UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ- REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MEIRIVÂNI MENESES DE OLIVEIRA

ENSINO DE FUNÇÕES POR MEIO DA VIDEOANÁLISE: UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

FORTALEZA
2019

MEIRIVÂNI MENESES DE OLIVEIRA

ENSINO DE FUNÇÕES POR MEIO DA VIDEOANÁLISE: UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino

Orientadora: Profa. Dra. Eloneid Felipe Nobre
Coorientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

FORTALEZA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48e Oliveira, Meirivâni Meneses de.
Ensino de Funções por meio da videoanálise : Um contributo da Engenharia Didática / Meirivâni Meneses de Oliveira. – 2019.
135 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Bioquímica, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Eloneid Felipe Nobre.
Coorientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Videoanálise. 2. Teoria das Situações Didáticas. 3. Funções. 4. Engenharia Didática. 5. Produto Educacional. I. Título.

CDD 572

MEIRIVÂNI MENESES DE OLIVEIRA

ENSINO DE FUNÇÕES POR MEI DA VIDEOANÁLISE: UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino

Aprovada em: ____/____/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Eloneid Felipe Nobre (Presidente)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

____

Profa. Dra. Silvany Bastos Santiago (Membro interno)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

____

Profa. Dra. Ivoneide Pinheiro de Lima (Membro externo)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus.
Aos meus pais, Ismar e Maria.
Ao meu esposo Adeil Araújo.
Aos meus filhos, Ben (*In memoriam)* e Maria.
As minhas irmãs Ismeiry e Irismar.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre perto de mim, durante minhas lutas e conquistas.

À Profa. Dra Eloneid Felipe Nobre que de forma tão sábia e paciente, me orientou nesta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves por compartilhar seus conhecimentos na área da Engenharia Didática e por sua coorientação.

Ao meu esposo, um homem fascinado pelo mundo da pesquisa, que me acompanhou em cada momento e me ajudou nas pesquisas e reflexões. Obrigada, meu amor!

À minha filha, Maria, que tanto amor me deu, permitindo assim que eu continuasse esta pesquisa. Mamãe te ama muito, filha!

À minha família, pelo apoio dado durante toda a minha vida acadêmica, em especial aos meus pais, Maria Meneses de Oliveira e Francisco Ismar de Oliveira. Espero nunca os decepcionar. Amo vocês infinitamente.

À minha irmã, Ismeiry Meneses, que abdicou de seus sonhos para que eu pudesse realizar os meus. Como te admiro e te amo, minha irmã!

À minha sogra, Dona Mazé (*In memoriam)*, e as minhas cunhadas, Adeilde Araújo, Adailda Araújo, Adeíla Araújo e Adailta Araújo, por cuidarem da Maria nos momentos em que eu escrevia essa dissertação. Sem vocês tudo ficaria mais difícil. Obrigada!

A coordenadora da Coordenadoria de Gestão Pedagógica do Ensino Médio, Iane Nobre, por seu apoio e sensibilidade nos momentos críticos que passei durante a escrita da minha dissertação. Serei eternamente grata!

Ao orientador da Célula de Currículo, da Coordenadoria de Gestão Pedagógica do Ensino Médio, Wilson Rocha, por toda ajuda durante os momentos da aplicação das situações didáticas e por sua compreensão e palavras de incentivo. Obrigada!

Aos meus colegas de mestrado, por todos os momentos que vivemos juntos. Como aprendi com vocês!

A Secretaria de Educação do Estado do Ceará por investir na formação de seus professores.

E a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse até aqui.

“É a teoria que decide o que podemos observar”.

Albert Einstein

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo principal verificar como situações didáticas, mediadas pelo uso do aplicativo *VidAnalysis*, contribuem no ensino de funções. Como metodologia de pesquisa, adotou-se a Engenharia Didática (1980), que possui quatro fases, a saber: Análises Preliminares, Análise a *Priori*, Experimentação e Análise a *Posteriori*/Validação. Nas Análises Preliminares buscou-se entender o desenvolvimento deste conceito ao longo da história da Matemática, como ele era abordado nos livros didáticos produzidos no Brasil desde o início do século XX, além de entender como as alterações nas diversas leis que regulamentam a educação básica no Brasil, permitiram a exploração desse conceito por meio de um ensino voltado para o desenvolvimento de competências e habilidades e de metodologias ativas aliadas ao uso de tecnologias de informação e comunicação. Feito esse estudo, elaborou-se três situações didáticas mediadas pelo uso do aplicativo *VidAnalysis*, que foram apresentadas nas Análises a *Priori*. Essas situações tiveram como referencial teórico, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1988), que possibilitou a identificação do processo de aprendizagem dos estudantes nas situações de ação, formulação e validação. As aplicações dessas situações, detalhadas na fase de Experimentação, aconteceram nos meses de maio e junho, em duas escolas da rede pública estadual e contaram com a participação de 15 estudantes. Para a validação da pesquisa foram confrontadas as análises a *priori* e as análises a *posteriori*, onde percebeu-se principalmente que, apesar dos estudantes apresentarem dificuldades em alguns conceitos básicos, o estudo de funções por meio de situações didáticas mediadas pela videoanálise, contribuiu, não apenas para a coleta de dados de um movimento real, mas para que os estudantes visualizassem gráficos e tabelas, elaborassem conjecturas e validassem suas respostas, tornando essa metodologia de ensino meio viável para a aprendizagem e o ensino de funções. Por fim, os dados colhidos através dessa pesquisa, possibilitou a construção de um produto educacional, onde são apresentadas quatro situações didáticas que exploram o conceito de funções mediados pelo aplicativo *VidAnalysis* e de um site, com vídeos e sugestões de aplicativos para o professor do Ensino Médio.

Palavras-chave: Videoanálise. Teoria das Situações Didáticas. Funções. Engenharia Didática. Produto Educacional

ABSTRACT

This research has as the focus to verify how didactic situations guided by the use of the app *VidAnalysis* contributed in the teaching of the functions. As a research methodology, the didactic engineering (1980) was adopted which has four phases that is important to know: The Priori Preliminary analysis and the Experimentation and Post-Validation Analysis. In the preliminary analysis, it was sought to understand the development of this concept along the history of the math, how it was worked in the didactic books produced in Brazil since the beginning of the twentieth century and also to understand how the changing in several laws that rule the public education in Brazil allowed the exploration of this concept through the teaching directed to the development of the competences and abilities and the active methodologies allied to the use of the technologies of information and communication. When this study was finished, three didactic situations were elaborated and guided by the use of the App *VidAnalysis,* which were presented in the Priori Analyzes. These situations had as a theoretical reference the theory of the didactic situations of Guv Brousseau (1988) which permitted the identification of the learning process of the students in the situations of action, formulation and validation. The application of these situations detailed in the phase of Experimentation happened in the months of May and June in two schools of the public state education and it counted with the participation of 15 students. In order to the validation of the research, the priori and the posteriori analyzes were confronted, where it was noticed mainly that, although the students showed difficulties in some basic concepts, the study of the functions through the didactic situations mediated by the video analysis contributed not only for the collecting of the data from a real movement, but for the students to visualize the graphs and the tables to conjecture and validate their answers and it also made this teaching methodology a viable means for the learning and for the teaching of the functions. Finally, the data collected through this research allowed the construction of an e-book, which presents four didactic situations that explore the concept of the functions mediated by the *VidAnalysis* application and a website with videos and app tips for the high school teacher.

Keywords: Video analysis. Theory of Didactic Situations. Functions. Didactical Engineering. Education Product.

LISTA DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Brasil está cada vez mais tecnológico e atento aos avanços das tecnologias digitais nos mais diversos setores, incluindo a educação. Isto provocado, principalmente, pelo aumento contínuo na disponibilidade e acesso às Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), que vem causando grandes mudanças na sociedade brasileira e consequentemente, levando à escola um estudante bem mais conectado com o mundo online, do que com o mundo real. Essa informação é confirmada pelo *Programme for International Student Assessment* (PISA, 2017), que afirma que o Brasil é o segundo país onde os estudantes passam mais tempo na internet em seu tempo livre, chegando a passar mais de três horas por dia conectados na rede.

O reflexo desse avanço tecnológico nas escolas, para além de um estudante conectado na rede, está ancorado na necessidade de preparar este indivíduo para atuar neste cenário tecnológico contemporâneo. No entanto, em meio a esse movimento de inserção de tecnologias digitais na sala de aula, os processos de ensino e aprendizagem da Matemática continuam sendo um desafio para as escolas brasileiras, como apontam os resultados de avaliações realizadas em grande escala, como por exemplo, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2017), em que os estudantes do Ensino Médio encontram-se no nível de proficiência 5, em uma escala que vai do 1 a 10; o Sistema Permanente de Avaliação do Estado do Ceará (SPAECE, 2018), em que 94,6% dos alunos que cursam o 3º ano do Ensino Médio no Ceará encontram-se no padrão de desempenho considerado crítico, em uma escala que apresenta como padrões de desempenho: Muito Crítico, Crítico, Intermediário e Adequado; e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, 2015), em que 43,74% dos estudantes avaliados encontram-se em um nível abaixo de 1, em uma escala que possui seis níveis de proficiência, do 1 ao 6, ou seja, em um nível em que não é possível especificar as habilidades e competências desenvolvidas pelos estudantes.

Toda essa realidade impõe à escola, desafios ao cumprimento do seu papel em relação à formação das novas gerações. Neste sentido a escola precisa, de forma urgente e incessante, adaptar seu ensino à evolução dessas mudanças, tanto em conteúdo quanto em metodologia, pois, é consenso que a maioria das escolas está caminhando na contramão das habilidades crescentes de seus estudantes e do progresso científico e tecnológico do século XXI, devido a um currículo que não os prepara para enfrentar os desafios de sua realidade e que vem impactando de maneira negativa, a aprendizagem da Matemática e de outras ciências (D'AMBRÓSIO, 1989; CHAGAS, 2003).

A aprendizagem da Matemática não se resume a cálculos numéricos. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), existem muitas informações matemáticas por trás de gráficos, tabelas e imagens que podem auxiliar na resolução de diversos problemas, além de diversos recursos didáticos-tecnológicos que podem auxiliar os professores e os estudantes nos processos de ensino e aprendizagem.

Gráficos e tabelas, geralmente, são apresentados aos estudantes através do conceito intuitivo de funções durante todo o ensino fundamental, porém os primeiros estudos formais de sua representação algébrica e geométrica, inicia-se no 9º ano do Ensino Fundamental e continua durante todo o Ensino Médio.

O estudo de função torna-se importante, não apenas em virtude de sua abrangência na própria Matemática, como também por ser uma ferramenta imprescindível, na solução dos mais diversos problemas em outras ciências, como a Física e Biologia, por exemplo. Porém, apesar de sua importância, professores da educação básica apontam problemas relacionados à aprendizagem dos estudantes. Estes problemas persistem no ensino superior, principalmente em disciplinas que se fundamentam no estudo de funções e na exploração de taxas de variação de grandezas, como por exemplo, a disciplina de Cálculo, ofertada nos semestres iniciais de cursos como Matemática, Física, Economia, Computação, Engenharia, entre outros. Como forma de minimizar esta situação, algumas universidades oferecem cursos de nivelamento logo no primeiro semestre.

Dentro desta perspectiva, diversas pesquisas na área da educação apontam o uso de tecnologias digitais, como um aliado no ensino de Matemática e de outras ciências, fazendo com que professores busquem uma reformulação de suas práticas.

De fato, a inserção de tecnologias digitais na sala de aula, exigirá que o professor busque por novas metodologias de ensino e de aprendizagem, que possibilitem a utilização destes recursos no ensino de maneira adequada, o que reforça a importância da formação continuada desse professor.

Nesse contexto, essa pesquisa tem como objetivo principal verificar como a Engenharia Didática, como metodologia de pesquisa, associada à Teoria das Situações Didáticas, como metodologia de ensino, mediadas pelo uso de aplicativos de videoanálise, contribui no ensino de funções. Especificamente, buscou-se também:

a) Analisar o desenvolvimento do conceito de funções através da história da Matemática e a partir dos principais livros didáticos produzidos no Brasil;
b) Identificar os principais entraves e as tendências do século XXI para o ensino de Matemática na educação básica brasileira;

c) Registrar, no contexto de resolução de situações didáticas que envolve conceitos de funções, o comportamento do estudante nas fases de ação, formulação e validação durante sua busca pelas soluções;
d) Propor, ao final da pesquisa, um produto educacional com quatro situações didáticas que possibilitem, por meio do aplicativo *VidAnalisys*, a aproximação do conceito de funções ao dia a dia dos estudantes.

Na busca por alcançar estes objetivos foram aplicadas três situações didáticas, envolvendo funções lineares, quadráticas e exponenciais, com estudantes de uma escola pública de tempo integral da rede estadual.

Como metodologia de pesquisa, foi utilizada a Engenharia Didática. Por sua vez, a metodologia de ensino foi baseada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1986).

A pesquisa, também, está apoiada em documentos oficiais, como a Constituição Brasileira (1988), a Lei de Diretrizes e Bases (LDB, 1961/1971/1996), o Plano Nacional de Educação (PNE, 2014), a Lei 13.415/2017, que altera a LDB/1996, a Base Nacional Curricular (BNCC, 2017-2018) e as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (DCNEF) e para o Ensino Médio (DCNEM), autores como Artigue (1995), Almouloud (2004, 2007, 2011), Alves (2018), Piaget (1951) que embassam essa pesquisa, além de artigos, livros, dissertações e teses que relatam a história do conceito de funções na história da Matemática, a história dos livros didáticos no Brasil e as tendências do século XXI para o ensino e aprendizagem desse conceito.

Para melhor compreender esta dissertação, ela encontra-se estruturada em 7 (sete) capítulos. Na introdução são apresentadas os objetivos, a justificativa, as metodologias de pesquisa e ensino, bem como a organização desta dissertação.

Em seguida, no segundo capítulo, apresenta-se um pouco da história da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, suas fases e desenvolvimento através da história, bem como a Teoria das Situações didáticas de Brousseau (1986), como metodologia de ensino, a partir da Teoria de Desenvolvimento Cognitivo de Piaget (1951).

No terceiro capítulo, são apresentadas as análises epistemológica, institucional e didática, que fazem parte das análises preliminares, correspondentes à primeira fase da Engenharia Didática.

As análises preliminares possuem como objetivo compreender o objeto de estudo e mapear os problemas, os objetivos e os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa. Portanto, no segundo capítulo, buscou-se apresentar a gênese histórica do conceito de funções, analisar a abordagem deste conceito nos livros didáticos de Matemática no Brasil, além de buscar compreender os entraves e as tendências do século XXI para o ensino de Matemática na educação básica brasileira.

No quarto capítulo são apresentadas as concepções detalhadas das três situações didáticas propostas para o estudo de funções, além da descrição do que se espera dos estudantes diante de cada situação nas fases de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD. Esta fase da pesquisa representa as análises *a priori* da Engenharia Didática.

No quinto capítulo, intitulado Experimentação, Análise a *Posteriori*/Validação são apresentados os sujeitos envolvidos na pesquisa e o local de aplicação, bem como o detalhamento da aplicação das três situações didáticas e a análise a *posteriori* de cada aplicação. Neste capítulo também é apresentada a quarta fase da Engenharia Didática, através das confrontações das análises a *priori* com as análises a *posteriori*, como forma de validar internamente a pesquisa.

No sexto capítulo são apresentadas as considerações finais, por meio da retomada dos objetivos e de alguns pontos importantes observados durante a pesquisa.

Por fim, no sétimo capítulo, é apresentado o produto educacional, composto por um *e-book*, que possui quatro situações didáticas envolvendo funções lineares, quadráticas, exponenciais e trigonométricas com o auxílio do aplicativo de videoanálise, *VidAnalysis*, e um site, como produto educacional, fruto desta pesquisa.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA E DE ENSINO

Este capítulo apresenta um breve histórico do desenvolvimento da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, que embasou a metodologia de ensino.

2.1 Engenharia Didática

Nos anos 50 e 70, particularmente na França, os trabalhos de Nicolas Bourbaki[1] influenciavam fortemente o ensino de Matemática. O grupo Bourbaki foi fundado em 10 de dezembro de 1934, por um grupo de seis jovens franceses: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, René de Possel e André Weil, que na época eram os responsavéis pelo Cálculo Diferencial e Integral (CDI) em várias universidades, entre elas a École Normale Supérieure de Paris.

A École Normale Supérieure de Paris (ENS) fundada no ano de 1794, tinha como objetivo formar professores para as escolas que ofertavam o Ensino Médio. No entanto, no fim do século XIX, de acordo com Esquincalha (2012, p.29), "seu foco mudou, de modo que seus egressos começaram a se interessar por lecionar no Ensino Superior e a se dedicar à pesquisa". Nessa universidade, para receber o certificado de CDI, era necessário a aprovação em quatro disciplinas: Matemática Elementar, Geometria Analítica, Análise e Mecânica. Com a aprovação, de acordo com Pires (2006, p.17), os estudantes, "tornavam-se professores agregados e passavam a ensinar as disciplinas na ordem em que foram aprovados".

Descontente então, com a qualidade dos livros de Análise disponíveis à época, Cartan e Weil reuniram outros amigos responsáveis pelo CDI para escrever um livro que "fosse capaz de tratar de todo o conteúdo avaliado na prova de Análise, e que pudesse substituir todos os outros livros sobre o assunto" (ESQUINCALHA, 2012, p.30). E assim, nasce o Grupo Bourbaki e o livro Tratado de Análise, com 1200 páginas.

Os trabalhos do grupo encontravam-se organizados em três estruturas-mães (algébricas, topológicas e de ordem) e caracterizavam-se, segundo Liao (2011), "pela adesão completa ao tratamento axiomático, a uma forma abstrata e geral, retratando uma estrutura lógica". Um ponto que deve ser levado em consideração sobre a estrutura da matemática adotada pelo grupo Bourbaki foi a contribuição de Piaget. Novaes, Pinto e França (2008, p.3356), afirmam que,

---

[1] Nicolas Bourbaki - pseudônimo coletivo de um grupo de matemáticos, em sua maioria franceses.

> [...]Em sua teoria psicogenética, Piaget já havia constatado que havia correspondência entre as estruturas de pensamento com as estruturas matemáticas. Para ele, as estruturas-mãe, algébricas, topológicas e de ordem, próprias do pensamento matemático eram as mesmas encontradas na gênese do pensamento humano (NOVAES; PINTO; FRANÇA, 2008, p.3356).

Não se sabe ao certo em que momento esses trabalhos espalharam-se pelo mundo, mas como uma das consequências desses trabalhos surgiu, na Europa, um movimento de reformulação dos currículos chamado Movimento Matemática Moderna, que tentou levar as ideias de Bourbaki para o ensino. Para Lopes (1994, p.100), a Matemática Moderna surgiu com "a preocupação dos políticos em encontrar meios de instrumentar a sociedade após a Segunda Guerra Mundial, para o acelerado desenvolvimento tecnológico, cujo suporte é o conhecimento científico".

As principais características desse movimento, apontam Novaes, Pinto e França (2008, p.3356) foram "o pensamento axiomático, maior grau de generalização, alto grau de abstração, maior rigor lógico, uso de vocábulos contemporâneos, precisão de linguagem, método dedutivo (do geral para o particular) e a forte influência estruturalista". Seus objetivos principais pautavam-se na: "[...] renovação pedagógica do ensino de matemática e a modernização dos programas [...]", conforme René Thom (2002 *apud* Silva e Silva, 2012, p.8).

A modernização que se propunha se daria através da introdução de "teoria dos conjuntos; conceitos de grupo; anel e corpo; álgebra de Boole; noções de cálculo diferencial e integral e estatística" no Ensino Médio (Silva e Silva, 2012, p.8). Entretanto, conforme apontam os PCNs (1998, p.19), "[...]essas reformas deixaram de considerar um ponto básico que viria tornar-se seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos estudantes, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental".

No Brasil um dos principais representantes desse movimento foi Osvaldo Sangiorgi. Sangiorgi em 1960 foi estagiar nos EUA e aproveitou para fazer dois cursos oferecidos pela Universidade de kansas: *Summer Institute for High School* e *College Teachers of Mathematics*. Ao retornar para o Brasil, reformula toda a sua coleção de livros didáticos para o ginasial, cria em 1961, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) e através desse grupo começa a divulgar suas ideias modernizadoras e um novo currículo para o ensino da Matemática. O GEEM tinha como objetivo coordenar, divulgar e introduzir a Matemática Moderna na escola secundária. Outros grupos de estudos surgiram em outros estados como Porto Alegre (GEEMPA), Rio Grande do Sul (GEE), Paraná (GE), Rio de Janeiro (GEMEG) e Bahia (GE).

Já na França, nas décadas de 60 e 70, surge um descontentamento em relação ao currículo da Matemática. O currículo das escolas francesas sofria fortes influências das ideias de Bourbaki. Segundo Douady (1995, p.1),

> [...] estes currículos tinham uma aproximação matemática e davam prioridades às estruturas. [...] O objetivo pedagógico era o de colocar à disposição dos estudantes um número reduzido de ferramentas matemática potentes, respeitando a todo momento o rigor matemático. Estas aproximações embasavam-se em uma hipótese: Se os estudantes tivessem este número reduzido de ferramentas potentes e gerais, então eles poderiam aplicá-las em muitas situações diferentes. (DOUADY, 1995, p.1)

Contrapondo-se a esta ideia, alguns pesquisadores da área de ensino de Matemática acreditavam que se houvessem menos axiomas para enunciar, então seria mais fácil aprender. A partir desse pensamento, foram introduzidas uma série de novas noções no ensino da Matemática. Devido a introdução destas novas noções, surgiu a necessidade de oferecer uma capacitação complementar aos professores, já que eles, conforme Douady (1995, p.2),

> [...] não estavam acostumados a este tipo de Ensino de Matemática, por isso, necessitavam também de documentos pedagógicos em que se ensinavam novas formas de apresentação, de trabalho e avaliação. (DOUADY, 1995, p.2)

Diante dessa situação, o Ministério da Educação Nacional Francês, em 1970, criou os Institutos de Pesquisas do Ensino de Matemática (IREM[2]). Estes Institutos nascem de reflexões sobre o Ensino em Matemática de Guy Brousseau.

Os IREM possuíam duas características. A primeira característica era a de oferecer ambientes voltados para a capacitação inicial e continuada de professores, investigação sobre o ensino de matemática, produção e difusão de materiais pedagógicos; e a segunda característica era a de ser um lugar em que pessoas com as mais diferentes formações pudessem trabalhar juntas. Porém, em 1977, o Ministério reduz as verbas destinadas a esses Institutos, pois acreditava que os professores já sabiam muito bem como ensinar os novos programas. Entretanto, Douady (1995, p. 4) afirma que,

> [...]eles não sabiam o que deviam ensinar e tampouco sabiam que tanta liberdade de ação deveriam dar aos estudantes. Se encontravam bloqueados entre várias alternativas. Se enfrentavam a exigência do rigor matemático e o temor de fazer afirmações que não fossem corretas do ponto de vista matemático. Por outra parte, não sabiam que tanta distância podiam tomar com o texto que tinham. Isto gerava um esquema de ensino dogmático em que se seguia estritamente e se exigia dos estudantes o que estava escrito no papel. (DOUADY, 1995, p.4)

---

[2] Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - IREM

Os professores do IREM buscando respostas para as novas perguntas que surgiram da reflexão do problema acima citado, desenvolveram metodologias de investigação, entre elas a Engenharia Didática.

Para compreender melhor o termo Engenharia Didática, Artigue (1995, p.33) o compara ao trabalho de um engenheiro que,

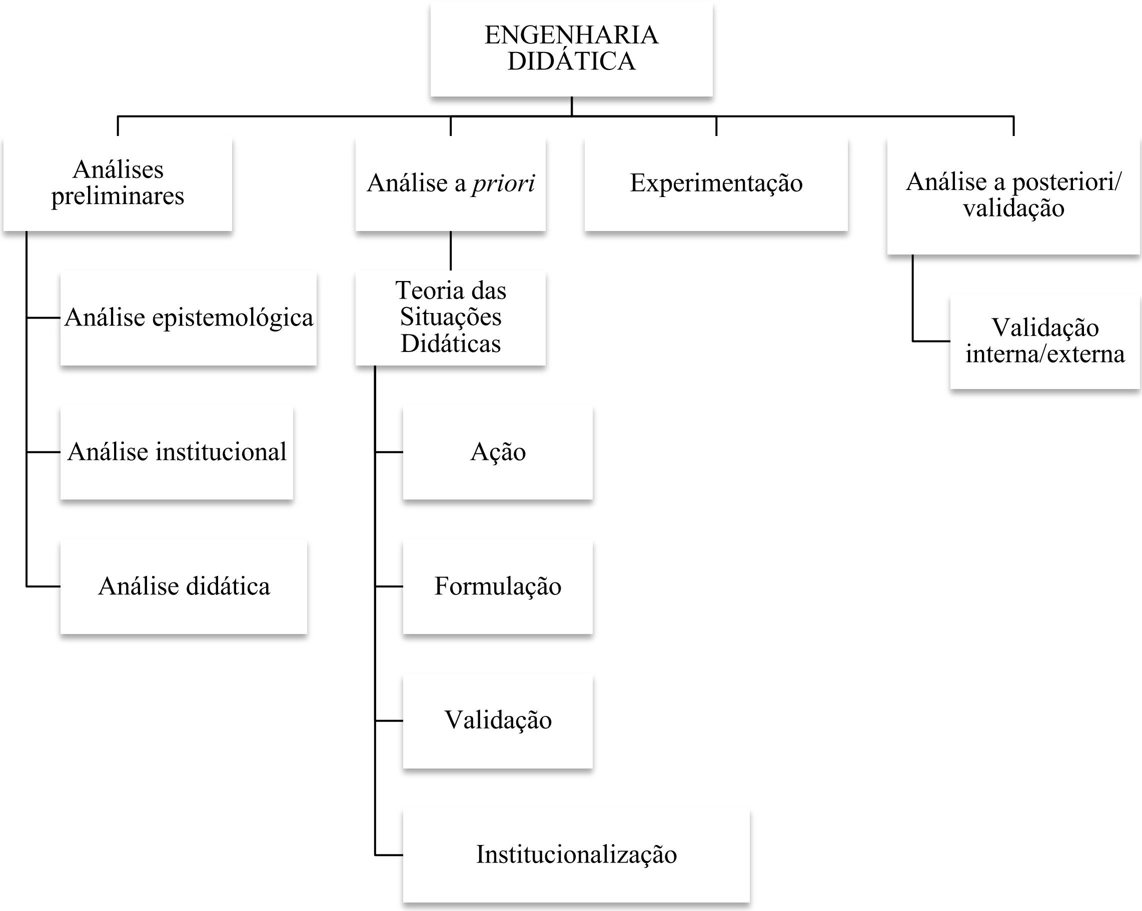
> [...] para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE,1995, p.33).

Segundo Artigue (1995, p.36), "a engenharia didática caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado nas "realizações didáticas" em classe, é decidir sobre a concepção, realização, observação e análises de sequências de ensino".

De acordo com seu objetivo, a Engenharia Didática também pode ser classificada como de 1ª geração ou de 2ª geração. Para Almouloud (2011), a Engenharia Didática de 1ª geração possui como objetivos, "[...] ensinar matemática ao estudante; e [...] produzir conhecimento que pode ser subsídio para a elaboração e publicação de artigos que se tornarão referência na área da educação matemática". Por outro lado, a engenharia didática de 2ª geração busca desenvolver recursos para o ensino ou para a formação de professores.

Como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática de 1ª geração é descrita por meio de uma distinção temporal de seu processo experimental em quatro fases, como mostra a figura 1.

Figura 1 - Fases da Engenharia Didática.



Fonte: Elaborada pela autora

Análises preliminares. Nesta fase busca-se conhecer o objeto de estudo. Almouloud (2007, p.172-173), afirma que normalmente deve-se:

> Estudar a gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas ou contemporâneas, suas funcionalidades na matemática e os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito; analisar o ensino usual e seus efeitos; analisar as condições e fatores e que depende a construção didática efetiva das situações de ensino e considerar do conteúdo e seus efeitos; analisar as condições e fatores de que depende a construção didática e efetiva das situações de ensino; considerar os objetivos específicos da pesquisa; fazer uma análise das propostas curriculares e dos PCNs; analisar livros didáticos; levantar referências bibliográficas sobre os fatores que interferem nos processos de ensino e de aprendizagem do objeto em questão. (ALMOULOUD, 2007, p. 172- 173).

Análises a priori e concepção. É nesta fase que, baseando-se nas análises preliminares, o pesquisador/professor busca elaborar uma situação didática que permitirá ao estudante adquirir um novo conhecimento. Na elaboração dessa situação, deve-se, de acordo com Artigue (1995, p.45), levar em consideração os seguintes pontos:

> (c) Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação didática desenvolvida;

> (d) analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o estudante, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o estudante terá durante a experimentação. (e) prever os campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem. (ARTIGUE, 1995, p.45)

Esta é uma fase importante para a Engenharia Didática, é nela que o professor, baseando-se no estudo realizado nas análises preliminares, planeja e elabora a situação didática, prevendo a postura dos estudantes frente a ela. Espera-se também que o professor elabore possíveis intervenções para que os objetivos da situação sejam alcançados. As análises a *priori* baseiam-se em um conjunto de hipóteses que serão levantadas mediante os objetivos das situações didáticas elaboradas.

Experimentação. É o momento em que a situação didática planejada é aplicada em sala de aula. Caso apareçam problemas durante sua aplicação, o professor poderá corrigi-la. É nesta fase também que o professor fará observações, colherá dados para que sejam analisados posteriormente.

Análises a posteriori/validação. É nesta fase que, após a aplicação da situação didática, o professor, de posse dos dados coletados, confrontará as análises realizadas antes (*a priori*) e após a aplicação (*a posteriori*) com o intuito de validar a pesquisa. Segundo Laborde (1997, p.105), existem duas possibilidades de validação de uma Engenharia Didática, são elas: interna e externa.

A validação interna ocorre quando há uma comparação entre as análises a *priori* e as análises a *posteriori*. Por sua vez, a validação externa acontece quando, além da confrontação realizada em uma validação interna, ocorre uma comparação desses resultados com as produções de estudantes que não participaram da mesma sequência didática (ALVES, 2018, p.72), por meio de entrevista ou questionários. Neste sentido, optou para esta pesquisa, uma validação interna.

Na próxima seção, são apresentas as teorias que influenciaram Brousseau ao elaborar a Teoria das Situações Didáticas.

2.2 Dos projetos experimentais piagetianos às situações didáticas de Brousseau

Jean Piaget foi um biólogo que nasceu em 1896 em Neuchâtel, na Suíça. Durante toda a sua infância e adolescência, interessou-se pelo estudo dos pássaros, fósseis e, por influência do diretor do museu de História Natural, Paul Godet, a quem descreve em sua autobiografia como um homem muito agradável; começou a estudar sobre moluscos.

Durante sua adolescência, através de seu padrinho Samuel Cornut, iniciou seus estudos em Filosofia através dos trabalhos de Henri Bergson[3]. A leitura desses trabalhos fez com que ele decidisse buscar uma explicação biológica do conhecimento na epistemologia. Para ele, a epistemologia representava o elo que faltava entre a Biologia e a Filosofia. Foi então que descobriu uma necessidade que só podia ser satisfeita através da Psicologia.

Aos 22 anos de idade, doutorou-se em Ciências e passou a dedicar-se ao estudo de psicologia, em um laboratório localizado em Zurique, e logo interessou-se pela psicanálise e pela psicologia patológica, devido a saúde mental frágil de sua mãe. Publicou seus primeiros trabalhos sobre inteligência infantil a partir da década de 20[4], mas só veio a ter seu trabalho fortemente reconhecido na década de 70, após mais de cinquenta anos de estudo sobre o desenvolvimento cognitivo do ser humano.

Apesar de doutor em Ciências, Piaget interessou-se pelo estudo de Matemática, Zoologia, Químico-física, Embriologia, Geologia, Filosofia e Psicologia. Todos esses campos de estudo contribuíram para o desenvolvimento de sua teoria sobre o desenvolvimento cognitivo. Sobre essa teoria, Piaget afirmou que sua única ideia era a de que,

> [...] as operações intelectuais prosseguiam em termos de estrutura-do-todo. Essas estruturas denotam os tipos de equilíbrio em cuja direção a evolução, em sua totalidade, está empenhada. A um só tempo, orgânicas, psicológicas e sociais, suas raízes alcançam a própria morfogênese biológica (PIAGET, 1951)

Entre os anos de 1925 e 1931, nasceram seus três filhos. Com a ajuda de sua esposa observou e submeteu seus filhos a várias experiências que foram publicadas em três livros[5]. Sobre os resultados desses estudos, Piaget afirmou que o principal benefício foi,

---

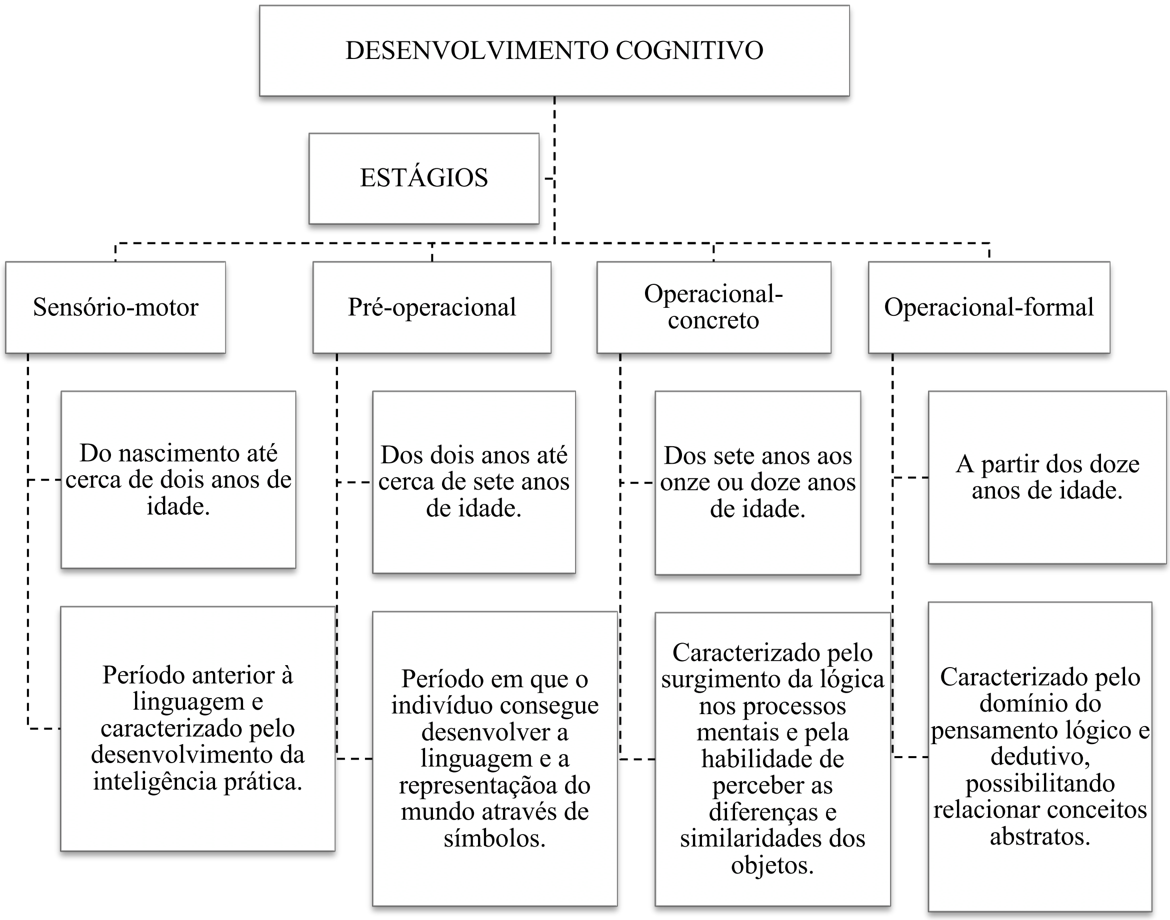
[3] Filósofo e diplomata francês. Em 1927 ganha o Prêmio Nobel de Literatura, consagrando-se como filósofo. Dentre suas principais obras pode-se citar: A evolução Criativa, Ensaios sobre os dados imediatos da consciência, Matéria e memória e as Duas Fontes da Moral e da Religião.
[4] Livros publicados sobre Psicologia Infantil: A linguagem e o pensamento na criança (1923), O Raciocínio na criança (1924), A representação do mundo na criança (1926), A causalidade física na criança (1927). O juízo moral na criança (1931).
[5] O nascimento da inteligência na criança (1937); A construção do real na criança (1937); A formação do símbolo na criança (1945).

