



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FLÁVIO ANDRÉ AZEVEDO DE CAMPOS

ANÁLISE DO CONTROLADOR PID DE ORDEM FRACIONÁRIA APLICADO À
SIMULAÇÃO DE SISTEMAS REAIS

FORTALEZA

2019

FLÁVIO ANDRÉ AZEVEDO DE CAMPOS

ANÁLISE DO CONTROLADOR PID DE ORDEM FRACIONÁRIA APLICADO À
SIMULAÇÃO DE SISTEMAS REAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação e Controle

Orientador: Prof. Dr. Wilkley Bezerra
Correia

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C212a Campos, Flávio André Azevedo de.
Análise do controlador PID de ordem fracionária aplicado à simulação de sistemas reais / Flávio André Azevedo de Campos. – 2019.
98 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia.

1. Cálculo fracionário. 2. PID de ordem fracionária. 3. FOPID. I. Título.

CDD 621.3

FLÁVIO ANDRÉ AZEVEDO DE CAMPOS

ANÁLISE DO CONTROLADOR PID DE ORDEM FRACIONÁRIA APLICADO À
SIMULAÇÃO DE SISTEMAS REAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação e Controle

Aprovada em: 31/10/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Dalton de Araújo Honório
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Peixoto Praça
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha esposa por todo o seu amor, cuidado e dedicação. E aos meus filhos, que nos momentos em que estive ausente sempre entenderam que o futuro é feito a partir da constante dedicação durante o presente. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará pela oportunidade de realização do curso de Mestrado.

Aos professores Wilkley Bezerra Correa, Paulo Peixoto Praça, Dalton de Araújo Honório e Fabrício Gonzalez Nogueira pelo apoio e orientação no decorrer do curso e na evolução deste trabalho.

Aos amigos de laboratório pelo companheirismo, apoio e risadas compartilhadas.

A todos que me ajudaram ao longo da vida; seja me guiando, me auxiliando ou apenas me acompanhando.

Muito obrigado!

"Existe um universo de matemática entre as diferenciações e integrações inteiras, e estes operadores ditos fracionários surgem algumas vezes na natureza e são tão reais quanto os outros."

(Oliver Heaviside)

RESUMO

O cálculo de ordem fracionária apresenta uma nova abordagem de modelagem para sistemas com propriedades dinâmicas bem interessantes, introduzindo as noções de derivadas e integrais de ordem não-inteira. Na teoria dos sistemas, isso dá origem a extensões lineares, sistemas invariantes no tempo, para aprimorar a descrição de fenômenos complexos envolvendo memória ou propriedades hereditárias dos sistemas. Os controladores industriais padrão, principalmente o controlador PID pode ser atualizado para se beneficiar dos efeitos da integração e diferenciação fracionária e têm vantagens sobre os controladores clássicos em caso de controle de processo convencional, de ordem inteira. Neste trabalho, estuda-se os conceitos que norteiam esse novo tipo de controlador, com estudos sobre estabilidade no domínio do tempo e da frequência, focando principalmente no PID de ordem fracionária (FOPID) e fazendo algumas implementações específicas de FOPID em simulações para facilitar o entendimento e implementação prática. Os resultados são verificados usando uma plataforma de simulação numérica computacional.

Palavras-chave: Cálculo fracionário. PID de ordem fracionária. FOPID.

ABSTRACT

Fractional order calculus presents a new modeling approach for systems with very interesting dynamic properties, introducing the notions of derivatives and integrals of noninteger order. In system theory, this gives rise to linear extensions, time-invariant systems, to enhance the description of complex phenomena involving memory or hereditary properties of systems. Standard industrial controllers, especially the PID controller can be upgraded to benefit from the effects of fractional integration and differentiation and have advantages over classic controllers in the case of conventional, full-order process control. In this paper, we study the concepts that guide this new type of controller, with studies on time and frequency domain stability, focusing mainly on the fractional order PID (FOPID) and making some specific implementations of FOPID in simulations to facilitate understanding and practical implementation. Results are verified using a MATLAB/Simulink based real-time prototyping platform.

Keywords: Fractional calculus. Fractional order PID. FOPID.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Relação de <i>toolboxes</i> para o MATLAB/Simulink. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017). | 20 |
| Figura 2 – Lúnula de Hipócrates (área hachurada). Fonte: adaptado de BOYER (1974). | 22 |
| Figura 3 – Órbitas dos planetas ao redor do Sol (F_1 e F_2 são os focos da elipse). Fonte: adaptado de BOYER (1974). | 23 |
| Figura 4 – Classificação dos sistemas LTI. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017). | 33 |
| Figura 5 – Comportamento de um sistema com e sem atraso de transporte. Fonte: o Autor. | 35 |
| Figura 6 – Sistema de malha fechada. Fonte: adaptado de ASTROM e HÄGGLUND (2006). | 37 |
| Figura 7 – Região de estabilidade para o sistema fracionário. Fonte: adaptado de CHEN <i>et al.</i> (2009). | 38 |
| Figura 8 – Comportamento da resposta no tempo de acordo com a posição dos polos. Fonte: adaptado de MONJE <i>et al.</i> (2010). | 39 |
| Figura 9 – Curvas de resposta ao degrau para tamanhos de passo diferentes. Fonte: o Autor. | 40 |
| Figura 10 – Curvas de resposta em frequência para o sistema (3.38). Fonte: o Autor. | 41 |
| Figura 11 – Apresentação de polos de $G(s)$ no plano cartesiano. Fonte: Adaptado de CHEN <i>et al.</i> (2009). | 42 |
| Figura 12 – Região de instabilidade para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN <i>et al.</i> (2009). | 43 |
| Figura 13 – Resposta ao degrau para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN <i>et al.</i> (2009). | 43 |
| Figura 14 – Diagrama de Bode para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN <i>et al.</i> (2009). | 44 |
| Figura 15 – Gráfico de Nyquist para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN <i>et al.</i> (2009). | 44 |
| Figura 16 – Carta de Nichols para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN <i>et al.</i> (2009). | 44 |
| Figura 17 – Apresentação de polos de $G_s(s)$ no plano cartesiano. Fonte: o Autor. | 45 |
| Figura 18 – Respostas ao degrau para $G(s)$ e $G_s(s)$. Fonte: o Autor. | 45 |
| Figura 19 – Respostas ao degrau para $G(s)$, $G_s(s)$ e $G_d(s)$. Fonte: o Autor. | 46 |
| Figura 20 – Apresentação de polos de $G_d(s)$ no plano cartesiano. Fonte: o Autor. | 47 |
| Figura 21 – Integrador fracionário para diferentes valores de s^γ . Fonte: adaptado de MONJE <i>et al.</i> (2010). | 50 |
| Figura 22 – Derivador fracionário para diferentes valores de s^γ . Fonte: adaptado de MONJE <i>et al.</i> (2010). | 51 |

| | |
|---|----|
| Figura 23 – Diagrama de Bode da resposta de um sistema controlado por PID convencional e FOPID. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017). | 51 |
| Figura 24 – Exemplo de polígono (destacado em vermelho) com os vértices do simplex. Fonte: o Autor. | 56 |
| Figura 25 – Fronteira de estabilidade retangular para $G(s)$ controlado por um FOPID. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017). | 59 |
| Figura 26 – Resposta ao sinal degrau em malha fechada para $H(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$. Fonte: o Autor. | 60 |
| Figura 27 – Determinação das regiões de estabilidade para os parâmetros do controlador FOPID. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017). | 61 |
| Figura 28 – Técnica de auto-tuning proposta por DE KEYSER <i>et al.</i> (2016). Fonte: adaptado de DE KEYSER <i>et al.</i> (2016). | 64 |
| Figura 29 – Exemplo de sobreposição de sinais de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$. Fonte: adaptado de DE KEYSER <i>et al.</i> (2016). | 64 |
| Figura 30 – Exemplo da escolha de ω_{gc} . Fonte: adaptado de DE KEYSER <i>et al.</i> (2016). | 65 |
| Figura 31 – Sobreposição dos sinais de entrada $u(t)$ e saídas $y(t)$ e $\bar{y}(t)$. Fonte: adaptado de DE KEYSER <i>et al.</i> (2016). | 66 |
| Figura 32 – Sistema de dois tanques - físico. Fonte: o Autor. | 69 |
| Figura 33 – Sistema de dois tanques - diagrama. Fonte: o Autor. | 70 |
| Figura 34 – Sobreposição dos sinais senoidais de entrada e de saída. Fonte: o Autor. | 71 |
| Figura 35 – Sobreposição dos sinais de saída para os controladores - visão geral. Fonte: o Autor. | 73 |
| Figura 36 – Sobreposição dos sinais de saída para os controladores - detalhe do erro de regime. Fonte: o Autor. | 73 |
| Figura 37 – Sobreposição dos sinais de saída para os controladores - detalhe do sobressinal. Fonte: o Autor. | 74 |
| Figura 38 – Estrutura do drone com a posição dos rotores. Fonte: o Autor. | 77 |
| Figura 39 – Exemplo ilustrativo de um drone. Fonte: disponível em BUZZO (2015). | 77 |
| Figura 40 – Estratégia de controle. Fonte: o Autor. | 81 |
| Figura 41 – Sobreposição dos sinais senoidais de entrada e de saída para ϕ (Roll). Fonte: o Autor. | 82 |
| Figura 42 – Trajetória do quadricóptero. Fonte: o Autor. | 83 |

| | |
|---|----|
| Figura 43 – Ângulos para o controle de atitude. Fonte: o Autor. | 83 |
| Figura 44 – Variáveis do controle de posição. Fonte: o Autor. | 84 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FOPID *PID de Ordem Fracionária*

IOPID *PID de Ordem Inteira*

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---------------|---|
| A_i | Amplitude do sinal de entrada (autotuning) |
| A_o | Amplitude do sinal de saída (autotuning) |
| $A_{\bar{y}}$ | Amplitude do sinal de saída filtrado (autotuning) |
| M | Razão entre a amplitude de saída da planta e a entrada senoidal (autotuning) |
| \bar{M} | Razão entre a amplitude de saída filtrada da planta e a entrada senoidal (autotuning) |
| τ | Atraso entre o sinal de saída da planta e a entrada senoidal (autotuning) |
| $\bar{\tau}$ | Atraso entre o sinal de saída filtrada da planta e a entrada senoidal (autotuning) |
| ω_{gc} | Frequência de margem de ganho |
| λ | Ordem do operador integrador do FOPID |
| μ | Ordem do operador derivador do FOPID |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 16 |
| 1.1 | Justificativa | 17 |
| 1.2 | Motivação | 17 |
| 1.3 | Estado da arte | 18 |
| 1.4 | Objetivos | 21 |
| 2 | PERSPECTIVAS HISTÓRICAS | 22 |
| 3 | CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA | 27 |
| 3.1 | Breve descrição do cálculo de ordem fracionária | 27 |
| 3.2 | Integração e derivação de ordem fracionária | 29 |
| 3.2.1 | <i>Propriedades da integração e derivação de ordem fracionária</i> | 29 |
| 3.3 | Cálculo fracionário sob domínio de Laplace | 30 |
| 3.3.1 | <i>Exemplo: problema homogêneo</i> | 31 |
| 3.3.2 | <i>Exemplo: problema não homogêneo</i> | 32 |
| 3.4 | Modelos de sistemas de ordem fracionária | 32 |
| 3.5 | Aproximação de operadores de ordem fracionária | 34 |
| 3.6 | Análise de estabilidade de sistemas de ordem fracionária | 37 |
| 3.6.1 | <i>Análise no domínio do tempo</i> | 38 |
| 3.6.2 | <i>Análise no domínio da frequência</i> | 40 |
| 3.6.3 | <i>Exemplo: análise de estabilidade</i> | 42 |
| 4 | CONTROLE DE ORDEM FRACIONÁRIA | 48 |
| 4.1 | Controlador TID | 48 |
| 4.2 | Controlador CRONE | 49 |
| 4.3 | Compensador fracionário Lead-Lag | 49 |
| 4.4 | Controle PID de ordem fracionária - FOPID | 49 |
| 4.5 | Sintonia de controladores FOPID | 52 |
| 4.5.1 | <i>Método de otimização de Nelder-Mead</i> | 54 |
| 4.5.2 | <i>Estabilização de plantas instáveis</i> | 58 |
| 4.6 | Procedimento clássico para sintonia de controladores FOPID | 61 |
| 4.7 | Sintonia automática de controladores FOPID | 63 |
| 4.7.1 | <i>Exemplo: processo de 1ª ordem com atraso</i> | 66 |

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 5 | ESTUDOS DE CASO | 68 |
| 5.1 | Controle de um sistema de nível de líquidos | 68 |
| 5.1.1 | <i>Descrição da planta</i> | 69 |
| 5.1.2 | <i>Estratégia de controle para o sistema de nível de líquidos</i> | 71 |
| 5.1.3 | <i>Resultados das simulações</i> | 72 |
| 5.2 | Controle de posição de um robô móvel aéreo | 74 |
| 5.2.1 | <i>Descrição do robô móvel aéreo</i> | 77 |
| 5.2.2 | <i>Estratégia de controle para o quadricóptero</i> | 80 |
| 5.2.3 | <i>Resultados da simulação</i> | 82 |
| 6 | CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS | 85 |
| | REFERÊNCIAS | 86 |
| | ANEXOS | 94 |
| | ANEXO A – Código-fonte do programa mostrado no exemplo 3.6.3 | 95 |

1 INTRODUÇÃO

A origem do Cálculo Fracionário remonta ao início do cálculo integro-diferencial clássico. A comunidade científica considera que o cálculo de ordem não-inteira decorre de uma troca de cartas entre L'Hôpital e Leibniz em 1695. A partir desse instante pode-se encontrar a contribuição de nomes famosos, tais como Euler, Fourier, Laplace, Abel, Liouville, Riemann e muitos outros matemáticos. No entanto, ao contrário do cálculo clássico (de ordem inteira), o cálculo fracionário manteve-se relativamente desconhecido da comunidade científica, pelo que a sua aplicação nas ciências aplicadas, como na física e na engenharia, se limitava a poucas contribuições, embora relevantes, tais como as de Heaviside e Whittaker (1922), ou dos irmãos COLE e COLE (1941).

A primeira conferência internacional sobre cálculo fracionário, conduzida por B. Ross em New Haven, EUA, ocorreu em Junho 1974, mas a explosão de publicações em livros, revistas e simpósios surgiu somente no início da década de 90. Hoje, o cálculo fracionário é reconhecidamente um tema promissor e que atrai muita atenção da comunidade científica. Isto se deve, principalmente, a várias aplicações do cálculo de ordem não-inteira em numerosas áreas científicas, onde se revelou uma ferramenta preciosa na análise de variados fenômenos envolvidos, demonstrando ter propriedades e características superiores às do cálculo integro-diferencial clássico.

Por isso, O número de aplicações deste tipo de cálculo cresce rapidamente e nos permite descrever uma planta real mais precisamente que o método de ordem inteira. A principal razão para utilização dos modelos de ordem inteira se dá, até então, pelo desconhecimento de métodos para resolver as equações diferenciais fracionárias. No entanto, a partir de 2009, já existiam vários métodos para aproximação de derivadas e integrais fracionárias, utilizados principalmente para aplicações em áreas como: Controle e Automação (Controladores e Sistemas Fracionários), Circuitos Elétricos (Teoria de Capacitores Fracionários), entre outras.

Antes de introduzir o cálculo fracionário e sua aplicação em controle, é importante observar que “fracionário” ou “ordem fracionária” são termos utilizados inadequadamente. O termo mais preciso seria "ordem não-inteira", pois a ordem em si também pode ser irracional. No entanto, uma quantidade enorme de trabalho na literatura utiliza o termo "fracionário" de maneira mais geral para se referir ao mesmo conceito. Por esse motivo, utilizar-se-á o termo "fracionário" neste trabalho.

1.1 Justificativa

Do ponto de vista da Engenharia de Controle, devemos buscar incessantemente métodos de controle mais robustos e mais assertivos. Evidências existentes (MONJE, 2006; MONJE *et al.*, 2008; CHEN; MOORE, 2005) confirmam que o melhor controlador fracionário possui um desempenho melhor que o melhor controlador de ordem inteira. Também, acredita-se que o *PID de Ordem Fracionária* (FOPID) (PID de Ordem Fracionária) chegou a um nível de maturidade em que pode ser utilizado em casos práticos, inclusive na indústria e, já que este setor está tomado pelo *PID de Ordem Inteira* (IOPID) (PID de Ordem Inteira), acredita-se que o FOPID poderá gerar um relevante impacto e ganhar grande relevância nos processos industriais (CHEN, 2006). Além disso, ainda segundo CHEN (2006), baseando-se em alguns casos práticos, o Controle de Ordem Fracionária é ideal quando se trata principalmente de sistemas a parâmetros distribuídos.

1.2 Motivação

Muitos sistemas dinâmicos reais são melhor representados utilizando modelos de ordem não-inteira, pois estes caracterizam melhor a dinâmica real de plantas físicas, permitindo aliviar as limitações das equações diferenciais convencionais em que apenas as potências inteiras do operador são usadas. Isso dá origem a modelos de sistemas dinâmicos que levam em consideração fenômenos como auto-similaridade e dependência do histórico do estado do sistema. Os sistemas de controle industriais contemporâneos são de considerável complexidade e, por isso, é provável que esses sistemas exibam tais fenômenos.

Além disso, a dinâmica fracionária tem sido observada em respostas no domínio do tempo de sistemas relativamente simples e espera-se que a aplicação de métodos de identificação e controle de ordem não inteira, em problemas reais de controle, tenha um impacto positivo no processo industrial específico em termos de melhor desempenho, eficiência e redução de custos. Portanto, é de interesse estudar processos de controle com relação a dinâmica.

Se um processo exibir essa dinâmica, o procedimento de projeto de controle baseado em modelo pode ser realizado usando as ferramentas correspondentes. Isso dá origem ao problema de identificação fracionária de modelos, que está relacionada a vários problemas. Isso inclui a escolha de um método de simulação eficiente do modelo fracionário identificado (incluindo modelos de processo); escolher os parâmetros do modelo para identificar e limitar seu

número para melhorar o condicionamento do problema de otimização correspondente; a escolha de um algoritmo de otimização adequado para estimar os parâmetros do modelo.

Estes modelos utilizam cálculos fracionários para serem obtidos. Além disso, o conceito de cálculo fracionário tem um grande potencial de mudança no jeito que vemos, modelamos e controlamos as plantas dinâmicas reais. Outro fato, é que controladores PID de ordem fracionária estão recebendo maior interesse entre a comunidade científica devido às suas vantagens já comprovadas, principalmente pelo fato de serem controladores mais robustos (comparados com os PID clássicos) e de fácil ajuste (comparados a outras técnicas de controle).

1.3 Estado da arte

A origem do Cálculo Fracionário remonta ao início do cálculo integro-diferencial clássico e, para descrever o Estado da Arte, os avanços se confundem com a própria história dos matemáticos e estudiosos de outrora. Portanto, o autor optou em criar um capítulo à parte (Capítulo 2) para expor melhor sua história.

Durante as últimas décadas do século XX, um crescente interesse surgiu em torno da aplicação do cálculo fracionário em teoria de sistemas e controle de malha fechada, destacando-se o grupo de pesquisa francês CRONE (“Commande Robuste d’Ordre Non Entier”¹), que é liderado por Oustaloup (OUSTALOUP *et al.*, 1999) e desenvolveu várias ferramentas para identificação e controle de sistemas dinâmicos de ordem fracionária. Em particular, o grupo CRONE foi pioneiro em desenvolver um método de identificação de sistemas de ordem fracionária no domínio do tempo.

Em OUSTALOUP *et al.* (1996), é proposto um método baseado na teoria de mínimos quadrados para estimar os coeficientes de uma equação diferencial fracionária. Em TRIGEASSOU *et al.* (1999), um algoritmo de identificação de sistemas de ordem fracionária foi proposto baseado na aproximação de um integrador fracionário por um modelo racional. Por último, o grupo CRONE desenvolveu várias gerações de controladores "CRONE", a maioria baseados em análises no domínio da frequência do sistema de controle (OUSTALOUP *et al.*, 1999; OUSTALOUP *et al.*, 2000). Foi nesta época, também, que o método de aproximação de Oustaloup para operadores fracionários se originou.

O controlador PID de ordem fracionária (FOPID) foi introduzido por Podlubny em PODLUBNY *et al.* (1997) e em PODLUBNY (1999b). Atualmente, sabe-se que controladores

¹ Controle Robusto de Ordem Não Inteira

FOPID oferecem desempenho superior em comparação a controladores PID de ordem inteira (IOPID) (MONJE *et al.*, 2008; XUE *et al.*, 2006).

Exemplos de método de ajuste (*tuning*) são revistos em VALÉRIO e COSTA (2010). Estes métodos podem ser divididos em: analíticos, numéricos e baseados em regras dependendo do modo de estudo utilizado para sua sintonia. Métodos analíticos com generalização do problema são pouco encontrados. Ainda, alguns métodos parcialmente baseados em regras convencionais de sintonia foram propostos por MONJE (2006), VALÉRIO e COSTA (2006). Métodos numéricos, como por exemplo o método simplex (como proposto em MONJE *et al.* (2008)) e o método de otimização por enxame de partículas (como proposto em MAITI *et al.* (2008)), têm tido mais sucesso quando aplicados à controladores de ordem não inteira, principalmente FOPID (MONJE *et al.*, 2010). Métodos de otimização global também são utilizados em CHANG e CHEN (2009) e CAO e CAO (2006).

Por causa da complexidade de algumas soluções analíticas ou, até mesmo, soluções para equações fracionárias diferenciais (um processo recursivo que, em teoria, exigiria uma quantidade infinita de memória), aproximações baseadas no princípio de memória restrita foram feitas. Neste assunto, vale citar o trabalho de VINAGRE *et al.* (2000), que revê aproximações para operadores fracionários tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Em paralelo, métodos para implementações analógicas foram propostas por Dorčák em DORČÁK *et al.* (2007), DORČÁK *et al.* (2012) e DORČÁK *et al.* (2013).

Aproximações digitais dos operadores fracionários geralmente se baseiam em séries de expansão de potência ou de frações (CHEN *et al.*, 2009). No entanto, outros métodos baseados em discretização também foram propostos, como em MACHADO (2001).

Citam-se também, alguns trabalhos práticos bem relevantes, como os projetos embarcados para o controle de posição de um quadricóptero proposto em SHANG *et al.* (2016) e o aplicado em braços robóticos como em CALDERON *et al.* (2018).

Para auxiliar os pesquisadores, vários pacotes de *software* têm sido desenvolvidos para facilitar as tarefas de identificação e projeto de controladores. E já que o *software* MATLAB/Simulink (MATHWORKS INC., 2018) possui uma grande variedade de ferramentas relacionadas à otimização, identificação e análises de sistemas de controle, autores dos pacotes de modelagem e controle de sistemas fracionários comumente o utilizam como ambiente propício para desenvolvimento de *toolboxes*. Dentre os pacotes mais conhecidos estão:

- Pacote CRONE (OUSTALOUP *et al.*, 2000)

- Pacote Ninteger (VALÉRIO; COSTA, 2005)
- Pacote FOTF (XUE *et al.*, 2008)
- Pacote FOMCON (TEPLJAKOV *et al.*, 2014)

Existe uma relação entre estas *toolboxes* como mostrada na Figura 1. Como pode-se ver, a *toolbox* FOMCON é a que possibilitaria ter mais recursos, uma vez que possui rotinas de modelagem e análise de sistemas fracionários oriundos de todas as outras, além de uma interface gráfica para auxiliar sua utilização bem como uma ferramenta para projeto e ajuste de controladores FOPID.

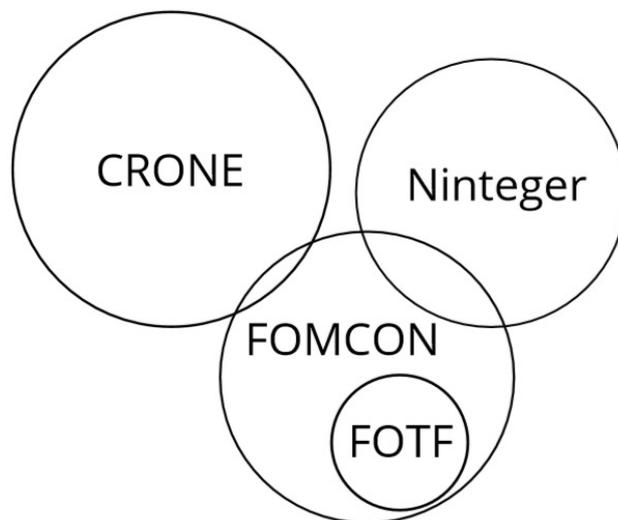


Figura 1 – Relação de *toolboxes* para o MATLAB/Simulink. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017).

No Brasil, pode-se destacar os estudos realizados pelo grupo de pesquisa do Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas (Imecc/Unicamp). As pesquisas realizadas no Imecc têm contribuído para a contínua construção dos conceitos do cálculo fracionário e sua crescente aplicação.

Dentre os trabalhos elaborados pelo grupo citam-se: a tese de CAMARGO (2009), considerado o primeiro trabalho no Brasil a abordar o cálculo fracionário e suas importantes aplicações; a dissertação de OLIVEIRA (2010), que faz uma breve introdução ao cálculo de ordem não inteira; a tese de COSTA (2011), que faz o estudo das funções H de Fox e as aplicações destas no cálculo fracionário; a tese de GRIGOLETTO (2014), que apresenta as equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler que emergem naturalmente das soluções daquelas e, além disso, trabalha com o teorema fundamental do cálculo fracionário. Já a dissertação de OLIVEIRA (2014) trata das derivadas fracionárias e algumas particularidades,

como a regra de Leibniz para a derivada fracionária; e, mais recentemente, a tese de PLATA (2016) que aborda o estudo de equações diferenciais parciais fracionárias lineares e não lineares. Destaca-se, também, o primeiro livro em língua portuguesa que trata do assunto, cujos autores são CAMARGO e OLIVEIRA (2015). E, por último, tem-se também o trabalho de ANDRADE *et al.* (2018) que apresenta as aplicações do cálculo fracionário em circuitos elétricos, principalmente mostrando a utilização de memristores e capacitores fracionários.

1.4 Objetivos

Este trabalho visa, de maneira geral, abordar o Controle de Ordem Fracionária, mostrar suas características e apresentar os benefícios de sua utilização frente aos controles de ordem inteira. Principalmente, no que tange às técnicas de controle PID.

De modo mais específico, os objetivos do presente trabalho podem ser listados como a seguir:

- Expor de maneira clara e objetiva, as propriedades do cálculo de ordem não inteira, com um breve histórico e algumas considerações algébricas;
- Apresentar modelos e estruturas de funções de transferências com o operador fracionário, seguindo com o teorema para análise de estabilidade de um sistema fracionário (Teorema de Matignon);
- Descrever a estrutura de um controlador $PI^\lambda D^\mu$, além de mostrar de maneira prática técnicas de sintonia e *auto-tuning* para controladores PID de ordem fracionária.

