do poliedro. No Capítulo 5 são apresentados os resultados computacionais. Por fim, o Capítulo 6 traz as conclusões e trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para definição matemática do problema abordado neste trabalho é necessário alguns conceitos iniciais nas áreas de Teoria dos Grafos, Problemas de Coloração de Grafos, Pesquisa Operacional e Combinatória Poliédrica apresentados nas subseções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, respectivamente.

2.1 Teoria dos Grafos

Um *grafo simples* $G = (V, E)$ consiste de um conjunto finito não vazio V de elementos, chamados de *vértices*, e um conjunto de pares não-ordenados de elementos distintos de V , chamados de *arestas*, isto é, $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$. Quando o grafo estiver claro pelo contexto, é utilizado V e E para $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente, para simplificar a notação. Se $e = \{u, v\}$ é uma aresta, dizemos que e *incide em* u e *em* v ; que u e v *são seus extremos*; e que u e v *são adjacentes*. Como forma de simplificar notação, é denotar uma aresta por uv .

Seja um vértice v , definimos como *grau* do vértice v o número das arestas que contém v , ou seja a quantidade de vértices incidentes em v , e denotamos por $g(v)$. O *grau máximo* de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, é definido como $\Delta(G) = \max\{g(v) | v \in V(G)\}$. De modo semelhante, o *grau mínimo*, denotado por $\delta(G)$, é definido como $\delta(G) = \min\{g(v) | v \in V(G)\}$.

Um *passeio* é definido como uma sequência de vértices $v \in V(G)$ dotada da seguinte propriedade: se u e v são vértices consecutivos na sequência então uv é uma aresta do grafo G . Uma aresta do passeio é qualquer aresta $uv \in E(G)$ tal que v é sucessor de u no passeio. Um *caminho* em um grafo G é um passeio com uma sequência de vértices (v_0, v_1, \dots, v_k) de $V(G)$ distintos entre si, ou seja, um passeio em que as arestas são todas diferentes entre si. Um *ciclo* em um grafo é um caminho fechado, ou seja, termina no vértice em que começa. Todo ciclo deve ter comprimento maior que 2 vértices e não possuir arestas repetidas. Um grafo com n vértices que consiste de um único ciclo é denominado *grafo circular*, e denotamos por C_n .

Algumas outras definições são usadas para expressar propriedades importantes, dentre elas podemos destacar o *grafo completo*, *grafo conexo* e o *subgrafo*. Um grafo G é dito *completo* se, para quaisquer $v, u \in V$, temos $(v, u) \in E$. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Semelhante a definição anterior, um grafo G é dito *conexo*, se para quaisquer $v, u \in V(G)$, temos um caminho que parte de v e chega em u . Considere um grafo $G' = (V', E')$. Dizemos que G' é *subgrafo* de G , se e somente se, $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se para quaisquer par de

vértice v, u de G , se (v, u) é uma aresta de G e (v, u) também é uma aresta de G' dizemos que o subgrafo G' é *induzido*.

Um outro tipo de grafo utilizado neste trabalho é o chamado *Grafo Potência*. A k -ésima potência de um grafo G , denotado por G^k , é um novo grafo que possui o mesmo conjunto de vértices, mas em que dois vértices são adjacentes quando existe um caminho de tamanho k .

Como o contexto do problema é aplicado em grafos, todos os conceitos apresentados nesta subseção serão de extrema importância em todas as próximas etapas desse trabalho.

2.2 Problemas de Coloração de Grafos

Um problema de coloração de grafos consiste em atribuir cores a certos elementos do grafo sujeito a determinadas condições. Para Alon (1993), "*a coloração de grafos é indiscutivelmente o assunto mais popular em teoria dos grafos*". Essa popularidade deve-se ao fato deste problema ser amplamente aplicado em diversos outros problemas do mundo real, como por exemplo: Separação de produtos explosivos, atribuição de frequências de rádio, problemas de agendamento, dentre outros.

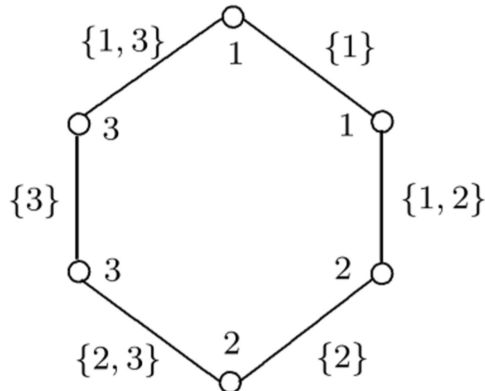
Os problemas em coloração de grafos que receberam mais atenção envolvem colorir os vértices de um grafo, que chamamos *coloração de vértices*. A definição clássica desse problema pode ser descrita como: dado um grafo G e um inteiro k , encontrar uma coloração própria de G com k cores. Uma coloração de vértices é chamada de *própria* se os todos vértices adjacentes possuem cores diferentes. Se cada cor usada for uma das k cores dadas, então nos referimos a essa como uma coloração k -coloração.

Uma das definições mais importantes para o problema de coloração de grafos é a de *Número Cromático*. O *Número Cromático*, denotado por $\chi(G)$, é definido como o mínimo inteiro positivo k para o qual G admite uma k -coloração para os vértices. Um grafo G com número cromático k é chamado *grafo k -cromático*. Portanto, se $\chi(G) = k$, então existe uma k -coloração de G , mas não uma $(k-1)$ -coloração.

Outros problemas de coloração de grafos que também recebem grande atenção são os *problemas de colorações distintivas*. Eles são problemas de colorações que induzem rotulagens distintas para vértices ou arestas. Uma rotulagem é a atribuição de um número ou um conjunto, chamado de rótulo, a um vértice ou aresta. Uma *rotulagem de arestas* de G é *aresta-distinguível* se cada aresta é determinada unicamente por um rótulo. Similarmente, uma *rotulagem de vértices* de G é *vértice-distinguível* se vértices diferentes possuem rótulos diferentes.

O Problema da Coloração Harmônica de Grafos (PCHG) (HOPCROFT; KRISHNAMOORTHY, 1983), base para este trabalho, é um problema de coloração distintiva, em que, realiza-se a coloração dos vértices, onde vértices adjacentes podem possuir a mesma cor, induzindo uma rotulagem aresta-distinguível que rotula cada aresta uv com o rótulo $\{cor(u), cor(v)\}$. Uma representação para esse problema é vista na Figura 3.