> [...] aprender, do modo mais direto, a maneira como as operações intelectuais são preparadas pela ação sensório-motora, mesmo antes do aparecimento da linguagem. Concluí que, para prosseguir em minha pesquisa sobre lógica infantil, eu tinha de mudar meu método, ou melhor, modificá-lo, dirigindo as conversações para objetos que a própria criança pudesse manipular (PIAGET, 1951)

Em sua teoria, o desenvolvimento cognitivo de uma criança acontece de forma contínua, e que o indivíduo aprende, através da interação com o meio em que vive, priorizando fatores biológicos que podem influenciar seu desenvolvimento cognitivo mediante dois mecanismos: assimilação e acomodação. A assimilação consiste em incorporar um objeto/ideia, através da interpretação por interação, em esquemas mentais já adquiridos do indivíduo. Ao incorporar-se a esse novo objeto/ideia, ocorre uma alteração nesses esquemas, provocando assim uma acomodação de um novo conhecimento. Posteriormente, a criança ao dominar este novo objeto, chegará a um ponto de equilíbrio.

Sobre os estágios desses desenvolvimentos, ele os dividiu em quatro e os classificou em: sensório-motor; pré-operatório; operacional-concreto e operacional-forma. Cada estágio encontra-se detalhado na figura 2.

Figura 2 - Estágios do desenvolvimento cognitivo de acordo com os estudos de Piaget.



Fonte: Elaborada pela autora

Apesar de sua teoria não ter sido pensada para o ambiente escolar, Piaget (1896-1980) destacou pontos que devem ser refletidos em busca do melhor tipo de educação escolar. Para ele,

> a) o exemplo deve desempenhar um papel mais importante do que a coerção (Piaget, 1948, p. 22).
> b) dentre todos os métodos pedagógicos, a coerção é o pior deles (Piaget, 1949, p.28).
> c) uma verdade aprendida não é mais que uma meia verdade, enquanto a verdade inteira deve ser reconquistada, reconstruída ou redescoberta pelo próprio estudante (Piaget, 1950, p.35).
> d) a ação supõe pesquisas prévias e a investigação só tem sentido se leva à ação (Piaget, 1951, p.28).
> e) não se aprende a experimentar simplesmente vendo o professor experimentar, ou dedicando-se a exercícios já previamente organizados: só se aprende a experimentar, tateando, por si mesmo, trabalhando ativamente, ou seja, em liberdade e dispondo de todo o tempo necessário (Piaget, 1949, p.39).

Suas ideias reforçam que cada estudante aprenderá, não exatamente o que foi verbalizado pelo professor, nemo que ele espera que o estudante assimile, mas que,

> [...] a aprendizagem depende dos conhecimentos anteriores de cada um e de suas experiências. Para ampliá-la, além de propor situações que desestabilizem os conhecimentos estabelecidos, é preciso que eles se sintam motivados a realizar um esforço cognitivo para superar o problema (DELVAL, 2011).

A contribuição dessa teoria para a o ensino de Matemática, de acordo com Campos e Nunes (1994, p.5), foi a de abrir caminhos para novas pesquisas no campo da Educação Matemática, com o objetivo de buscar entender a melhor época de se ensinar determinados conceitos nas escolas e “a importância da participação ativa dos estudantes na resolução de problemas, a fim de que eles venham a compreender os invariantes dos conceitos”.

Dentre essas pesquisas, pode-se citar a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau na década de 60. Em seu artigo *Des dispositif Piagétiens...aux situations didactiques*, publicado em 2012, Brousseau afirma que sua teoria surgiu a partir de críticas às várias tendências que buscavam influenciar a Educação Matemática na década de 60 e que “os primeiros exemplos de situações que desenvolveu, em que o sujeito implementa "conhecimento" para responder e adaptar-se a uma solicitação do ambiente vieram, sem dúvida, de dispositivos experimentais de epistemologia genética”.

Apesar de fortemente influenciado pelas descobertas de Piaget sobre o desenvolvimento humano, foi a modelagem que Wermus propôs, para expressar as ideias de Piaget sobre a gênese do pensamento lógico da criança, que desempenharam um papel importante no desenvolvimento da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2012, p.107).

Em seus trabalhos, Wermus[6], discípulo e colaborador de Piaget, descreveu as principais etapas do desenvolvimento concomitante de predicados e precursores lógicos amalgamados. Sobre essas etapas, Brousseau (2012, p.107) explica que

> O sujeito reconhece um objeto por meio de um "predicado amalgamado" (PA). Este consiste em uma lista de componentes contextuais (C.C.). Cada componente contextual expressa uma condição que deve ser realizada para o sujeito identificar o objeto. Estas são, portanto, restrições opostas ao reconhecimento deste objeto. (BROUSSEAU, 2012, p.107)

Durante a interação do sujeito com o objeto, ele começa a distinguir cada componente contextual, fazendo com que ele supere as restrições que estes componentes contextuais provocam para seu conhecimento do objeto. Essa superação é feita em etapas e tem como foco principal um componente conceitual. Para Brousseau (2012, p.107),

[6] Wermus, Henri: Modelisation de certaines activitées de la pensée à l’aide des predicats amalgamés, en La Pensée naturelle, estructures, procedures et logique du sujet, Publications de l’Université de Rouen, 86, 53-36, 1987.

> [...] este desenvolvimento não é realizado ao mesmo tempo ou da mesma maneira em todos os campos de predicados amalgamados: em diferentes domínios como número, espaço, tempo, etc. O desenvolvimento do pensamento lógico é levado a cabo por meio de experimentos específicos e de acordo com diferentes processos. É aqui que as obras de Piaget-Wermus poderiam encontrar a problemática da didática (Brousseau, 2012, p.107)

Brousseau (2012, p.107), expõe a situação apresentada na Tabela 1, para exemplificar melhor o que seriam os predicados amalgamados e os componentes contextuais em uma situação em que é proposta aos estudantes identificar retângulos.

Tabela 1 - Exemplo de Predicado Amalgamado e Componentes Contextuais

Predicado Amalgamado (PA)	**Retângulo**				
	Componentes Contextuais				
	Reconhece (R)	**Tamanho (T)**	**Posição (P)**	**Alongamento (A)**	**R, não Q**
	O estudante reconhece um retângulo.	Os estudantes não reconhecem os retângulos que são muito grandes ou muito pequenos.	Os estudantes não reconhecem um retângulo se ele não aparecer na posição padrão, o comprimento "horizontal"	Os estudantes não reconhecem a relação largura / comprimento é muito pequena.	Os estudantes não reconhecem quadrados como retângulos

Fonte: Tabela elaborada pela autora, baseando-se no texto de Brousseau (2012, p.107)

Para atender as necessidades de uma pesquisa científica, Brousseau (2012, p.107) adianta que a modelagem de Wermus “tinha que ser a priori capaz de representar qualquer evolução do conhecimento do sujeito, de modo que os experimentos e observações permitissem "então" eliminar alguns deles por condições adicionais”. Essa observação foi preciosa para que Brousseau elaborasse sua Teoria das Situações Didáticas (TSD), que será apresentada na próxima subseção.

2.2.1 Guy Brousseau e sua Teoria das Situações didáticas

Guy Brousseau nasceu em Taza, Marrocos, no ano de 1933. Apaixonado por Física e Matemática, buscava compreender o caminho pelo qual os estudantes as aprendiam. Esta inquietação o fez construir uma notável carreira voltada para a pesquisa no ensino em Matemática e a ser considerado o pai da Didática da Matemática.

Brousseau iniciou sua pesquisa com estudantes da educação básica entre os anos de 1953 e 1956. Nesse período, teve a oportunidade de refletir sobre o ensino e a aprendizagem em Matemática; preparou diversas lições, observou crianças e fez diversas análises, tentando investir em uma teoria que compreendia as interações sociais entre estudantes, professores e o conhecimento. Nos anos 50 e 60, Brousseau (2012, p. 102) afirma que,

> [...] o fluxo de injunções que a educação geralmente recebe de todas as instituições da sociedade se intensificou abruptamente. Com as esperanças de um período pós-guerra e a facilidade financeira dos trinta anos gloriosos, propostas de várias origens, relativas, entre outros, à educação (Langevin-Wallon), psicologia (Piaget), "la" matemática (Bourbaki), lingüística (Chomsky), etc. se reúnem sob a mesma bandeira epistemológica: estruturalismo. (BROUSSEAU, 2012, p.102)

Suas observações foram interrompidas no mês de outubro de 1956, quando foi chamado para o serviço militar obrigatório. Porém, não deixou de estudar, aproveitava sua passagem por alguns países para fazer cursos, foi quando conheceu a teoria dos conjuntos, na França.

De volta do serviço militar, no ano de 1959, Brousseau retorna a sua rotina como professor e pesquisador.

No ano de 1962, professores do ensino básico foram convidados para participar de um treinamento para ensinar matemática em uma universidade que enfrentava carência de professores nesta área. Brousseau foi aceito e obteve licença para fazer o treinamento.

Em 1970, mesmo ano em que foram inaugurados os IREM, apresenta os primeiros elementos da Teoria das Situações Didáticas, no Congresso da Associação de Professores de Matemática do Educação Pública (APMEP). De acordo com Almouloud (2007),

> [...] a TSD é denominada de construtivismo didático por ser uma proposta alternativa dentro da Psicologia Cognitiva que se baseou em alguns conceitos do construtivismo piagetiano como desequilíbrio, adaptação e acomodação, mas rejeita a ideia das fases de desenvolvimento infantil. (ALMOULOUD, 2007)

Sobre o objetivo dessa teoria, Brousseau (2012, p.) afirma que ela busca "prever as condições em que as trocas entre uma instituição e um meio ou entre duas instituições dependerão de um conhecimento específico".

Sobre situação didática, Brousseau (2009), afirma que se trata de

> [...] uma relação entre os estudantes, o professor e o conhecimento, planejada pelo docente para que todos se apropriem, de maneira significativa, de um saber específico

> da área. Nela, o estudante aplica o que sabe na resolução de um desafio, faz aproximações e explicita os procedimentos e raciocínios utilizados (BROUSSEAU, 2009).

A Teoria das Situações Didáticas deve privilegiar os procedimentos adotados dentro das situações de ação, de formulação, de validação e, finalmente, de institucionalização.

a) Situações de ação. É o momento em que o estudante tentar compreender e adaptar-se a um meio didático denominado por Brousseau de *milieu*, ao qual foi exposto, sendo então, levado a tomar decisões, analisar e verificar seus resultados. Todas essas ações acontecem internamente e geram conhecimentos que os estudantes não conseguem ainda verbalizar e que não estão formulados matematicamente. Para Almouloud, Manrique, Silva e Campos (2004, p.97), a situação de ação consiste em,

> [...] colocar o estudante frente a uma situação de ação em que, para solucionar o problema dado de forma mais adequada, haja necessidade do conhecimento que se pretende ensinar. Um verdadeiro diálogo deve instaurar-se entre a criança que age e a situação que lhe dá informações para sua ação. [...] (ALMOULOUD, MANRIQUE, SILVA E CAMPOS, 2004, p.97)

b) Situações de formulação. É a fase em que os estudantes já conseguem formular hipóteses, a criar preferências/estratégias para resolver a situação ao qual foi exposto e a expô-las verbalmente aos seus pares, porém sem entender o porquê. Para Almouloud, Manrique, Silva e Campos (2004, p.97), o objetivo da situação de formulação é,

> [...] a troca de informações, momento em que o estudante ou grupo de estudantes explicita as ferramentas utilizadas e a solução encontrada. Para que o estudante explicite seu modelo e para que essa formulação tenha sentido para ele, é necessário que outro (s) estudante (s) obtenha (m) os mesmos resultados. Essa troca de informações permitirá criar um modelo explícito, que poderá ser formulado com a ajuda de sinais e regras comuns, novas ou já conhecidas. ALMOULOUD, MANRIQUE, SILVA E CAMPOS, 2004, p.97)

c) Situações de validação. Nesta fase os conhecimentos já começam a ser formulados matematicamente, possibilitando ao estudante verbalizar e justificar suas estratégias com o objetivo de dizer ao outro que o que diz é verdade. Para Almouloud, Manrique, Silva e Campos (2004, p.97), o objetivo da situação de validação é,

> [...] a veracidade das asserções e, como consequência, as interações com o meio são organizadas. Como a validação nas fases precedentes é insuficiente no processo, o estudante deve mostrar por que o modelo que criou é válido. Para que ele mesmo construa uma demonstração que faça sentido para ele, é necessário que a faça em uma situação de validação, isto é, ele deve convencer alguém da validade de seus argumentos. [...] (ALMOULOUD, MANRIQUE, SILVA E CAMPOS, 2004, p.97)

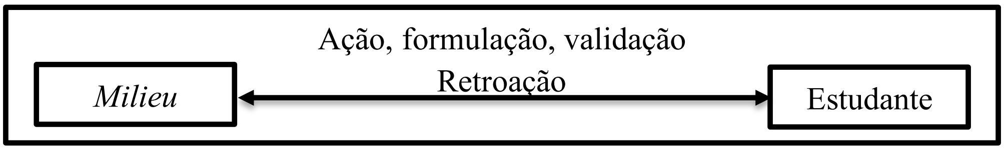
As três primeiras situações (ação, formulação e validação) são consideradas por Brousseau como sendo situações a-didáticas. Uma situação a-didática é considerada por Brousseau (1998, p.59), como sendo o momento em que

> o estudante aceita o problema como seu e o momento em que produz sua resposta, o professor recusa-se a intervir como aquele que propõe os conhecimentos que pretende fazer surgir. O estudante sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para levá-lo a adquirir um conhecimento novo, mas ele deve saber também que esse conhecimento é absolutamente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas (BROUSSEAU, 1998, p. 59).

Nesta situação, o professor não estará ausente, mas incentivando os estudantes através de sugestões de ações e estratégias, para que o estudante mantenha a concentração nas atividades propostas (Broussau, 2016).

As situações a-didáticas complementam as situações didáticas e são caracterizadas pelo momento em que o estudante se encontra sozinho com o problema e seus próprios conhecimentos. Nessas primeiras situações, ocorre uma interação do estudante com o *milieu*, mostrada na figura 3.

Figura 3 - Situação a-didática



Fonte: http://eroditi.free.fr/Enseignement/DDML3S1_08-09/DDML30809S1_C5_TSDb.pdf

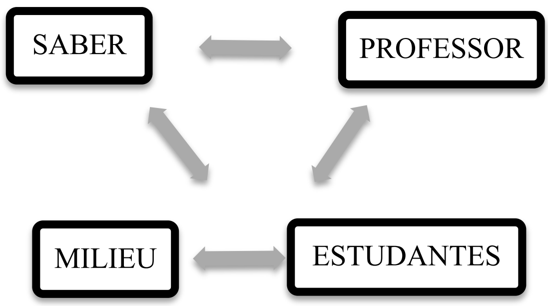
Pommer (2013, p.17), afirma que "o *milieu* representa os vários recursos que permitem ao estudante interagir com o objetivo de vencer o jogo ou resolver a situação-problema proposta, de modo a progredir em seus conhecimentos". Neste contexto, o *milieu* pode ser representado por uma situação-problema, um jogo, uma prova, uma simulação, etc.

O *milieu/meio didático* deve ser planejado e organizado pelo professor, de modo que o estudante seja capaz de manter sua autonomia. Desta maneira, o professor deve fornecer não apenas os problemas, mas os meios para a sua solução e o estudante deve perceber que, com os conhecimentos já adquiridos, poderá buscar soluções para novos problemas.

Anos depois de ter proposto a Teoria das Situações Didáticas (TSD), Brousseau percebeu a necessidade de inserir uma fase em que o professor organiza, reforça e generaliza o conhecimento adquirido pelos estudantes e a chamou de situação de institucionalização.

d) Situações de institucionalização. De acordo com Teixeira e Passos (2013, p.166), é nesta fase que "o professor retoma parte da responsabilidade cedida aos estudantes, conferindo-lhes o estatuto do saber ou descartando algumas produções dos estudantes e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização". Essa situação possui um caráter didático, visto que além do professor ter um papel ativo, ocorre uma interação dele, do estudante e do saber, como mostra a Figura 4.

Figura 4 - Situação didática



Fonte: http://eroditi.free.fr/Enseignement/DDML3S1_0809/DDML30809S1_C5_TSDb.pdf

Em 1972, ele inaugura a escola de ensino primário Jules Michelet. A escola tinha como principal função fornecer meios para se investigar os fenômenos didáticos, através da observação de crianças aprendendo matemática. A escola situava-se em Talence, subúrbio de Bordeaux, cidade ao sudoeste da França. Douady (1995, p.3) afirma que essa escola era "um laboratório dentro da prática em si, onde se encontravam grandes quantidades de meios para o estudo dos fenômenos didáticos".

Em 1980, durante uma enquete aplicada com estudantes que possuíam dificuldades em Matemática surge o conceito de contrato didático. A enquete foi realizada pelo Centro de Observação e Pesquisas sobre o Ensino de Matemática[7] (COREM)[8] da Universidade de Bordeaux, como parte das pesquisas desenvolvidas por Brousseau sobre situações matemáticas.

Toda situação didática deve ser guiada por um contrato didático, que se trata do "conjunto de comportamentos (específico) do professor que são esperados pelo estudante e pelo conjunto de comportamentos do estudante que são esperados pelo professor". Não é um

[7] O COREM foi idealizado por Brousseau e criado em 1973 pelo Instituto de Pesquisas no Ensino de Matemática (IREM), funcionou até 1999. Ele consistia em um laboratório associado a escola de ensino primário Jules Michelet, e que tinha como objetivo, a observação e a realização de experiências de ensino a longo prazo em um cenário controlado e limitado.

[8] Centre d'Osservation et Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques- COREM

contrato escrito e nem dito, mas que dever ser percebido tanto pelo professor, em não transmitir explicitamente um conteúdo ao seu estudante, quanto pelo estudante, ao perceber que a situação didática foi elaborada pelo professor para que ele possa fazer, tendo ponto de partida seus conhecimentos prévios.

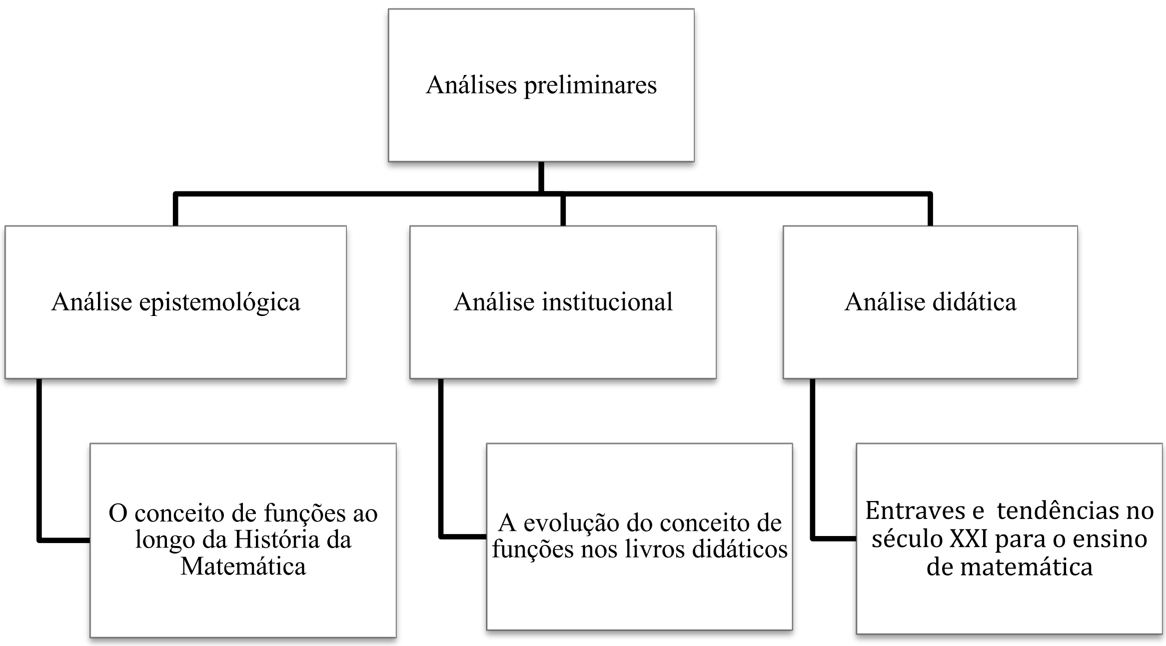
A cada situação didática elaborada pelo professor para a aquisição de um novo conhecimento pelo estudante, o contrato é renovado, ou seja, ele existe em função do aprendizado do estudante. Por isso, é importante que, para um contrato não ser quebrado, que o professor organize o meio didático de forma que ele ofereça uma resistência, uma dificuldade adequada para que o estudante evolua em sua aprendizagem.

No próximo capítulo são apresentadas as análises epistemológica, institucional e didática do objeto em estudo, como parte da primeira fase da Engenharia Didática, intitulada Análises Preliminares.

3 ANÁLISES PRELIMINARES

As análises preliminares definem, através das análises epistemológica, institucional e didática do objeto estudado, os antecedentes para a fase de concepção do processo (Michele, 2015, p.470). Para representar estas três análises apresenta-se, nesta seção, uma breve descrição sobre o conceito de funções ao longo da história da Matemática e o desenvolvimento do conceito de funções nos livros didáticos brasileiros, além de análises a respeito dos entraves e das tendências no século XXI para o ensino de matemática e consequentemente, para o ensino de funções na educação básica brasileira.

Figura 5 - Detalhamento das Análises Preliminares desta pesquisa.



Fonte: Elaborada pela autora

3.1 Análise epistemológica: o conceito de funções ao longo da História da Matemática

A ideia de função surgiu da necessidade de resolver problemas do cotidiano em diversas civilizações. Desta maneira, para compreender melhor este conceito é apresentado brevemente seu desenvolvimento histórico.

A ideia atual de função foi sendo construída ao longo do tempo por diferentes civilizações. Considerado um dos conceitos mais importantes da Matemática, o primeiro registro da ideia de função surgiu, de forma intuitiva, através da dependência de valores relacionados à contagem. Achados arqueológicos na Morávia, República Tcheca[9] e na África[10] apresentam o que provavelmente seja o registro da maneira que os homens pré-históricos usavam para contar, fazendo então uso do emprego da correspondência biunívoca.

Com o desenvolvimento do conceito de número, o homem passa a realizar somas e subtrações. É o surgimento da Aritmética. Tábuas numéricas e *papiros* indicam que os mesopotâmios e os egípcios já faziam uso das quatro operações básicas. Essas operações representam nada mais do que uma relação entre duas variáveis.

Além das quatro operações, as tábuas numéricas também mostravam que os astrônomos mesopotâmicos já realizavam interpolações, extrapolações e buscavam regularidades (SERRANO, 2010, p.301).

Segundo Vazquez, Rey e Boubée (2008, p.142), os Mesopotâmicos apresentavam grande domínio algébrico, caracterizado pela, "...substituição e pela troca de variáveis, e até pelo uso da lei exponencial".

Sobre o conceito de funções no Egito, Costa (1997, p.2) afirma que surgiu, "a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol)". A ideia desse procedimento está intimamente ligada à funções tangentes e cotangentes.

Apesar de muitos pesquisadores divergirem sobre a época em que se originou o conceito de funções, a maioria concorda em atribuir a Nicole Oresme (1323-1382), a primeira definição mais próxima do conceito de função que temos hoje.

Para descrever as leis da natureza como relação dependente entre duas magnitudes, Oresme utilizava-se de gráficos que possuíam eixos, o qual chamou de longitude e latitude, que representavam uma quantidade variável. "Parece que ele percebeu o princípio fundamental de se poder representar uma função de uma variável como uma curva, mas não soube usar eficazmente essa observação a não ser no caso de uma função linear" (BOYER, 2010, p.188).

Outro matemático que contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função foi René Descartes (1596-1650). Não se sabe ao certo se Descartes leu os trabalhos de Oresme,

---

[9] Foi achado um osso de lobo jovem com profundas incisões, em número de cinquenta e cinco, que estavam dispostos em duas séries, com vinte e cinco em uma e trinta na outra, com os entalhes em cada série dispostos em grupos de cinco. (BOYER,2010, p.24)

[10] Uma fíbula de babuíno com vinte e nove entalhes e o osso Ishango com exemplos do que parecem ser entradas multiplicativas. (BOYER,2010, p.24)

mas para Yuoschkevitch (1976, p.52), “é notável a semelhança de alguns princípios básicos da matemática universal de Descartes com a teoria de latitudes de formas de Oresme”.

Provenientes da álgebra aplicada à geometria, Descartes apresentava em seus trabalhos, a ideia de função através do uso de coordenadas de forma clara. Para ele, função é “uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de uma maneira que é possível calcular a partir do valor de uma delas o valor correspondente da outra” (YUOSCHKEVITCH, 1976, p.52). A introdução do conceito de funções através de equações provocou uma verdadeira revolução no estudo de Matemática e contribuiu para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral e a ideia de derivada como maneira de encontrar a tangente a qualquer ponto de uma curva.

No século XVII, o conceito de função desenvolvido por Newton (1642-1727) apresentava-se intimamente ligado a seus estudos sobre o movimento dos corpos. Diferentemente de Newton, Leibniz (1646-1716), desenvolveu a ideia de funções quando se deparou com problemas de natureza geométrica ligadas ao cálculo. Segundo Bueno e Viali (2009, p.41), Leibniz caracterizava função como "qualquer parte de uma linha reta, ou seja, segmentos obtidos pela construção de infinitas linhas retas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma determinada curva”.

É creditado a Leibniz a introdução dos termos constante, variável, coordenadas e parâmetro, além da própria palavra “função”, introduzida em 1673 em seu manuscrito intitulado *O método inverso das tangentes*, mas foi a partir do artigo de Johann Bernoulli, em 1698, sobre um problema isoperimétrico[11], que o conceito e a simbologia de funções se consolidaram. Ponte (1992, p.2) afirma que foi da necessidade de um termo para representar quantidades que dependiam de uma variável por meio de uma expressão analítica, após o desenvolvimento do estudo de curvas por métodos algébricos, que surgiu a palavra função.

Em 1698, Bernoulli publica um artigo em que utiliza pela primeira vez o termo função, mas sem uma clara definição. Apenas em 1718, em um de seus artigos, define função como “uma quantidade que é composta de alguma forma a partir dessa variável e constantes” (PONTE, 1992, p.2).

---

[11] O problema isoperimétrico no plano consiste em: Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área.

Em meados do século XVIII, a ideia de função foi formalizada por Euler (1707-1783) que introduziu a notação de função, $y = f(x)$. Euler foi estudante de Johann Bernoulli e concordava com a definição de função de seu mestre, mas acreditava também que, "a concepção de função não precisava ser expressa por uma fórmula, mas podia ser representada geometricamente por uma curva" (RAMOS, 2013, p.2).

As ideias de Euler permaneceram no século XIX, mas o conceito de funções, alterado a partir dos trabalhos de Joseph Fourier (1768-1830) sobre séries trigonométricas e a teoria de funções de uma variável real, ganham destaque nesse século. Para Fourier (1822, p.552) uma função

> [...] representa uma sequência de valores ou de ordenadas das quais cada uma é arbitrária. A abscissa *x* podendo receber uma infinidade de valores, haverá um mesmo número de ordenadas *fx*. Todas têm valores numéricos reais, ou positivos, ou negativos, ou zero. Não supomos que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem de uma maneira qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade. (Fourier, 1822, p.522)

Em 1807, Fourier apresenta à Academia de Ciências da França um artigo sobre sua pesquisa envolvendo a propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos. Nesse artigo ele apresenta a seguinte afirmação: "toda função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e cosseno" (EVES, 2004, p.526). Em outras palavras, ele afirma que qualquer função, definida em um intervalo de $(-\pi, \pi)$, pode ser representada por

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sennx), \qquad (1)$$

onde a e b são números reais. Apesar dessa equação já ser conhecida na época, o diferencial de Fourier foi a afirmação de que toda função definida neste intervalo, poderia ser representada desta maneira (EVES, 2004, p.527). O artigo foi rejeitado e criticado por sua falta de rigor.

Em 1805, dois anos antes de Fourier apresentar seu artigo à Academia de Ciências da França, nasceu em Düren-Alemanha, Lejeune Dirichlet. Fluente em francês, Dirichlet manteve estreita comunicação com os matemáticos e a Matemática daquele país, o que contribuiu para seu acesso aos trabalhos de Fourier sobre as series trigonométricas.

Em 1828, dois anos antes da morte de Fourier, Dirichlet conseguiu apresentar resultados satisfatórios para as séries trigonométricas de Fourier para uma função sujeita a certas restrições, validando assim aquela teoria. De acordo com Eves (2004, p.661), "essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente". Buscando uma definição de função que envolvesse uma forma de relacionar a noção de variável à noção de função, Dirichlet em 1837, definiu função da seguinte maneira:

> Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis *x* e *y* estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a *x*, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regras, um valor a *y*, então se diz que *y* é uma *função (unívoca)* de *x*. A variável *x*, a qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável *y*, cujos valores dependem dos valores de *x*, é chamada *variável dependente*. Os valores possíveis que *x* pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por *y* constituem o *campo de valores* da função. (EVES, 2004, p. 661)

No final do século XIX e início do século XX, ao estudar sobre a unicidade da representação de funções por séries trigonométricas, George Cantor (1845-1918) cria a Teoria dos Conjuntos. O conceito de função passa então a ser visto como uma relação entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa. Assim, na teoria dos conjuntos, uma função *f* é, por definida como:

> [...] um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se domínio da função e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz imagem da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano A x B. Se *f* é uma função e $(a, b) \in f$, escreve-se $b = f(a)$. (EVES, p.661, 2004).

Para a construção do conceito de função, diversos matemáticos como Oresme, Descartes, Leibniz, Johann Bernoulli, Euler, Fourier, Dirichlet, Cantor, Lobatchevsky durante vários séculos, contribuíram para o estudo e definição de funções que se tem hoje. Algumas definições sobre esse conceito nos séculos XVII e XX podem ser observadas na tabela 2.

Tabela 2 - Definições de funções ao longo dos séculos

ÉPOCA	DEFINIÇÃO
SÉCULO XVII	Qualquer relação entre variáveis
	Uma quantidade obtida de outras quantidades mediante operações algébricas ou qualquer outra operação imaginável.
	Qualquer quantidade que varia de um ponto a outro em uma curva.
	Quantidades formadas usando expressões algébricas e transcendentais de variáveis e constantes.
SÉCULO XIX	Quantidades que dependem de uma variável.
	Função de algumas variáveis, como quantidade, que é composta, de alguma forma, de variáveis e constantes.
	Qualquer expressão útil para calcular.
SÉCULO XX	Correspondência entre variáveis.
	Correspondência entre um conjunto A e os números reais.
	Correspondência entre os conjuntos.

Fonte: VAZQUEZ, REY & BOUBÉE, 2008, p.153

No século XX com o desenvolvimento da computação eletrônica, ocorreram avanços no campo da Matemática, em grande parte provocados pelos problemas econômicos causados pela Revolução Industrial do século XIX, pelo clima de guerra mundial e pela corrida espacial travada pelos Estados Unidos e Rússia. Ramos (2013, p.3) afirma que nesta época,

> [...] tornou-se necessário a generalização de conceitos fundamentais que se tornaram abstratos, e no desenvolvimento da computação eletrônica a elaboração de modelos de computação (resolução de problemas por uma máquina) a linguagem funcional pela sua simplicidade sintática e pela sua facilidade em descrever problemas recursivos. (RAMOS, 2013, p.3)

O desenvolvimento da Matemática computacional; juntamente com a criação de uma álgebra simbólica, através de conceitos como variável dependente, variável independente, domínio, contradomínio, entre outros; e a extensão do conceito de número, foram preliminares para a introdução do conceito de função "como uma relação entre conjuntos de números em vez de "quantidades" e para representação analítica de funções por fórmulas". (Yuoschkevitch, 1992, p.50).

O conceito de funções que se tem hoje só foi inserido como conteúdo escolar depois do século XIX e sua inserção nos livros didáticos brasileiros configura-se desde os primeiros exemplares. O desenvolvimento deste conceito nos livros didáticos é abordado na próxima subseção.

3.2 Análise institucional: a evolução do conceito de funções nos livros didáticos

O livro didático no Brasil, desde a sua adoção no século XIX, tem sofrido mudanças.

No final do século XIX alguns países europeus e os Estados Unidos, sentiram as mudanças em sua sociedade ocasionadas pela Revolução Industrial e consequentemente, uma necessidade de uma reforma educacional urgente, tanto em relação aos conteúdos quanto nos métodos de instrução (SCHUBRING, 1999, p.30). Nessa época, o ensino de Matemática tinha um caráter desligado das aplicações práticas, de modo que, segundo Schubring (1999, p.30), "...os conteúdos eram usualmente bastante elementares e os métodos de ensino enfatizavam aspectos formais", tornando o ensino de Matemática totalmente desconectado das práticas do cotidiano.

No início do século XX, ocorreram então, as primeiras reformas curriculares no ensino de Matemática em alguns países como Inglaterra e França. Para acompanhar estas reformas e facilitar a comunicação entre os países sobre suas reformas internas no ensino da Matemática escolar, foi criado, no ano de 1908, durante o quarto Congresso Internacional de Matemática, em Roma, o Internationale Mathematische Unterrichtskommission (IMUK)[12].

Para participar dos trabalhos do IMUK, alguns países foram convidados como membros tendo direito a voto; e outros como países convidados sem direito a voto. O critério utilizado para ser membro, foi o grau de atividade de sua comunidade matemática, que foi medida pela quantidade de matemáticos que participaram dos últimos quatro congressos. Devido a este critério, o Brasil acabou participando como país convidado sem direito a voto. Entretanto, apesar de sua pequena participação, Schubring (1999, p.30) afirma que é bastante notável que no Brasil, "...a reestruturação de todo o currículo pelo conceito de função e a introdução do cálculo – tenha sido recebido como uma transmissão do movimento de reforma do IMUK".

No ano de 1927, na posição de diretor do Colégio Dom Pedro II, membro do Conselho Nacional de Educação e da Associação Brasileiro de Educação; e fortemente influenciado pelo movimento de reformas curriculares do IMUK e das ideias do alemão Felix Klein[13]; Euclides Roxo encaminha à Congregação do Colégio uma proposta de reforma para o

---

[12] Comissão Internacional de Instrução Matemática.

[13] As ideias de Felix Klein tinham como objetivos, introduzir o Cálculo Infinitesimal no ensino secundário, unificar a aritmética, geometria e álgebra através do conceito de função e reorientar os métodos de ensino no sentido da intuição e das aplicações (LAVORENTE, 2008, p.35).

ensino de Matemática. A ideia era criar a disciplina Matemática, tendo como eixo integrador funções, que integraria os ramos aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, que até então, eram ensinados separadamente, (VALENTE, 2005, p.90).

