



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AGRÍCOLA

JÚNIO MOREIRA DE ALENCAR

MODELAGEM DA DINÂMICA INTERATIVA RIO-AQUÍFERO PARA
REGIÃO SEMIÁRIDA DE DADOS ESCASSOS

FORTALEZA

2019

JÚNIO MOREIRA DE ALENCAR

MODELAGEM DA DINÂMICA INTERATIVA RIO-AQUÍFERO PARA REGIÃO
SEMIÁRIDA DE DADOS ESCASSOS

Tese apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Agrícola. Área de concentração: Manejo de Bacias Hidrográficas no semiárido.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Ribeiro Mendonça.

Coorientador: Prof. Dr. Sávio de Brito Fontenele.

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A353m Alencar, Júnio Moreira de.

Modelagem da dinâmica interativa rio-aquífero para região semiárida de dados escassos / Júnio Moreira de Alencar. – 2019.

94 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências Agrárias, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Luiz Alberto Ribeiro Mendonça.

Coorientação: Prof. Dr. Sávio de Brito Fontenele.

1. Processos hidrológicos. 2. Onda cinemática. 3. Infiltração. 4. Fluxo subterrâneo. 5. Equação Diferencial.
I. Título.

CDD 630

JÚNIO MOREIRA DE ALENCAR

MODELAGEM DA DINÂMICA INTERATIVA RIO-AQUÍFERO PARA REGIÃO
SEMIÁRIDA DE DADOS ESCASSOS

Tese apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Agrícola. Área de concentração: Manejo de Bacias Hidrográficas no Semiárido.

Aprovada em: 20 de dezembro de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Alberto Ribeiro Mendonça (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Sávio de Brito Fontenele (Coorientador)
Faculdade Paraíso (FAP)

Prof. Dr. Francisco Dirceu Duarte Arraes
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano (IFSERTÃO-PE)

Prof. Dr. Wilami Teixeira da Cruz
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Vicente Helano Feitosa Batista Sobrinho
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

A Deus.

Aos meus pais, Cícero e Marli.

A minha esposa, Aline.

Aos meus filhos, Isabela e Daniel.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por tornar possível esse passo importante na minha vida. Sou verdadeiramente grato a Deus por colocar as pessoas certas nos momentos certos antes e durante todo o meu tempo no doutorado.

Aos meus pais Cícero dos Santos de Alencar e Marli Moreira de Alencar pelos valores morais, ensinamentos para vida e amor incondicional. Meu grande pai que não teve oportunidades de estudos, conseguiu me passar o valor da educação e me inspira a acreditar e lutar pelos meus sonhos. Minha amável mãe com suas doces palavras de encorajamento e amor durante momentos cruciais no doutorado.

A minha linda e amável esposa Aline Oliveira de Alencar, pelo companheirismo, amizade, suporte, paciência e compreensão durante todo o período de doutorado. Seu amor demonstrado desde a minha época de graduação sem dúvida foi fundamental e os adoráveis filhos Isabela e Daniel que você me presenteou representaram muito na minha caminhada até a conclusão do doutorado.

Aos Professores Luiz Alberto Ribeiro Mendonça (orientador) e Sávio de Brito Fontenele (coorientador) pelo suporte durante todo o doutorado. Obrigado pela paciência e enriquecedoras discussões relacionados a minha pesquisa de tese. A sabedoria e o espírito docente dos meus mestres tornaram possível a concretização do meu doutorado.

Aos professores Francisco Dirceu Duarte Arraes, Wilami Texeira da Cruz, Maria Silvana Alcântara Costa e Vicente Helano Feitosa Batista Sobrinho pela disponibilidade em participar da banca da defesa da minha tese de doutorado.

Aos professores do DENA, em especial aos professores José Carlos de Araújo, Adunias do Santos Texeira, Carlos Alexandre Gomes Costa, Fernando Bezerra Lopes e George Leite Mamede.

Aos meus nobres colegas e parceiros de estudos Antônio Alisson, Francisco Esmayle, Camila Cristina, Léa Moraes, Klênio Bezerra, Éder Ramon, Romulo Uchoa, Bruno Silva, Danielle Cavalcante, Francisco Jairo, Eldir Bandeira, Pedro Henrique, Thayslan Renato, Antônio Viana, Paulilo Palácio e José Vidal que foram muito importantes no meu processo de formação no doutorado.

Aos meus parentes Josimar e Ângela pelas dicas e suporte no desenvolvimento de algumas figuras deste trabalho.

Ao casal Carlos Régio e Ana (meus irmãos em Cristo) por me acolherem tão bem desde o meu mestrado, vocês são como meus pais.

Aos meus irmãos da Igreja Cristã Maranata do bairro João XXIII em Fortaleza e da região do Cariri pelas orações e apoio durante o doutorado.

A toda a minha família que acreditaram em mim e incentivaram a prosseguir nos estudos.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará campus Juazeiro do Norte pelo apoio na realização do meu doutorado.

A Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico - FUNCAP, pela bolsa de estudo concedida.

A todos quantos Deus colocou na minha e que contribuíram para a concretização desse sonho, meus sinceros agradecimentos.

“E sabemos que todas as coisas contribuem
juntamente para o bem daqueles que amam a
Deus...” (Romanos 8:28)

RESUMO

Modelos de interação rio-aquífero constituem uma importante ferramenta na tomada de decisão na gestão dos recursos hídricos. Um dos grandes desafios na construção desses modelos em regiões semiáridas está na indisponibilidade de dados hidrológicos. Neste trabalho, é proposto um modelo para simular trocas hídricas entre rio e aquífero em regiões com dados escassos, tomando como estudo de caso uma área experimental na bacia do Alto Jaguaribe, de área de drenagem de 1.014 km², localizada no semiárido do nordeste brasileiro. O desenvolvimento deste modelo está baseado em três processos hidrológicos: (i) propagação do escoamento no rio, modelado a partir da abordagem da onda cinemática; (ii) infiltração em solo de multicamadas, modelada a partir da abordagem de Green-Ampt; e (iii) fluxo subterrâneo, modelado pela equação diferencial parcial bidimensional de fluxo subterrâneo em aquíferos livres. O modelo desenvolvido calcula o hidrograma do rio considerando as trocas hídricas rio-aquífero estimadas a partir das variações das cargas hidráulicas aquíferas, resultante das flutuações da recarga durante cada evento simulado. Na análise de sensibilidade e calibração do modelo utilizaram-se o coeficiente de eficiência de Nash-Sutcliffe (CENS) para as descargas superficiais e o Erro Médio Absoluto (EMA) para as cargas hidráulicas aquíferas. Na calibração do modelo obteve-se um CENS de 0,6 e um EMA de 0,2 m. Na validação do modelo, utilizaram-se três eventos de cheias, sendo dois de curta duração e pequena magnitude de variação volumétrica negativa e o outro de longa duração e grande magnitude de variação volumétrica positiva. Para avaliar o desempenho do modelo, usaram-se o EMA para as cargas hidráulicas, o CENS para as descargas superficiais e os erros relativos cometidos no cálculo do volume escoado e pico das vazões. Os resultados da validação mostraram um EMA máximo de 0,4 m, CENS médio de 0,5, erros médios relativos no cálculo dos volumes escoados e vazões de pico, respectivamente, de 0,23 e 0,3, configurando um bom desempenho do modelo tendo em vista a complexidade da modelagem proposta e as incertezas provenientes da escassez de dados. O presente modelo mostrou-se ter potencial para simular as trocas hídricas rio-aquífero para regiões de dados escassos, mas ainda não está pronto para aplicações reais, precisando ser avaliado em outras regiões semiáridas de escala e litologia distintas para um melhor entendimento das suas limitações e potencialidades e aperfeiçoamento das suas rotinas internas.

Palavras-chave: Processos hidrológicos. Onda cinemática. Infiltração. Fluxo subterrâneo. Equação Diferencial.

ABSTRACT

Models of river-aquifer interaction have been emerged as an important tool for effective management of water resources. Developing these models in semiarid regions is a great challenge and one of the main issues is the scarcity of hydrological data. Herein a model is proposed for simulation of river water and groundwater exchange for data-scarce regions. This model has been applied to the Experimental site (1014 km²) located in the Brazilian northeastern semi-arid region and based on three hydrological processes: (i) streamflow in natural rivers, which is modeled using the kinematic wave method, (ii) infiltration into heterogeneous soils, which is modeled using the Green-Ampt approach and (iii) groundwater flow, which is modeled using the two-dimensional partial differential equation for groundwater flow. The developed model simulates the river hydrograph accounting river water and groundwater exchange for each event. Initially, a sensitivity analysis was carried out and then the calibration procedure is evaluated using Coefficient of Nash and Sutcliffe (NS) for variation in the discharge hydrographs and the Mean Absolute Error (MAE) between simulated and observed groundwater heads. The results showed a calibration NS of 0.6 and EMA of 0.2 m. In the validation of the model, three events were used, two of short duration and small magnitude characterized by being of negative volumetric variation and the other of long duration and large magnitude characterized by being of positive volumetric variation. For model performance evaluation, NS and MAE are calculated. In addition, it was estimated the relative error (RE) in hydrograph volume and peak in relation to the observed data. Validation results showed a maximum MAE of 0.4 m, mean NS of 0.5, mean RE in hydrograph volume and peak, respectively, of 0.23 and 0.3. Considering the complexity of the proposed modeling and the uncertainties arising from the scarcity of data, the present model has been shown potential to simulate river-aquifer water exchanges for scarce data regions, but is not yet ready for real applications and needs to be evaluated in other semi-arid regions of distinct scale and lithology for a better understanding of their limitations. and potentialities and improvement of its internal routines.