Figura 3 – Coloração harmônica de um grafo



Fonte: (FRANK *et al.*, 1982)

Similarmente ao número cromático, no problema de coloração harmônica temos o *número cromático harmônico*, denotado por $\lambda(G)$. O *número cromático harmônico* é definido como o menor inteiro positivo k , tal que G possui k -coloração harmônica.

Neste trabalho buscaremos por soluções exatas para este problema utilizando técnicas de pesquisa operacional, cujos conceitos são apresentados nas seções a seguir.

2.3 Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional (PO) é uma área da matemática aplicada que estuda, desenvolve e aplica modelos matemáticos, estatística e algoritmos para auxiliar na tomada de decisões nas mais diversas áreas da atuação humana. É comumente utilizada para análise de sistemas complexos do mundo real, tipicamente com o objetivo de melhorar ou otimizar sua performance. Podemos classificar os problemas determinísticos de PO em algumas categorias genéricas: Problemas de Programação Linear, Programação Não-Linear, Programação Dinâmica, Teoria dos Jogos, Simulação e Modelos de Otimização em Redes. Um dos focos deste trabalho reside na aplicação de técnicas de Programação Linear Inteira Binária para a resolução do PCHG.

2.3.1 Programação Linear

A Programação Linear (PL) é uma técnica que utiliza instrumentos matemáticos que permitem a otimização de operações de problemas que tenham seus modelos matemáticos representados por expressões lineares. Segundo Goldbarg e Luna (2005) a PL apresenta algoritmos eficientes e que podem ser facilmente resolvidos usando um computador.

Segundo Caixeta-Filho (2001) a resolução dos problemas lineares é realizada através do aprimoramento de uma técnica de resolução de sistemas de equações lineares, utilizando sucessivas inversões de matrizes, integrando uma equação linear adicional representativa de um dado comportamento que deverá ser otimizado. Para Garcia *et al.* (1998) um modelo matemático para um problema de otimização pode ser formulado de acordo com o seguinte esquema:

Maximizar ou Minimizar:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$b_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$$

Onde:

Z = o valor da função a ser maximizada ou minimizada, respeitando o conjunto de elementos do problema ou restrições;

x_i = variáveis que representam quantidades ou recursos que se quer determinar para otimizar o resultado global;

c_i = coeficientes de ganho ou custo que cada variável é capaz de gerar;

b_i = quantidade disponível de cada recurso;

$a_{i,j}$ = quantidade de recurso em que cada variável decisória consome.

Os Problemas de PL podem ser resolvidos utilizando o Método Simplex, introduzido por Dantzig (1954). Esse método é um procedimento matricial, onde se inicia com uma solução z_0 e sucessivamente localiza outras soluções acarretando melhores valores para a função objetivo.

2.3.2 Programação Linear Inteira Binária

Um problema de Programação Linear Inteira (PLI) se diferencia pelo fato de conter todas as variáveis de decisão com valores discretos, ou seja, aceitando apenas valores inteiros. Um caso particular de PLI é quando as variáveis são inteiras e restritas aos valores 0 ou 1, esse caso é conhecido como Programa Linear Inteiro Binário (PLIB)(WOLSEY, 1998). Todos os algoritmos que resolvem PLIs também resolvem PLIBs.

Mesmo com décadas de pesquisa e sendo um grande foco de estudo em Pesquisa Operacional, ainda não foi desenvolvido um algoritmo para resolver um PLI de tamanho razoável ou seja, não existe um algoritmo que resolva um PLI com um número de passos polinomial no tamanho da entrada. Devido ao fato que, a resolução de um PLI é um problema da classe NP-Difícil, existem dois métodos aceitáveis, em tempo computacional, que resolvem problemas grandes, são eles: algoritmos de planos de corte e algoritmos enumerativos (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998).

Uma técnica comum utilizada por essas abordagens é a Relaxação Linear. Uma Relaxação Linear de um PLI é a sua resolução com remoção das restrições de integralidade, ou seja, restrições que impõem que as variáveis devem ser inteiras. A Relaxação Linear ajuda principalmente na obtenção de limitantes para os problemas de PLI.

Os algoritmos de Plano de Corte tem por objetivo refinar um conjunto viável ou função objetivo por meio de inequações lineares, chamadas cortes. Primeiro é resolvida a relaxação linear do PLI utilizando o método simplex. Após é verificado se a solução é inteira, em caso afirmativo, a solução da relaxação também é solução do problema original; se não for inteira, adiciona-se uma nova restrição que deve ser satisfeita por todas as soluções viáveis inteiras, mas não pela solução da relaxação. Após adicionar a sugestão, os passos anteriores são executados novamente até que encontre uma solução inteira (BERTSIMAS; TSITSIKLIS, 1997).

O algoritmo enumerativo tenta provar de forma construtiva que uma solução é ótima, baseando-se em um número de partições do problema. O primeiro passo, como nos algoritmos de planos de corte, é resolver a relaxação linear, em seguida, a checagem da relaxação. O próximo passo diferencia do método anterior, nesse método dividi-se o problema em dois subproblemas ao adicionar restrições que são mutuamente exclusivas e exaustivas. Em seguida escolhe-se um dos subproblemas para ser relaxado e resolvido pelo processo novamente, chamamos ele de problema escravo. O outro subproblema que espera a solução do problema escravo e verifica se também lhe satisfaz é chamado de problema mestre (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998).

2.4 Combinatória Poliédrica

A Combinatória Poliédrica é uma área da Otimização Combinatória que tem como base de sustentação, a Teoria de Poliedros e a Programação Linear. Pode-se dizer que a Combinatória Poliédrica estuda as propriedades de poliedros associados a problemas combinatórios. Tais estudos podem auxiliar no desenvolvimento de algoritmos, ou até mesmo revelar certas propriedades do problema em foco.

Existem alguns conceitos importantes dessa área que iremos utilizar neste trabalho, são eles: poliedro, desigualdades válidas e dimensão de poliedro.

Para Ferreira e Wakabayashi (1996), um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de **Poliedro** se

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\} \quad (2.1)$$

para alguma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e algum vetor $b \in \mathbb{R}^m$.

Um Poliedro P definido por uma matriz A e um vetor b é denotado por $P(A, b)$. Caso P seja limitado, ou seja, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in P$ satisfaz $\|x\| \leq \alpha$, chamamos P de **Politopo**.

Devido a diversos estudos realizados sobre poliedros, diversos teoremas importantes foram formulados. Um dos mais importantes é:

Teorema 2.4.1 (FERREIRA; WAKABAYASHI, 1996) *Todo poliedro é um conjunto convexo.*

Este teorema possui uma enorme importância para PL, pelo fato de ser uma das bases para a prova da corretude do algoritmo Simplex (DANTZIG, 1954).