No capítulo 2, perspectivas históricas são apresentadas. Pode-se observar no capítulo 3 algumas definições de cálculos fracionários e algumas considerações para sua utilização em sistemas dinâmicos. Já no capítulo 4, apresentam-se alguns controladores FOPID. No capítulo 5, citam-se alguns estudos de caso, inclusive com algumas considerações quanto à estabilidade e análises no domínio do tempo. No 6º capítulo, algumas considerações finais são feitas.

2 PERSPECTIVAS HISTÓRICAS

Os primeiros problemas que apareceram na História relacionados com as integrais são os problemas de quadratura (BOYER, 1974). Um dos problemas mais antigos enfrentados pelos gregos foi o da medição de superfícies a fim de encontrar suas áreas. Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão. Então, a palavra quadratura é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas.

Quadraturas que fascinavam os geômetras eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de outras curvas. As lúnulas - regiões que se assemelham com a lua no seu quarto-crescente (Figura 2) - foram estudadas por Hipócrates de Chios, em 440 a.C., que realizou as primeiras quadraturas da História. Antifon, por volta de 430 a.C., procurou encontrar a quadratura do círculo através de uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado, depois um octógono, em seguida um hexadecágono, e assim por diante. Havia, entretanto, um problema: essa sequência nunca poderia ser concluída. Apesar disso, essa foi uma ideia genial que deu origem ao método da exaustão.

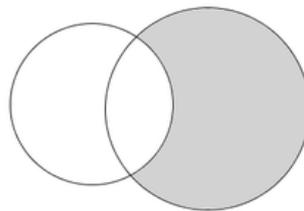


Figura 2 – Lúnula de Hipócrates (área hachurada). Fonte: adaptado de BOYER (1974).

Nesse contexto, uma das questões mais importantes, e que se constituiu numa das maiores contribuições gregas para o Cálculo, surgiu por volta do ano 225 a.C. Trata-se de um teorema de Arquimedes para a quadratura da parábola (BOYER, 1974).

Arquimedes descobriu que a área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer, é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo que tem a mesma altura e que tem a corda como base.

Arquimedes gerou também uma soma com infinitos termos, mas ele conseguiu provar rigorosamente o seu resultado, evitando, com o método da exaustão, a dificuldade com a quantidade infinita de parcelas. Este é o primeiro exemplo conhecido de soma infinita que foi resolvido.

Outra contribuição de Arquimedes foi a utilização do método da exaustão para encontrar a área do círculo, obtendo uma das primeiras aproximações para o número π .

Outras "integrações" foram realizadas por Arquimedes a fim de encontrar o volume da esfera e a área da superfície esférica, o volume do cone e a área da superfície cônica, a área da região limitada por uma elipse, o volume de um parabolóide de revolução e o volume de um hiperbolóide de revolução. Em seus cálculos, Arquimedes encontrava somas com um número infinito de parcelas. O argumento utilizado era a dupla *reductio ad absurdum* para "escapar" da situação incômoda. Basicamente, se não podia ser nem maior, nem menor, tinha que ser igual.

A contribuição seguinte para o Cálculo Integral apareceu somente ao final do século XVI quando a Mecânica levou vários matemáticos a examinar problemas relacionados com o centro de gravidade. Em 1606, em Roma, Luca Valerio publicou *De quadratura parabolae*, onde utilizou o mesmo método grego para resolver problemas de cálculo de áreas desse tipo (BOYER, 1974).

Kepler, em seu trabalho sobre o movimento dos planetas, teve que encontrar as áreas de vários setores de uma região elíptica (Figura 3). O método de Kepler consistia em pensar na superfície como a soma de linhas - método este que, na prática, apresentava muita imprecisão. Analogamente, para calcular volumes de sólidos, pensava na soma de fatias planas. Desse modo, calculou os volumes de muitos sólidos formados pela revolução de uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para o cálculo de cada um desses volumes, Kepler subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

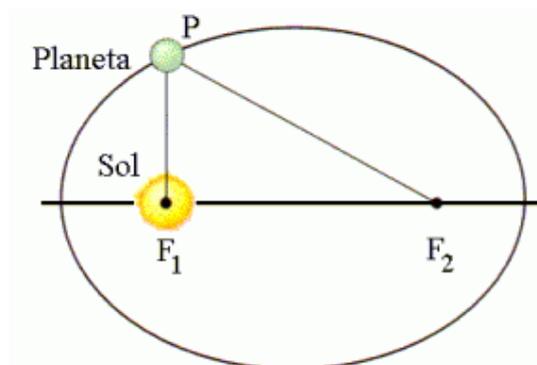


Figura 3 – Órbitas dos planetas ao redor do Sol (F_1 e F_2 são os focos da elipse). Fonte: adaptado de BOYER (1974).

Os próximos matemáticos que tiveram grande contribuição para o nascimento do Cálculo Integral foram Fermat e Cavalieri. Em sua obra mais conhecida, *Geometria indivisibili-*

bus continuorum nova, Cavalieri desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos "indivisíveis".

Todo o processo geométrico desenvolvido por Cavalieri foi então aritmetizado por Wallis. Em 1655, em seu trabalho *Arithmetica infinitorum*, Wallis desenvolveu princípios de indução e interpolação que o levaram a encontrar diversos resultados importantes, entre eles, a antecipação de parte do trabalho de Euler sobre a função gamma.

Fermat desenvolveu uma técnica para achar a área sob cada uma das, então chamadas, "parábolas maiores". Por volta de 1640, a fórmula geral da integral das parábolas maiores era conhecida por Fermat, Blaise Pascal, Descartes, Torricelli e outros (BOYER, 1974).

O problema do movimento estava sendo estudado desde a época de Galileu. Tanto Torricelli como Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e a operação inversa, partindo da velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a ideia de operação inversa da derivada desenvolveu-se naturalmente e a ideia de que a integral e a derivada eram processos inversos era familiar a Barrow. Embora Barrow nunca tenha enunciado formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo, estava trabalhando em direção a esse resultado; foi Newton, entretanto, quem, continuando na mesma direção, formulou o teorema.

Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileu sobre o estudo do movimento dos corpos e desenvolveu o Cálculo aproximadamente dez anos antes de Leibniz. Ele desenvolveu os métodos das *fluxions* - derivação - e *fluents* - integração - e utilizou-os na construção da mecânica clássica. Para Newton, a integração consistia em achar *fluents* para um dado *fluxion* considerando, desta maneira, a integração como inversa da derivação. Com efeito, Newton sabia que a derivada da velocidade, por exemplo, era a aceleração e a integral da aceleração era a velocidade (BOYER, 1974).

Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri. Daí vem o símbolo - um 's' longo - para representar *summa*. Segundo ele, "represento a área de uma figura pela soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais definidos pelas ordenadas e pelas diferenças entre as abscissas... e portanto eu represento em meu cálculo a área da figura".

Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico.

Leibniz acreditava que a notação era de fundamental importância e, de fato, a sua notação foi mais eficaz do que a de Newton e acabou por se consolidar, sendo utilizada até os dias de hoje, mantendo exatamente a mesma forma. Newton escrevia para si próprio e não foi feliz em encontrar uma notação consistente.

Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684 e em 1686 sob o nome *Calculus Summatorius* (BOYER, 1974). O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690.

Principalmente como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas "reversas". Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas ideias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

Após o estabelecimento do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções - ainda prematuro na época - juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos da Análise.

Hoje, o Cálculo Integral é largamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, por exemplo.

O conceito do operador diferencial $\mathcal{D} = d/dx$ é uma ferramenta fundamental e bem conhecida no cálculo moderno e pode ser aplicada na forma $\mathcal{D}^n f(x) = d^n f(x)/dx^n$ quando deseja-se obter uma derivada de ordem n de uma dada função f . No entanto, no cálculo convencional (integral), esta ordem n precisa ser inteira e positiva.

Mas, o que aconteceria se n fosse um número não inteiro, como $1/2$? Essa foi exatamente a pergunta feita por L'Hôpital a Leibniz em uma carta datada de 1695. Desde então, o conceito de cálculo fracionário obteve a atenção de muitos matemáticos através da história, incluindo Euler, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann, Abel e Laurent (MILLER; ROSS, 1993).

A primeira aplicação do cálculo fracionário foi feita por Abel que, em 1881, descobriu que a solução da equação integral para o problema da curva tautocrônica poderia ser encontrada através de uma derivada de ordem $1/2$ (ABEL, 1881).

Mais tarde, no século XIX, aplicações do cálculo fracionário foram estimuladas através do desenvolvimento de algumas ferramentas matemáticas, principalmente por Bode e

Heaviside (TEPLJAKOV, 2017). Este último, através da definição de uma ordem P fracionária, quando desenvolvia o chamado Cálculo Operacional (ROBERTSON, 1935).

No século XX, mais contribuições em termos de teoria e aplicações foram feitas, podendo-se citar as contribuições de Weyl e Hardy, Riesz, Oldham e Spanier (MONJE *et al.*, 2010). E com o avanço da tecnologia, principalmente com o advento dos computadores neste século, percebeu-se o aumento do interesse e de métodos computacionais para resolver as equações diferenciais fracionárias. O restante da história pode ser visto na seção 1.3.

No capítulo seguinte, serão apresentadas definições de cálculos fracionários e algumas considerações para sua utilização em sistemas dinâmicos.

3 CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

A maioria dos sistemas dinâmicos reais apresentam complexidade suficiente para produzir efeitos de memória, dissipação e dimensionalidade efetiva de ordem fracionária. Alguns desses problemas levam a funções de natureza fractal, isto é apresentam a propriedade de auto-similaridade, ou seja, os padrões que aparecem em uma determinada escala se repetem em escalas maiores e menores. Essas funções não são diferenciáveis no sentido convencional (inteiro) e muitas das leis que regem os processos difusivos e/ou transições de fase são melhor descritas por leis de potências fracionárias. Todos esses aspectos podem ser melhor compreendidos através do uso do chamado cálculo fracionário e da geometria fractal.

Considerando isso, o cálculo fracionário oferece um novo método para modelagem e projeto de controladores através da introdução da derivada de ordem não inteira (fracionária). A teoria matemática está bem estabelecida (MILLER; ROSS, 1993; PODLUBNY, 1999a; KILBAS *et al.*, 2006) e, ainda, apresenta algumas possibilidades para modelagem de sistemas (PETRÁŠ, 2011; PADULA; VISIOLI, 2016).

Na seção seguinte, será apresentada uma breve descrição do cálculo de ordem fracionária e, também algumas propriedades matemáticas pertinentes.

3.1 Breve descrição do cálculo de ordem fracionária

O cálculo fracionário continua em franco crescimento, principalmente após o advento de sistemas computacionais que tornam o cálculo de ordem não inteira mais rápido e mais preciso. Apesar de sua origem datar da mesma época do cálculo de ordem inteira, este primeiro só teve seu desenvolvimento de forma objetiva a partir do primeiro congresso internacional realizado na Universidade de New Haven, em 1974 (SOARES, 2016) (embora haja o artigo de MANAGE (1961) que aplica a teoria de integrais de ordem fracionária no controle de sistemas). Outros congressos se sucederam e, em vários países, o cálculo fracionário ganhou e continua ganhando mais adeptos. Hoje, pode-se afirmar que é uma área perfeitamente consolidada, pois, em todo o mundo, existem os mais diversos grupos de pesquisas, congressos, revistas específicas e, também, abertura de espaço para publicações em importantes anais dos resultados advindos do cálculo fracionário.

Em termos de aplicações, o cálculo fracionário pode ser utilizado para modelar e solucionar vários problemas físicos, citando-se, por exemplo, a condução de calor por um

corpo sólido semi-infinito (BATTAGLIA *et al.*, 2001; GABANO; POINOT, 2011) e linhas de transmissão infinitas (WANG, 1987) que são tratados como problemas estritamente fracionários.

Especificamente, o cálculo fracionário pode ser muito útil na modelagem de processos que possuem memória e/ou propriedades hereditárias (PODLUBNY, 1999b). Além disso, já que o cálculo fracionário é uma generalização do cálculo convencional, é esperado que o cálculo fracionário represente as dinâmicas do sistema modelado mais fielmente do que o cálculo de ordem inteira (MONJE *et al.*, 2010).

Assim, o cálculo fracionário seria convenientemente utilizado em muitos campos, tanto industriais quanto acadêmicos, como em estudos de processamento de sinais (VINAGRE *et al.*, 2003), processos químicos (OLDHAM; SPANIER, 1974), bioengenharia (IONESCU, 2013) e, inclusive, processos econômicos (LO, 1991).

O cálculo fracionário tem se mostrado importante e, em muitos casos, imprescindível, na discussão de problemas oriundos de várias áreas do conhecimento como proposto por MAINARDI (2010), onde uma introdução aos modelos matemáticos é apresentada.

É possível notar, também, o impacto do cálculo fracionário também na descrição de diversos problemas na área da Engenharia Elétrica, indo desde os fundamentos da teoria de circuitos elétricos (HARTLEY *et al.*, 1995), passando pela modelagem biomédica (MAGIN, 2006), estabilidade e controle de sistemas (CHEN *et al.*, 2009), modelagem de memristores (FOUDA; RADWAN, 2014) e indutores de radiofrequência (PODLUBNY, 1999b) e teoria eletromagnética (SHAMIM *et al.*, 2011).

No que diz respeito à disciplina de controle e automação, as equações diferenciais fracionárias podem ser utilizadas para:

- Obter modelos mais precisos dos sistemas dinâmicos;
- Projetar novas estratégias de controladores; e
- Melhorar as características de controle de malha fechada.

Destacando a utilização em controle de processos industriais, principalmente o PID de ordem fracionária (PODLUBNY *et al.*, 1997), incluindo as técnicas de *auto-tuning*.

Espera-se que a utilização de modelos e controladores fracionários leve a uma grande melhoria na qualidade dos controles hoje aplicados no ambiente industrial, principalmente no que tange a precisão, a performance e a eficiência energética do controle aplicado (CHEN *et al.*, 2009).

3.2 Integração e derivação de ordem fracionária

Cálculo fracionário é uma generalização da integração e da derivação de ordens não-inteiras no operador fundamental ${}_a\mathcal{D}_t^r$, onde a e t são os limites da operação. O operador íntegro-diferencial contínuo é definido por:

$${}_a\mathcal{D}_t^r = \begin{cases} d^r/dt^r, & \Re(r) > 0 \\ 1, & \Re(r) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-r}, & \Re(r) < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde r é a ordem da operação e geralmente $r \in \mathbb{R}$. De outro modo, r também poderia ser um número complexo (CHEN *et al.*, 2009). Neste trabalho, será considerado apenas o caso em que $r \in \mathbb{R}$, pois os métodos ora descritos para trabalhar com sistemas fracionários utilizam ordens não complexas.

Existem múltiplas definições para o operador fracionário (MONJE *et al.*, 2010). Por ser mais usual na literatura (MONJE, 2006; CHEN, 2006; TEPLJAKOV *et al.*, 2014), utilizar-se-á a definição de Grünwald-Letnikov para a solução numérica de equações diferenciais de ordem fracionária.

$${}_a\mathcal{D}_t^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^r} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^k \binom{r}{k} f(t - hk) \quad (3.2)$$

onde, $\lceil \frac{t-a}{h} \rceil$ é a parte integral e h é o tamanho do passo (*step size*).

3.2.1 Propriedades da integração e derivação de ordem fracionária

A integração/derivação de ordem fracionária possui as seguintes propriedades (CHEN *et al.*, 2009):

1. Considerando a operação íntegro-diferencial fracionária representada por ${}_0\mathcal{D}_t^r f(t)$, se r for um número inteiro positivo, o resultado é o mesmo da derivada de ordem inteira r .
2. De outro modo, se $r = 0$, tem-se o que se chama de operador identidade e obtém-se:

$${}_0\mathcal{D}_t^0 f(t) = f(t)$$

3. A derivada fracionária e a integral fracionária são operações lineares. Portanto, se a e b forem constantes:

$${}_0\mathcal{D}_t^r [af(t) + bg(t)] = {}_0\mathcal{D}_t^r af(t) + {}_0\mathcal{D}_t^r bg(t) = a{}_0\mathcal{D}_t^r f(t) + b{}_0\mathcal{D}_t^r g(t)$$

4. Para operadores com $\Re(\alpha) > 0$ e $\Re(\beta) > 0$, pode-se fazer:

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha \left[{}_0\mathcal{D}_t^\beta f(t) \right] = {}_0\mathcal{D}_t^\beta \left[{}_0\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \right] = {}_0\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

5. O operador diferencial fracionário pode ser utilizado com o operador diferencial de ordem inteira:

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a\mathcal{D}_t^r f(t)) = {}_a\mathcal{D}_t^r \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a\mathcal{D}_t^{r+n} f(t)$$

neste caso, se $t = a$, tem-se $f^k(a) = 0$, ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$).

3.3 Cálculo fracionário sob domínio de Laplace

Sabe-se do cálculo de ordem inteira que o método da transformada de Laplace é uma ferramenta essencial na análise de equações diferenciais lineares, principalmente no caso em que a equação possui coeficientes constantes. Neste caso, a transformada de Laplace reduz a equação diferencial ordinária em uma equação algébrica que é, em geral, muito mais simples de se solucionar, fazendo com que a dificuldade de se obter a solução final da equação diferencial de partida seja reduzido a um problema de inversão. Nesta seção, pode-se ver que a mesma metodologia também pode ser usada para resolver problemas de equações diferenciais de ordem fracionária.

A função $F(s)$ da variável complexa s é chamada de transformada de Laplace da função $f(t)$ e é dada por:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (3.3)$$

A função original $f(t)$ pode ser descoberta (recuperada) se for aplicada a transformada inversa de Laplace (\mathcal{L}^{-1}).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{-st} F(s) ds \quad (3.4)$$

onde c é maior que a parte real de todos os polos da função $F(s)$ (MONJE *et al.*, 2010).

Se as condições iniciais forem nulas, a transformada de Laplace para o operador de Grünwald-Letnikov fica:

$$\mathcal{L}[\mathcal{D}^r f(t)] = s^r F(s) \quad (3.5)$$

A seguir, dois exemplos para melhor entendimento (RODRIGUES; OLIVEIRA, 2015) em 3.3.1 e 3.3.2. Mas antes dos exemplos serem apresentados, listar-se-á por conveniência,

as transformadas de Laplace das funções de Mittag-Leffler que, segundo (MAINARDI, 2010) podem ser facilmente calculadas, usando a representação em série das próprias funções de Mittag-Leffler e calculando as transformadas termo a termo (o que é possível visto que estas funções são inteiras). Estas transformadas serão úteis quando for necessário fazer as transformadas inversas nos exemplos. Assim, tem-se:

$$\mathcal{L}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} = \frac{s^{-1}}{1 + \lambda s^{-\alpha}} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda} = \frac{s^{-\beta}}{1 + \lambda s^{-\alpha}} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(-\lambda t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha + \lambda)^\gamma} = \frac{s^{-\beta}}{(1 + \lambda s^{-\alpha})^\gamma} \quad (3.8)$$

Os dois exemplos são problemas de valor inicial envolvendo a formulação de Riemann-Liouville (um problema homogêneo, mostrado em 3.3.1 e o outro não homogêneo, mostrado em 3.3.2).

3.3.1 Exemplo: problema homogêneo

Determinar $y(t)$ em:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} y(t) - \lambda y(t) = 0, \\ \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-1} y(0+) = \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} y(0+) = b_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} y(t) - \lambda y(t) \right] &= 0 \\ s^{\frac{1}{2}} Y(s) - b_0 - \lambda Y(s) &= 0 \\ \left(s^{\frac{1}{2}} - \lambda \right) Y(s) &= b_0 \end{aligned}$$

o que implica em

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^{\frac{1}{2}} - \lambda}$$

Aplica-se a equação dada por (3.7) para obter-se:

$$y(t) = b_0 t^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}})$$

onde $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros (GORENFLO *et al.*, 2014). Um segundo exemplo, agora para uma função não homogênea, será apresentado.

3.3.2 Exemplo: problema não homogêneo

Determinar $y(t)$ em:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\frac{4}{3}}y(t) - \lambda y(t) = t^2, \\ \mathcal{D}_{0^+}^{\frac{4}{3}-1}y(0^+) = \mathcal{D}_{0^+}^{\frac{1}{3}}y(0^+) = b_0 \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{D}_{0^+}^{\frac{4}{3}-2}y(0^+) = \mathcal{I}_{0^+}^{\frac{2}{3}}y(0^+) = b_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação, obtém-se:

$$\mathcal{L} \left[\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{4}{3}}y(t) - \lambda y(t) \right] = \frac{\Gamma(3)}{s^3}$$

ou ainda:

$$\left(s^{\frac{4}{3}} - \lambda \right) Y(s) = \frac{\Gamma(3)}{s^3} + sb_1 + b_0$$

implicando em:

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^{\frac{4}{3}} - \lambda} + \frac{sb_1}{s^{\frac{4}{3}} - \lambda} + \frac{\Gamma(3)}{s^3} \frac{1}{s^{\frac{4}{3}} - \lambda}$$

e, usando a Equação (3.7), pode-se verificar que:

$$\begin{aligned} y(t) &= b_0 t^{\frac{1}{3}} E_{\frac{4}{3}, \frac{4}{3}} \left(\lambda t^{\frac{4}{3}} \right) + b_1 t^{-\frac{2}{3}} E_{\frac{4}{3}, \frac{1}{3}} \left(\lambda t^{\frac{4}{3}} \right) + \left[t^2 * \left(t^{\frac{1}{3}} E_{\frac{4}{3}, \frac{4}{3}} \left(\lambda t^{\frac{4}{3}} \right) \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^1 b_k t^{\frac{4}{3}-k-1} E_{\frac{4}{3}, \frac{4}{3}-k} \left(\lambda t^{\frac{4}{3}} \right) + \int_0^t \left[(t-\tau)^{\frac{1}{3}} E_{\frac{4}{3}, \frac{4}{3}} \left(\lambda (t-\tau)^{\frac{4}{3}} \right) \right] \tau^2 d\tau \end{aligned}$$

Estes exemplos, apesar de simples, ilustram que a metodologia da transformada de Laplace continua tendo a mesma eficácia para a resolução de equações diferenciais fracionárias, assim como nos casos de ordens inteiras.

3.4 Modelos de sistemas de ordem fracionária

A equação diferencial que apresenta um sistema dinâmico de ordem fracionária possui a seguinte forma (MONJE *et al.*, 2010):

$$a_n \mathcal{D}^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \mathcal{D}^{\alpha_0} y(t) = b_m \mathcal{D}^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \mathcal{D}^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t) \quad (3.9)$$

onde $(a_i, b_j) \in \mathbb{R}^2$ e $(\alpha_i, \beta_j) \in \mathbb{R}_+^2$.

O sistema é dito de ordem mensurável se em (3.9) a ordem de todos os operadores forem múltiplos inteiros de um valor base q , tal que $\alpha_k, \beta_k = kq$, $q \in \mathbb{R}^+$.

O sistema pode, então ser expresso por:

$$\sum_{k=0}^n a_k \mathcal{D}^{kq} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k \mathcal{D}^{kq} u(t) \quad (3.10)$$

Se, na Equação (3.10), a ordem de $q = 1/r$, $r \in \mathbb{Z}_+$ o sistema será considerado de ordem racional. Um diagrama com as possíveis classificações para os sistemas invariantes no tempo (LTI) é mostrado na Figura 4 (TEPLJAKOV, 2017).

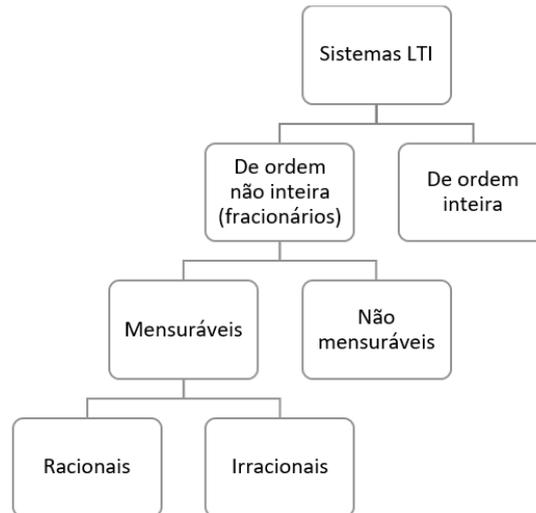


Figura 4 – Classificação dos sistemas LTI. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017).

Aplicando-se a transformada de Laplace na Equação (3.9) (considerando-se as condições iniciais nulas), pode-se obter a expressão mostrada na Equação (3.11):

$$a_n s^{\alpha_n} Y(s) + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} Y(s) + \dots + a_0 s^{\alpha_0} Y(s) = b_m s^{\beta_m} U(s) + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} U(s) + \dots + b_0 s^{\beta_0} U(s) \quad (3.11)$$

E, posteriormente, chegar-se à Equação (3.12), que mostra a função de transferência de um sistema dinâmico de ordem fracionária (TEPLJAKOV, 2017):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (3.12)$$

Como pode-se notar, esta função de transferência apresenta polos (raízes do polinômio do denominador) e, segundo TEPLJAKOV (2017), pode-se dizer que o número de polos fracionários seria a *pseudo-ordem* deste sistema.

No caso de um sistema fracionário de ordem mensurável q , pode-se tomar $\sigma = s^q$ e considerar a função de transferência pseudo-racional mostrada na Equação (3.13):

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \sigma^k}{\sum_{k=0}^n a_k \sigma^k} \quad (3.13)$$

Pode-se também, levando em conta o sinal de entrada $u(t) = u_d(t - L)$ (com atraso L), reescrever a Equação (3.12).

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} e^{-Ls} \quad (3.14)$$

como em geral os termos α_0 e β_0 são iguais a 0, o ganho estático do sistema pode ser dado por $K = b_0/a_0$ e o atraso $L \in \mathbb{R}_+$.

Um modelo particular deste tipo é o sistema fracionário de primeira ordem com atraso, cuja função de transferência é mostrado na Equação (3.15) (PADULA; VISIOLI, 2016).

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts^\alpha} e^{-Ls} \quad (3.15)$$

onde K é o ganho estático, $L \geq 0$ é o atraso, $T > 0$ é a constante de tempo e $\alpha \in (0, 2)$ é a ordem fracionária.

Se o sistema (3.14) possui um atraso entre a entrada e a saída de L , a saída $y_d(t)$ (com $y_d(0) = 0$) será:

$$y_d(t) = \begin{cases} y(t - L), & t > L \\ 0, & t \leq L \end{cases} \quad (3.16)$$

Para melhor entendimento, considerar um sistema G_p dado pela função de transferência mostrada na Equação (3.17).

$$G_p = \frac{1}{s^{1,2} + 1} \quad (3.17)$$

Considerar agora o mesmo sistema, só que com um atraso de $L = 2,5$ segundos, onde tem-se a função de transferência dada por:

$$G_d = \frac{1}{s^{1,2} + 1} e^{-2,5s} \quad (3.18)$$

Assim, as respostas ao sinal degrau podem ser vistas sobrepostas na Figura 5.