Apesar da resistência por parte de alguns professores do Colégio, em 1928, Euclides recebe parecer favorável à reforma, tanto do Departamento Nacional de Ensino quanto da Associação Brasileira de Educação. A partir dessa reforma, realizada no ano de 1929, surge a necessidade de se escrever um livro para o ensino secundário[14] (Ensino Médio, atualmente). Surge então, o livro didático de Matemática.

Inicialmente, quatro coleções foram lançadas, como mostra a tabela 3.

Tabela 3 - Livros didáticos lançados entre os anos de 1929 e 1940

Autor	Título do livro didático	Volumes	Ano
Como se aprende Mathematica	Savério Cristófaro	2	1929
Curso de Mathematica elementar	Euclides Roxo	3	1929-1931
Mathematica	Cecil Thiré e Mello e Souza	3	1931-1932
Primeiro ano de Mathematica	Jacomo Stávale	3	1930-1932

Fonte: Elaborada pela autora

O primeiro livro publicado seguindo as orientações para o ensino de Matemática do Colégio D. Pedro II foi o de Cristófaro, no mês de julho de 1929. Sobre a abordagem do conceito de funções nesse livro, Dassie (2011, p. 3) afirma que,

> [...] a representação gráfica de funções não favorecia atribuição de significados, pois apesar de existir um capítulo denominado Diagramas, a relação de dependência só era representada a partir de uma equação indeterminada onde procedimentos algébricos são citados para obter uma relação entre duas variáveis. O conceito de função não é explorado no décimo capítulo do segundo volume, apenas a representação de funções a partir da relação expressa de forma algébrica com a construção de tabelas. Assim o conceito de função não é tratado como ideia central no ensino (DASSIE, 2011, p.3).

Na coleção de Euclides Roxo, o estudo de funções aparece tanto no primeiro quanto no segundo volume. No primeiro volume, o capítulo 7 denominado *Uso dos gráficos*,

[14] A organização do ensino se dividia entre Ensino Primário de no mínimo 4 anos, que poderia estender-se até 6 ano; o Ensino Médio, que era dividido em 2 ciclos: o ginasial (ensino de 4 anos), no qual o estudante só poderia ter acesso mediante um exame de admissão; o colegial (ensino de no mínimo 3 anos); com o qual se adentrava também ao Curso Secundário, que admitia uma variedade de currículos e que no 3º ano visava a uma preparação dos estudantes para o ingresso ao Ensino Superior; e o Ensino Técnico de grau médio; cursos industrial, agrícola e comercial (QUEIRÓZ, 2013, p.21030).

caracterizava-se, de acordo com Dassie (2011, p.6) "...pelo tratamento da informação. A articulação entre dados numéricos, tabelas, gráficos e a linguagem algébrica era feita a partir de diferentes contextos, como por exemplo, atitudes de picos, extensão territorial, populações, produção de mercadorias, etc".

No segundo volume, no capítulo 8 denominado *Noção de função – Proporcionalidade*, a noção de função é dada pela noção de dependência. Sobre este capítulo. Dassie (2011, p.4) afirma que,

> O conceito de função era apresentado analiticamente, por representação gráfica, algebricamente por uma expressão e aritmeticamente por meio de tabelas. Destaca-se a discussão sobre dependência proporcional articulando a representação gráfica e os conceitos de inclinação e declividade e a proporcionalidade inversa articulada com as funções do tipo y = a/x. (DASSIE, 2011, p.4)

No segundo volume o estudo de funções é abordado nos capítulos 9 e 11. No capítulo 9, relativo à regra de três e divisão proporcional, a função y = ax, aparece articulada com o fator de proporcionalidade para a resolução de problemas que envolvia a regra de três. E de acordo Dassie (2011, p.6), no capítulo 9,

> "...amplia-se a resolução de problemas articulando o conceito de função, a partir do tratamento gráfico, geométrico e algébrico, com as respectivas soluções. São utilizados diversos contextos, como por exemplo, conversão de escalas termométricas, movimento uniforme, horários das estradas de ferro e problemas da antiguidade. (DASSIE, 2011, p.6)

Um destaque nos livros de Euclides é a inclusão de orientações para o uso de instrumentos de medida e de construção geométrica.

No ano de 1930, Getúlio Vargas assume o poder e cria o ministério da Educação e da Saúde, nomeando Francisco Campos como ministro. Com a difícil tarefa de organizar o ensino secundário, Campos convida Euclides Roxo para auxiliá-lo.

Acatando todas as ideias modernizadoras de Euclides para o ensino de Matemática, promulga no ano de 1932 o Decreto nº 21.241 de 4 de abril. Tripoli (2005, p.21) afirma que, "...ao ensino secundário foi proposta uma inovação em seus conteúdos e metodologias", além de uma preocupação com a aprendizagem do estudante.

É neste período que Cecil Thiré e Mello e Souza lançam o livro *Mathematica*, e apresentam um tratamento diferente ao estudo de funções dado por Euclides Roxo em seus livros, contrariando assim, as orientações recentes sobre o ensino de Matemática.

Uma das primeiras diferenças é a inexistência de articulações entre os conteúdos de aritmética, álgebra e geometria, tão presentes nos livros de Euclides Roxo. Outra diferença está relacionada ao estudo de funções. Percebe-se que no primeiro volume, "...os capítulos de razão e proporção não destacam a relação entre duas grandezas de forma a conduzir ao conceito de função por dependência, nem se articulam com processos algébricos" (DASSIE, 2011, p.9).

No segundo volume o estudo de funções passa a não se relacionar com outros assuntos, passando a ser explorado apenas algebricamente. Dassie (2011, p.9), afirma que algumas funções como $y = x^m$, $y = 1/x^m$ e $y = \sqrt{x}$, são tratadas apenas através de seus gráficos. Em relação à metodologia, Dassie (2011, p.9) afirma que,

> Os conteúdos são introduzidos por explanação teórica, seguida de atividades resolvidas e propostas de cunho aplicativo ou são introduzidos por um ou poucos exemplos, seguido de uma sistematização e depois de atividades de aplicação, tornando sucinta a apresentação dos programas. Não há nenhum apelo à intuição (DASSIE, 2011, p.9).

Não existe nesses livros, nenhum incentivo à utilização de instrumentos de construção geométrica.

No início do ano de 1930, Jacomo Stávale lança seu livro, *Primeiro ano de mathematica*. A primeira novidade está relacionada à distribuição dos conteúdos, que diferem parcialmente dos programas para o primeiro ano daquela época.

Neste primeiro livro, Stávale não prioriza o estudo de funções. De acordo com Dassie (2011, p.10), o estudo dos gráficos "inicia-se com a marcação de pontos no plano cartesiano e segue com a representação gráfica de 2x +3, após uma reduzida exposição de exemplos de função".

Foi ainda nessa década, que o presidente Getúlio Vargas instituiu, através do Decreto-Lei n° 1006/38, a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), com o objetivo de acompanhar e controlar a produção, importação e adoção dos livros didáticos daquela época. Era mais uma forma de controlar e imbutir na sociedade, através da educação, os ideais daquele governo.

Em 1934, Gustavo Capanema assume o então Ministério da Educação e da Saúde e propõe, 1942 uma reforma em alguns ramos do ensino. Essa reforma que foi realizada em etapas, entre os anos de 1942 e 1946 e ficou conhecida como Reforma Gustavo Capanema.

Diferentemente da Reforma de Francisco Campos que expressou quais deveriam ser os conteúdos e a metodologia a ser empregada no ensino da Matemática, Valente (2003, p.4) afirma que, "a Reforma Gustavo Capanema apenas elencou os conteúdos da disciplina que deveriam ser ensinados nas diferentes séries do ensino secundário", e acabou extinguindo o ensino simultâneo da aritmética, álgebra e geometria em torno da noção de função, como tinha proposto Campos e manteve a introdução da geometria intuitiva nos dois primeiros anos do

Ensino Fundamental, na época chamado de Ginásio, além de ter reduzido o ginasial de cinco para quatro anos, o que acabou levando todos os autores de livros didáticos da época a reescreverem suas obras.

Um exemplo foi a coleção de Jácomo Stávale, que em 1943 altera o título da sua coleção *Primeiro ano de mathematica* para *Elementos de Matemática.*

Nesta coleção, Stávale permanece não priorizando o ensino de funções, mas procurou abordar conteúdos importantes para o estudo de funções como razão e proporção; equações do 1º e 2º grau; expressões algébricas e um capítulo sobre retas.

Na década de 50, os programas para ensino de matemática passaram por mais uma grande reforma proposta por Ernesto Simões Filho, em sua rápida passagem como ministro da Educação (1951-1953). A Reforma veio através das Portarias 966 e 1.054 de 2 de outubro de 1951 e 14 de dezembro de 1951. Sobre o objetivo de tal reforma, Marques (2005, p.52), cita uma entrevista dada pelo Ministro Simões em que ele afirma que:

> O objetivo fundamental deste trabalho consistiu, pois, em eliminar dos programas atualmente em vigor, os excessos aludidos, reduzindo a prolixidade dos conhecimentos alinhados na estruturação de diversas disciplinas, que tornava penosa a tarefa didática. Ao mesmo tempo, verificava-se o flagrante desajustamento desses programas com o nível de assimilação da população escolar, cujas faculdades intelectuais, ainda mal desabrochadas, não a habilitavam a abranger a enorme soma de deveres e atividades de aprendizagem oferecidas ao seu conhecimento (INEP, 1952, p.515, apud MARQUES, 2005, p.52).

Tais Portarias representavam, na verdade, revisões nos programas oriundos das Reformas de Francisco Campos e Capanema, em uma clara intensão de reduzi-lo, ao estabelecer um *Programa Mínimo* para o currículo da Matemática. Para Marques (2005, p.53), “o termo utilizado por Simões Filho, *Programa Mínimo,* é revelador de suas intenções: estabelecer um limite inferior ao qual todas as instituições escolares estariam sujeitas e em condições de executá-lo".

A elaboração desse *Programa Mínimo* e de um programa mais detalhado, que levaria o nome de Legislação de Programas Desenvolvidos, ficou a cargo dos professores do Colégio Pedro II. A legislação, segundo Marques (2005, p.48), permitiria que "cada estado elaborasse seus próprios planos desenvolvidos a partir dos programas mínimos, de modo que pudessem adequá-los às suas características particulares".

Nesta época a abordagem do conceito de funções nos livros didáticos de Sangiorgi, como A coleção Matemática – Curso Ginasial, composto por 4 volumes, não apresentava indícios de conteúdos que desenvolviam relações com o tema função. Tal assunto encontrava-se em um Apêndice do volume 4 da coleção. Entretanto, apesar de não abordar o conceito de funções nesta coleção, Oliveira (2010, p.5), afirma que "o autor faz uso de exercícios e exemplos predominando as representações gráficas de funções de 1º grau e de 2º grau".

Acredita-se que com a exclusão do estudo de funções no ensino ginasial pelo Portaria de 1951, o autor tenha optado por não se desvincular da Reforma de Capanema, inserindo assim, funções no Apêndice. Entretanto, insatisfeito com essas sucessivas reformas para o ensino da Matemática, Sangiorgi (1954, apud VALENTE, 2008, p.21) afirma que,

> o ensino da Matemática, como o de outras disciplinas, tem sofrido enormemente com as sucessivas reformas do ensino secundário. Realmente não temos tido sorte nas diversas programações efetuadas desde a Reforma Francisco Campos, em 1931, reforma Capanema, em 1942 e reforma Simões Filho, em 1951. Como estamos com novo ministério já ensaia, como não poderia deixar de ser, mais uma nova reforma. Até parece que a preocupação dos novos titulares da Educação é marcar respectivas passagens pelo ministério com reformas do ensino médio, esquecendo-se numa hora dessas que os mais visados com isso são justamente os menos culpados: os estudantes (SANGIORGI, 1954 *apud* VALENTE, 2008, p.21).

Para uma melhor compreensão dessas Reformas para o ensino de Matemática no ginasial, a tabela 4 apresenta um comparativo dos campos da Matemática abordados em cada série durante as Reformas de Francisco Campos, Capanema e os Programa Mínimo.

Tabela 4 - A Matemática nas reformas de Campos, Capanema e do Programa Mínimo para o ginasial

	REFORMA CAMPOS (1931)	**REFORMA CAPANEMA (1942)**	**PROGRAMA MÍNIMO (1951)**
1ª série	- Aritmética; - Álgebra; - Iniciação Geométrica.	- Geometria; - Aritmética.	- Aritmética; - Sistema Legal de unidades.
2ª série	- Aritmética/Álgebra; - Iniciação Geométrica.	- Geometria; - Aritmética.	- Aritmética; - Álgebra.
3ª série	- Aritmética/Álgebra; - Geometria.	- Álgebra; - Geometria.	- Aritmética; - Álgebra; - Geometria.
4ª série	- Aritmética/Álgebra; - Geometria.	- Álgebra; - Geometria.	- Álgebra; - Geometria.
5ª série	Aritmética/Álgebra/Geometria.		

Fonte: Elaborada pela autora

Observa-se que na Reforma Capanema foi dada uma ênfase ao ensino de geometria, que se encontrava presente em todas as séries do ginasial, enquanto no Programa Mínimo, a ênfase foi dada a aritmética e a álgebra.

Na década de 60, o Brasil assinou inúmeros acordos com a *Agency for International Development* - *USAID*. O principal objetivo desses acordos, por parte dos EUA, era o de não permitir que Brasil se tornasse um país comunista, assim como Cuba.

Para a educação básica, em 1965, o MEC-USAID firmaram um acordo, em 1965, com o objetivo de incentivar reformas nas escolas brasileiras, tendo como padrão o modelo educacional americano. Três anos após esse acordo, o então presidente do Brasil, Costa e Silva, provê, através do decreto nº 63.914/68, o Programa de Expansão e Melhoria do Ensino Médio (PREMEM), que tinha como objetivo geral, fortalecer o nível ginasial, através do aumento do número de escolas polivalente.

Nessa década, o ensino de Matemática no Brasil e em diversos outros países, sofria influência de um movimento que ficou conhecido como Movimento Matemática Moderna (MMM). A teoria dos conjuntos era uma das bandeiras levantadas por esse movimento, o que fez com que o conceito de funções a partir da teoria dos conjuntos fosse introduzido nos livros didáticos de Matemática, principalmente através dos livros de Sangiorgi.

Nessa época, Sangiorgi era presidente do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) de São Paulo, um dos principais grupos de divulgação das ideias do Movimento Matemática Moderna.

Em 1962, esse grupo lança algumas orientações para o ensino de Matemática através da publicação *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginasial*, e em 1965, lança um documento intitulado *Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática*. Muitos autores de livros didáticos da época, adeptos dessas ideias modernistas acataram essas orientações e sugestões.

Um exemplo foi Sangiorgi, que em sua coleção Matemática Curso Moderno, composta por 4 volumes, procurou abordar conceitos importantes sobre função como o conceito de variável, relações e correspondências, antes da 4a série ginasial e na 4a série abordar o estudo de função linear, função trinômio do 2o grau e suas representações gráficas. Além disso, Oliveira (2010, p.5) afirma que,

> [...] o autor desenvolve o ensino de função utilizando a ideia de correspondência e associação entre conjuntos com diagramas de flechas, procurando abordar o conceito com menor rigor e utilizando exemplos do cotidiano do estudante para depois definir função.(OLIVEIRA, 2010, p.5)

O capítulo 3, do 4º volume dessa coleção, é dedicado ao estudo de função. Nesse capítulo, observa-se que ele utiliza a ideia de correspondência e associação entre conjuntos, utilizando diagramas com flechas, além de dar exemplos do cotidiano do estudante para depois fazer uma definição mais geral sobre função. Para Sangiorgi (1967, p.70), função é "uma relação especial entre dois conjuntos A e B que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B". Essa definição encontra sua base na teoria dos conjuntos, criado por Cantor, no final do século XIX e no ideário do MMM.

Outra coleção de livros didáticos de Matemática para o ensino ginasial foi a coleção Matemática Curso Moderno, de Bóscolo com Castrucci, publicada inicialmente no ano de 1967. Assim como na coleção de Sangiorgi, os autores seguiram as orientações e sugestões lançadas em no início da pelo GEEM.

Em 1971, o então presidente do Brasil, Emílio Garrastazu Médici, através da Lei de Diretrizes e Bases nº 5692/71, faz alterações na estrutura da educação básica, através da incorporação do antigo ensino primário ao ginasial, e altera a sua nomenclatura para ensino do 1º grau, com o mínimo de 720 horas anuais e com duração 8 anos.

A Lei nº 5692/71 também trouxe mudanças em relação aos currículos escolares. As escolas passam a ter a liberdade de elaborar seus próprios currículos da seguinte maneira: uma parte do currículo era composto por disciplinas obrigatórias e a outra parte por disciplinas optativas que integralizava a parte diversificada do currículo. Ficava então, a cargo da escola, a construção de seu currículo, no que concerne a parte diversificada.

Em 1972, o Brasil cria o Programa de Expansão e Melhoria do Ensino - PREMEN - com o objetivo principal de aperfeiçoar o sistema de ensino de primeiro e segundo graus no Brasil. Este programa absorve o Programa de Expansão e Melhoria do Ensino Médio – PREMEN, que ainda se encontrava em execução.

Sobre o ensino de funções, proposto pelos materiais elaborados por este programa em parceria com o MEC/IMECC e a UNICAMP, Godoy (2010, p.78) afirma que era,

> [...]baseado em situações cotidianas, ou seja, eram colocadas situações do dia a dia para que o estudante fosse estabelecendo as relações que visavam propiciar uma melhor compreensão do conceito de função. As propostas apresentadas não abandonavam as ferramentas matemáticas, mas utilizavam-nas no momento em que era necessário institucionalizar o conceito matemático. (GODOY, 2010, p.78)

Nessa década, o conceito de funções nos livros didáticos não sofreu grandes mudanças em relação a década de 60, apesar da alteração do ginasial para o 1º grau (OLIVEIRA, 2010, p.7), porém o ensino de matemática através do Movimento Matemática Moderna começa a sofrer fortes críticas.

No Rio de Janeiro, após ter retornado da França, onde havia trabalhado no IREM da Universidade Louis Pasteur de Estrasburgo, a professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes torna-se, em 1976, presidente do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM). O novo grupo dá continuidade aos trabalhos já iniciados em 1970, pelo Grupo de Estudos de Matemática do Estado da Guanabara (GEMEG).

Em sua primeira ação, o GEPEM organizou o I Seminário sobre o Ensino de Matemática, que aconteceu em abril de 1976, patrocinado pela Academia Brasileira de Ciências e o PREMEN. O principal objetivo desse seminário foi obter um panorama da situação do ensino da matemática no Brasil.

Os trabalhos do GEPEM e a influência das teorias de Piaget para a educação, impactaram o ensino e a aprendizagem de matemática no Brasil na década de 80. Todo esse movimento levou a organização do I Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), em 1987 e a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em 1988.

Importante ressaltar que nas décadas de 70 e 80, tanto no Brasil quanto no mundo, o Movimento Matemática Moderna passou a sofrer duras críticas devido a sua ênfase excessiva na abstração do conteúdo e seu completo abandono ao ensino de geometria. Concomitantemente, debates nacionais e internacionais sobre os processos de ensino e aprendizagem, iam promovendo o surgimento de um novo movimento chamado Educação Matemática. No Brasil, um dos principais representantes desse movimento foi o professor Ubiratan D'Ambrósio. Sobre esse movimento, Valente (2016, p.14) afirma que,

> Diferentemente do MMM, no qual a proeminência das propostas envolvia os novos conteúdos de ensino, uma nova matemática, uma matemática moderna, de iniciação à matemática superior estruturalista, nesse outro movimento retoma-se o foco dos ensinos no sujeito que aprende. (VALENTE, 2016, p.14)

Outra forte ideia que chegava ao Brasil, através do trabalho de George Polya (1887-1985)[15], *How to solve it*, publicado em 1945, foi o ensino de matemática através da resolução de problemas. Para ele, o processo de resolução de problemas por parte do estudante deve passar por quatro fases: a) entender o problema; b) construir uma estratégia de resolução; c) executar a estratégia; e d) revisar.

Essa ideia ganhou força em 1978, quando o National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM, 1977, p.4), em sua publicação *Position paper on basic mathematical skills*, afirmou que "aprender a resolver os problemas é a principal razão para estudar matemática", e principalmente em 1980, através das oito recomendações feitas pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980, p.2), em sua publicação *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*, em que afirma que: " o currículo de matemática deve ser organizado em torno da resolução de problemas". Sobre essa última publicação, Souto e Guérios (2017, p.3), afirmam que,

---

[15] George Polya (1887-1985) – professor e matemático húngaro.

> as reflexões apresentadas neste documento serviram como norte para novas pesquisas acerca desse tema. Os debates que aconteceram no cenário mundial ecoaram também no Brasil e influenciaram a construção dos PCN de Matemática (BRASIL, 1997; 1998). Nesses documentos a Resolução de Problemas é considerada como metodologia de ensino e ponto de partida para construção de conhecimentos. (SOUTO; GUÉRIOS, 2017, p.3)

O movimento Educação Matemática e a metodologia de ensino voltada para a resolução de problemas influenciaram alguns autores de livros didáticos de matemática nas décadas de 80 e 90, sendo um desses autores é Di Pierro Netto.

Em sua coleção, Matemática – Conceitos e histórias, publicada em 1995 pela editora Ática, observa-se uma inserção de trechos da história da matemática para despertar o interesse e a curiosidade do estudante.

Outro ponto a ser considerado é que em nenhum livro existia um capítulo específico para o ensino de funções, mostrando uma tendência da época para o ensino de matemática de afastamento das ideias do Movimento Matemática Moderna.

No final do século XX o conceito de função através da teoria dos conjuntos já se encontrava consolidado nos livros didáticos, porém o foco voltou-se para o estudo de diferentes meios/métodos de abordar esse conceito, com o intuito de facilitar sua compreensão por parte dos estudantes. Fato é que, através da análise dos livros didáticos adotados nas escolas brasileiras, é possível verificar os caminhos que diversos matemáticos percorreram para chegar a definição atual desse conceito. Conforme bem disse Valente (2008, p.141),

> Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência, a saber, de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos (VALENTE, 2008, p. 141).

Na próxima seção apresenta-se quais os entraves e as tendências do século XXI em relação as propostas curriculares e ao ensino de Matemática para a educação básica, através do estudo das constituições, portarias e das leis de diretrizes e bases.

3.3 Análise didática: entraves e tendências do século XXI para o ensino de Matemática na educação básica brasileira

A busca por um currículo e por metodologias de ensino que atendam aos anseios e as reais necessidades dos estudantes ainda provoca, em pleno século XXI, entraves para o processo de aprendizagem da matemática na educação básica.

A educação básica é composta pelo ensino infantil, fundamental e médio. O ensino infantil, início do processo educacional, atende crianças de zero a 5 anos de idade em creches e pré-escolas.

O Ensino Fundamental, por sua vez, é dividido em dois períodos (iniciais e finais), com nove anos de duração, corresponde a etapa mais longa da educação básica e atende estudantes com idades entre 6 e 14 anos. É durante esse período que os estudantes passam por intensas mudanças decorrentes de transformações relacionadas a aspectos físicos, cognitivos, afetivos, sociais, emocionais, resultantes da transição da infância para a adolescência.

Já o Ensino Médio, etapa final da educação básica, divida em três anos, busca consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental.

O direito à educação básica a todos os cidadãos configura-se desde a primeira constituição brasileira, outorgada por D. Pedro I em 1824, em seu artigo 179, incisos XXXII e XXXIII. Importante ressaltar que nessa época, negros e escravos alforriados não eram considerados cidadãos e que apesar da criação de escolas, tanto para o ensino fundamental quanto para o ensino secundário, não havia uma preocupação inicial com o currículo escolar.

A primeira referência curricular para o ensino de matemática no Brasil para o ensino secundário, surgiu em 1837, a partir da criação do Colégio D. Pedro II. Na época, existia uma grande evasão escolar, devido aos cursinhos preparatórios para o exame de ingresso em cursos superiores, que representavam grandes atalhos para garantir uma vaga na universidade. Os conteúdos de matemática, no caso, geometria, eram ministrados nesses cursinhos e foram a base para o primeiro currículo de matemática no Brasil para o ensino secundário.

Em fevereiro de 1891, a primeira constituição republicana foi promulgada, porém representou um retrocesso no que se refere a educação, visto que, em nenhum de seus artigos havia uma clara garantia ao acesso livre e gratuito ao ensino. Entretanto, com a promulgação de segunda constituição republicana, em 1934 (CF/34), reformas foram sendo promovidas com o objetivo de garantir o direito à educação e a elaboração de um currículo.

Cumpre assinalar ainda que a constituição de 1934 citou, pela primeira vez, um Plano Nacional de Educação (PNE) e uma lei que regularizaria o sistema de educação brasileira. O PNE deveria ser elaborado por um Conselho Nacional de Educação e aprovado pelo Poder Legislativo, entretanto, não chegou a ser votado devido ao golpe de Estado de 1937 e a revogação dessa constituição. Apesar disso, as constituições de 1934 e 1891 influenciaram as constituições de 1937 e 1946 e contribuíram para um ciclo de debates sobre a lei de diretrizes e bases citadas na constituição de 1934, que culminou com o encaminhado de seu primeiro projeto ao poder legislativo no ano de 1948 e sua promulgação em 1961, pelo então presidente João Goulart.

Com essa lei, buscou-se a primeira tentativa de flexibilização do currículo do ensino médio, através de disciplinas obrigatórias e optativas. Ao Conselho Federal de Educação ficou a incumbência de indicar até cinco disciplinas obrigatórias; aos Conselhos Estaduais de Educação, a de indicar as disciplinas complementares obrigatórias e optativas; e as unidades escolares a de escolher livremente até duas disciplinas optativas para integrar o currículo de cada curso.

Importante ressaltar que, dez anos antes da promulgação da LDB/61, o então ministro da educação, Simões Filho, através da portaria 1.054 de 14 de dezembro de 1951, apresentou, além dos planos mínimos para o ensino secundário, orientações metodológicas para o ensino de matemática e outras disciplinas. Essas orientações buscavam, especialmente para o ensino de matemática,

a) estimular a participação ativa dos estudantes;
b) introduzir, aos poucos, o método dedutivo a partir do ginásio;
c) afastar os métodos de memorização, e principalmente, do uso abusivo de definições e de demonstrações longas; e
d) orientar quanto aos avanços/redução dos conteúdos, a partir do entendimento da turma, para que o ensino tivesse sentido e que os estudantes pudessem de fato, compreender a importância do estudo de matemática em suas vidas.

Em 1971, em pleno regime militar de Médici, ocorre a primeira alteração na LDB/61, através da lei nº 5.692/71. Sobre a estrutura curricular, essa lei em seu artigo 4º orientava que:

> Os currículos do ensino de 1º e 2º graus terão um núcleo comum, obrigatório em âmbito nacional, e uma parte diversificada para atender, conforme as necessidades e possibilidades concretas, às peculiaridades locais, aos planos dos estabelecimentos e às diferenças individuais dos estudantes. (BRASIL, LDB, 1971)

A respeito da parte diversificada do currículo, que se encontrava no parágrafo 3º, a lei orientava que ela tivesse um caráter de "aprofundamento em determinada ordem de estudos gerais, para atender a aptidão específica do estudante, por indicação de professores e orientadores".

A partir dessa lei, muitas outras foram sendo propostas, com o intuito de fornecer orientações para o ensino e o currículo de matemática nas escolas brasileiras. Grande parte dessas leis sofreram influências de movimentos nacionais, internacionais e dos contextos políticos de cada época. Entretanto, foi apenas com a constituição de 1988[16], que passaram a ocorrer sucessivas reformulações no direcionamento de uma inovação e dinamização no ensino de Matemática e uma busca por um currículo mínimo para as diversas áreas que faziam parte da educação básica.

Decorrentes dessas reformulações, o ensino de Matemática passa a receber uma atenção maior, mas não o suficiente para suprir os anseios de educadores e estudantes. Sobre o ensino da matemática nessa época, Campos e Nunes (1994, p.1), afirmam que "o ensino de Matemática foi, e ainda é, caracterizado nos meios oficiais, por um currículo a ser cumprido, uma lista de tópicos a ser estudada e não como uma forma de pensar".

Essa inquietação em torno do currículo e dos objetivos da educação escolar para a formação de um indivíduo, provoca um movimento no Brasil no final do século XX e início do século XXI que leva, no ano de 1996, o então presidente do Brasil, Fernando Henrique Cardoso, a alterar a LDB através da lei nº 9.394/96. Essa nova LDB, apesar de seguir orientações do Art. 210[17] da Constituição/88, apresenta algumas similaridades com a LDB/71, principalmente no que se refere aos currículos do ensino fundamental e médio, ao apresentar um currículo mínimo, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, e que contemplasse as características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela[18]. Entretanto, diferentemente da LDB/71, o ensino de matemática passou a configurar no texto como sendo uma disciplina obrigatória.

Sobre metodologias de ensino, a lei orientava que o professor priorizasse as que estimulasse a iniciativa dos estudantes, principalmente através da resolução de problemas. Nesse sentido, era papel do professor propor "situações didáticas com objetivos e determinações claros, para que os estudantes pudessem tomar decisões pensadas sobre o encaminhamento de seu trabalho, além de selecionar e tratar ajustadamente os conteúdos" (PCN, 1997, p.65). Para tanto, essas situações didáticas deveriam garantir ao estudante: a)

[16] A Constituição/88 em seu Art. 210, afirma que para o ensino fundamental serão fixados conteúdos mínimos para garantir a formação básica comum.

[17] Art. 210 da Constituição de 1988 – Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.

§ 1º O ensino religioso, de matrícula facultativa, constituirá disciplina dos horários normais das escolas públicas de ensino fundamental. **§ 2º** O ensino fundamental regular será ministrado em língua portuguesa, assegurada às comunidades indígenas também a utilização de suas línguas maternas e processos próprios de aprendizagem.

[18] LDB/96 – O termo clientela foi posteriormente alterado pela lei nº 12.796 de 2013. A lei também incluiu os currículos da educação infantil nessa proposta de currículo mínimo.

conhecer o objetivo da atividade; b) situar-se em relação à tarefa; c) reconhecer os problemas que a situação apresenta, e; d) ser capaz de resolvê-los (PCN, 1997, p.65).

Nessa perspectiva, os conteúdos deixaram de ser o foco da aprendizagem e passaram a ser o meio para se atingir um fim. Esse fim passou a ser uma lista de competências e habilidades que o estudante deveria desenvolver ao longo da educação básica.

O ensino voltado no desenvolvimento de competências iniciou-se no Brasil, principalmente, a partir dos PCN no final do século XX e ganhou força através das matrizes curriculares das avaliações externas, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e principalmente, no início do século XXI, a partir da LDB nº 13.415/17.

A LDB/17 propõe uma reorganização do ensino médio, em busca de uma nova tentativa de flexibilizar o currículo da educação básica, por meio de uma formação básica geral básica, baseada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[19] e de itinerários formativos[20].

Diferentemente da Reforma proposta pelo ministro Simões Filho em 1951, que trazia uma lista de disciplinas e de conteúdos mínimos a serem ensinados, a BNCC apresenta um conjunto de competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes ao longo da educação básica em cada área do conhecimento.

O termo competência, na BNCC (2018, p.8), é definido como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". Roldão (2003), por sua vez, afirma que essas competências emergem quando, "perante uma situação, o sujeito é capaz de mobilizar adequadamente diversos conhecimentos prévios, selecioná-los e integrá-los de forma ajustada à situação em questão".

Para a área de Matemática e suas tecnologias no ensino médio, a BNCC elenca cinco competências e um conjunto de habilidades, que representam as aprendizagens básicas que devem ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio. As competências encontram-se na tabela 5.

---

[19] Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BNCC, 2018, p.7).

[20] Itinerários formativos – são unidades curriculares ofertadas pelas escolas e rede que possibilitam ao estudante aprofundar seus conhecimentos e se preparar para o prosseguimento de estudos ou para o mundo do trabalho (GUIA DE IMPLEMENTAÇÃO DO NOVO ENSINO MÉDIO, 2018).

Tabela 5 - Competências da área de Matemática e suas tecnologias de acordo com a com a BNCC – Ensino Médio.

COMPETÊNCIA 1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
COMPETÊNCIA 2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
COMPETÊNCIA 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
COMPETÊNCIA 4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
COMPETÊNCIA 5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Elaborada pela autora

Ao observar as competências listadas para área da Matemática e suas tecnologias, é possível verificar mais uma tentativa de integrar os ramos da matemática, tendo como eixo norteador funções, como proposto por Campos no início do século XX para o ensino da Matemática. A despeito dessa integração, a BNCC (2018, p.542) alerta que "é fundamental preservar a articulação entre os vários campos da Matemática, com vistas à construção de uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade".

O estudo da álgebra e a construção do conceito de funções inicia-se logo nos anos iniciais do Ensino Fundamental, através da leitura de gráficos e tabelas, na identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas, no estudo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, além da resolução de equações e inequações em um plano cartesiano e é aprofundado no ensino médio. Sobre a importância do estudo da álgebra nessa etapa da educação básica, a BNCC (2018, p.271) afirma que ela pode contribuir para

> [...] o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. (BNCC, 2018, p.271)

Por sua vez, Eves (2004, p.661) reforça que o ensino de funções ao se estudar álgebra logo no ensino fundamental, possibilita uma melhor formação matemática para o estudante.

Sobre o ensino da matemática, há que se considerar ainda o uso de tecnologias digitais. O uso dessas tecnologias é proposto no texto da BNCC-Ensino Fundamental desde os anos iniciais. De acordo com esse documento,

> [...] a cultura digital tem promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas. Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, tablets e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores (BNCC, 2017, p.61).

Já a BNCC – Ensino Médio reforça a utilização de tecnologias desde o ensino fundamental para que ao chegar nos anos finais da educação básica o estudante possa desenvolver o pensamento computacional, "por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas" (BNCC, 2018, p.528).

Borba & Penteado (2010, p.32), afirmam "conhecer sobre funções passa a significar saber coordenar representações. Essa nova abordagem só ganha força com ambientes computacionais que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas".

Por sua vez, Araújo (2018, p.79), reforça que a utilização de tecnologias digitais "permite não apenas a coleta e análise de dados durante os experimentos, mas proporcionam uma maior interação dos estudantes em sala de aula com novos conhecimentos".

Ressalta-se ainda a preocupação de um dos seus principais representantes da Matemática Crítica, o professor Skovsmose, que em seu livro, "Educação Matemática e Democracia", fez o seguinte questionamento: "Como a Educação Matemática serve aos interesses de uma sociedade tecnológica?". Para ele,

> [...] a organização curricular reflete as relações de poder no meio social. A sociedade atual é imersa, cada vez mais, na tecnologia, a ponto de esta estabelecer ou intensificar as relações de poder. Dominar um conjunto de conhecimentos, dentre os quais os conhecimentos matemáticos, implica dominar a tecnologia necessária para exercer a cidadania (SKOSVSMOSE *apud* CARDOSO, 2017).

Sobre os métodos voltados para o ensino da Matemática, existem cinco tendências hoje que proporcionam um leque de possibilidades para se introduzir conceitos matemáticos, são eles: História da Matemática, Matemática Crítica, Etnomatemática, Modelagem Matemática e Resolução de Problemas. A principal característica de cada um encontra-se na tabela 6.

Tabela 6 - Tendências no século XXI para o ensino de Matemática e suas tecnologias.

TENDÊNCIA	CARACTERÍSTICA
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	Promove o estabelecimento da matemática como um elemento cultural, contrapondo-se ao modo tradicional de considerá-la como algo exato, acabado e distante das questões da humanidade.
MATEMÁTICA CRÍTICA	Possibilita o diálogo entre os estudantes e seus professores de modo a desenvolver a democratização do saber. Neste sentido, o diálogo e a participação dos estudantes fazem-se necessária desde a elaboração de um currículo até a escolha de sua abordagem.
ETNOMATEMÁTICA	Procura entender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade segundo cada comunidade.
MODELAGEM MATEMÁTICA	Possibilita ao estudante abordar conteúdos matemáticos a partir de fenômenos de sua realidade e explicá-los matematicamente.
SITUAÇÕES DIDÁTICAS/ RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	Promove nos estudantes o domínio e o desenvolvimento de procedimentos, a partir de seus conhecimentos prévios, para dar respostas as mais diferentes situações.