Outros conceitos importantes são o de desigualdade válida e faces. Seja um poliedro $S \subseteq \mathbb{R}^n$, um vetor $a \subseteq \mathbb{R}^n$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, uma desigualdade $a^T x \leq \alpha$ é **válida** em relação a S se $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq \alpha\}$. Quando o conjunto S está claro pelo contexto, dizemos simplesmente que é uma desigualdade válida.

Segundo Ferreira e Wakabayashi (1996), um conjunto $F \subseteq P$ é uma **face** de P , se existe uma inequação válida $a^T x \leq \alpha$ em relação a P , tal que

$$F = P \cap \{x | a^T x = \alpha\} \quad (2.2)$$

Uma face F é chamada de **própria**, se $F \neq P$; e de **não-trivial** caso $\emptyset \neq F \neq P$. Se $a^T x \leq \alpha$ é válida em relação a P , então dizemos que $P \cap \{x | a^T x = \alpha\}$ é face **induzida** por $a^T x \leq \alpha$.

Antes de tratar sobre dimensão de um conjunto precisamos entender o que é o conjunto igualdade de uma face. Dado um poliedro $P(A,b)$ e uma face F desse poliedro, definimos o **conjunto igualdade** de F como sendo

$$ig(F) = \{i \in ind(A) \mid A_{i*}x = b_i, \forall x \in F\}. \quad (2.3)$$

onde $ind(A)$ é o conjunto dos índices das linhas da matriz A .

Por fim, a dimensão de um conjunto F , denotada por $dim(F)$ é d se F contém exatamente $d + 1$ vetores afim-independentes. Dizemos que um poliedro P possui dimensão plena (i.e. $dim(P) = n$) se $ig(P) = \emptyset$.

Os conceitos apresentados nesta seção serão de importante valia para o entendimento do estudo do poliedro mostrado na seção 4.3.

3 TRABALHOS RELACIONADOS

Este capítulo descreve alguns trabalhos da literatura mais relevantes para contextualização do problema proposto. Na seção 3.1 são apresentadas técnicas da literatura utilizadas para resolver problemas de coloração usando programação linear. Já na seção 3.2 é apresentado o que encontramos na literatura sobre o Problema de Coloração Harmônica de Grafos.

3.1 Resolução de Problemas de Coloração Utilizando Programação Inteira

Os problemas de coloração de grafos recebem muita atenção por parte dos pesquisadores da área de Otimização Combinatória, um desses problemas é de coloração de vértices. Diversas estratégias foram formuladas para a resolução deste problema, algumas utilizando programação dinâmica (LAWLER, 1976; EPPSTEIN, 2003) e *branch-and-bound* (BRÉLAZ, 1979; ZYKOV, 1949).

Para a resolução utilizando PLI é necessário primeiro encontrar uma formulação matemática adequada para o problema proposto. Campêlo *et al.* (2004) e Campêlo *et al.* (2008) sugeriram um modelo em que cada cor é representada exatamente por um vértice. O representante de um vértice v , onde $v \in G$ é algum vértice que v não possui vizinhança, ou seja, um vértice u onde existe a aresta uv em \overline{G} , ou o próprio vértice v . Isto se deve ao fato de que os vértices de $\overline{N}(v)$ podem compartilhar suas cores com v , já que eles não possuem aresta em G .

Campêlo *et al.* (2008) ressaltou que a simetria do modelo pode causar problemas em resolvidores enumerativos. A razão para isso está no fato de que, dentro de uma classe de cores, qualquer um dos vértices dessa classe pode ser o representante. Para contornar isso, os autores definem uma ordenação nos vértices e exigem que, em cada classe de cor, somente o vértice com o menor número seja o representante dessa classe.

O primeiro algoritmo exato para a coloração de vértices foi proposto por Mehrotra e Trick (1996). O algoritmo proposto utilizava a técnica de Geração de Colunas. Essa técnica faz parte dos métodos enumerativos de resolução de PLI, ou seja, divide o problema original em outros dois subproblemas resolvendo o problema escravo e verificando a otimalidade pelo problema mestre. Melhorias mais recentes desse trabalho podem ser vistas em Malaguti *et al.* (2011), Gualandi e Malucelli (2012).

Em comparação direta com as técnicas de programação dinâmica e *branch-and-bound*, as técnicas baseadas em programação linear inteira oferecem resultados mais eficientes

(DIMACS, 2017; LIMA; CARMO, 2018).

3.2 Problema de Coloração Harmônica de Grafos

O PCHG, também encontrado na literatura como *Line-Distinguishing Coloring*, é um problema de Teoria dos Grafos e oferece uma relaxação para o problema de Coloração Harmônica (MITCHEM, 1989). A diferença entre esse dois problemas está no fato da Coloração Harmônica obrigar que vértices adjacentes devem possuir cores diferentes.

O primeiro artigo que trata desses problemas foi publicado em 1982 (FRANK *et al.*, 1982), por ocasião do estudo de alguns problemas relacionados à alocação de registros para programas de computador e à atribuição de frequências a estações de rádio. A formulação formal para esse problemas aconteceu no ano de 1983 (HOPCROFT; KRISHNAMOORTHY, 1983).

Hopcroft e Krishnamoorthy (1983) também provaram que esses problemas são da classe NP-Completo. A prova se deu através da redução de um problema 3-SAT, que é NP-Completo (KARP, 1972), para os problemas de coloração harmônica e harmônica.

Govindarajan (2012) destaca a importância desse dois problemas, por fornecerem potenciais aplicações em redes de comunicação. Para ele, esse problema tem potencial aplicação em problemas reais como, problemas de otimização de redes de transportes, sistemas de navegação de rádio, compressão de dados (desenvolvimento de uma função de *hash* mínima) e clusterização.