3.5 Aproximação de operadores de ordem fracionária

Com a crescente importância do estudo de elementos de ordem fracionária (integração e derivação), muitos métodos para aproximação de operadores de ordem fracionária têm sido criados (DAS *et al.*, 2011), tais como: as técnicas de Carlson, o método de Oustaloup e o método de Charef.

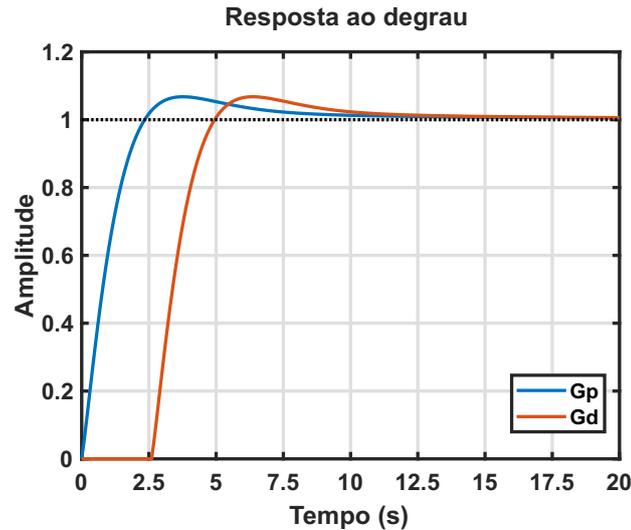


Figura 5 – Comportamento de um sistema com e sem atraso de transporte. Fonte: o Autor.

O filtro recursivo de Oustaloup, proposto em OUSTALOUP *et al.* (2000), é um método bem estabelecido e é bastante utilizado para essa aproximação. Este método menciona que os elementos de ordem não inteira geralmente mostram uma curva de fase constante e, na prática, podem ser aproximados através de um sistema de ordem superior que mantém uma fase constante dentro de um intervalo de fase escolhida. Assim, de maneira a aproximar um derivador de ordem α ou um integrador de ordem $-\alpha$ através de uma função de transferência convencional, pode-se calcular os polos e zeros utilizando as equações a seguir.

$$s^\alpha \approx K \prod_{k=1}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (3.19)$$

onde:

$$\omega'_k = \omega_b \cdot \omega_u^{(2k-1-\alpha)/N} \quad (3.20)$$

$$\omega_k = \omega_b \cdot \omega_u^{(2k-1+\alpha)/N} \quad (3.21)$$

$$K = \omega_h^\alpha, \omega_u = \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_b}} \quad (3.22)$$

e N é a ordem de aproximação dentro do intervalo de frequência (ω_b, ω_h).

Através da 5ª propriedade definida em 3.2.1 e $\alpha \geq 1$, tem-se:

$$s^\alpha = s^n s^\gamma \quad (3.23)$$

onde $n = \alpha - \gamma$ é a parte inteira de α e s^γ é obtido através da aproximação de Oustaloup pela Equação (3.19). Assim, todo operador em (3.14) pode ser aproximado utilizando (3.23) e substituído pela aproximação obtida, produzindo uma função de transferência convencional de ordem inteira.

Isto é muito importante para implementações digitais, já que a função de transferência ora obtida pode ser convertida para sua equivalente em tempo discreto utilizando quaisquer métodos como a Transformada-Z, método Bilinear, entre outros (TEPLJAKOV, 2017).

Um exemplo de como fazer uma aproximação é apresentado em DAS *et al.* (2011), onde se utiliza o filtro recursivo de Oustaloup para aproximar integrador diferencial de ordem fracionária mostrado na Equação (3.19), no intervalo de frequência $\omega = [10^{-4}, 10^4] rad/s$. As equações a seguir representam as aproximações analógicas obtidas para $q = -0,5$ e $N = 1, 2, 3$ respectivamente. Vale ressaltar que, para diferentes graus de aproximação N , o ganho K permaneceu constante e igual a 0,01 (quando a função de transferência está na forma de polos e zeros).

$$G_1 = \left[\frac{0,01(s + 2154)(s + 4,642)(s + 0,01)}{(s + 100)(s + 0,2154)(s + 0,0004642)} \right] \quad (3.24)$$

$$G_2 = \left[\frac{0,01(s + 3981)(s + 100)(s + 2,512)(s + 0,0631)(s + 0,001585)}{(s + 631)(s + 15,85)(s + 0,3981)(s + 0,01)(s + 0,0002512)} \right] \quad (3.25)$$

$$G_3 = \left[\frac{0,01(s + 5179)(s + 372,8)(s + 26,83)(s + 1,931)(s + 0,1389)(s + 0,01)(s + 0,0007197)}{(s + 1389)(s + 100)(s + 7,197)(s + 0,5179)(s + 0,03728)(s + 0,002683)(s + 0,0001931)} \right] \quad (3.26)$$

Pode-se ver que a ordem da função de transferência aumenta rapidamente com a ordem de aproximação N . Além disso, DAS *et al.* (2011) mostra que quanto maior a ordem de G_N , mais é possível manter a fase constante. No entanto, a partir de $N = 3$, a melhoria na resposta do sistema é pequena em comparação com a complexidade da função de transferência aproximada. Ou seja, de um ponto de vista econômico em termos computacionais, a 3ª aproximação do filtro recursivo de Oustaloup é suficiente para se ter uma boa aproximação e baixa complexidade relativa.

Funções de transferência aproximadas de sistemas de ordem fracionária podem ser muito complexas. No entanto, existem na literatura métodos para simplificação da ordem dos sistemas modelados, tais como mostrados em: HSIA (1972), MOORE (1981), ARAÚJO *et al.* (2008). Um método comumente utilizado, é mostrado por AGUIRRE (1993), que consiste em desprezar os pólos e zeros menos significativos, ou seja, os que estão mais distantes do eixo imaginário e que pouco influenciam na dinâmica do sistema modelado.

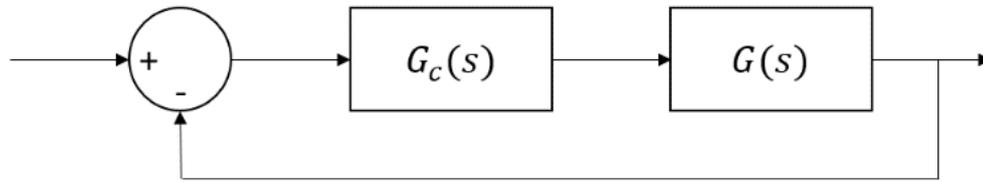


Figura 6 – Sistema de malha fechada. Fonte: adaptado de ASTROM e HÄGGLUND (2006).

Um outro exemplo que pode mostrar isto é o de uma malha retroalimentada negativamente (sistema de malha fechada), representado pela Figura 6

A função de transferência da planta a ser controlada $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = \frac{0,8s^{1,2} + 2}{1,1s^{1,8} + 0,8s^{1,3} + 1,9s^{0,5} + 0,4} \quad (3.27)$$

A função de transferência do controlador $G_c(s)$ é dada por:

$$G_c(s) = \frac{1,2s^{0,72} + 1,5s^{0,33}}{3s^{0,8}} \quad (3.28)$$

Fazendo $H(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}$, tem-se:

$$H(s) = \frac{0,96s^{1,92} + 1,2s^{1,53} + 2,4s^{0,72} + 3s^{0,33}}{3,3s^{2,6} + 2,4s^{2,1} + 0,96s^{1,92} + 1,2s^{1,53} + 5,7s^{1,3} + 1,2s^{0,8} + 2,4s^{0,72} + 3s^{0,33}} \quad (3.29)$$

Isto sem fazer a aproximação pelo filtro recursivo de Oustaloup, o que faria com que a função de transferência ficasse bem mais complexa.

3.6 Análise de estabilidade de sistemas de ordem fracionária

Sabe-se da teoria da estabilidade (ASTROM; HÄGGLUND, 2006), que um sistema LTI (Linear e Invariante no Tempo) é estável se as raízes do polinômio característico (polos) são negativas ou têm partes reais negativas se forem conjugados complexos. Isso significa que eles estão localizados na metade esquerda do plano complexo. No caso de um LTI de ordem fracionária, a estabilidade é diferente da do número inteiro. Nota-se, que um sistema fracionário estável pode ter polos na metade direita do plano complexo, como se vê na Figura 7.

Para entender melhor como determinar a estabilidade de um sistema de ordem fracionária dado por (3.12), precisa-se citar o Teorema de Estabilidade de Matignon (MATIGNON, 1998).

Teorema 3.6.1 (Matignon) A função de transferência de ordem fracionária $G(s) = \frac{Z(s)}{P(s)}$ é estável se, e somente se, a seguinte condição for satisfeita no plano σ :

$$|\arg(\sigma)| > q\frac{\pi}{2}, \forall \sigma \in C, P(\sigma) = 0, \quad (3.30)$$

onde $0 < q < 2$ e $\sigma := s^q$. Quando $\sigma = 0$ for uma única raiz de $P(s)$, o sistema não será estável. Para $q = 1$, este é o caso clássico da localização dos polos no plano complexo: nenhum polo está no semi-plano direito.

Algumas etapas podem ser seguidas para se verificar a estabilidade do sistema em (3.12):

1. Encontrar a ordem mensurável q de $P(s)$. Encontrar a_1, a_2, \dots, a_n em (3.13);
2. Resolva σ para a equação $\sum_{k=0}^n a_k \sigma^k = 0$;
3. Se todas as raízes obtidas satisfizerem as condições do teorema 2.1, então o sistema é estável.

Na Figura 7, pode-se ver a região de estabilidade de um sistema fracionário.

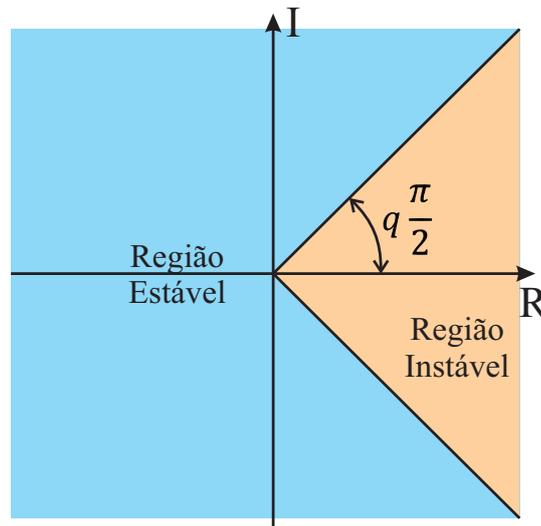


Figura 7 – Região de estabilidade para o sistema fracionário. Fonte: adaptado de CHEN *et al.* (2009).

Uma consequência direta do Teorema de Matignon e, também, uma maneira de exemplificar melhor o comportamento da resposta no tempo, variando de acordo com a posição dos polos de um dado sistema de ordem fracionária é mostrado na Figura 8.

3.6.1 Análise no domínio do tempo

Outra solução envolve métodos numéricos computacionais aplicado às derivadas fracionárias através da equação de Grünwald-Letnikov (Equação (3.2)) reescrita como mostrado na Equação (3.31).

$${}_a \mathcal{D}_t^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^r} \sum_{j=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} w_j^{(\alpha)} f(t - jh), \quad (3.31)$$

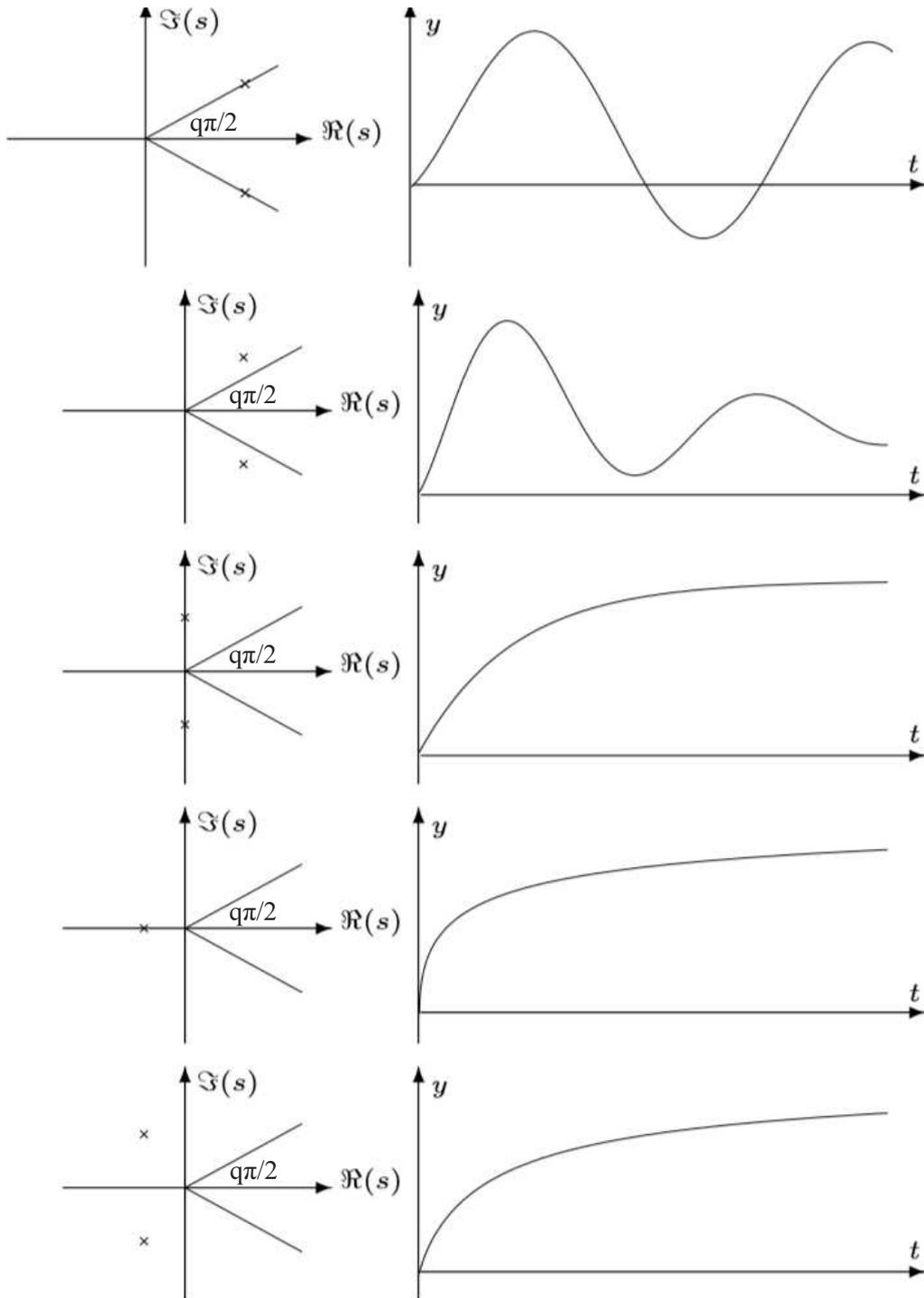


Figura 8 – Comportamento da resposta no tempo de acordo com a posição dos polos. Fonte: adaptado de MONJE *et al.* (2010).

onde h é o passo de integração computacional e $w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ pode ser calculado recursivamente através de:

$$w_0^{(\alpha)} = 1, w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, j = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Para obter uma solução numérica para a Equação (3.9), se faz necessário estimar o sinal $\hat{u}(t)$ usando o algoritmo da Equação (3.31), onde:

$$\hat{u}(t) = b_m \mathcal{D}^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \mathcal{D}^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t) \quad (3.33)$$

A resposta no tempo $y(t)$ pode ser então obtida pela Equação (3.34):

$$y(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} \left[u(t) - \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}} \sum_{j=1}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} w_j^{(\alpha)} y(t-jh) \right] \quad (3.34)$$

O método apresentado é dito "com passo fixo". A precisão da simulação pode variar de acordo com o tamanho do passo (CHEN *et al.*, 2009; MONJE *et al.*, 2010; XUE *et al.*, 2008).

Um exemplo que deixa claro esta relação da precisão e tamanho do passo pode ser visto na Figura 9. Nele, foi considerado o sistema dado pela Equação (3.17), e simulado com passos de 0,1 segundo, 1 segundo e 2 segundos. Observa-se que as respostas apresentam curvas um pouco diferentes e com sobresinal e tempo de acomodação distintos, o que pode influenciar na análise do sistema e no projeto de um possível controlador.

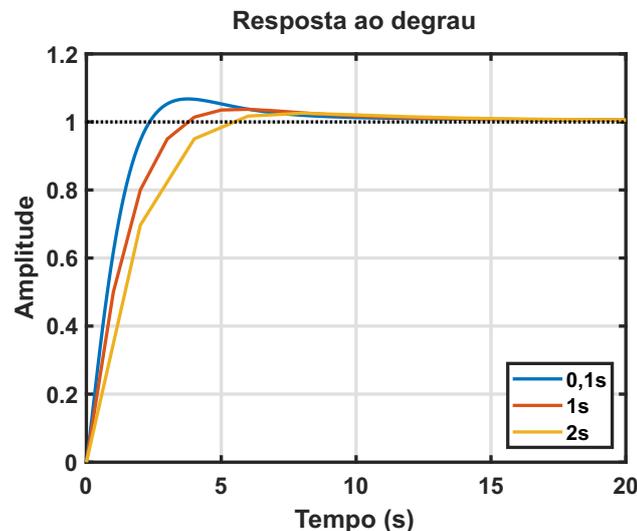


Figura 9 – Curvas de resposta ao degrau para tamanhos de passo diferentes. Fonte: o Autor.

3.6.2 Análise no domínio da frequência

Em geral, a resposta no domínio da frequência pode ser obtida substituindo-se s por $j\omega$ na Equação (3.14). A resposta complexa para a frequência $\omega \in (0, \infty)$ pode ser calculada através da Equação (3.35):

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^{\beta_m} + b_{m-1}(j\omega)^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0(j\omega)^{\beta_0}}{a_n(j\omega)^{\alpha_n} + a_{n-1}(j\omega)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0(j\omega)^{\alpha_0}} e^{-L(j\omega)} \quad (3.35)$$

onde j é a unidade imaginária.

Também deve-se considerar a seguinte relação para $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$j^\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (3.36)$$

Assim, para sistemas de ordem mensurável, pode-se obter a resposta em frequência pela adição das contribuições individuais dos termos de ordem α resultante da fatoração da Função (3.37).

$$G(s) = \frac{P(s^\alpha)}{Q(s^\alpha)} = \frac{\prod_{k=0}^m (s^\alpha + z_k)}{\prod_{k=0}^n (s^\alpha + \lambda_k)}, \quad z_k, P(z_k) = 0, \lambda_k, Q(\lambda_k) = 0, z_k \neq \lambda_k \quad (3.37)$$

Para cada um destes termos, dados por $(s^\alpha + \gamma)^{\pm 1}$, a curva de ganho terá uma inclinação que começa em zero e tende a $\pm\alpha 20\text{dB/dec}$ para altas frequências e a curva de fase terá inclinação que vai de zero a $\pm\alpha\pi/2$. Além disso, terá ressonâncias em caso de $\alpha > 1$. Para ilustrar melhor, a Figura 10 mostra a resposta em frequência para o sistema dado por (3.38).

$$G(s) = \frac{1}{s^{1,5} + 1} \quad (3.38)$$

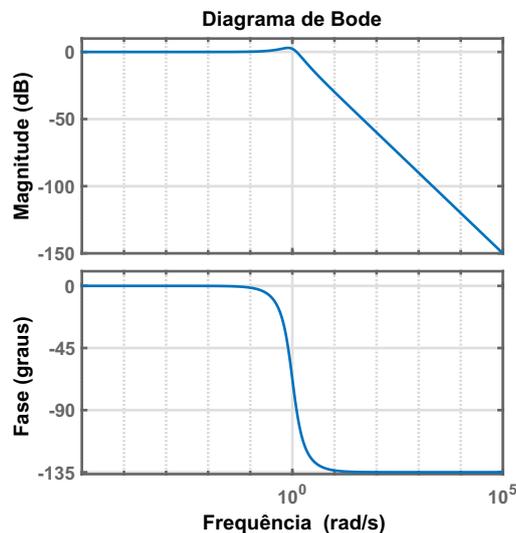


Figura 10 – Curvas de resposta em frequência para o sistema (3.38). Fonte: o Autor.

Para este sistema, pode ser observado que a inclinação no gráfico de ganho vai de 0 a -30dB/dec , a curva de fase inicia em 0 e tende a $-3\pi/4$ e tem-se uma frequência de ressonância de $\omega \approx 0,8\text{rad/seg}$.

A seção a seguir mostra uma análise mais minuciosa de um sistema e que pode esclarecer possíveis dúvidas do leitor.

3.6.3 Exemplo: análise de estabilidade

Este exemplo é realizado pela execução do código fonte presente no anexo A após a instalação da *toolbox* FOTF (XUE *et al.*, 2008).

Nele, primeiramente define-se uma função de transferência de um sistema-teste dada por:

$$G(s) = \frac{-2s^{0,63} + 4}{2s^{3,501} + 3,8s^{2,42} + 2,6s^{1,798} + 2,5s^{1,31} + 1,5} \quad (3.39)$$

Após esse passo, um teste de estabilidade com a função *"isstable"* é realizado, e retorna o valor $K = 1$, que indica que o sistema é estável. Também retorna o valor $q = 0,001$, mostrando que a abertura do limite de instabilidade é de $\frac{0,001 * \pi}{2}$, ou seja, menor que 0,1 grau (0,09 grau).

Uma figura que apresenta a distribuição dos polos do sistema $G(s)$ no plano cartesiano também é mostrada (Figura 11) junto com a região de instabilidade. Nota-se um elevado número de polos para este sistema. Isto é explicado pelo fato de que $q = 0,001$ e a ordem do polinômio característico é $N = 3,501$. Assim, quando o *software* faz a aproximação da função de transferência do sistema fracionário para uma função de transferência de ordem inteira, o número de polos passa a ser 3.501.

A zona onde os polos tocariam os limites de instabilidade está ampliada na Figura 12 e pode-se ver que não há polos dentro desta região.

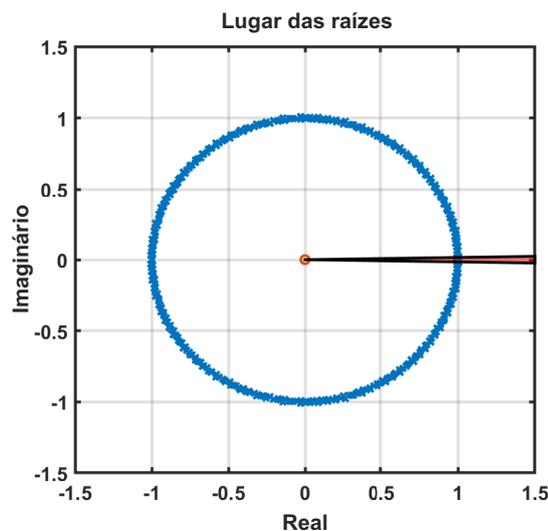


Figura 11 – Apresentação de polos de $G(s)$ no plano cartesiano. Fonte: Adaptado de CHEN *et al.* (2009).

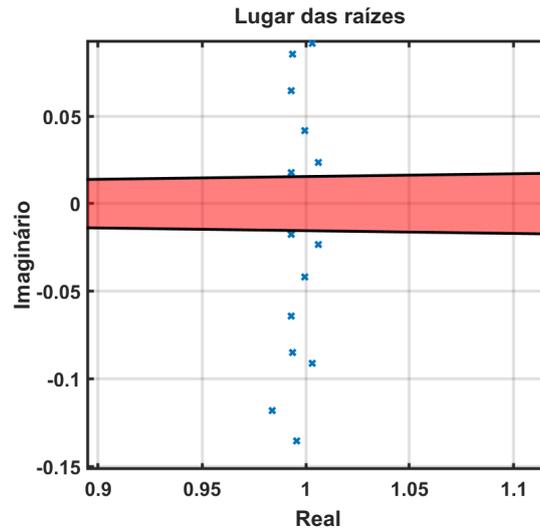


Figura 12 – Região de instabilidade para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN *et al.* (2009).

Em seguida, a resposta ao degrau é exibida, com o tempo t de simulação indo de 0 a 50 segundos (Figura 13). Pode-se ver uma natureza oscilatória, uma vez que o sistema possui polos próximos aos limites da região de instabilidade.

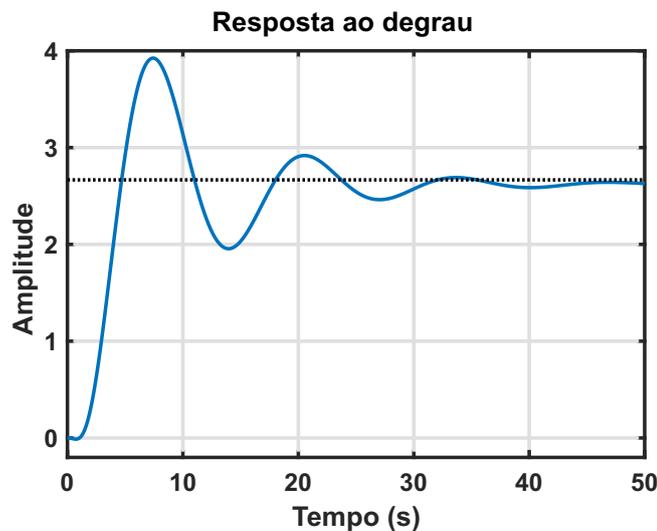


Figura 13 – Resposta ao degrau para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN *et al.* (2009).

Os próximos passos traçam, respectivamente: o diagrama de Bode, o gráfico de Nyquist e a carta de Nichols para $G(s)$. Que podem ser vistos nas Figuras 14, 15 e 16.

E, por acreditar que o sistema apresentava um número muito grande de polos e poderia ser simplificado apenas arredondando a ordem fracionária dos operadores de Laplace (s) para apenas uma casa decimal, fez-se:

$$G_s(s) = \frac{-2s^{0,6} + 4}{2s^{3,5} + 3,8s^{2,4} + 2,6s^{1,8} + 2,5s^{1,3} + 1,5} \quad (3.40)$$

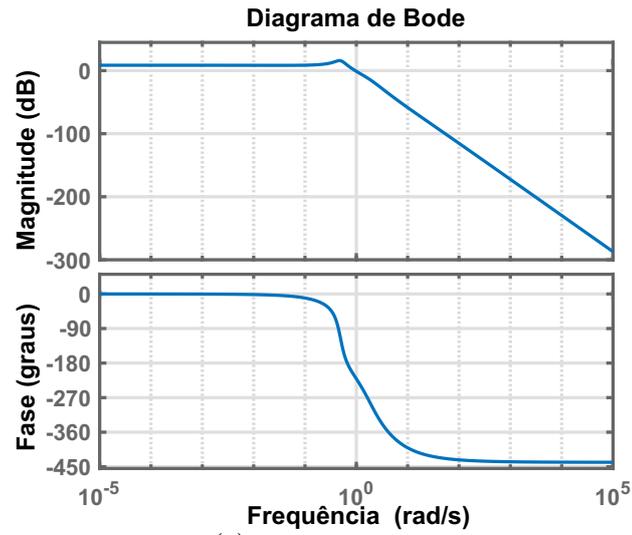


Figura 14 – Diagrama de Bode para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN *et al.* (2009).