Keywords: Hydrological processes. Kinematic wave. Infiltration. Groundwater flow. Differential equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ciclo de desenvolvimento de um modelo.....	18
Figura 2 - Etapas da construção do modelo hidrológico	19
Figura 3 - Relação entre modelo matemático, solução analítica, solução numérica e realidade em campo	22
Figura 4 - Duas configurações comuns para malhas de diferenças finitas.....	24
Figura 5 - Malha x-t de diferenças finitas	25
Figura 6 - Exemplo de malha usada pelo método dos elementos finito.....	28
Figura 7 - Rio de perda/ganho em um sistema rio-aquífero hidraulicamente conectado	31
Figura 8 - Componentes estruturais do MHIRA	32
Figura 9 - Área experimental de estudo	37
Figura 10 - Formação Geológica da área experimental	39
Figura 11 - Litologia da área experimental	39
Figura 12 - Estações de monitoramento de dados hidrológicos na área experimental...	40
Figura 13 - Esquema da modelagem da infiltração da água no solo em camadas	51
Figura 14 - Volume de controle e elementos básicos usados na dedução da equação do fluxo subterrâneo para aquíferos livres	56
Figura 15 - Interpretação geométrica da Interação rio-aquífero.....	63
Figura 16 - Interação entre as rotinas do MHIRA 2.0.....	71
Figura 17 - Análise de sensibilidade do parâmetro porosidade no modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 3.....	73
Figura 18 - Análise de sensibilidade do parâmetro carga de sucção da frente de umedecimento no modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 3.....	73
Figura 19 - Análise de sensibilidade do parâmetro condutividade hidráulica saturada no modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 3	74
Figura 20 - Análise de sensibilidade do parâmetro produção específica no modelo	75
Figura 21 - Vazões calculadas pelo modelo variando-se as condutividades hidráulicas saturadas usando o Evento 3	76
Figura 22 - Cargas hidráulicas aquíferas calculadas pelo modelo variando-se as condutividades hidráulicas saturadas usando o Evento 3.....	76

Figura 23 - Hidrograma observado e calculado pelo MHIRA 2.0 na calibração usando o Evento 2.....	77
Figura 24 - Cargas hidráulicas medidas e calculadas pelo MHIRA 2.0 na calibração usando o Evento 2.....	78
Figura 25 - Cargas hidráulicas aquíferas medidas e calculadas na validação do modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 1	79
Figura 26 - Cargas hidráulicas aquíferas medidas e calculadas na validação do modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 2	79
Figura 27 - Cargas hidráulicas aquíferas medidas e calculadas na validação do modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 4	80
Figura 28 - Hidrogramas observado e calculados pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA para o Evento 1 usado na validação.....	81
Figura 29 - Hidrogramas observado e calculados pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA para o Evento 2 usado na validação.....	82
Figura 30 - Hidrogramas observado e calculados pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA para o Evento 4 usado na validação.....	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Parâmetros necessários para executar o modelo MHIRA.....	35
Tabela 2 -	Atributos Fisiográficos da área experimental	38
Tabela 3 -	Estações de monitoramento fluviométrico, pluviométrico e de níveis freáticos presentes na SBHPCI	40
Tabela 4 -	Textura e parâmetros das camadas da aluvião estratificada.....	41
Tabela 5 -	Métodos numéricos das rotinas dos modelos MHIRA e MHIRA 2.0	70
Tabela 6 -	Características dos eventos monitorados	72
Tabela 7 -	Resultados obtidos pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA nos três eventos usados na validação.....	84

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1	Modelagem hidrológica das interações rio-aquífero	16
2.2	Técnicas para resolver modelos numéricos	23
2.2.1	<i>Diferenças Finitas</i>	23
2.2.2	<i>Elementos Finitos</i>	27
2.3	Linguagem de programação: FORTRAN	29
2.4	O modelo MHIRA	30
2.4.1	<i>Rotina propagação da onda</i>	32
2.4.2	<i>Rotina Infiltração</i>	33
2.4.3	<i>Rotina Fluxo subterrâneo</i>	34
2.4.4	<i>Dados de entrada para o modelo MHIRA</i>	35
3	ÁREA DE ESTUDO	37
3.1	Características gerais	37
3.2	Clima	37
3.3	Fisiografia	38
3.4	Geologia	38
4	METODOLOGIA	40
5	RESULTADOS	45
5.1	Rotina propagação da onda no MHIRA 2.0	45
5.1.1	<i>Método numérico para resolver as equações básicas da rotina Propagação da Onda</i>	48
5.2	Desenvolvimento da rotina Infiltração	50
5.2.1	<i>Frente de umedecimento na camada 1</i>	51
5.2.2	<i>Frente de umedecimento na camada 2</i>	52
5.2.3	<i>Frente de umedecimento na camada $n > 3$</i>	54
5.3	Desenvolvimento da rotina fluxo subterrâneo	55
5.3.1	<i>Solução numérica da equação bidimensional do fluxo subterrâneo</i>	58
5.3.2	<i>Interação rio-aquífero</i>	62
5.4	Comparação entre as rotinas dos modelos MHIRA e MHIRA 2.0	64
5.4.1	<i>Rotina Propagação da Onda: MHIRA vs MHIRA 2.0</i>	64

5.4.2	<i>Rotina Infiltração: MHIRA vs MHIRA 2.0</i>	65
5.4.3	<i>Rotina Fluxo subterrâneo: MHIRA vs MHIRA 2.0</i>	68
5.5	Interação entre as rotinas do MHIRA 2.0	70
5.6	Eventos usados na Calibração e Validação	72
5.7	Análise de Sensibilidade	72
5.8	Calibração	75
5.9	Validação	78
6	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIA	87

1 INTRODUÇÃO

O aumento da urbanização, crescimento populacional e produção agrícola-industrial em larga escala impulsiona a degradação dos recursos hídricos superficiais e a superexploração das águas subterrâneas, afetando reservas hídricas que deveriam ser utilizadas estrategicamente, apenas em períodos de extrema escassez, evitando sérios problemas ambientais (GLEESON *et al.*, 2016; VASCONCELOS, 2017; WADA; WISSER; BIERKENS, 2014).

A comunidade científica tem reportado diversos trabalhos sobre a dinâmica interativa rio-aquífero (MANGLIK; RAI, 2015; MAY; MAZLAN, 2013; RASHID; AHMED, 2018; SMITH *et al.*, 2015; WABLE; JHA; MURASING, 2017) enfatizando a importância dessa temática na gestão dos recursos hídricos, uma vez que o seu entendimento pode ajudar na compreensão dos impactos das ações antrópicas em bacias hidrográficas, preservação do meio ambiente e avaliação quantitativa e qualitativa da água para diversos usos mediante análise de cenários (BERTRAN *et al.*, 2014; BURTE; COUDRAIN; MARLET, 2011; DU *et al.*, 2018; NETO, *et al.*, 2017; SAHOO; JHA, 2017).

Modelos que simulam as interações rio-aquífero são extremamente importantes para regiões semiáridas em todo mundo, pois são regiões que comumente sofrem com secas severas (CHAVES, *et al.*, 2019; De ARAÚJO; BRONSTERT, 2016; RASHID; AHMED, 2018; WABLE; JHA; MURASING, 2017) e onde existem rios com significativas perdas em trânsito por conta dessas interações (COSTA *et al.*, 2013; ELFEKI *et al.*, 2015; MVANDABA *et al.*, 2018).

A modelagem da dinâmica entre águas superficiais e subterrâneas para regiões semiáridas é um grande desafio devido às incertezas associadas à escassez de dados (DU *et al.* 2018; FONTENELE *et al.* 2014). Uma boa prática para superar essa dificuldade é definir um modelo que avalie a influência dos processos hidrológicos dominantes, como realizado por Costa, Bronstert e de Araújo (2012) no desenvolvimento do modelo DRYRIOS.

O DRYRIOS é um modelo de perdas em trânsito orientado a processo, semi-distribuído, baseado em fenômenos hidrológicos adequados para regiões semiáridas de dados escassos, desenvolvido para predição do volume e pico do hidrograma à jusante de um rio, conectado ou não hidraulicamente ao aquífero (COSTA; BRONSTERT; DE ARAÚJO, 2012). De acordo com os seus desenvolvedores, o DRYRIOS precisa de melhorias em suas rotinas

internas, principalmente aquelas associadas ao fluxo subterrâneo, para ser aplicável em situações reais.

A partir dos processos hidrológicos base do DRYRIOS, que são a propagação do escoamento em rios, a infiltração na aluvião estratificada com empoçamento variável e o fluxo subterrâneo, Fontenele (2015) desenvolveu o modelo MHIRA e obteve melhorias na simulação do hidrograma apenas em eventos de longa duração e grande magnitude.

Fontenele (2015) observou altas oscilações numéricas no cálculo dos hidrogramas usando o seu modelo ao variar as condutividades hidráulicas saturadas acima de valores de referência. Porém, valores abaixo dos de referência não influenciaram no cálculo do hidrograma. Além disso, este mesmo autor constatou que os modelos DRYRIOS e MHIRA apresentaram limitações na determinação das perdas em trânsito em eventos de pequena magnitude e/ou curta duração e na modelagem do fluxo subterrâneo para qualquer evento.

Neste contexto, a questão científica levantada no presente trabalho foi:

Quais os métodos numéricos mais adequados para resolver as descrições matemáticas dos três processos hidrológicos base da estrutura do modelo MHIRA capaz de determinar as perdas em trânsito num evento qualquer, obter o hidrograma sem oscilações numéricas e simular o fluxo subterrâneo?