Como qualquer pesquisa em Teoria dos grafos, o PCHG possui inúmeros teoremas que facilitam o seu entendimento e possivelmente sua resolução, um dos teoremas bases foi proposto por Wilson (1990):

Teorema 3.2.1 (WILSON, 1990) *Em qualquer Coloração Harmônica de um grafo, dois vértices com a mesma cor são adjacentes ou distanciam pelo menos três.*

Tomando como base o teorema 4.2.1, mostrado anteriormente, Wilson (1992) deduziu mais resultados para problemas específicos de coloração harmônica:

Corolário 3.2.1 (WILSON, 1992)

- *Em uma coloração harmônica de G usando $\frac{n}{2}$ cores cada cor aparece exatamente duas vezes; os dois vértices atribuídos a cada cor são adjacentes e G é necessariamente conexo;*
- *Em uma cor harmônica de um quadrilátero no máximo dois dos vértices podem ser atribuídos a mesma cor.*

Diversas outras pesquisas oferecem limites inferiores e superiores para o número cromático harmônico ($\lambda(G)$) de diversas classes de grafos e também relacionam o número cromático harmônico com propriedades dos grafos. Em Harary e Plantholt (1983), os autores estudam classes de grafos onde o número cromático harmônico está totalmente relacionado com o número cromático do grafo. Em Wilson (1992) o autor estuda limites inferiores e superiores para grafos que são fortemente regulares. Em Wilson (1990) o autor oferece limites inferiores e superiores para diversas classes de grafos e também estuda o comportamento desse problema em grafos com diâmetro de 2.

Frank *et al.* (1982) fornecem um dos principais resultados relacionados ao valor do número cromático harmônico. Neste trabalho os autores verificaram o valor de $\lambda(G)$ para as principais classes de grafos: ciclos, caminhos e grafos completos. Com isso eles formularam 3 teoremas que podem ser vistos a seguir:

Teorema 3.2.2 (FRANK *et al.*, 1982) *Considere P_n um caminho com n arestas. Para $n \geq 3$:*

$$\lambda(P_n) = \min \left\{ 2 \left\lceil \sqrt{\frac{n-2}{2}} \right\rceil, 2 \left\lceil \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{4} \right\rceil - 1 \right\} \quad (3.1)$$

Teorema 3.2.3 (FRANK *et al.*, 1982) *Considere C_n um ciclo com n arestas. Para $n \geq 3$:*

$$\lambda(C_n) = \min \left\{ 2 \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil, 2 \left\lceil \frac{1 + \sqrt{8n+1}}{4} \right\rceil - 1 \right\} \quad (3.2)$$

Teorema 3.2.4 (FRANK *et al.*, 1982) *Considere K_n um grafo completo com n arestas:*

$$\lambda(K_n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \neq 2 \\ 1, & \text{se } n = 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Atualmente, vem se buscando métodos de resolução exato para este problema pautados em otimização. Kolay *et al.* (2018) em seu trabalho iniciou um estudo sobre o tempo exponencial exato e parametrizado para a resolução do problema de coloração harmoniosa. A sua estratégia de resolução foi transformando o problema quadrático inteiro, através de parametrização pela cobertura de vértice do grafo, em várias instâncias de programação linear inteira de variável fixa. O problema com esta abordagem é o seu alto tempo e consumo de recursos.

Os trabalhos disponíveis na literatura e apresentados nessa seção não possuem uma formulação matemática linear ou desigualdades válidas para o problema de coloração harmônica. Neste trabalho procuramos sanar essas carências da literatura e apresentar um modelo de resolução robusto e coeso.

4 PROBLEMA DE COLORAÇÃO HARMÔNICA DE GRAFOS

Neste Capítulo são apresentadas as formulações matemáticas para o PCHG, foco de estudo deste trabalho. A definição formal das entradas para o modelos aparecem na Seção 4.1. Na Seção 4.2 é apresentada uma formulação baseada no conjunto de cores como também algumas desigualdades válidas. Na Seção 4.3 é apresentada outra formulação matemática, esta baseada em representantes (CAMPÊLO *et al.*, 2004), também são apresentadas desigualdades válidas e um estudo do poliedro gerado por este modelo.

4.1 Definição do Problema

O Problema de Coloração Harmônica de Grafos (PCHG) pode ser visto com um Problema de Coloração Não-Própria de Vértices somada com a restrição de unicidade do conjunto de cores das arestas. Para descrevê-lo, será utilizado um grafo simples para a coloração dos vértices, ou seja, dado um grafo $G = (V, E)$, associamos uma cor a cada vértice v por meio de $f(v)$. Então é desejado colorir os vértices, de forma não-própria, que respeite a restrição de unicidade de arestas.

Definição 4.1.1 (HOPCROFT; KRISHNAMOORTHY, 1983) *O Problema de Coloração Harmônica de Grafos (PCHG)*

Uma tupla (G, k) , onde:

- $G = (V, E)$ é um grafo, onde $V(G)$ é o conjunto de vértices de G e $E(G)$ o conjunto de arestas;
- k um inteiro positivo, onde $k \leq |V|$

Questão: G é k -harmônico colorável, ou seja, existe uma função $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que, para todo par de arestas $(u, v), (x, y) \in E, (u, v) \neq (x, y), \{f(u), f(v)\} \neq \{f(x), f(y)\}$?

4.2 Formulação Matemática Baseada no Conjunto de Cores

Dada uma instância $I_{PCHG} = (G(V, E))$ para o problema PCHG, como definida na Seção 4.1, considere as seguintes variáveis.

$$z_h = \begin{cases} 1, & \text{se a cor } h \text{ é usada para identificar algum vértice} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall h \in C. \quad (4.1)$$

$$x_{ih} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ é identificado pela cor } h \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in V, \quad \forall h \in C. \quad (4.2)$$

Considere na formulação abaixo o conjunto H como o conjunto de cores disponíveis para coloração, onde $|H| \leq |V|$.

Para auxílio na escrita, chamaremos o seguinte modelo matemático de $P_1(G)$.

$$\min \quad \sum_{h \in H} z_h \quad (4.3)$$

$$s.a. \quad x_{ih} \leq z_h \quad \forall h \in H; \forall i \in V \quad (4.4)$$

$$\sum_{h \in H} x_{ih} \geq 1 \quad \forall i \in V \quad (4.5)$$

$$x_{ih} + x_{jl} + x_{uh} + x_{wl} \leq 3 \quad \forall (i, j), (u, w) \in E; (i, j) \neq (u, w); h, l \in H \quad (4.6)$$

$$x_{ih} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, h \in H \quad (4.7)$$

$$z_h \in \{0, 1\} \quad \forall h \in H \quad (4.8)$$

A Função Objetivo (4.3) busca minimizar as cores usadas na coloração. Em outras palavras, ela seleciona o menor número de cores usadas para colorir o grafo de forma que todas as demais restrições sejam satisfeitas.

Restrições (4.4) só permitem a coloração do vértice i com h se a cor h for previamente selecionada no conjunto de cores. Já as Restrições (4.5) determinam que cada vértice tenha no mínimo uma cor. Como trata-se de um problema de minimização, os vértices terão exatamente uma cor.