Fonte: Elaborada pela autora

Apesar de todas essas tendências encontrarem-se interligadas, permitindo ao professor trabalhar de maneira articulada com todas elas, a metodologia de ensino com foco na resolução de problemas ganhou destaque no Brasil no século XXI. Essa metodologia foi a escolhida para a aplicação dessa pesquisa, por meio da Teoria das Situações Didáticas. Utilizou-se também, a Modelagem Matemática, a partir do suporte do aplicativo *VydAnalysis*. No APÊNDICE A, encontra-se a apresentação deste aplicativo e os cuidados que devem ser tomados ao se gravar um vídeo.

4. ANÁLISE A *PRIORI*

Neste capítulo são apresentadas as análises *a priori* e as concepções detalhadas das três situações didáticas propostas para o estudo de funções, além da descrição do que se espera dos estudantes diante de cada situação nas fases de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD.

4.1 Concepção e análise *a priori* das situações didáticas

As análises *a priori* baseiam-se nas análises preliminares para formular as hipóteses e fazer escolhas para a concepção da situação didática. As escolhas podem estar relacionadas à pesquisa como um todo, sendo então classificadas como variáveis globais/macro-didáticas ou podem estar relacionadas a uma situação didática específica, sendo então classificadas como variáveis locais/micro-didáticas (ARTIGUE, 2015, p. 474).

Para a construção de uma situação adidática, Almouloud (2016, p.114) reforça que devem ser considerados alguns pontos importantes:

> 1º - Os dados apresentados nos problemas devem ser facilmente compreendidos pelos estudantes, para que eles possam, partindo de seus conhecimentos prévios, agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
> 2º - Os conhecimentos prévios dos estudantes não são suficientes para que eles resolvam o problema;
> 3º - O problema deverá ser escolhido para que o estudante adquira um novo conhecimento, a partir de suas necessidades próprias, e não por um interesse da escola ou do professor.
> 4º - O professor deve assumir o papel de mediador, portanto, deverá criar um ambiente propício para a construção de um novo conhecimento, a partir da situação apresentada.

Na primeira situação didática são exploradas as funções lineares, através da videoanálise do lançamento oblíquo de uma bola de tênis. Já na segunda situação didática são exploradas quadráticas, através da videoanálise das alturas atingidas por uma bola de tênis. Por fim, na terceira situação-didática são exploradas as funções exponenciais, através da videoanálise do movimento da queda livre de uma bola e seus ressaltos ao atingir o chão, Para a concepção da sequência didática que permite aos estudantes um aprofundamento desses conteúdos, escolheu-se o aplicativo *VidAnalysis.*

4.1.1 Primeira situação didática: lançamento oblíquo de uma bola de tênis

Para o início da videoanálise do lançamento oblíquo da bola de tênis, o professor apresenta as ferramentas e o funcionamento do aplicativo *VidAnalysis*.

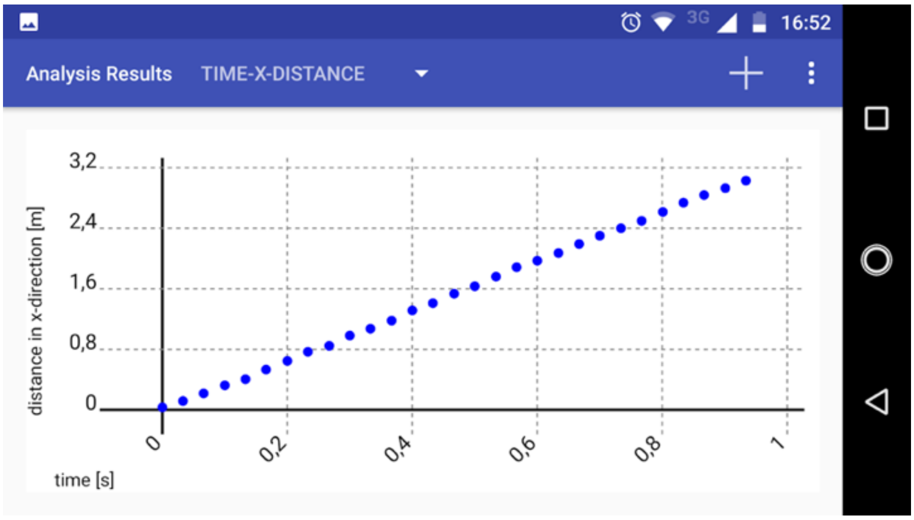
A bola de tênis executa um movimento bidimensional com aceleração g para baixo. Para as análises da gravidade, g, são desprezados os efeitos da resistência do ar, dessa forma a bola fica sujeita apenas à aceleração de queda. Após essas observações e como requisito para o aplicativo fornecer os gráficos e a tabela, os estudantes devem marcar os pontos por onde a bola passou e escolher a origem do eixo das coordenadas. Com base nos gráficos e na tabela gerados pelo aplicativo, os estudantes responderão às seguintes questões.

> **ATIVIDADE 1** - a taxa de variação de uma função é um número que pode ser interpretado como uma forma de medir "quão rápido" a variável y está mudando à medida em que a variável x muda. Baseando-se no diagrama que descreve a posição da bola no eixo x em relação ao tempo, verifique se é possível encontrar a taxa de variação da função.
>
> **ATIVIDADE 2** - repita a ATIVIDADE 1, tomando como base o diagrama que descreve a velocidade no eixo y em função do tempo, buscando identificar o que mudou em relação a taxa de variação da ATIVIDADE 1 e qual a função que melhor representa o gráfico.
>
> **ATIVIDADE 3** – a partir do gráfico da ATIVIDADE 1, verifique se é possível encontrar a equação da curva, após a translação do gráfico para o ponto (0,4;0). Se for possível, verifique o que mudou e o que permaneceu igual.
>
> **ATIVIDADE 4** - partindo do gráfico da curva da ATIVIDADE 3, translade o gráfico para o ponto (0,4;1,2). Verifique o que mudou e o que permaneceu inalterado em relação a lei de formação da função encontrada na ATIVIDADE

Situação de ação: Nessa fase o estudante deverá assumir a responsabilidade de resolver o problema proposto buscando, após a leitura do enunciado do problema, a videoanálise do movimento da bola e a análise dos gráficos e tabela gerados pelo aplicativo, solucionar cada item proposto. Sendo assim, a cada item, o estudante passará por uma situação de ação para avançar para a fase de formulação.

Na ATIVIDADE 1, espera-se que o estudante perceba que o gráfico da posição da bola no eixo x pelo tempo representa uma função afim do tipo $f(x) = ax$, como mostra a Figura 6. Somando-se a essa identificação, ele deverá buscar informações na tabela/gráfico que o leve a encontrar o valor da taxa de variação da função.

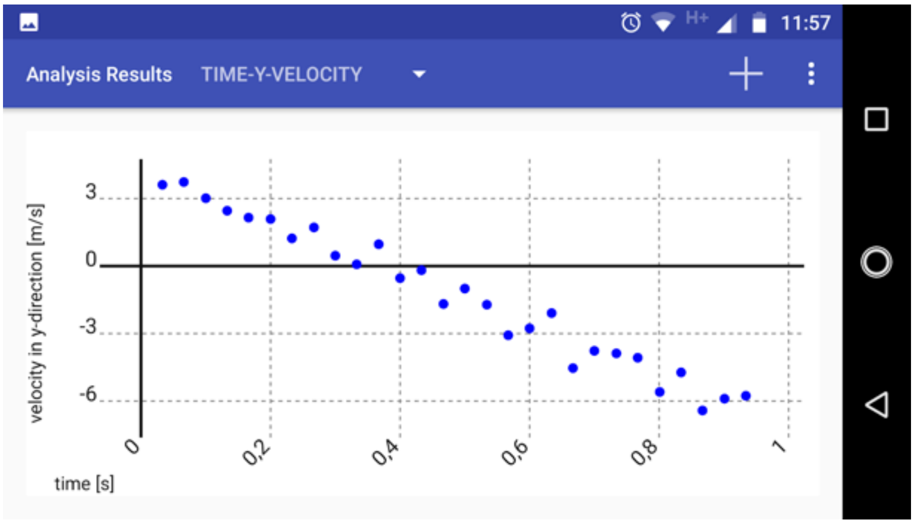
Figura 6 - Gráfico da posição versus tempo na direção x, de uma função linear crescente



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

Em relação a ATIVIDADE 2, o estudante em um primeiro momento, deverá perceber que o gráfico da velocidade no eixo y em função do tempo representa uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, como mostra a Figura 7, e identificar pontos para que possa encontrar a taxa de variação.

Figura 7 - Gráfico da posição versus tempo na direção x, de uma função linear decrescente.



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

Na ATIVIDADE 3, espera-se que o estudante perceba que ao transladar o gráfico para o ponto (0,4;0), o gráfico irá se mover horizontalmente. O contrário ocorrerá na ATIVIDADE 4, em que ao transladar os eixos para o ponto (0,4;1,2), a partir da função encontrada na ATIVIDADE 3, o gráfico irá se mover na vertical.

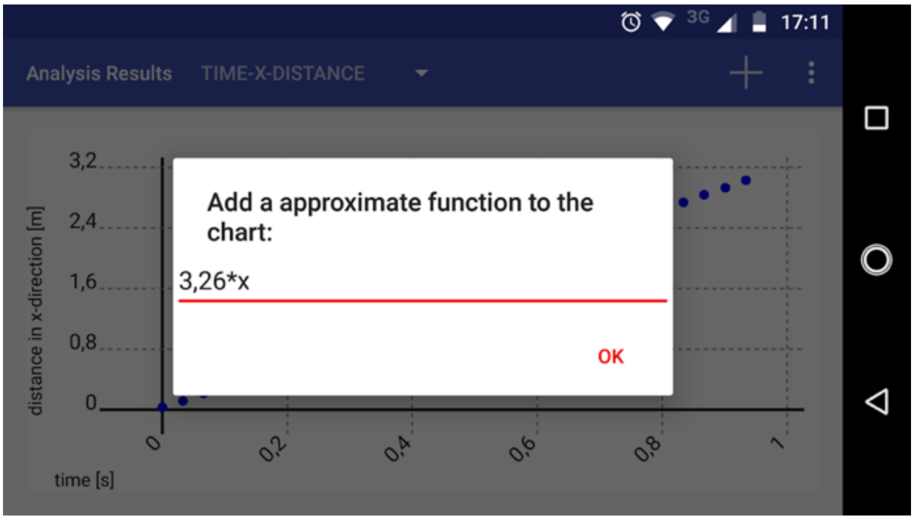
Como nessa fase, o estudante estará buscando entender o problema, suas decisões podem ser alteradas durante toda sua busca pela solução do problema.

Situação de formulação: Após a identificação na ATIVIDADE 1, que o gráfico da posição na direção *x* versus tempo é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas, o estudante poderá utilizar-se da tabela ou do gráfico, gerados durante a videoanálise do movimento da bola de tênis, para encontrar a taxa de variação média através da razão entre a taxa de variação de *p* e de *t*, em um determinado intervalo.

$$v = \frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad (2)$$

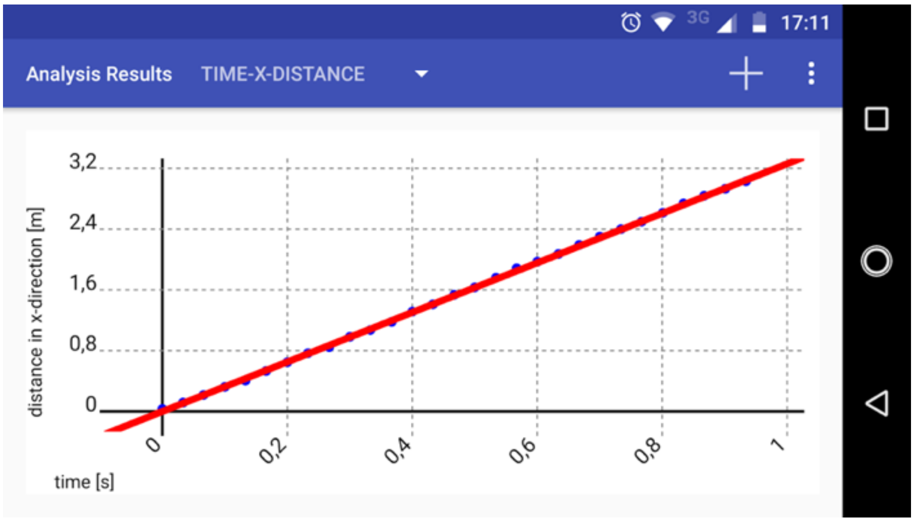
Após encontrar o valor da taxa de variação, o estudante deverá inserir a lei de formação da função no aplicativo, para que possa visualizar se a curva gerada passará pelos pontos apresentados no diagrama da distância no eixo x pelo tempo, como mostram as figuras 8 e 9.

Figura 8 - Função linear adicionada ao aplicativo.



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

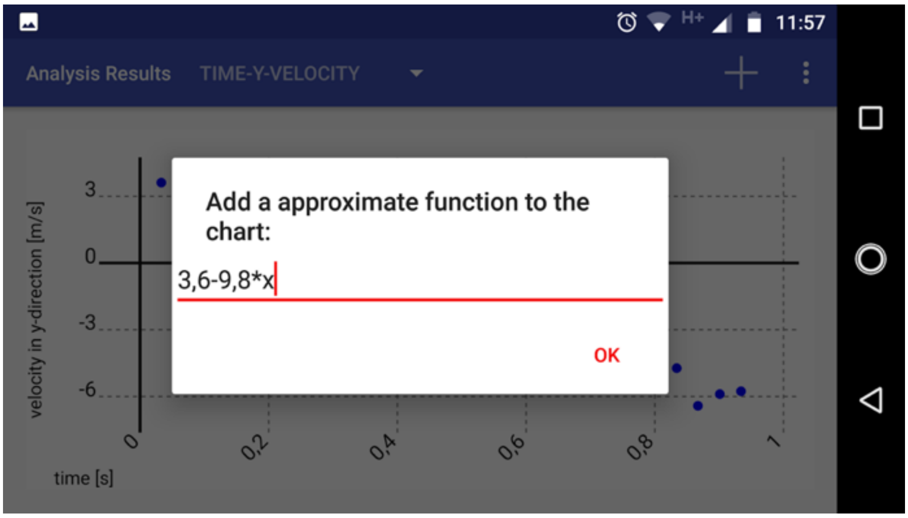
Figura 9 - A figura mostra o ajuste da função (linha vermelha) sobre os pontos do gráfico.



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

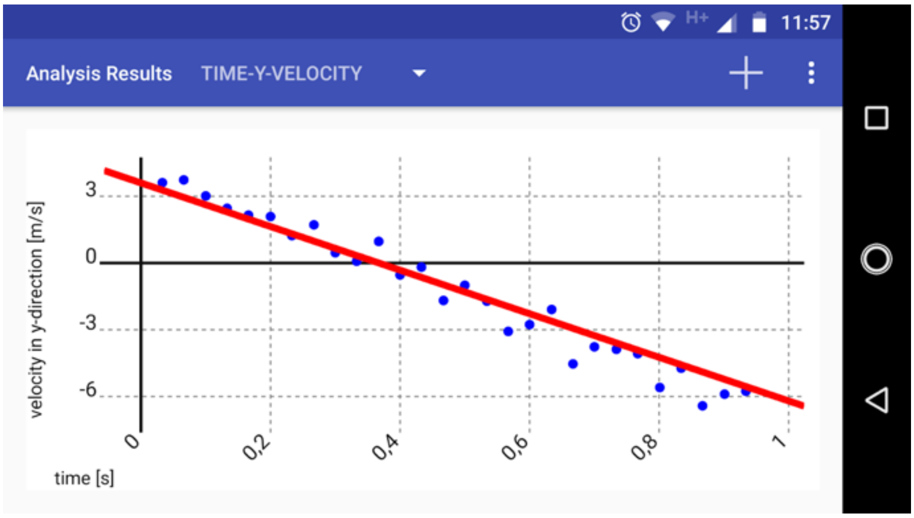
Em relação a ATIVIDADE 2, o estudante deverá perceber que, apenas encontrar a taxa de variação não será suficiente para descrever a curva do gráfico da velocidade pelo tempo em relação ao eixo y, como mostram as Figuras 10 e 11. E que, após encontrar a taxa de variação, o gráfico $f(x) = -9,8x$, deverá ser transladado verticalmente para o ponto (0;3,6). Para isso, eles deverão somar à função $f(x)$ o valor de 3,6, encontrando assim a função $h(x) = -9,8x + 3,6$.

Figura 10 - A figura mostra à esquerda a função adicionada ao aplicativo e a direita o ajuste da função (linha vermelha) sobre os pontos do gráfico.



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

Figura 11 - A figura mostra à esquerda a função adicionada ao aplicativo e a direita o ajuste da função (linha vermelha) sobre os pontos do gráfico.



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

Outro ponto que ele deverá observar é que, sendo a taxa de variação negativa, à medida que os valores de *t* aumentam, os valores de *p(t)* diminuem, diferentemente do gráfico da função da ATIVIDADE 1.

Na ATIVIDADE 3, espera-se que o estudante perceba que ao transladar horizontalmente, o gráfico da *f(x) = 3,6x*, para o ponto (0,4;0), o gráfico da nova função apresentaria uma constante b. Sendo assim ele poderá apresentar dois caminhos para a solução da atividade:

1º - substituir o ponto (0,4;0) na função $h(x) = 3{,}6x + b$, para encontrar o valor da constante b.

2º - subtrair o valor de 1,44 na função $f(x) = 3{,}6x$, encontrando a função $h(x) = 3{,}6x - 1{,}44$, através do cálculo:

$$h(x) = f(x - 0{,}4) = 3{,}6\,(x - 0{,}4) = 3{,}6x - 1{,}44. \qquad (3)$$

Na ATIVIDADE 4, para transladar a função encontrada na ATIVIDADE 3 para o ponto (0,4;1,2), o estudante poderá, partindo da função encontrada na ATIVIDADE 3 e com o apoio do aplicativo *VidAnalysis*, constatar que basta somar 2 unidades à função $h(x)$, para encontrar a lei de formação dessa nova função, que será chamada de $g(x)$.

$$g(x) = h(x) + 1{,}2 = 3{,}6x - 1{,}44 + 1{,}2 = 3{,}6x - 0{,}22. \qquad (4)$$

Ao encontrar a lei de formação de uma função do tipo $f(x) = ax + b$, tanto da função transladada horizontalmente quanto verticalmente, o estudante deverá perceber que a taxa de variação não sofre alteração, apenas o valor de b.

Situação de Validação: Nesta fase espera-se que o estudante, ao dialogar com seus colegas de classe, consiga validar ou corrigir o percurso utilizado para chegar ao resultado do problema. Para tanto, ele deverá se convencer, através de uma linguagem matemática apropriada, que suas respostas estão corretas.

Situação de institucionalização: Essa fase é mediada pelo professor que deverá deixar claro a sua intenção na situação proposta, apresentando em seguida, a formalização do saber construído pelos estudantes. Nesse caso, o professor deverá expor que:

a) a taxa de variação da função apresentada indica a velocidade da bola em função do tempo;
b) o valor da constante b indica a velocidade inicial da bola;
c) para transladar horizontalmente o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax + b$ em k unidades, deve-se subtrair de x em $f(x)$, o valor do k. Essa nova função será encontrada da seguinte maneira:

$$h(x) = f(x - k), \qquad (5)$$

onde k representa o deslocamento horizontal.

d) para que se possa transladar verticalmente um gráfico, deve-se somar x unidades a $f(x)$. Essa nova função será encontrada da seguinte maneira:

$$h(x) = f(x) + k \qquad (6)$$

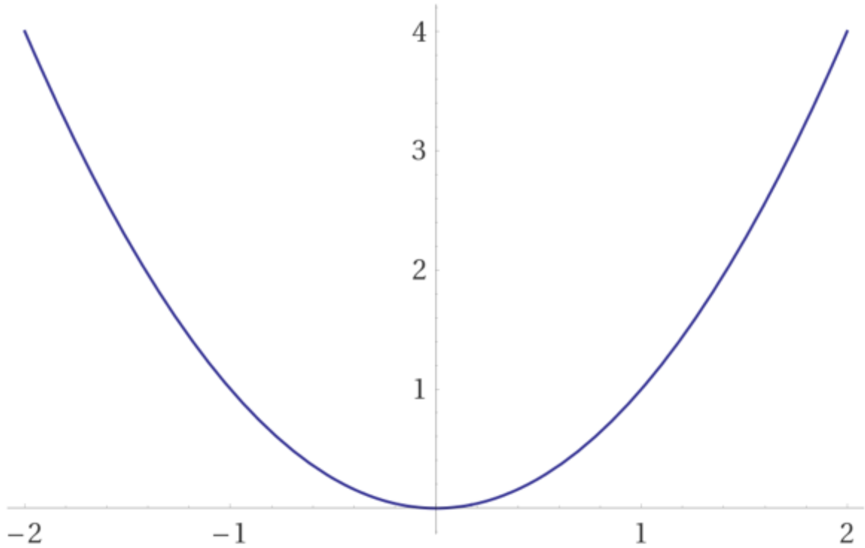
onde k representa o deslocamento vertical.

A situação-didática poderá ser proposta para estudantes que tenham um bom conhecimento sobre o conceito de função linear (definição, lei de formação, construção de um gráfico), o conceito de proporcionalidade, mas que não estudaram sobre a translação vertical e horizontal de gráficos de funções lineares.

4.1.2 Segunda situação-didática envolvendo funções quadráticas

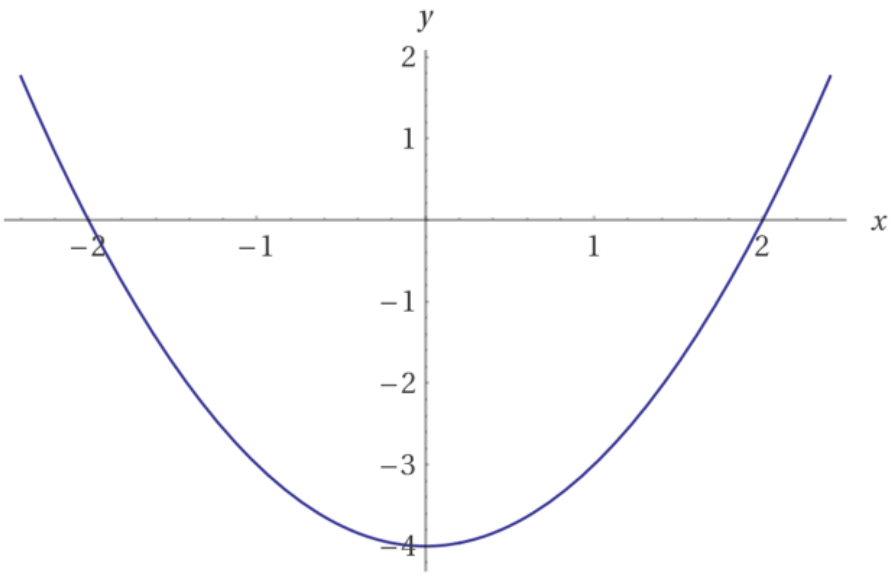
ATIVIDADE 1 - Ao transladar o vértice do gráfico da função $f(x) = x^2$ para o ponto (0,-4), obtém-se o gráfico da função $h(x)$. Com base nos gráficos, verifique se é possível descrever a lei de formação da função $h(x)$, partindo da função $f(x)$.

Figura 12 - Gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborada pela autora

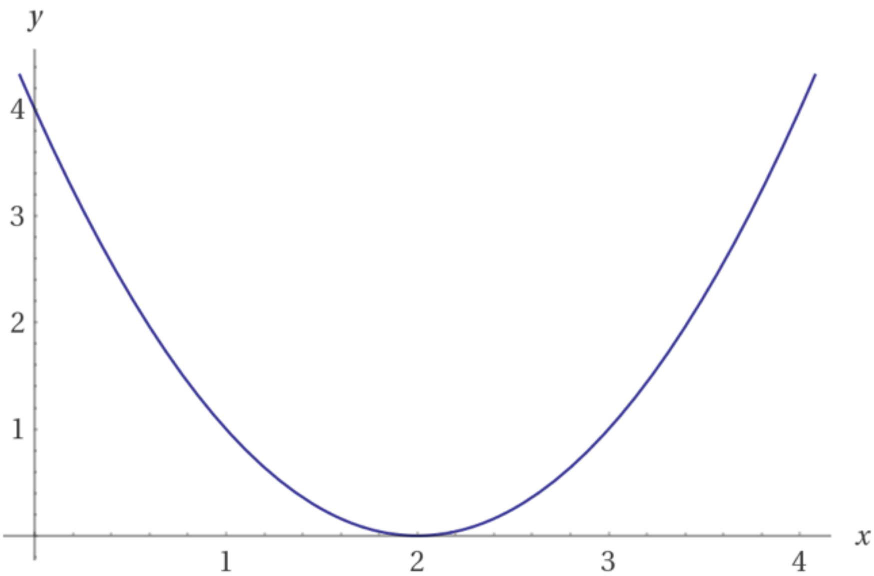
Figura 13 - Gráfico de uma função *h(x)* após a translação do gráfico da função *f(x)* = x^2 para o ponto (0,-4).



Fonte: Elaborada pela autora

ATIVIDADE 2 - Se o vértice da função $f(x) = x^2$ fosse transladado para o ponto (2,0), qual seria a lei de formação dessa nova função?

Figura 14 - Gráfico de uma função *g(x)* após a translação do gráfico da função $f(x) = x^2$ para o ponto (2,0).



Fonte: Elaborada pela autora

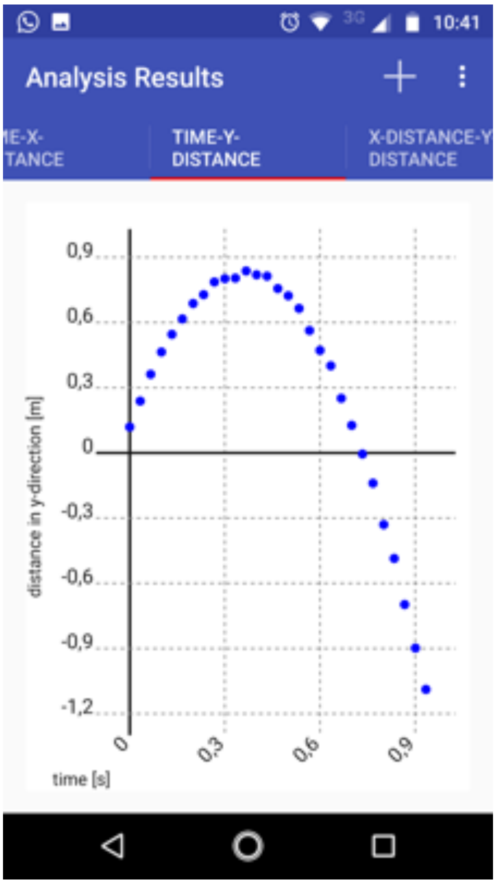
ATIVIDADE 3 - Baseando-se nas ATIVIDADES 1 e 2, e desprezando os efeitos da resistência do ar, descreva, a partir da função $f(x) = - 4,9.x^2$, a lei de formação do gráfico que representa a posição da bola de tênis no eixo y em relação ao tempo.

Situação de Ação: Com a leitura do enunciado do problema, espera-se que o estudante perceba na ATIVIDADE 1 que o gráfico da função *f(x)* foi transladado para um ponto sobre o eixo y. Somando-se a essa identificação, ele deverá perceber que, o vértice da parábola que antes encontrava-se no ponto (0,0), encontra-se, após a translação, no ponto (0, -4), ou seja, ocorreu uma alteração apenas no eixo y no sentido negativo do eixo.

Já na ATIVIDADE 2, ele deverá perceber que o gráfico da função *f(x)* foi transladado para um ponto sobre o eixo x. Somando-se a essa identificação, ele deverá perceber que, o vértice da parábola que antes encontrava-se no ponto (0,0), encontra-se, após a translação, no ponto (2,0), ou seja, ocorreu uma alteração apenas no eixo x no sentido positivo do eixo.

Na fase de ação para o ATIVIDADE 3, o estudante deverá perceber que a curva da posição pelo tempo em relação ao eixo y, é uma parábola, como mostra a figura 15. Deverá observar, também, que ocorreram duas translações no gráfico em relação a origem: uma na vertical, no sentido positivo do eixo das ordenadas; e a outra na horizontal, também no sentido positivo do eixo das abscissas.

Figura 15 - Gráfico da distância pelo tempo em relação ao eixo y.



Fonte: Gerado pelo aplicativo VidAnalysis

Situação de Formulação: Passada a situação de ação na ATIVIDADE 1, espera-se que o estudante proponha, através da manipulação do aplicativo *VidAnalysis*, que a nova função h(x) seja igual a f(x) + k, para todo x $\in$ R. Nesse caso, k assumirá o valor de – 4.

Já na ATIVIDADE 2, espera-se que o estudante proponha, inicialmente, que a nova função h(x) seja dada por $f(x - k)$, para todo x $\in$ R. Entretanto, enseja-se que ele constate, através da análise do gráfico, que apenas $f(x – 2)$ representará a função $h(x)$.

Para a ATIVIDADE 3, o estudante deverá, com o auxílio dos gráficos e da tabela, gerados pelo aplicativo, encontrar o ponto que representa o vértice da parábola.

Localizado o vértice da parábola, espera-se que ele, partindo da função dada pela equação:

$$f(x) = -4,9x^2 \,, \qquad (7)$$

realize primeiro a translação vertical para o ponto (0;0,837), para que seja encontrada a função $h(x)$, ou seja,

$$h(x) = -4,9x^2 + 0,837 \qquad (8)$$

Em seguida, transladar a função *h(x) para o ponto (0,367;0,837)*, para encontrar a função *g(x),* sabendo que:

$$g(x) = h(x - 0{,}367)$$

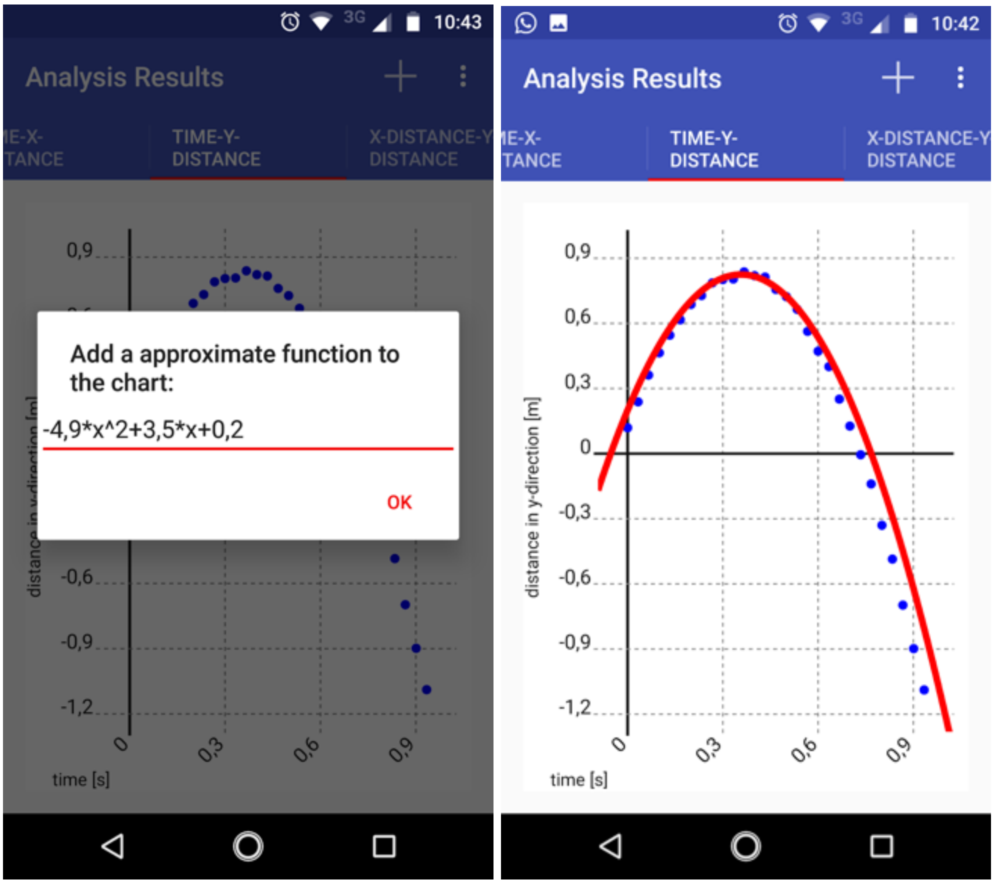
$$g(x) = -4{,}9(x - 0{,}367)^2 + 0{,}837 \qquad (9)$$

Situação de Validação: Em busca da confirmação de sua hipótese na fase de formulação para a ATIVIDADE 1, o estudante poderá encontrar as raízes dessa nova função e verificar se coincidem com as apresentadas no gráfico.

Para validar sua hipótese para ATIVIDADE 2, o estudante poderá verificar, baseando-se no gráfico, as raízes e o valor de x para $y = 0$, que deverá ser igual a 2. É esperado, também, que ele perceba que k representa a raiz da função.

Para validar a hipótese da ATIVIDADE 3, o estudante pode adicionar no aplicativo, a função encontrada, para que seja gerada a curva de ajuste (vermelha), e assim, verificar se ela se encaixa no conjunto de pontos gerados após a videoanálise, como mostra a figura 16.

Figura 16 - Lei de formação da posição do objeto em relação eixo pelo tempo e a curva que passa pelos pontos gerados durante a videoanálise



Fonte: Curva gerada pelo aplicativo VidAnalysis.

Situação de institucionalização: Para Silva e Almouloud (2006) esta fase representa a "passagem para um conhecimento de seu papel de meio de resolução de uma situação de ação, de formulação ou de prova, para um novo papel: aquele de referência para utilizações futuras, coletivas ou pessoais". Para tanto, é necessário que o professor, baseando-se nas produções de seus estudantes, faça a exposição do novo conhecimento de forma clara e explícita. Dessa maneira, espera-se que o professor descreva que:

a) A translação vertical $(x,y) \to (x, y + k)$ transforma o gráfico da função f: $R \to R$ no gráfico da função h: $R \to R$, tal que $h(x) = f(x) + k$ para todo $x \in R$.
b) Aplicando a translação horizontal $(x, y) \to (x + k, y)$ ao gráfico da função f: $R \to R$, obtém-se o gráfico da função g: $R \to R$, tal que $g(x) = f(x - k)$ para todo $x \in R$.
c) A representação de uma função quadrática em sua forma canônica, ou seja, em sua forma mais simples, é dada por $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, onde (x_v, y_v) representa o vértice do gráfico da função $f(x)$.

A situação-didática pode ser proposta para estudantes que tenham um bom conhecimento sobre o conceito de função quadrática (definição, lei de formação, construção de um gráfico), o conceito de proporcionalidade, mas que desconhecem a forma canônica de funções quadráticas e a translação horizontal e vertical de gráficos de funções quadráticas.

4.1.3 Terceira sequência didática: a queda livre de uma bola até o repouso

As sucessivas alturas que uma bola atinge ao tocar o solo até o repouso, após ser abandonada de uma certa altura, são descritas por uma função exponencial. Desta maneira, para esta segunda situação didática serão exploradas as funções exponenciais e logarítmicas, através da videoanálise das alturas alcançadas por uma bola abandonada de uma altura de aproximadamente 1,3m sobre o solo até o repouso.