As hipóteses levantadas são:

- a) O esquema numérico explícito de diferenças finitas adotado no MHIRA para resolver a equação diferencial da propagação da onda e de fluxo subterrâneo precisa ser mudado para um do tipo implícito a fim de evitar problemas de instabilidade numérica;
- b) Restrições matemáticas no desenvolvimento computacional do modelo MHIRA podem estar alterando a potencialidade do modelo em capturar as perdas em trânsitos. Em particular, a proposta de um método numérico que determine instantaneamente o avanço da frente de umedecimento pode diminuir as incertezas na determinação das perdas em trânsito antes e após a conexão hídrica do sistema rio-aquífero.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo hidrológico de interação rio aquífero para regiões semiáridas de dados escassos, denominado MHIRA 2.0, capaz de simular os três processos hidrológicos base do MHIRA, determinando o volume e o pico do hidrograma a jusante do rio considerando as trocas hídricas rio-aquífero.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Modelagem hidrológica das interações rio-aquífero

O processo de industrialização, o crescimento populacional, a expansão de atividades agrícolas são fatores que contribuem para a superexploração dos recursos hídricos em todo o mundo (SCHIRMER; LESCHILK; MUSOLFF, 2013; VASCONCELOS, 2017). Sendo a maior fonte de água pura do nosso planeta, as águas subterrâneas representam 33% das águas captadas no globo terrestre. (GORELICK; ZHENG, 2015).

Globalmente, as regiões semiáridas sofrem com escassez hídricas. As frequentes secas, a limitação e a degradação das águas superficiais têm provocado crescentes e acentuados estresses sobre as águas subterrâneas. Este cenário se apresenta como um indicativo de que a quantificação das interações entre águas superficiais e subterrâneas é algo de extrema relevância para o gerenciamento dos recursos hídricos. (DU et. al. 2017; WABLE *et al.*, 2017; RASHID; AHMED, 2018).

A modelagem da interação rio-aquífero tem sido objeto de estudo de diversos pesquisadores (ver por exemplo, WINTER *et al.*, 1998; MYLOPOULOS *et al.*, 2007; PULIDO-VELAZQUEZ *et al.*, 2007; FEINSTEIN; HUNT; REEVES, 2010; RAI; MANGLIK, 2012; LEVY; XU, 2012; MANGLIK; RAI, 2015; WABLE *et al.*, 2017; RASHID; AHMED, 2018). Esses e outros exemplos de pesquisas nessa temática traduzem não só a preocupação com a escassez hídrica, mas também o esforço da comunidade científica em propor alternativas de exploração sustentável das águas baseadas no entendimento da dinâmica interativa existente entre as águas superficiais e subterrâneas.

Diversas são as razões que justificam a importância da modelagem da dinâmica interativa rio-aquífero para a gestão dos recursos hídricos. Dentre estas, tem-se por exemplo:

- a) A extração das águas subterrâneas de aquíferos conectados hidráulicamente a rios provoca nestes uma redução nos fluxos a jusante (MAYS, 2013) devido às vazões captadas e recarga induzida (THEIS, 1940);
- b) O bombeamento de poços pode influenciar fortemente na quantidade de água subterrânea descarregada para os corpos hídricos superficiais, especialmente nas estações secas quando o fluxo dos rios é mantido principalmente pelo fluxo de base. (ALLEY, 2007; ZHOU, 2009; BARLOW; LEAKE, 2012; FEINSTEIN, 2012);

- c) O conhecimento quantitativo e qualitativo das trocas hídricas pode fornecer melhores avaliações dos impactos antrópicos sobre uma bacia hidrográfica, indicar as melhores práticas agrícolas, direcionar melhores alternativas de proteção do meio ambiente, especialmente os que são fortemente dependentes das águas subterrâneas (WINTER *et al.*, 1998; SOPHOCLEOUS, 2002; CHO; MOSTAGHIMI; KANG, 2010; ZHOU *et al.*, 2013; BERTRAND *et al.* 2014);
- d) A possibilidade de avaliar cenários passados, presentes e futuros baseados em padrões reais ou hipotéticos de exploração das águas facilitam o desenvolvimento de ações eficientes e econômicas para a antecipação/prevenção e/ou correção de problemas relacionados ao mau uso das águas. Sendo assim, a falta de conhecimento sobre a interação rio-aquífero impossibilita uma melhor formulação dos planos de gerenciamento das águas (BALLEAU, 1988; NASTEV *et al.*, 2005; SCIBEK *et al.*, 2007; ESTRELA; PÉREZ-MARTIN; VARGAS, 2012).

Diante desse contexto, a modelagem hidrológica da interação rio-aquífero é sem dúvida uma ferramenta que deveria ser considerada por instituições responsáveis pela gestão dos recursos hídricos. Todavia, vale ressaltar que a eficácia da gestão integrada dos recursos hídricos depende, em grande parte, da viabilidade técnica e operacional de modelos hidrológicos que simulem os processos hidrológicos dominantes com boa confiabilidade (CLARK *et al.*, 2011; VASCONCELOS, 2017).

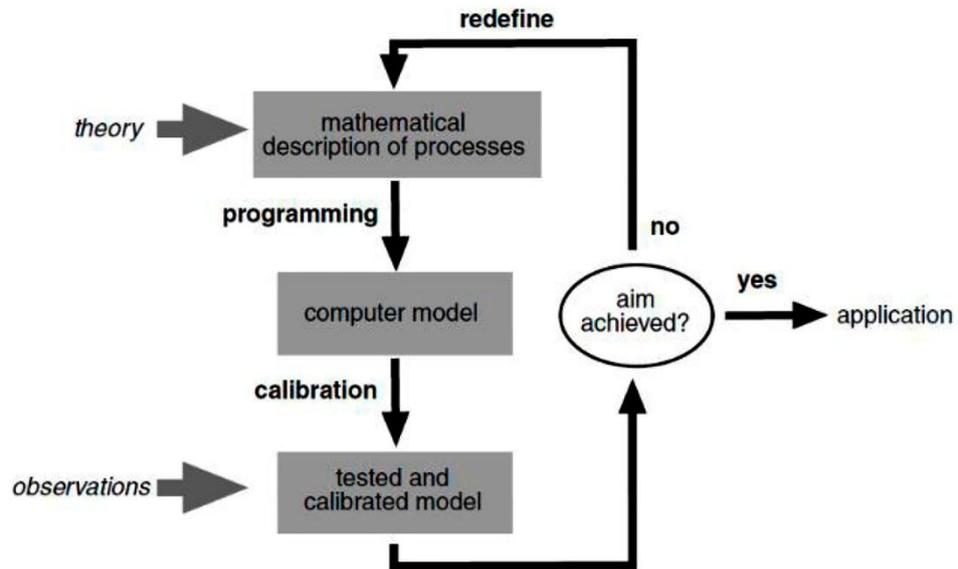
Assim, a construção de um modelo para simular a dinâmica interativa rio-aquífero é, sem dúvida, uma tarefa desafiadora, não-trivial e de grande importância para bacias hidrográficas localizadas no semiárido caracterizadas pela escassez hídricas e pela limitação de informações para a construção de um modelo hidrológico distribuído (COSTA; BRONSTERT; De ARAÚJO, 2012; FONTENELE, 2015).

Os autores Wang e Anderson (1982) enfatizam que um modelo hidrológico pode ajudar em tomadas de decisões futuras sobre os recursos hídricos, desde que haja uma boa qualidade e quantidade de dados. Porém, diante das limitações em termos quantitativo e qualitativo de dados, um modelo hidrológico também pode ser útil no direcionamento dos dados hidrológicos mais relevantes que deveriam ser detalhados para melhorias da capacidade de simulação do próprio modelo.

Segundo Karssenberg (2002) o principal desafio na construção de um modelo hidrológico está na otimização das representações dos processos hidrológicos e como combinar

esses processos de maneira adequada a fim de atingir os objetivos propostos pelo modelo. Este mesmo autor aponta que o ciclo de desenvolvimento em um modelo engloba três fases por modelo candidato de acordo com o fluxograma apresentado na Figura 1.

Figura 1 - Ciclo de desenvolvimento de um modelo



Fonte: Karszenberg (2002)

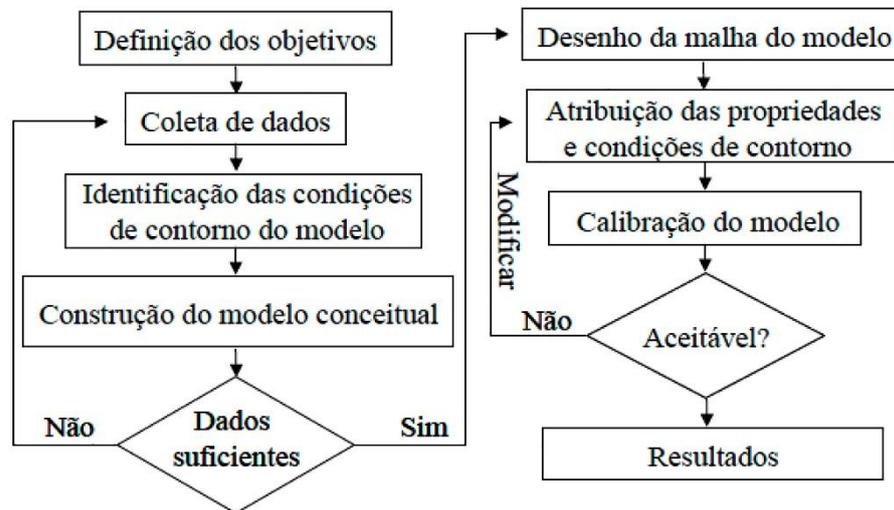
A primeira fase é a descrição matemática do modelo baseada no conhecimento dos processos hidrológicos e na interação dos mesmos na área de estudo. Nesta fase, estão contidas as equações matemáticas que simulam os processos hidrológicos definidos no modelo. A segunda fase envolve a escrita do programa computacional que representa numericamente a descrição matemática. A terceira fase, constitui da avaliação do modelo, ou seja, é a verificação se o modelo desenvolvido cumpre ou não o objetivo estabelecido.