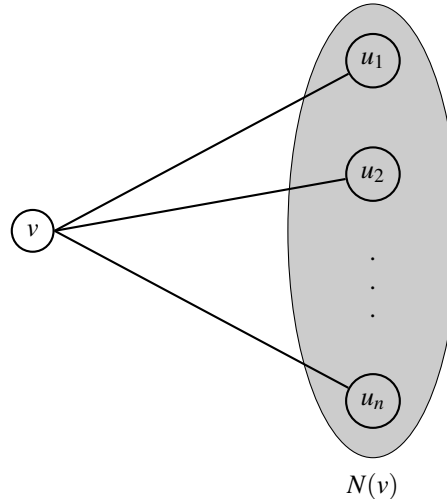
Dados dois pares de arestas distintas e duas cores, as Restrições (4.6), determinam que todos os vértices destas arestas não podem ser coloridos com as mesmas cores, apenas 2 deles podem possuir cores iguais. Esta restrição obriga aos conjuntos de cores das arestas sejam diferentes entre si e únicos no grafo, permitindo a coloração harmônica do grafo.

4.2.1 Desigualdades Válidas

Dada a formulação de $P_1(G)$ foram identificadas duas desigualdades válidas, que serão utilizadas como forma para auxiliar no desempenho computacional do mesmo. Seja v um vértice de G . Sabemos que devemos atribuir um cor a v de forma que o conjunto de cores das arestas seja único. Portanto, o conjunto dos vizinhos de v , denotado por $N(v)$ e representado

na Figura 4, deve possuir $|N(v)| - 1$ cores diferentes do vértice v , já que o PCHG não é uma coloração própria. Portanto, temos que a Eq. 4.9 é uma desigualdade válida para $P_1(G)$.

Figura 4 – Conjunto de vizinhos do vértice i



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019).

$$\sum_{u \in N(v)} \sum_{h \in C-k} x_{vh} \geq |N(v)| - 1 \quad \forall v \in V; \forall k \in C \quad (4.9)$$

Uma outra desigualdade válida apresentada é para Cliques encontrada no Grafo G . Seja Cl uma clique em G . Como todos os vértices em Cl estão conectados, temos que uma cor h só estará disponível para coloração de qualquer outro vértice de Cl , se e somente se, ela não for utilizada para colorir nenhum vértice j pertencente a Cl . Assim, a Eq. 4.10 representa uma desigualdade válida para $P_1(G)$.

$$\sum_{i \in Cl} x_{ih} \leq 1 - x_{jh} \quad \forall j \in Cl; \forall h \in C \quad (4.10)$$

4.3 Formulação Matemática Baseada em Representantes

Baseado no Teorema 3.2.1, sabemos que dois vértices que possuem a mesma cor ou são adjacentes ou se distanciam pelo menos por três vértices. Ou seja, o vértice com distância igual a 2 deve ter cor diferente. Tomando com base nisso, vemos que a coloração harmônica de um grafo G é a coloração própria do grafo $(V, E^2 - E)$.

Este grafo, como mostrado acima, é gerado a partir do grafo G e G^2 , onde são removidas as arestas relacionadas a G de G^2 . Para auxiliar na escrita, chamaremos no decorrer deste trabalho este grafo apenas de G^2 .

Assim, dada uma instância $I_{PCHG} = (G(V, E), G^2(V, E^2))$ para o problema PCHG, como definida na Seção 4.1, considere as seguintes variáveis.

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } v \text{ representa o vértice } u \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.11)$$

Para auxílio na escrita, chamaremos o seguinte modelo matemático de $P_2(G)$.

$$\min \sum_{v \in V} x_{vv} \quad (4.12)$$

$$s.a. \sum_{u \in \overline{N}_{G^2}(v)} x_{uv} \geq 1 \quad \forall v \in V \quad (4.13)$$

$$x_{vu} + x_{vw} \leq x_{vv} \quad \forall (u, w) \in E(G^2) : u, w \in \overline{N}_{G^2}(v), \forall v \in G^2 \quad (4.14)$$

$$x_{uz_1} + x_{uz_2} + x_{vw_1} + x_{vw_2} \leq 3 \quad \forall (z_1, w_1), (z_2, w_2) \in E : z_1, z_2 \in \overline{N}(u), w_1, w_2 \in \overline{N}(v) \quad (4.15)$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall u, v \in V \quad (4.16)$$

A Função Objetivo 4.12 busca minimizar os representantes usados na representação. Em outras palavras, ela seleciona o menor número de representantes para representar o grafo de forma que todas as demais restrições sejam satisfeitas.

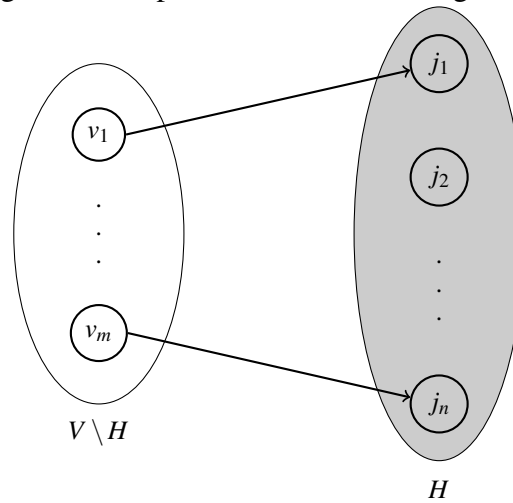
Restrições (4.13) indicam que cada vértice $u \in V$ deve ser representado por ele mesmo ou por outro vértice dos seus não-vizinhos em G^2 . Como mostrado, a coloração própria em G^2 é uma base para a coloração harmônica em G . Como os vértices de cada aresta em G^2 devem possuir cores diferentes, Restrições (4.14) assumem que eles possuem diferentes representantes.

Dados dois pares de arestas distintas e dois possíveis representantes para estas arestas, as Restrições (4.15), determinam que estas duas arestas não podem ter o mesmo conjunto de representantes, apenas 2 deles podem possuir representantes iguais. Esta restrição obriga aos conjuntos de representantes das arestas sejam diferentes entre si e únicos no grafo, permitindo a coloração harmônica do grafo.

4.3.1 Desigualdades Válidas

Considere um subgrafo H de G , onde $\lambda(H)$ é conhecido. Como mostrado na Figura vemos que os vértices pertencentes ao subgrafo H podem ser representados por vértices presentes em H ou por vértices de $V \setminus H$.

Assim, sabemos que o número total de representantes do subgrafo H deve ser maior ou igual à soma dos representantes contidos em H com a soma dos representantes externos a

Figura 5 – Representantes de um subgrafo H 

Fonte: Elaborado pelo Autor (2019).

