



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
MESTRADO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

JOSÉ LEONARDO ESTEVES DA SILVA

HISTOGRAMA DE QUADRATURA EM TOMOGRAFIA DE ESTADO QUÂNTICO
DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

FORTALEZA

2018

JOSÉ LEONARDO ESTEVES DA SILVA

HISTOGRAMA DE QUADRATURA EM TOMOGRAFIA DE ESTADO QUÂNTICO DE
MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Orientadora: Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de Vasconcelos

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S58h Silva, José Leonardo Esteves da.
Histograma de quadratura em tomografia de estado quântico de máxima verossimilhança / José Leonardo Esteves da Silva. – 2018.
46 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de Vasconcelos.
1. Tomografia de estados quânticos. 2. Histograma. 3. Estados do tipo gato Schrödinger. 4. Estados de vácuo comprimido. 5. Estados de Fock. I. Título.

CDD 621.38

JOSÉ LEONARDO ESTEVES DA SILVA

HISTOGRAMA DE QUADRATURA EM TOMOGRAFIA DE ESTADO QUÂNTICO DE
MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Aprovada em: 20 de julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de
Vasconcelos (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Liliana Sanz de la Torre
Universidade Federal de Uberlândia - (UFU)

Prof. Dr. João Batista Rosa Silva
Universidade Federal do Ceará - (UFC)

A Deus. Aos meus pais, Arimatéia e Maria da
Conceição, e a minha filha Maria Jade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela dádiva da vida e fortalecimento diário.

À Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de Vasconcelos, pela paciência e excelente orientação.

Ao Dr. Scott Glancy, que apesar de estar distante, sempre foi prestativo, ajudando com valiosas sugestões e referências.

Aos professores Dr. Rubens Viana, Dr. João Batista e Dr. Jonas Soderholm, pelas importantes contribuições em minha formação e pelos conselhos indispensáveis na realização desse trabalho.

A minha filha Maria Jade, que foi minha inspiração e fortaleza nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Arimateia e Maria da Conceição, e ao meu irmão Raí, pelo amor e apoio sempre oferecidos.

Aos colegas do Grupo de Informação Quântica (GIQ): George, Paulo Régis, Luís Paulo, Samy Clever, Claudomir, Daniel, Ranara, Glaucionor, Franklin, Geovan, Antônio, Sergio Tahim, Aleksxandar Stojanovic (In Memoriam), Natalia e Gisele, pela amizade e pelos momentos de grandes reflexões.

A essas grandes pessoas que sempre me apoiaram: Marciana Siqueira, Natália Moreira, Wellington Martins, Christian Gama, Prof. Dr. Cezar Amário, Francisco Daniel, Antônio Elias, Auristela Abreu, Aurelice Abreu, Aurelucia Abreu e aos meus avós João Batista, Margarida, Mazé e Francisco Honório.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – (Brasil) CAPES – Código de Financiamento 001.

“O conhecimento torna a alma jovem e diminui
a amargura da velhice. Colhe, pois, a sabedoria.
Armazena suavidade para o amanhã.”

(Leonardo da Vinci)

RESUMO

A tomografia de estado quântico visa determinar o estado quântico de um sistema a partir de dados medidos e é uma ferramenta essencial para a ciência da informação quântica. Quando se lida com estados quânticos da luz de variáveis contínuas, a tomografia é frequentemente feita medindo-se as amplitudes de campo em diferentes fases ópticas usando detecção homódina. A medição homódina em fase de quadratura produz uma variável contínua, de modo que, para reduzir o custo computacional da tomografia, os pesquisadores frequentemente discretizam as medições. Mostramos que isso pode ser feito sem degradar significativamente a fidelidade entre o estado estimado e o estado verdadeiro. Nesta dissertação estudamos diferentes estratégias para determinar as larguras de caixa do histograma. Mostramos que o tempo de computação pode ser significativamente reduzido com pouca perda na fidelidade do estado estimado, quando os operadores de medição correspondentes a cada caixa do histograma são integrados na largura da caixa.

Palavras-chave: Tomografia de estados quânticos. Histograma. Estados do tipo gato Schrödinger. Estados de vácuo comprimido. Estados de Fock.

ABSTRACT

Quantum state tomography aims to determine the quantum state of a system from measured data and is an essential tool for quantum information science. When dealing with continuous variable quantum states of light, tomography is often done by measuring the field amplitudes at different optical phases using homodyne detection. The quadrature-phase homodyne measurement outputs a continuous variable, so to reduce the computational cost of tomography, researchers often discretize the measurements. We show that this can be done without significantly degrading the fidelity between the estimated state and the true state. In this thesis, we study different strategies for determining the histogram bin widths. We show that computation time can be significantly reduced with little loss in the fidelity of the estimated state when the measurement operators corresponding to each histogram bin are integrated over the bin width.

Keywords: Quantum state tomography. Histogram. Cat states. Squeezed vacuum states. Fock states.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Representação da esfera de Bloch para um qubit.	16
Figura 2	– Representação no espaço de fase de um estado comprimido.	24
Figura 3	– Representação da técnica de detecção homódina.	28
Figura 4	– Fidelidades entre os estados verdadeiros e os estados estimados em função da largura do bin para um estado de gato com amplitude $\alpha = 1$ e perda de fótons de 0,05. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. Cada conjunto de pontos com a mesma cor e forma de marcador corresponde a um diferente conjunto de dados. A largura média da caixa para o método de Scott é 0,35.	36
Figura 5	– Fidelidade média em função da largura de caixa para estados de gato com amplitudes $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 15$ fótons. As larguras médias de caixa para o método de Scott são 0,35 (estado de gato com $\alpha = 1$) e 0,64 (estado de gato com $\alpha = 2$).	37
Figura 6	– Fidelidade média em função a largura de caixa para um estado de vácuo comprimido cuja quadratura comprimida possui variância de $3/4$ da variância do vácuo. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 15$ fótons. A largura média das caixas para o método de Scott é 0,25.	38
Figura 7	– Fidelidade média em função da largura de caixa para um estado de gato com amplitude $\alpha = 1$. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. Para este estado, $\langle n \rangle = 0,6093$ e $\overline{\langle \hat{n} \rangle} = 0,6109$, dando uma largura de caixa pela fórmula de Leonhardt de 1,05. A largura média das caixas para o método de Scott é 0,35.	39
Figura 8	– Fidelidade média em função da largura de caixa para um estado de gato com amplitude $\alpha = 2$. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 15$ fótons. Para este estado, $\langle n \rangle = 3,1978$ e $\overline{\langle \hat{n} \rangle} = 3,1983$, dando uma largura de caixa pela fórmula de Leonhardt de 0,58. A largura média das caixas para o método de Scott é 0,64.	40
Figura 9	– Fidelidade média em função da largura de caixa para um estado de vácuo comprimido cuja quadratura comprimida possui variância $3/4$ da variância do vácuo. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. Para este estado, $\langle n \rangle = 0,0167$ e $\overline{\langle \hat{n} \rangle} = 0,0162$, dando uma largura de caixa pela fórmula de Leonhardt de 1,54. A largura média das caixas para o método de Scott é 0,25.	41

- Figura 10 – Fidelidade média em função da largura de caixa para estados de Fock com diferente número de fótons n . As larguras das caixas pela fórmula de Leonhardt são 0,56 ($n = 4$), 0,46 ($n = 6$), 0,40 ($n = 8$) e 0,36 ($n = 10$). As larguras médias das caixas para o método de Scott são 0,69 ($n = 4$), 0,82 ($n = 6$), 0,95 ($n = 8$), and 1,05 ($n = 10$). 41
- Figura 11 – Tempo médio de reconstrução em função da largura de caixa para um estado de gato com amplitude $\alpha = 1$. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. A largura de caixa pela fórmula de Leonhardt é 1,05 e a largura média das caixas para o método de Scott é 0,35. 42
- Figura 12 – Tempo médio de reconstrução em função da largura de caixa para um estado de vácuo comprimido cuja quadratura comprimida possui variância $3/4$ da variância do vácuo. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. A largura de caixa pela fórmula de Leonhardt é 1,54 e a largura média das caixas para o método de Scott é 0,25. 42

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MECÂNICA QUÂNTICA	14
2.1	Introdução	14
2.2	Os Postulados da Mecânica Quântica	14
2.3	Matriz Densidade	17
2.4	Medidas POVM	18
2.5	Fidelidade	18
3	ELEMENTOS DE ÓPTICA QUÂNTICA	20
3.1	Introdução	20
3.2	Oscilador harmônico	20
3.3	Estado de Número	21
3.4	Estados Coerentes	22
3.5	Estados Comprimidos	24
3.6	Estados Gato de Schrödinger	25
4	TOMOGRAFIA DE ESTADOS QUÂNTICOS	27
4.1	Introdução	27
4.2	Detecção Homódina	27
4.3	Tomografia Homódina de Máxima Verossimilhança	28
4.4	Algoritmos de Otimização	29
4.5	Regra de Referência Normal de Scott	30
4.6	Fórmula de Leonhardt	31
4.7	Estimativa do Número Médio de Fótons	32
5	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E RESULTADOS	34
5.1	Experimentos numéricos	34
5.2	Resultados	35
6	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Estimar um estado físico desconhecido com alta precisão é um dos maiores desafios atuais da área de Informação Quântica. A Tomografia de Estados Quânticos (TEQ) busca estimar o estado quântico de sistemas preparados em um mesmo estado desconhecido. Os primeiros avanços nas pesquisas nessa área foram publicados no final da década de 80 e eram relacionados a investigação da função de Wigner. É mostrado em (1) que a densidade de probabilidade da quadratura do campo medida experimentalmente é a projeção integral da função de Wigner em um plano vertical definido pela fase do oscilador local. Procedimentos como o uso de detecção homódina para a obtenção das distribuições marginais das diferentes fases ópticas foram fundamentais para a criação de diversos métodos de reconstrução do estado quântico, pois possibilitaram o uso de sistemas computacionais clássicos para efetuar estimativas de fenômenos de natureza quântica.

Em TEQ, uma coleção de sistemas quânticos, preparados no mesmo estado quântico desconhecido, são medidos em uma base escolhida de um conjunto completo de medições. Os resultados dessas medições são usados para aferir o estado do sistema. Um tratamento bastante utilizado em TEQ para estimar o estado do sistema é a máxima verossimilhança, que procura no espaço das matrizes de densidade candidatas aquela que maximiza a probabilidade de ocorrência dos dados experimentais obtidos (2). A otimização desse problema pode ser feita por diferentes algoritmos iterativos, entre eles o algoritmo $R\rho R$ (3) e o algoritmo do gradiente ascendente regularizado (AGAR) (1). Em nosso trabalho, o processo de otimização segue um critério de parada desenvolvido por Glancy, Knill e Girard (4).

A tomografia em sistemas de variáveis contínuas pode apresentar erros estatísticos decorrentes das flutuações associadas às quadraturas. Logo a forma como o estado é estimado influencia diretamente no comportamento da fidelidade. O uso da máxima verossimilhança reduz consideravelmente esses erros, já que esse método é assintoticamente convergente. Quando lidamos com tomografia homódina, que geram valores contínuos, precisamos de um processamento computacional considerável à medida que aumentamos o espaço de Hilbert usado na reconstrução do estado. Muitos pesquisadores discretizam os resultados das medições para reduzir o volume de dados e agilizar o cálculo da reconstrução. Esse trabalho discute como escolher uma estratégia de discretização de tal forma que as caixas usadas nos histogramas não sejam nem muito pequenas, nem grandes demais. O objetivo é mostrar que é possível encontrar uma largura de caixa que reduz o tempo de cálculo e o uso de memória, mas fornece uma boa

representação da distribuição subjacente.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, temos uma breve revisão de conceitos fundamentais da mecânica quântica; no Capítulo 3, apresentamos alguns estados quânticos da luz utilizados nos experimentos numéricos; o capítulo 4 discute tomografia homódina de máxima verossimilhança e os dois métodos utilizados para determinar a largura de caixa dos histogramas; no Capítulo 5, detalhamos os experimentos numéricos e os resultados obtidos. Apresentamos nossas conclusões e considerações finais no Capítulo 6.