Cada vez que o ciclo de desenvolvimento do modelo é percorrido são necessárias calibrações dos parâmetros do modelo (a análise de sensibilidade ajuda nesse processo) para melhores ajustes com os dados observados em campo. Ao passo que o modelo é testado, é possível identificar pontos fracos do modelo que conduzem a tentativas de melhorias na sua estrutura. Isso envolve a redefinição da descrição matemática, melhorias ou reedição do programa computacional.

Um exemplo de modelagem hidrológica envolvendo as relações entre as águas superficiais e subterrâneas é o trabalho de Santos (2004) que realizou uma avaliação numérica dos impactos sofridos pelo aquífero do Rio da Batateira na cidade de Juazeiro do Norte, Ceará,

Brasil. Neste trabalho, foi desenvolvido um modelo de fluxo de água subterrânea cujas etapas de construção podem ser vistas na Figura 2.

Figura 2 - Etapas da construção do modelo hidrológico



Fonte: Santos (2004)

O fluxograma da Figura 2 está dividido em duas partes. A primeira parte é a construção do modelo conceitual que só é considerado concluído quando representar satisfatoriamente os dados obtidos no campo. A segunda parte consiste na calibração e validação do modelo que só é considerada aceita quando os valores calculados forem suficientemente ajustados aos observados em campo.

Outro exemplo de modelo hidrológico desenvolvido para simular a dinâmica interativa rio-aquífero é o modelo MHIRA (Modelo Hidrológico das Interações Rio-Aquífero), desenvolvido por Fontenele (2015) tomando como referência a modelagem hidrológica desenvolvida por Costa, Bronstert e de Araújo (2012). Na construção do modelo MHIRA foram observadas as mesmas etapas descritas para construção de um modelo ilustradas na Figura 2.

Para Izady *et al.* (2014) o componente mais importante de um modelo hidrológico é o modelo conceitual que pode ser definido de acordo com Anderson e Woessner (1992) e Bredehoeft (2005) como uma representação idealizada dos processos hidrológicos do sistema a ser modelado. Anderson, Woessner e Hunt (2015) consideram que o primeiro passo importante na modelagem do fluxo subterrâneo é a construção do modelo conceitual. Os autores Ye *et al.* (2010) chamam a atenção para o fato de que incertezas no modelo hidrológico surgem de incertezas no modelo conceitual que, se negligenciadas, podem implicar em resultados tendenciosos.

Incertezas no modelo conceitual podem estar associadas às coletas de dados e hipóteses simplificadoras (SANTOS, 2004). Exemplo de fonte de incertezas na coleta dados são as medições indiretas, os registros humanos e os problemas/limitações nos dispositivos de medição. As hipóteses simplificadoras estão intrinsicamente relacionadas às fontes de incertezas. Como exemplos, têm-se a suposição do aquífero como um meio homogêneo, a desconsideração dos fluxos laterais em um canal e erros no estabelecimento das condições de contorno (ROJAS *et al.*, 2010; YE *et al.*, 2010; MATEUS e TULLOS, 2017).

O propósito do modelo conceitual é simplificar o problema de campo e organizar os dados a serem usados para que a análise do sistema seja facilitada pela modelagem numérica. Os componentes básicos de um modelo conceitual de águas subterrânea são as condições de fronteiras, distribuição das propriedades hidrodinâmicas e interações rio-aquífero (IZADY *et al.*, 2014).

Alguns modelos conceituais têm sido desenvolvidos especialmente para bacias do semiárido. A principal diferença dos modelos conceituais desenvolvidos no semiáridos para os de regiões úmidas é que no semiárido, frequentemente é incluída a abordagem das perdas por infiltração do escoamento superficial ou das perdas em trânsito que não necessariamente são considerados em regiões úmidas (GUENTNER, 2002). Além disso, a escassez de dados disponíveis de forma organizada é uma característica marcante em regiões semiáridas que torna o processo de desenvolvimento do modelo conceitual complicado e laborioso (COSTA; BRONSTERT; de ARAÚJO, 2012; IZADY *et al.*, 2014).

As incertezas de um modelo são provenientes do modelo conceitual, do modelo matemático e do código computacional (ZIO; APOSTOLAKIS, 1996). Em geral, as fontes de incertezas podem ser classificadas (BAALOUSHA, 2008) da seguinte forma

- a) **Incerteza na estrutura do modelo:** estes tipos de incertezas surgem das simplificações feitas na computação matemática dentro da estrutura do modelo. A estrutura do modelo é a razão para soluções diferentes e saídas entre um e outro modelo.
- b) **Conceito do modelo:** as hipóteses distintas, que podem ser usadas dentro do modelo conceitual, resultam em outro tipo de incerteza. Erros nas condições iniciais e de fronteira aumentam as incertezas do modelo conceitual.
- c) **Resolução do modelo:** a escolha do tamanho da malha de um modelo implica na acurácia e incertezas do modelo. Malhas grosseiras tendem a gerar mais incertezas. Malhas refinadas apesar de poderem melhorar a

precisão do modelo, implicam numa maior exigência no tempo computacional do modelo. Além disso, tem-se que considerar a quantidade de dados disponíveis, os erros de truncamento e arredondamento.

A base do modelo numérico é o modelo conceitual (REFSGAAR; CHRISTENSEN; SONNEBORG, 2012; ROJAS; FEYEN; DASSARGUES, 2018). Muitos trabalhos (BARAZZUOLI *et al.*, 2008; GILLESPIE *et al.*, 2012; JUSSERET; TAM; DASSARGUES, 2009; SEIFERT *et al.*, 2008) atribuem uma boa representatividade de um modelo numérico de fluxo subterrâneo a um bom modelo conceitual.

Segundo Wang e Anderson (1982), modelos numéricos e analíticos são os dois tipos de modelos matemáticos. Ainda segundo esses autores, modelos matemáticos para fluxo subterrâneo têm sido usados desde o final do século XIX e sua confiabilidade está associada à forma como este aproxima-se aos dados de campo. Os pesquisadores Singh e Woolhiser (2002) relatam que os primeiros modelos matemáticos para bacias hidrográficas foram o método racional desenvolvido por Mulvany (1850) e o modelo desenvolvido por Imbeau (1892), que relacionava o pico causado por um evento de escoamento superficial com a intensidade da chuva.

Modelos matemáticos são um conjunto formado por equações diferenciais governantes dos processos hidrológicos, condições de fronteira e condições iniciais (para problemas transientes). Em que as condições de fronteiras consistem de afirmações matemáticas que especificam a variável dependente e/ou suas derivadas parciais na fronteira (ANDERSON e WOESSNER 1992).

Segundo Wang e Anderson (1982), o modelo matemático de fluxo subterrâneo está bem definido quando a definição das condições de contorno é consistente. Segundo estes pesquisadores as condições de contorno usadas em problemas de fluxo subterrâneo podem ser:

- a) As condições de Dirichlet: A carga hidráulica é especificada na fronteira;
- b) As condições de Neumann: O fluxo (derivada primeira da carga hidráulica) é especificado na fronteira;
- c) As condições mistas: Carga e fluxo especificados na fronteira (combinação de a e b).

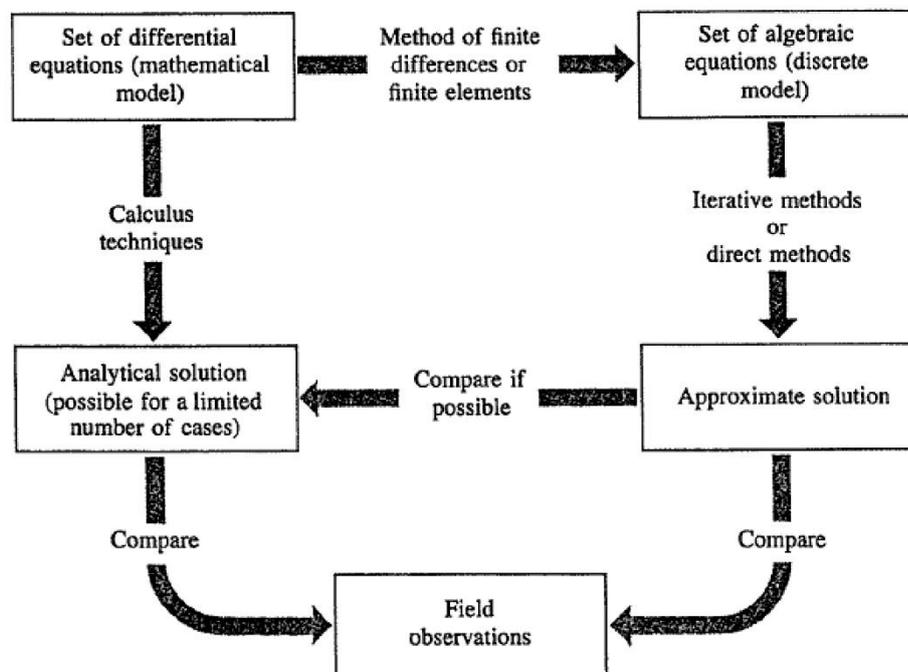
As situações reais de campo são muito complexas para serem totalmente representadas por modelos matemáticos. Assim, a realidade de campo é representada aproximadamente, a partir de hipóteses simplificadoras, pelo modelo matemático. Em geral, as hipóteses simplificadoras necessárias para o modelo matemático analítico são mais restritivas. Portanto, o modelo matemático numérico, apresenta-se, em geral, como o mais adequado para

modelar, de forma mais realística, a realidade de campo (WANG e ANDERSON 1982; ANDERSON e WOESSNER 1992).