H , mas que representam algum vértice contido em H . Portanto temos que a Eq. 4.17 é uma desigualdade válida para $P_2(G)$.

$$\sum_{h \in H} x_{hh} + \sum_{v \in V \setminus H} \sum_{h \in H} x_{vh} \geq \lambda(H) \quad \forall H \subseteq G \quad (4.17)$$

4.3.2 Estudo do Poliedro

Proposição 4.3.1 $P_2(G)$ possui dimensão plena igual à $n + \overline{m_G^2}$.

Prova: Considere os seguintes $n + \overline{m_G^2} + 1$ vetores distintos em $P_2(G)$:

- l : vetor único onde cada vértice é seu representante, ou seja, as n primeiras posições possuem valor 1 enquanto as demais são formadas por 0.
- l^v : conjunto de n vetores formados pelos vértices de G onde um vértice em cada vetor é representado por outro vértice. Neste caso as primeiras n dos vetores formaram uma matriz onde os elementos da diagonal principal possuem valores iguais a 0 e os demais elementos 1.
- l^{vu} : Conjunto de $\overline{m_G^2}$ vetores onde cada vértice é representado por ele mesmo e por outro vértice de G .

Os vetores apresentados acima pertencem a $P_2(G)$, pois respeitam todas as restrições impostas pelo modelo.

Devemos mostrar que estes vetores são afim independentes. Para isto, considere α_0 ,

$\beta_{vu}(v \in V, u \in \overline{N_{G^2}(v)})$ e $\alpha_v(v \in V)$, todos eles pertencentes a \mathbb{R} , tais que:

$$\alpha_0 + \sum_{v \in V} \alpha_v + \sum_{v \in V, u \in \overline{N_{G^2}(v)}} \beta_{vu} = 0 \quad (4.18)$$

e

$$\sum_{v \in V} (\alpha_v l^v - \alpha_0 l + \sum_{u \in \overline{N_{G^2}(v)}} \beta_{vu} l^{vu} - \alpha_0 l) = 0 \quad (4.19)$$

A igualdade (4.18) serve para mostrar que todos os vetores são afim independentes. Já a desigualdade (4.19) vem do fato que para os vetores serem afim independentes, então eles menos 1 deles devem ser linearmente independentes.

Assim, vamos mostrar que cada multiplicador, α_v e β_{vu} é zero. Aplicando uma ordenação nos vetores l^v onde colocamos o representante de v nas primeiras posições, formaremos uma matriz identidade nas $n + 1$ até r posições, com $0 \leq r \leq n + \overline{m_{G^2}}$. Agora, dividindo os vetores l^{vu} em dois conjuntos, l^{pq} e l^{wz} , onde no primeiro aplicaremos a mesma ordenação mostrada acima, formando uma identidade entre as posições $n + 1$ até r , e no segundo conjunto aplicaremos outra ordenação, formando uma matriz identidade entre r e $n + \overline{m_{G^2}}$.

Pela forma como os vetores l^v e l^{vu} estão organizados, e utilizando a Eq. 4.19, vemos que os α_v possuirão valor iguais a 0, pois a subtração formará a oposta da matriz identidade nas n primeiras posições, enquanto que as n primeiras posições de $\beta_{vu} l^{vu} - \alpha_0 l$ possuirão valor exatamente igual a 0. Também como resultado desta subtração, os vetores $\beta_{vu} l^{vu} - \alpha_0 l$ formarão uma matriz identidade fazendo com que os β_{vu} possuam valores iguais a 0.

Portanto, temos $n + \overline{m_{G^2}} + 1$ vetores afim independentes, como requerido. ■

5 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Esse capítulo apresenta os resultados das implementações dos algoritmos exatos para as formulações propostas. Inicialmente na Seção 5.1 a configuração do ambiente computacional. Na Seção 5.2 são apresentadas características das instâncias. Por fim, na Seção 5.3 é apresentado um estudo comparativo entre as formulações propostas.

5.1 Configuração do ambiente computacional

Para implementação das formulações dos modelos propostos nas Seções 4.2 e 4.3 foi utilizado o pacote de otimização ILOG CPLEX 12.7 implementado na Linguagem JAVA. Os experimentos realizados foram executados utilizando uma máquina Intel Core i5, 4 x 3.20 GHz, 8 GB DDR3 RAM e sistema operacional Windows 10. O tempo limite para cada instância foi de 7200 segundos.

5.2 Instâncias

As instâncias foram geradas de forma aleatória, separadas através da densidade de arestas. Foi escolhido gerar instâncias com um número pequeno de vértices devido a inexistência de instâncias com valores exatos para o PCHG. Essa abordagem permitiu a validação manual dos resultados, trazendo a confiabilidade para nosso modelo. A quantidade de vértices variou entre 5 e 15 vértices e as densidades foram 0.2, 0.3, 0.5, 0.7 e 0.9. Ao todo foram geradas **55** instâncias e encontram-se disponíveis no link: <<https://github.com/hismael17/PCHG-instancias>>.

5.3 Estudo comparativo entre as formulações

As formulações propostas se diferenciam pela abordagem, como também pela inclusão de um conjunto de desigualdades válidas a cada uma delas. As tabelas fornecem resultados para os diferentes grupos de instâncias de acordo com o quadro :

- *inst*: representa a instância em consideração, é definido com $|V|ID$, onde *ID* é um identificador da instância;
- *z*: representa o valor ótimo da função objetivo;
- P_1 : informações relativas à formulação baseada no conjunto de cores;
- P_2 : informações relativas à formulação baseada nos representantes;

- $P_1 + DV$: informações relativas à formulação baseada no conjunto de cores com as desigualdades válidas apresentadas em 4.2.1;
- $P_2 + DV$: informações relativas à formulação baseada nos representantes com as desigualdades válidas apresentadas em 4.3.1;
- bb : representa o número subproblemas relaxados;
- cpu : representa o tempo de execução, em segundos, para obtenção do valor ótimo;
- gap : representa a diferença relativa entre a relaxação linear do problema e o valor ótimo;
- n/a : não se aplica durante o tempo válido.