2 MECÂNICA QUÂNTICA

2.1 Introdução

A física no início do século XX parecia bem estabelecida e completa, principalmente devido às teorias de Newton e Maxwell. Entretanto, alguns experimentos, como experimentos com a radiação de corpo negro (5) e o experimento de Stern-Gerlach (6), não podiam ser explicados pelas teorias existentes. Essas teorias clássicas não conseguiam reproduzir os resultados dos experimentos observados e, com isso, surgiu a necessidade de compreender de maneira mais precisa a natureza das partículas microscópicas. Para ajudar a entender tais fenômenos, Paul Dirac estabeleceu um formalismo matemático para reproduzir estados e operações relacionados com aspectos dessa natureza (7).

O trabalho de Planck, Bohr, de Broglie, Schrödinger, Heisenberg e outros levou ao desenvolvimento de uma nova teoria intitulada física quântica. A física clássica sustenta de maneira eficaz a escala macroscópica de planetas, pares de moléculas, baixas velocidades, entre outros objetos, mas é imprecisa numa escala quântica de átomos individuais, como elétrons e fótons.

O físico Richard Feynman observou que computadores clássicos só conseguiriam simular o funcionamento de sistemas quânticos com um custo exponencial em termos de tempo computacional. Para Feynman, havia uma necessidade de se construir um computador que executasse preceitos da mecânica quântica. O primeiro a propor um modelo para a máquina de Turing quântica foi David Deutsch, através dos modelos de circuitos quânticos (8).

O mundo quântico fundamenta-se por postulados que são a base inicial para a compreensão dessa pesquisa. Para iniciar esta dissertação apresentamos estes postulados retirados das páginas 80 a 88 do livro de Nielsen e Chuang (9).

2.2 Os Postulados da Mecânica Quântica

A estrutura matemática que descreve os sistemas quânticos é validada pelos seguintes postulados:

Postulado 1: *Para qualquer sistema físico isolado, há um espaço de Hilbert associado a ele, definido como espaço de estados do sistema. Tal sistema será completamente*

caracterizado pelo seu vetor de estado, um vetor unitário no espaço.

Em computação quântica, o sistema quântico mais simples é o qubit e seu espaço de estados é bidimensional. Seja

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

uma base ortonormal desse espaço. Todo vetor arbitrário neste espaço pode ser escrito na forma:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (2.2)$$

onde a e b são números complexos. Essa notação foi criada por Dirac, onde $|\psi\rangle$ é denominado ket e seu complexo conjugado, $\langle\psi|$, recebe o nome de bra. Tal estado deve ser unitário de modo que se tenha $|a|^2 + |b|^2 = 1$, sendo esta a condição de normalização para os vetores de estado. Como $|a|^2 + |b|^2 = 1$, podemos escrever a Eq. (2.2) da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \quad (2.3)$$

de modo que os parâmetros θ e φ são suficientes para descrever o vetor de estado, que é um ponto na superfície da esfera de Bloch. Essa esfera de raio unitário é um recurso utilizado para visualizar o estado de um qubit, pois nos fornece uma representação do estado em três dimensões como mostrado na figura abaixo.

Postulado 2: *A evolução de um sistema quântico fechado é representada por uma transformação unitária. Se o estado inicial do sistema for $|\psi\rangle$ em um tempo t_1 , então esse estado se relaciona com um estado $|\psi'\rangle$ do sistema em t_2 pela atuação de um operador unitário U*

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad (2.4)$$

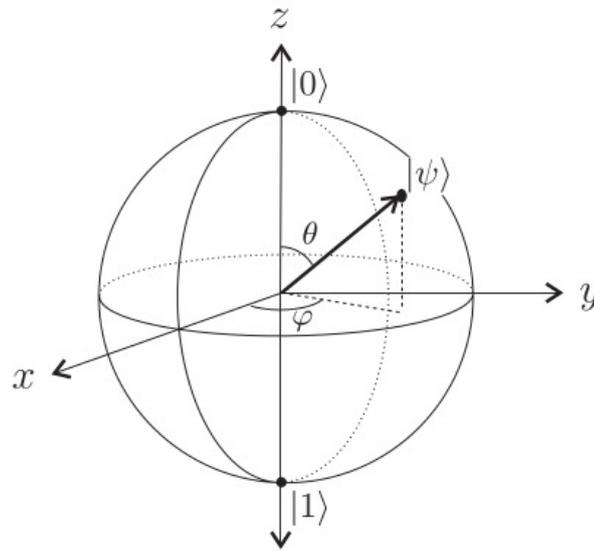
de modo que U depende somente de t_1 e t_2 .

Postulado 2': *A evolução temporal de um sistema quântico fechado é descrita pela equação diferencial de Schrödinger, dada por:*

$$H|\psi\rangle = i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt}, \quad (2.5)$$

onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π e H é o Hamiltoniano do sistema. Se o operador que descreve a energia do sistema (H) é conhecido, logo a equação é suficiente para descrever o

Figura 1 – Representação da esfera de Bloch para um qubit.



Fonte: (7).

estado quântico $|\psi(t)\rangle$.

Postulado 3: As medições quânticas são representadas por operadores de medida M_m que agem no espaço de estados do sistema. O índice m descreve os possíveis resultados das medições. Se o estado de um sistema imediatamente antes da medição é dado por $|\psi\rangle$, a probabilidade do resultado da medida ser m é

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle. \quad (2.6)$$

Após a medição, o estado do sistema será da forma:

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (2.7)$$

Os operadores de medição satisfazem a relação de completudeza:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I, \quad (2.8)$$

em que I é a matriz identidade no espaço de estados. Pela relação de completudeza, a soma de todas as probabilidades geradas por esses operadores de medição deve ser igual a 1:

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle. \quad (2.9)$$

Muitas vezes lidamos com sistemas compostos de dois ou mais sistemas físicos distintos. Para esses casos, precisamos descrever o sistema composto em termos de seus sistemas

componentes. O postulado a seguir mostra como o espaço de estados de um sistema composto se relaciona com os espaços de estados dos sistemas individuais.

Postulado 4: *O espaço de estados de um sistema quântico composto é o produto tensorial de todos os espaços dos sistemas quânticos individuais. Para um sistema composto de n sistemas individuais, temos:*

$$|\psi_0\rangle \otimes |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (2.10)$$

2.3 Matriz Densidade

O operador densidade ou matriz densidade (ρ), é uma formulação alternativa da mecânica quântica para representar estados quânticos. Essa formulação é matematicamente equivalente à abordagem que usa vetores de estado. A maior vantagem dessa formulação é que ela descreve estados mistos, enquanto vetores de estado só podem ser usados para descrever estados puros.

Se um sistema quântico está em um estado puro descrito pelo vetor de estado $|\psi\rangle$, escrevemos o operador densidade desse sistema como $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Se não tivermos essa situação, significa que ρ é um estado misto ou uma mistura de estados. No caso de uma mistura estatística de estados, a matriz densidade ρ é um operador hermitiano escrito na seguinte forma:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i, \quad (2.11)$$

onde p_i são as probabilidades associadas a cada estado da mistura e ρ_i os operadores densidade individuais desses estados.

Para distinguir os casos citados acima, relacionamos o traço da matriz densidade com a pureza do estado da seguinte forma: um estado quântico arbitrário ρ é dito *puro* se $Tr(\rho^2) = 1$, caso tenhamos $Tr(\rho^2) < 1$ esse estado será um estado misto (10).

Um operador ρ é um operador de densidade associado a algum ensemble de estados quânticos se e somente se ρ satisfizer as seguintes propriedades:

1. **(Condição sobre o traço)** *O traço da matriz densidade deve ser igual a 1. ($Tr(\rho) = 1$).*
2. **(Condição de positividade)** *$\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0$, onde $|\phi\rangle$ é um estado arbitrário no espaço de estados. Ou seja, ρ é positivo.*

2.4 Medidas POVM

O postulado 3, que trata de medições gerais, apresenta duas regras distintas: uma descreve a estatística das medidas e a outra descreve o estado do sistema logo após a realização das medições. Em alguns casos, as probabilidades relacionadas aos diferentes resultados das medições é mais relevante do que o próprio estado final do sistema. Para esses casos, introduzimos e utilizamos uma ferramenta matemática conhecida como formalismo POVM (*Positive Operator-Value Measure*). Esse formalismo nos permite determinar as probabilidades sem o conhecimento exato dos operadores de medida.

Pelo postulado 3, a probabilidade de obter o resultado m , dado que foi realizada a medição correspondente ao conjunto de operadores M_m em um estado ρ , é dada por

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle. \quad (2.12)$$

Vamos definir um operador $\Pi_m = M_m^\dagger M_m$, tal que o conjunto Π_m obedece às seguintes condições: $\sum_m \Pi_m = I$ e $\Pi_m \geq 0$. Esse conjunto é denominado POVM e os elementos do conjunto são conhecidos como elementos POVM.

Conhecer os elementos POVM é suficiente para determinar as probabilidades de um experimento. Por outro lado, se conhecemos apenas esses operadores Π_m , não conseguimos determinar os operadores de medida M_m , pois existe uma família de operadores distintos tal que $M_m^\dagger M_m = \Pi_m$.

2.5 Fidelidade

A fidelidade avalia o quão próximos no espaço de Hilbert são dois estados quânticos. Embora não seja uma medida sobre matrizes densidade, ela ajuda a estabelecer uma relação de proximidade entre essas matrizes no espaço de estados (9). Para calcular a fidelidade é necessário saber a priori que tipos de estados temos em mãos, ou seja, se estamos lidando com estados puros ou mistos. A fidelidade entre dois estados quânticos é uma estimativa probabilística: quanto mais próximo de 1, mais idênticas serão as matrizes densidade analisadas. A fidelidade é comumente utilizada em informação quântica e também em tomografia de estados quânticos.

Quando temos dois estados puros, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, a fidelidade entre esses dois estados é definido pelo módulo do produto interno entre eles:

$$F(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|. \quad (2.13)$$

Esse conceito é facilmente estendido para o caso onde um dos estados é misto e o outro é puro. Nesse caso, temos:

$$F(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \rho_2) = \sqrt{|\langle\psi_1|\rho_2|\psi_1\rangle|}. \quad (2.14)$$

A generalização da Eq. (2.13) para dois estados mistos foi feita por Richard Jozsa em 1994 (11).

Essa generalização deve obedecer a quatro axiomas:

1. $0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1$, e $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ se e somente se $\rho_1 = \rho_2$.
2. $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$.
3. Se ρ_1 é um estado puro, então a Eq. (2.13) é válida.
4. $F(\rho_1, \rho_2)$ é invariante por transformações unitárias no espaço de estados.

As Eqs. (2.13) e (2.14) poderiam ser escritas, em uma generalização direta para estados mistos, na forma $F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr}(\rho_1, \rho_2)$. No entanto, esta formulação não satisfaz o axioma 1.

Uma forma de escrever a fidelidade entre dois estados mistos é dada por:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr}\sqrt{\rho_1^{1/2} \rho_2 \rho_1^{1/2}}. \quad (2.15)$$

Vale ressaltar que esta não é a única forma de definir a fidelidade entre dois estados mistos. Qualquer fórmula criada que satisfaça os axiomas acima pode ser usada para medir a fidelidade entre estados mistos (12).

Em nosso trabalho, utilizamos essa fidelidade para verificação da proximidade entre o estado verdadeiro e o estado reconstruído.

3 ELEMENTOS DE ÓPTICA QUÂNTICA

3.1 Introdução

O advento do laser e o desenvolvimento da teoria quântica de coerência óptica de Glauber promoveram um avanço no estudo das propriedades quânticas da luz. A quantização do campo eletromagnético (13) levou a uma compreensão mais clara sobre as flutuações do vácuo (flutuações associadas a energia do ponto zero). Esse foi o ponto de partida para o desenvolvimento da Óptica Quântica.