Para o início da videoanálise, os estudantes irão marcar os pontos por onde a bola passou até o repouso e escolher a origem do eixo das coordenadas. Baseando-se nos gráficos e na tabela gerados pelo aplicativo, eles responderão às seguintes questões:

ATIVIDADE 1 - Quando uma bola é abandonada de uma certa altura na vertical, após colidir com o solo, ela ressalta. A altura máxima atingida após o ressalto não é a mesma em que a bola se encontrava inicialmente, pois, mesmo desprezando a resistência do ar, ocorre durante o impacto com o solo a deformação da própria bola, além da dissipação de energia na forma de calor e energia acústica. Desta maneira, sua altura inicial é reduzida, aproximadamente, por um mesmo fator, que é conhecido como coeficiente de restituição. O coeficiente de restituição é definido por:

$$e = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_3}{h_2}} \ldots \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}} \qquad (10)$$

Tomando como base o coeficiente de restituição e o gráfico da posição no eixo y pelo tempo, verifique se é possível estimar o valor do coeficiente de restituição das sucessivas colisões da bola com o solo.

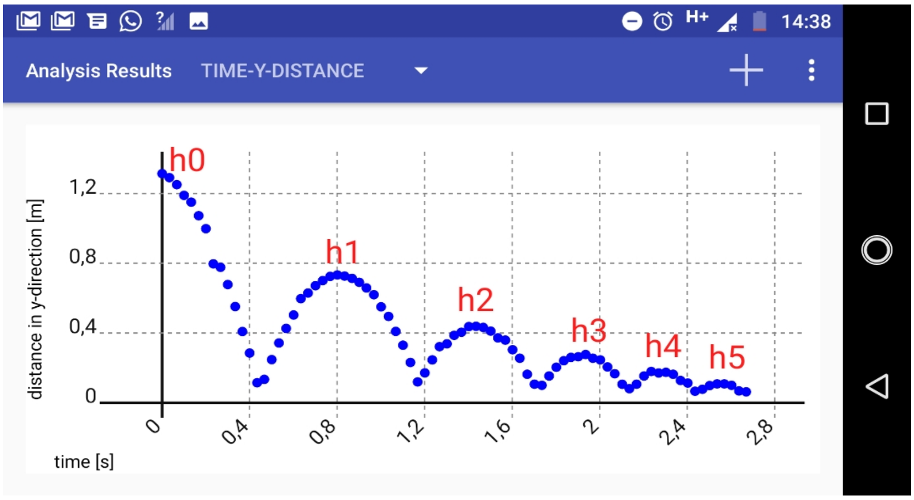
ATIVIDADE 2 – Partindo da definição de coeficiente de restituição apresentada na ATIVIDADE 1, verifique se é possível descrever a lei de formação da função que representa a altura da bola de tênis em relação ao número de colisões.

ATIVIDADE 3 - Após transladar o gráfico da função exponencial encontrada no item (b) para o ponto (0,7;1,4), é possível descrever qual seria a lei de formação dessa nova função?

A situação-didática pode ser proposta para estudantes que tenham conhecimento sobre potenciação, radiciação e de funções exponenciais.

Situação de Ação: Nesta fase, para a ATIVIDADE 1, espera-se que o estudante, com o auxílio da tabela e do gráfico da posição pelo tempo em relação ao eixo y, identifique as alturas máximas atingidas pela bola a cada ressalto, como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Gráfico do movimento da bola após cinco ressaltos.



Fonte: Gráfico gerado pelo aplicativo VidAnalysis e modificado pela autora.

Para a ATIVIDADE 2, o estudante deverá observar que, partindo do cálculo do coeficiente de restituição, é possível identificar a relação existente entre a altura da bola e o número de ressalto da bola.

Por fim, para a ATIVIDADE 3, o estudante deverá observar, através do gráfico apresentado na figura 17 e da função encontrada na ATIVIDADE 2, que a altura inicial da bola é de 1,314 m e que, no instante 0,8s, a bola atingirá a primeira altura máxima, após o seu primeiro contato com o chão.

Para encontrar todas as alturas máximas, o estudante deverá utilizar a tabela gerada pelo aplicativo.

Situação de Formulação: Nesta fase, para a ATIVIDADE 1, espera-se que o estudante, após ter identificado as alturas máximas atingidas pela bola a cada ressalto, utilize-se da expressão (9), para encontrar o valor médio do coeficiente de restituição, como mostra a Tabela 7.

Tabela 7 - Cálculo do valor médio do coeficiente de restituição

Altura máxima (m)	Coeficiente de Restituição (e)	Valor médio do coeficiente de restituição (e)
h_0 = 1,314		
h_1 = 0,733	$\sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = 0{,}75$	
h_2 = 0,439	$\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 0{,}77$	
h_3 = 0,277	$\sqrt{\frac{h_3}{h_2}} = 0{,}79$	0,74
h_4 = 0,128	$\sqrt{\frac{h_4}{h_3}} = 0{,}67$	
h_5 = 0,074	$\sqrt{\frac{h_5}{h_4}} = 0{,}76$	

Fonte: Elaborada pela autora

Na ATIVIDADE 2, é esperado que o estudante encontre a lei de formação da função que representa a altura da bola em relação ao número de colisões, partindo da expressão (10) por meio dos seguintes cálculos:

$$h_1 = e^2.h_0$$
$$h_2 = e^2.h_1 \Rightarrow h_2 = e^2.e^2.h_0 \Rightarrow h_2 = e^4.h_0$$
$$h_3 = e^2.h_2 \Rightarrow h_3 = e^2.e^4.h_0 \Rightarrow h_3 = e^6.h_0$$
$$\vdots$$
$$h_n = e^{2n}.h_0 \qquad (11)$$

Substituindo o valor do coeficiente de restituição, encontrado na ATIVIDADE 1, e o valor da altura inicial da bola, espera-se que o estudante encontre a seguinte função:

$$h(n) = (0{,}74)^{2n}.1{,}314 \qquad (12)$$

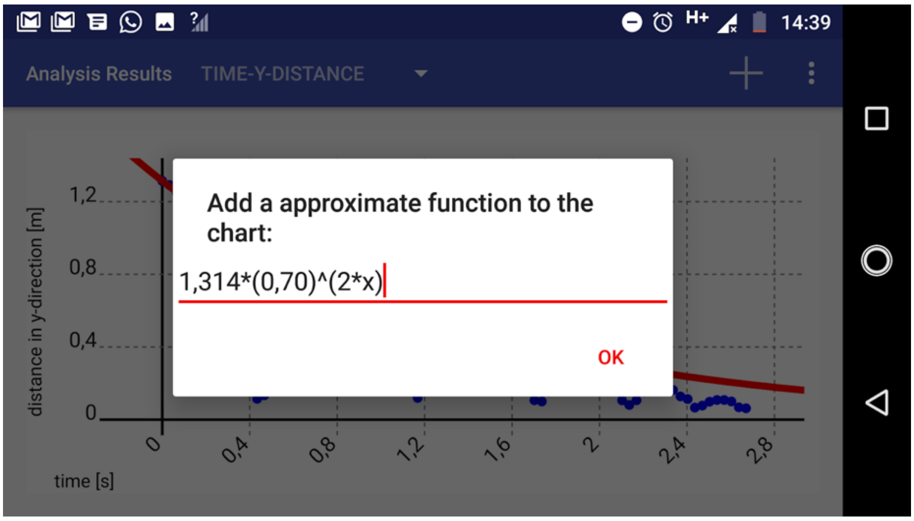
Para a ATIVIDADE 3, espera-se que, partindo das informações que foram obtidas nas fases anteriores, o estudante encontre a seguinte lei de formação:

$$h(n) = 0{,}74^{2n-1{,}4}.1{,}314 + 0{,}086. \qquad (13)$$

Situação de Validação: Essa é a etapa que o estudante deve validar a solução encontrada para resolver o problema proposto. Neste sentido, ele deve, conforme Brousseau (2009), "não só deve comunicar uma informação como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado". Portanto, espera-se que o estudante exponha o caminho usado para os resultados encontrados e corrija-os ou valide-os após o debate com seus colegas.

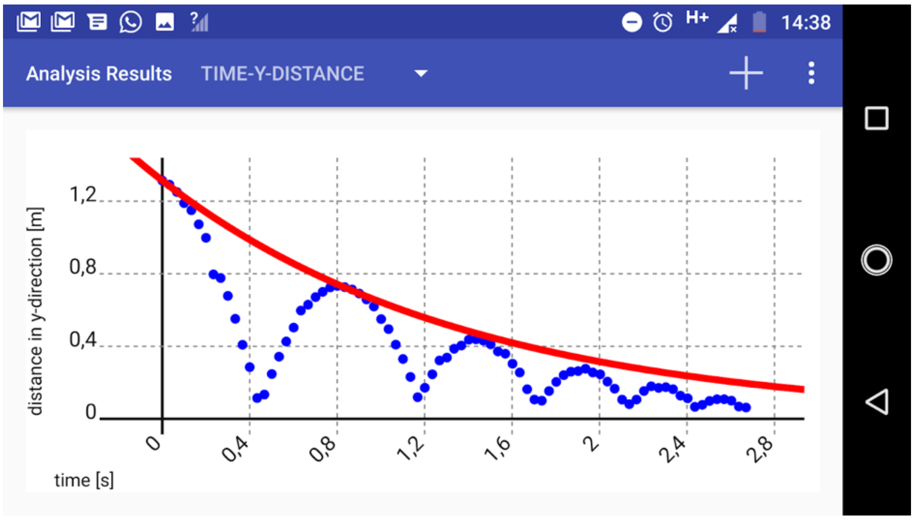
Dentre os recursos que ele poderá utilizar-se, para validar a solução encontrada para as ATIVIDADES 1 e 3, está o de inserir no aplicativo *VidAnalysis* a função exponencial encontrada na ATIVIDADE 2 e verificar se a curva gerada pelo aplicativo passa pelos pontos referentes as alturas máximas atingidas pela bola a cada ressalto, como mostram as Figuras 18 e 19.

Figura 18 - Função exponencial encontrada para a solução do item (a) da situação didática.



Fonte: Gráfico gerado pelo aplicativo VidAnalysis e modificado pela autora.

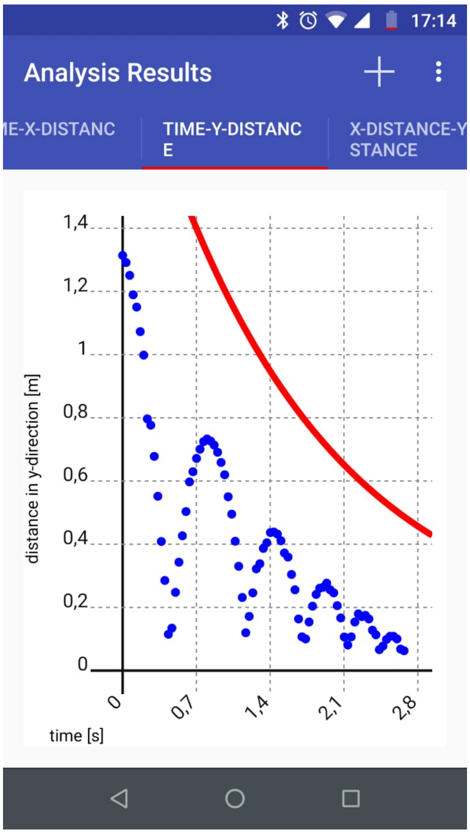
Figura 19 - Curva exponencial que passa pelas alturas máximas atingidas pela bola em cada ressalto.



Fonte: Gráfico gerado pelo aplicativo VidAnalysis e modificado pela autora.

O mesmo procedimento poderá ser realizado para a ATIVIDADE 3. A figura 20 mostra o gráfico da função (13).

Figura 20 - Gráfico da função $h(n) = 0{,}086 + 1{,}314.(0{,}74)^{2n-1{,}4}$



Fonte: Gráfico gerado pelo aplicativo VidAnalysis.

Situação de institucionalização: Esta fase representa o momento em que o professor expõe, de maneira sistemática, as ideias e ações realizadas previamente pelos estudantes, aproveitando para tirar possíveis dúvidas. Sendo assim, espera-se que o professor estabeleça e oficialize o conhecimento sobre a identificação da lei de formação e translação de gráficos de funções exponenciais.

5 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES A POSTERIORI/VALIDAÇÃO

A fase da experimentação representa o momento de aplicação e observação das situações didáticas. Para Almouloud (2008, p.67), "é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade."

Nesse sentido, as situações didáticas, propostas nesta pesquisa, foram aplicadas inicialmente para um grupo de dez estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola de tempo parcial da rede pública estadual, localizada no bairro Centro, em Fortaleza. As aplicações[21] ocorreram nos dias 16 e 28 de maio de 2019, e no dia 13 de junho de 2019.

A partir dessas aplicações, foram realizados alguns ajustes nos textos das atividades, como mostra a Tabela 8, com o objetivo de facilitar a compreensão das atividades pelos estudantes.

Tabela 8 - Correções no texto das atividades, depois da primeira aplicação.

SITUAÇÃO DIDÁTICA	ATIVIDADE	ANTES	DEPOIS
1ª	1	A taxa de variação de uma função pode ser interpretada como uma forma de medir "quão rápido" a variável y está mudando à medida em que a variável x muda. Baseando-se no diagrama que descreve a posição da bola no eixo x em relação ao tempo, verifique se é possível encontrar a taxa de variação da função.	A taxa de variação de uma função é um número que pode ser interpretado como uma forma de medir "quão rápido" a variável y está mudando à medida em que a variável x muda. Baseando-se no diagrama que descreve a posição da bola no eixo x em relação ao tempo, verifique se é possível encontrar a taxa de variação da função.
1ª	3	**A** partir do gráfico da na ATIVIDADE 1, verifique se é possível encontrar a equação da curva após a translação da origem dos eixos para o ponto	**A** partir do gráfico da na ATIVIDADE 1, verifique se é possível encontrar a equação da curva após a translação do gráfico para o ponto (0,4;0). Se for

[21] Apesar de todas as situações didáticas terem sido aplicadas, os dados dessas aplicações não foram utilizados nesta pesquisa, devido a baixa frequência dos estudantes nos encontros, provocada principalmente, pela participação em atividades voltadas para o ENEM.

		(1,0). Se for possível, verifique o que mudou e o que permaneceu igual.	possível, verifique o que mudou e o que permaneceu igual.
1ª	4	Partindo do gráfico da curva da ATIVIDADE 3, translade a origem dos eixos para o ponto (1,2). Verifique o que mudou e o que permaneceu inalterado em relação a lei de formação da função encontrada na ATIVIDADE 1.	partindo do gráfico da curva da ATIVIDADE 3, translade o gráfico para o ponto (0,4;1,2). Verifique o que mudou e o que permaneceu inalterado em relação a lei de formação da função encontrada na ATIVIDADE 1.
2ª	1	Ao transladar a origem dos eixos da figura 1 para o ponto (0, -4), obtém-se o gráfico de uma nova função *h(x)*. É possível descrever a lei de formação dessa nova função, partindo da função *f(x)?*	Ao transladar o vértice do gráfico da função $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$ para o ponto (0,-4), obtém-se o gráfico da função *h*(x). Com base nos gráficos, verifique se é possível descrever a lei de formação da função *h(x)*, partindo da função *f*(x).
2ª	2	Se a origem dos eixos do gráfico da ATIVIDADE 1, fosse transladado para o ponto (2,0), qual seria a lei de formação dessa nova função?	Se o vértice da função $f(x) = x^2$ fosse transladado para o ponto (2,0), qual seria a lei de formação dessa nova função?
3ª	2	É possível descrever a lei de formação da função que representa a altura da bola de tênis em relação ao número de colisões?	Partindo da definição de coeficiente de restituição apresentada na ATIVIDADE 1, verifique se é possível descrever a lei de formação da função que representa a altura da bola de tênis em relação ao número de colisões.

Fonte: Elaborada pela autora

Após as modificações nos textos das atividades, as três situações didáticas foram aplicadas novamente, nos dias 17, 19 e 24 de junho de 2019, em uma escola de Ensino Médio em Tempo Integral da rede pública estadual do Ceará, localizada no bairro Bela Vista, em Fortaleza. Participaram das aplicações, 15 estudantes da 2ª série do Ensino Médio.

Para orientar os estudantes foi criado um grupo no *whatsapp*, com o objetivo de fornecer as primeiras orientações sobre a *VidAnalyisis*, disponibilizar vídeos e materiais sobre a apresentação e utilização do aplicativo.

Antes da aplicação da primeira situação didática, os estudantes foram divididos em grupos e foram estabelecidas as seguintes considerações:

a) Seriam formados grupos compostos por três estudantes. Cada grupo seria identificado com uma letra, sendo essas A, B, C, D e E;
b) os grupos receberiam uma folha com os enunciados da ATIVIDADE 3om espaço suficiente para registrar as resoluções;
c) o pesquisador não poderia fornecer informações, que os levassem a resolver as atividades, além das disponíveis nos enunciados;
d) os grupos deveriam registrar todas as suas observações e considerações sobre o caminho escolhido para a resolução das atividades.
e) os grupos poderiam comunicar-se durante a busca pela resolução das atividades.

Essas considerações serviram para todas as outras aplicações.

A coleta dos dados foi feita através da observação do comportamento dos estudantes, da gravação de suas falas e de suas produções escritas durante a aplicação de cada situação didática em sala de aula.

Ao descrever essa fase de experimentação foram selecionadas as informações mais relevantes obtidas através das ações dos cinco grupos. A seguir, serão apresentados os momentos previstos na Teoria das Situações Didáticas, vivenciadas pelos estudantes em cada situação didática.

5.1 Experimentação da 1ª Situação-didática

Para a primeira situação didática não se estabeleceu tempo para a realização das atividades, visto que era o primeiro contato dos estudantes com a videoanálise, e por este motivo, buscou-se deixá-los à vontade.

A primeira ação dos estudantes, em sala de aula, foi realizar a videoanálise do lançamento oblíquo de uma bola. O vídeo foi disponibilizado dois dias antes da aplicação, através do grupo no *whatsapp*, com o objetivo de possibilitar a familiarização do aplicativo e dirimir possíveis dúvidas quanto à utilização do aplicativo. Os gráficos gerados após a videoanálise serviram para as aplicações da 1ª e da 2ª situação-didática. Posteriormente a esse momento, os estudantes receberam a seguinte atividade:

> A taxa de variação de uma função pode ser interpretada como uma forma de medir "quão rápido" a variável y está mudando à medida em que a variável x muda. Baseando-se no diagrama que descreve a posição da bola no eixo x em relação ao tempo, verifique se é possível encontrar a taxa de variação da função.

Na leitura da ATIVIDADE 1, observou-se uma grande concentração na leitura, mas pouca comunicação entre os participantes dos grupos. O grupo E logo demonstrou dificuldades quanto ao entendimento da definição de taxa de variação. Eles foram então, orientados a discutir com membros de outros grupos sobre essa definição.

Na situação de formulação, os estudantes buscaram elaborar estratégias convincentes para a resolução. Durante essa situação, os estudantes utilizaram apenas os gráficos e a tabela gerados pelo aplicativo *VidAnalysis*. As primeiras observações realizadas pelos grupos são apresentadas na tabela 9.

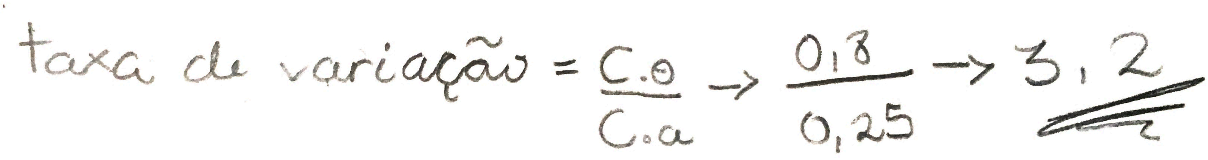
Tabela 9 - Análises iniciais da ATIVIDADE 1

GRUPO	ANÁLISES INICIAIS
A	1. A bola percorreu 3,6 metros, em 1,2 segundos;
B	1. A bola percorreu 3,6 metros, em 1,2 segundos; 2. À medida que x aumenta, y também aumenta;
C	1. O gráfico lembra uma função do 1º grau;
D	1. O gráfico lembra uma função do 1º grau; 2. O valor de x muda em função do tempo.
E	1. A função é linear; 2. O gráfico passa pela origem; 3. A função é crescente.

Fonte: Elaborada pela autora

Destacou-se aqui, a estratégia utilizada pelo grupo A, que apresentou para os membros das outras equipes, a taxa de variação como a razão entre dois catetos de um triângulo retângulo, como mostra a figura 21.

Figura 21 - Definição de taxa de variação pelo grupo A.

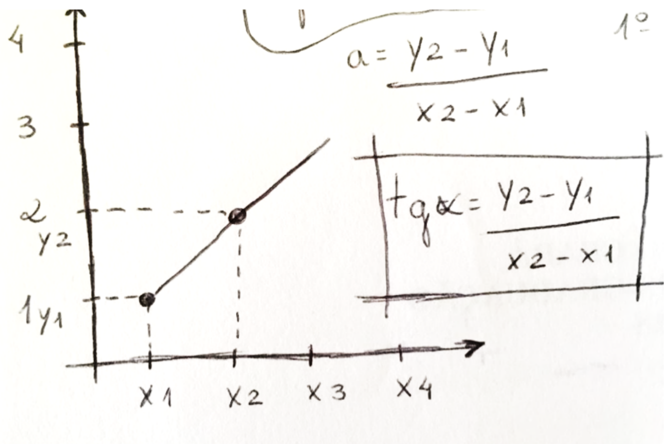


Fonte: Elaborado pelo grupo A, 2019.

Onde CO e CA, representam respectivamente, o cateto oposto e o cateto adjacente.

O grupo B, também, utilizou a definição de tangente, para encontrar a taxa de variação, como mostra a figura 22 a seguir.

Figura 22 - Definição de taxa de variação pelo grupo B.



Fonte: Elaborado pelo grupo B, 2019.

Questionados sobre o motivo de terem relacionado a taxa de variação com a tangente de um ângulo, o grupo relatou que eles se basearam no conceito de taxa que aprenderam nas aulas de Química e Física.

Os grupos C, D e E apresentaram suas taxas de variação, após a exposição dessas definições. Os valores encontrados, por cada grupo, encontram-se na tabela 10.

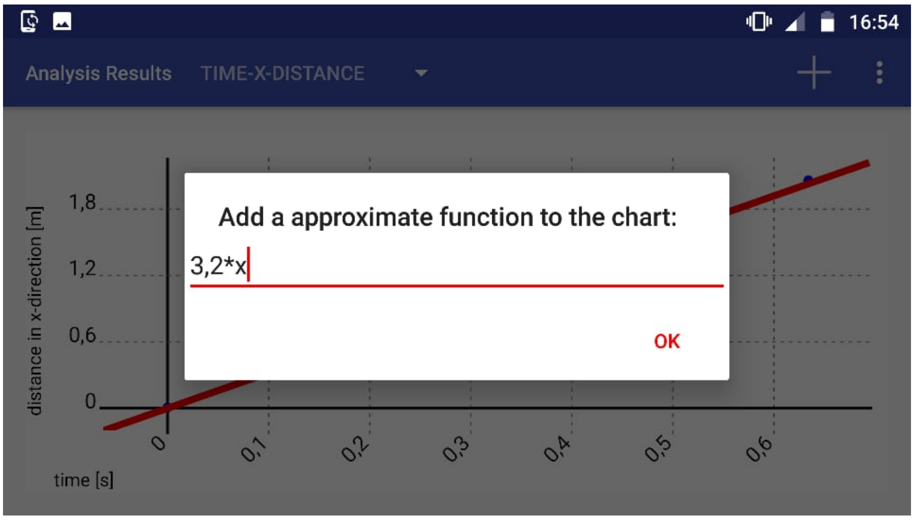
Tabela 10 - Valores da taxa de variação

GRUPO	TAXA DE VARIAÇÃO	VALOR MÉDIO
A	3,2	3,2
B	3,2	
C	2,84	
D	3,2	
E	3,25	

Fonte: Elaborada pela autora

Em busca da validação dessa solução, destacou-se a representação algébrica realizada pelo grupo A, através da inserção da função $f(x) = 3,2x$ no aplicativo, como mostra a figura 23.

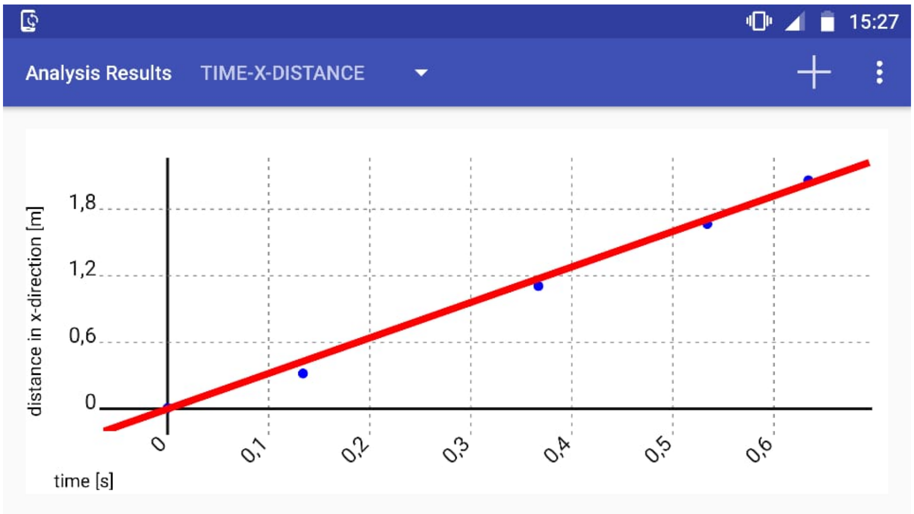
Figura 23 - Lei de formação da função que representa a posição da bola pelo tempo, em relação ao eixo x.



Fonte: Elaborada pelo grupo A, 2019.

Para o grupo, a estratégia era garantir que o gráfico desta função, apresentado na figura 24 por uma linha vermelha, passaria pelos pontos por onde a bola passou, o que validaria o valor encontrado para a taxa de variação.

Figura 24 - Gráfico da distância pelo tempo em relação ao eixo x.



Fonte: Elaborada pelo grupo A, 2019.

Os outros grupos seguiram a mesma estratégia utilizada pelo grupo A.

Após a fase de validação dessa atividade, os estudantes receberam a ATIVIDADE 2, que apresentava o seguinte texto.

> Repita a ATIVIDADE 1, tomando como base o diagrama que descreve a velocidade no eixo y em função do tempo, buscando identificar o que mudou em relação a taxa de variação da ATIVIDADE 1 e qual a função que melhor representa o gráfico.

Após a leitura da ATIVIDADE 2, observou-se uma intensa comunicação entre os membros dos grupos e que todos já sabiam como resolver a atividade. As primeiras análises do gráfico da velocidade em função do tempo, em relação ao eixo y. Essas análises são apresentadas na tabela 11.

Tabela 11 - Análises iniciais da ATIVIDADE 2

GRUPO	ANÁLISES INICIAIS
A	1. O gráfico não passará por todos os pontos;
B	-
C	1. O gráfico que descreve a velocidade em função do tempo, em relação ao eixo y, é decrescente; 2. O gráfico não está passando pela origem; 3. A taxa de variação é positiva;
D	1. O gráfico que descreve a velocidade em função do tempo, em relação ao eixo y, é decrescente; 2. O gráfico não passa pela origem dos eixos, portanto a função é afim.
E	1. O gráfico da função agora é decrescente.

Fonte: Elaborada pela autora

A estratégia utilizada pelos grupos para encontrar a taxa de variação foi a mesma utilizada para a ATIVIDADE 1, porém, percebeu-se uma certa dificuldade em escolher os pontos para realizar o cálculo, visto que os pontos não se encontravam alinhados. Como estratégia para resolver este problema, os grupos optaram por utilizar os dados apresentados nas tabelas, o que diferenciou da estratégia utilizada na ATIVIDADE 1, que foi a de escolher dois pontos através do gráfico, como mostra a Figura 25.

Figura 25 - Cálculo da taxa de variação

$$Tv = \frac{2{,}138 - 3{,}415}{0{,}167 - 0{,}033} = \frac{-1{,}277}{0{,}134} = -9{,}52$$

Fonte: Elaborado pelo grupo D, 2019.

Onde Tv representa a taxa de variação.

As leis de formação das funções encontradas pelos grupos, após a situação de validação, são apresentadas na Tabela 12.

Tabela 12 - Funções encontradas na ATIVIDADE 2.

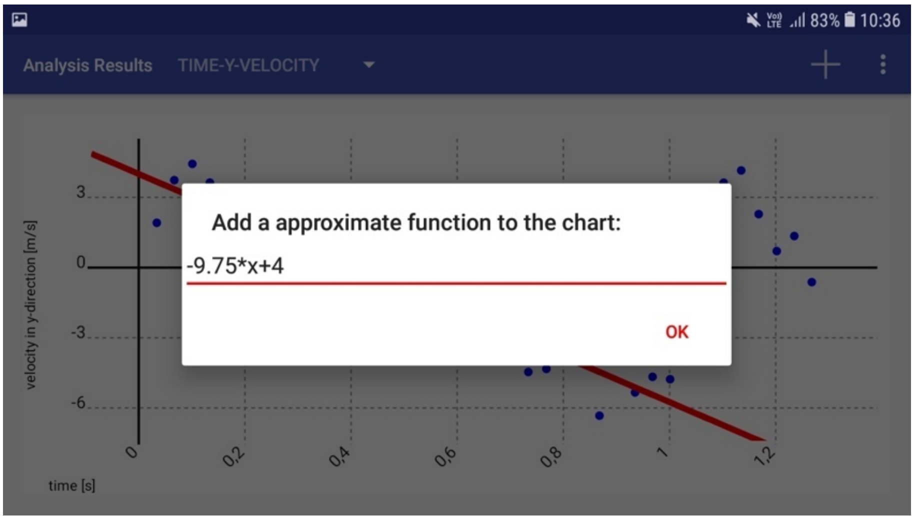
GRUPO	LEI DE FORMAÇÃO
A	*f(x)* = -9,54 x + 4
B	*f(x)* = -9,75x + 4
C	*f(x)* = -8,4x + 4
D	*f(x)* = -9,52 + 3,5
E	*f(x)* = -8,3x + 2,5

Fonte: Elaborada pela autora, 2019.

Ao inserirem novamente a lei de formação da função no aplicativo, como o objetivo de gerar um gráfico que passasse pelo maior número possível de pontos, já que os pontos não estavam alinhados, os grupos encontraram seus gráficos.

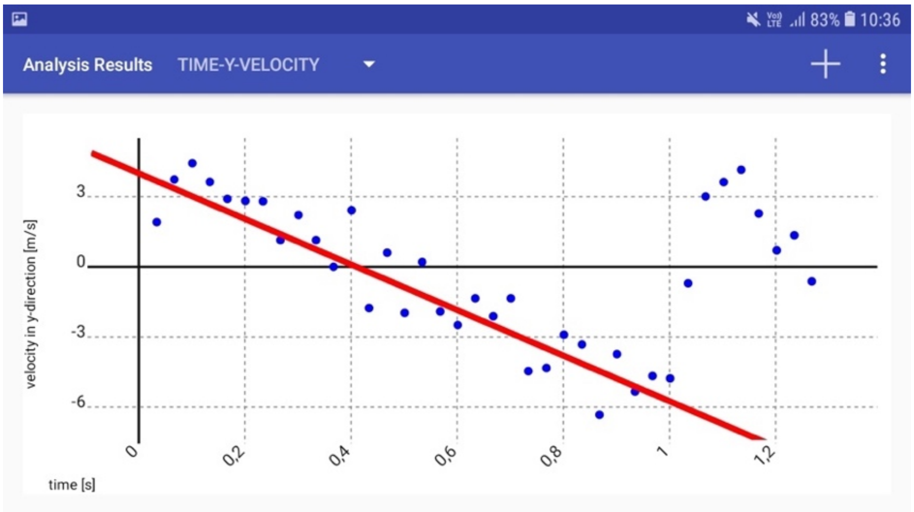
Destacou-se aqui, a lei de formação e o gráfico do grupo B, como mostram as Figuras 26 e 27.

Figura 26 - Lei de formação da função que representa a velocidade da bola em função do tempo, em relação ao eixo y.



Fonte: Elaborada pelo grupo B, 2019.

Figura 27 - Gráfico da velocidade em função do tempo, em relação ao eixo y.



Fonte: Elaborada pelo grupo B, 2019.

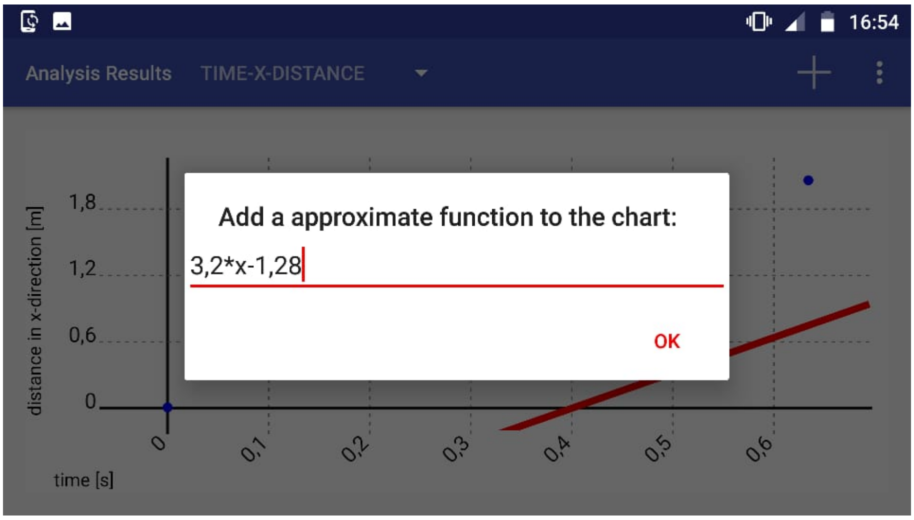
No ajuste dos pontos mostrados no gráfico da Figura 27, há alguma subjetividade, o que mostra que os cálculos estão corretos dentro de uma faixa de tolerância, que no caso, pode ser a menor distância vertical entre os pontos e a reta traçada.

Finalizada essa atividade, passou-se para a ATIVIDADE 3, que apresentava o seguinte texto:

> A partir do gráfico da na ATIVIDADE 1, verifique se é possível encontrar a equação da curva após a translação do gráfico para o ponto (0,4;0). Se for possível, verifique o que mudou e o que permaneceu igual?

Após a leitura inicial, o grupo B utilizou como estratégia, inserir a função encontrada na ATIVIDADE 1 no aplicativo, alterando os valores para da taxa de variação e da constante b, com objetivo de encontrar o gráfico que passasse pelo ponto (0,4;0). Após sucessivas tentativas, eles encontraram a função apresentada figura 28.

Figura 28 - Lei de formação da função da posição em função do tempo em relação ao eixo x.

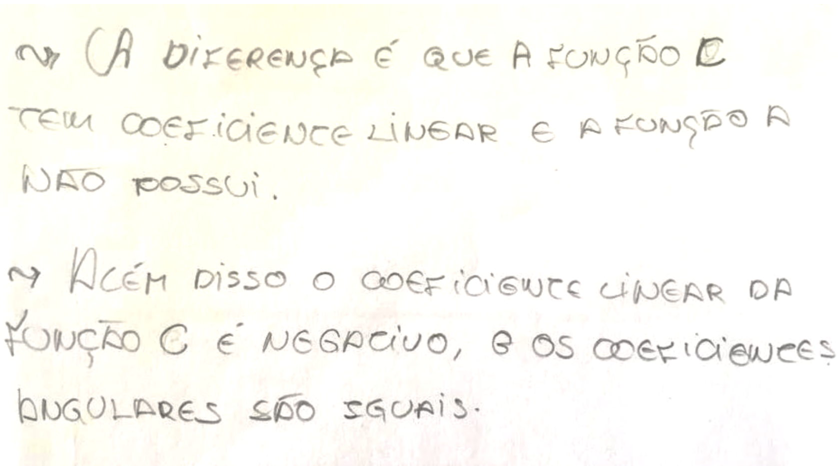


Fonte: Elaborada pelo grupo B, 2019.