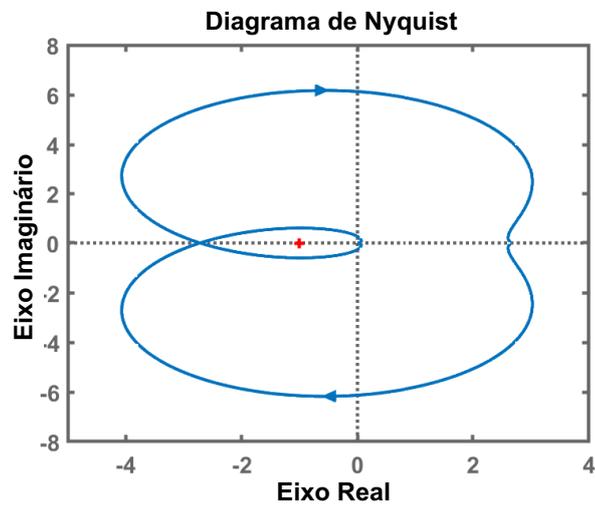


Figura 15 – Gráfico de Nyquist para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN *et al.* (2009).

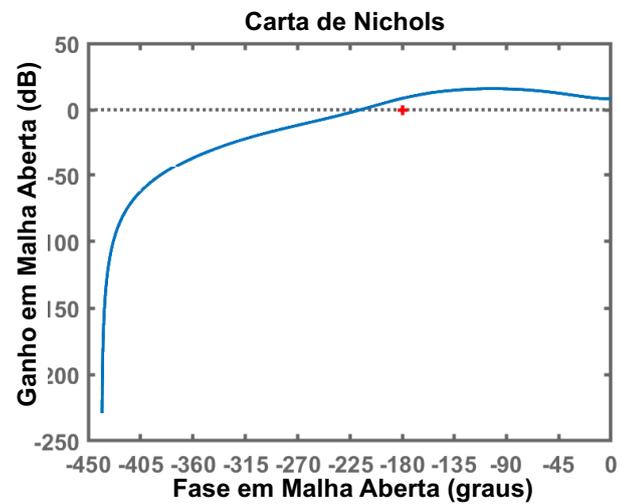


Figura 16 – Carta de Nichols para $G(s)$. Fonte: Adaptado de CHEN *et al.* (2009).

O que resultou num sistema com menos polos, pois a ordem N do polinômio característico passou a ser 3,5 e $q = 0,1$. Assim, pode-se contabilizar 35 polos no total, como é mostrado na Figura 17.

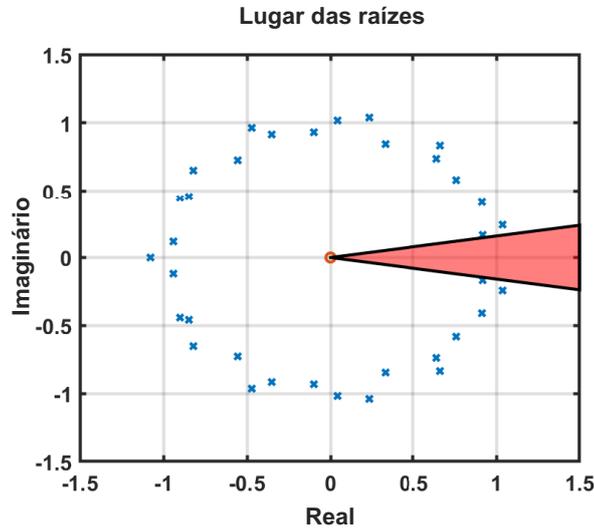


Figura 17 – Apresentação de polos de $G_s(s)$ no plano cartesiano. Fonte: o Autor.

No entanto, também é visível o crescimento da região de instabilidade, uma vez que, agora, $q = 0,1$ e o ângulo de abertura desta região é dada por $\frac{0,1 * \pi}{2}$, ou seja, quase 10 graus (9 graus).

A resposta ao degrau do sistema simplificado sobreposta à resposta do sistema original (Figura 18) demonstra que não houve significativas alterações na dinâmica do sistema.

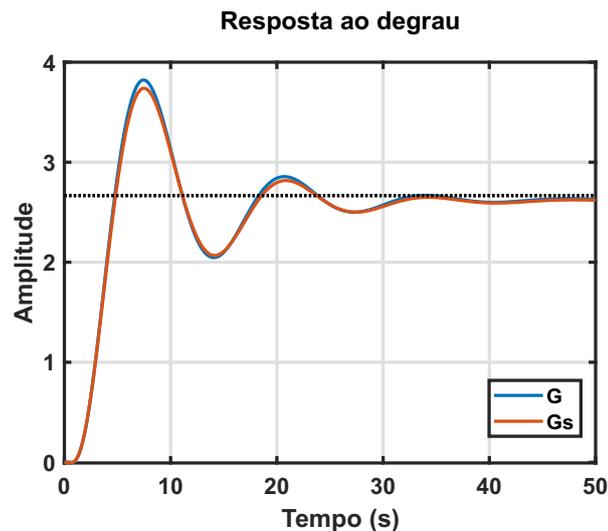


Figura 18 – Respostas ao degrau para $G(s)$ e $G_s(s)$. Fonte: o Autor.

Ressalta-se a importância de se trabalhar com $q \approx 0,1$, pois para q muito reduzido, obtém-se sistemas equivalentes com muitos polos e isso influencia não só o desempenho de

simulações em hardware menos robustos, mas também no desenvolvimento de controladores, principalmente se técnicas de "cancelamento" de polos forem utilizadas para a sintonia. Além disso, este exemplo mostra que um sistema fracionário pode ter sua dinâmica perfeitamente representada quando se utiliza $q \approx 0,1$.

Por outro lado, se fosse decidido arredondar a ordem fracionária dos operadores de Laplace (s) para que o sistema $G(s)$ se tornasse um sistema de ordem inteira, poderia-se fazer:

$$G_d(s) = \frac{-2s + 4}{2s^4 + 3,8s^3 + 2,6s^2 + 2,5s + 1,5} \quad (3.41)$$

A resposta ao degrau do sistema mostrado na Equação (3.41) sobreposta à resposta do sistema original (3.41) e à resposta do sistema fracionário simplificado (3.40) pode ser vista na Figura 19 e demonstra que, ao se retirar a característica fracionária da função de transferência, o sistema torna-se instável. A Figura 20 explica isto ao expor a localização dos polos do sistema representado pela Equação (3.41), que possui $q = 1$ e, portanto, precisa ter todos os polos no semi-plano esquerdo para garantir a sua estabilidade.

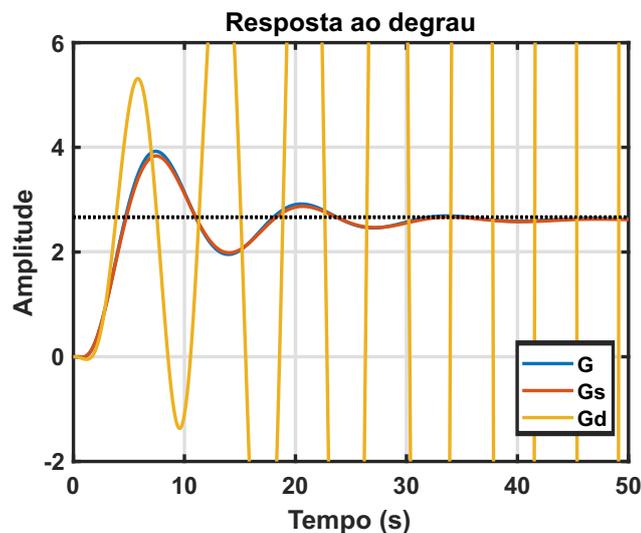


Figura 19 – Respostas ao degrau para $G(s)$, $G_s(s)$ e $G_d(s)$. Fonte: o Autor.

O capítulo a seguir trará conceitos e exemplos de controladores de ordem fracionária.

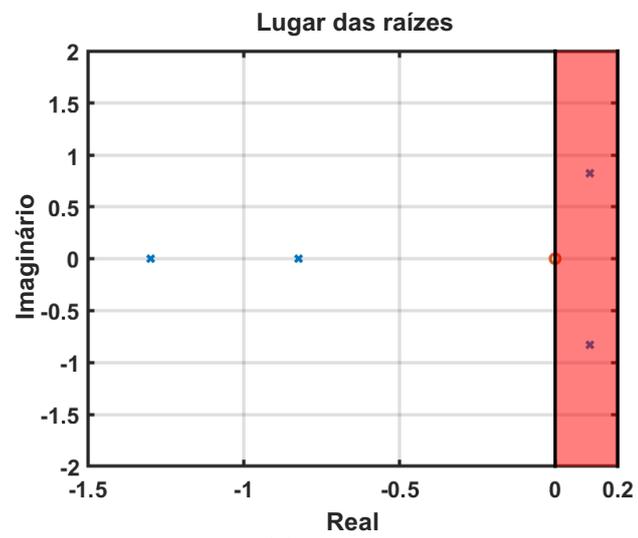


Figura 20 – Apresentação de polos de $G_d(s)$ no plano cartesiano. Fonte: o Autor.

4 CONTROLE DE ORDEM FRACIONÁRIA

As primeiras tentativas de aplicar derivada de ordem fracionária ao controle de sistemas podem ser encontradas em MANAGE (1961), AXTELL e BISE (1990), OUSTALOUP (1983), podendo-se citar três outros controladores representativos de ordem fracionária da literatura que serão brevemente introduzidos: o controlador TID (Tilted Integral Derivative), o controlador CRONE e o compensador fracionário Lead-Lag.

No entanto, é o controlador PID de ordem fracionária - FOPID, proposto primeiramente por Podlubny (PODLUBNY *et al.*, 1997; PODLUBNY, 1999b) que receberá maior destaque neste capítulo. Incluindo o projeto de controladores para sistemas não-lineares e instáveis. Além disso, o capítulo aborda um método para aplicar a dinâmica de ordem fracionária a malhas de controle industriais já existentes, permitindo que se aumente a performance de controladores já instalados sem modificar a malha. Por fim um método de auto-tuning é apresentado.

4.1 Controlador TID

O TID (LURIE, 1994) é um sistema de controle retroalimentado do tipo PID, em que o componente proporcional do compensador é substituído por um componente inclinado tendo uma função de transferência $K_t s^{(-1/n)}$. Pode ser melhor visualizado na Equação (4.1).

$$G_c(s) = \frac{K_t}{s^{1/n}} + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (4.1)$$

A função de transferência resultante de todo o compensador se aproxima mais de uma função de transferência de loop ideal, obtendo assim melhor desempenho de controle de realimentação. Além disso, em comparação com os compensadores PID convencionais, o compensador TID permite um ajuste mais simples, melhor rejeição de perturbações e efeitos menores das variações dos parâmetros da planta na resposta em malha fechada.

O objetivo do TID é fornecer um compensador retroalimentado aprimorado com as vantagens do compensador PID convencional, mas fornecendo uma resposta mais próxima da resposta teoricamente ideal.

4.2 Controlador CRONE

O controlador CRONE foi proposto por Oustaloup em busca da robustez fractal, que segundo OUSTALOUP *et al.* (1995), foi baseado na observação de que o comportamento do amortecimento nos poros de um dique é independente da massa de água em movimento, na qual as raízes conjugadas do sistema podem ser deslocadas no semiplano negativo da carta de Nichols, sempre mantendo ângulo fixo. CRONE é uma abreviatura em francês de “Control Robuste d’Ordre Non Entier” (que significa Controle Robusto de Ordem Não Inteira).

Há uma série de aplicações reais do controlador CRONE, entre os quais destacam-se o controle de suspensão do carro (OUSTALOUP *et al.*, 1996), a transmissão flexível (OUSTALOUP *et al.*, 1995) e o atuador hidráulico (LANUSSE *et al.*, 2000). O controlador CRONE evoluiu para uma poderosa ferramenta de projeto de controle não-convencional com um toolbox do MATLAB dedicado a ele (OUSTALOUP *et al.*, 2000). Mais de talhes podem ser encontrados em (OUSTALOUP *et al.*, 2000) e nas referências nele contidas.

4.3 Compensador fracionário Lead-Lag

Até agora, os controladores fracionários mostrados nesta seção estão diretamente relacionados ao uso de uma derivada ou integral de ordem fracionária. É possível estender o compensador Lead-Lag clássico ao caso de ordem fracionária (mostrado em RAYNAUD e ZERGAÏNOH (2000), MONJE *et al.* (2005)).

Em geral, o compensador fracionário de Lead-Lag (FOLLIC) é dado por:

$$C_r(s) = C_0 \left(\frac{1 + s/\omega_b}{1 + s/\omega_h} \right)^r \quad (4.2)$$

onde $0 < \omega_b < \omega_h$, $C_0 > 0$ e $0 < r < 1$.

Em MONJE *et al.* (2005), é mostrado o caso em que o FOLLIC é utilizado para controlar um servoposicionador. Uma técnica de autotuning do lead-lag pode ser vista no mesmo trabalho e demonstra a utilização de um teste a relé para aquisição de dados da planta a ser controlada.

4.4 Controle PID de ordem fracionária - FOPID

A noção de controlador PID de ordem fracionária foi introduzida por Podlubny em PODLUBNY *et al.* (1997), PODLUBNY (1999b). Este controlador é chamado por ele de

$PI^\lambda D^\mu$, com o integrador de ordem λ e o derivador de ordem μ . Neste trabalho, este controlador será chamado de controlador FOPID ("Fractional Order PID").

Podlubny demonstra que o PID de ordem fracionária oferece desempenho superior quando comparado ao PID convencional, de ordem inteira, principalmente quando a planta a ser controlada possui um modelo com função de transferência de ordem fracionária. Em estudos mais recentes (CECH; SCHLEGEL, 2006; LUO; CHEN, 2009), foi confirmado que o controlador fracionário supera o controlador convencional de maneira geral.

No domínio da frequência, a forma paralela do controlador FOPID é dada por:

$$C_{FOPID}(s) = K_p + K_i s^{-\lambda} + K_d s^\mu \quad (4.3)$$

Obviamente, se $\lambda = \mu = 1$, tem-se o controlador PID convencional de ordem-inteira.

Já que esse trabalho apresentará algumas aproximações, é importante implementar o integrador de ordem fracionária como sendo:

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\lambda} = \frac{s^{1-\lambda}}{s} \quad (4.4)$$

para $\lambda < 1$, pois isso garante o efeito de um integrador de ordem fracionária para baixas frequências e aumenta a velocidade de convergência da saída controlada para o valor final (MONJE *et al.*, 2010).

Além disso, apresenta-se brevemente a seguir os efeitos de integração (Figura 21) e derivação de ordem fracionária (Figura 21).

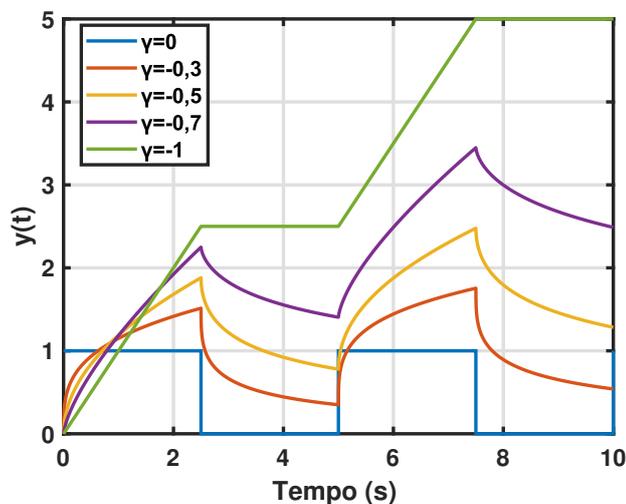


Figura 21 – Integrador fracionário para diferentes valores de s^γ . Fonte: adaptado de MONJE *et al.* (2010).

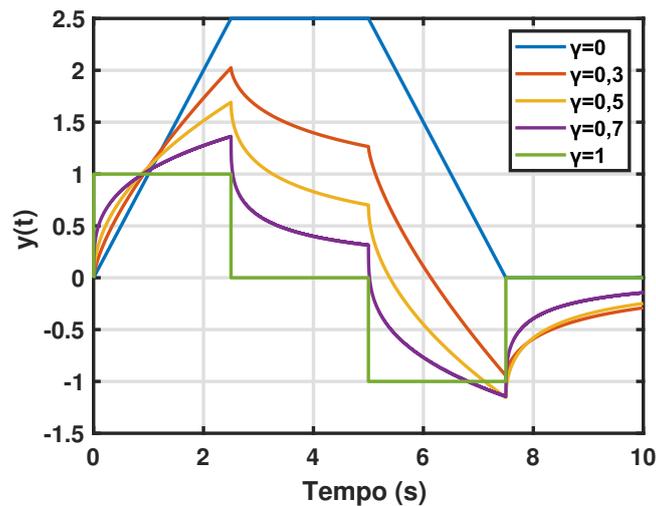


Figura 22 – Derivador fracionário para diferentes valores de s^γ . Fonte: adaptado de MONJE *et al.* (2010).

Se forem observados os efeitos no diagrama de frequência (Diagrama de Bode) de um sistema com PID de ordem inteira ($K_p = K_i = K_d = 1$) e o mesmo sistema com um FOPID ($K_p = K_i = K_d = 1, \lambda = \mu = 0,5$, pode-se perceber:

- Uma mudança constante na inclinação da curva de magnitude que varia de $-20dB/dec$ e $20dB/dec$.
- Um atraso constante no gráfico de fase que varia entre $-\pi/2rad$ e $\pi/2rad$.

Isto pode ser evidenciado na Figura 23:

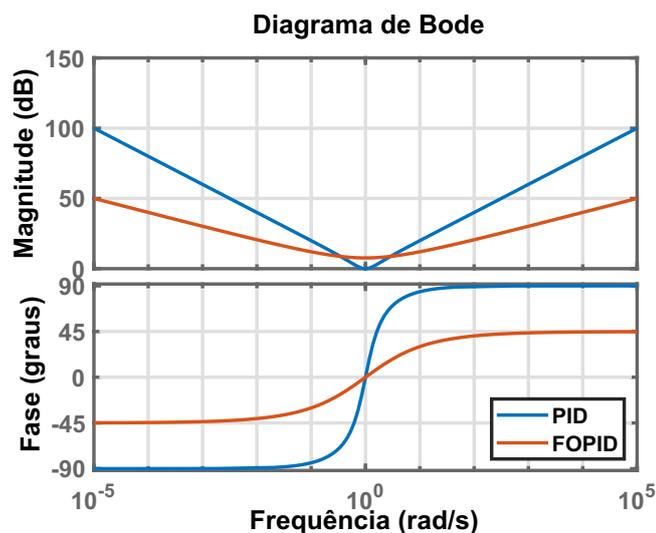


Figura 23 – Diagrama de Bode da resposta de um sistema controlado por PID convencional e FOPID. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017).

Pela Figura 23 pode-se perceber que, introduzindo as potências fracionárias λ e μ (no exemplo, $\lambda = \mu = 0,5$), introduz-se também uma flexibilidade adicional no ajuste dos

controladores, de maneira a atender especificações de projetos mais arrojadas.

4.5 Sintonia de controladores FOPID

Há vários aspectos que devem ser levados em consideração quando se deseja sintonizar um controlador PID fracionário, como por exemplo:

- O tipo da planta a ser controlada;
- O critério de otimização;
- As especificações do FOPID
- Quais os parâmetros a serem otimizados;
- A seleção dos valores iniciais para posterior otimização desses parâmetros.

Uma maneira de se projetar ou ajustar um PID de ordem fracionária é utilizar uma das várias técnicas já consolidadas para ajustar um PID de ordem inteira e, depois inserir os parâmetros λ e μ para realiar um "ajuste fino" que atenda melhor à dinâmica do sistema a ser controlado.

Assim, pode-se considerar um sistema genérico da forma:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), y = h(x(t)) \quad (4.5)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $f(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e um controlador FOPID da forma paralela dado por:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \mathcal{D}^{-\lambda} e(t) + K_d \mathcal{D}^{\mu} e(t) \quad (4.6)$$

onde $e(t) = r(t) - y(t)$ é o sinal de erro e $r(t)$ é o sinal de referência para o controlador. O problema de sintonia do controlador no domínio do tempo pode ser interpretado como o problema de minimização de $e(t)$. Vários métodos de resolução deste problema podem ser considerados, tais como (ASTROM; HÄGGLUND, 2006):

- Integral do quadrado do erro (*Integral Square Error - ISE*):

$$ISE = \int_0^t e^2(t) dt \quad (4.7)$$

- Integral absoluta do erro (*Integral Absolute Error - IAE*):

$$IAE = \int_0^t |e(t)| dt \quad (4.8)$$

- Integral do quadrado do erro ponderado pelo tempo (*Integral Time-Square Error - ITSE*):

$$ITSE = \int_0^t t e(t)^2 dt \quad (4.9)$$

- Integral absoluta do erro ponderado pelo tempo (*Integral Time-Absolute Error - ITAE*):

$$ITAE = \int_0^t t|e(t)|dt \quad (4.10)$$

Para garantir a estabilidade e a robustez do sistema, pode-se também inserir algumas especificações no domínio da frequência. Para isso, pode-se supor que exista uma aproximação linear para o sistema mostrado em (4.5) em torno de um ponto dado por (u_0, y_0) , que descreve o comportamento dinâmico do sistema de maneira satisfatória e é dado por uma função de transferência $G_p(s)$ da forma da Equação (3.14). Então, pode-se impor as especificações a seguir (MONJE *et al.*, 2010), considerando análises realizadas no domínio da frequência do sistema de malha aberta dado por $F(j\omega) = C(j\omega)G_p(j\omega)$, onde $C(j\omega)$ é o controlador FOPID:

- Margem de ganho A_m , onde:

$$A_m = 1 - |F(j\omega_g)|, \arg(F(j\omega_g)) = -\pi \quad (4.11)$$

- Margem de fase φ_m e frequência de corte ω_c , onde:

$$\arg(F(j\omega_c)) = -\pi + \varphi_m, |F(j\omega_c)| = 1 \quad (4.12)$$

- Robustez à variação de ganho da planta:

$$\left. \frac{d \arg(F(j\omega))}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = 0 \quad (4.13)$$

- Rejeição de ruído de alta frequência com atenuação de A dB na função de sensibilidade:

$$\left| T(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} \right|_{dB} \leq A \text{ dB} \quad (4.14)$$

para todas as frequências $\omega \geq \omega_t$ rad/s.

- Rejeição de perturbações com restrição B dB na função de sensibilidade:

$$\left| S(j\omega) = \frac{1}{1 + F(j\omega)} \right|_{dB} \leq B \text{ dB} \quad (4.15)$$

para todas as frequências $\omega \leq \omega_s$ rad/s.

O problema de otimização pode ser formulado como sendo (TEPLJAKOV, 2017):

$$\min_{\theta_c} J_c(\cdot) \quad (4.16)$$

onde ω_c é o conjunto de parâmetros do controlador FOPID dado por:

$$\theta_c = \left[K_p \quad K_i \quad K_d \quad \lambda \quad \mu \right] \quad (4.17)$$

e $J_c(\cdot)$ é uma função custo que inclui as especificações tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo. Alguns problemas de otimização adicionais podem ser formulados fixando-se alguns dos parâmetros da Equação (4.17), como por exemplo, os ganhos K_p , K_d e K_i . Além disso, alguns problemas práticos podem impor restrições ao sinal de controle. Estas restrições podem ser impostas na forma:

$$u(t) \in [u_{min}, u_{max}] \quad (4.18)$$

Embora existam vários métodos de otimização, neste trabalho utilizar-se-á o método de otimização simplex de NELDER e MEAD (1965), explicado na subseção 4.5.1, a seguir.

4.5.1 Método de otimização de Nelder-Mead

O método de NELDER e MEAD (1965) possui algumas características que podem ser exploradas quando utilizado para estimar os parâmetros de um controlador FOPID, tais como (LAGARIAS *et al.*, 1998):

- Este método geralmente retorna valores de parâmetros com melhoria de desempenho em aplicações industriais já nas primeiras iterações;
- Implementação relativamente simples, incluindo aplicações em sistemas embarcados.

O método é utilizado para resolver problemas do tipo:

$$\min_x F(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (4.19)$$

Trata-se de um método de busca direta e, segundo WRIGHT (1995), sua utilização apresenta resultados satisfatórios para otimização de funções cujas derivadas são desconhecidas ou inexistentes.

Primeiramente, um diagrama simplex é construído a partir da determinação de $n + 1$ vértices (Figura 24) com valores correspondentes de F . A k ésima iteração segue os passos:

1. **Ordenar.** Ordene os $n + 1$ vértices, de maneira que $F(x_1) \leq F(x_2) \leq \dots \leq F(x_{n+1})$.
2. **Refletir.** Calcule o ponto de reflexão x_r dado por:

$$x_r = \bar{x} + \rho(\bar{x} - x_{n-1}) \quad (4.20)$$

onde \bar{x} é o centróide dos n vértices otimizados dado por:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (4.21)$$

Avalie $F_r = F(x_r)$. Se $F_1 \leq F_r < F_n$, faça $x_{n+1} = x_r$ e termine a iteração.

3. **Expandir.** Se $F_r < F_1$, calcule o ponto de expansão dado por:

$$x_e = \bar{x} + \chi(x_r - \bar{x}) \quad (4.22)$$

Avalie agora $F_e = F(x_e)$. Se $F_e < F_r$, faça $x_{n+1} = x_e$ e termine a iteração. Senão, faça $x_{n+1} = x_r$ e termine a iteração.

4. **Contrair.** Se $F_r \geq F_n$, faça uma contração entre \bar{x} e o melhor valor avaliado entre x_{n+1} e x_r . Das seguintes maneiras:

(a) **Contrair externamente.** Se $F_n \leq F_r < F_{n+1}$, calcule:

$$x_c = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x}) \quad (4.23)$$

Avalie $F_c = F(x_c)$. Se $F_c \leq F_r$, faça $x_{n+1} = x_c$ e termine a operação. Senão, continue para o passo 5.

(b) **Contrair internamente.** Se $F_r \geq F_{n+1}$, calcule:

$$x'_c = \bar{x} + \gamma(\bar{x} - x_{n+1}) \quad (4.24)$$

Avalie $F'_c = F(x'_c)$. Se $F'_c < F_{n+1}$, faça $x_{n+1} = x'_c$ e termine a operação. Senão, continue para o passo 5.

5. **Encolher.** Defina n novos vértices a partir de:

$$x_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1), i = 2, \dots, n+1 \quad (4.25)$$

Avalie F novamente nestes pontos.