A teoria formal da quantização da luz foi desenvolvida na década de 1920, mas durante muito tempo os esforços foram voltados para os cálculos dos espectros dos átomos e não para a investigação dos efeitos associados à luz. Esse cenário mudou completamente em 1956 com os experimentos de Hanbury Brown e Twiss. Esses experimentos são considerados a primeira tentativa séria de medir as flutuações na intensidade da luz em escalas curtas de tempo.

É razoável esperar que características quânticas sejam observadas em todos os estados da luz, já que a teoria que descreve a luz quanticamente é mais fundamental do que a teoria que a descreve classicamente. Entretanto, observar as características quânticas da luz é, no geral, uma tarefa árdua.

Iremos agora fazer uma apresentação de alguns desses estados, enfatizando suas propriedades não-clássicas.

3.2 Oscilador harmônico

A quantização do oscilador harmônico clássico é feita associando-se a x e p (posição e momento) operadores hermitianos que satisfazem a relação de comutação canônica.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (3.1)$$

Com isso, o Hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (3.2)$$

onde m e ω representam a massa e a frequência associadas a H . Usando a seguinte transformação linear

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.3)$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (3.4)$$

escrevemos o Hamiltoniano como:

$$H = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right), \quad (3.5)$$

onde $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{n}$ é o operador de número. As variáveis do oscilador harmônico são contínuas, pois o seu espaço de Hilbert de dimensão infinita é descrito por observáveis de espectro contínuo.

3.3 Estado de Número

Atuar o operador \hat{a} (\hat{a}^\dagger) em um estado com n fótons, leva a um estado um nível abaixo (acima), com $n - 1$ ($n + 1$) fótons. Por isso o operador \hat{a} (\hat{a}^\dagger) recebe o nome de operador de destruição (criação) ou operador de abaixamento (levantamento).

Os estados de número, também conhecidos como estados de Fock, são estados que possuem número de fótons bem definido e completa indefinição na fase do campo, e são os autoestados do operador número (14): $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$.

Podemos obter o estado de número ao atuar o operador de criação n vezes no estado de vácuo:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (3.6)$$

Estes estados são ortogonais

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{nm}, \quad (3.7)$$

e cumprem

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = \mathbb{I}, \quad (3.8)$$

de maneira que a norma destes autovetores é finita, formando um conjunto completo de vetores de base para um espaço de Hilbert (15).

As propriedades estatísticas da luz são caracterizadas pelo parâmetro de Mandel (16), dado por:

$$Q_n = \frac{(\Delta n)^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (3.9)$$

onde $(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ é a variância associada ao número médio de fótons, $\langle n \rangle$.

Para $Q_n = 0$ a estatística é dita Poissoniana. Esse é o caso dos estados coerentes (laser ideal), que possuem características previstas pela física clássica e são nomeados como estados quase-clássicos. Para $Q_n > 0$, a luz é chamada Super-Poissoniana e exibe ruído de contagem de fótons maior do que o ruído da luz coerente. Como não há propriedades quânticas nesses estados, eles são extritamente estados clássicos. Para $Q_n < 0$, a estatística de fótons é definida por uma distribuição Sub-Poissoniana. Esses estados tem ruído menor que o da luz coerente e não possuem propriedades clássicas. São exclusivamente estados quânticos.

3.4 Estados Coerentes

No ano de 1963, o físico Roy J. Glauber apresentou uma teoria quântica geral sobre a coerência óptica, que lhe rendeu um prêmio Nobel de Física em 2005. Tal formulação o consolidou como pioneiro da definição de estado coerente (13).

Um estado coerente é gerado pela atuação de um certo operador unitário, chamado operador deslocamento, definido por

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \quad (3.10)$$

no estado de vácuo:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (3.11)$$

Estes estados são os autoestados do operador de aniquilação (16):

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.12)$$

Os autovalores α são números complexos, de modo que podemos expressar $|\alpha| = \alpha e^{-i\theta}$, em que $|\alpha|$ indica a intensidade do deslocamento a partir da origem do espaço de fase e θ indica a direção do deslocamento.

Um estado coerente expandido na base de número é expresso da seguinte forma (17):

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.13)$$

Estados coerentes obedecem a seguinte relação de completude (18):

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \mathbb{I}, \quad (3.14)$$

formando um conjunto supercompleto. Isso significa que estados coerentes possuem um subconjunto completo: qualquer vetor pode ser expresso em termos de estados coerentes em mais de uma forma e deixando de lado certos estados coerentes. Estados que formam um conjunto supercompleto, não podem ser ortogonais entre si. Dessa forma, dois estados coerentes distintos $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ tem produto interno definido por:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha^*\beta\right], \quad (3.15)$$

tal que

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}. \quad (3.16)$$

Esses dois estados são aproximadamente ortogonais no limite $|\alpha - \beta| \gg 1$.

O número médio de fótons de um estado coerente $|\alpha\rangle$ é dado por:

$$\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \quad (3.17)$$

A probabilidade de detecção de n fótons nesse estado obedece a distribuição de Poisson (15):

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (3.18)$$

Para o estado coerente, o valor esperado do campo elétrico tem a forma da expressão clássica. As flutuações do campo são as mesmas em qualquer instante do tempo, de modo que o campo é tão próximo de um campo clássico quanto é possível para qualquer estado quântico (19).

O princípio da incerteza de Heisenberg (20) define restrições no produto das incertezas de variáveis complementares, tais como posição e momento. Para o caso das quadraturas de campo, \hat{X}_1 e \hat{X}_2 , a relação de incerteza de Heisenberg é dada por

$$\Delta\hat{X}_1 \Delta\hat{X}_2 \geq \frac{1}{4}, \quad (3.19)$$

onde \hat{X}_1 e \hat{X}_2 são operadores hermitianos definidos como:

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.20)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (3.21)$$

com $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i/2$. Estados que satisfazem a igualdade na expressão (3.19) são chamados de estados de mínima incerteza. Os estados coerentes são estados de incerteza mínima e possuem flutuações iguais nas duas quadraturas.

3.5 Estados Comprimidos

Estados comprimidos também são estados de mínima incerteza, mas com a incerteza em uma das quadraturas reduzida, ao custo do aumento da incerteza na outra quadratura (21). Para obtermos um estado comprimido ideal, atuamos o operador unitário de compressão (22)

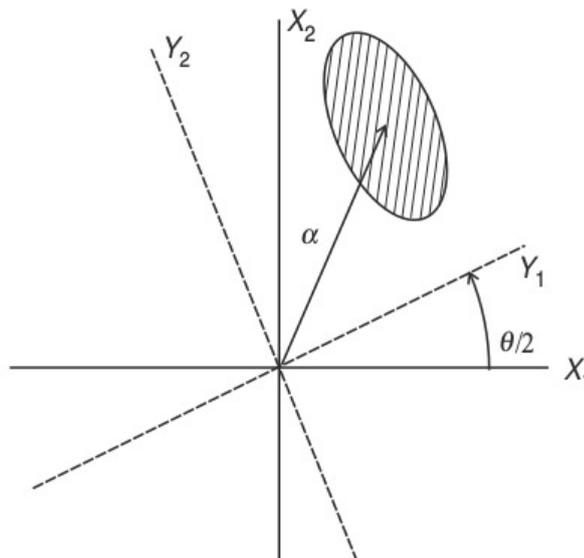
$$\hat{S}(\xi) = e^{\left[\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi (\hat{a}^\dagger)^2)\right]}, \quad (3.22)$$

no estado de vácuo e depois aplicamos o operador deslocamento sobre essa compressão:

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (3.23)$$

Em (3.22), $\xi = re^{i\theta}$, com r sendo o parâmetro de compressão, variando no intervalo $[0, \infty)$. θ representa o ângulo entre o eixo da elipse e o eixo da quadratura e α a amplitude complexa como apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Representação no espaço de fase de um estado comprimido.



Fonte: (14).

Uma outra forma de obtermos um estado comprimido é através da atuação dos operadores \hat{S} e \hat{D} na ordem inversa:

$$|\xi, \beta\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\beta)|0\rangle. \quad (3.24)$$

Como esses operadores não comutam, teremos o mesmo estado se (15)

$$\alpha = \cosh r \beta - e^{2i\theta} \sinh r \beta^*. \quad (3.25)$$

Estados comprimidos são estados não-clássicos, e, conseqüentemente não podem ser escritos como uma mistura estatística de estados coerentes. Em nosso trabalho, utilizamos um dos muitos estados comprimidos: aquele obtido a partir do vácuo pela aplicação do operador de compressão:

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (3.26)$$

Esse estado é denominado estado de vácuo comprimido. O número médio de fótons nesse estado é dado por

$$\langle n \rangle = \sinh^2 r > 0. \quad (3.27)$$

Como consequência da compressão, o vácuo comprimido possui apenas pares de fótons. A probabilidade de se obter um par de fótons obedece a seguinte expressão:

$$P(2n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{\cosh \xi} \left(\frac{\tanh \xi}{2} \right)^{2n}. \quad (3.28)$$

A variância associada a $\langle n \rangle$ no vácuo comprimido é, por sua vez, dada por

$$(\Delta n)^2 = 2(\langle n \rangle + \langle n \rangle^2). \quad (3.29)$$

Como a variância é maior do que o número médio de fótons, a distribuição estatística do número de fótons nesse estado é uma distribuição Super-Poissoniana.

3.6 Estados Gato de Schrödinger

Dodonov, Malkin e Manko foram os primeiros a mencionar os estados ópticos do tipo gato de Schrödinger (17). Esses estados recebem esse nome graças ao famoso experimento mental proposto por Erwin Schrödinger em 1935 e são definidos como superposições de dois estados coerentes de mesma amplitude, mas fases opostas (23):

$$|\Psi_\phi(\alpha)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_\phi(\alpha)}} (|-\alpha\rangle + e^{i\phi}|\alpha\rangle), \quad (3.30)$$

em que $N_\phi(\alpha) = 2 + 2\cos\phi e^{-2\alpha^2}$ é o fator de normalização. No limite de grandes amplitudes, $|-\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ se tornam macroscopicamente distinguíveis. Na base de número, $|\Psi_\phi(\alpha)\rangle$ é escrito na forma:

$$|\Psi_\phi(\alpha)\rangle = \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{N_\phi(\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + e^{i\phi} \right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.31)$$

A distribuição de fótons em um estado de gato Schrödinger depende da fase relativa entre os dois estados coerentes. Se $\phi = 0$, temos um estado com um número par de fótons, denominado estado de gato par. Se $\phi = \pi$, temos um estado cujo número de fótons é ímpar e que é chamado de estado de gato ímpar. Se $\phi = \frac{\pi}{2}$, temos os estados de Yurke-Stoler. Esses três estados citados são os autoestados do quadrado do operador de aniquilação com autovalor α^2 :

$$\hat{a}^2|\Psi_\phi(\alpha)\rangle = \alpha^2|\Psi_\phi(\alpha)\rangle. \quad (3.32)$$

Para um estado de gato par, o número médio de fótons é dado por:

$$\langle\Psi_0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\Psi_0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{N(\alpha)}}\right)^* \left(\frac{1}{\sqrt{N(\alpha)}}\right) (e^{2|\alpha|^2} + 2e^{-2|\alpha|^2} + 1)|\alpha|^2, \quad (3.33)$$

enquanto que para um estado de gato ímpar, temos

$$\langle\Psi_\pi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\Psi_\pi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{N(\alpha)}}\right)^* \left(\frac{1}{\sqrt{N(\alpha)}}\right) (e^{2|\alpha|^2} - 2e^{-2|\alpha|^2} + 1)|\alpha|^2. \quad (3.34)$$

A distribuição de probabilidade do número de fótons para um estado de gato par é dada por:

$$P(n) = \frac{2e^{-\alpha^2}\alpha^{2n}}{(1 + e^{-\alpha^2})n!}, \quad (3.35)$$

onde n é par. Para esses estados temos $Q_n > 0$, ou seja, uma estatística de fótons super-Poissoniana. Para estados de gato ímpares, a distribuição de probabilidade é

$$P(n) = \frac{2e^{-\alpha^2}}{1 + e^{-\alpha^2}}, \quad (3.36)$$

onde n é ímpar. A estatística de fótons desses estados é sub-Poissoniana, pois temos $Q_n < 0$ (19).