O grupo B, como mostra a figura 29, também percebeu que a taxa de variação permaneceu a mesma e que na lei de formação inicial foi acrescida uma constante b, gerando assim uma nova função descrita por

$$g(x) = 3{,}2x - 1{,}28. \qquad (14)$$

Figura 29 - Translação do gráfico da função f(x) = 3,2x para o ponto (0,4;0).

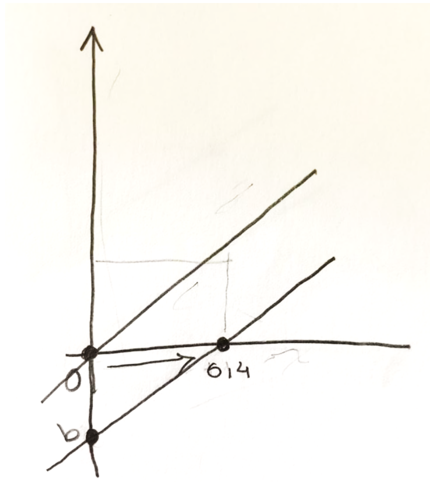

(A DIFERENÇA É QUE A FUNÇÃO C TEM COEFICIENTE LINEAR E A FUNÇÃO A NÃO POSSUI.

ALÉM DISSO O COEFICIENTE LINEAR DA FUNÇÃO C É NEGATIVO, E OS COEFICIENTES ANGULARES SÃO IGUAIS.

Fonte: Elaborada pelo grupo B, 2019.

Por sua vez, o grupo A procurou visualizar as mudanças que ocorreriam no gráfico, após a translação, e sua relação com a lei de formação apresentada pelo grupo B, como mostra a figura 30.

Figura 30 - Translação do gráfico da função f(x) = 3,2x
para o ponto (0,4;0)



Fonte: Elaborada pelo grupo A, 2019.

A maneira apresentada pelo grupo A, para justificar o valor da constante b, apresentado pelo grupo B, é vista na figura 31.

Figura 31 - Translação do gráfico da função f(x) = 3,2x
para o ponto (0,4;0)

$$f(x) = 3,2(x - 0,4)$$

Fonte: Elaborada pelo grupo A, 2019.

Questionados sobre o porquê de terem subtraído da variável x, o valor de 0,4, o grupo argumentou que o valor da constante b era negativo e que, a multiplicação de 3,2 por 0,4 resultaria em 1,28.

A estratégia utilizada para a validação da função encontrada, foi inserir a lei de formação no aplicativo, como o objetivo de verificar se o gráfico passaria pelos pontos marcados durante a videoanálise.

Para além da translação para o ponto (0,4;0), e com o objetivo de fazer com que os grupos refletissem sobre as alterações ocorridas na lei de formação da função, após a translação, os grupos foram questionados sobre qual seria a função, caso o gráfico fosse transladado para o ponto (1,0). As funções encontradas são apresentadas na tabela 13 a seguir.

Tabela 13 - Funções encontradas na ATIVIDADE 3.

GRUPO	TAXA DE VARIAÇÃO
A	*f(x)* = 3,2x – 3,2
B	*f(x)* = 3,2x – 3,2
C	-
D	-
E	*f(x)* = 3,25x – 3,25

Fonte: Elaborada pela autora, 2019

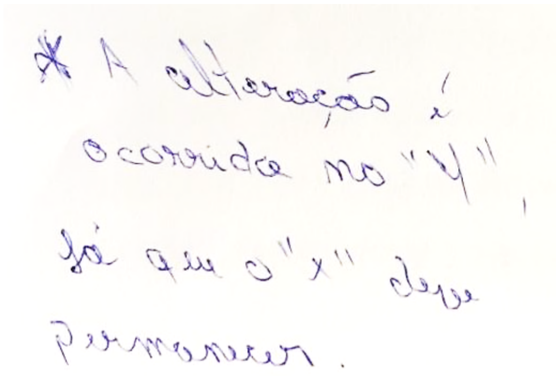
A estratégia utilizada pelos grupos B, C, D e E, foi a mesma apresentada pelo grupo A. Para validar essa função, os grupos verificaram se o ponto pertencia ou não ao gráfico, através da substituição de suas coordenadas na função.

Para finalizar a aplicação da 1ª situação-didática, os estudantes receberam a seguinte atividade:

> Agora, partindo do gráfico da curva da ATIVIDADE 3, translade o gráfico para o ponto (0,4;1,2). Verifique o que mudou e o que permaneceu inalterado em relação a lei de formação da função encontrada na ATIVIDADE 1.

Após a leitura dessa atividade, todos os grupos inferiram que ocorreria uma translação vertical. O grupo E observou que isso iria acontecer, visto que não haveria uma alteração apenas no valor da abscissa, como mostra a figura 32.

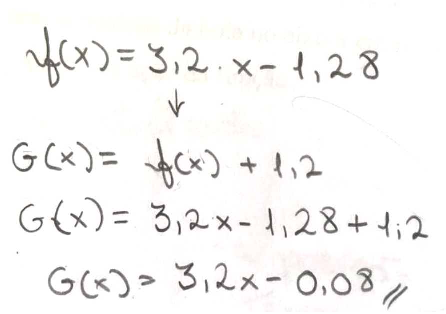
Figura 32 - Primeiras observações realizadas pelo grupo E.



Fonte: Elaborada pelo grupo E, 2019.

Já os grupos A, B e C, na fase de formulação, inferiram que para encontrar o valor da nova função, bastava adicionar na lei de formação original, o valor 1,2. Este valor era referente a alteração ocorrida na ordenada. Como pode-se observar no cálculo realizado pelo grupo A, apresentado na figura 33.

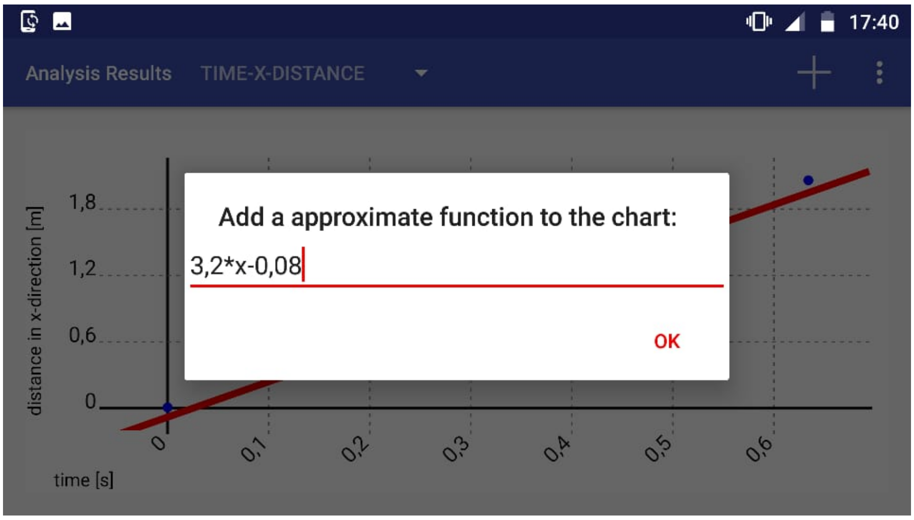
Figura 33 - Lei de formação da função g(x), após a translação da função f(x) para o ponto (0,4;1,2).



Fonte: Elaborada pela equipe A, 2019.

A validação ocorreu como nas atividades anteriores, ou seja, os grupos inseriram a lei de formação no aplicativo, para visualizarem o deslocamento do gráfico para o ponto sugerido na atividade, como pode ser observado na figura 34.

Figura 34 - Lei de formação da função f(x) = 3,2x – 0,08.



Fonte: Elaborado pela equipe A, 2019.

Após quatro horas, os estudantes concluíram as quatro atividades. Foi então realizada a situação de institucionalização, onde foram consolidados, juntamente com os grupos os seguintes conhecimentos:

1. A taxa de variação da função na primeira atividade representa a velocidade da bola. Portanto, o cálculo que deverá ser realizado para encontrar seu valor será através da razão entre a variação da posição da bola pela variação do tempo, ou seja,

$$v = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p - p_0}{t - t_0}. \qquad (15),$$

   Sendo assim, para $t = 0$, a função poderá ser escrita da seguinte maneira:

$$p(t) = v.t + p_0. \qquad (16),$$

   onde $p(t)$ representa a posição em que a bola se encontra no instante t, v representa a velocidade da bola e p_0 representa a posição inicial da bola.
2. Nas ATIVIDADES 3 e 4, as novas funções foram obtidas a partir de uma função mais simples, e suas variáveis sofreram uma sequência de operações algébricas. Essas operações correspondem às transformações no gráfico do tipo translação vertical e horizontal e podem ser realizadas da seguinte maneira:
   a) para transladar horizontalmente o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax + b$ em k unidades, deve-se subtrair de x em $f(x)$, o valor do k. Essa nova função será encontrada da seguinte maneira:

$$h(x) = f(x - k), \qquad (17)$$

   onde k representa o deslocamento horizontal.

   Na ATIVIDADE 3, ocorreu uma translação horizontal, sendo o deslocamento no eixo das abscissas de 0,4, ou seja, $k = 0{,}4$. Como 0,4 passa a ser raiz da equação do 1º grau, já que $y = 0$, o valor de k precisará ser retirado de x, pois caso a função fosse dada por:

$$h(x) = f(x + 0{,}4)$$

$$h(x) = 3,2(x+0,4) = 3,2x + 1,28, \qquad (18)$$

o ponto (0,4;0) não pertenceria ao gráfico dessa função.

Outra observação é que ao transladar a função f(x) = 3,2x para o ponto (0,4;0), a constante b será negativa. Portanto, faz-se necessário que a função seja dada por

$$h(x) = 3,2\ (x - 0,4) \qquad (19)$$

b) para que se possa transladar verticalmente um gráfico, deve-se somar *k* unidades a *f(x)*. Essa nova função será encontrada da seguinte maneira:

$$g(x) = h(x) + k \qquad (20)$$

onde *k* representa o deslocamento vertical.

Na ATIVIDADE 4, ocorreu uma translação vertical com deslocamento no eixo das ordenadas de 1,2, ou seja, $k = 1,2$. Portanto, para encontrar a lei de formação da nova função *g*(x), partindo da função (20), era necessário realizar o seguinte cálculo:

$$g(x) = h(x) + k$$
$$g(x) = 3,2x - 1,28 + 1,2$$
$$g(x) = 3,2x - 0,08. \qquad (21)$$

5.1.1 Análise a posteriori da 1ª situação didática

Conforme as análises à *priori* realizadas para a 1ª situação didática, esperava-se na ATIVIDADE 1, que os grupos percebessem que o gráfico da posição da bola pelo tempo, em relação ao eixo *x* representava uma função afim do tipo $p(t) = at$ e que após essa identificação, eles percebessem que as grandezas posição e tempo eram diretamente proporcionais. Neste sentido, para encontrar a taxa de variação média, em um determinado intervalo de tempo, realizar a o seguinte cálculo na equação a seguinte:

$$a = \frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad (22)$$

Apesar dos grupos A e B terem encontrado um valor para a taxa de variação a partir da definição de taxa das aulas de Física, observou-se que eles não faziam ideia do que representava essa taxa de variação para o movimento da bola, visto que, em nenhum momento mencionaram a taxa de variação como sendo a velocidade da bola. Para eles, a taxa representava tão somente, o coeficiente angular da reta.

Outro ponto que corrobora com essa observação foi a utilização da tangente de um ângulo para encontrar a taxa de variação. Essa estratégia foi apresentada não como uma visão de proporcionalidade entre as grandezas, mas como uma tentativa de relacioná-las em busca de um número para representar a taxa de variação.

Para a ATIVIDADE 2, esperava-se que os grupos, em um primeiro momento, identificassem o gráfico da velocidade em função do tempo, em relação ao eixo y, como uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$. E que posteriormente, observassem que apenas encontrar a taxa de variação não seria suficiente para descrever o gráfico dessa função, sendo necessário transladar verticalmente o gráfico para um ponto (0, b), situado sobre o eixo y.

Durante a busca pela taxa de variação e consequentemente, pela lei de formação da função, três pontos foram observados:

1º - os grupos não estavam considerando o sinal negativo da taxa de variação;

2º - apesar de observarem que o gráfico não passava pela origem dos eixos, o valor da constante b, não estava sendo considerado;

3º - a taxa de variação de uma função foi chamada de coeficiente angular.

Os dois primeiros pontos foram repensados no momento da validação das funções. Ao inserirem as leis de formação encontradas inicialmente, os grupos observaram que o gráfico seguia um sentido diferente dos pontos marcados e que, sem a constante b, o gráfico passaria pela origem.

Ao revisitarem seus cálculos e realizarem uma nova análise do gráfico, as correções foram feitas.

Já na ATIVIDADE 3, esperava-se que os grupos percebessem que, ao transladar horizontalmente o gráfico da função *f(x)* para o ponto (0,4;0), a lei de formação da nova função *h(x)* apresentaria uma constante b.

Para encontrar o valor de b, eles poderiam utilizar a como estratégia, a substituição do ponto (0,4;0) na função *h(x)* = 3,6x + b, ou através do cálculo:

$$h(x) = f(x - 0{,}4) = 3{,}6\ (x - 0{,}4) = 3{,}6x - 1{,}44. \qquad (23)$$

O grupo A apresentou o caminho para a resolver a ATIVIDADE 3 previsto nas análises a *priori* para essa atividade. O grupo analisou o movimento de translação do gráfico em um plano cartesiano e conseguiu visualizar a alteração na lei de formação da função $h(x)$.

De maneira diferente, o grupo B utilizou como estratégia de solução o método da tentativa e erro, através da inserção da função de $f(x)$ no aplicativo e da alteração do valor da taxa de variação e constante b, com o objetivo de encontrar o gráfico que passaria pelo ponto (0,4;0).

A troca de informações entre esses dois grupos com os grupos C, D e E, permitiu que todos eles encontrassem soluções satisfatórias para a ATIVIDADE 3, possibilitando assim a generalização do conhecimento matemático durante a situação de institucionalização.

Por fim, para a ATIVIDADE 4, conforme as análises a *priori*, esperava-se que os grupos percebessem que ao transladar o gráfico para o ponto (0,4;1,2), a partir da função encontrada na ATIVIDADE 3, o gráfico iria se mover na vertical, para além disso, os grupos, partindo da função encontrada na ATIVIDADE 3, e com o apoio do aplicativo *VidAnalysis*, deveriam constatar que ao somar 1,2 à função $h(x)$, eles estariam encontrando a lei de formação da nova função, chamada de $g(x)$, como mostra o cálculo a seguir:

$$g(x) = h(x) + 1{,}2 = 3{,}6x - 1{,}44 + 1{,}2 = 3{,}6x - 0{,}22. \qquad (24)$$

No entanto, apesar de todos os grupos perceberam que aconteceria uma translação vertical e apenas nos grupos A, B e C houve a percepção de adicionar o valor de 1,2 na função $h(x)$, para encontrar a função $g(x)$, conforme foi apresentado na fase de experimentação.

Apesar de identificados alguns erros apresentados na discriminação das soluções, considera-se que o objetivo desta situação-didática foi atingido pelos grupos, pois eles conseguiram formular hipóteses, buscar estratégias que possibilitassem a relação entre os dados apresentados nos gráficos e nas tabelas com as informações disponíveis em cada atividade para validar estes resultados. Além de possibilitar, na fase de institucionalização, que os erros conceituais fossem dirimidos.

A seguir, serão apresentados os dados compilados durante a fase de experimentação e as análises a posteriori da 2ª situação didática.

5.2 Experimentação da 2ª Situação didática

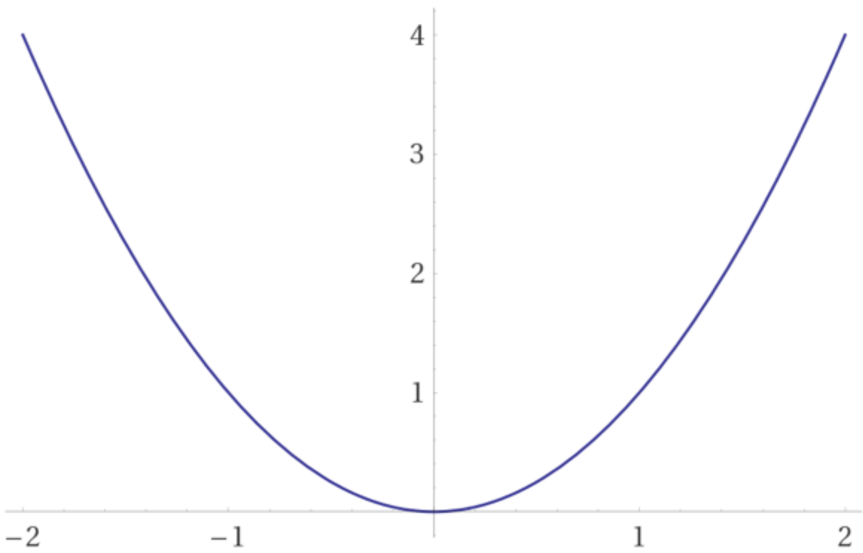
Para a aplicação da segunda situação didática foi utilizado o gráfico da posição da bola em função do tempo, em relação ao eixo y, gerado pelo aplicativo *VidAnalysis* durante a videoanálise do movimento do lançamento oblíquo de uma bola, realizada pelos grupos A, B, C, D e E, na aplicação da primeira situação-didática.

Para explorar a translação vertical e horizontal em funções quadráticas foram apresentadas três atividades para os mesmos grupos que participaram da aplicação da 1ª situação didática. Decidiu-se, também, não se estabelecer tempo para a realização das atividades.

A seguir, é apresentado o texto da primeira atividade[22]:

> Ao transladar o vértice do gráfico da função $f(x) = x^2$ para o ponto (0,-4), obtém-se o gráfico da função *h(x)*. Com base nos gráficos, verifique se é possível descrever a lei de formação da função *h(x)*, partindo da função *f(x)*.

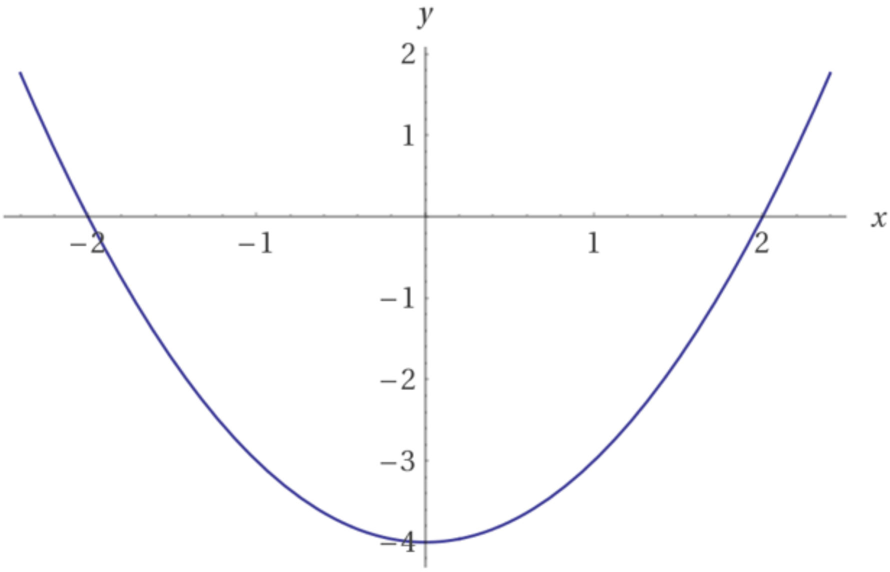
Figura 35 - Gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborada pela autora

[22] As figuras 35, 36 e 39, apresentadas nas ATIVIDADES 1 e 2, foram apresentadas, pela primeira vez, com as numerações 12, 13 e 14, nas páginas.

Figura 36 - Gráfico de uma função h(x) após a translação do gráfico da função f(x) = x^2 para o ponto (0,-4).



Fonte: Elaborada pela autora

Após a leitura inicial, os grupos realizaram as observações mostradas na tabela 14.

Tabela 14 - Análises iniciais da ATIVIDADE 1

GRUPO	ANÁLISES INICIAIS
A	1. Ocorrerá uma translação vertical;
B	1. O vértice do gráfico da função f(x) = x^2 foi transladado para um ponto no eixo y. 2. O vértice da parábola se encontrava em (0,0), após a translação, encontra-se em (0, -4); 3. A função inicial é do tipo f(x) = ax^2; 4. A nova função será do tipo f(x) = $ax^2 + bx + c$
C	1. O valor de Δ é igual a 0, no gráfico da função *f(x);* 2. O valor da constante a é maior do que 0; 3. O valor da constante c é igual a 0. 4. No gráfico transladado para o ponto (0, -4), o valor de c = -4 e o valor de a é maior do que 0.
D	-
E	-

Fonte: Elaborada pela autora

Na situação de formulação ocorreram intensas trocas de informações entre os grupos. Os grupos A e B apresentaram como solução a função *h(x)* = $x^2 - 4$.

Questionados sobre como chegaram a essa conclusão, os dois grupos afirmaram que a translação aconteceu do ponto (0,0) para o ponto (0,-4), provocando assim, uma alteração apenas no valor da ordenada, que passou de 0 para -4. Desta maneira, eles apenas acrescentaram este valor na função inicial.

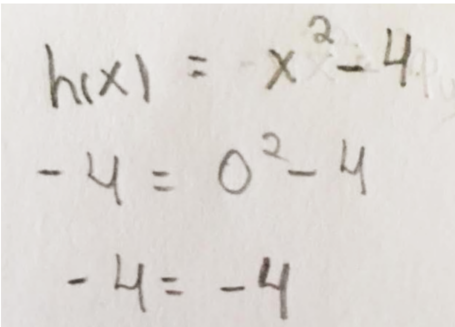
Como estratégias de validação os grupos utilizaram-se de um dos modos a seguir:

1º - substituíram o ponto (0, -4) na função encontrada, com o objetivo de verificar se o ponto pertencia a função encontrada; e

2º - utilizaram-se da fórmula de Bhaskara para encontrar os pontos por onde o gráfico interceptava o eixo x.

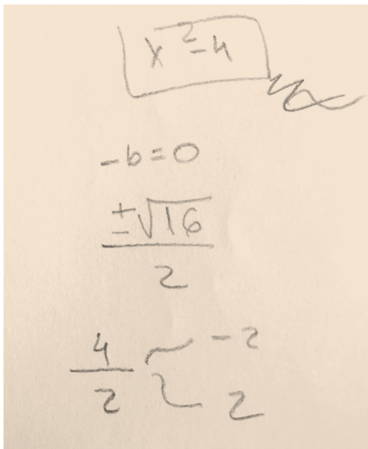
Destaque para o grupo D, que apesar de apresentar dificuldades para chegar à solução da atividade, utilizou-se dos dois modos para validar a função encontrada, como mostram as figuras 37 e 38.

Figura 37 - Substituição do ponto (0,-4) na função f(x) = x^2 - 4



Fonte: Elaborada pelo grupo D, 2019.

Figura 38 - Cálculo realizado por meio da fórmula de Bháskara

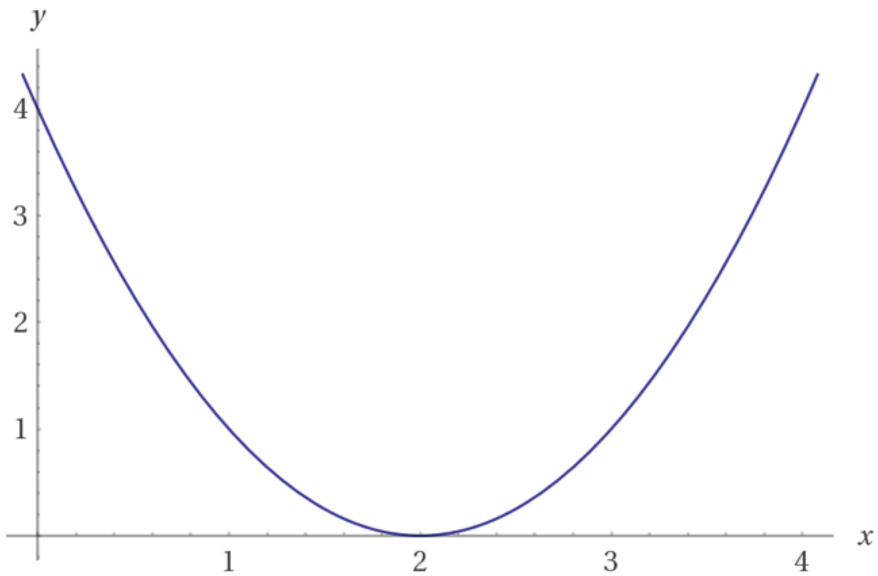


Fonte: Elaborada pelo grupo D, 2019.

Após a validação da ATIVIDADE 1, os grupos receberam a ATIVIDADE 2, com o seguinte enunciado:

> Se o vértice da função *f(x) = x²* fosse transladado para o ponto (2,0), qual seria a lei de formação dessa nova função?

Figura 39 - Gráfico de uma função g(x) após a translação do gráfico da função f(x) = x2 para o ponto (2,0).



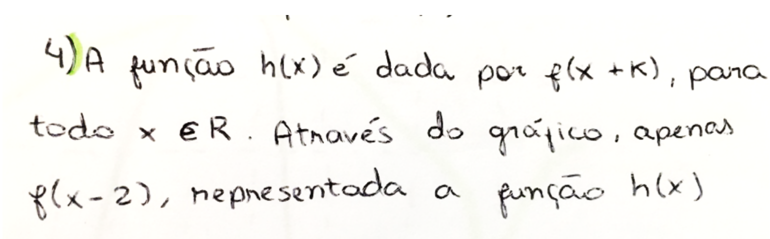
Fonte: Elaborada pela autora

As observações iniciais, feitas pelos grupos, estão listadas a seguir:

a) O gráfico da função *f(x)* foi transladado para um ponto no eixo x;
b) O vértice da parábola, antes se encontrava no ponto (0,0), e depois da translação encontra-se no ponto (2,0);
c) O valor da constante c é igual a 4.

Para além dessas observações, comuns a todos os grupos, o grupo D deduziu que o valor de Δ era igual a 2 e o grupo B afirmou que a equação da função *h(x)* seria dada por *f(x + k),* como mostra a figura 40.

Figura 40 - Lei de formação da função h(x).


4) A função h(x) é dada por f(x + K), para todo x ∈ R. Através do gráfico, apenas f(x - 2), representada a função h(x)

Fonte: Elaborada pelo grupo B, 2019.

Como estratégia para encontrar a lei de formação da função *g(x),* destacou-se a utilizada pelos grupos A, B e D, apresentada na figura 41.

Figura 41 - Lei de formação da função g(x).

$$f(x) = (x-2)^2$$
$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Fonte: Elaborada pelo grupo A, 2019.

Para validar sua hipótese, o grupo A substituiu o ponto (2,0) na função encontrada, como mostra a figura 42.

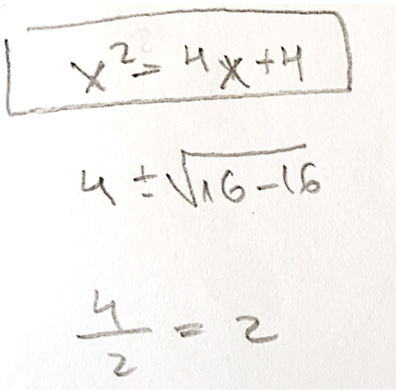
Figura 42 - Substituição do ponto (2,0) na função $g(x) = x^2 - 4$, encontrada pelo grupo A.

$$2^2 - 4.2 + 4 = 0$$
$$4 - 8 + 4 = 0$$
$$8 - 8 = 0$$
$$0 = 0$$

Fonte: Elaborada pelo grupo A, 2019.

O grupo D, por sua vez, utilizou-se da fórmula de Bhaskara para encontrar os zeros da função, como mostra a figura 43.

Figura 43 - Zeros da função $g(x) = (x-2)^2$



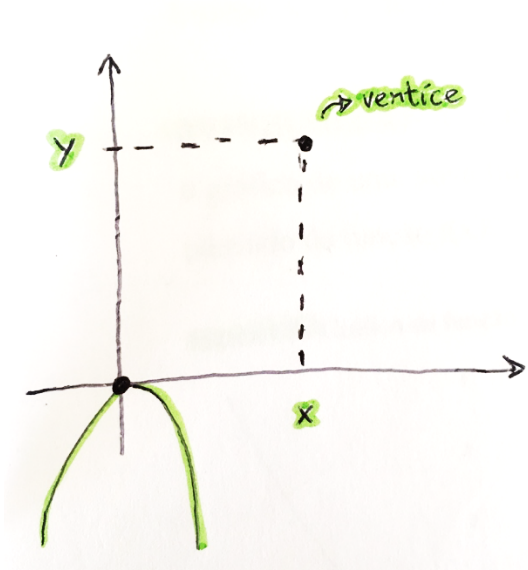
Fonte: Elaborado pelo grupo D, 2019.

O grupo C apresentou como hipótese para a solução dessa atividade, a função *f(x)* $= 2x^2 - 4$. Essa hipótese foi descartada, após as apresentações das funções encontradas pelos grupos A, B, e D e seus processos de validação.

Por fim, foi aplicada a ATIVIDADE 3, que tinha como objetivo, verificar se os processos de translação vertical e horizontal haviam sido compreendidos pelos grupos. Para isso, foi pedido que aos estudantes que, baseando-se nas ATIVIDADES 1 e 2, e desprezando os efeitos da resistência do ar, descrevessem, a partir da função $f(x) = -4{,}9.x^2$, a lei de formação do gráfico que representa a posição da bola de tênis em função ao tempo, em relação ao eixo y.

Após a leitura da atividade, observou-se um intenso diálogo entre os membros de dos grupos. Os grupos B e D, buscaram encontrar o vértice do gráfico apresentado no aplicativo, para verificar o deslocamento do gráfico em relação a origem dos eixos, tanto na horizontal quanto na vertical. Como exemplo, a figura 44 apresenta essa estratégia utilizada pelo grupo B.

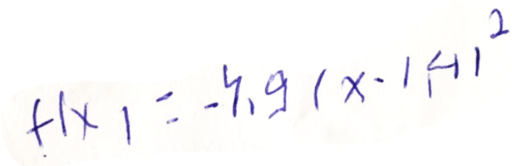
Figura 44 - Localização do vértice da função f(x) = -4,9x2, após a translação para o ponto (1,4;1,7).



Fonte: Elaborada pelo grupo B, 2019.

Como estratégia para encontrar a solução, o grupo B optou por realizar primeiro uma translação horizontal, seguida de uma translação vertical. Como pode-se observar na figura 45.

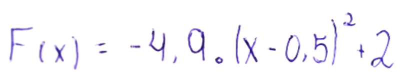
Figura 45 - Lei de formação da função h(x), após a translação horizontal para o ponto (1,4;0)



Fonte: Elaborada pelo grupo B, 2019.

O grupo C, por sua vez, escreveu a função completa, sem apresentar o passo a passo realizado pelo grupo B. Como mostra a figura 46.

Figura 46 - Lei de formação da função h(x), após a translação horizontal e vertical para o ponto (0,5; 2)



Fonte: Elaborada pelo grupo C, 2019.

As funções encontradas por cada grupo são apresentadas na tabela 15.

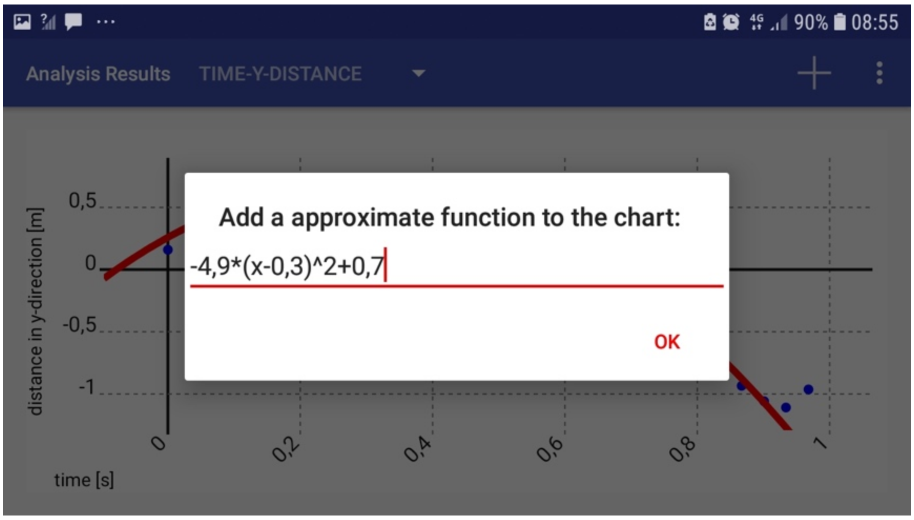
Tabela 15 - Funções encontrada na ATIVIDADE 3

GRUPO	ANÁLISES INICIAIS
A	$f(x) = -4{,}9(x - 0{,}33)^2 + 1{,}6$
B	$f(x) = -4{,}9(x - 1{,}4)^2 + 1{,}7$
C	$f(x) = -4{,}9(x - 0{,}5)^2 + 2$
D	$f(x) = -4{,}9(x - 0{,}3)^2 + 0{,}7$
E	$f(x) = -4{,}9(x - 0{,}5)^2 + 2$

Fonte: Elaborada pela autora

Em busca da validação, os grupos novamente inseriram a lei de formação da função no aplicativo, para que fosse gerado o gráfico. Destacou-se o exemplo do grupo D, como pode-se observar nas figuras 47 e 48.

Figura 47 - Lei de formação da função $f(x) = -4{,}9(x - 0{,}3)^2 + 0{,}7$



Fonte: Elaborada pelo grupo D, 2019.

Figura 48 - Gráfico da função f(x) = -4,9(x – 0,3)² + 0,7.

Fonte: Elaborado pelo grupo D, 2019.

Após uma hora e trinta minutos, os grupos finalizaram as três atividades e passou-se para a situação de institucionalização do conhecimento.

Vale lembrar que a situação de institucionalização visa "sistematizar os conhecimentos até então obtidos e favorecer a generalização do pensamento algébrico" (POMMER, 2013, p.40).

Desta maneira, foram apresentadas as seguintes generalizações dos dados produzidos pelos grupos:

Na ATIVIDADE 1 ocorreu uma translação vertical, visto que, o valor da abscissa permaneceu inalterado e o valor da ordenada sofreu uma variação de -4.

A translação vertical $(x,y) \to (x, y + k)$ transforma o gráfico da função f: R→ R no gráfico da função h: R→ R, tal que $h(x) = f(x) + k$ para todo x ∈ R. Sendo assim, transladando o vértice da função $f(x) = x^2$ para o ponto (0,-4) e sabendo que k = -4, obtém-se a seguinte função:

$$h(x) = f(x) + (-4)$$
$$h(x) = x^2 - 4 \qquad (25)$$

A validação apresentada aos grupos envolvia a descoberta dos zeros da função, (2,0) e (-2,0), através do cálculo:

$$h(x) = x^2 - 4 \qquad (26)$$
$$0 = x^2 - 4$$
$$0 = (x - 2).(x + 2), \text{ sendo assim}$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -2$$

E através da verificação do ponto que representa o vértice da parábola, a saber:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a} \qquad (27)$$

Já na ATIVIDADE 2, ocorreu uma translação horizontal, visto que, o valor da ordenada permaneceu inalterado e o valor da abscissa sofreu uma variação de -4. Aplicando a translação horizontal (x, y) $\rightarrow$ (x + m, y) ao gráfico da função f: R$\rightarrow$R, obtém-se o gráfico da função g: R$\rightarrow$R, tal que g(x) = f(x - m) para todo x $\in$ R. Portanto, transladando o vértice da função *f(x)* = x^2 para o ponto (2,0) e sabendo que *k* = 2, obtém-se a seguinte função:

$$g(x) = f(x - 2)$$

$$g(x) = (x - 2)^2 \qquad (28)$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 4 \qquad (29)$$

Por fim, na ATIVIDADE 3, partindo das funções encontradas pelos grupos apresentou-se a generalização de uma função quadrática em sua forma canônica, ou seja, em sua forma mais simples, como sendo

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v, \qquad (30)$$

onde (x_v, y_v) representa o vértice do gráfico da função *f(x)*.