No algoritmo descrito acima, quatro coeficientes escalares são utilizados: reflexão (ρ), expansão (χ), contração (γ) e encolhimento (σ). De acordo com NELDER e MEAD (1965), estes coeficientes devem satisfazer:

$$\rho > 0, \chi > 1, 0 < \gamma < 1, 0 < \sigma < 1 \quad (4.26)$$

Originalmente, o algoritmo proposto por Nelder-Mead foi desenvolvido para resolver problemas de otimização sem restrições ou limites. No entanto, Gill *et al.* (1981) mostram que é possível inserir estas condições em termos de transformações de coordenadas e funções de penalidade.

Assim, se x for um vetor de variáveis de busca de tamanho $N \times 1$. Para restrições de limite, uma transformação de coordenadas devem ser aplicadas em cada variável de busca.

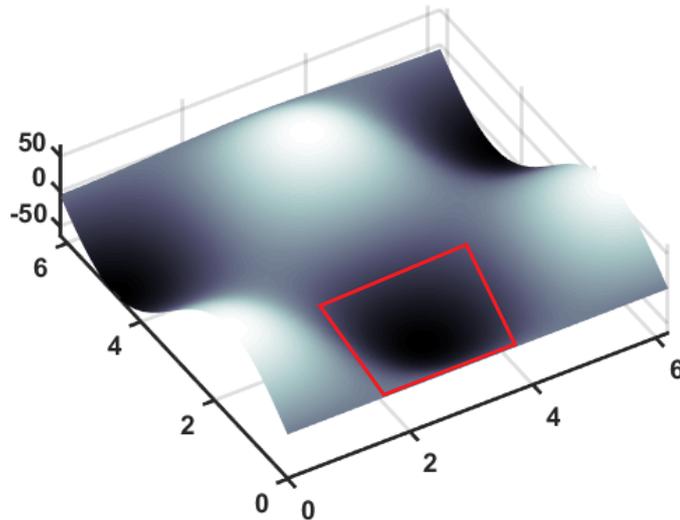


Figura 24 – Exemplo de polígono (destacado em vermelho) com os vértices do simplex. Fonte: o Autor.

Faz-se x_i^L e x_i^U os limites inferior e superior, respectivamente, i o parâmetro de busca e z o novo vetor de busca. Tomando $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como uma função de transformação, tal que $x = \varphi z$ e $z = \varphi^{-1}x$.

Para problemas com limite inferior, faz-se:

$$x_i = x_i^L + z_i^2 \quad (4.27)$$

daí segue que $x_i \geq x_i^L$, desde que $z_i^2 \geq 0$. Estimativas iniciais $z_{i,0}$ são obtidas a partir de $x_{i,0} \geq x_i^L$ através de:

$$z_{i,0} = \sqrt{x_{i,0} - x_i^L} \quad (4.28)$$

Para problemas com limite superior, faz-se:

$$x_i = x_i^U - z_i^2 \quad (4.29)$$

daí segue que $x_i \leq x_i^U$, desde que $-z_i^2 \leq 0$. Estimativas iniciais $z_{i,0}$ são obtidas a partir de $x_{i,0} \leq x_i^U$ através de:

$$z_{i,0} = \sqrt{x_i^U - x_{i,0}} \quad (4.30)$$

Finalmente, se o problema possui tanto limites inferior e superior, pode-se fazer (GILL *et al.*, 1981):

$$x_i = x_i^L + (x_i^U - x_i^L) \frac{\sin(z_i) + 1}{2} \quad (4.31)$$

onde $x_i^L \leq x_i \leq x_i^U$, pois os valores da função $f(z_i) = \frac{\sin(z_i)+1}{2}$ estão sempre dentro do intervalo $[0, 1]$ e x_i obedece as relações $f(z_i) = 0 \Rightarrow x_i = x_i^L$ e $f(z_i) = 1 \Rightarrow x_i = x_i^U$.

Assim, para obter as estimativas iniciais neste último caso, faz-se:

$$z_{i,0} = \Re \left(\arcsin \left(\frac{-2x_{i,0} + x_i^L + x_i^U}{x_i^L - x_i^U} \right) \right) \quad (4.32)$$

onde $\Re(\cdot)$ representa a parte real.

Para problemas com outros tipos de restrições, faz-se necessário alterar a função custo da seguinte maneira:

$$\kappa(\cdot) = \kappa^* \quad (4.33)$$

onde κ^* é a função custo original. Assim, define-se uma função $f_{nz} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de modo que:

$$f_{nz}(x) := \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

Define-se, também, uma função de penalidade $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\rho(x) := \begin{cases} e^\gamma - 1 + x, & x > \gamma \\ e^x - 1, & x \leq \gamma \end{cases} \quad (4.35)$$

onde $\gamma > 0$ é uma variável predefinida.

Então, para restrições de desigualdade não lineares da forma $c^{ni} \leq 0$, onde $c^{ni} : \mathbb{R}^{q \times r} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{ni} \times M_{ni}}$, pode-se definir a função de penalidade $\kappa^{ni} : \mathbb{R}^{N_{ni} \times M_{ni}} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\kappa^{ni}(c^{ni}(\cdot)) := \rho(c_\Sigma^{ni}(\cdot)) \quad (4.36)$$

onde:

$$c_\Sigma^{ni}(\cdot) = \sum_{i=1}^{N_{ni}} \sum_{k=1}^{M_{ni}} f_{nz}(c_{i,k}^{ni}(\cdot)) \quad (4.37)$$

Logo, para restrições de igualdade não lineares da forma $c^{ne}(\cdot) \leq 0$, onde $c^{ne} : \mathbb{R}^{q \times r} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{ne} \times M_{ne}}$, define-se a função de penalidade $\kappa^{ne} : \mathbb{R}^{N_{ne} \times M_{ne}} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo:

$$\kappa^{ne}(c^{ne}(\cdot)) := \rho(c_\Sigma^{ne}(\cdot)) \quad (4.38)$$

onde:

$$c_\Sigma^{ne}(\cdot) = \sum_{i=1}^{N_{ne}} \sum_{k=1}^{M_{ne}} f_{nz}(|c_{i,k}^{ne}(\cdot)|) \quad (4.39)$$

Para completar a função custo κ faz-se:

$$\kappa = \kappa^* + \kappa^{ni} + \kappa^{ne} \quad (4.40)$$

Deste modo e aplicando o método de NELDER e MEAD (1965), pode-se escrever J_c presente na Equação (4.16) como sendo:

$$J_c = J_m + J_p \quad (4.41)$$

onde J_m é calculado usando uma das métricas já vistas (ISE, IAE, ITSE ou ITAE) e J_p é a função de penalidade com as restrições não lineares, formada por soma ponderada de vários aspectos de projeto convertidos para o domínio da frequência. Geralmente, por causa das especificações da função custo J_c , um ponto ótimo local é encontrado e respeita as restrições de projeto. Com isso, o erro de controle $e(t)$ é minimizado. Esse comportamento pode ser atingido escolhendo-se corretamente os pesos para a métrica de desempenho, dadas pelas funções de penalidade (TEPLJAKOV *et al.*, 2014).

4.5.2 Estabilização de plantas instáveis

Nesta seção, um método proposto por TEPLJAKOV (2017) é mostrado, de maneira a estabilizar plantas com função de transferência $G_u(s)$ da forma mostrada na Equação (3.14). A intenção é fazer o sistema de malha fechada dado pela Equação (4.42) ser estável pela escolha adequada de parâmetros para o controlador $C(s)$ da forma (4.3).

$$G_{cl}(s) = \frac{C(s)G_u(s)}{1 + C(s)G_u(s)} = \frac{W(s)}{Q(s)} \quad (4.42)$$

De maneira de projetar este controlador, TEPLJAKOV (2017) propõe o uso de um sistema randômico para a determinação dos parâmetros, de modo que $K_p \in [K_p^l, K_p^u]$, $K_i \in [K_i^l, K_i^u]$, $K_d \in [K_d^l, K_d^u]$, $\lambda \in [\lambda^l, \lambda^u]$ e $\mu \in [\mu^l, \mu^u]$. Ou seja, é uma escolha randômica, mas dentro de intervalos pré-determinados. Ressalta-se que a escolha de λ e μ devem ser feitas para que a função de transferência do controlador resultante seja de ordem mensurável, pois isto aumenta a confiabilidade do teste de estabilidade (MONJE *et al.*, 2008). Segundo TEPLJAKOV (2017), pode-se utilizar uma ordem mensurável mínima de $q = 0,01$.

Se um ponto estável for encontrado, inicia-se o seguinte procedimento:

1. Dois dos parâmetros, diga-se (p_1, p_2) são variados enquanto que os outros parâmetros permanecem fixos.

2. Um número limitado de N passos é feito nas quatro direções a partir do ponto estável encontrado inicialmente. Cada passo possui largura pré-determinada Δp_1 e Δp_2 . Este método pode ser melhor visualizado na Figura 25. Os passos são listados a seguir:
 - (a) A cada iteração somente um parâmetro (p_1 ou p_2) é alterado.
 - (b) Se, em qualquer iteração, uma saída da malha de controle for detectada como instável ao degrau, então o valor anterior é armazenado como limite de estabilidade naquela direção.
 - (c) Enquanto isto não ocorre, todos os pontos dentro do retângulo $\Delta p_1 * N$ e $\Delta p_2 * N$ serão testados. Os testes são realizados utilizando o polinômio característico $Q(s)$ da Equação (4.42) e o Teorema de Estabilidade de Matignon, citado na seção 3.6.
3. Segundo (TEPLJAKOV, 2017), a região de estabilidade nem sempre pode apresentar uma forma retangular. Para determinar a forma do polígono, precisa-se testar todos os pontos dentro da região escolhida.

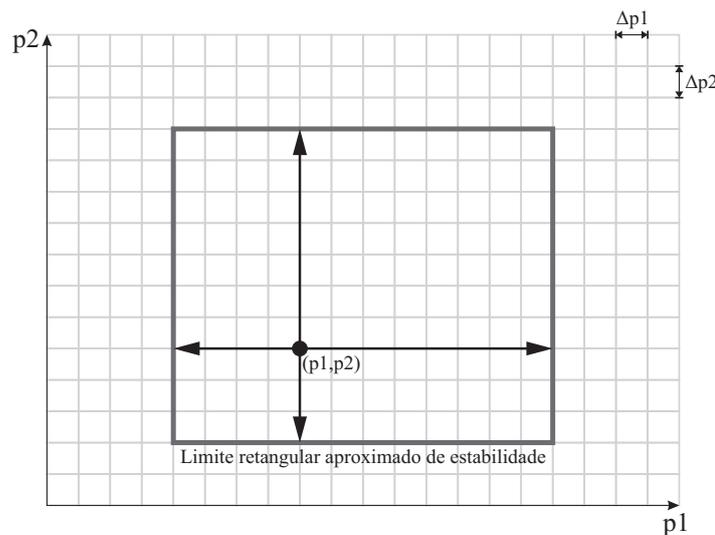


Figura 25 – Fronteira de estabilidade retangular para $G(s)$ controlado por um FOPID. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017).

Com o procedimento completo, pode-se obter os escopos de variação de todos os parâmetros do controlador FOPID, bastando repetir os passos para cada par de variáveis. Segundo TEPLJAKOV (2017), a otimização de dois parâmetros por vez é benéfico do ponto de vista de condicionamento do problema, mas pode tornar mais difícil satisfazer algumas restrições de projeto.

Um exemplo para facilitar o entendimento é proposto por TEPLJAKOV (2017), ele considera uma planta instável com a função de transferência fracionária dada pela Equação

(4.43):

$$G(s) = \frac{s^{0,34} + 0,79}{-2,7s^{1,37} + 0,35s^{0,19} + 1} \quad (4.43)$$

Utilizando o método descrito nesta seção, 10 conjuntos de parâmetros para um controlador FOPID foram escolhidos de maneira aleatória dentro dos seguintes intervalos: $K_p \in [-10, 10]$, $K_i \in [-10, 10]$, $K_d \in [-10, 10]$, $\lambda \in [0.2, 1.0]$ e $\mu \in [0.5, 1.0]$. E, considerando um conjunto destes que se mostrou estável (mostrado na Equação (4.44)), utilizou-se os parâmetros dele como ponto inicial de varredura.

$$\theta_c = [K_p \quad K_i \quad K_d \quad \lambda \quad \mu] = [-7,17 \quad -1,56 \quad -3,0702 \quad 0,9 \quad 0,71] \quad (4.44)$$

Produzindo a função de transferência dada por:

$$C(s) = -7,17 - 1,56s^{-0,9} - 3,0702s^{0,71} \quad (4.45)$$

E produz a seguinte resposta ao degrau (Figura 26):

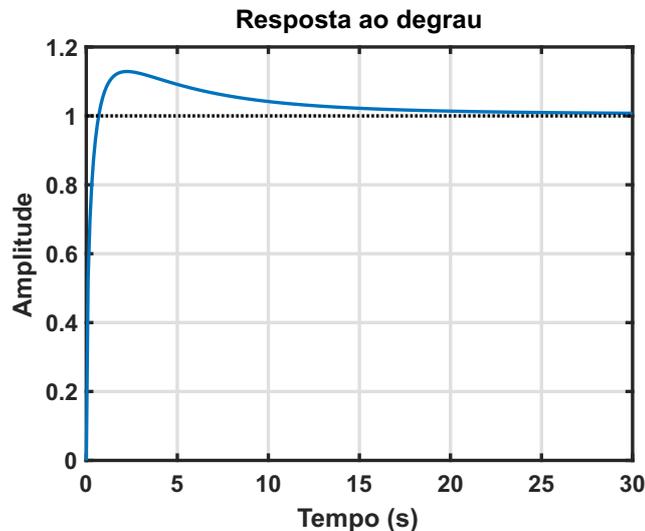


Figura 26 – Resposta ao sinal degrau em malha fechada para $H(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$. Fonte: o Autor.

Assim, a varredura foi feita obedecendo o comprimento dos passos de $\Delta p_1^g = \Delta p_2^g = 0,5$ para os ganhos K_p , K_i e K_d e $\Delta p_1^o = \Delta p_2^o = 0,05$ para as ordens λ e μ . A quantidade máxima de passos para os ganhos foi de $N^g = 20$ em cada direção e a de ordens foi de $N^o = 10$ em cada direção. Quatro pares de parâmetros foram considerados: (K_p, K_i) , (K_p, K_d) , (K_i, K_d) e (λ, μ) . Os resultados da varredura podem ser vistos na Figura 27:

Pode-se ver na Figura 27 que as regiões de (K_p, K_i) e (K_p, K_d) não têm a forma retangular, o que deve ser levado em consideração quando for feito a sintonia do controlador.

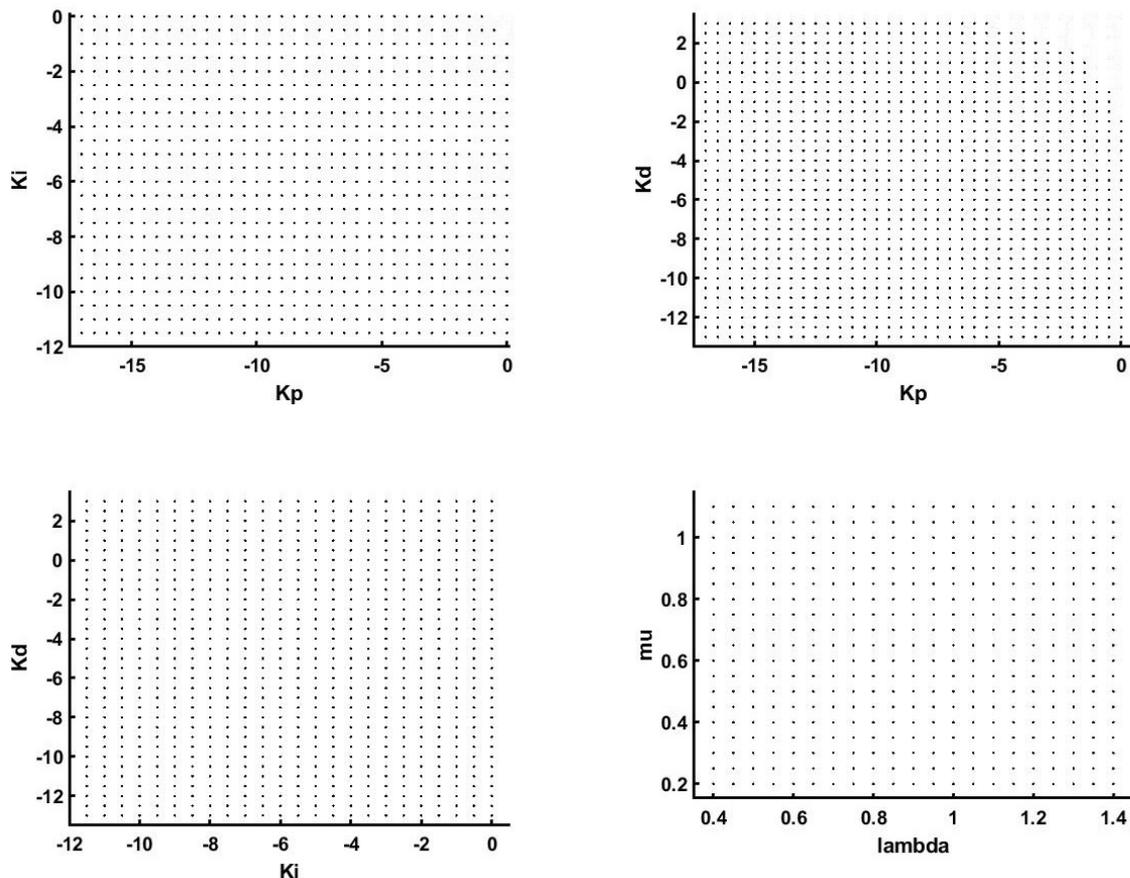


Figura 27 – Determinação das regiões de estabilidade para os parâmetros do controlador FOPID. Fonte: adaptado de TEPLJAKOV (2017).

Nota-se também, que o número de passos N^s e N^o pode ter sido insuficiente para explorar todas as possibilidades de estabilidade e, por isso, a maior parte das regiões de estabilidade permaneceu retangular.

4.6 Procedimento clássico para sintonia de controladores FOPID

Há na literatura (MONJE *et al.*, 2010; TEPLJAKOV, 2017; DE KEYSER *et al.*, 2016; DE KEYSER *et al.*, 2018) um método bastante difundido para a sintonia do controlador FOPID que consiste em:

1. Calcular os parâmetros para um controlador FOPI de acordo com algumas características do sistema a ser controlado;
2. Buscar heurísticamente os parâmetros de K_d e μ , com técnicas semelhantes a que foi mostrada na seção 4.5.2.

O método começa com as especificações de desempenho no domínio da frequência mostradas a seguir:

1. Frequência da margem de ganho ω_{gc} : é relacionada com o tempo de acomodação do sistema de malha fechada e é utilizada como um importante parâmetro de ajuste do controlador (DE KEYSER *et al.*, 2016). Segundo ASTROM e HÄGGLUND (2006), uma alta frequência da margem de ganho resultará em um pequeno tempo de acomodação de malha fechada. Para o sistema garantir a uma boa frequência da margem de ganho, a seguinte condição precisa ser satisfeita:

$$|H_{malha-aberta}(j\omega_{gc})| = 1 \quad (4.46)$$

onde $H_{malha-aberta}(s)$ é dada por: $P(s).C_{FOPI}(s)$ e $P(s)$ é a função de transferência da planta a ser controlada e $C_{FOPI}(s)$ é a função de transferência do controlador PI de ordem fracionária tal qual mostrado em (4.49).

2. Margem de fase ϕ_m : é uma importante medida para a estabilidade do sistema e, também um indicador para o nível de sobressinal do sistema em malha fechada (DE KEYSER *et al.*, 2016). Geralmente, um valor entre 45° e 65° pode ser utilizado como uma margem de fase adequada. A equação que garante uma determinada margem de fase é mostrada na Equação 4.47:

$$\angle H_{malha-aberta}(j\omega_{gc}) = -\pi + \phi_m \quad (4.47)$$

3. Propriedade de amortecimento: esta condição garante que o sistema seja mais robusto durante mudanças de ganho e o sobressinal da resposta é quase constante dentro de uma região de ganhos. Para garantir um sobressinal constante, uma constante margem de fase precisa ser mantida o que, por último, implica que a fase do sistema de malha aberta precisa ser constante e próxima à especificada ω_{gc} . Assim:

$$\left. \frac{d(\angle H_{malha-aberta}(j\omega_{gc}))}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{gc}} = 0 \quad (4.48)$$

Portanto, considerando a função de transferência de um controlador FOPI como mostrado na Equação (4.49):

$$C_{FOPI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} \quad (4.49)$$

e fazendo $s = j\omega$, tem-se que:

$$C_{FOPI}(j\omega) = K_p + \frac{K_i}{(j\omega)^\lambda} \quad (4.50)$$

se $(j\omega)^\lambda = e^{j\frac{\pi\lambda}{2}} \omega^\lambda = \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) + j\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)$, tem-se que:

$$C_{FOPI}(j\omega) = K_p \left[1 + K_i \omega^{-\lambda} \left(\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \right) \right] \quad (4.51)$$

As equações correspondentes ao módulo e fase de (4.51) são, respectivamente (DE KEYSER *et al.*, 2016):

$$|C_{FOPI}(j\omega)| = K_p \sqrt{1 + 2K_i \omega^{-\lambda} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) + K_i^2 \omega^{-2\lambda}} \quad (4.52)$$

$$\angle C_{FOPI}(j\omega) = -\arctan\left(\frac{K_i \omega^{-\lambda} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}{1 + K_i \omega^{-\lambda} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}\right) \quad (4.53)$$

Então, as relações (4.46), (4.47) e (4.48) podem ser reescritas como:

$$K_p \sqrt{1 + 2K_i \omega_{gc}^{-\lambda} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) + K_i^2 \omega_{gc}^{-2\lambda}} = \frac{1}{|P(j\omega_{gc})|} \quad (4.54)$$

$$\frac{K_i \omega_{gc}^{-\lambda} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}{1 + K_i \omega_{gc}^{-\lambda} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)} = \tan(\pi - \phi_m + \angle P(j\omega_{gc})) \quad (4.55)$$

$$\frac{\lambda K_i \omega_{gc}^{-\lambda-1} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}{1 + 2K_i \omega_{gc}^{-\lambda} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) + K_i^2 \omega_{gc}^{-2\lambda}} + \frac{d\angle P(j\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_{gc}} = 0 \quad (4.56)$$

Segundo DE KEYSER *et al.* (2016), DE KEYSER *et al.* (2018), para ajustar os parâmetros do controlador FOPI, o sistema de equações não lineares mostrados em (4.54), (4.55) e (4.56) precisa ser resolvido usando técnicas de otimização ou por métodos gráficos. Para as técnicas de otimização, pode-se utilizar a técnica de NELDER e MEAD (1965), como citado na seção 4.5.1, onde a Equação (4.54) seria a função custo e as restrições não lineares seriam representadas pelas Equações (4.55) e (4.56).

4.7 Sintonia automática de controladores FOPID

Como mencionado na seção 4.6, de maneira a ajustar o controlador PI, deve-se conhecer algumas características do sistema a ser controlado.

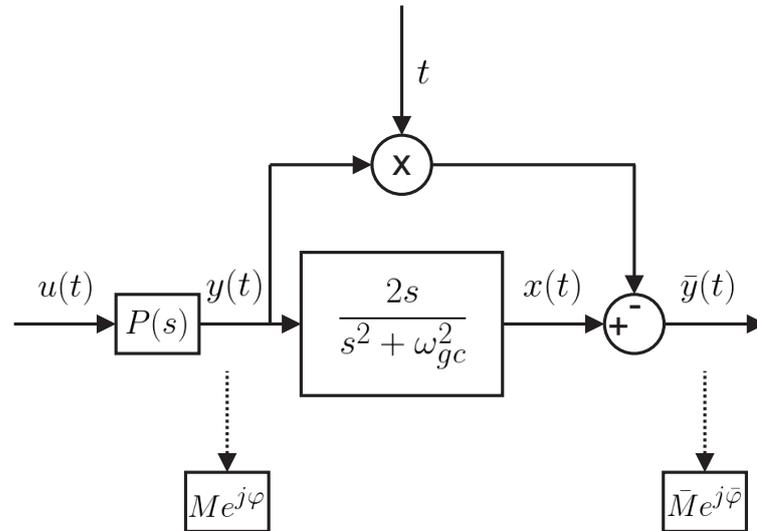


Figura 28 – Técnica de auto-tuning proposta por DE KEYSER *et al.* (2016). Fonte: adaptado de DE KEYSER *et al.* (2016).

De acordo com DE KEYSER *et al.* (2016), pode-se obter alguns parâmetros da planta se fizermos o sistema mostrado na Figura 28.

Se um sinal senoidal $u(t) = A_i \sin \omega_{gc} t$ como indicado na Figura 28 for aplicado na entrada do processo com função de transferência desconhecida, então os dados experimentais resultantes para o processo podem ser vistos em $y(t)$. A sua derivada ($\bar{y}(t)$) também será utilizada para determinar a magnitude, fase e frequência de margem de ganho ω_{gc} .

A Figura 29 mostra um exemplo de sobreposição de $u(t)$ e $y(t)$ com destaque para os dados obtidos. onde A_i é a amplitude do sinal senoidal de entrada, A_o é a amplitude do sinal

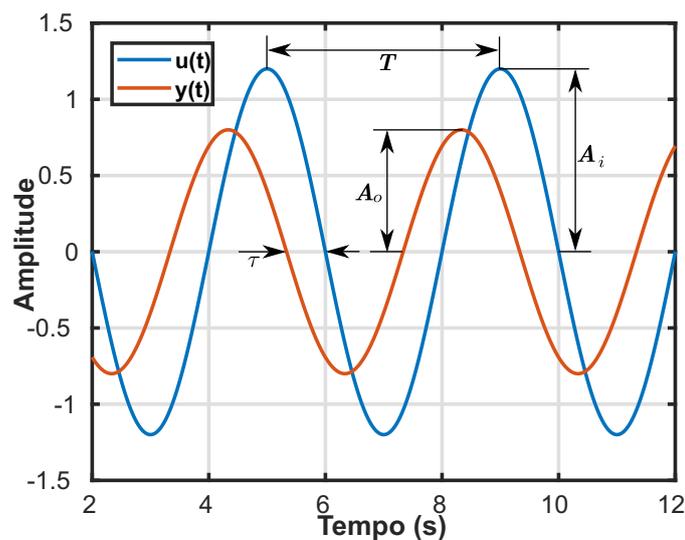


Figura 29 – Exemplo de sobreposição de sinais de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$. Fonte: adaptado de DE KEYSER *et al.* (2016).

senoidal de saída, T é o período do sinal senoidal de saída e τ é o atraso entre os sinais de entrada

e de saída.

Vale ressaltar que a escolha de ω_{gc} deve ser tal que possibilite a extração dos dados desejados para o sistema que se quer controlar. Em geral, ω_{gc} é a frequência onde a assíntota do gráfico do ganho de Bode faz a inflexão (como mostrado na Figura 30). O valor 0,1 rad/s costuma mostrar bons resultados. No entanto, deve-se observar as características dinâmicas do sistema a ser controlado, inclusive utilizando-se de métodos heurísticos para uma melhor seleção de ω_{gc} .