Para se reconstruir um estado de gato usando tomografia, precisamos de uma grande quantidade de medições homódinas para obter a distribuição de probabilidade da quadratura x em cada fase do oscilador local de 0 a π . De posse desses dados, construímos um histograma da quadratura usando tamanho de caixa, número de medições e número de fases do oscilador local finitos. Para que possamos reconstruir a probabilidade de detecção de n fótons, conhecendo a distribuição do número de fótons do estado, $P(n)$, precisamos que cada histograma tenha uma ordem de $4 \times (P(n))^{-2}$ pontos (24).

4 TOMOGRAFIA DE ESTADOS QUÂNTICOS

4.1 Introdução

Estimar o estado de sistemas físicos quânticos tem sido uma das principais formas de compreender a natureza quântica desses sistemas. Pela mecânica quântica, sabemos que não é possível duplicar cópias perfeitas de um sistema qualquer, com o objetivo de efetuar várias medições no mesmo estado (25). Além disso, cada medição perturba o sistema e consequentemente altera as informações contidas no estado. Essas foram algumas das razões que levaram ao desenvolvimento da Tomografia de Estados Quânticos (TEQ).

Inferir o estado de um sistema quântico usando medições é um problema fundamental, mas não é um problema que data do início da teoria quântica. A primeira abordagem sistemática desse problema se deu apenas em 1957 com o trabalho de Fano. A primeira técnica para reconstruir a matriz de densidade de um estado óptico foi baseada nas observações de Vogel e Risken, em 1989, de que as distribuições de probabilidade obtidas na detecção homódina é a transformada de Radon da função de Wigner (26). Como a transformada de Radon é utilizada na tomografia clássica, surgiu o termo tomografia quântica. Essa técnica foi demonstrada experimentalmente pela primeira vez em 1993 (27).

A TEQ é uma técnica para determinar um estado quântico desconhecido. Para isso, medições são realizadas em cada membro de um conjunto de sistemas quânticos preparados no mesmo estado desconhecido. Cada sistema é medido em uma base escolhida de um conjunto completo de medições. O estado desconhecido é estimado usando os resultados dessas medições. Essa estimativa pode ser feita usando vários métodos, tais como inversão linear, inferência Bayesiana e máxima verossimilhança.

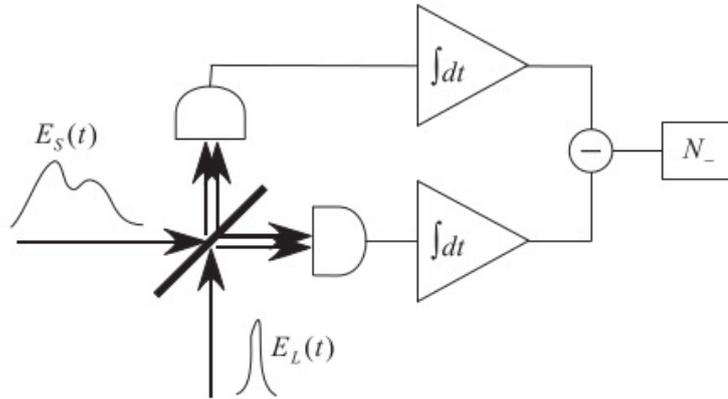
4.2 Detecção Homódina

Ao se fazer detecções em sistemas coerentes, utiliza-se uma modelagem caracterizada pelo uso de um outro feixe de luz, que é referência e denominado oscilador local. Se o oscilador local possuir a mesma frequência do sinal a ser medido, o método de detecção é denominado detecção homódina, caso contrário, essa técnica é denominada detecção heteródina (28). A detecção homódina mede a amplitude de qualquer componente de fase de um modo de luz.

A figura abaixo ilustra a detecção homódina. O sinal a ser medido $E_S(t)$ e o oscilador

local $E_L(t)$ se encontram em um divisor de feixe 50/50.

Figura 3 – Representação da técnica de detecção homódina.



Fonte: (1).

$\hat{N}_- = |\alpha_L|(\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta})$ com \hat{a} e \hat{a}^\dagger sendo os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, e $|\alpha_L|$ o módulo da amplitude do estado coerente.

Assim a detecção homódina não é apenas uma ferramenta ideal para medir a estatística de fótons, mas também pode ser utilizada na reconstrução da matriz densidade completa, permitindo obter a máxima informação possível do estado quântico conforme os próprios princípios da mecânica quântica.

4.3 Tomografia Homódina de Máxima Verossimilhança

A estimativa de máxima verossimilhança (EMV) se destaca por ser não-enviesada quando o número amostral tende ao infinito, além de se tornar mais eficiente com o aumento da população amostral (29).

Vamos considerar N sistemas quânticos, cada um preparado em um estado óptico descrito por uma matriz densidade ρ_V (estado verdadeiro). Em cada experimento i , medimos a quadratura de campo de um dos sistemas em alguma fase θ_i de um oscilador local (um sistema de referência preparado em um estado coerente de alta amplitude). Cada medição está associada a um observável $\hat{X}_{\theta_i} = \hat{X} \cos \theta_i + \hat{P} \sin \theta_i$, onde \hat{X} e \hat{P} são análogos aos operadores de posição e momento, respectivamente. Para uma dada fase θ_i , medimos um valor de quadratura x_i , resultando nos dados $\{(\theta_i, x_i) | i = 1, \dots, N\}$.

O resultado da i -ésima medição está associado a um elemento POVM $\Pi(x_i | \theta_i) = \Pi_i$.

A partir dos dados, a função de verossimilhança de uma matriz de densidade candidata ρ é

$$\mathcal{L}(\rho) = \prod_{i=1}^N \text{Tr}(\Pi_i \rho), \quad (4.1)$$

onde $\text{Tr}(\rho \Pi_i)$ é a probabilidade, quando medimos com a fase θ_i , de obter o resultado x_i , de acordo com a matriz de densidade candidata ρ .

A EMV procura pela matriz de densidade que maximiza a verossimilhança na Eq. (4.1). Geralmente, é mais conveniente maximizar o logaritmo da verossimilhança (o "log-verossimilhança") (30):

$$L(\rho) = \ln \mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=1}^N \ln[\text{Tr}(\Pi_i \rho)], \quad (4.2)$$

que é maximizado pela mesma matriz de densidade que maximiza a Eq. (4.1). A EMV é essencialmente um problema de otimização de uma função, e como a função log-verossimilhança é côncava (31), a convergência aproximada para uma solução única será alcançada pela maioria dos métodos iterativos de otimização.

4.4 Algoritmos de Otimização

Em nossas simulações numéricas, usamos um algoritmo para a maximização da verossimilhança que começa com iterações do algoritmo $R\rho R$ (32) seguido por iterações de um algoritmo de gradiente ascendente regularizado (AGAR). Mudamos de um algoritmo para o outro porque uma desaceleração é observada no algoritmo $R\rho R$ após cerca de $(t+1)^2/4$ iterações, onde $t+1$ é a dimensão do espaço de Hilbert. No AGAR, $\rho^{(k+1)}$ tem a seguinte parametrização:

$$\rho^{(k+1)} = \frac{(\sqrt{\rho^{(k)}} + A)(\sqrt{\rho^{(k)}} + A^\dagger)}{\text{Tr}[(\sqrt{\rho^{(k)}} + A)(\sqrt{\rho^{(k)}} + A^\dagger)]}, \quad (4.3)$$

onde $\rho^{(k)}$ é a matriz de densidade encontrada pela iteração anterior, e A pode ser qualquer matriz complexa com as mesmas dimensões do estado ρ . A Eq.(4.3) garante que $\rho^{(k+1)}$ é uma matriz de densidade para qualquer A . Em seguida, usamos a estratégia de otimização de programação quadrática sequencial (33), em que A é escolhida para maximizar a aproximação quadrática do log-verossimilhança, de tal forma que $\text{Tr}(AA^\dagger) \leq u$, onde u é um número positivo ajustado pelo algoritmo para garantir que o log-verossimilhança aumente a cada iteração. Para parar as iterações, usamos o critério proposto em (4), que estabelece que $L(\rho_{ML}) - L(\rho^k) \leq 0,2$, onde $L(\rho_{ML})$ é o máximo do log-verossimilhança, o que garante a convergência para um estado cujo log-verossimilhança é muito próximo da máxima verossimilhança.

As medições homódinas realizadas na TEQ geram valores contínuos. É uma prática popular discretizar o resultado da medição, pois isso pode reduzir consideravelmente o tamanho dos dados e agilizar o cálculo da reconstrução. No entanto, a discretização necessariamente causa perda de parte da informação contida nas medições originais. Como devemos escolher uma estratégia de discretização de tal forma que as caixas usadas no histograma não sejam muito pequenas nem grandes demais? Caixas maiores reduzirão o tempo de cálculo e a memória, mas caixas menores fornecerão uma melhor representação da distribuição subjacente. Discutiremos nas próximas seções duas estratégias de escolha do tamanho da caixa.

4.5 Regra de Referência Normal de Scott

Histogramas são importantes estimadores de densidade amostral em estatística. São estimadores de densidade não paramétricos que são derivados a partir da contagem dos pontos em caixas. Várias fórmulas para determinar a largura de caixa do histograma foram propostas, cada uma delas adequada a diferentes formas de distribuições (34).

Em 1979, Scott derivou uma fórmula recomendando uma largura de caixa para discretizar os dados amostrais de uma função de densidade de probabilidade f para uma única variável aleatória x (35). A largura de caixa recomendada é

$$h^* = \left[\frac{6}{s \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx} \right]^{1/3}, \quad (4.4)$$

onde a primeira e a segunda derivadas de f devem ser contínuas e limitadas e s é o tamanho da amostra. Como não conhecemos f em um experimento, consideramos uma distribuição normal. Para um f normal, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sigma^3}, \quad (4.5)$$

onde σ é o desvio padrão da distribuição. Combinando as Eqs. (4.4) e (4.5), obtemos a largura de caixa recomendada para uma distribuição normal:

$$h = 3.5 \sigma s^{-1/3}. \quad (4.6)$$

Essa fórmula é conhecida como regra de Scott e é ideal para estimar f (minimizando o erro médio quadrático total) em cada fase se os dados forem normalmente distribuídos. Em nossas simulações calculamos um tamanho de caixa separadamente para as medições de quadratura de cada fase e usamos o desvio padrão da amostra imparcial no lugar de σ .

Embora a regra de Scott seja ideal para cada fase, pode não ser ideal para a tomografia homódina porque estamos estimando a matriz densidade e não a distribuição da quadratura de cada fase individualmente. Temos também que muitos estados ópticos interessantes não tem distribuições de quadratura normais, por exemplo, estados de gato. Na verdade, esperamos que a largura das caixas esteja relacionada ao número de fótons em um estado quântico. Isso é esperado porque estados com números de fótons mais altos tem mais detalhes em suas distribuições de quadratura e esses detalhes não devem ser eliminados pela discretização.

4.6 Fórmula de Leonhardt

Em tomografia no espaço de fase, um número finito de fases de referências se faz necessário para uma boa amostragem de um estado quântico. As medidas de quadratura devem ser feitas em fases θ que estão no intervalo $[0, \pi]$. Se consideramos d fases de referência, podemos tomar ângulos igualmente espaçados dados por:

$$\theta_k = \frac{\pi k}{d}, \quad (4.7)$$

onde k é um número inteiro que vai de 0 a $d - 1$. Para cada fase medida via detecção homódina, obtemos uma variável contínua $(x|\theta)$. Mediante o número de medições em cada ângulo, podemos construir histogramas de quadratura. Essa ideia foi apresentada em 1997 pelo físico alemão Ulf Leonhardt e foi usada na reconstrução da distribuição de fótons de um estado gato de Schrödinger usando seis fases de referências. Um histograma para cada fase foi construído a partir da contagem das medidas de quadratura pertencente a cada caixa de largura fixa. Logo, a precisão na reconstrução dos elementos da matriz densidade estimada está diretamente relacionada a largura de caixa do histograma. Variações no tamanho da caixa gera variações nos erros estatísticos (28).