A divisão do modelo matemático em modelos analíticos e numéricos está associada à forma como as equações diferenciais são resolvidas. As soluções analíticas são soluções exatas obtidas a partir de técnicas da matemática pura, como por exemplo as técnicas do Cálculo Diferencial Integral, Separação de Variáveis, Transformada de Laplace e Transformada de Fourier. Por sua vez as soluções numéricas são solução aproximadas cujo princípio está baseado na discretização do contínuo que viabiliza a solução via computador. Exemplos de técnicas de solução numérica são as Diferenças Finitas e os Elementos Finitos. Infelizmente, muitas vezes na prática, uma equação diferencial não pode ser resolvida analiticamente.

O fácil acesso aos computadores de alto desempenho últimas décadas é um outro fator que favorece fortemente o uso de modelos matemático numéricos aplicados à modelagem hidrológica de bacias, gestão do meio ambiente, engenharias e outras áreas do conhecimento (SINGH e WOOLHISER 2002). A Figura 3 foi proposta por Wang e Anderson (1982) para explicar as relações existentes entre modelo matemático, solução analítica, solução aproximada e dados extraídos em campo.

Figura 3 - Relação entre modelo matemático, solução analítica, solução numérica e realidade em campo



Fonte: Wang e Anderson (1982)

A Figura 3 não apenas sintetiza o que foi comentado até o momento sobre modelos matemáticos, mas também acrescenta informações extras. Senão vejamos, a Figura 3 indica que um modelo matemático pode ser resolvido analiticamente (por meio de técnicas de cálculo por exemplo) ou numericamente (por meio das diferenças finitas ou elementos finitos por exemplo). A discretização pelo método numérico gera um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidas por algum método iterativo e/ou diretos. A solução numérica pode ser comparada com a analítica (caso seja possível obter uma solução exata) e comparada com os dados de campo. A solução analítica existindo também pode ser comparada com os dados de campo. Um bom modelo matemático-computacional tem seus resultados próximos aos dados coletados no campo. A próxima seção é dedicada aos métodos numéricos das diferenças finitas e dos elementos finitos.

2.2 Técnicas para resolver modelos numéricos

Os métodos numéricos mais usados em engenharia são os das diferenças finitas e dos elementos finitos. A ideia básica desses métodos está associada ao processo de discretização, que consiste em reduzir um problema físico, contínuo, de infinitas incógnitas, em um problema discreto de finitas incógnitas, que pode ser resolvido em computador (WROBEL *et al*, 1989).

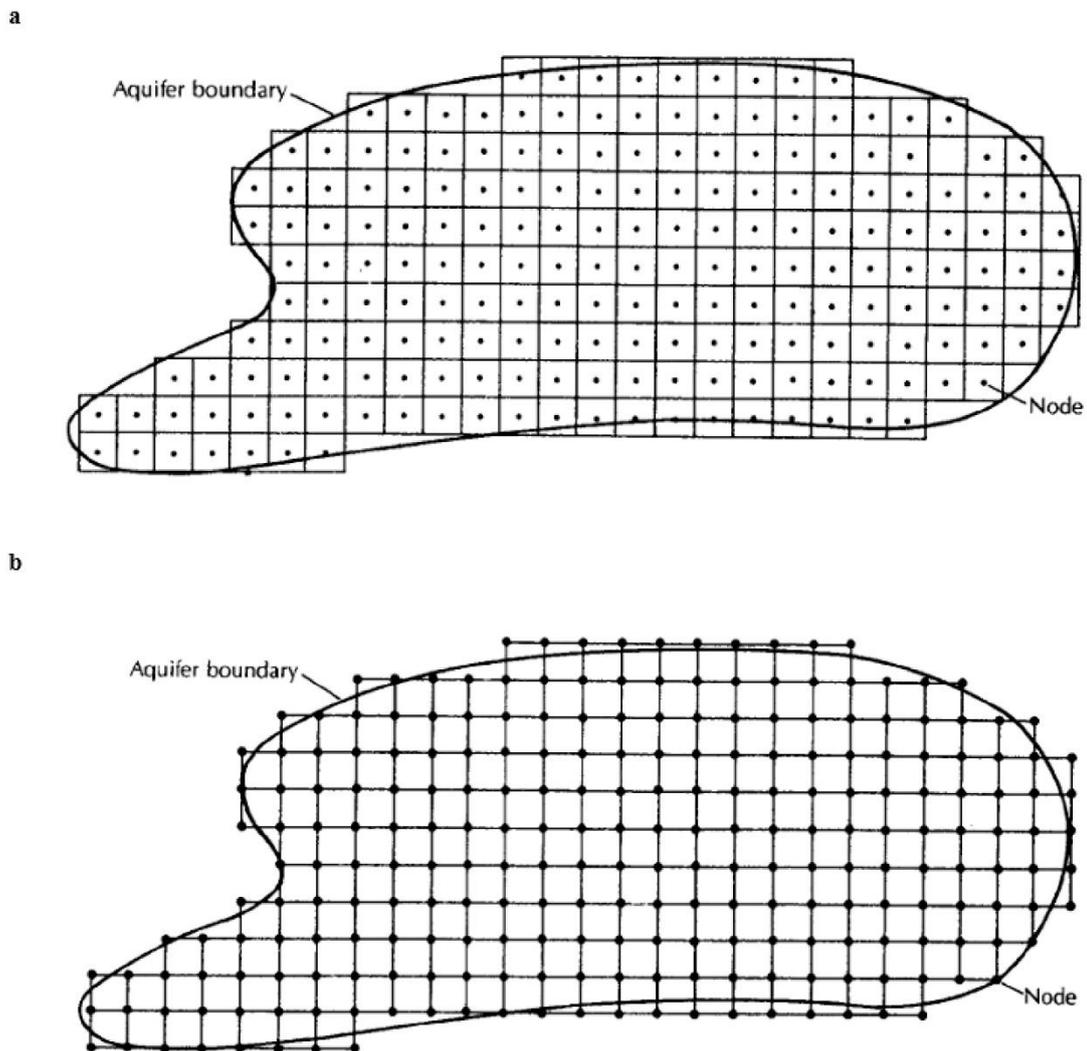
Nas seções a seguir é apresentado uma breve explanação sobre estes métodos, dando uma ênfase maior ao das diferenças finitas por ser o método numérico adotado no presente trabalho.

2.2.1 Diferenças Finitas

No método das diferenças finitas o modelo contínuo é trocado por um conjunto de pontos discretos que formam um arranjo característico (distribuídos paralelamente aos eixos coordenados do plano cartesiano), donde obtém-se a malha das diferenças finitas.

Associado a cada malha tem-se os pontos nodais ou nós, onde as equações são resolvidas para obter os valores desconhecidos. Por sua vez, associados aos pontos nodais tem-se os parâmetros do modelo (transmissividade e armazenamento, por exemplo). A Figura 4 mostra duas variações de uma malha de diferenças finitas, uma em que os pontos nodais estão dispostos centralmente na malha e na outra sobre as interseções das linhas da malha.

Figura 4 – Duas configurações comuns para malhas de diferenças finitas



Fonte: Fetter (2001)

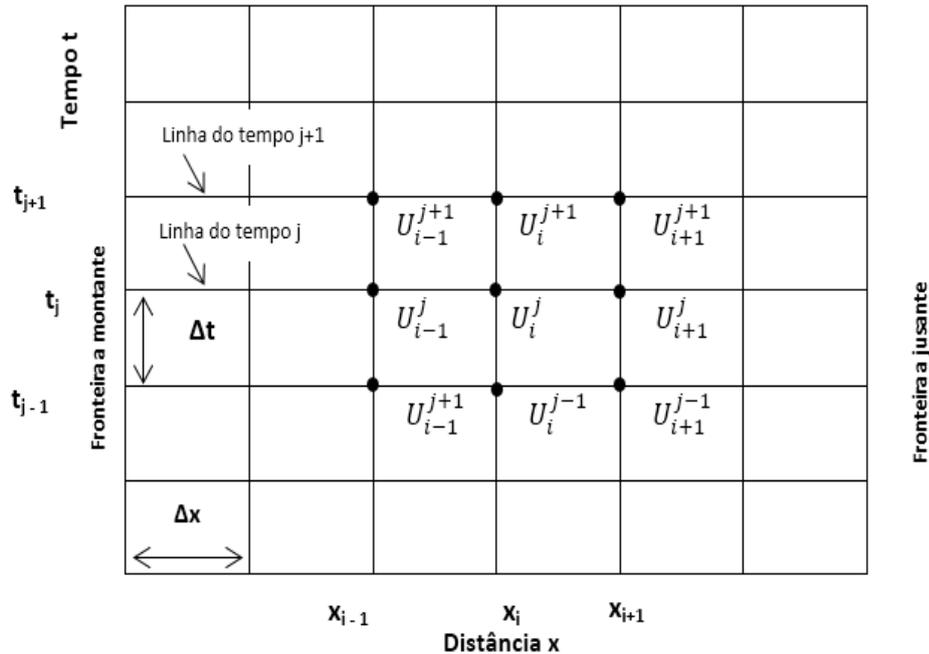
A escolha de um tipo específico de malha depende da natureza das condições de contorno do problema a ser tratado.