5.2.1 Análise a *posteriori* da 2ª situação didática

É importante lembrar que o objetivo das análises a *posteriori* é o de “relacionar as observações com os objetivos definidos a *priori* e estimar a reprodutibilidade e, também, a regularidade dos fenômenos didáticos identificados” (ALMOULOUD, 2007, p. 177). A confrontação entre dados previstos durante a fase das análises a *priori*, com os dados obtidos através da experimentação desta segunda situação didática, são apresentadas a seguir.

Na ATIVIDADE 1, era esperado que, após realizarem a leitura, os grupos percebessem que o gráfico da função *f(x)* havia sido transladado para um ponto sobre o eixo y, ou seja, que o vértice da parábola que antes encontrava-se no ponto (0,0), encontrava-se, após a translação, no ponto (0, -4), provocando assim, uma variação na ordenada de -4.

Verificando as observações apresentadas pelos grupos, é possível visualizar que essa identificação ocorreu e que foi determinante para que, de maneira intuitiva, eles acrescentassem esse valor na função *f(x)* para encontrar a lei de formação da função *h(x).*

Sobre a situação de formulação, Apesar do conceito de translação vertical e horizontal terem sido explorados na primeira aplicação para funções afim, os grupos A e B demonstraram que não haviam relacionado esses conhecimentos para inferir sobre a lei de formação da nova função

$$h(x)= x^2 - 4, \qquad (31)$$

como se a translação em funções quadráticas seguisse regras diferentes das apresentadas para as funções afim.

Em relação à situação de validação, observou-se que os grupos utilizaram-se principalmente, de seus conhecimentos sobre como encontrar as raízes de equações do 2º grau, com o objetivo de encontrar os pontos por onde o gráfico cortava o eixo x, para validarem a função encontrada, porém, sem o cuidado de verificar se o ponto que correspondia ao vértice da parábola, pertencia ou não, à função.

Já na ATIVIDADE 2, esperava-se que os grupos constatassem que o gráfico da função *f(x)* havia sido transladado para um ponto sobre o eixo x. Somando-se a essa identificação, esperava-se que eles observassem que, após a translação do vértice da parábola para o ponto (2,0), havia ocorrido uma variação 2m, no eixo das abscissas.

Nas considerações feitas pelos grupos, é possível verificar que o grupo B, utilizou-se dos conhecimentos sobre translação vertical, adquiridos durante a aplicação da 1ª situação didática, para inferir sobre a lei de formação da função *h(x)*. Para além dessas observações, verificou-se que os grupos identificaram o valor da constante c e relacionaram o valor do Δ, com a abscissa do vértice.

Quanto à formulação da função, esperava-se que os grupos propusessem que a nova função h(x) fosse dada por $f(x - k)$, para todo x $\in$ R, sendo o valor de $k = 2$. Entretanto, apenas os grupos A, B e D apresentaram uma solução coerente, baseada nos conhecimentos adquiridos sobre translação horizontal.

No que concerne à validação, observou-se que os grupos se utilizaram da estratégia prevista nas análises a *priori* para a atividade, ou seja, encontraram os zeros da função e realizaram a substituição do ponto (2,0) na função para verificarem se ele pertencia ou não ao gráfico.

Por fim, na última atividade, era esperado que os grupos, baseando-se nas atividades realizadas e com o auxílio do gráfico e da tabela gerados pelo aplicativo, localizassem o ponto que representava o vértice da parábola e inferissem sobre a lei de formação da função *g(x),* após os operações de translação vertical e horizontal da função $f(x) = -4,9x^2$.

Conforme previsto nas análises a *priori*, observou-se que os grupos B, C e D buscaram localizar os valores das coordenadas do vértice, com o intuito de verificar quanto o gráfico da nova função iria afastar-se da origem. Em contrapartida, apesar de já terem realizados as operações de translação vertical e horizontal nas duas primeiras atividades, os grupos A e E, apresentaram dificuldades em buscar estratégias de solução para essa atividade. Para tanto, foi promovida a discussão entre os grupos, através da exposição das conjecturas levantadas pelos grupos B, C e D.

Para a situação de validação, esperava-se que os grupos se utilizassem do aplicativo *VidAnalysis* para encontrar uma curva que se encaixasse no conjunto de pontos gerados após a videoanálise.

Observou-se que o aplicativo foi utilizado não apenas para validar, mas como um meio de fazer ajustes na lei de formação encontrada, com o objetivo de encontrar a função que melhor representasse a posição da bola em função do tempo, em relação ao eixo y.

Essas observações permitem inferir que a situação didática proposta, parece consistente e coerente, e que possibilita o estudo de translação vertical e horizontal em funções quadráticas, através da videoanálise do movimento real do lançamento oblíquo de uma bola.

Na próxima seção, serão apresentados os dados compilados durante a fase de experimentação e as análises a posteriori da 3ª situação didática.

5.3 Experimentação da 3ª Situação didática

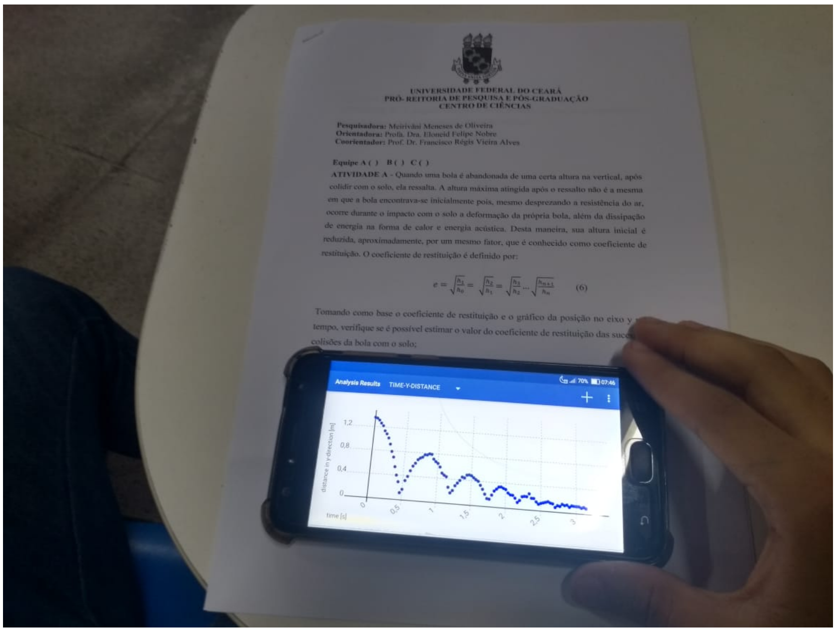
Para compor esta última situação didática, foram propostas aos 5 grupos, três atividades que permitiam o estudo de funções exponenciais através da videoanálise da queda livre de uma bola. Para tanto um vídeo, contendo esse movimento, foi disponibilizado através do aplicativo *whatsapp*, um dia antes da aplicação.

De posse desse vídeo, os grupos, utilizando-se do aplicativo *VidAnalysis*, realizaram a videoanálise do movimento da bola até ela parar. O intuito era o de obter gráficos e tabelas que possibilitassem a compreensão das seguintes atividades.

> **ATIVIDADE 1**. Quando uma bola é abandonada de uma certa altura na vertical, após colidir com o solo, ela ressalta. A altura máxima atingida após o ressalto não é a mesma em que a bola se encontrava inicialmente pois, mesmo desprezando a resistência do ar, ocorre durante o impacto com o solo a deformação da própria bola, além da dissipação de energia na forma de calor e energia acústica. Desta maneira, sua altura inicial é reduzida, aproximadamente, por um mesmo fator, que é conhecido como coeficiente de restituição. O coeficiente de restituição é definido por:
>
> $$e = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_3}{h_2}} \dots \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}} \qquad (32)$$
>
> Tomando como base o coeficiente de restituição e o gráfico da posição no eixo y pelo tempo, verifique se é possível estimar o valor do coeficiente de restituição das sucessivas colisões da bola com o solo;

Na figura 49 tem-se um dos diagramas gerados pelo aplicativo, após a videoanálise realizada pelo grupo D.

Figura 49 - Diagrama da posição da bola pelo tempo em relação ao eixo y.

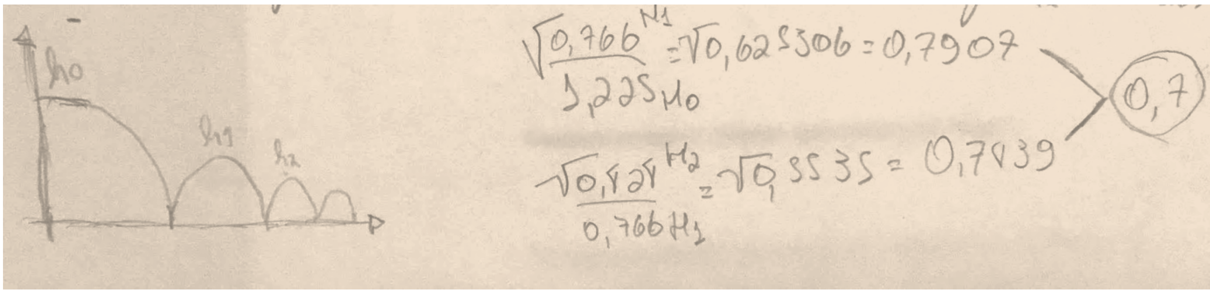


Fonte: Elaborada pelo grupo D, 2019.

Após a leitura da atividade, os grupos buscaram definir quais seriam as alturas iniciais e com o auxílio da tabela, gerada durante a videoanálise, buscaram encontrar um valor para o coeficiente de restituição.

Os cálculos apresentados pelo grupo C são mostrados na Figura 50.

Figura 50 - Cálculos para encontrar o coeficiente de restituição.



Fonte: Elaborada pelo grupo C, 2019.

Os valores encontrados por cada grupo são mostrados na Tabela 16.

Tabela 16 - Valores encontrados para o coeficiente de restituição.

GRUPO	COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO
A	0,72
B	0,66
C	0,7
D	0,7
E	0,7

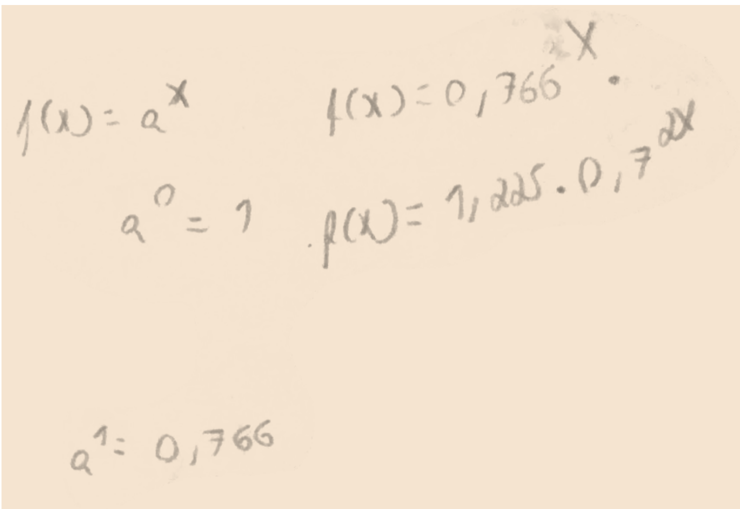
Fonte: Elaborada pela autora

A validação desses valores aconteceu juntamente com a validação da ATIVIDADE 2, que apresentou o seguinte texto:

> Partindo da definição de coeficiente de restituição apresentada na ATIVIDADE 1, verifique se é possível descrever a lei de formação da função que representa a altura da bola de tênis em relação ao número de colisões.

Nesta atividade, destacaram-se as estratégias utilizadas pelos grupos B e D. O grupo D, partindo do pressuposto de que as alturas da bola de tênis em relação ao número de colisões, eram descritas por uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, realizaram a substituição do ponto (1;0,766), com o objetivo de encontrar o valor da constante a, como pode ser observado na figura 51.

Figura 51 - Função que representa a altura da bola em relação ao número de colisões apresentado pelo grupo D

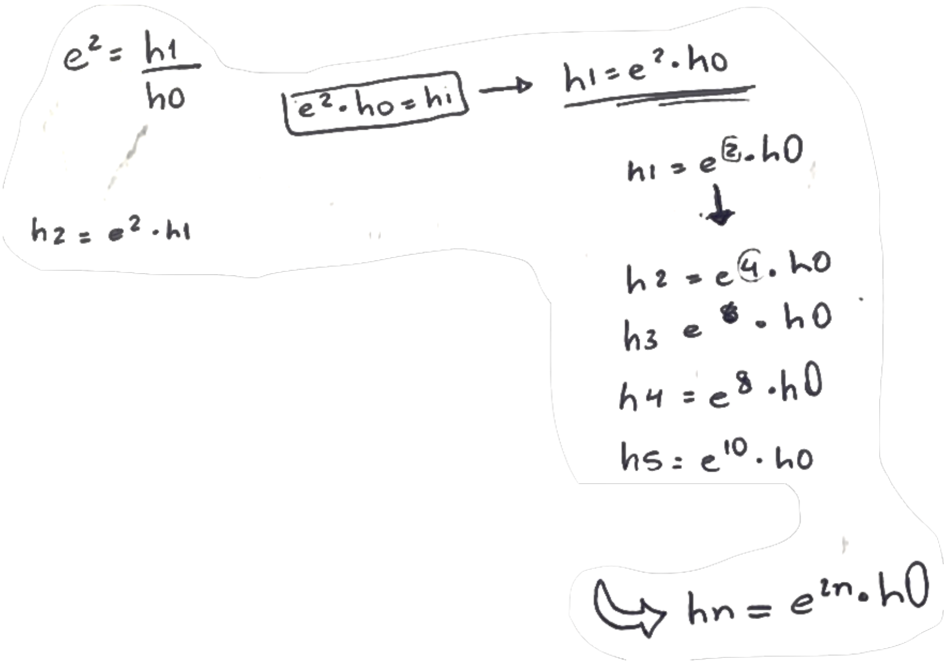


Fonte: Elaborada pelo grupo D, 2019.

Os ajustes na função foram realizados no momento em que o grupo inseriu a lei de formação no aplicativo, em busca da validação de suas hipóteses. Como pode-se observar na Figura 56, uma das alterações realizadas pelo grupo, foi a multiplicação do expoente *x* por 2.

Por sua vez, o grupo B partiu da definição, apresentada no enunciado da ATIVIDADE 1, para descrever a equação da função que representa a altura da bola de tênis em relação ao número de colisões. A Figura 52 apresentada o passo a passo realizado pelo grupo.

Figura 52 - Função que representa a altura da bola em relação ao número de colisões, apresentada pelo grupo B.



Fonte: Elaborada pelo grupo B, 2019.

O percurso apresentado pelo grupo B foi o mesmo previsto nas análises a *priori*.

Em contrapartida, os outros grupos A, C e E, só conseguiram apresentar uma solução para essa atividade, após a exposição das hipóteses, na situação de formulação, levantadas pelos grupos B e D. Essas funções são apresentadas na tabela 17.

Tabela 17 - Funções encontrada na ATIVIDADE 3

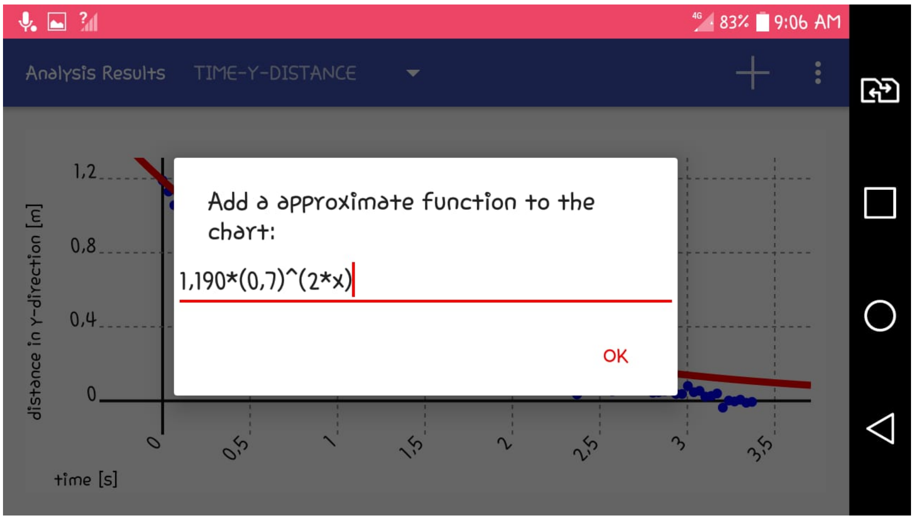
GRUPO	ANÁLISES INICIAIS
A	$h(n) = 1,2. (0,7)^{2n}$
B	$h(n) = 1,257. (0,7)^{2n}$
C	$h(n) = 1,363. (0,74)^{2n}$
D	$h(n) = 1,354. (0,7)^{2n}$
E	$h(n) = 1,190. (0,7)^{2n}$

Fonte: Elaborada pela autora

Para a validação dessas funções, os grupos substituíram os valores encontrados para o coeficiente de restituição e para a altura inicial e inseriram, no aplicativo *VidAnalysis*, as funções encontradas.

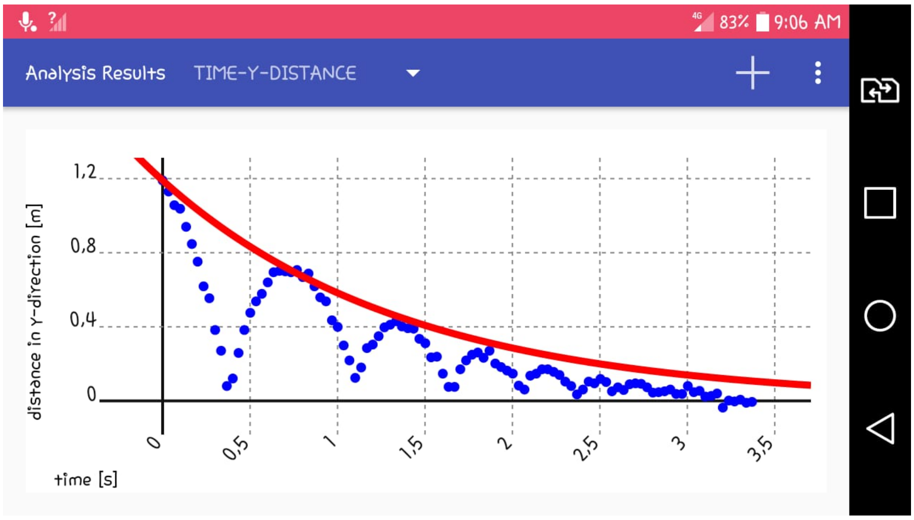
Na figura 53 é apresentada a lei de formação da função encontrada pelo grupo E e na figura 54, a curva, em vermelho, que passa pelas alturas máximas da bola a cada colisão com o solo.

Figura 53 - Lei de formação da função $h(n) = 1{,}190.\ (0{,}7)^{2n}$



Fonte: Elaborada pelo grupo E, 2019.

Figura 54 - Gráfico da função $h(n) = 1{,}190.\ (0{,}7)^{2n}$



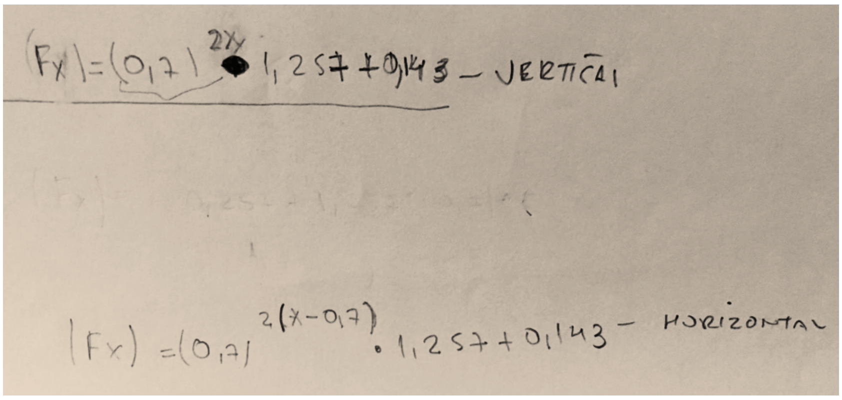
Fonte: Elaborada pelo grupo E, 2019.

Por fim, na última atividade dessa situação didática, os grupos foram questionados sobre se:

Após transladar o gráfico da função exponencial encontrada no item (b) para o ponto (0,7;1,4), é possível descrever qual seria a lei de formação dessa nova função?

Destacou-se a estratégia utilizada pelo grupo A, que realizou a translação do gráfico inicialmente para o ponto (0; 1,4) e posteriormente para o ponto (0,7; 1,4). Desta maneira, a escolha do grupo foi realizar primeiramente uma translação vertical, para em seguida realizar uma translação horizontal, como pode-se observar na figura 55.

Figura 55 - Processos de translação vertical e horizontal realizados pelo grupo A.



Fonte: Elaborada pelo grupo A, 2019.

O grupo D, por sua vez, optou por encontrar a lei de formação da nova função, através de alterações realizadas diretamente na função original.

As funções encontradas para a ATIVIDADE 3 dessa situação didática, encontram-se na tabela 18.

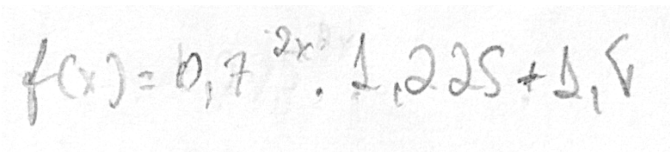
Tabela 18 - Funções encontrada na ATIVIDADE 3

GRUPO	ANÁLISES INICIAIS
A	$g(n) = 0{,}143 + 1{,}257.\ (0{,}74)^{2(n-0{,}7)}$
B	$g(n) = 0{,}086 + 1{,}314.\ (0{,}74)^{2n-1{,}4}$
C	$g(n) = 0{,}175 + 1{,}225.\ (0{,}7)^{2(n-0{,}7)}$
D	$g(n) = 0{,}1 + 1{,}3.\ (0{,}7)^{2(n-0{,}7)}$
E	$g(n) = 0{,}1 + 1{,}3.\ (0{,}7)^{2n-1{,}4}$

Fonte: Elaborada pela autora

Vale ressaltar que, durante a situação de formulação, o grupo C, apresentou como estratégia para a translação vertical, a mesma utilizada para as funções lineares e quadráticas, ou seja, eles adicionaram a função original, o valor da ordenada 1,4. A figura 56 apresenta essa função.

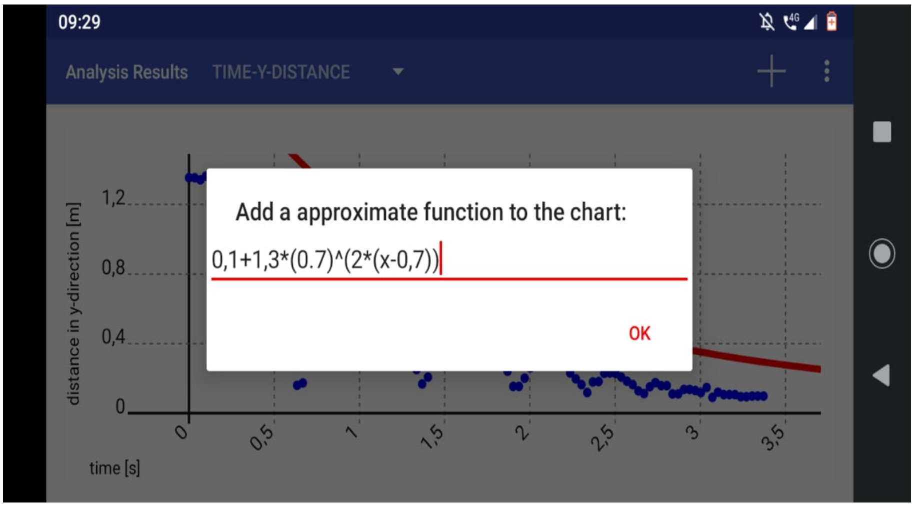
Figura 56 - Lei de formação para a função g(n), após a translação vertical para o ponto (0;1,4).



Fonte: Elaborada pelo grupo C, 2019.

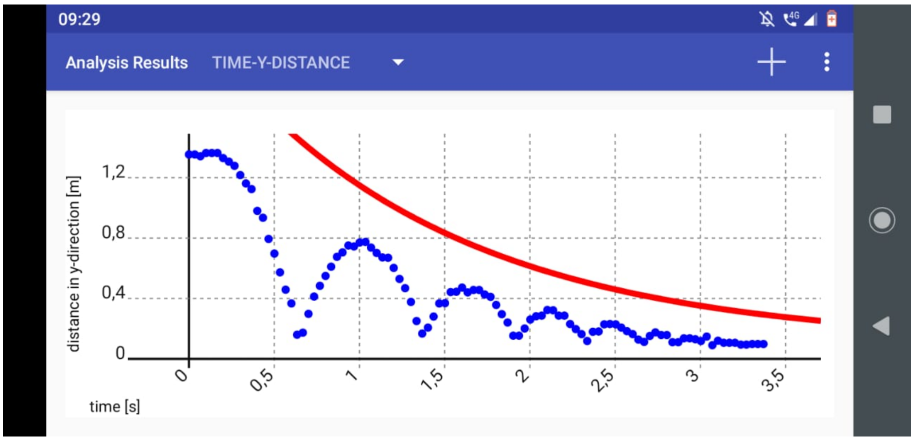
Para validarem suas funções, o grupo D, além de inserir no aplicativo as funções encontradas, substituiu o ponto (0,7;1,4) na função encontrada, como mostram as figuras 57, 58 e 59.

Figura 57 - Lei de formação da função $g(n) = 0,1 + 1,3.\ (0,74)^{2(n-0,7)}$



Fonte: Elaborada pelo grupo D, 2019.

Figura 58 - Gráfico da função $g(n) = 0{,}1 + 1{,}3.\ (0{,}7)^{2(n-0{,}7)}$



Fonte: Elaborada pelo grupo D, 2019.

Figura 59 – Substituição do ponto (0,7; 1,4) na função $g(n) = 0{,}1 + 1{,}3.\ (0{,}74)^{2(n-0{,}7)}$

Quando o x for 0,7 o y é 1,4

$$h_n = 0{,}1 + 1{,}3 \cdot (0.7)^{2\cdot(x-0{,}7)}$$

$$h_n = 0{,}1 + 1{,}3 \cdot 1$$

$$h_n = 1{,}4$$

Fonte: Elaborada pelo grupo D, 2019.

Resultados semelhantes foram encontrados pelos demais grupos.

5.3.1 Análise a posteriori da 3ª situação didática

De acordo com as análises a *priori*, esperava-se que os grupos, com o auxílio da tabela e do gráfico da posição pelo tempo em relação ao eixo y, identificassem as alturas máximas atingidas pela bola a cada ressalto. O objetivo era encontrar um valor para o coeficiente de restituição para que fosse utilizado na ATIVIDADE 2.

Os dados obtidos, através da experimentação, mostraram que os grupos A, C, D e E, não apresentaram problemas em identificar, no gráfico e na tabela, as alturas máximas atingidas pela bola a cada ressalto. Em contrapartida, o grupo B inferiu que, além dos pontos que representavam as alturas máximas, os pontos em que a bola tocava o chão, também representavam as alturas da bola. Este fato demonstra que o grupo não se atentou à característica máxima, dada as alturas. No entanto, o debate com os outros grupos permitiu a reflexão e consequentemente, a devida correção.

Para o cálculo do coeficiente de restituição, os grupos utilizaram-se dos seguintes métodos:

1ª – utilizando o diagrama da posição pelo tempo em relação ao eixo y, mostrada como exemplo na Figura 54, escolheram valores aproximados para as alturas máximas da bola;

2ª – utilizando o gráfico citado acima, contaram, partindo do início do movimento da bola, quantos pontos foram marcados até chegar nos pontos que representavam as alturas máximas. De posse da quantidade de pontos, utilizaram-se da tabela para localizar os valores das alturas.

A primeira estratégia foi utilizada pelos grupos D e E, enquanto a segunda estratégia foi utilizada pelos grupos A, B e C. Os cálculos, realizados por esses últimos grupos, possibilitaram que eles encontrassem valores mais precisos para o coeficiente de restituição.

Por sua vez, na segunda atividade, esperava-se que os grupos, partindo da definição de coeficiente de restituição, identificassem a relação existente entre a altura da bola e o número de ressaltos da bola.

O grupo D, apesar de não ter utilizado a definição apresentada no enunciado da atividade, utilizou-se da definição de função exponencial e da manipulação da lei de formação no aplicativo para encontrar a solução. Outro ponto observado, foi que o grupo, apesar de ter encontrado o valor da constante a, não conseguiu visualizar, inicialmente, que essa constante se tratava do coeficiente de restituição.

O grupo B, por sua vez, foi o único que, utilizando-se da definição de coeficiente de restituição, apresentada na ATIVIDADE 1, conseguiu chegar à lei de formação exigida, utilizando o aplicativo apenas para a validação. Em relação aos grupos A, C e E, observou-se que eles não sabiam ao certo o que fazer, optando então, por esperar o que os outros grupos iriam apresentar para chegar a solução do problema.

Por fim, na ATIVIDADE 3, era esperado que, após a leitura e análise do gráfico da posição pelo tempo em relação ao eixo y, os grupos identificassem que a bola sofreria um deslocamento horizontal de 0,7, no sentido positivo do eixo das abscissas, e de 1,4 no sentido positivo do eixo das ordenadas.

A identificação da altura inicial como ponto de partida para a translação vertical, foi realizada de maneira rápida, isto porque, todos os grupos haviam escolhido, no momento da videoanálise, o início do movimento da bola no ponto $(0, h_0)$.

Para a situação de formulação, os grupos, após a identificação da altura inicial, deveriam calcular a variação sofrida pela bola durante a translação vertical, além de, utilizando-se das estratégias utilizadas nas atividades anteriores, inferirem sobre a equação da função como sendo:

$$h_n = e^{2(n-0,7)}.h_0 + (1,4 - h_0), \qquad (33)$$

onde h_0 representa a altura inicial da bola e n, o número de colisões.

Durante a realização dessa terceira atividade, os grupos já demonstravam certa familiaridade com as operações de translação vertical e horizontal em funções, o que fez com que o grupo C, realizasse quase que automaticamente, a soma do valor da ordenada 1,4 na função

$$h_n = e^{2n}.h_0, \qquad (34)$$

sem considerar a variação sofrida pelo gráfico em relação ao valor da ordenada. Os ajustes na função foram realizados durante a fase de validação, quando o grupo inseriu no aplicativo a função para visualizar a translação do gráfico da função *h(n)* para o ponto (0,7;1,4).

A confrontação dos dados coligidos durante a fase de experimentação das três situações didática, apresentadas neste capítulo, com as análises a *priori*, permitiram inferir que elas podem ser reproduzidas em sala de aula, com um número maior de estudantes.

No próximo capítulo será apresentada as considerações finais desta pesquisa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Engenharia Didática amparada na teoria das Situações Didáticas permitiu uma organização da pesquisa em etapas bem definidas, a saber: Análises Preliminares, Análises a *Priori*, Experimentação e Análises a *Posteriori*/Validação.

A partir das análises preliminares, apresentadas no segundo capítulo, construiu-se a fundamentação teórica do objeto de estudo nas esferas epistemológica, institucional e didática, alcançando assim os dois primeiros objetivos dessa pesquisa.

Na epistemológica, percebeu-se que o desenvolvimento do conceito de funções estava intimamente ligado a atividade humana e sua busca por entender os fenômenos da natureza.

Na análise institucional, ficou evidente que as reformas ocorridas no currículo da Matemática e o desenvolvimento do conceito de função nos livros didáticos, no início do século XX, foram decorrentes das influências do o Internationale Mathematische Unterrichtskommission (IMUK), no Brasil; e que com a introdução do conceito de funções a partir da teoria dos conjuntos, seu ensino ficou cada vez abstrato e algébrico.

Por fim, nas análises didáticas observou-se que a busca por um currículo que atendesse aos anseios de uma sociedade em constante mudança, possibilitou não apenas alterações nas diversas leis que regulamentam a educação básica no Brasil, mas a promoção, no século XXI, de um ensino voltado para o desenvolvimento de competências e habilidades, através de metodologias que possibilitassem ao estudante um papel mais ativo no processo de construção de novos conhecimentos.

Partindo então desses estudos, organizou-se a segunda fase da Engenharia Didática, intitulada análises a *priori*, onde foram elaboradas três situações didáticas aliadas ao uso de um aplicativo de videoanálise, *VidAnalysis*, com o objetivo de explorar o conceito de funções lineares, quadráticas e exponenciais, através de experimentos simples, presentes no cotidiano dos estudantes, para se chegar ao trato algébrico. Propondo assim, um caminho inverso à metodologia que é comumente aplicada em sala de aula ou abordada em livros didáticos. Ainda nesta fase, foram feitas previsões acerca dos possíveis comportamentos dos estudantes em cada situação, conforme os pressupostos da TSD. Com as análises a priori, foi possível alcançar o terceiro objetivo dessa pesquisa.

Posteriormente à concepção das situações, passou-se para a fase da experimentação. Nesta fase, as situações foram aplicadas em sala de aula com 15 estudantes, que apropriaramse, principalmente, dos conceitos de translação horizontal e vertical em funções, através da mobilização de conhecimentos prévios sobre estes assuntos e da interação com os dados gerados, nos gráficos e tabelas, através da videoanálise, como ficou evidente nas situações de ação, formulação e validação descritas nas análises a *posteriori* do capítulo 4 desta dissertação.

Após a validação das estratégias elaboradas pelos grupos em cada aplicação, realizou-se a situação de institucionalização, tendo como ponto de partida as produções orais e escritas dos grupos, para se estabelecer um novo conhecimento matemático.

Por fim, as análises a *posteriori/validação*, que representam a última fase da Engenharia Didática, apoiaram-se nas análises a *priori* e nos dados obtidos durante a fase de experimentação, por meio de observações, das produções e das discussões dos grupos durante os encontros, buscando realizar a validação interna desta pesquisa.

Através dessas análises foi possível observar que o uso do aplicativo *VidAnalysis* contribuiu, não apenas para a coleta de dados de um movimento real, mas também, permitiu que os estudantes visualizassem gráficos e tabelas, elaborassem conjecturas e validassem suas respostas. Possibilitou, também, a percepção de erros que normalmente não seriam percebidos pelos estudantes, em situações de aprendizagem tradicionais. Além dessas observações, pode-se citar ainda que:

a) nas duas primeiras situações, os estudantes não conseguiram relacionar o movimento bidimensional da bola com os gráficos gerados pelo aplicativo em relação a cada eixo;
b) os grupos apresentaram dificuldades em, partindo de uma situação real, encontrar a lei de formação da função que representava o movimento, como exemplo, a ATIVIDADE 2, da terceira situação didática;
c) tanto a autonomia apresentada pelos estudantes, através da identificação e organização das informações durante a busca pelas soluções das atividades, quanto a metodologia utilizada, eram novidades para eles;
d) nas situações de validação, os próprios grupos conseguiram verificar a validade de suas respostas, através da interação com o aplicativo;
e) apesar de ter sido o primeiro contato dos estudantes com a videoanálise, eles não apresentaram dificuldades em realizá-la;
f) através da experimentação e da visualização dos gráficos e tabelas, os estudantes, apesar de já terem estudado as funções exploradas nas atividades, depararam-se com momentos de descoberta.