Leonhardt afirma que se desejamos reconstruir uma matriz de densidade de um estado com n fótons, precisamos de uma largura de caixa mais estreita que $q_n/2$, onde q_n é dado por

$$q_n = \frac{\pi}{\sqrt{2n+1}}, \quad (4.8)$$

Este resultado foi mostrado inicialmente em (36) e foi obtido a partir da aproximação semiclássica para as funções de padrão de amplitude na amostragem do estado quântico. Leonhardt recomenda usar o número máximo de fótons na Eq. (4.8), no entanto, muitos estados não tem número

máximo de fótons, e mesmo que um estado tenha um número máximo de fótons, não é possível obter esse número com certeza através da tomografia. No lugar do número máximo de fótons, usamos o número de fótons t no qual o espaço de Hilbert é truncado e também $\langle \hat{n} \rangle$, uma estimativa do número médio de fótons. O truncamento deve ser escolhido antecipadamente e ser grande o suficiente para garantir que a probabilidade de ρ_V conter mais de t fótons seja muito pequena. Estimamos o número médio de fótons a partir das medidas de quadratura, conforme descrito na próxima seção.

4.7 Estimativa do Número Médio de Fótons

Para usar a fórmula de Leonhardt para escolher a largura de caixa do histograma, precisamos estimar o número médio de fótons no estado medido a partir do conjunto de dados de quadratura de fase. Usamos o estimador dado pelas Refs. (37) e (38). Para encontrar um estimador, calculamos primeiro o valor médio de $(\hat{X}_\theta)^2$, calculado em média sobre θ , tratando θ como se fosse aleatório e uniformemente distribuído entre 0 e π .

$$\langle (\hat{X}_\theta)^2 \rangle = \langle \hat{X}^2 \cos^2 \theta + (\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}) \cos \theta \sin \theta + \hat{P}^2 \sin^2 \theta \rangle \quad (4.9)$$

A fase θ é independente de \hat{X} e \hat{P} , então podemos calcular o valor esperado sobre θ da seguinte forma, considerando $\text{Prob}(\theta)$ a probabilidade associada a θ :

$$\langle (\hat{X}_\theta)^2 \rangle = \left\langle \int_0^\pi (\hat{X}^2 \cos^2 \theta + (\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}) \cos \theta \sin \theta + \hat{P}^2 \sin^2 \theta) \text{Prob}(\theta) d\theta \right\rangle \quad (4.10)$$

$$\langle (\hat{X}_\theta)^2 \rangle = \left\langle \int_0^\pi (\hat{X}^2 \cos^2 \theta + (\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}) \cos \theta \sin \theta + \hat{P}^2 \sin^2 \theta) \frac{1}{\pi} d\theta \right\rangle \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \hat{X}^2 + \hat{P}^2 \rangle. \quad (4.12)$$

Como o operador de número, em função dos operadores de posição e momento, é dado por

$$\hat{n} = \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1), \quad (4.13)$$

obtemos

$$\langle \hat{n} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \hat{X}^2 + \hat{P}^2 \rangle - 1) \quad (4.14)$$

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \hat{X}_\theta^2 \rangle - \frac{1}{2}. \quad (4.15)$$

Assim, calculando o valor esperado de $(\hat{X}_\theta)^2$, obtemos o número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$. Podemos estimar $\langle \hat{n} \rangle$ pela média de todas as medições de quadratura na amostra (37, 38):

$$\overline{\langle \hat{n} \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{2}, \quad (4.16)$$

onde a barra acima de $\langle \hat{n} \rangle$ distingue nossa estimativa do número médio de fótons do verdadeiro número médio de fótons. Observamos que quando θ está uniformemente distribuído de $[0, \pi)$, os valores individuais de θ não são necessários para calcular $\overline{\langle \hat{n} \rangle}$.

Como usamos estados quânticos conhecidos em nossos experimentos numéricos idealizados, podemos calcular exatamente o número médio de fótons em cada estado. Isso pode ser usado para verificar o quão precisa é a estimativa usando Eq. (4.16).

5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E RESULTADOS

5.1 Experimentos numéricos

Em espaços de Hilbert com dimensão infinita é impossível estimar todos os parâmetros necessários para reconstruir o estado. Neste caso, é preciso limitar o espaço, através do truncamento do número de fótons, para podermos estimar todos os parâmetros desse subespaço (39).

Nossos experimentos numéricos simulam medições homódinas ópticas de modo único (1) de três tipos de estados: (1) superposição de estados coerentes de fases opostas $|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle$ (chamados de “estados de gato”), (2) estados de vácuo comprimido e (3) estados de Fock. Esses estados são estados de dimensões infinitas no espaço de Hilbert e por isso truncaremos o espaço em t fótons. Para melhor simular um experimento real, esses estados puros sofrerão uma perda de fótons de 0,05, passando por um meio com transmissividade de 0,95 antes da medição. Cada estado considerado é representado por uma matriz de densidade ρ_V na base de t fótons.

Para calcular a probabilidade de obter o resultado da medição homódina x , ao medirmos o estado ρ_V com fase θ , representamos não só todos os estados, mas também todas as medições na base de número de fótons de um espaço de Hilbert truncado em t fótons. Se $|x\rangle$ é o autoestado da quadratura x com autovalor x , e $U(\theta)$ é o operador unitário de evolução de fase, então, para uma medida homódina ideal, temos $\Pi(x|\theta) = \sum_{i=1}^n U(\theta)^\dagger |x\rangle \langle x| U(\theta)$. Consideramos também a ineficiência dos detectores de fótons através da substituição do projetor por:

$$\Pi(x|\theta) = \sum_{i=1}^n E_i(\eta)^\dagger U(\theta)^\dagger |x\rangle \langle x| U(\theta) E_i(\eta) \quad (5.1)$$

onde η é a eficiência do detector e $E_i(\eta)$ são os operadores de Krauss associados (3). Sistemas de detecção homódina de última geração têm eficiência $\eta = 0,9$ (40), então usamos este valor em nossas simulações. Utilizando essa estratégia, podemos corrigir a ineficiência do detector à medida que estimamos o estado. Também utilizamos em nossas simulações a amostragem de rejeição da distribuição dada por $P(x|\theta)$ para produzir amostras aleatórias dos resultados das medições homódinas (41).

Para escolher as fases em que as medições homódinas são realizadas, dividimos o meio-círculo superior uniformemente em m fases entre 0 e π e medimos N/m vezes em cada fase, onde N é o número total de medições. Em todas as simulações, usamos $m = 20$ e $N = 20.000$.

Para garantir um único máximo da função de verossimilhança, precisamos de um conjunto de operadores de medição informacionalmente completo (o conjunto de medições é suficiente para reconstruir o estado), que pode ser obtido se usarmos $t + 1$ fases diferentes para reconstruir um estado que contenha no máximo t fótons (28).

Para quantificar o quão similar um estado reconstruído ρ é de um estado verdadeiro ρ_V , usamos a fidelidade definida em (2.15). Calculamos a fidelidade entre o estado reconstruído e o estado verdadeiro para quatro situações diferentes: (i) o estado é reconstruído usando os resultados contínuos de medição homódina, ou seja, sem discretização; (ii) o estado é reconstruído usando histogramas com larguras de caixa previamente escolhidas (iii) o estado é reconstruído usando histogramas com larguras de caixa dadas pela regra de Scott (35); e (iv) o estado é reconstruído usando histogramas com larguras de caixa dadas pela fórmula de Leonhardt (28).

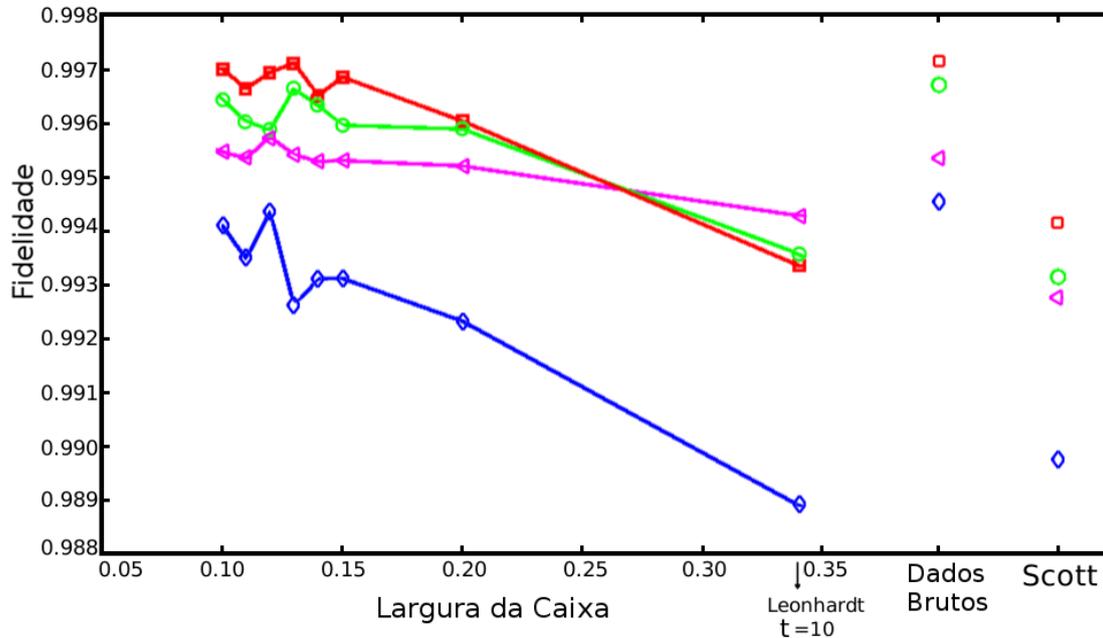
Para construir os gráficos mostrados na próxima seção, para cada escolha de parâmetros, simulamos 100 experimentos de tomografia, fazendo 100 estimativas de matriz de densidade. A fidelidade mostrada nos gráficos é a média aritmética das 100 fidelidades dos estados reconstruídos. A meia largura das barras de erro são os desvios padrão da amostra de 100 fidelidades.

5.2 Resultados

Para estudar o desempenho das diferentes estratégias de discretização, calculamos a fidelidade entre o estado verdadeiro e os estados estimados usando essas estratégias. Abaixo, ρ_{ML2} representa o estado estimado sem discretização, ρ_{Hist} é estimado usando histogramas de larguras específicas e escolhidas aleatoriamente, ρ_{Scott} é estimado com larguras dadas pela regra de Scott e $\rho_{Leonhardt}$ é estimado com larguras calculadas usando a fórmula de Leonhardt.

Nosso primeiro resultado é mostrado na Figura 4. O estado considerado é um estado de gato com amplitude $\alpha = 1$, onde α é a amplitude do estado coerente da superposição. O estado é reconstruído em um espaço de Hilbert truncado em $t = 10$ fótons. A probabilidade de um estado de gato com $\alpha = 1$ ter mais de 10 fótons é de apenas $P(10) = 3,77 \times 10^{-10}$. O método de Scott encontra uma largura de caixa ideal para cada fase considerada, tal que reportamos aqui a largura de caixa média calculada usando as larguras encontrada nas diferentes 20 fases usadas. Para esse caso da Figura 4, a média da largura de caixa para o método de Scott é de 0,35. Quando escolhermos a largura da caixa aleatoriamente, usamos como valor máximo 0,34,

Figura 4 – Fidelidades entre os estados verdadeiros e os estados estimados em função da largura do bin para um estado de gato com amplitude $\alpha = 1$ e perda de fótons de 0,05. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. Cada conjunto de pontos com a mesma cor e forma de marcador corresponde a um diferente conjunto de dados. A largura média da caixa para o método de Scott é 0,35.