Os grids básicos (pequenos retângulos) formados pelo cruzamento das linhas (na direção do eixo x) e colunas (na direção do eixo y), têm lados Δx (base) e Δy (altura). Devido as condições de contorno, pode ser conveniente alterar o tamanho das linhas ou colunas da malha (por exemplo, para haver mais pontos nodais na fronteira do aquífero). De acordo com Fetter (2001), é recomendável que a variação relativa Δx (ou Δy) de uma coluna (ou linha) para outra adjacente seja maior que 30% e menor que 50%.

A fim de programar computacionalmente o cálculo numérico das soluções em cada ponto nodal são usados índices i e j , que neste trabalho denotam, respectivamente, a variação espacial e temporal. A Figura 5 ilustra uma malha x - t de diferenças finitas sobre o plano

cartesiano xy com o tempo t variando verticalmente (na direção do eixo y) e a distância x variando horizontalmente (na direção do eixo x). As linhas da malha paralelas ao eixo x são denominadas linhas do tempo (CHOW; MAIDMENT; MAYS, 1988).

Figura 5 - Malha $x-t$ de diferenças finitas



Fonte: Adaptado de Chow, Maidment e Mays (1988)

Os nós apresentados na Figura 8 são os pontos de interseção do cruzamento das linhas da malha. Em cada um desses pontos são determinados os valores de uma função $U = U(x, t)$. A notação U_i^j representa o valor da função U aplicada no ponto (x_i, t_j) em que $x_i = i \cdot \Delta x$ e $t_j = j \cdot \Delta t$. Assim, $U_i^j = U(x_i, t_j) = U(i\Delta x, j\Delta t)$.

Considerando algumas formas do desenvolvimento em série de Taylor para a função $U = U(x, t)$ com truncamento, chega-se nas seguintes aproximações em diferenças finitas:

Diferença progressiva:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} \quad (2.2)$$

Diferença regressiva:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_i^j - U_{i+1}^j}{\Delta x} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_i^j - U_i^{j+1}}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Diferença central:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta t} \quad (2.6)$$

Algumas aproximações comuns para derivada de ordem dois são:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\Delta t^2} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \approx \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i+1}^{j-1} - U_{i-1}^{j+1} + U_{i-1}^{j-1}}{4\Delta x \Delta t} \quad (2.9)$$

Aproximações em diferenças finitas como as anteriormente mostradas são usadas para transformar uma equação diferencial parcial em um sistema de equações algébricas a diferenças finitas que pode ser linear ou não linear. Uma vez obtido o sistema, busca-se uma solução para o conjunto de equações e verifica-se se a mesma é uma boa aproximação da solução da equação diferencial parcial original.

Existem dois esquemas que o método das diferenças finitas faz uso o explícito e o implícito. A principal diferença entre eles é que enquanto no método explícito numa dada linha do tempo o cálculo de U num dado ponto de distância qualquer é feito a partir de uma linha do tempo anterior (ou por uma condição de contorno dada) já no método implícito os valores de U

a ser calculado numa dada linha do tempo são computados de forma simultânea (CHOW; MAIDMENT; MAYS, 1988; WROBEL *et al*, 1989).

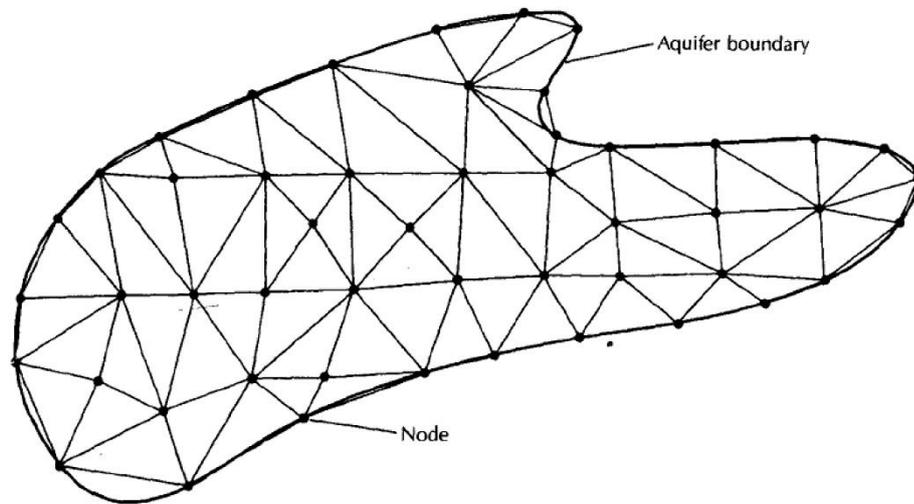
Os métodos explícitos apesar de serem mais simples de serem calculados, estão sujeitos a uma condição necessária (mas não suficiente) para sua estabilidade, que é a condição de Courant (COURANT; FRIENDRICHS, 1948). Sendo assim o método pode ser instável e a condição de Courant pode não garantir a estabilidade, servindo esta como um indicador de estabilidade. Além disso, métodos explícitos são menos eficientes que esquemas implícitos e, portanto, tende a não serem indicados para rotina de fluxos de cheias sobre um longo período de tempo, por exemplo.

Por sua vez, o método implícito é matematicamente mais complicado de ser calculado comparado ao método explícito, contudo esta dificuldade não compromete o seu uso, uma vez que o mesmo pode ser implementável em uma linguagem computacional. Métodos implícitos são incondicionalmente estáveis e neste sentido, são mais vantajosos que os métodos explícitos, pois podem ser usados para largos passos de cálculo com pequenas percas de precisão o que justifica sua eficiência. Além disso, eles podem lidar com variações significantes na geometria de um canal de uma seção transversal para outra (CHOW; MAIDMENT; MAYS, 1988).

2.2.2 Elementos Finitos

O método dos elementos finitos oferece uma forma alternativa para resolver equações diferenciais parciais. De acordo com Fetter (2001), aplicações dos elementos finitos em problemas que envolvem a modelagem do fluxo subterrâneo, possibilita uma discretização do aquífero que não sejam retangulares como nas diferenças finitas. A Figura 6 ilustra um aquífero dividido em células.

Figura 6 – Exemplo de malha usada pelo método dos elementos finito



Fonte: Fetter (2001)

As células triangulares se intersectam em pontos que representam valores desconhecidos (por exemplo, carga hidráulica aquífera) a serem determinados e o valor da carga hidráulica aquífera no interior de cada célula é determinado usando interpolação (FETTER, 2001).

De maneira geral, pode-se dizer que o método dos elementos finitos, trata-se de um método de ajuste conceitualmente simples, porém de teoria mais complexa que a das diferenças finitas. De acordo com Fetter (2001), a maioria das soluções dos elementos finitos tem como base o método de Galerkin. Uma descrição mais detalhada do método dos elementos finitos pode ser encontrada em Pinder e Gray (1977) e Wang e Anderson (1982).

De acordo com Wang e Anderson (1982), a aplicação do método dos elementos finitos para problemas de fluxo subterrâneo é relativamente recente comparado ao uso das diferenças finitas. Ainda segundo esses autores, o método dos elementos finitos é flexível na modelagem de problemas com fronteiras irregulares ou para problemas de fluxo em meio heterogêneo ou anisotrópico.

A comunidade científica tem reportado que a flexibilidade dos elementos finitos é particularmente útil em problemas acoplados, como na modelagem de transporte de contaminante e que em tais problemas há superioridade deste método em relação ao das diferenças finitas (FETTER, 2001).

O presente trabalho não teve por objetivo realizar uma análise comparativa entre os dois métodos numéricos, o que naturalmente poderia ser feito com a modelagem aqui proposta.

Para tanto, uma descrição mais detalhada dos mesmos (principalmente os dos elementos finitos) seria necessário.

Os trabalhos de Bathe (1982), Brebbia e Connor (1976), Fried (1979), Hildebrand (1968), Huyakon e Pinder (1983), Lapidus e Pinder (1982), Pinder e Gray (1977), Richtmyer e Morton (1967), Strickwerda (1989), Wang e Anderson (1982), Warming e Hyett (1974), Zienkiewicz (1977) e Zienkiewicz e Morgan (1983), são excelentes fontes para um melhor entendimento do uso dos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos não só na modelagem do presente trabalho, mas também em diversos problemas de mecânica dos fluidos.

2.3 Linguagem de programação: FORTRAN

O FORTRAN é uma linguagem de programação de finalidade geral, desenvolvida principalmente para cálculos científicos. O acrônimo FORTRAN vem da junção de duas palavras inglesas FORMula TRANslate (tradução de fórmulas). Segundo Decky, Norton e Gardner (2007), o FORTRAN é uma linguagem que permite expressar de forma natural ideias das ciências e engenharias.