Tabela 1 – Grafos com densidade de 0.2

<i>inst</i>	<i>z</i>	(P1)		(P1+DV)		(P2)		(P2+DV)	
		<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>
5	2	0.05	0.5	0	0.5	0	0	0	0
6	3	0.11	0.66	0.02	0.66	0.01	0.2	0	0.333
7	4	0.22	0.75	0.23	0.75	0.06	0.5	0.07	0.5
8	3	0.33	0.66	0.1	0.66	0.2	0.66	0.15	0.333
9	5	1.25	0.8	0.92	0.8	0.09	0.33	0.08	0.44
10	4	1.83	0.75	0.95	0.75	0.22	0.502	0.12	0.5
11	4	3.95	0.75	2.88	0.75	1.16	0.5	0.19	0.47
12	4	21.55	0.75	5.91	0.75	0.65	0.45	0.65	0.45
13	7	7.09	0.86	3.75	0.86	3.04	0.647	0.81	0.577
14	6	5.06	0.83	4.83	0.83	2.24	0.666	1.2	0.666
15	8	23.66	0.875	12.11	0.875	4.86	0.608	1.92	0.608

Fonte: Elaborado pelo Autor(2019)

Tabela 2 – Grafos com densidade de 0.3

<i>inst</i>	<i>z</i>	(P1)		(P1+DV)		(P2)		(P2+DV)	
		<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>
5	3	0.03	0.66	0.02	0.66	0	0.33	0	0.33
6	4	0.08	0.75	0.31	0.75	0.03	0.5	0.02	0.5
7	4	0.31	0.75	0.2	0.75	0.06	0.45	0.01	0.355
8	6	0.63	0.83	0.47	0.83	0.08	0.66	0.11	0.588
9	6	0.73	0.83	0.33	0.83	0.07	0.61	0.09	0.481
10	6	793.52	0.83	0.95	0.83	20.24	0.583	0.27	0.583
11	6	43.22	0.8	7.93	0.8	0.61	0.532	0.42	0.49
12	7	3.86	0.85	1.25	0.85	1.33	0.634	0.97	0.576
13	11	32.74	0.91	10.25	0.91	2.71	0.728	0.77	0.728
14	9	929.66	0.88	5.02	0.88	41.87	0.621	1.55	0.592
15	10	1869.94	0.9	7.89	0.9	58.74	0.655	1.16	0.655

Fonte: Elaborado pelo Autor(2019)

As análises se basearam no tempo de execução de cada instância e no *GAP* gerado

Tabela 3 – Grafos com densidade de 0.5

<i>inst</i>	<i>z</i>	(P1)		(P1+DV)		(P2)		(P2+DV)	
		<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>
5	5	0.58	0.88	0.11	0.88	0.02	0.6	0	0.6
6	4	0.38	0.75	0.09	0.75	0.02	0.415	0.01	0.285
7	6	0.66	0.83	0.6	0.83	0.037	0.583	0	0.541
8	6	0.84	0.83	0.45	0.83	0.037	0.523	0.06	0.49
9	9	4.7	0.89	0.63	0.89	0.3	0.703	0.39	0.641
10	10	11.05	0.9	1.34	0.9	2.45	0.7	0.31	0.65
11	10	8.25	0.9	7.5	0.9	1.09	0.7	0.52	0.7
12	11	509.45	0.91	1.88	0.91	5.75	0.727	0.755	0.713
13	11	28.06	0.91	22.76	0.91	6.783	0.701	0.94	0.656
14	14	1909.17	0.93	5.94	0.93	121.53	0.785	1.97	0.785
15	14	<i>n/a</i>	<i>n/a</i>	6.39	0.93	61.72	0.757	1.95	0.75

Fonte: Elaborado pelo Autor(2019)

Tabela 4 – Grafos com densidade de 0.7

<i>inst</i>	<i>z</i>	(P1)		(P1+DV)		(P2)		(P2+DV)	
		<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>
5	5	0.23	0.8	0.2	0.8	0	0.6	0	0.4
6	6	0.41	0.83	0.39	0.83	0.05	0.666	0.03	0.54
7	6	0.36	0.83	0.6	0.83	0.04	0.583	0	0.525
8	8	2.53	0.875	0.61	0.875	0.48	0.75	0.17	0.631
9	9	2.27	0.888	0.77	0.888	0.42	0.74	0.255	0.653
10	10	102.11	0.9	34.95	0.9	5.47	0.75	0.39	0.674
11	11	15.06	0.91	2.09	0.91	1.61	0.757	0.64	0.717
12	12	830.09	0.916	1.53	0.916	3.76	0.772	1.523	0.752
13	13	1150.92	0.923	2.88	0.923	10.75	0.804	2.38	0.797
14	14	3888.7	0.928	5.41	0.928	258.94	0.831	6.06	0.802
15	15	<i>n/a</i>	<i>n/a</i>	13.86	0.933	73.35	0.833	8.42	0.816

Fonte: Elaborado pelo Autor(2019)

Tabela 5 – Grafos com densidade de 0.9

<i>inst</i>	<i>z</i>	(P1)		(P1+DV)		(P2)		(P2+DV)	
		<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>	<i>cpu</i>	<i>gap</i>
5	5	0.28	0.8	0.08	0.8	0.02	0.6	0	0.4
6	6	0.39	0.833	0.39	0.833	0.03	0.666	0.06	0.566
7	7	0.77	0.857	0.6	0.857	0.17	0.714	0.2	0.714
8	8	3.09	0.875	0.58	0.875	0.23	0.75	0.27	0.606
9	9	48.53	0.888	0.67	0.888	0.59	0.777	0.63	0.616
10	10	411.66	0.9	1.31	0.9	10.09	0.8	1.16	0.8
11	11	43.22	0.91	18.92	0.91	4.14	0.818	2.66	0.818
12	12	2645.77	0.916	3.28	0.916	18.49	0.833	5.58	0.75
13	13	113.16	0.923	75.56	0.923	22.69	0.846	3.59	0.753
14	14	<i>n/a</i>	<i>n/a</i>	7.19	0.928	75.59	0.857	6.91	0.821
15	15	<i>n/a</i>	<i>n/a</i>	13.86	0.933	218.76	0.866	19.08	0.856

Fonte: Elaborado pelo Autor(2019)

entre o resultado ótimo e o da relaxação. Para o cálculo do *GAP* utilizamos a seguinte fórmula:

$$\frac{|otimoRelaxado - otimoInteiro|}{1^{-10} + otimoInteiro} \quad (5.1)$$

Se o *GAP* for 0, indica que as desigualdades daquela formulação encontram bem o resultado ótimo inteiro mesmo quando o problema esta relaxado.

Um fato interessante é que as desigualdades válidas encontradas para $P_1(G)$ não diminuem o GAP , mas ajudam no tempo de execução. O resultado ótimo relaxado de $P_1(G)$ sempre será 1 e isto acontece mesmo com o auxílio das desigualdades válidas, pois, neste caso, o algoritmo simplex divide as variáveis para que a soma sempre dê o menor valor possível, neste caso, 1.