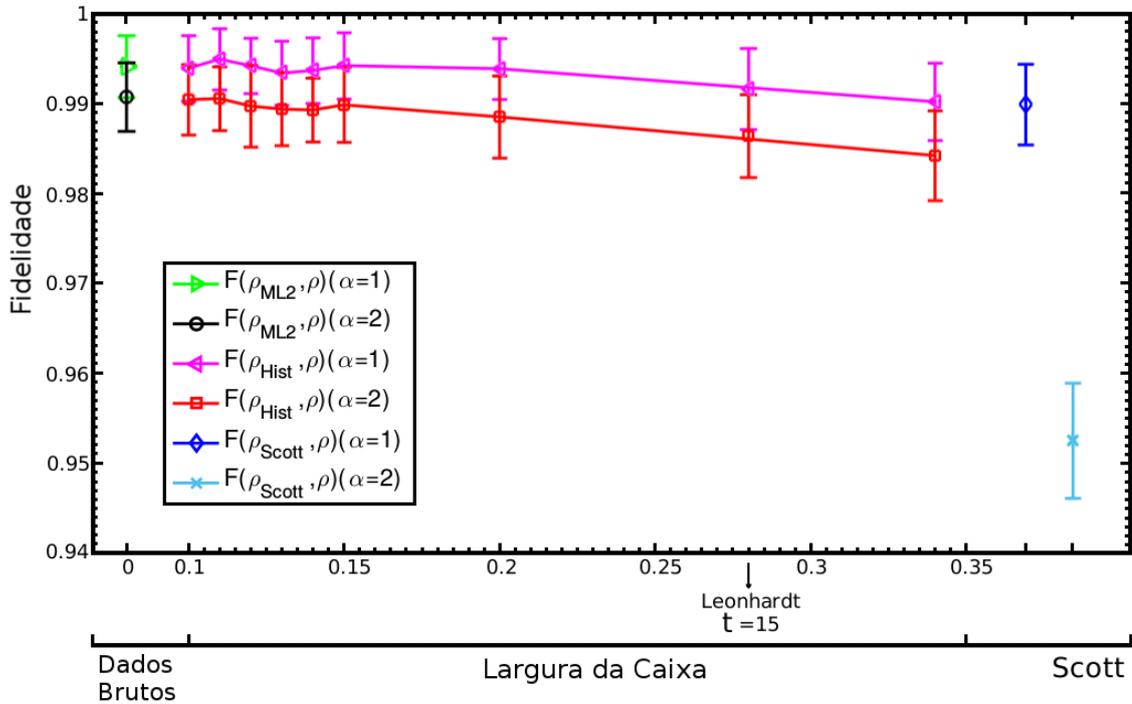


Fonte: Elaborado pelo autor.

que é a largura encontrada utilizando a Eq. (4.8) para $t = 10$, o número de fótons para o qual truncamos o espaço de Hilbert. Para todos os casos, cada operador representa uma medida que ocorre no centro da caixa. Os dados brutos indicam $F(\rho_{ML2}, \rho)$, a fidelidade média entre o estado verdadeiro e o estado reconstruído sem a discretização. Na Figura 4 cada conjunto de pontos corresponde a um conjunto de dados diferente. Vemos que conjuntos de dados diferentes tem um comportamento semelhante à medida que alteramos a largura da caixa. Como podemos ver nesta figura, os maiores valores de fidelidade correspondem ao caso em que não usamos discretização, como esperado. Também vemos que larguras de caixa menores resultam nas mais altas fidelidades. No entanto, mesmo as maiores larguras testadas resultam em uma perda de fidelidade de apenas 0,005 comparado com o caso que usa os dados brutos.

O próximo conjunto de resultados é apresentado na Figura 5, onde temos a fidelidade em função da largura de caixa para estados de gato com amplitudes $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. Os estados são reconstruídos em um espaço de Hilbert com $t = 15$ fótons. A probabilidade do estado de gato com $\alpha = 2$ ter mais de 15 fótons é de $P(15) = 3,29 \times 10^{-7}$. A primeira coisa que podemos

Figura 5 – Fidelidade média em função da largura de caixa para estados de gato com amplitudes $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 15$ fótons. As larguras médias de caixa para o método de Scott são 0,35 (estado de gato com $\alpha = 1$) e 0,64 (estado de gato com $\alpha = 2$).



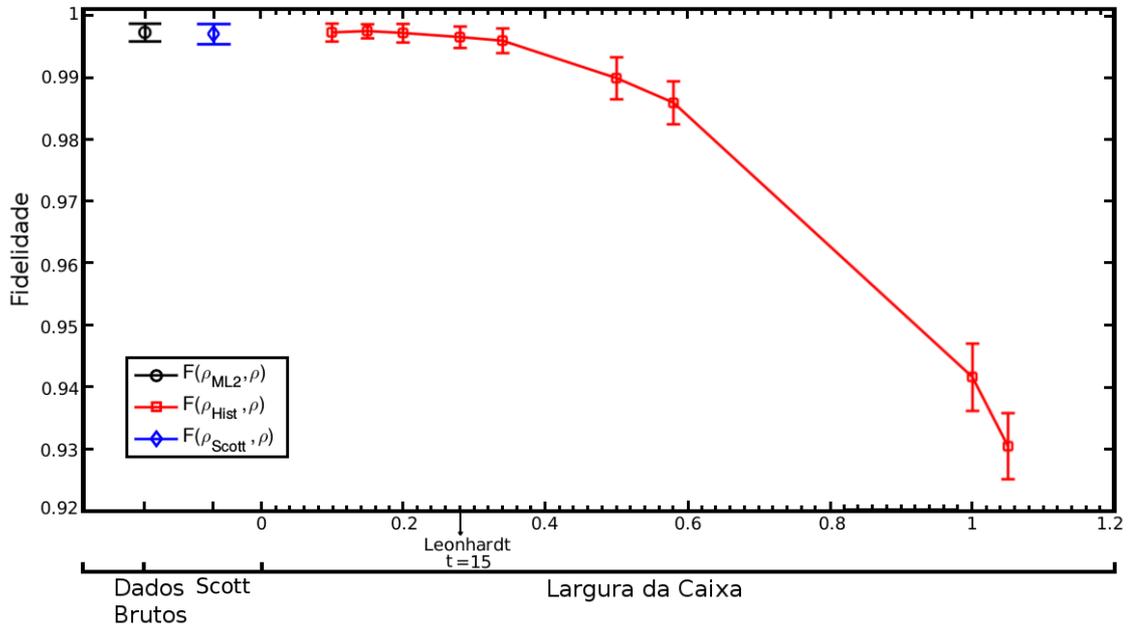
Fonte: Elaborado pelo autor.

notar neste gráfico é que a fidelidade para um estado de gato com $\alpha = 1$ é sempre maior que a fidelidade para um estado de gato com $\alpha = 2$, incluindo o caso quando não usamos discretização. Isso é esperado, pois o estado com $\alpha = 2$ requer mais parâmetros para descrever efetivamente sua matriz densidade na base de número de fótons, portanto, para uma determinada quantidade de dados existe uma incerteza estatística maior.

Para uma determinada largura de caixa, a fidelidade das estimativas do estado de gato com $\alpha = 2$ é sempre menor do que a fidelidade das estimativas do estado de gato com $\alpha = 1$. Isso também é esperado, pois o estado com $\alpha = 2$ tem mais oscilações em sua distribuição de probabilidade, ou seja, mais informações são perdidas quando as caixas são maiores. A largura média de caixa para o método de Scott é 0,35 para um estado de gato com $\alpha = 1$ e 0,64 para um estado de gato com $\alpha = 2$. A largura de Leonhardt indicada na Figura 5 é obtida usando $t = 15$, o número de fótons em que o espaço de Hilbert é truncado, na Eq. (4.8).

A Figura 6 mostra a fidelidade como uma função da largura de caixa para um estado de vácuo comprimido cuja quadratura comprimida tem uma varância de $3/4$ da variância do vácuo. Usamos um espaço de Hilbert com 15 fótons para reconstruir esse estado. Neste

Figura 6 – Fidelidade média em função a largura de caixa para um estado de vácuo comprimido cuja quadratura comprimida possui variância de $3/4$ da variância do vácuo. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 15$ fótons. A largura média das caixas para o método de Scott é 0,25.



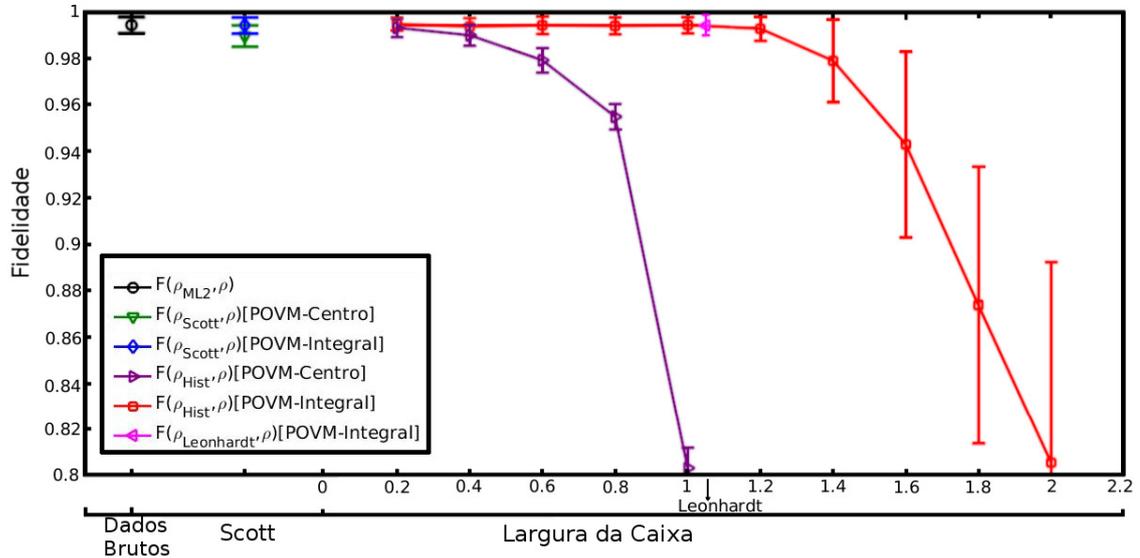
Fonte: Elaborado pelo autor.

gráfico, estendemos a largura do compartimento até 1,05 para ajudar a visualizar a diminuição da fidelidade quando a largura de caixa aumenta. Usando uma largura de 1,05 temos uma perda de fidelidade de cerca de 0,07, enquanto a perda quando usamos a largura ideal de Scott (0,25) é de cerca de 0,0002.

Até agora, como mencionado anteriormente, o operador de medição em cada caixa representa uma medida que ocorre no centro da caixa. Isso significa que o operador de medição Π_i associado à caixa i permite calcular a densidade de probabilidade de obter um resultado de medição no centro da caixa i quando calculamos $\text{Tr}(\Pi_i \rho)$. Apesar dessa aproximação ser útil para larguras de caixa pequenas, devemos encontrar uma forma de melhorar nossas análises. Para isso, vamos considerar operadores que representem uma medida que ocorre em qualquer lugar ao longo da caixa. Para obter esses novos operadores, integramos numericamente os operadores de medição ao longo da largura de cada caixa do histograma. Com esses operadores de medição integrados, o cálculo de $\text{Tr}(\Pi_i \rho)$ nos dá a probabilidade de obter um resultado de medição em qualquer lugar na caixa i . Identificaremos cada caso adicionando [POVM-Centro] e [POVM-Integral] nas legendas dos gráficos.