De acordo com Farhoodi *et al.* (2013), o FORTRAN é uma linguagem amplamente utilizada no meio científico. Decky *et al.* (2007) reporta uma série de motivos que justificam o uso da linguagem FORTRAN em trabalhos científicos, entre os quais tem-se:

- a) O FORTRAN é uma linguagem de alto desempenho computacional;
- b) Novas versões do FORTRAN são compatíveis com as anteriores;
- c) O FORTRAN é uma linguagem orientado a objeto;
- d) As melhorias em versões novas do FORTRAN são incorporadas de forma a não afetar o alto desempenho da linguagem;

Stroustrup (1994) afirma que para comunidade científica que foca no cumprimento de seus trabalhos com eficiência sem se preocupar com pontos finos da ciência da computação, pode ter no FORTRAN uma excelente opção de linguagem de programação. Isso se deve ao fato de que o FORTRAN possui excelentes compiladores para gerar códigos com eficiência para máquinas de alto desempenho. De acordo com Decky *et al.* (2007), é muito comum aplicativos de computação científica de alto impacto que usam milhares de processadores serem escritos na linguagem FORTRAN.

Atualmente, diversos trabalhos científicos na área de modelagem hidrológica como por exemplo Pandey *et al.* (2016), Xie *et al.* (2017) e Kim (2018) fazem uso da linguagem FORTRAN. Além desses, os modelos DRYRIOS (COSTA; BRONSTERT; De ARAÚJO,

2012) e MHIRA (FONTENELE, 2015) que foram desenvolvidos nessa mesma linguagem de programação possuem um objetivo em comum que é a possibilidade de acoplamento ao modelo WASA (*Model of Water Availability in Semi-Arid Environments*) que é um modelo distribuído, orientado a processos, desenvolvido para bacias hidrográficas de grande escala, cujo objetivo é modelar a geração de fluxo superficial e a disponibilidade hídrica em ambientes do tipo semiárido (GUENTNER, 2002; GUENTNER; BRONSTERT, 2004).

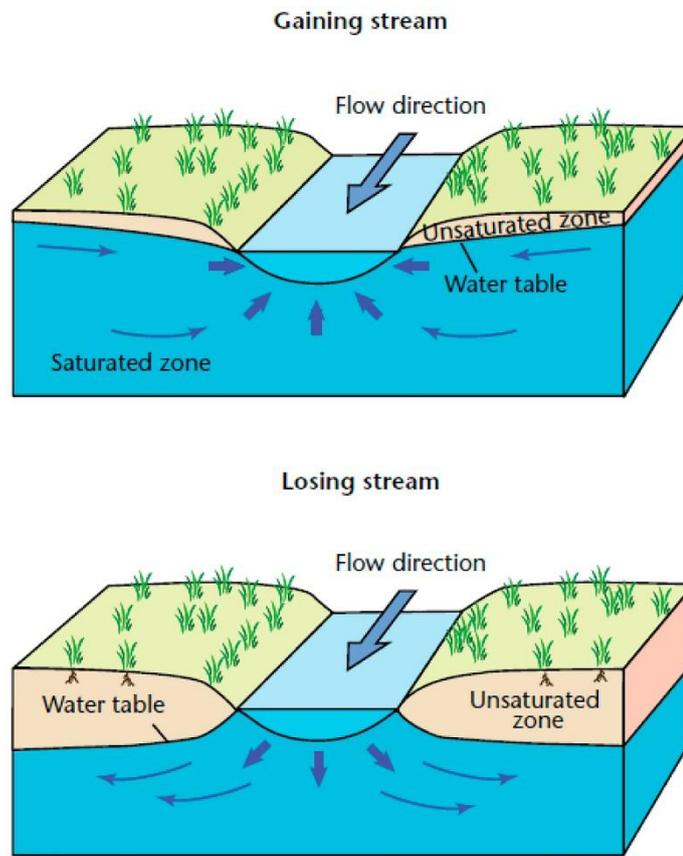
2.4 O modelo MHIRA

O modelo MHIRA (*Modelo Hidrológico de Interação Rio-Aquífero*), desenvolvido por Fontenele (2015) com base no modelo DRYRIOS (COSTA; BRONSTERT; De ARAÚJO, 2012), tem a estrutura baseada em três processos hidrológicos, a saber, a propagação do escoamento em rios naturais, a infiltração na zona não saturada de uma aluvião estratificado sob o canal e o fluxo das águas subterrâneas em aquíferos livres.

A principal diferença entre os modelos MHIRA e DRYRIOS reside na forma de modelar o fluxo das águas subterrâneas em aquífero livre. No DRYRIOS usa-se um balanço hídrico baseado na proposta de Niu *et al.* (2007) enquanto no MHIRA tem base na equação diferencial parcial simplificada que governa o fluxo subterrâneo para aquíferos livres usada no MODFLOW - *Modular three dimensional finite-difference groundwater flow model* (MCDONALD; HARBAUGH, 1988).

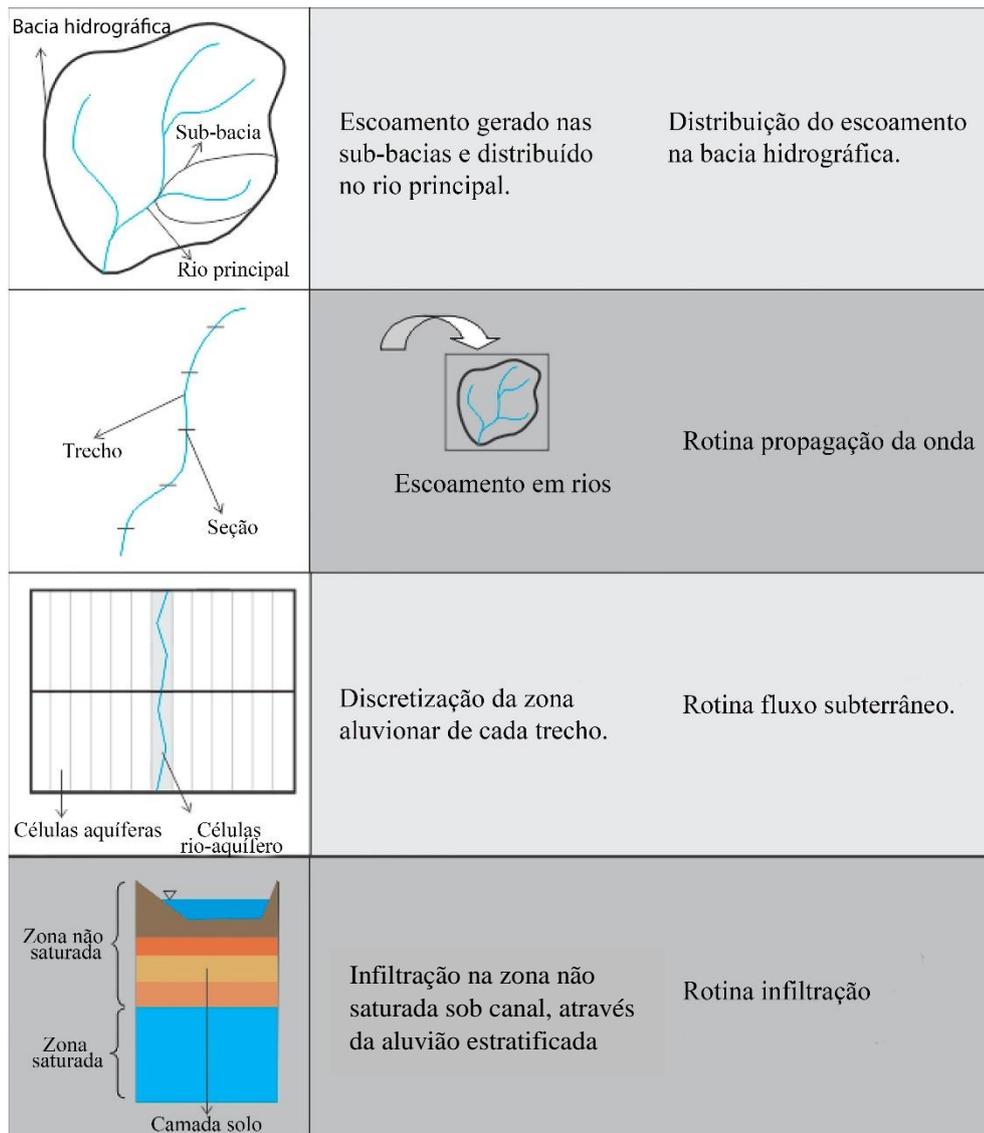
A proposta alternativa do MHIRA em modelar o fluxo subterrâneo em relação à do DRYRIOS partiu da necessidade de melhorias na representatividade do comportamento das cargas hidráulicas aquíferas que influenciam na dinâmica interativa rio-aquífero, pois durante um evento de escoamento superficial o rio pode ceder água para o aquífero (rio de perda) ou ganhar água do aquífero (rio de ganho), estas configurações podem ser vistas na Figura 7.

Figura 7 - Rio de perda/ganho em um sistema rio-aquífero hidraulicamente conectado



Fonte: Winter *et al.* (1998)

A Figura 8 ilustra uma visão geral da estrutura e das rotinas computacionais do MHIRA.

Figura 8 - Componentes estruturais do MHIRA

Fonte: Adaptado de Fontenele (2015)

As rotinas computacionais do modelo MHIRA são a propagação da onda, a infiltração e o fluxo subterrâneo. Os pressupostos físicos e formulações matemáticas destas rotinas estão descritos nas seções seguintes.