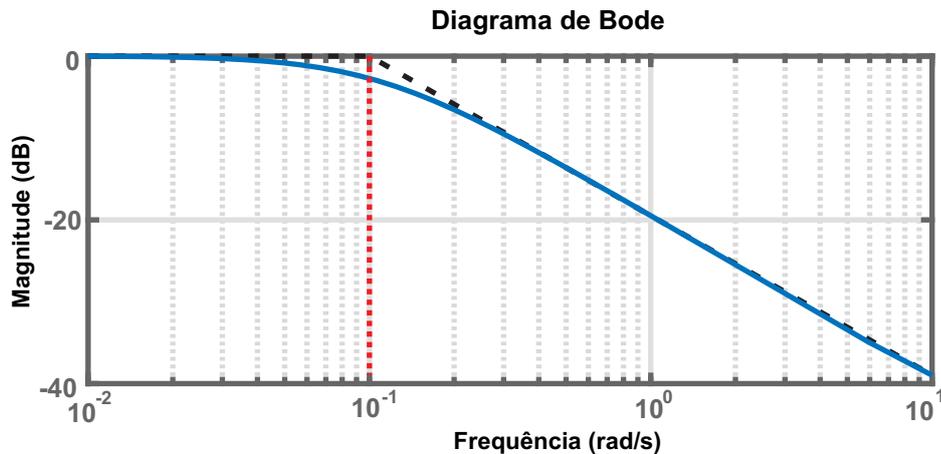


Figura 30 – Exemplo da escolha de ω_{gc} . Fonte: adaptado de DE KEYSER *et al.* (2016).

Então, a partir desses dados experimentais, pode-se obter a amplitude M e a fase ϕ do processo na frequência de teste como sendo:

$$M = |P(j\omega_{gc})| = \frac{A_o}{A_i} \quad (4.57)$$

$$\phi = \angle P(j\omega_{gc}) = \omega_{gc} \tau \quad (4.58)$$

No caso em que $u(t)$ e $\bar{y}(t)$ estão sobrepostos, a magnitude \bar{M} e a fase $\bar{\phi}$ podem ser obtidas:

$$\bar{M} = \frac{A_{\bar{y}}}{A_i} \quad (4.59)$$

$$\bar{\phi} = \omega_{gc} \tau_{\bar{y}} \quad (4.60)$$

Com isso, utilizando as Equações (4.57), (4.58), (4.59) e (4.60), pode-se obter a Equação (4.61):

$$\left. \frac{d\angle P(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{gc}} = \frac{\bar{M}}{M} \cos(\bar{\phi} - \phi) \quad (4.61)$$

Na subseção a seguir, será apresentado um exemplo para demonstrar melhor a técnica do auto-tuning.

4.7.1 Exemplo: processo de 1ª ordem com atraso

Para este exemplo, considerar-se-á o sistema dado pela função de transferência:

$$P(s) = \frac{1}{6s + 1} e^{-s} \quad (4.62)$$

As especificações de projeto são:

- Frequência de margem de ganho $\omega_{gc} = 0,1 \text{ rad/s}$;
- Margem de fase $\phi_m = 55^\circ$.

Assumindo que a função de transferência (mostrada na Equação (4.62)) é desconhecida, um sinal senoidal é aplicado de acordo com o diagrama mostrado na Figura 28. Os parâmetros deste sinal são:

- Amplitude unitária ($A_i = 1$);
- Frequência de teste $\omega = \omega_{gc} = 0,1 \text{ rad/s}$.

O sinal de entrada $u(t)$ sobreposto aos sinais de saída ($y(t)$ e $\bar{y}(t)$) podem ser vistos na Figura 31.

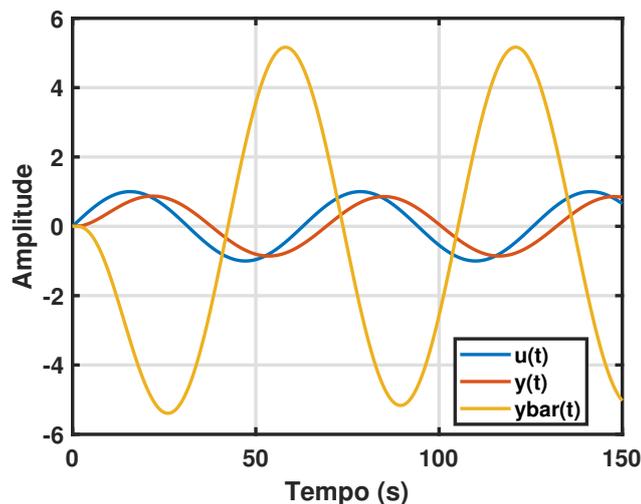


Figura 31 – Sobreposição dos sinais de entrada $u(t)$ e saídas $y(t)$ e $\bar{y}(t)$. Fonte: adaptado de DE KEYSER *et al.* (2016).

Analisando os sinais da Figura 31, pode-se extrair:

- O instante cujo sinal de entrada atinge a amplitude máxima ($A_i = 1$) é $t_i = 329,8 \text{ s}$;
- A amplitude máxima do sinal de saída $y(t)$ é $A_o = 0,8574$;

- O instante cujo sinal de saída $y(t)$ atinge a amplitude máxima ($A_o = 0,8574$) é $t_o = 329,8s$;
- A amplitude máxima do sinal de saída é $A_{\bar{y}} = 5,1659$;
- O instante cujo sinal de saída $\bar{y}(t)$ atinge a amplitude máxima ($A_{\bar{y}} = 5,1659$) é $t_y = 372,2s$.

Assim, a partir destes dados, pode-se calcular:

- $M = |P(j\omega_{gc})| = \frac{A_o}{A_i} = 0,8574$
- $\phi = \angle Pj\omega_{gc} = \omega_{gc}(t_i - t_o) = 0,1(329,8 - 336,4) = -0,66rad = -37,81^\circ$
- $\bar{M} = \frac{A_{\bar{y}}}{A_i} = 5,1659$
- $\bar{\phi} = \omega_{gc}(t_i - t_{\bar{y}}) = 0,1(329,8 - 372,2) = -4,24rad = -242,93^\circ$

Então, pode-se escrever as relações (4.46), (4.47) e (4.48) como:

$$K_p = \sqrt{1 + 2K_i 0,1^{-\lambda} \cos \frac{\pi\lambda}{2} + K_i^2 0,1^{-2\lambda}} = \frac{1}{0,8574} \quad (4.63)$$

$$\frac{K_i 0,1^{-\lambda} \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{1 + K_i 0,1^{-\lambda} \cos \frac{\pi\lambda}{2}} = \tan 1,5413 \quad (4.64)$$

$$\frac{\lambda K_i 0,1^{-\lambda-1} \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{1 + 2K_i 0,1^{-\lambda} \cos \frac{\pi\lambda}{2} + K_i^2 0,1^{-2\lambda}} - 5,4118 = 0 \quad (4.65)$$

Estas relações são utilizadas em algoritmos de otimização, como o de Nelder-Mead (mostrado na seção 4.5.1), onde a Equação (4.63) seria a função custo e as restrições não lineares seriam representadas pelas Equações (4.64) e (4.65).

Disto, extrai-se os valores de K_p , K_i e λ como sendo:

$$K_p = 0,5142 \quad (4.66)$$

$$K_i = 0,1407 \quad (4.67)$$

$$\lambda = 1,238 \quad (4.68)$$

Em DE KEYSER *et al.* (2018), é apresentada uma evolução do método mostrado em 4.7 com considerações adicionais e mais exemplos.

O capítulo a seguir apresenta algumas aplicações práticas para o projeto e ajuste de controladores FOPID.

5 ESTUDOS DE CASO

Os objetos de controle utilizados neste capítulo são modelos de laboratório para plantas industriais em simulações, pois, utilizando-se de modelos que apresentam comportamento dinâmico bem próximos aos reais, podem-se obter resultados práticos sem que resulte em perda de produção. Assim, é importante avaliar o desempenho dos controladores usando modelos da vida real dos objetos correspondentes.

O capítulo tem a seguinte estrutura: na Seção 5.1, é investigado o problema do controle de nível de líquidos. Na Seção 5.2, um método para controle de posição de um robô móvel aéreo é investigado.

Neste capítulo serão apresentados exemplos de ajustes para FOPI (controle de nível em tanque de líquido) e de FOPD (aplicado ao controle de posição de um robô móvel aéreo). Os resultados das aplicações também serão mostrados e discutidos.

5.1 Controle de um sistema de nível de líquidos

O sistema de dois tanques considerado nesta seção modelam uma ampla gama de processos industriais (TEPLJAKOV, 2017), como os encontrados em engenharia química (EMDE *et al.*, 2009; FESTILA *et al.*, 2010), processamento de alimentos e sistemas de irrigação, bem como em usinas nucleares (GAIKWAD *et al.*, 2011), e outros ramos da indústria, onde a qualidade do produto depende do desempenho da malha de controle. Nessas aplicações, o controle de nível é alcançado tipicamente, através de um controle do tipo liga/desliga por meio de relés (PINTO, 2016).

No entanto, a precisão na regulação do nível é limitada ao se utilizar este tipo de controle e, conseqüentemente, impacta a qualidade da produção. Esta dificuldade na precisão da regulação se deve, entre outros aspectos, a fenômenos altamente não lineares como variável de resistência de escoamento e a relação da vazão com a coluna de líquido, principalmente para tanques com seção reta apresentando geometrias peculiares.

A importância do controle de nível não deve ser subestimada, pois medições de nível incorretas ou inapropriadas podem resultar em um nível de um fluido em um recipiente excessivamente alto/baixo em relação ao nível desejado. Níveis baixos podem causar danos aos equipamentos, enquanto níveis altos pode resultar em derramamentos com potencial problema de segurança ambiental. Em se tratando de um ambiente industrial, a precisão na medição de

nível economiza tempo e dinheiro, além de otimizar o desempenho da planta e do processo como um todo.

Em muitos países, inclusive o Brasil, existem órgãos regulatórios que exigem detalhamento e controle do impacto ambiental pela eliminação de resíduos sólidos e líquidos de atividades industriais (PINTO, 2016), principalmente em casos de material radioativo e outros contaminantes, o que pode ser encarado como uma motivação adicional para o projeto e implementação do controle de nível no setor industrial, visando reduzir resíduos descartados. Neste trabalho, investigar-se-á a utilização de um FOPI.

Na próxima seção, a planta a ser controlada é descrita.

5.1.1 Descrição da planta

O modelo a ser controlado trata-se de um sistema com dois tanques de 2000L cada (ver Figuras 32 e 33), onde um dos tanques está na altura do chão e serve de reservatório de fluido e o outro, que deseja-se controlar o nível, situa-se a 6 metros de altura do chão.



Figura 32 – Sistema de dois tanques - físico. Fonte: o Autor.

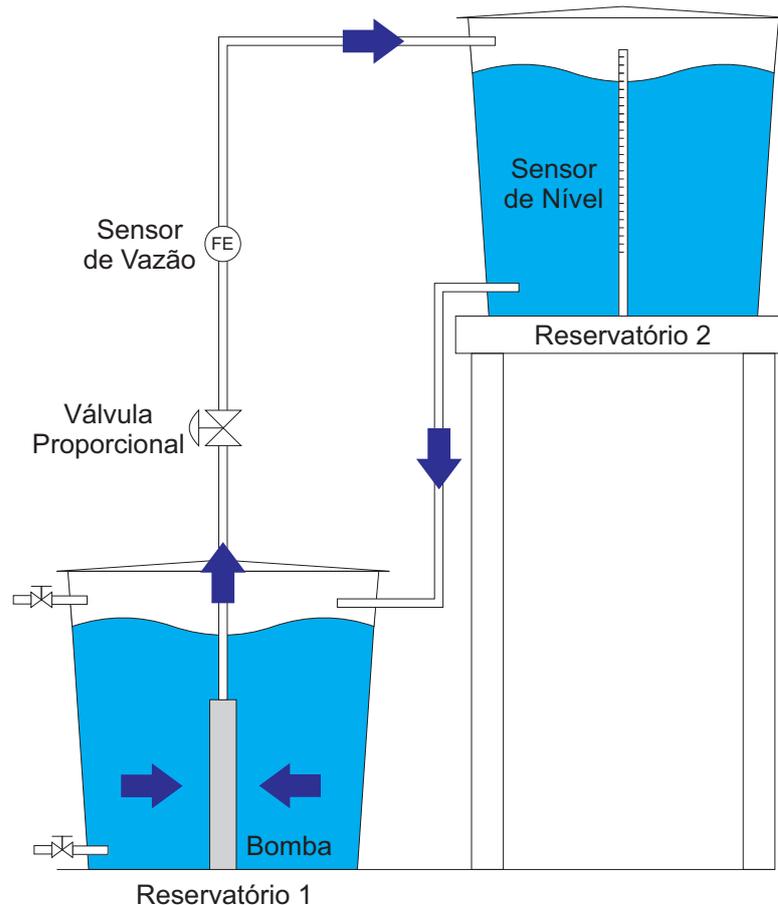


Figura 33 – Sistema de dois tanques - diagrama. Fonte: o Autor.

O fluido é bombeado com o auxílio de uma bomba submersível trifásica de 1,5CV de potência alimentada com 415V. Esta bomba está instalada no Reservatório 1 e impulsiona o fluido verticalmente para o Reservatório 2. A tubulação utilizada possui 40mm (1.1/4") de diâmetro e tem, em seu corpo 2 itens eletromecânicos que auxiliam o controle da planta: um sensor de vazão e uma válvula que controla a passagem do fluido.

No Reservatório 2, tem-se o sensor de nível e uma tubulação (situada na parte inferior deste tanque) que devolve o fluido para o Reservatório 1, simulando a utilização do fluido em um processo industrial. Além disso, o nível máximo admitido no Reservatório 2 é de 138cm.

Assim, tem-se como atuador, ou entrada de sinal de controle $u(t)$, a válvula de controle de fluido e como saída do processo $y(t)$ o altura de fluido no Reservatório 2 medido pelo sensor de nível.

Para o projeto do controlador, a realização de testes e obtenção de resultados para este processo, será utilizado um modelo em diagrama de blocos desenhado no Matlab/Simulink (MATHWORKS INC., 2018), criada para este fim.

A seção seguinte apresenta o projeto do controlador para esta planta.

5.1.2 Estratégia de controle para o sistema de nível de líquidos

Como citado, o controle do nível de fluido do Reservatório 2 é realizado através da atuação de uma válvula eletromecânica que permite a passagem deste fluido do Reservatório 1 para o reservatório 2.

Como a natureza desta planta é não-linear, principalmente por causa da forma semicônica do Reservatório 2, estudou-se a possibilidade da utilização de um controlador FOPI para controlar o nível de fluido deste.

A criação de um modelo no ambiente Matlab/Simulink (MATHWORKS INC., 2018) permitiu que algumas simulações fossem feitas e, partindo do método proposto por DE KEYSER *et al.* (2016) (mostrado na Seção 4.7), os parâmetros para um controlador FOPI fossem extraídos.

As simulações propostas no método de DE KEYSER *et al.* (2016) são feitas com um sinal senoidal de entrada na válvula de admissão de fluido do Reservatório 2 em torno de um ponto onde o nível do fluido estava a 120 cm. O sinal senoidal escolhido possui as seguintes características:

$$A_i = 1 \quad (5.1)$$

$$\omega_{gc} = 0,01 \text{ rad/s} \quad (5.2)$$

$$\text{offset} = 120 \quad (5.3)$$

Pode-se ver na Figura 34 a resposta à senóide do qual o procedimento de ajuste pode ser aplicado.

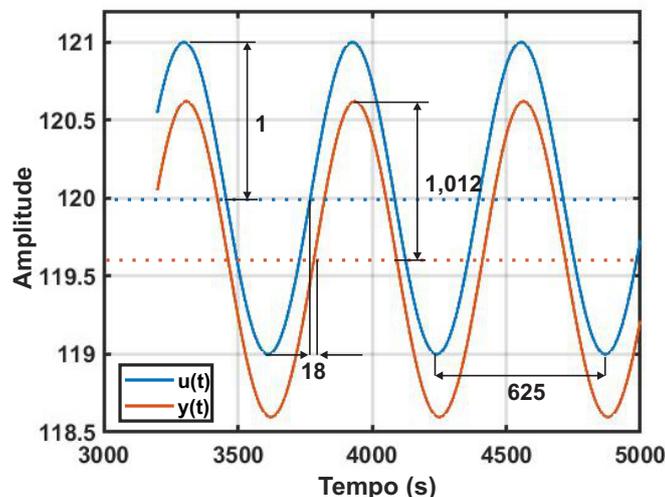


Figura 34 – Sobreposição dos sinais senoidais de entrada e de saída. Fonte: o Autor.

Nota-se que o sinal senoidal de saída apresentou um *offset* negativo em relação ao sinal senoidal de entrada. Isto se deve, principalmente pelo constante esvaziamento do Reservatório 2, que, em casos em que um controlador do tipo relé é utilizado, mostra um erro de regime permanente de 4mm. Isto será mostrado na próxima seção, quando da comparação com os resultados obtidos entre controladores testados com a planta.

Os parâmetros dos controladores FOPI K_p , K_i e λ obtidos usando o método proposto por DE KEYSER *et al.* (2016), utilizado pela facilidade de aplicação, são:

$$K_p = 25 \quad (5.4)$$

$$K_i = -0,15 \quad (5.5)$$

$$\lambda = 0,25 \quad (5.6)$$

Na próxima seção, serão mostrados os resultados obtidos com a utilização do FOPI proposto em comparação com um PI de ordem inteira e um sistema de controle a base de relés (estilo *on/off*).

5.1.3 Resultados das simulações

Para a validação do controlador FOPI projetado, utilizou-se o diagrama mostrado na Figura 6 para 3 tipos controladores: um controle a base de relés, um PI de ordem inteira e o FOPI.

A simulação consiste em estabelecer o nível de fluido de referência inicial em 120cm e depois de 4000 segundos, estabelecer o nível em 80cm.

Na Figura 35, pode-se ver que os controladores estão bem ajustados e cumprem bem o papel de seguir os níveis propostos de 120cm e, posteriormente, de 80cm. No entanto, a Figura 36 mostra em detalhe, que os erros de regime permanente variam de acordo com o tipo de controlador escolhido.

Assim, pode-se verificar na Figura 36 que o maior erro de regime permanente é o do controlador baseado em relés, que chega a mais de 4mm. O segundo maior é o erro do controlador PI de ordem inteira, que estagna em 1mm. O erro do FOPI é variável e seu sinal de saída varia dentro de uma amplitude de 0,7mm. O centro do sinal de saída quando a referência está em 80cm se encontra em 80,015cm (linha tracejada). Em questões práticas, acredita-se que esta pequena variação não seria suficiente para que o atuador da válvula alterasse o seu estado, pois esta senóide ficaria dentro de uma zona morta.

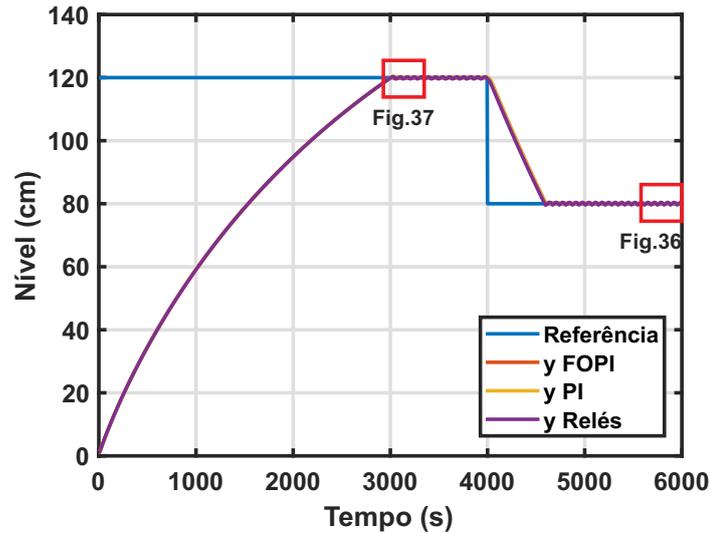


Figura 35 – Sobreposição dos sinais de saída para os controladores - visão geral. Fonte: o Autor.

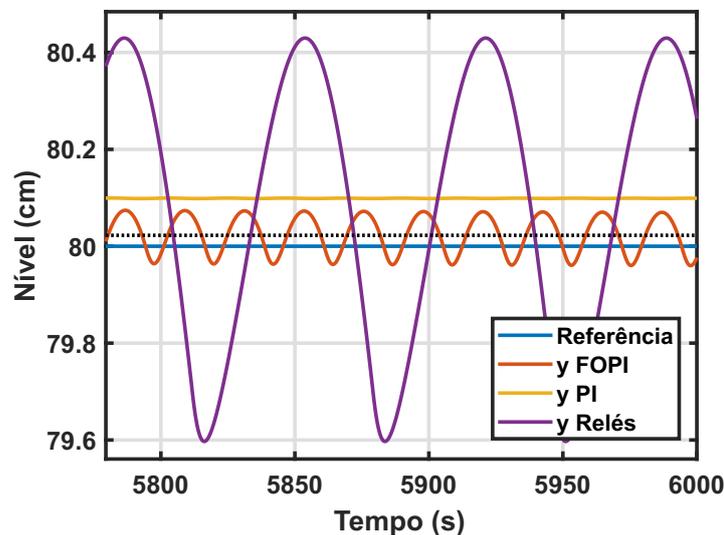


Figura 36 – Sobreposição dos sinais de saída para os controladores - detalhe do erro de regime. Fonte: o Autor.

Outro detalhe a ser analisado é mostrado na Figura 37 e mostra o sobressinal quando o nível do Reservatório 2 chega à referência de 120cm. Nesta figura pode-se ver que o maior sobressinal é referente à utilização do controlador PI de ordem inteira, seguido pelo controle a base de relés e por último, o PI de ordem fracionária.

Estes resultados contribuem para a conclusão de que o controlador mais adequado para este tipo de sistema é o PI de ordem fracionária.

Na próxima seção, o controle de posição de um robô móvel aéreo é estudado.

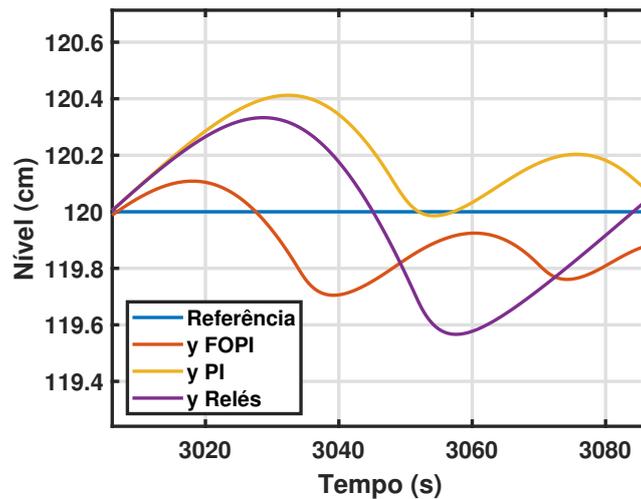


Figura 37 – Sobreposição dos sinais de saída para os controladores - detalhe do sobressinal.
Fonte: o Autor.

5.2 Controle de posição de um robô móvel aéreo

A ideia que deu origem aos robôs móveis aéreos surgiu por volta dos anos 60, mas foi durante os anos 80 que começaram a chamar atenção por conta de seus usos militares. A grande vantagem em seu uso durante os anos 80, era a possibilidade de efetuar ações, que muitas vezes eram perigosas, sem necessariamente colocar uma vida em risco, pois quem estivesse controlando estaria distante do drone, e o pior que poderia acontecer é o abatimento do objeto no ar.

O que torna curiosa a história dos drones é que ela tem por inspiração uma bomba, a popularmente conhecida *buzz bomb*, assim chamada por conta do barulho que fazia enquanto voava, foi desenvolvida pela Alemanha durante a Segunda Guerra Mundial.

Apesar de sua simplicidade, o que a tornava alvo fácil em abates e interceptações, por voar apenas em linha reta e com velocidade constante, obteve um sucesso considerável. Embora não haja um número exato sobre o número de feridos e mortos pelas bombas, pode-se concluir que é um valor grande uma vez que foram lançadas mais de mil bombas V-1.

A V-1, conhecida como *buzz bomb*, não foi a única bomba do gênero criada. Alguns anos mais tarde, ainda no decorrer da Segunda Grande Guerra, foi criada a V-2. Mas a grande revolução foi no primeiro momento em que uma bomba com aquelas características surgiu: a V-1, que inspirou a história dos drones e toda a sua evolução deste então.

Segundo BUZZO (2015), o drone como conhecemos hoje foi inventado pelo israelita Abe Karem, engenheiro espacial responsável por criar o drone americano mais temido e bem-

sucedido: o Albatross. Segundo Karem (BUZZO, 2015), quando ele chegou aos Estados Unidos da América, em 1977, para controlar um drone eram necessárias 30 pessoas. O modelo utilizado na época, batizado de Aquilla voava em média alguns minutos mesmo com autonomia para 20 horas de voo. Vendo esta situação, Karem, fundou uma empresa (a *Leading System*) e, utilizando pouca tecnologia (restos de madeira, fibra de vidro caseira, dentre outros), deu origem ao Albatross.

O Albatross chegou a ficar 56 horas no ar, sem ser necessária nenhuma recarga de baterias, e sendo operado apenas por 3 pessoas - contra 30 do Aquilla. Depois desta bela demonstração, Karem recebeu financiamento da DARPA (sigla da Agência de Projetos de Pesquisa Avançada de Defesa - em inglês) para aprimorar o protótipo, e assim surgiu o Amber.

Nas últimas décadas, os robôs móveis aéreos ou veículos aéreos não tripulados (da sigla em inglês UAV - *Unmanned Aerial Vehicle*) têm recebido crescente interesse tanto acadêmico quanto industrial. Basicamente, devido às suas características, que vão do modelo multivariável não linear à versatilidade dos sensores de acoplamento, o torna útil para aplicações práticas pois são equipados para resistir a trabalhos pesados e ambientes hostis. No geral, estes aparelhos são concebidos para realizar tarefas arriscadas ao ser humano ou serem ferramentas para trabalhos que ninguém quer executar.