Incluímos também na nossa análise o cálculo da fórmula de Leonhardt usando o

Figura 7 – Fidelidade média em função da largura de caixa para um estado de gato com amplitude $\alpha = 1$. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. Para este estado, $\langle n \rangle = 0,6093$ e $\langle \hat{n} \rangle = 0,6109$, dando uma largura de caixa pela fórmula de Leonhardt de 1,05. A largura média das caixas para o método de Scott é 0,35.



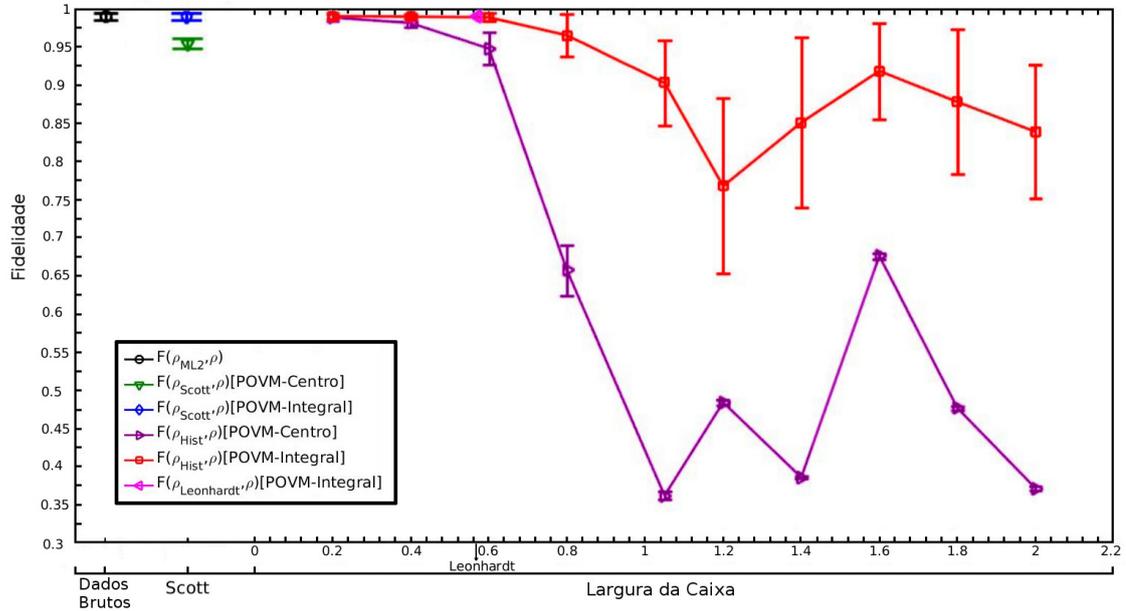
Fonte: Elaborado pelo autor.

número médio de fótons estimado. Essa largura será usada para estimar $\rho_{Leonhardt}$ e em seguida a fidelidade entre ρ_V e $\rho_{Leonhardt}$ será calculada. Lembramos que Leonhardt recomenda que a largura da caixa seja menor do que o valor calculado usando o número máximo de fótons na Eq. (4.8), mas aqui usamos a estimativa da média do número de fótons em vez do número máximo de fótons.

As Figuras 7 e 8 mostram as fidelidades médias como funções da largura de caixa para estados de gato com amplitudes $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, respectivamente. A Figura 9 examina um estado de vácuo comprimido cuja quadratura comprimida tem uma variância de $3/4$ da variância do vácuo. Note que para os estados de gato, quando α aumenta, a largura de caixa de Scott também aumenta, o que é certamente indesejável pois as distribuições de quadratura contêm uma estrutura mais fina quando aumentamos o valor de α . Esses gráficos mostram que a integração dos operadores de medição ao longo da largura de cada caixa melhora consideravelmente as fidelidades em todos os casos. Também podemos ver que a sugestão de Leonhardt, usando a estimativa do número médio de fótons, pode ser usada com segurança como um limite superior para a largura de caixa.

Como visto na Eq. (4.6), a regra de Scott fornece larguras de caixa proporcionais ao desvio padrão da amostra. Como os estados com um número maior de fótons podem ter um desvio padrão maior, o método de Scott produzirá larguras de caixa maiores. Isto é indesejável

Figura 8 – Fidelidade média em função da largura de caixa para um estado de gato com amplitude $\alpha = 2$. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 15$ fótons. Para este estado, $\langle n \rangle = 3,1978$ e $\langle \hat{n} \rangle = 3,1983$, dando uma largura de caixa pela fórmula de Leonhardt de 0,58. A largura média das caixas para o método de Scott é 0,64.

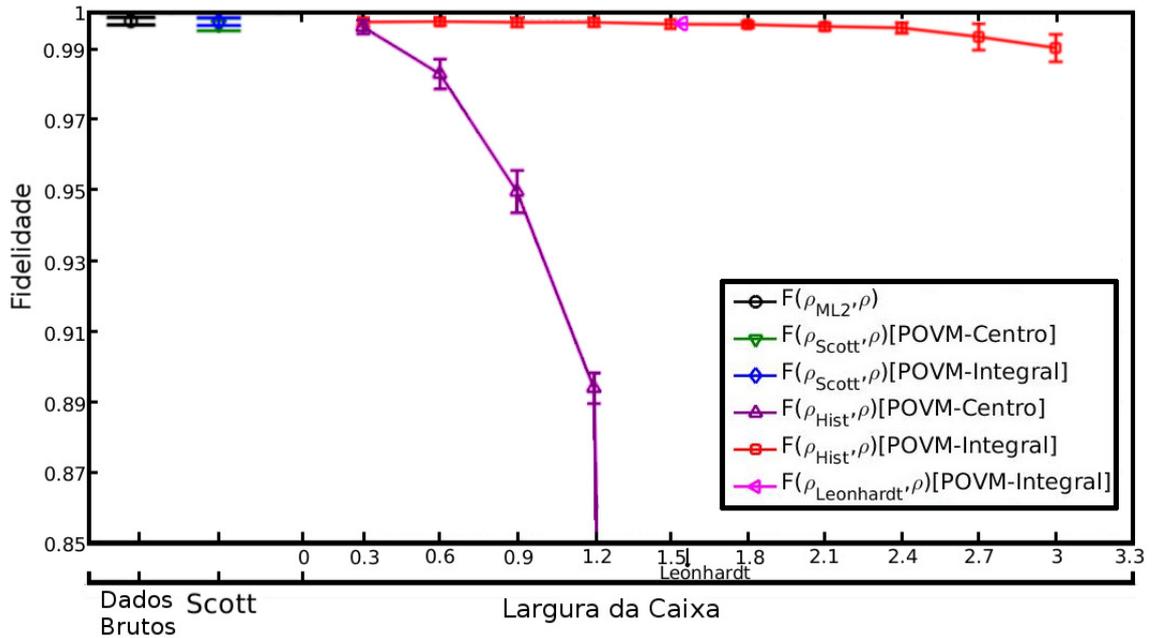


Fonte: Elaborado pelo autor.

porque estados puros contendo muitos fótons possuem características mais delicadas em suas distribuições de quadratura. Em outras palavras, esperamos que o método de Scott seja menos eficiente para esses casos. Por outro lado, esperamos que o método de Leonhardt tenha um melhor desempenho, já que ele usa o número médio estimado de fótons para calcular a largura de caixa. Podemos ver claramente o comportamento esperado de ambos os métodos para um número maior de fótons na Figura 10, onde usamos um estado de Fock para verificar essa nossa afirmação.

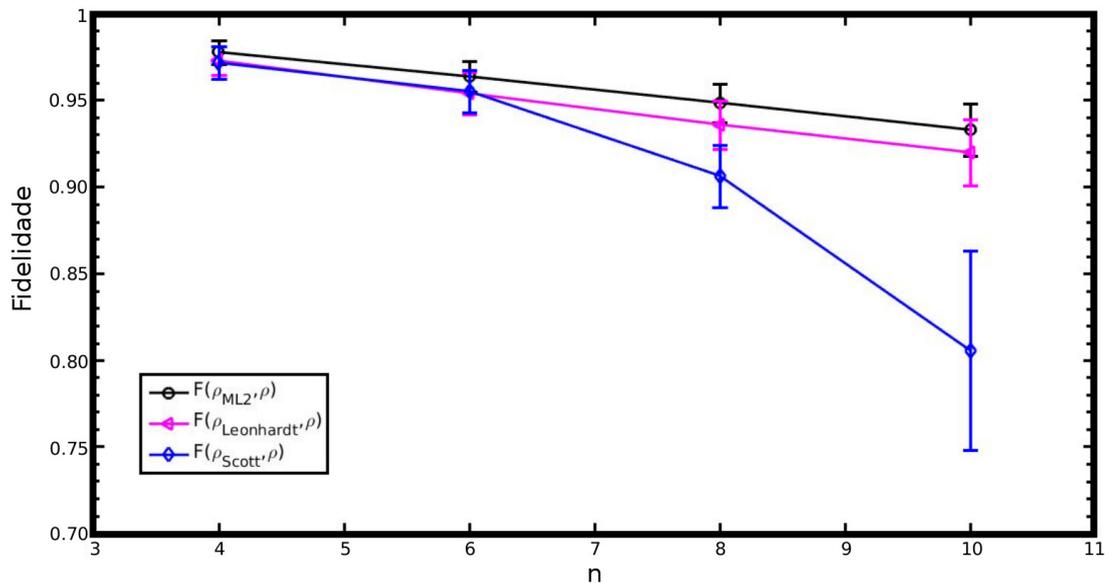
Todos os métodos de discretização aqui considerados fornecem estimativas de fidelidade muito mais rápidas, como podemos ver nas Figuras 11 e 12, sem perda significativa da fidelidade entre os estados estimados e os estados verdadeiros. Os tempos médios relatados aqui incluem quaisquer cálculos necessários para determinar a largura desejada da caixa usando os dados homódinos originais, a construção dos histogramas e a estimativa da matriz de densidade de máxima verossimilhança. Todas as simulações foram implementadas usando o programa Matlab sendo realizadas em um computador i3 dual-core de 3.7 GHz com 4 GB de RAM.

Figura 9 – Fidelidade média em função da largura de caixa para um estado de vácuo comprimido cuja quadratura comprimida possui variância $3/4$ da variância do vácuo. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. Para este estado, $\langle n \rangle = 0,0167$ e $\langle \hat{n} \rangle = 0,0162$, dando uma largura de caixa pela fórmula de Leonhardt de 1,54. A largura média das caixas para o método de Scott é 0,25.



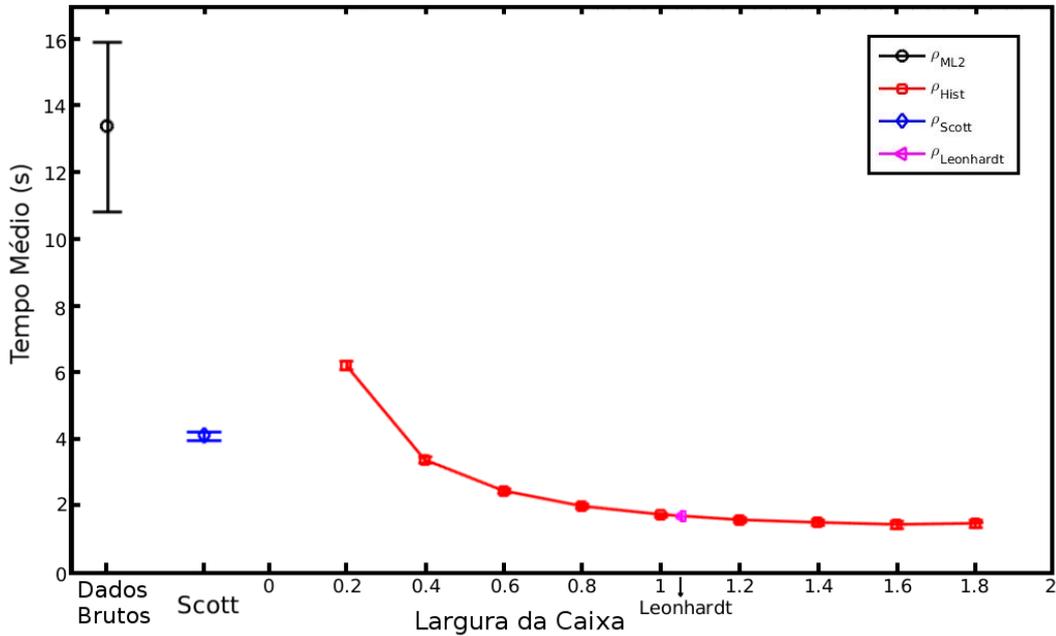
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10 – Fidelidade média em função da largura de caixa para estados de Fock com diferente número de fótons n . As larguras das caixas pela fórmula de Leonhardt são 0,56 ($n = 4$), 0,46 ($n = 6$), 0,40 ($n = 8$) e 0,36 ($n = 10$). As larguras médias das caixas para o método de Scott são 0,69 ($n = 4$), 0,82 ($n = 6$), 0,95 ($n = 8$), and 1,05 ($n = 10$).