Essas observações reforçam que o ensino simplista de funções e baseado em uma linguagem fortemente algébrica, dificulta a percepção deste conceito em situações do dia a dia. E que, uma metodologia que privilegia a leitura e interpretação de gráficos de movimentos reais, apresentando as características algébricas como um complemento aos estudos feitos graficamente, possibilita um melhor entendimento do conceito de função por parte dos estudantes que se encontram ainda na educação básica. No entanto, é importante destacar que a aplicação de situações didáticas mediadas pela utilização de recursos tecnológicos exigirá do professor uma determinada dedicação metodológica.

Sendo assim, espera-se que este trabalho possa promover uma reflexão sobre a abordagem desses conteúdos e a importância de apresentá-los de maneira integrada a recursos tecnológicos e a outras áreas do conhecimento. Para tanto, foi elaborado um produto educacional composto de um site e um e-book, contendo quatro situações didáticas. Esse produto é apresentado no próximo capítulo.

7 PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo é apresentado o produto educacional elaborado a partir desta pesquisa.

Regulamentados por meio da Portaria Normativa nº17, de 28 de dezembro de 2009, e avaliados pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), os mestrados profissionais no Brasil indicam, como requisito obrigatório para a conclusão do curso, além da dissertação, o desenvolvimento de um produto educacional.

Um produto educacional “trata-se de um relato de experiência de implementação de estratégias ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino em uma área específica do conhecimento” (CAPES, 2012, p. 2). Neste sentido, o público-alvo destes produtos são, principalmente, futuros professores, professores e formadores de professores, tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior.

De acordo com Moreira e Nardi (2009, p.4), os produtos educacionais de mestrados profissionais tratam-se “do relato de uma experiência de implementação de estratégias ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino em uma área específica de Ciências ou Matemática”.

7.1 Smartmática

Como fruto dos resultados desta pesquisa, organizou-se um produto educacional composto por duas partes: um *e-book* e um site, com o objetivo de propor, aos professores de Matemática do Ensino Médio, quatro situações didáticas, que possibilitassem uma abordagem mais ampla de conceitos relacionados ao estudo de funções, por meio do aplicativo *VidAnalysis*.

O *e-book*, intitulado *Smartemática*, encontra-se dividido em sete capítulos. Logo no primeiro capítulo é realizada a apresentação da Engenharia Didática, como metodologia de pesquisa e a Teoria das Situações Didáticas, que embasou a elaboração das situações didáticas.

Para o segundo capítulo, buscou-se apresentar ao professor um pouco da história do surgimento da videoanálise e os cuidados que devem ser tomados ao se filmar o movimento de um objeto.

No capítulo seguinte apresenta-se, como exemplo de uma ferramenta que possibilita a videoanálise, o aplicativo *VidAnalysis*. Esse aplicativo foi escolhido, por ser de fácil manuseio, possuir uma versão gratuita para *Android*, além de gerar uma tabela e gráficos que representam as posições e as velocidades do objeto em função do tempo, em relação a cada eixo. Ainda neste capítulo, são detalhados os procedimentos para se realizar a videoanálise do movimento de um objeto através do aplicativo sugerido.

A partir do quarto capítulo, inicia-se a apresentação de quatro situações didáticas seguindo a sequência: funções lineares, quadráticas, exponenciais e trigonométricas. Todos os capítulos seguem basicamente a mesma estrutura, iniciando-se com as atividades que compõem as situações didáticas, seguidas do detalhamento das fases de ação, formulação, validação e institucionalização, descritas na TSD.

A primeira situação didática, apresentada no quarto capítulo, possibilita a abordagem e exploração de funções lineares. Composta de quatro atividades, ela permite que os professores, através da análise do lançamento oblíquo de uma bola de tênis, explorem as operações de translação vertical e horizontal, o conceito de taxa de variação e o encontro da lei de formação de uma função, através da análise do lançamento oblíquo de uma bola.

No quinto capítulo, dando continuidade à análise do lançamento oblíquo de uma bola, é apresentada a segunda situação didática, composta por três atividades, que possibilitam a exploração de translação vertical e horizontal em funções quadráticas.

No capítulo seguinte é proposta uma situação didática, composta de três atividades, que possibilita a exploração de funções exponenciais, por meio da análise das sucessivas alturas que uma bola de tênis atinge ao tocar o solo até o seu repouso.

Nessas atividades os professores poderão reforçar as transformações ocorridas no gráfico, por meio da translação vertical e horizontal em função exponenciais, além de proporcionar aos estudantes, a ampliação dos seus conhecimentos sobre funções exponenciais, por meio da exploração de funções do tipo $f(x) = ka^x + b$.

Por fim, no sétimo capítulo, é apresentada a última situação didática. Composta de duas atividades, essa situação didática possibilita o estudo de funções trigonométricas do tipo $f(x) = a.cos(bx+c) + d$, por meio do movimento do brinquedo chamado *Hand Spinner*. A exploração dessas atividades permite, principalmente, que o estudante relacione os coeficientes da função com o movimento do brinquedo.

A segunda parte deste produto, é um site que está hospedado com o seguinte domínio: *https://sites.google.com/view/smartmatica*. Nele, os professores poderão fazer o download tanto do e-book, quanto dos vídeos sugeridos para cada situação didática.

No site ainda é possível encontrar sugestões de outros movimentos simples, como por exemplo, o lançamento de um foguete com palitos de fósforo, o movimento do pneu de uma bicicleta, além de indicações de leituras, sugestões de outros aplicativos para a realização da videoanálise em tablets e desktops e de tutoriais sobre esses aplicativos sugeridos.

Ressalta-se aqui que não é função desta pesquisa esgotar a abordagem de funções por meio das situações apresentadas, o que empobreceria o estudo de funções, mas propor uma metodologia que possibilite a participação ativa do estudante e consequentemente, o papel de mediador ao professor, através de situações didáticas mediadas por um aplicativo, como meio de explorar funções e inserir as tecnologias de informação e comunicação em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lucia; SILVA, Maria José Ferreira da; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e estudantes**. 2004. Disponível em:< http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf > Acesso em: 06 de jun de 2018.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **PCM debate Engenharia Didática de Segunda Geração**, Jornal da UEM, Paraná, 2011. Jornal 102. Disponível em:< http://www.jornal.uem.br/2011/index.php/edicoes-2011/88-jornal-102-outubro-2011/781-pcm-debate-engenharia-didatica-de-segunda-geracao> Acesso em: 06 de jun de 2018.

ALMOULOUD, Ag Saddo. **Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações problemas: aspectos teóricos e metodológicos**. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 11, no 2, 109 – 141, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p109. Acesso em: 06 de jun de 2019.

ALVES, Francisco Régis Vieira. **Situação Didática Olímpica (SDO): Aplicações da Teoria das Situações Didáticas para o ensino de olimpíadas**. 2018. No prelo.

ARAÚJO, Francisco Adeil Gomes. **O Uso de Aplicativos de Smartphones no Ensino de Mecânica,** UECE, 2018. Disponível em:< https://www.researchgate.net/publication/325530945_O_Uso_de_Aplicativos_de_Smartphones_no_Ensino_de_Mecanica> Acesso em: 06 de jun de 2019.

ARTIGUE, Michèle. Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: Um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El lugar de la didáctica em la formación de professores, 1.ed, Bogotá, 1995. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf >. Acesso em: 06 de jun de 2018.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 19 de dez. 2019.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Secretaria de Educação Fundamental - Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental - Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> Acesso em: 21 de fev de 2019.

BRASIL, **Brasil no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros**, OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. — São

Paulo : Fundação Santillana, 2016. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf> Acesso em: 18 de out de 2019.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. IN: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução de: Maria José Figueiredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996a.p.55

BROUSSEAU, Guy. **Des dispositifs Piagétiens... aux situations didactiques**, *Éducation et didactique* [En ligne], vol. 6 - n° 2, outubro de 2012. Disponível em:< http://journals.openedition.org/educationdidactique/1475>. Acesso em: 13 de jan de 2019.

CAMPOS, Tânia M. M.; NUNES, Terezinha. **Tendências Atuais do Ensino e Aprendizagem da Matemática.** Em aberto, Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun. 1994.

CARDOSO, Virgínia Cardia. **Resenha: SKOVSMOSE, O. Educação Matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001, Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM**, jun. 2017. Disponível em: <http://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/download/457/183>. Acesso em: 08 de março de 2019.

CHAGAS, Elza Marisa Paiva de Figueiredo. **Educação Matemática na sala de aula: Problemáticas e Possíveis soluções**. Revista da Associação dos Professores de Matemática. 2003. Brasil. Disponível em: < http://www.ipv.pt/millenium/Millenium29/31.pdf >. Acesso em: 06 de junho de 2018.

COSTA, Nielce M. Lobo da. **História da Trigonometria**. Belém, 2009. Disponível em: < https://pt.scribd.com/document/19944056/A-HISTORIA-DA-TRIGONOMETRIA >. Acesso em: 06 de jun de 2018.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. "**Como ensinar matemática hoje?"** In: Temas & Debates. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Ano II, nº 2, 1989 Disponível em: < https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1953125/mod_resource/content/1/%5B1989%5D%20DAMBROSIO%2C%20B%20%20Como%20Ensinar%20Matem%C3%A1tica%20Hoje.pdf > Acesso em: 06 de junho de 2018

DASSIE, Bruno Alves. **Os primeiros livros didáticos no Brasil denominados de *matemática***. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, 2011. Disponível em: < https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/324/1/CIAEM_2011_DASSIE.pdf >. Acesso em: 06 de junho de 2018.

DEVAL, Juan. **Adaptação e Equilibração.** Revista Nova Escola, 2011. Disponível em: < https://novaescola.org.br/conteudo/1351/adaptacao-e-equilibracao>. Acesso em: 06 de junho de 2018.

DOUADY, Régine. Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: Um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. **Nacimiento y desarrolho de las matemáticas em Francia: rol de los IREM.** 1.ed, Bogotá,

1995. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf >. Acesso em: 06 de jun de 2018.

ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição, **Nicolas Bourbaki e o Movimento Matemática Moderna**, Revista de Educação, Ciências e Matemática v.2 n.3 set/dez, 2012. Disponível em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/1865/1085> Acesso em: 18 de jan de 2019.

GEEM. **Assuntos mínimos para um moderno programa de matemática para o ginásio**. In: _____. Matemática moderna para o ensino secundário. Série Professor n. 1, 1a edição, São Paulo, SP: GEEM, 1962.

GEEM. **Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de matemática**. In: ______. Matemática moderna para o ensino secundário. Série Professor n. 1, 2a edição, São Paulo, SP: GEEM, 1965.

GODOY, Elenilton Vieira. **A Matemática no Ensino Médio – a trajetória Brasileira desde a década de 80 e as organizações curriculares de outros países**. **Práxis Educacional**, [S.l.], v. 6, n. 9, p. 77-100, dez. 2010 Disponível em:< http://periodicos2.uesb.br/index.php/praxis/article/view/635 > Acesso em: 08 de fev de 2019.

LABORDE, Colette. **Affronter la complexité des situations d´apprentissage des mathématiques en classe: Défis et tentatives**. DIDASKALIA, Grenoble, v. 10, n. 1, p. 97-112, 1997.

LAVORENTE, Carolina Riego. **A Matemática Moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008. Disponível em: < http://livros01.livrosgratis.com.br/cp075032.pdf >. Acesso em: 06 de jun de 2018.

LIAO, Tarliz. **Um estudo bibliográfico sobre a concepção mecanicista, o Movimento Bourbaki e a Matemática Moderna**, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: < http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/matematica/0012.html >. Acesso em: 06 de junho de 2018.

LOPES, M. L. M. L. **GEPEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.** Em Aberto, Brasília, ano 14, n.62, abr/jun. 1994. Disponível em: <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/download/1969/1938 > Acesso em: 19 de jan de 2019.

MARQUES, Alex Sandro. **Tempos Pré-Modernos: A Matemática Escolar dos Anos 1950**, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005. Disponível em :< https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10926 > Acesso em: 20 de jan de 2019.

MOREIRA, M. A.; NARDI, R. O mestrado profissional na área de ensino de Ciências e Matemática: Alguns esclarecimentos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 2, n. 3, p. 1-9, 2009. Disponível em :< https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/549/398> Acesso em: 11 de out de 2019.

NCTM. **An Agenda for Action**. Recommendation for schools Mathematics of the 1980s. 1980, EUA. Disponível em:

<https://www.nctm.org/flipbooks/standards/agendaforaction/html5/index.html> Acesso em: 09 de fev de 2019.

NCSM. **Position paper on basic mathematical skills**, 1978. Disponível em: http://midcentral-coop.org/uploads/Basic%20Skills%20Position%20Paper.pdf. Acesso em: 09 de fev de 2019.

NOVAES, B. W. D., PINTO, N. B. e FRANÇA, I. S. **Estruturalismo e Matemática Moderna: dilemas e implicações para o ensino**. 2008. Disponível em: < https://estruturalismo.files.wordpress.com/2013/01/estruturaliismo-e-matemc3a1tica-moderna-dilemas-e-inplicac3a7c3b5es-para-o-ensino.pdf>. Acesso em 06 de jun de 2018.

OCDE, (2016). Results from PISA 2015. **Principais Resultados: Brasil**. Paris: OCDE Publishing. Disponível em: < http://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil-PRT.pdf>. Acesso em: 06 de jun de 2018.

OLIVEIRA, Alexandre Souza de. **Os livros didáticso de Matemática como fontes de pesquisa: similaridades e diferenças dentro de um contexto histórico-cultural.** Universidade Bandeirante de São Paulo, 2010. Disponível em :<http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe6/anais_vi_cbhe/conteudo/file/709.pdf> Acesso em: 20 de jan de 2019.

OLDKNOW, A. **Mathematics from still and video images**. Micromath Summer.2003. Disponível em: <https://www.mah.se/pages/74006/video1.pdf>. 30-34. Último acesso em: 17 de fevereiro de 2017. Revista do Professor de Física • Brasília, vol. 2, n. 2 • 2018

PIRES, R. C. **A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**, 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11211> Acesso em: 06 de jun de 2018.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**, São Paulo, 2013. Disponível em:<http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro%20Eng%C2%AA%20Did%C3%A1tica%202013.pdf > Acesso em: 06 de jun de 2018.

PONTE, João Pedro. The history of the concept of function and some educational implications. **Mathematics Educator**, v.3, n.2, p.3-8, 1992. Disponível em :< https://pdfs.semanticscholar.org/80db/007da68b6884b686890c1ba58f21800ed647.pdf> Acesso em: 27 de jan de 2019.

QUEIRÓZ, Vanessa. **A Lei nº 5692/71 e o Ensino de 1º Grau: Concepções e Representações,** 2013. Disponível em:< http://educere.bruc.com.br/CD2013/pdf/8356_5796.pdf>. Acesso em: 08 de fev de 2019.

RAMOS, Maria Aparecida Roseane. **TK006 - O Conceito de função: de Leibniz a Riemann.** Disponível em :<https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/view/61/52> Acesso em: 27 de jan de 2019.

SCHUBRING, G. **O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos.** Zetetiké, v. 7, n. 11, jan./jun.1999. Disponível em: <file:///C:/Users/Usu%C3%A1rio/Downloads/8646833-20925-1-PB.pdf>. Acesso em: 06 de jun de 2018.

SILVA, Enildo Barbosa das Chagas. **Aplicações do GeoGebra no ensino das Funções Polinomiais de Primeiro e Segundo Grau**. São Luís, 2018. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=161041889> Acesso em: 06 de junho de 2018.

SILVA, Maria José Ferreira da; ALMOULOUD, Saddo Ag. **Didática e Teoria das Situações Didáticas em Matemática**. Disponível em: <http://www4.pucsp.br/pensamentomatematico/TSDMF4_Brousseau_2006.pdf>. Acesso em : 10 de jan de 2019.

SOUTO, F. C. F.; GUÉRIOS, E. C.; **O Ensino de Matemática e a Resolução de Problemas Contextualizados nos anos iniciais do Ensino Fundamental,** 2017, Paraná. Disponível em :< http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/280/182>. Acesso em: 08 de fev de 2019.

TEIXEIRA. P. J. M.; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau**. Zetetiké – FE/Unicamp, v. 21, n. 39, p. 155-168, 2013. Disponível em: <8646602-Texto do artigo-20683-1-10-20160923.pdf> Acesso em : 10 de jan de 2019.

TRIPOLI, Taluza Alves. **A Matemática escolar no início do século XX: uma análise de livros didáticos da década de 1930**. Bauru, 2005. Disponível em: < http://www.stavale.com/monografia_jacomo_stavale.pdf>. Acesso em: 06 de jun de 2018.

VALENTE, W. R., Org. **Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno.** / São Paulo: Annablume; Brasília: CNPq; Osasco: GHEMAT, 2008. Disponível em :<https://books.google.com.br/books?id=1WpZ23drw2IC&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false> Acesso em: 20 de jan de 2019.

VALENTE, Wagner R, **Livros Didáticos de Matemática e as Reformas Campos e Capanema**, 2003. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/15/PA04.pdf> Acesso em: 13 de jan de 2019.

VALENTE, Wagner Rodirigues. **Euclides Roxo e a História da Educação Matemática no Brasil.** Revista Iberoamericana de Educación Matematica. 2005. p. 89-94. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160510>. Acesso em: 06 de jun de 2018.

VÁZQUEZ, S.; REY, G.; BOUBÉE, C.; **" El concepto de función a través de la Historia",** Revista Iberoamericana de Educación Matemática; v. 4. n.16, p. 141-151, dez. 2008. Disponível em <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf> Acesso em: 06 de junho de 2018.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The concept of function up to the middle of the 19th Century**. Archive for History of Exact Sciences, v.16, n.1, p.37-85, 1976. Disponível em :https://vdocuments.mx/youschkevitchthe-concept-of-function-up-to-the-middle-of-the-19th-century.html. Acesso em: 27 de jan de 2019.

APÊNDICE A – O APLICATIVO *VIDANALYSIS*

Para esta pesquisa foram elaboradas três situações didáticas, tendo o aplicativo *VidAnalysis* como recurso auxiliar para o estudante, com o objetivo de introduzir novos conhecimentos sobre funções matemáticas.

Desta maneira, nesta seção são apresentadas as orientações básicas para o processo de filmagem do movimento de um objeto, a interface do aplicativo, bem como todo o processo de videoanálise.

Orientações para filmar o movimento de um objeto

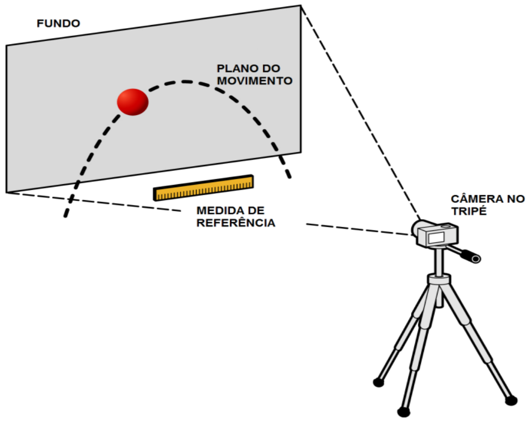
A videoanálise foi utilizada pela primeira vez, no final do século XIX, por um fotógrafo inglês chamado Eadweard Muybridge. De acordo com Araújo (2018, p.32), este fotográfo "queria tirar uma dúvida que pairava na época sobre o galope de um cavalo. Havia dúvidas sobre se os cavalos levantavam todas as patas ao mesmo tempo durante um galope".

Durante o experimento, o fotógrafo utilizou várias câmeras e obteve 24 fotografias em rápida sucessão e de diferentes momentos. Entre as fotos, ele capturou uma fotografia que comprovou que o cavalo realmente tirava as quatro patas do chão. (ARAÚJO, 2018, p.32)

A partir do ano de 2008, por meio do desenvolvimento do software Tracker e dos avanços das tecnologias digitais e móveis, a videoanálise passou a ganhar espaço na sala de aula, possibilitando a análise do movimento de um objeto, por meio de experimentos simples. No entanto, deve-se tomar alguns cuidados ao se gravar o vídeo.

Primeiramente, o ambiente deve estar bem iluminado. Após escolhido o ambiente, a câmera (*tablet/smartphone*) deverá estar fixada e localizada em um plano perpendicular ao plano do movimento, como se pode observar na figura 60.

Figura 60 - Câmera perpendicular ao plano do movimento.



Fonte: Copyright Vernier Software &Technology LLC, 2019

Outro cuidado que se deve tomar é em relação à distância da gravação. O vídeo deve ser gravado o mais próximo possível do movimento, porém toda a trajetória seguida pelo objeto deve estar contida nele, buscando-se sempre reduzir os efeitos de perspectiva e paralaxe (Oldknow, 2008).

Por fim, deverá existir algum objeto no experimento de tamanho conhecido, como por exemplo, uma régua, para tomar como referência. Este objeto deverá estar no mesmo plano do movimento. Tomados todos os devidos cuidados, o experimento estará pronto para ser filmado.

Interface do aplicativo *VidAnalysis*

VidAnalysis é um aplicativo de videoanálise austríaco que permite a análise do movimento de um objeto. Foi desenvolvido no ano de 2014 por Richard Sadeck, que na época estava finalizando o Ensino Médio.

O aplicativo encontra-se disponível para smartphones com sistema operacional Android, em duas versões, um grátis e outro pago.

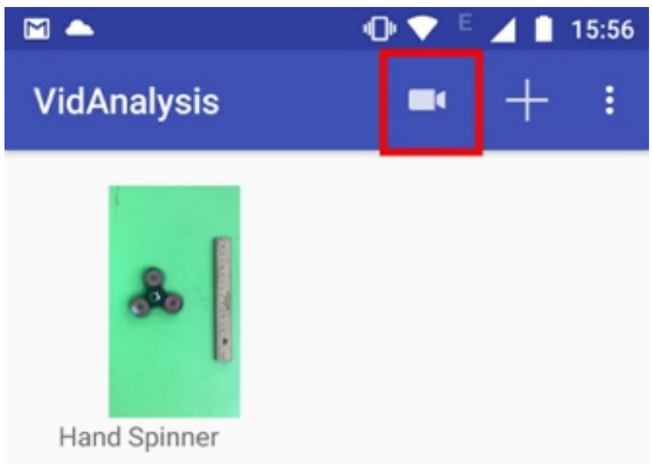
Figura 61 - Aplicativo VydAnalysis

Fonte: https://apprecs.com/android/com.vidanalysis.free/vidanalysis-free

Com sua interface gráfica simples e com poucas ferramentas, o aplicativo permite, de maneira fácil e rápida obter a posição, velocidade e aceleração de um objeto em movimento, seguindo de maneira resumida os seguintes passos:

1. Filmar ou utilizar um vídeo já disponível em seu celular. Para filmar o movimento de um objeto através de seu celular, basta clicar no aplicativo e em seguida no ícone de uma câmera, situada no canto superior direito de sua tela.

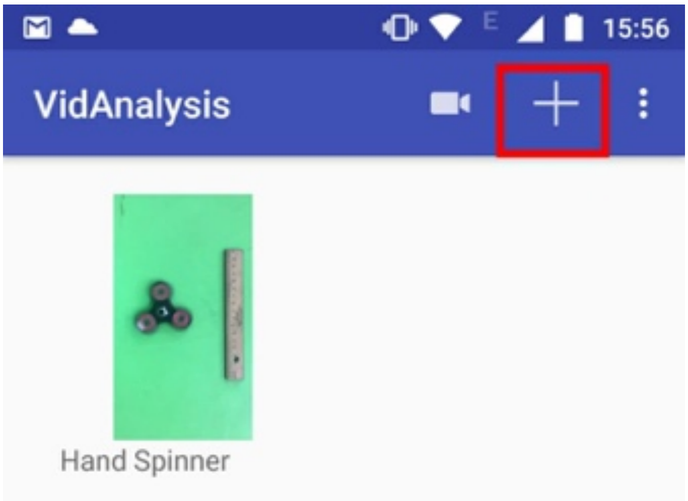
Figura 62 - Localização do ícone do acesso a câmera do celular por meio do aplicativo VidAnalysis



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

Ao utilizar um vídeo já disponível no celular, clique no aplicativo no ícone +, situado no canto superior direito da sua tela e selecionar o vídeo.

Figura 63 - Localização do ícone + através do aplicativo VidAnalysis.



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

Observação 1: caso a opção seja a de filmar o movimento de um objeto, deve-se seguir as recomendações feitas no item 2.3.1.

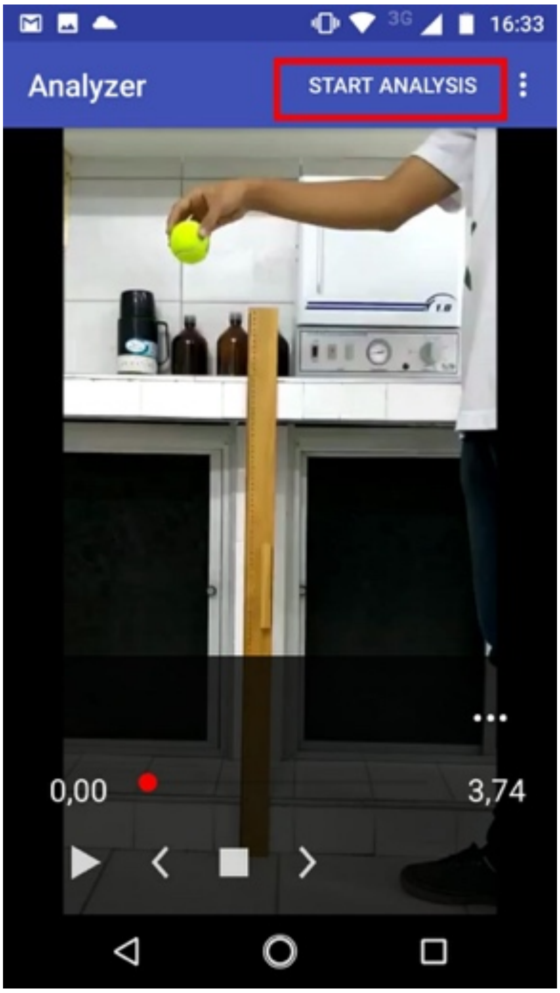
Observação 2: os vídeos adicionados/filmados serão exibidos na tela inicial do aplicativo. Para realizar a videoanálise de algum desses vídeos, basta clicar no vídeo escolhido e em seguida na opção *Start Analysis.*

Observação 3: para entrar em contato com o suporte do aplicativo, basta clicar nos três pontos localizados no canto superior direito de sua tela, logo após o ícone +, em seguida na palavra *help*.

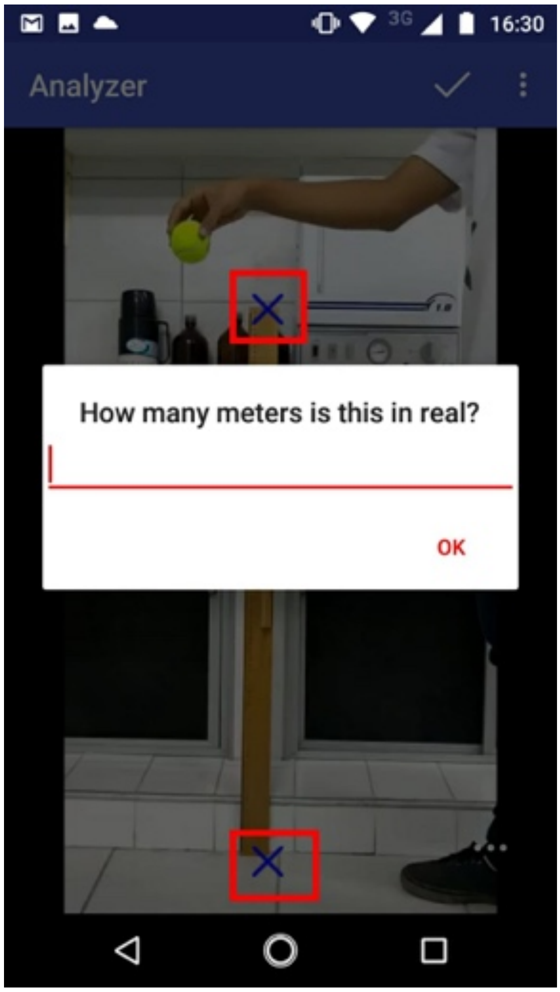
2. Definir um referencial. Após selecionar o vídeo que será utilizado para a videoanálise, deve-se clicar em *START ANALYSIS*, que aparece no canto superior direito da tela do *smartphone*, em seguida clicar nas extremidades do objeto de tamanho conhecido, que foi escolhido como referencial. Após essa marcação, deve-se inserir o tamanho real desse objeto em metros, mostradas nas figuras 64a e 64b.

Figura 64 - (a) Localização da frase START ANALYSIS (b) Marcação das extremidades do objeto conhecido e a indicação do seu tamanho real.

(a)



(b)

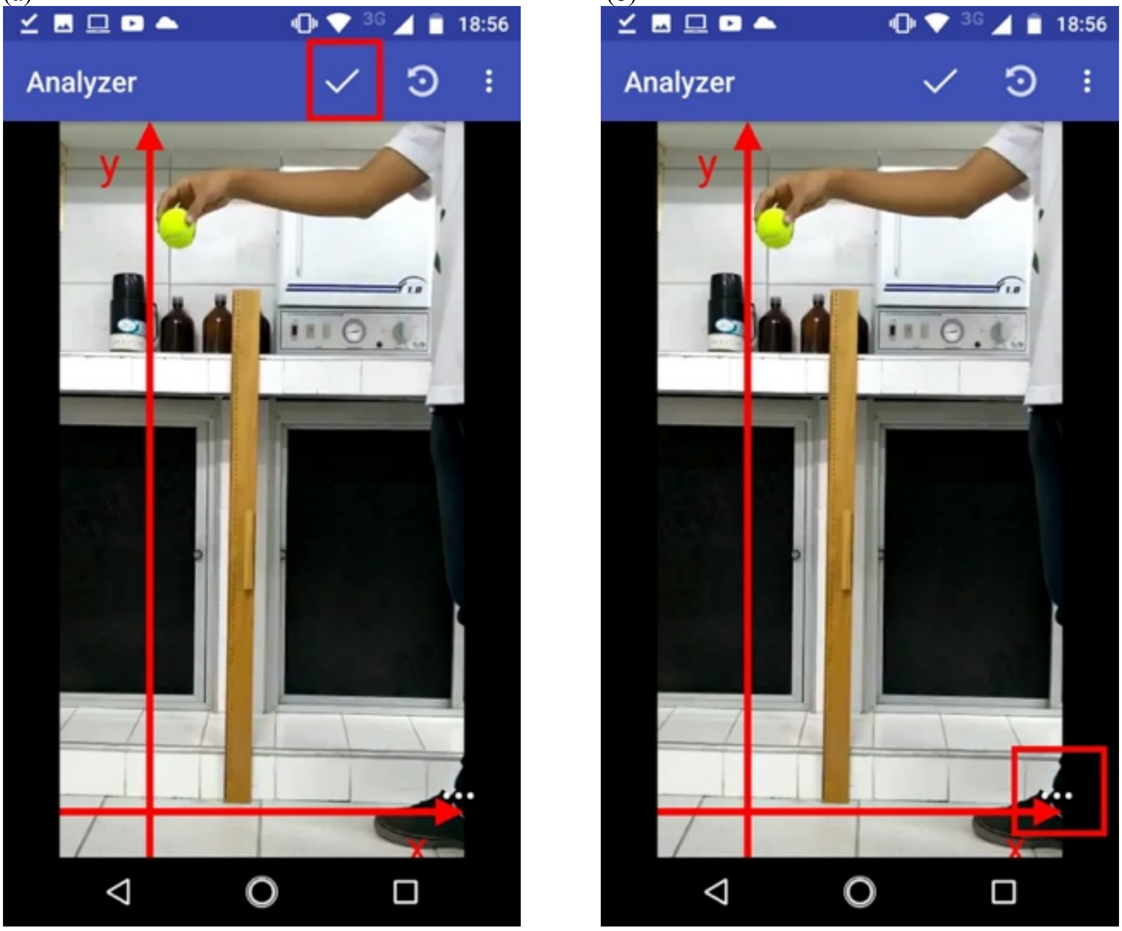


Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

3. Escolher a origem do movimento. Após inserir o tamanho do referencial, surge na tela os eixos x e y, para que possa ser definida a origem do movimento do objeto. Definida a origem, deve-se clicar no ícone em destaque apresentado na figura 65a, e em seguida, nos três pontos que aparece em sua tela, situados no canto inferior direito para que seja iniciado o processo de marcação dos pontos (65b).

Figura 65 - (a) Ícone de confirmação da escolha do eixo (b) Três pontos.

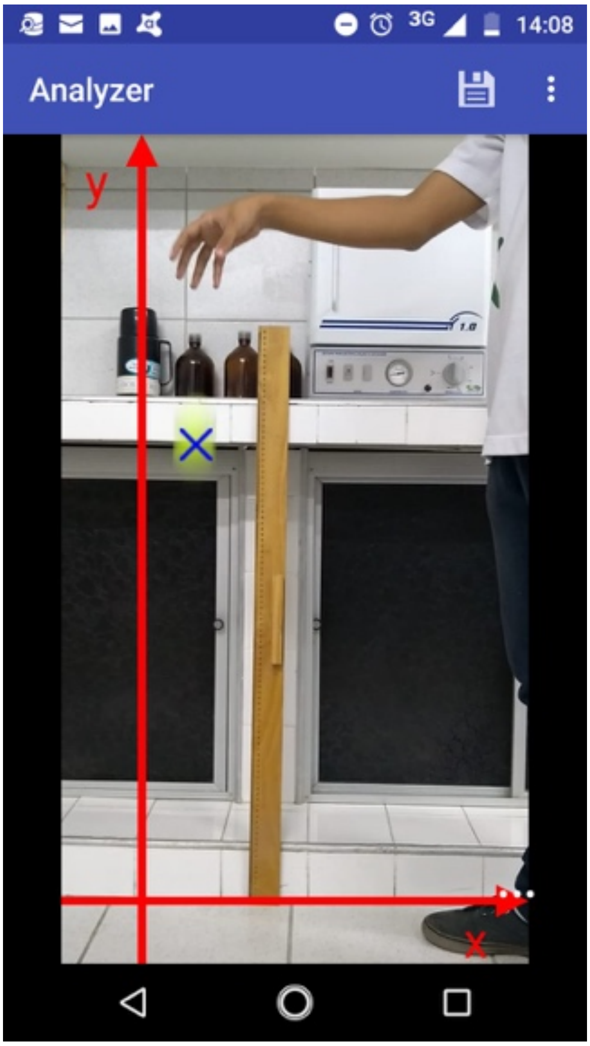
(a) (b)



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

4. Marcar os pontos por onde o objeto passou. Para que os dados gerados, através do processo de videoanálise, representem o movimento real do objeto, é extremamente importante que os pontos marcados durante a trajetória da bola sejam marcados, o mais próximo possível, da posição do objeto no vídeo. Para ajudar na marcação desses pontos, o aplicativo permite que você pause o vídeo no momento em que o objeto inicia seu movimento, fazendo com que ele se movimente somente após a marcação de cada ponto (Figura 66).

Figura 66 - Marcação dos pontos por onde o objeto passou.



Fonte: Gerada pelo aplicativo VidAnalysis

5. Diagramas e tabela. Após esse procedimento, o aplicativo fornecerá cinco diagramas: o diagrama do tempo em função da distância, o da velocidade em função do tempo para os eixos x e y; a distância em função do tempo também para cada eixo e uma tabela.

Com os pontos apresentados nos diagramas, é possível explorar o conceito de função. No caso desta pesquisa o conceito será explorado através de situações didáticas e o uso deste aplicativo.