A formulação baseada em representantes apresenta os tempos de execução menores que o da formulação baseada em conjunto de cores. Isto se dá por um menor número de variáveis e restrições geradas, quando comparado com o modelo baseado em conjunto de cores.

As desigualdades válidas utilizadas em $P2 + DV$ foram as de ciclos e caminhos, que foram encontrados através do algoritmo de Busca em Profundidade e Largura, respectivamente.

6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

6.1 Conclusões

Neste trabalho foi abordado o Problema da Coloração Harmônica de Grafos (PCHG). Foram desenvolvidas duas formulações matemáticas, apresentadas desigualdades válidas para cada uma delas, realizado um estudo sobre o poliedro da formulação baseada em representantes, e, por fim, realizados experimentos computacionais. Os dois modelos se diferenciam pela forma de abordagem de rotulação. A primeira formulação realiza a rotulação através de um conjunto de elementos pré-definidos, chamados de cores. A segunda formulação realiza a rotulação baseado em vértices representantes. A quantidade de variáveis geradas pelas formulações é grande, entretanto, a formulação baseada em representantes gera menos variáveis quando comparada com a formulação baseada em conjunto de cores. Contudo, as duas formulações sofrem com o problema de simetria de soluções.

Nos testes realizados com instâncias aleatórias, o modelo matemático baseado em representantes obteve melhores resultados em comparação com o baseado em conjunto de cores. Também foi possível notar através dos experimentos, de maneira geral, que as instâncias que possuíam menor densidade obtiveram um tempo menor de execução que as instâncias com maior densidade.

6.2 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros pode-se realizar novas formulações para o PCHG com o objetivo de remover a simetria gerada pelas formulações apresentadas neste trabalho. Como também tomar como base as formulações usadas neste trabalho e desenvolver um formulação matemática linear para problemas de aresta-distinguível, como o Problema da Coloração Harmônica de Grafos.

REFERÊNCIAS

- ALON, N. Restricted colorings of graphs. **Surveys in combinatorics**, v. 187, p. 1–33, 1993.
- BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to linear optimization**. [S.l.]: Athena Scientific Belmont, MA, 1997.
- BRÉLAZ, D. New methods to color the vertices of a graph. **Communications of the ACM**, ACM, v. 22, n. 4, p. 251–256, 1979.
- CAIXETA-FILHO, J. V. **Pesquisa Operacional**. [S.l.]: São Paulo: Atlas, 2001.
- CAMPÊLO, M.; CAMPOS, V. A.; CORRÊA, R. C. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 156, n. 7, p. 1097–1111, 2008.
- CAMPÊLO, M.; CORRÊA, R.; FROTA, Y. Cliques, holes and the vertex coloring polytope. **Information Processing Letters**, Elsevier, v. 89, n. 4, p. 159–164, 2004.
- DANTZIG, G. B. **Computational algorithm of the revised simplex method**. [S.l.]: Rand Corporation, 1954.
- DIMACS. **DIMACS Implementation Challenges**. 2017. Disponível em: <<http://dimacs.rutgers.edu/archive/Challenges/>>.
- EPPSTEIN, D. Small maximal independent sets and faster exact graph coloring. **J. Graph Algorithms Appl.**, v. 7, n. 2, p. 131–140, 2003.
- FERREIRA, C. E.; WAKABAYASHI, Y. **Combinatória Poliédrica e Planos-De-Corte Faciais**. [S.l.: s.n.], 1996.
- FRANK, O.; HARARY, F.; PLANTHOLT, M. The line-distinguishing chromatic number of a graph. **Ars Combin**, v. 14, p. 241–252, 1982.
- GARCIA, S.; GUERREIRO, R.; CORRAR, L. Teoria das restrições e programação linear. **Revista de Contabilidade do CRC-SP**, v. 2, n. 4, p. 47–61, 1998.
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2005. v. 2.
- GOVINDARAJAN, M. D. On a harmonious colouring graphs and its applications. **IOSR Journal of Mathematics**, v. 4, p. 13–17, 01 2012.
- GUALANDI, S.; MALUCELLI, F. Exact solution of graph coloring problems via constraint programming and column generation. **INFORMS Journal on Computing**, INFORMS, v. 24, n. 1, p. 81–100, 2012.
- HARARY, F.; PLANTHOLT, M. Graphs with the line distinguishing chromatic number equal to the usual one. **Utilitas Math**, v. 23, p. 201–207, 1983.
- HOPCROFT, J. E.; KRISHNAMOORTHY, M. S. On the harmonious coloring of graphs. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, SIAM, v. 4, n. 3, p. 306–311, 1983.
- KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: **Complexity of computer computations**. [S.l.]: Springer, 1972. p. 85–103.

- KOLAY, S.; PANDURANGAN, R.; PANOLAN, F.; RAMAN, V.; TALE, P. Harmonious coloring: Parameterized algorithms and upper bounds. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, 2018.
- LAWLER, E. L. A note on the complexity of the chromatic number problem. **Inf. Proc. Lett.**, v. 5, p. 66–67, 1976.
- LIMA, A. M. de; CARMO, R. Exact algorithms for the graph coloring problem. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, v. 25, n. 4, p. 57–73, 2018.
- MALAGUTI, E.; MONACI, M.; TOTH, P. An exact approach for the vertex coloring problem. **Discrete Optimization**, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 174–190, 2011.
- MEHROTRA, A.; TRICK, M. A. A column generation approach for graph coloring. **informs Journal on Computing**, Informs, v. 8, n. 4, p. 344–354, 1996.
- MITCHEM, J. On the harmonious chromatic number of a graph. **Discrete mathematics**, Elsevier, v. 74, n. 1-2, p. 151–157, 1989.
- PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. **Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity**. [S.l.]: Courier Corporation, 1998.
- WILSON, B. Line-distinguishing and harmonious colourings. **Graph Colourings. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical, Longman house, Burnt Mill, Harlow, Essex, UK**, p. 115–133, 1990.
- WILSON, B. Minimal line distinguishing colourings in graphs. In: **Annals of Discrete Mathematics**. [S.l.]: Elsevier, 1992. v. 52, p. 549–558.
- WOLSEY, L. A. **Integer Programming**. [S.l.]: Wiley, 1998.
- ZYKOV, A. A. On some properties of linear complexes. **Matematicheskii sbornik**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian . . . , v. 66, n. 2, p. 163–188, 1949.