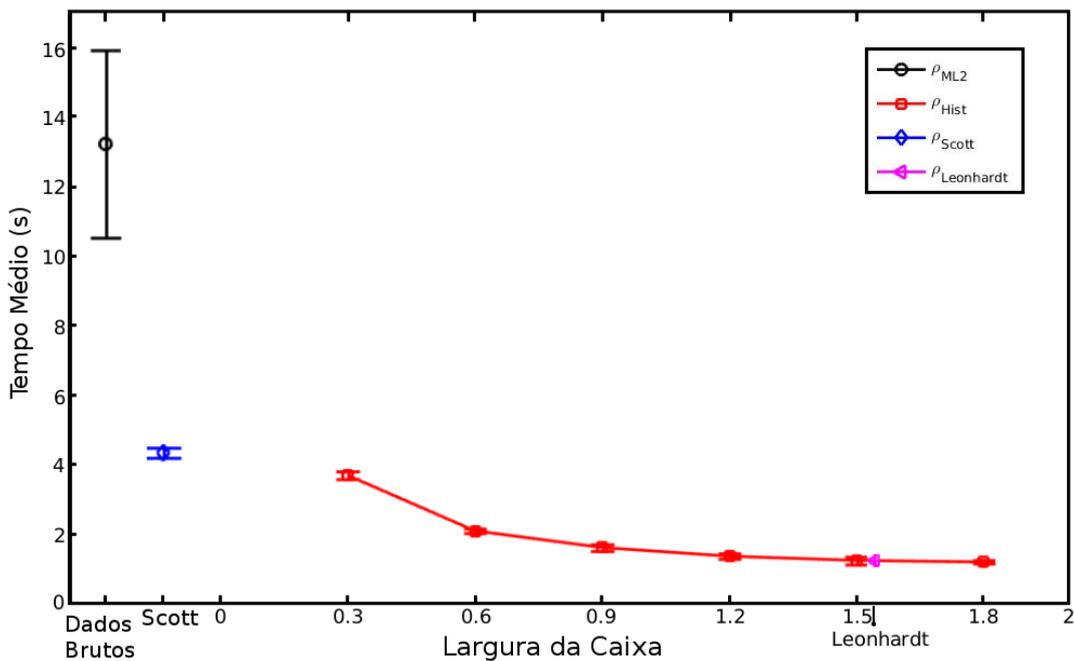
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – Tempo médio de reconstrução em função da largura de caixa para um estado de gato com amplitude $\alpha = 1$. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. A largura de caixa pela fórmula de Leonhardt é 1,05 e a largura média das caixas para o método de Scott é 0,35.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Tempo médio de reconstrução em função da largura de caixa para um estado de vácuo comprimido cuja quadratura comprimida possui variância $3/4$ da variância do vácuo. O espaço de Hilbert é truncado em $t = 10$ fótons. A largura de caixa pela fórmula de Leonhardt é 1,54 e a largura média das caixas para o método de Scott é 0,25.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Utilizamos experimentos numéricos idealizados para gerar dados simulados e realizamos tomografia por máxima verossimilhança em dados amostrais provenientes de estados de gato, estados de vácuo comprimido e estados de Fock, com e sem discretização. Estimamos as fidelidades entre os estados reconstruídos e os estados verdadeiros. Usamos dois métodos diferentes para escolher a largura de caixa: os métodos de Scott e Leonhardt. O nosso estudo usou operadores de medições calculados usando a quadratura exatamente no centro de cada caixa e integrando os operadores de medições ao longo do comprimento da caixa.

O método de Scott calcula uma largura de caixa ideal para cada fase, com base no tamanho e no desvio padrão da amostra. Este método funciona bem para estados Gaussianos e estados com um número pequeno de fótons. Estados com maior número de fótons têm distribuições de quadratura com desvios padrão mais altos, dando maiores larguras de caixa para cada fase. Implementamos o método de Scott para distribuições Gaussianas, mas se tivermos algum conhecimento prévio sobre o estado e sua distribuição, podemos adaptar a regra de Scott, usando distribuições mais apropriadas na Eq. (4.4). Isso pode ser explorado em um trabalho futuro.

O método de Leonhardt recomenda o uso de uma largura de caixa menor do que $q_n/2$, onde q_n diminui com a raiz quadrada do número de fótons no estado que está sendo reconstruído. Como em um experimento real não sabemos a média do número de fótons no estado considerado, estimamos o número médio de fótons usando os resultados das medições de quadratura. Mostramos que o método utilizado para encontrar o número médio de fótons a partir dos resultados das medições de quadratura fornece resultados precisos. Verificamos isso ao comparar o número médio estimado de fótons com o número médio real de fótons para os estados de gato e para os estados de vácuo comprimido.

Descobrimos também que integrar os operadores de medição sobre a largura de cada caixa do histograma melhora significativamente a fidelidade. Usando essa estratégia, a fórmula de Leonhardt estabelece com segurança um limite superior para a largura de caixa e os dois métodos utilizados fornecem uma estimativa estatística mais rápida sem perder muita informação.

REFERÊNCIAS

- 1 LVOVSKY, A. I.; RAYMER, M. G. Continuous-variable optical quantum-state tomography. **Review of Modern Physics**, v. 81, p. 299–332, 2009.
- 2 FIURÁSEK, J. Maximum-likelihood estimation of quantum measurement. **Physical Review A**, v. 64, p. 024102, 2001.
- 3 LVOVSKY, A. I. Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 6, p. S556, 2004.
- 4 GLANCY, S.; KNILL, E.; GIRARD, M. Gradient-based stopping rules for maximum-likelihood quantum-state tomography. **New Journal of Physics**, v. 14, p. 095017, 2012.
- 5 PAIS, A. **Inward Bound: Of Matter and Forces in the Physical World**. [S.l.]: Oxford University Press, 1986.
- 6 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. J. **Modern quantum mechanics**. [S.l.]: Pearson, 2014.
- 7 KAYE, P.; LAFLAMME, R.; MOSCA, M. **An introduction to quantum computing**. [S.l.]: Oxford University Press, 2007.
- 8 DEUTSCH, D. Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society A**, v. 400, p. 97–117, 1985.
- 9 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- 10 DODONOV, V. V. Purity- and entropy-bounded uncertainty relations for mixed quantum states. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 4, p. S98, 2002.
- 11 JOZSA, R. Fidelity for mixed quantum states. **Journal of Modern Optics**, v. 41, p. 2315–2323, 1994.
- 12 LIANG, Y.-C.; YEH, Y.-H.; MENDONÇA, P. E.; TEH, R. Y.; REID, M. D.; DRUMMOND, P. D. Quantum fidelity measures for mixed states. **Reports on Progress in Physics**, v. 82, p. 076001, 2019.
- 13 GLAUBER, R. J. The quantum theory of optical coherence. **Physical Review**, v. 130, p. 2529–2539, 1963.
- 14 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. **Quantum optics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- 15 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. **Quantum optics**. [S.l.]: Springer, 2007.
- 16 MANDEL, L.; WOLF, E. **Optical coherence and quantum optics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.
- 17 DODONOV, V.; MALKIN, I.; MAN'KO, V. Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator. **Physica**, v. 72, p. 597 – 615, 1974.
- 18 GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. **Physical Review**, v. 131, p. 2766–2788, 1963.

- 19 GERRY, C.; KNIGHT, P. **Introductory quantum optics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- 20 DODONOV, V.; KURMYSHEV, E.; MAN'KO, V. Generalized uncertainty relation and correlated coherent states. **Physics Letters A**, v. 79, p. 150 – 152, 1980.
- 21 SCHNABEL, R. Squeezed states of light and their applications in laser interferometers. **Physics Reports**, v. 684, p. 1 – 51, 2017.
- 22 MUSSLIMANI, Z. H.; BEN-ARYEH, Y. Quantum phase distribution of thermal phase-squeezed states. **Physical Review A**, v. 57, p. 1451–1453, 1998.
- 23 GLANCY, S.; VASCONCELOS, H. M. Methods for producing optical coherent state superpositions. **Journal of the Optical Society of America B**, v. 25, p. 712–733, 2008.
- 24 VASCONCELOS, H. M. **Topics in coherent state quantum computation and state purification**. Tese (Doutorado em Física) — University of Notre Dame, Notre Dame, EUA, 2006.
- 25 WOOTTERS, W. K.; ZUREK, W. H. A single quantum cannot be cloned. **Nature**, v. 299, p. 802–803, 1982.
- 26 VOGEL, K.; RISKEN, H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. **Physical Review A**, v. 40, p. 2847–2849, 1989.
- 27 SMITHEY, D. T.; BECK, M.; RAYMER, M. G.; FARIDANI, A. Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum. **Physical Review Letters**, v. 70, p. 1244–1247, 1993.
- 28 LEONHARDT, U. **Measuring the quantum state of light**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- 29 CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical inference**. [S.l.]: Duxbury Press, 1990.
- 30 SILVA, G. B.; GLANCY, S.; VASCONCELOS, H. M. Investigating bias in maximum-likelihood quantum-state tomography. **Physical Review A**, v. 95, p. 022107, 2017.
- 31 CULE, M.; SAMWORTH, R. Theoretical properties of the log-concave maximum likelihood estimator of a multidimensional density. **Electronic Journal of Statistics**, v. 4, p. 254–270, 2010.
- 32 ŘEHÁČEK, J.; HRADIL, Z.; KNILL, E.; LVOVSKY, A. I. Diluted maximum-likelihood algorithm for quantum tomography. **Physical Review A**, v. 75, p. 042108, 2007.
- 33 NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. [S.l.]: Springer, 2006.
- 34 WAND, M. P. Data-based choice of histogram bin width. **The American Statistician**, v. 51, p. 59–64, 1997.
- 35 SCOTT, D. W. Scott's rule. **Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics**, v. 2, p. 497–502, 2010.

- 36 LEONHARDT, U.; MUNROE, M.; KISS, T.; RICHTER, T.; RAYMER, M. G. Sampling of photon statistics and density matrix using homodyne detection. **Optics Communications**, v. 127, p. 144 – 160, 1996.
- 37 RAYMER, M. G.; BECK, M. 7 experimental quantum state tomography of optical fields and ultrafast statistical sampling. In: PARIS, M.; ŘEHÁČEK, J. (Ed.). **Quantum State Estimation. Lecture Notes in Physics**. [S.l.]: Springer, 2004.
- 38 MUNROE, M. **Ultrafast photon statistics of cavityless laser light**. Tese (Doutorado em Física) — University of Oregon, Eugene, EUA, 1996.
- 39 LVOVSKY, A. I. Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 6, p. S556, 2004.
- 40 D'ARIANO, G. M.; PARIS, M. G.; SACCHI, M. F. Quantum tomography. **Advances in Imaging and Electron Physics**, v. 128, p. 206–309, 2003.
- 41 KENNEDY, W. J.; GENTLE, J. E. **Statistical computing**. [S.l.]: Marcel Dekker Ltd, 1980.