Algumas utilizações para os drones:

- **Audiovisual.** Adotados por fotógrafos e cinegrafistas como suporte para câmeras com o objetivo de fazer imagens aéreas de casamentos, atividades esportivas, no cinema e outras festividades.
- **Trabalho em meio radioativo.** Quando grandes volumes de material radioativo são liberados na natureza, é necessário coletá-los rapidamente. No entanto, como essas substâncias são altamente nocivas aos humanos, drones podem ser empregados nesse tipo de trabalho. No Japão, por exemplo, o acidente de Fukushima (2011) desencadeou o desenvolvimento de diversas unidades para trabalhar em acidentes radioativos. Infelizmente, os primeiros protótipos só ficaram prontos quando o vazamento já estava fora de controle, mas isso não impediu o uso dos aparelhos. Ainda, na época do desastre, os japoneses mandaram um T-Hawk, drone equipado com câmeras, para capturar imagens do interior dos reatores danificados e estimar danos e estratégias de contenção dos vazamentos. Esse tipo de imagem seria impossível de se obter sem um drone, já que seres humanos não sobreviveriam a uma viagem até a área para informar os estragos e estimar caminhos de ação.

- **Bélico.** Há ainda drones com uso mais ofensivo, armados para bombardear alvos militares. Assim como os modelos de vigilância, eles voam para áreas pré-determinadas, onde soltam bombas sobre os alvos. No geral, são aviões mais simples e a perda dessas máquinas, em virtude da defesa do inimigo, não representam grandes perdas. Afinal, o custo de uma aeronave não tripulada é muito inferior ao de aviões convencionais e a sua queda não representaria baixa humana.
- **Submersão.** Há, também, drones submarinos, que podem submergir a profundidades impraticáveis para submarinos tripulados e coletar dados e imagens de áreas ainda inexploradas.
- **Ajuda às pessoas necessitadas.** Com a possibilidade de chegar em locais hostis, os drones também vêm sendo utilizados em várias operações emergenciais. Como entregas de alimentos e, até mesmo, remédios, em locais isolados e de difícil acesso. Já foram feitas imagens de drones efetuando entregas na África, podendo salvar várias pessoas.
- **Resgate.** No ano de 2015, foi noticiado o surgimento de um drone chamado "*Gimball*", ganhador da competição "*Drones for Good*" ("Drones para o Bem", em uma tradução direta). Seu revestimento lembra uma "gaiola", que permite que ele não sofra danos ao se chocar com outros objetos, visando principalmente sua utilização em locais com muitos obstáculos. Inspirado nos insetos e com o objetivo de ser utilizado em salvamentos, possui sensor de temperatura, GPS, câmeras e alta resistência.

Essas características ajudam a entender como esses equipamentos se tornaram muito comuns entre aparatos militares e de vigilância. No entanto, há aplicações mais pacíficas, como no uso profissional de fotógrafos, resgates e limpeza de lixo tóxico.

Portanto, as técnicas de controle aplicadas a UAVs chama a atenção do times de pesquisa. No entanto, o controle aplicado a esse tipo de sistema é uma tarefa desafiadora, não apenas por causa das não linearidades e variáveis acopladas, mas também por ser um sistema sub-atuado.

Nesta seção, é um controlador FOPD é ajustado para trabalhar na malha externa de posicionamento de um UAV. Na malha interna, de maneira a seguir a trajetória traçada, tem-se um controlador linear LQR com função integral.

5.2.1 Descrição do robô móvel aéreo

O modelo a ser controlado trata-se de um quadricóptero, que é uma unidade aérea montada em forma de cruz com rotores em cada extremidade. Ele pertence à classe de UAVs com decolagem e aterrissagem vertical. As manobras aéreas são obtidas através do controle da atuação desses rotores, conforme mostrado na Figura 38.

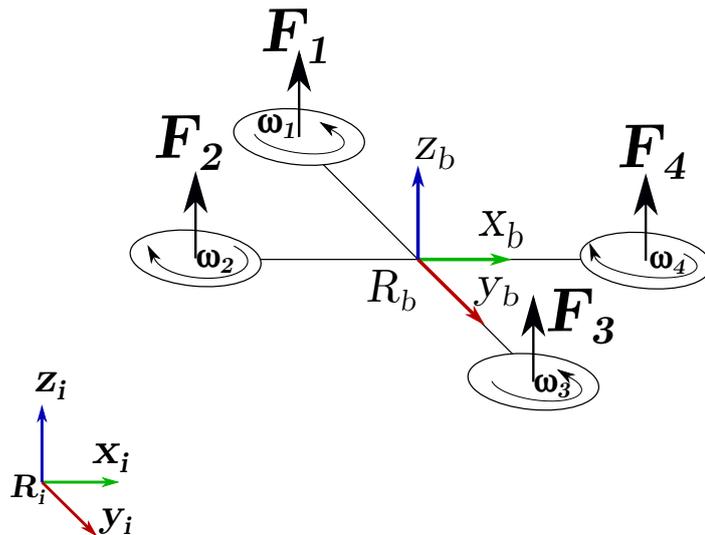


Figura 38 – Estrutura do drone com a posição dos rotores. Fonte: o Autor.



Figura 39 – Exemplo ilustrativo de um drone. Fonte: disponível em BUZZO (2015).

Ao acionar os rotores de maneira diferente, o corpo se move. Ou, explicando melhor, se a potência em F_1 for menor que em F_3 , o quadricóptero se move lateralmente para a esquerda. De maneira semelhante, se a potência em F_4 for menor que em F_2 , o quadricóptero se moverá para frente.

Um t3pico interessante a ser destacado 3 a presen3a de dois espa3os vetoriais diferentes. O que representa a o quadro inercial R_i e o R_b , que representa o quadro do corpo do drone. Quando o quadric3ptero se move, ele provoca um movimento em rela33o a R_i .

A posi33o do corpo no quadro inercial 3 definido pelo vetor $\xi = [x \ y \ z]^T$. Por outro lado, a orienta33o angular 3 dada pelo vetor $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$. Al3m disso, os vetores que definem as velocidades linear e angular s3o, respectivamente, $\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ e $\boldsymbol{\omega} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$.

Adicionalmente, 3 necess3rio definir $\mathbf{v}_B = [u \ v \ w]^T$ e $\boldsymbol{\omega}_B = [p \ q \ r]^T$ como o conjunto de velocidades linear e angular do corpo no quadro corporal inercial *w.r.t.* A rela33o entre estes vetores 3 controlada pela matriz de rota33o R e pela matriz de transforma33o T :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & \frac{s\phi}{c\theta} & \frac{c\phi}{c\theta} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde $s\alpha$, $c\alpha$ e $t\alpha$ representam $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e $\tan(\alpha)$, respectivamente. Assim,

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{v}_B \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}\boldsymbol{\omega}_B \quad (5.10)$$

com a rela33o entre os quadros inercial e corporal dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(u, v, w) \\ f_y(u, v, w) \\ f_z(u, v, w) \\ p + r(c\phi t\theta) + q(s\phi t\theta) \\ q(c\phi) - r(s\phi) \\ r\frac{c\phi}{c\theta} + q\frac{s\phi}{c\theta} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

onde:

$$f_x(u, v, w) = u(c\theta c\psi) + v(s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi) + \quad (5.12)$$

$$w(c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi); \quad (5.13)$$

$$f_y(u, v, w) = u(c\theta s\psi) + v(s\phi s\theta s\psi - c\phi c\psi) + \quad (5.14)$$

$$w(c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi); \quad (5.15)$$

$$f_z(u, v, w) = u(-s\theta) + v(s\phi c\theta) + w(c\phi c\theta). \quad (5.16)$$

A análise de movimento precisa considerar as forças e torques totais aplicados ao corpo, levando a:

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}} + m(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{B}} \times \mathbf{v}_{\mathbf{B}}) \quad (5.17)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{B}} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{B}} \quad (5.18)$$

onde $\mathbf{F} = [F_x \ F_y \ F_z]^T$ e $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$ são as forças e os torques nos eixos x , y e z , respectivamente. A matriz \mathbf{J} representa o momento de inércia, que pode ser reduzida para uma matriz diagonal se o corpo do quadricóptero for simétrico (como geralmente é):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

As forças agem no quadro corporal e são causadas pela gravidade (ação para baixo), e o impulso para cima F_t no eixo z :

$$F_z = -mg\mathbf{R}^T [0 \ 0 \ 1]^T + F_t. \quad (5.20)$$

O estado de flutuação (*hovering*) é alcançado quando os quatro rotores estão operando na mesma velocidade de rotação e a força de impulso iguala a força da gravidade, ou seja:

$$F_t = \sum_{i=1}^4 b\omega_i^2, \quad (5.21)$$

onde b é conhecido como coeficiente de impulso e ω_i é a velocidade angular do i -ésimo rotor. As manobras são provenientes dos torques causados pela operação simultânea de um conjunto de rotores:

$$\tau_x = bl(\omega_3^2 - \omega_1^2) \quad (5.22)$$

$$\tau_y = bl(\omega_4^2 - \omega_2^2) \quad (5.23)$$

$$\tau_z = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (5.24)$$

onde l é a distância dos rotores ao centro de massa e d é o coeficiente de arraste.

Através da aplicação da lei de movimento de Newton tanto para o deslocamento linear quanto angular nas Equações (5.20) até (5.24), pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta) \frac{F_t}{m} \\ (c\phi s\psi s\theta - c\psi s\phi) \frac{F_t}{m} \\ (c\phi c\theta) \frac{F_t}{m} - g \\ \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\tau_x}{I_x} \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\tau_y}{I_y} \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\tau_z}{I_z} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Observa-se que a força da Equação (5.21) e os torques das Equações (5.22) a (5.24) causam deslocamentos aéreos no eixo z e variação nos ângulos ϕ , θ and ψ . Por outro lado, sabe-se que \ddot{x} e \ddot{y} são relacionados diretamente com o caminho seguido em uma determinada altitude. É, então, coerente considerar $\zeta = [z \ \phi \ \theta \ \psi]$ um vetor para definir rapidamente a dinâmica de movimentos do corpo do quadricóptero, enquanto x e y são variáveis mais lentas para se obter a mesma informação.

Se for considerado que o quadricóptero se move numa forma de baixa oscilação (SABATINO, 2015), então pode-se considerar que $\phi, \theta, \psi \approx 0$ relacionando-se com $c\alpha = 0$ e $s\alpha = \alpha$ para qualquer α . Nesse caso, o modelo das Equações (5.11) e (5.25) podem ser linearizados para pequenas variações em ϕ , θ e ψ em torno de zero e, então, controles lineares podem ser considerados. Nota-se que esta abordagem ainda permite que o quadricóptero se move em qualquer direção por causa da versatilidade de operação em diferentes conjuntos de rotores, caracterizando um comportamento holonômico.

5.2.2 Estratégia de controle para o quadricóptero

O movimento dinâmico do quadricóptero depende do conjunto de equações (5.11) e (5.25), que podem ser linearizadas quando assume-se que opera em pequenas oscilações. Neste caso, os ângulos de estabilização e o caminho a ser percorrido podem ser alcançados se, por exemplo, for considerado os estados $[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]$. No entanto, as variáveis de atuação são $[F_t \ \tau_x \ \tau_y \ \tau_z]$, isto é, existem 4 variáveis de atuação e seis variáveis de controle. Portanto, o quadricóptero é um sistema sub-atuado já que apresenta menos variáveis de atuação que variáveis

de controle. Uma maneira de lidar com isso é considerar o vetor $[z \ \phi \ \theta \ \psi]$ como as saídas de uma malha interna para linearização, enquanto o controle de posição é feito por uma malha externa, uma abordagem chamada de inversão dinâmica (DAS *et al.*, 2009).

Para alcançar uma posição desejada x, y para uma determinada altitude deve-se chamar uma rotina de controle de posição, que está diretamente relacionada com os ângulos θ and ϕ . Para tanto, o controlador da malha externa gera as referências de *pitch* e *roll* para a malha interna de controle. Destaca-se que o ângulo *yaw* se refere-se à direção que o quadricóptero aponta e pode ser lidada diretamente pela malha interna de controle. Deste modo, pode-se adotar um controlador PD (FOPD) para cada grau de liberdade para estabilizar o sistema conforme mostrado em TSOTRAS (1998), FORMENTIN e LOVERA (2011).

A estabilização dos ângulos e da altitude na malha interna é chamado de controle de atitude (SABATINO, 2015; DAS *et al.*, 2009) que, como citado é uma malha mais rápida que a de posição. A estratégia de controle é mostrada na Figura 40.

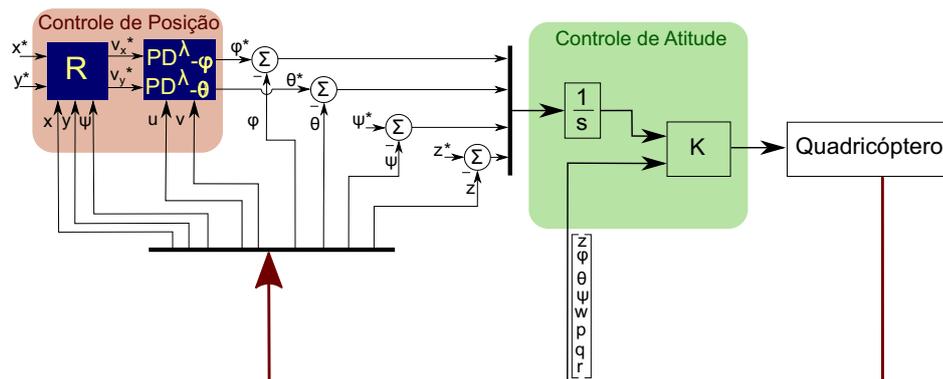


Figura 40 – Estratégia de controle. Fonte: o Autor.

Assim, segundo o método de auto-tuning mostrado na Seção 4.7, algumas simulações foram feitas com um sinal senoidal de entrada nos ângulos ϕ (Roll) e θ (Pitch). A dinâmica destes dois processos foi considerada muito similares, pois as respostas a este sinal foram bem parecidas. Pode-se ver na Figura 41 a resposta à senóide para *phi* (Roll) do qual o procedimento de ajuste pode ser aplicado. Destaca-se que os mesmos parâmetros do controlador pode ser utilizado em θ (Pitch) por causa da simetria do quadricóptero.

Os parâmetros dos controladores FOPD K_p , K_d e μ obtidos usando o método pro-

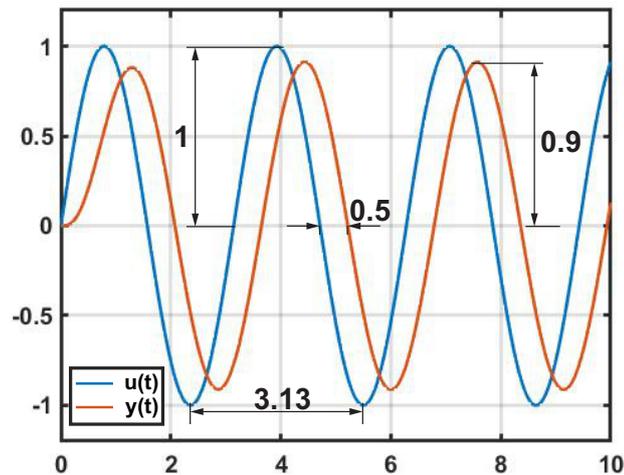


Figura 41 – Sobreposição dos sinais senoidais de entrada e de saída para ϕ (Roll). Fonte: o Autor.

posto por DE KEYSER *et al.* (2018), pela facilidade de aplicação, são:

$$K_p = 0,24 \quad (5.26)$$

$$K_d = 0,06 \quad (5.27)$$

$$\mu = 1,06 \quad (5.28)$$

A seção a seguir mostra os resultados para a simulação proposta, bem como as análises destes resultados.

5.2.3 Resultados da simulação

De maneira a validar a estratégia de controle, foram feitas simulações no Simulink e utilizando a Toolbox FOPID em uma versão modificada do projeto em HARTMAN *et al.* (2014).

Na simulação, realiza-se uma decolagem de um ponto considerado a origem, deslocando-se tanto pra cima como para a frente até a altitude de 3 m. Então, o drone realiza uma trajetória quadrangular e retorna ao ponto (0,0,3), onde fica em estado de flutuação (*hovering*). O resultado da trajetória descrita pelo quadricóptero é apresentada na Figura 42 onde as setas foram numeradas para facilitar o entendimento do caminho traçado.

Os movimentos descritos pelos ângulos ϕ , θ e ψ , realizados pelo controlador LQR, são mostrados na Figura 43. Vale ressaltar que as referências de ϕ e θ são dadas pela saída do controlador FOPD na malha de posição (externa). Percebe-se algumas pequenas variações em todos os ângulos, de acordo com a condição de oscilações mínimas consideradas para a

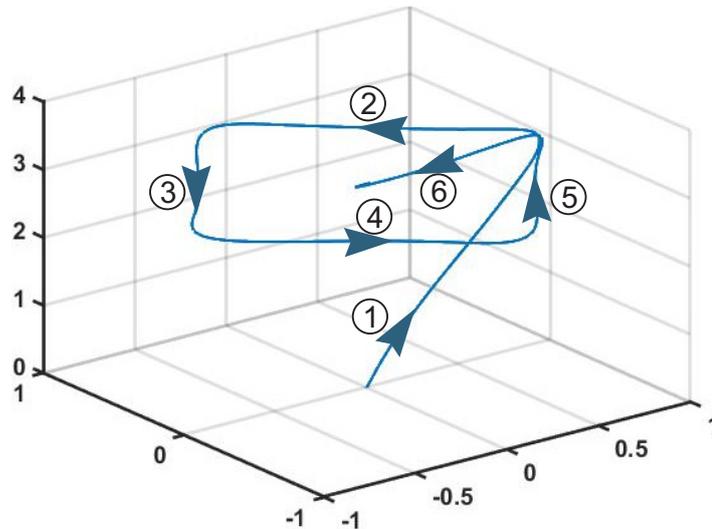


Figura 42 – Trajetória do quadricóptero. Fonte: o Autor.

linearização. Além disso, essas pequenas mudanças em ϕ , θ e ψ mostram o comportamento holonômico do quadricóptero, isto é, a frente do drone não se altera durante todo o trajeto. Ainda, nos gráficos são apresentados o comportamento dinâmico do sistema com o controlador FOPD projetado e, a título de comparação, o comportamento dinâmico utilizando-se o controlador PD original ($K_p = 0,32$, $K_d = 0,1$ e $\mu = 1$).

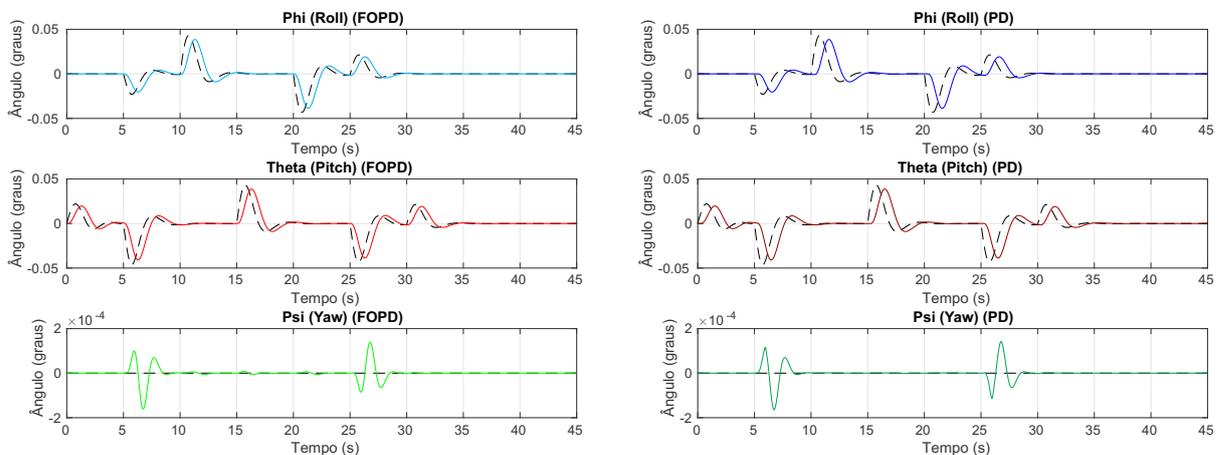


Figura 43 – Ângulos para o controle de atitude. Fonte: o Autor.

Analisando os resultados da Figura 43, pode-se notar que as curvas para os ângulos ϕ , θ e ψ são bem semelhantes entre os dois controladores, porém, o trajeto fornecido pelo FOPD é seguido mais rapidamente pelo controlador da malha interna.

Na Figura 44, pode-se acompanhar a posição do quadricóptero durante sua trajetória nos eixos X , Y e Z .

Analisando os resultados da Figura 44, pode-se notar que as curvas de posição (x , y e z) do quadricóptero ficaram bem semelhantes. No entanto, percebe-se que as curvas de x

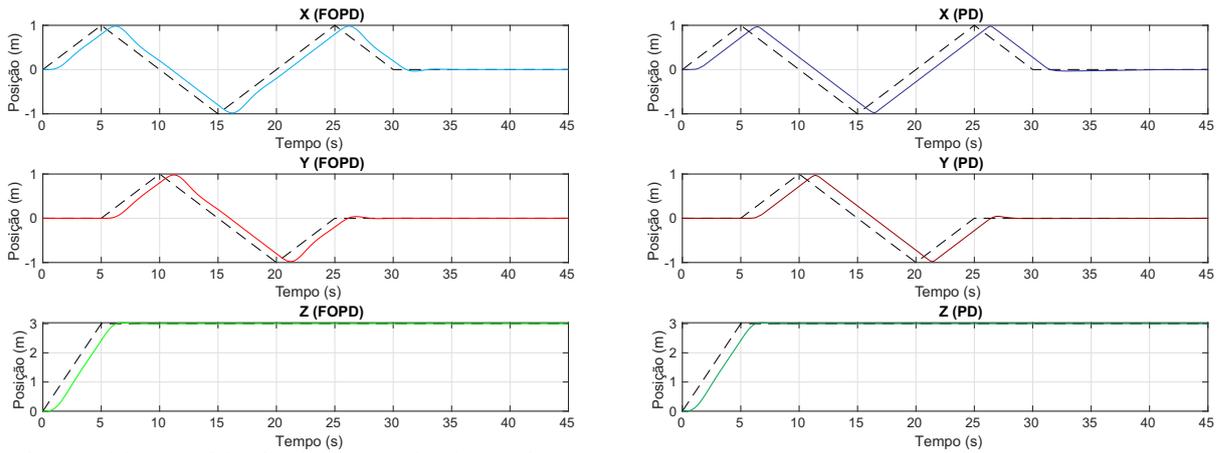


Figura 44 – Variáveis do controle de posição. Fonte: o Autor.

e y, quando têm suas trajetórias traçadas pelo controlador FOPD, ficaram mais rápidas e com mudanças de direção menos bruscas que quando têm suas trajetórias traçadas pelo controlador PD de ordem inteira. Isso pode ser útil, uma vez que pode fazer com que o quadricóptero diminua a velocidade ao mudar sua trajetória.

O capítulo a seguir mostra as conclusões deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Algumas conclusões gerais podem ser obtidas deste trabalho, incluindo a que funções de transferência de ordem fracionária podem retratar melhor o comportamento dinâmicos de plantas reais, pois a natureza simplesmente opera em ordens não inteiras.

Além disso, controladores de ordem não-inteira permitem aos engenheiros da área de controle um maior grau de liberdade para atender algumas restrições de projeto, já que podem lançar mão de parâmetros adicionais, λ e μ , para isto. Também, a zona de estabilidade de malhas que contém controladores fracionários é maior, possibilitando inclusive, a existência de polos no semiplano direito do eixo imaginário.

Acerca dos controladores FOPID, um método para análise de estabilidade foi apresentado. E, vale ressaltar, já que os controladores FOPID são tecnicamente extensões dos controladores PID de ordem inteira, os métodos de projeto destes últimos, que já estão amplamente desenvolvidos, podem ser utilizados para auxílio na sintonia de FOPIDs, bastando apenas buscar uma melhor sintonia para os parâmetros fracionários.

Também foi apresentado um método de *auto-tuning* para controladores FOPID que, com o auxílio de alguns testes e independente de conhecer o modelo da planta a ser controlada, mostrou-se bem eficaz. Além disso, alguns exemplos para solidificar a ideia do método de auto-ajuste foram apresentados.

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se destacar principalmente a implementação real deste tipo de controlador, em algum sistema embarcado ou não, para extrair resultados práticos e para a evolução constante do conceito junto aos alunos e demais pesquisadores.

E, também, o desenvolvimento de mais métodos de *auto-tuning* para este tipo de controlador, uma vez que deve-se buscar métodos que possam ser mais atraentes para a indústria e para processos do meio não-acadêmico.

REFERÊNCIAS

- ABEL, N. H. Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. In: **OEUVRES COMPLÈTES DE NIELS HENRIK ABEL: NOUVELLE ÉDITION**. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 1881. (Cambridge Library Collection - Mathematics, v. 1), p. 11–27.
- AGUIRRE, L. A. Quantitative measure of modal dominance for continuous systems. In: **PROCEEDINGS OF 32ND IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL**. San Antonio, Estados Unidos da América: IEEE, 1993. p. 2405–2410.
- ANDRADE, A. M. F. de; LIMA, E. G. de; DARTORA, C. A. Uma introdução ao cálculo fracionário e suas aplicações em circuitos elétricos. In: **REVISTA BRASILEIRA DE ENSINO DE FÍSICA**. São Paulo, Brasil: Scielo, 2018. v. 40, n. 3, p. e3314–1–e3314–9. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172018000300414&nrm=iso>.
- ARAÚJO, J. M.; CASTRO, A. C.; SANTOS, E. T. F. Redução de ordem no domínio da frequência baseada na minimização da norma dos coeficientes polinomiais do erro. In: **SBA: CONTROLE E AUTOMAÇÃO - SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA**. Campinas, Brasil: Scielo, 2008. v. 19, n. 3, p. 235–241. ISSN 0103-1759. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-17592008000300001&nrm=iso>.
- ASTROM, K.; HÄGGLUND, T. **Advanced PID Control**. Princeton, Estados Unidos da América: The Instrumentation, Systems and Automation Society (ISA), 2006. ISBN 9781556179426. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=XcseAQAAIAAJ>>.
- AXTELL, M.; BISE, M. E. Fractional calculus applications in control systems. In: **IEEE CONFERENCE ON AEROSPACE AND ELECTRONICS**. Dayton, Estados Unidos da América: IEEE, 1990. v. 2, p. 563–566.
- BATTAGLIA, J. L.; COIS, O.; PUIGSEGUR, L.; OUSTALOUP, A. Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. In: **INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2001. v. 44, n. 14, p. 2671–2680. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931000003100>>.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo, Brasil: Edgard Blücher Ltda, 1974. ISBN 9788521200239. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=cW8OPwAACAAJ>>.
- BUZZO, L. **História dos Drones: do Início aos Dias de Hoje**. 2015. Disponível em: <<http://odrones.com.br/historia-dos-drones/>>. Acessado em: 2019-09-21.
- CALDERON, C. A.; SARANGO, R.; MACAS, E.; RAMÍREZ, C.; RIVAS-ECHEVERRÍA, F.; HERNANDEZ, W. Implementation and comparative analysis of fractional order PID embedded controllers, applied to speed control of a robotic prosthesis. In: **ICA-ACCA 2018**. Concepción, Chile: IEEE, 2018. p. 1–6.
- CAMARGO, R. F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. Tese (Doutorado em Matemática) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, Abril 2009.

CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. **Cálculo Fracionário**. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2015. v. 1.

CAO, J.; CAO, B. Design of fractional order controllers based on particle swarm optimization. In: **2006 1ST IEEE CONFERENCE ON INDUSTRIAL ELECTRONICS AND APPLICATIONS**. Singapura, República de Singapura: IEEE, 2006. p. 1–6.

CECH, M.; SCHLEGEL, M. The fractional-order PID controller outperforms the classical one. In: **PROCESS CONTROL 2006**. Pardubice, Tchécua: Technical University, 2006. p. 1–6. ISBN 80-7194-860-8. Disponível em: <http://www.kky.zcu.cz/en/publications/CechM_2006_Thefractional-order>.

CHANG, L.-Y.; CHEN, H.-C. Tuning of fractional PID controllers using adaptive genetic algorithm for active magnetic bearing system. In: **WSEAS TRANSACTIONS ON SYSTEMS (WTOS)**. Cambridge, Inglaterra: WSEAS Press, 2009. v. 8, n. 1, p. 158–167.

CHEN, Y. Ubiquitous fractional order controls? In: **IFAC PROCEEDINGS VOLUMES**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2006. v. 2, n. PART 1, p. 481–492. Disponível em: <<http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-77953504376&partnerID=40&md5=5396dfa23152166d6ecc8cbc24e0a746>>.

CHEN, Y.; MOORE, K. L. Relay feedback tuning of robust PID controllers with iso-damping property. In: **IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, PART B (CYBERNETICS)**. Hanover, Estados Unidos da América: IEEE, 2005. v. 35, n. 1, p. 23–31. ISSN 1941-0492.

CHEN, Y.; PETRAS, I.; XUE, D. Fractional order control - a tutorial. In: **2009 AMERICAN CONTROL CONFERENCE**. St. Louis, Estados Unidos da América: IEEE, 2009. p. 1397–1411. ISSN 2378-5861.

COLE, K. S.; COLE, R. H. Dispersion and absorption in dielectrics i - alternating current characteristics. In: **THE JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS**. College Park, Estados Unidos da América: American Institute of Physics, 1941. v. 9, n. 4, p. 341–351. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1750906>>.

COSTA, F. S. **Função H de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, Agosto 2011.

DAS, A.; SUBBARAO, K.; LEWIS, F. Dynamic inversion with zero-dynamics stabilisation for quadrotor control. In: **IET CONTROL THEORY APPLICATIONS**. Londres, Inglaterra: The Institution of Engineering and Technology, 2009. v. 3, n. 3, p. 303–314. ISSN 1751-8644.

DAS, S.; PAN, I.; SAHA, S.; KUMAR, A.; DAS, S.; GUPTA, A. Revisiting oustaloup's recursive filter for analog realization of fractional order differintegrators. In: **2011 INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENERGY, AUTOMATION AND SIGNAL**. Bhubaneswar, Índia: IEEE, 2011. p. 1–6.

DE KEYSER, R.; MURESAN, C. I.; IONESCU, C. M. A novel auto-tuning method for fractional order PI/PD controllers. In: **ELSEVIER ISA TRANSACTIONS**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2016. p. 268–275. ISSN 0019-0578. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057816000392>>.

DE KEYSER, R.; MURESAN, C. I.; IONESCU, C. M. Autotuning of a robust fractional order PID controller. In: **9TH INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL (IFAC) SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN (ROCOND)**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2018. v. 51, n. 25, p. 466–471. ISSN 2405-8963. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896318328453>>.

DORČÁK, L.; PETRÁŠ, I.; GONZALES, E.; VALSA, J.; TERPÁK, J.; ZECOVA, M. Application of PID returning method for laboratory feedback control system incorporating to dynamics. In: **PROCEEDINGS OF THE 14TH INTERNATIONAL CARPATHIAN CONTROL CONFERENCE (ICCC)**. Piscataway, Estados Unidos da América: IEEE, 2013. p. 38–43.

DORČÁK, L.; TERPÁK, J.; PETRÁŠ, I.; DORČÁKOVÁ, F. Electronic realization of the fractional-order systems. In: **ACTA MONTANISTICA SLOVACA**. Košice, Eslováquia: Technical University of Košice, 2007. v. 12, n. 3, p. 231–237.

DORČÁK, L.; VALSA, J.; TERPÁK, J.; PETRÁŠ, I.; GONZALES, E. Comparison of the electronic realization of the fractional-order system and its model. In: **PROCEEDINGS OF THE 13TH INTERNATIONAL CARPATHIAN CONTROL CONFERENCE (ICCC)**. Alto Tatra, Eslováquia: IEEE, 2012. p. 119–124.

EMDE, I.; BERNER, W.; MERTENS, K. Camera systems in hazardous (classified) locations to monitor and control the separation of liquid waste products in chemical plants. In: **56TH PETROLEUM AND CHEMICAL INDUSTRY CONFERENCE**. Anaheim, Estados Unidos da América: IEEE, 2009. p. 1–7.

FESTILA, C.; DULF, E.; BALDEA, A. Level and pressure control in condenser of the 13C isotope separation column. In: **2010 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON AUTOMATION, QUALITY AND TESTING, ROBOTICS (AQTR)**. Cluj-Napoca, Romênia: IEEE, 2010. v. 1, p. 1–6. ISBN 978-1-4244-6724-2.

FORMENTIN, S.; LOVERA, M. Flatness-based control of a quadrotor helicopter via feedforward linearization. In: **2011 50TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE**. Orlando, Estados Unidos da América: IEEE, 2011. p. 6171–6176. ISSN 0191-2216.

FOUDA, M. E.; RADWAN, A. G. Fractional-order memristor response under DC and periodic signals. In: **CIRCUITS, SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING**. Zurique, Suíça: Springer Nature Switzerland AG, 2014. v. 33, n. 3, p. 961–970.

GABANO, J.-D.; POINOT, T. Fractional modeling applied to non destructive thermal characterization. In: **18TH IFAC PROCEEDINGS VOLUMES**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2011. v. 44, n. 1, p. 13972–13977. ISSN 1474-6670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016458702>>.

GAIKWAD, A.; VIJAYAN, P.; BHARTIYA, S.; KUMAR, R.; LELE, H.; VAZE, K. Selection of steam drum level control method for multiple drum interacting loops pressure tube-type BWR. In: **IEEE TRANSACTIONS ON NUCLEAR SCIENCE**. Oak Ridge, Estados Unidos da América: IEEE, 2011. v. 58, n. 2, p. 479–489. ISSN 1558-1578.

GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. **Practical Optimization**. Londres, Inglaterra: Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1981. xvi+401 p. ISBN 0-12-283950-1.

GORENFLO, R.; KILBAS, A. A.; MAINARDI, F.; ROGOSIN, S. V. **Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications**. Berlim, Alemanha: Springer-Verlag, 2014. ISBN 978-3-662-43929-6.

GRIGOLETTO, E. C. **Equações Diferenciais Fracionárias e as Funções de Mittag-Leffler**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, Novembro 2014.

HARTLEY, T.; LORENZO, C.; QAMMER, H. Chaos in a fractional order Chua's system. In: **IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS**. Pequim, China: IEEE, 1995. v. 42, n. 8, p. 485–490. ISSN 1558-1268.

HARTMAN, D.; LANDIS, K.; MEHRER, M.; MORENO, S.; KIM, J. **Quadcopter Dynamic Modeling and Simulation (Quad-Sim) v1.0**. 2014. <https://github.com/dch33/Quad-Sim>.

HEAVISIDE, O.; WHITTAKER, E. **Electromagnetic Theory**. Nova Iorque, Estados Unidos da América: American Mathematical Society, 1922. v. 1. (AMS Chelsea Publishing Series, v. 1). ISBN 9780821835579. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ErOjV0HBQSYC>>.

HSIA, T. C. On the simplification of linear systems. In: **IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL**. Londres, Inglaterra: IEEE, 1972. v. 17, n. 3, p. 372–374. ISSN 2334-3303.

IONESCU, C. M. **The Human Respiratory System: An Analysis of the Interplay between Anatomy, Structure, Breathing and Fractal Dynamics**. Londres, Inglaterra: Springer, 2013.

KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**. Nova Iorque, Estados Unidos da América: Elsevier Science Inc., 2006. v. 204. ISBN 0444518320.

LAGARIAS, J. C.; REEDS, J. A.; WRIGHT, M. H.; WRIGHT, P. E. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. In: **SIAM JOURNAL ON OPTIMIZATION**. Auckland, Nova Zelândia: University of Auckland Press, 1998. v. 9, n. 1, p. 112–147.

LANUSSE, P.; POMMIER, V.; OUSTALOUP, A. Fractional control-system design for a hydraulic actuator. In: **IFAC CONFERENCE ON MECHATRONIC SYSTEMS**. Darmstadt, Alemanha: IEEE, 2000. v. 33, n. 26, p. 321–326. ISSN 1474-6670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017391644>>.

LO, A. W. Long-term memory in stock market prices. In: **ECONOMETRICA**. Cleveland, Estados Unidos da América: The Econometric Society, 1991. v. 59, n. 5, p. 1279–1313.

LUO, Y.; CHEN, Y. Fractional order [Proportional Derivative] controller for robust motion control: Tuning procedure and validation. In: **2009 AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC)**. St. Louis, Estados Unidos da América: IEEE, 2009. p. 1412–1417. ISSN 2378-5861.

LURIE, B. J. Three-parameter tunable tilt-integral-derivative (TID) controller. In: **UNITED STATES PATENT: 5.371.670**. La Crescenta, Estados Unidos da América: NASA Press, 1994. Disponível em: <<http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19950011898.pdf>>.

MACHADO, J. A. T. Discrete-time fractional-order controllers. In: **FRACTIONAL CALCULUS AND APPLIED ANALYSIS**. Sófia, Bulgária: Bulgarian Academy of Sciences, 2001. v. 4, n. 1, p. 47–66.

MAGIN, R. L. **Fractional Calculus in Bioengineering**. Redding, Estados Unidos da América: Begell House, 2006. ISBN 9781567002157. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iMtqPgAACAAJ>>.

MAINARDI, F. **Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models**. Londres, Inglaterra: Imperial College-Press, 2010.

MAITI, D.; BISWAS, S.; KONAR, A. Design of a fractional order PID controller using particle swarm optimization technique. In: **2ND NATIONAL CONFERENCE ON RECENT TRENDS IN INFORMATION SYSTEMS**. Nova Delhi, Índia: IK International Publishing House Pvt Limited, 2008. abs/0810.3776. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0810.3776>>.

MANAGE, S. The non-integer integral and its applications to control systems. In: **THE JOURNAL OF THE INSTITUTE OF ELECTRICAL ENGINEERS OF JAPAN**. Tóquio, Japão: IEEJ, 1961. v. 6, n. 3, p. 83–87.

MATHWORKS INC. **MATLAB versão 9.5**. Natick, Estados Unidos da América: [s.n.], 2018. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/>>. Acessado em: 2018-10-31.

MATIGNON, D. Generalized fractional differential and difference equations: Stability properties and modeling issues. In: **MATH: THEORY OF NETWORKS AND SYSTEMS SYMPOSIUM**. Padova, Itália: Il Poligrafo, 1998. p. 503–506.

MILLER, K. S.; ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**. Hoboken, Estados Unidos da América: Wiley-Blackwell, 1993. ISBN 9780471588849. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=MOp\QgAACAAJ>>.

MONJE, C. A. **Métodos de Diseño de Controladores de Orden Fraccional para Aplicaciones Industriales**. Tese (Doutorado em Sistemas y Automática) — Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Automática, Universidad de Extremadura, Extremadura, Espanha, Outubro 2006.

MONJE, C. A.; CHEN, Y.; VINAGRE, B. M.; XUE, D.; FELIU, V. **Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications**. Londres, Inglaterra: Springer-Verlag, 2010. ISBN 9781849963350.

MONJE, C. A.; VINAGRE, B. M.; CALDERÓN, A. J.; FELIU, V.; CHEN, Y. Auto-tuning of fractional lead-lag compensators. In: **16TH IFAC PROCEEDINGS VOLUMES**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2005. v. 38, n. 1, p. 319–324. ISSN 1474-6670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016364655>>.

MONJE, C. A.; VINAGRE, B. M.; FELIU, V.; CHEN, Y. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. In: **CONTROL ENGINEERING PRACTICE**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2008. v. 16, n. 7, p. 798–812. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066107001566>>.

MOORE, B. C. Principal component analysis in linear systems: Controlability, observability and model reduction. In: **IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL**. Londres, Inglaterra: IEEE, 1981. v. 26, n. 1, p. 17–32.

- NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. In: **THE COMPUTER JOURNAL**. Oxford, Inglaterra: Oxford University Press, 1965. v. 7, n. 4, p. 308–313. ISSN 0010-4620.
- OLDHAM, K.; SPANIER, J. **The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order**. Londres, Inglaterra: Dover Publications, 1974. ISBN 9780486450018. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=yh68AAAACAAJ>>.
- OLIVEIRA, D. S. **Derivada Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, Agosto 2014.
- OLIVEIRA, H. S. **Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, Setembro 2010.
- OUSTALOUP, A. **Systèmes Asservis Linéaires d'Ordre Fractionnaire: Théorie et Pratique**. Paris, França: Masson, 1983. ISBN 9782225789700. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=y_B8AAAACAAJ>.
- OUSTALOUP, A.; LAY, L. L.; MATHIEU, B. Identification of non integer order system in the time domain. In: **PROCEEDINGS OF IEEE COMPUTATIONAL ENGINEERING IN SYSTEM APPLICATION (CESA) CONFERENCE**. Lille, França: IEEE, 1996. p. 9–12.
- OUSTALOUP, A.; LEVRON, F.; MATHIEU, B.; NANOT, F. M. Frequency-band complex non integer differentiator: Characterization and synthesis. In: **IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS - PART I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS**. Gainesville, Estados Unidos da América: IEEE, 2000. v. 47, n. 1, p. 25–39.
- OUSTALOUP, A.; MATHIEU, B.; LANUSSE, P. The CRONE control of resonant plants: Application to a flexible transmission. In: **EUROPEAN JOURNAL OF CONTROL**. Paris, França: Elsevier BV, 1995. v. 1, n. 2, p. 113–121. ISSN 0947-3580. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0947358095700140>>.
- OUSTALOUP, A.; MELCHIOR, P.; LANUSSE, P.; COIS, O.; DANCLA, F. The CRONE toolbox for Matlab. In: **IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER-AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN (CACSD)**. Anchorage, Estados Unidos da América: IEEE, 2000. p. 190–190.
- OUSTALOUP, A.; MOREAU, X.; NOUILLANT, M. The CRONE suspension. In: **CONTROL ENGINEERING PRACTICE**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 1996. v. 4, n. 8, p. 1101–1108. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066196001098>>.
- OUSTALOUP, A.; SABATIER, J.; LANUSSE, P. From fractal robustness to the CRONE control. In: **FRACTIONAL CALCULUS AND APPLIED ANALYSIS (FCAA)**. Sófia, Bulgária: Bulgarian Academy of Sciences, 1999. v. 2, n. 1, p. 1–30. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00184272>>.
- PADULA, F.; VISIOLI, A. **Advances in Robust Fractional Control**. 1st. ed. Cham, Suíça: Springer Publishing Company, Incorporated, 2016. ISBN 3319354329, 9783319354323.

- PETRÁŠ, I. **Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation**. Berlin, Alemanha: Springer Berlin Heidelberg, 2011. (Nonlinear Physical Science). ISBN 9783642181016. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6exW-H3nllUC>>.
- PINTO, I. F. **Controle de Nível em um Sistema de Tanques usando Visão Computacional**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Controle e Automação) — Departamento de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, Julho 2016.
- PLATA, A. R. G. **Equações Diferenciais Fracionárias não Lineares**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, Junho 2016.
- PODLUBNY, I. **Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**. Londres, Inglaterra: Academic Press, 1999. (Mathematics in Science and Engineering). Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/395913>>.
- PODLUBNY, I. Fractional order systems and $PI^\lambda D^\mu$. In: **IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL**. Roma, Itália: IEEE, 1999. v. 44, n. 1, p. 208–214. ISSN 2334-3303.
- PODLUBNY, I.; DORCAK, L.; KOSTIAL, I. On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and $PI^\lambda D^\mu$. In: **PROCEEDINGS OF THE 36TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL**. San Diego, Estados Unidos da América: IEEE, 1997. v. 5, p. 4985–4990. ISSN 0191-2216.
- RAYNAUD, H. F.; ZERGAÏNOH, A. State-space representation for fractional order controllers. In: **AUTOMATICA**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2000. v. 36, n. 7, p. 1017–1021. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000510980000011X>>.
- ROBERTSON, B. L. Operational method of circuit analysis. In: **ELECTRICAL ENGINEERING**. Nova Iorque, Estados Unidos da América: IEEE, 1935. v. 10, n. 54, p. 1037–1045.
- RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. de. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. In: **REVISTA BRASILEIRA DE ENSINO DE FÍSICA**. São Paulo, Brasil: Scielo, 2015. v. 37, n. 3, p. 3305–1–3305–12. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172015000300305&nrm=iso>.
- SABATINO, F. **Quadrotor control: modeling, nonlinear, control design and simulation**. Dissertação (Mestrado em Electrical Engineering) — School of Electrical Engineering and Computer Science, KTH Royal Institute of Technology, Estocolmo, Suécia, Junho 2015.
- SHAMIM, A.; RADWAN, A. G.; SALAMA, K. N. Fractional smith chart theory. In: **IEEE MICROWAVE AND WIRELESS COMPONENTS LETTERS**. Los Angeles, Estados Unidos da América: IEEE, 2011. v. 21, n. 3, p. 117–119. ISSN 1558-1764.
- SHANG, B.; LIU, J.; ZHAO, T.; CHEN, Y. Fractional order robust visual servoing control of a quadrotor UAV with larger sampling period. In: **2016 INTERNATIONAL CONFERENCE**

ON UNMANNED AIRCRAFT SYSTEMS (ICUAS). Arlington, Estados Unidos da América: IEEE, 2016. p. 1228–1234.

SOARES, J. C. A. **Cálculo Fracionário e as Equações de Evolução**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, Setembro 2016.

TEPLJAKOV, A. **Fractional-Order Modeling and Control of Dynamic Systems**. Talín, Estônia: Tallinn University of Technology Press, 2017.

TEPLJAKOV, A.; PETLENKOV, E.; BELIKOV, J. **FOMCON Toolbox**. 2014. Disponível em: <<http://www.fomcon.net/>>. Acessado em: 2019-05-31.

TEPLJAKOV, A.; PETLENKOV, E.; BELIKOV, J. Gain and order scheduled fractional-order PID control of fluid level in a multi-tank system. In: **ICFDA'14 INTERNATIONAL CONFERENCE ON FRACTIONAL DIFFERENTIATION AND ITS APPLICATIONS 2014**. Catania, Itália: IEEE, 2014. p. 1–6.

TRIGEASSOU, J. C.; POINOT, T.; LIN, J.; OUSTALOUP, A.; LEVRON, F. Modeling and identification of a non integer order system. In: **1999 EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC)**. Karlsruhe, Alemanha: IEEE, 1999. p. 2453–2458.

TSIOTRAS, P. Further passivity results for the attitude control problem. In: **IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL**. Hoboken, Estados Unidos da América: IEEE, 1998. v. 43, n. 11, p. 1597–1600. ISSN 0018-9286.

VALÉRIO, D.; COSTA, J. **Toolbox Ninteger for Matlab v. 2.3**. 2005. Disponível em: <<http://web.ist.utl.pt/~duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm>>. Acessado em: 2019-08-07.

VALÉRIO, D.; COSTA, J. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols-type rules. In: **SIGNAL PROCESSING**. Nova Iorque, Estados Unidos da América: Elsevier Science Inc., 2006. v. 86, n. 10, p. 2771–2784. ISSN 0165-1684. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168406000624>>.

VALÉRIO, D.; COSTA, J. A review of tuning methods for fractional PIDs. In: **4TH IFAC WORKSHOP ON FRACTIONAL DIFFERENTIATION AND ITS APPLICATIONS**. Amsterdã, Holanda: Elsevier BV, 2010. p. 463–476.

VINAGRE, B. M.; CHEN, Y.; PETRÁŠ, I. Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator. In: **JOURNAL OF THE FRANKLIN INSTITUTE**. Filadélfia, Estados Unidos da América: The Franklin Institute Press, 2003. v. 340, n. 5, p. 349–362. ISSN 0016-0032. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003203000498>>.

VINAGRE, B. M.; PODLUBNY, I.; HERNÁNDEZ, A.; FELIU, V. Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. In: **FRACTIONAL CALCULUS AND APPLIED ANALYSIS (FCAA)**. Sófia, Bulgária: Bulgarian Academy of Sciences, 2000. v. 3, p. 945–950.

WANG, J. C. Realization of generalized Warburg impedance with RC ladder networks and transmission lines. In: **JOURNAL OF THE ELECTROCHEMICAL SOCIETY**. Bristol, Inglaterra: IOP Publishing Limited, 1987. v. 134, n. 8, p. 1915–1940.

WRIGHT, M. H. Direct search methods: Once scorned, now respectable. In: **NUMERICAL ANALYSIS**. Harlow, Inglaterra: Addison-Wesley, 1995. p. 191–208.

XUE, D.; CHEN, Y.; ATHERTON, D. P. **Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB (Advances in Design and Control)**. 1. ed. Filadélfia, Estados Unidos da América: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. ISBN 0898716381, 9780898716382.

XUE, D.; ZHAO, C.; CHEN, Y. Fractional order PID control of a DC-motor with elastic shaft: a case study. In: **2006 AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC)**. Minneapolis, Estados Unidos da América: IEEE, 2006. p. 66–72. ISSN 2378-5861.

ANEXO A – CÓDIGO-FONTE DO PROGRAMA MOSTRADO NO EXEMPLO 3.6.3

```
1 % Simulacao do artigo: "Fractional Order Control - A
   Tutorial"
2 % (YangQuan Chen, Ivo Petras & Dingyu Xue)
3 % Escrito por Flavio Campos
4 % Utiliza a toolbox FOTF disponivel em:
5 % https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange
   /60874-fotf-toolbox
6
7 % Definindo o sistema-teste (G)
8 fprintf(Simulacao do artigo: "Fractional Order Control - A
   Tutorial");
9 fprintf((YangQuan Chen, Ivo Petras & Dingyu Xue));
10
11 fprintf(Parte 1 - Definicao do sistema a ser simulado)
12 fprintf(O sistema a ser simulado e definido pela funcao "G=
   fotf(a,na,b,nb)".);
13 fprintf(Onde "a" e o vetor de coeficientes do denominador
   de "G", dado por:);
14 a=[2 3.8 2.6 2.5 1.5]
15 fprintf("na" e o vetor que contem as potencias fracionarias
   de "a", dado por:);
16 na=[3.501 2.42 1.798 1.31 0]
17 fprintf("b" e o vetor de coeficientes do numerador de "G",
   dado por:);
18 b=[-2 4]
19 fprintf(e "nb" e o vetor que contem as potencias
   fracionarias de "b", dado por:);
20 nb=[0.63 0]
21 fprintf("G" pode ser escrito entao como:);
22 G=fotf(a,na,b,nb)
```

```
23 pause
24
25 % Analise de estabilidade do sistema
26 fprintf(Parte 2 - Analise de estabilidade do sistema)
27 fprintf(Para verificarmos a estabilidade do sistema, basta
    utilizarmos a funcao);
28 fprintf("[K,q,err,apol]=isstable(G)". A funcao mostra os
    polos da funcao, com a);
29 fprintf(abertura da instabilidade dada por  $q\pi/2$ . (fig. 2
    do artigo));
30 fprintf(Tambem, retorna K=1 para um sistema estavel e K=0,
    para um instavel.);
31 fprintf(Neste caso, K=1 e  $q=0.01$ , o que nos daria um grau
    de instabilidade menor que 1 grau.);
32 fprintf(Pressione uma tecla para plotar.);
33 pause
34 [K,q,err,apol]=isstable(G)
35 pause
36
37 % Simulacao para uma entrada tipo degrau
38 fprintf(Parte 3 - Simulacao para uma entrada do tipo degrau
    unitario)
39 fprintf(Podemos simular a resposta a uma entrada do tipo
    degrau com a funcao);
40 fprintf(step(G,t), onde  $t=[1:0.01:50]$ );
41 t=0:0.01:50;
42 fprintf(Pressione uma tecla para plotar.);
43 pause
44 step(G,t)
45 pause
46
47 % Bode, Nyquist e Nichols
```

```
48 fprintf(Parte 4 - Plotando os graficos de Bode, Nyquist e
    Nichols)
49 fprintf(Para o mesmo sistema, podemos tambem obter os
    graficos de Bode atraves);
50 fprintf(da funcao bode(G).);
51 fprintf(Pressione uma tecla para plotar.);
52 pause
53 bode(G)
54 pause
55 fprintf(Assim como o grafico de Nyquist atraves da funcao
    nyquist(G).);
56 fprintf(Pressione uma tecla para plotar.);
57 pause
58 nyquist(G)
59 pause
60 fprintf(E o grafico de Nichols atraves da funcao nichols(G)
    .);
61 fprintf(Pressione uma tecla para plotar.);
62 pause
63 nichols(G)
64 pause
65
66 % Teste de simplificacao
67 fprintf(Parte 5 - Demonstracao da simplificacao de sistemas
    )
68 as=[2 3.8 2.6 2.5 1.5]; nas=[3.5 2.4 1.8 1.3 0]; bs=[-2 4];
    nbs=[0.6 0];
69 fprintf(Gs=);
70 Gs=fotf(as,nas,bs,nbs)
71 step(G,t); hold on; step(Gs,t); hold off
72 pause
73
```

```
74 % Teste de arredondamento
75 fprintf(Parte 6 - Demonstracao da arredondamento de
      sistemas)
76 ad=[2 3.8 2.6 2.5 1.5]; nad=[4 3 2 1 0]; bd=[-2 4]; nbd=[1
      0];
77 fprintf(Gd=);
78 Gd=fotf(ad,nad,bd,nbd)
79 step(G,t); hold on; step(Gs,t); step(Gd,t); hold off
80 pause
81
82 % Teste de um sistema com realimentacao
83 fprintf(Parte 7 - Demonstracao de um sistema com
      realimentacao)
84 fprintf(Por ultimo, podemos ter um sistema formado por);
85 fprintf(um controlador "Gc", uma planta "Gp" e a
      realimentacao unitaria "H".);
86 fprintf(Onde Gp=);
87 Gp=fotf([1.1,0.8 1.9 0.4],[1.8 1.3 0.5 0],[0.8 2],[1.2 0])
88 fprintf(Gc=);
89 Gc=fotf(3,0.8,[1.2 1.5],[0.72 0.33])
90 fprintf(H=);
91 H=fotf(1,0,1,0)
92 fprintf(A realimentacao desse sistema pode ser feita
      atraves da funcao:);
93 fprintf(GG=feedback(G*Gc,H));
94 GG=feedback(Gp*Gc,H)
```