2.4.1 Rotina propagação da onda

A rotina propagação da onda foi desenvolvida a partir da equação de Saint-Venant na versão na sua formulação da equação da continuidade adaptada para considerar a sinuosidade do rio. Segue a equação base desta rotina:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + S \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = q + I_{RA} \quad (2.10)$$

Em que, Q é a descarga no canal natural [$L^3 T^{-1}$], x é o comprimento da seção ao longo do eixo do canal [L]; S é o coeficiente de sinuosidade do trecho do rio [-]; A é a área molhada da seção transversal [L^2]; t é o tempo [T]; q é a entrada de fluxo lateral por unidade de comprimento do canal [$L^3 T^{-1} L^{-1}$]; I_{RA} é o termo referente a interação rio-aquífero por unidade de comprimento do canal [$L^3 T^{-1} L^{-1}$] que pode estar relacionado com infiltração no leito do rio (sinal negativo) ou drenagem do aquífero (sinal positivo).

A solução numérica proposta por Fontenele (2015) para a Equação 2.10 parte das aproximações a seguir:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \theta \left(\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{Q_{i+1}^j - Q_i^j}{\Delta x} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A_{i+1}^{j+1} - A_{i+1}^j}{\Delta t} \quad (2.12)$$

Em que, o índice j indica a variação temporal, o índice i indica a variação espacial e θ é um fator de peso que varia de 0 até 1. Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10) obtém-se:

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{\theta \rho Q_i^{j+1} - A_{i+1}^{j+1} - (1-\theta) \rho Q_{i+1}^j + (1-\theta) \rho Q_i^j + A_{i+1}^j + \frac{\Delta t}{S_i} (q_i^j + I_{RA}^j)}{\theta \rho} \quad (2.13)$$

com $\rho = \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot S_i}$. A equação (2.13) foi o esquema numérico utilizado por Fontenele (2015) para resolver numericamente a Equação (2.10).

2.4.2 Rotina Infiltração

A rotina Infiltração teve como base as equações de Chu e Mariño (2005) que desenvolveram seu modelo de infiltração com base no modelo de Green-Ampt (1911).

Para um perfil de solo de N camadas com condutividades hidráulicas K_N [$L.T^{-1}$], sucção da frente de umedecimento Ψ_N [L], porosidades n_N [$L^3.L^{-3}$], umidade inicial do solo θ_N [$L^3.L^{-3}$] e profundidade da infiltração acumulada z_N [L]. As equações de Chu-Mariño (2005)

utilizadas por Fontenele (2015) para quando a frente de umedecimento está em uma cada y na localização z ($Z_{y-1} < z \leq Z_y$) foram

$$f_z = \frac{H_0 + z + \psi_y}{\sum_{k=1}^{y-1} \frac{Z_k - Z_{k-1}}{K_k} + \frac{z - Z_{y-1}}{K_y}} \quad (2.14)$$

$$t_z = t_{z_{y-1}} + \frac{(\eta_y - \theta_y) \cdot (z - Z_{y-1})}{K_y} + (\eta_y - \theta_y) \cdot \left[\sum_{k=1}^{y-1} Z_k \left(\frac{1}{K_k} - \frac{1}{K_{k+1}} \right) - \frac{\psi_y + H_0}{K_y} \right] \cdot \ln \left(\frac{z + \psi_y + H_0}{Z_{y-1} + \psi_y + H_0} \right) \quad (2.15)$$

A Equação (2.14) modela a taxa de infiltração f_z [LT^{-1}] e a Equação (2.15) o tempo de viagem t_z [T] da frente de umedecimento. O termo H_0 é o empoçamento [L] variável que na proposta de Chu e Mariño (2005) é considerado nulo.

2.4.3 Rotina Fluxo subterrâneo

A presente rotina foi desenvolvida a partir da versão unidimensional da equação diferencial que governa o fluxo subterrâneo para aquíferos livres adotada pelo modelo MODFLOW (MCDONALD; HARBAUGH, 1988). As hipóteses simplificadoras adicionais de Fontenele (2015) foi considerar o aquífero como um meio homogêneo e isotrópico. Segue a equação base para esta rotina:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(hK \frac{\partial h}{\partial x} \right) + W = S_y \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.16)$$

Em que, K é a condutividade hidráulica [$L T^{-1}$]; h é a carga hidráulica [L]; W é o termo associado a fonte ou sumidouro do aquífero [$L T^{-1}$]; S_y é a produção específica do aquífero livre [-]; e t é o tempo [T]. Segue uma breve descrição da solução numérica desenvolvida por Fontenele (2015) para a Equação (2.16).

Aplicando a regra da derivada do produto, a Equação 2.16 pode ser reescrita como segue

$$\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{W}{K} = \frac{S}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.17)$$

A Equação 2.17 pode ser escrita sob a forma de diferenças finitas explícitas como segue:

$$\left(\frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x}\right)^2 + h_i^n \cdot \left(\frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{W}{K} = \frac{S}{K} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \quad (2.18)$$

Os índices n e i representam, respectivamente, a variação temporal e espacial. Isolando h_i^{n+1} da Equação 2.18, obtém-se

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \rho \cdot \left(\frac{h_{i-1}^n h_i^n - h_i^n h_i^n - h_i^n h_{i+1}^n + h_{i+1}^n h_{i+1}^n}{\Delta x}\right) + W' \quad (2.19)$$

Em que

$$\rho = \frac{k\Delta t}{S\Delta x} \quad e \quad W' = \frac{W}{K} \quad (2.20)$$

O esquema numérico resolutivo desenvolvido por Fontenele (2015) para a Equação (2.16) é composto pelas igualdades (2.19) e (2.20).

2.4.4 Dados de entrada para o modelo MHIRA

Os dados de entrada necessários para a execução do modelo MHIRA estão descritos na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 - Parâmetros necessários para executar o modelo MHIRA

Componente	Parâmetro
Sistema rio	Número de trechos de rio Comprimento do canal [L] por trecho Coeficientes de sinuosidade [-] por trecho Coeficientes das equações de regressão: Qr x Hr; Hr x Ar; Hr x Pr
Camada de solo	Número de camadas de solo [-] Condutividade hidráulica saturada [LT ⁻¹] por camada Carga de sucção da frente de umidade [L] por camada Porosidade efetiva [L ³ L ⁻³] por camada Umidade residual [L ³ L ⁻³] por camada
Malha subterrânea	Número de colunas aquíferas pro trecho [-] Locação da célula rio-aquífero [-] por trecho de rio Largura da coluna aquífera [L] Condutividade hidráulica saturada [LT ⁻¹] Condutância do leito do rio [L ² T ⁻¹] Porosidade efetiva [-]

Fonte: Fontenele (2015)

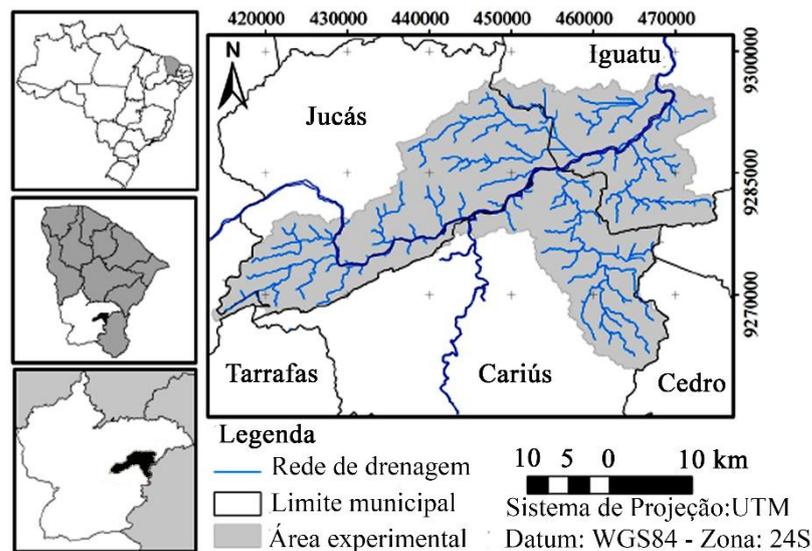
Na Tabela 1, Q_r é a descarga superficial [$L^3 T^{-1}$], H_r é carga hidráulica na seção transversal do rio [L], A_r é a área molhada na seção transversal do rio [L^2] e P_r é o perímetro molhado na seção transversal do rio [L]. E os coeficientes das equações de regressão nas correlações são usados para gerar dados de H_r , A_r e P_r a partir dos valores de Q_r gerados na propagação da onda (FONTENELE, 2015).

3 ÁREA DE ESTUDO

3.1 Características gerais

A área experimental de estudo situa-se na bacia do Alto do Jaguaribe, centro-sul do estado do Ceará, região semiárida do nordeste brasileiro (vide FIGURA 9).

Figura 9 – Área experimental de estudo



Fonte: Adaptado de Fontenele (2015)

A área de drenagem da área experimental de estudo é de 1.014 Km² na qual está contida um trecho de 63 km do rio Jaguaribe, que é o segundo maior rio intermitente do Brasil (COSTA *et al.*, 2013).

3.2 Clima

O clima na área experimental é do tipo semiárido quente, nos meses de setembro a dezembro a temperatura média nas regiões planas é de 34°C e nas áreas serranas é de 25°C. Já nos meses de junho a agosto a temperatura média nos terrenos mais baixo é de 24°C e nas áreas mais elevadas é de 19°C (BRASIL, 1998).

A área experimental apresenta uma variabilidade pluviométrica significativa em escalas interanual, sazonal e temporal. O ciclo anual na área de precipitação pluviométrica é determinado pela Zona de Convergência intertropical. A precipitação média anual de 800 mm e evaporação potencial anual de 2000 mm (WERNER; GERSTENGARBE, 2003).

3.3 Fisiografia

As características fisiográficas da área experimental de estudo foram determinadas por Fontenele (2015) e encontram-se resumidas na Tabela 2.

Tabela 2 - Atributos Fisiográficos da área experimental

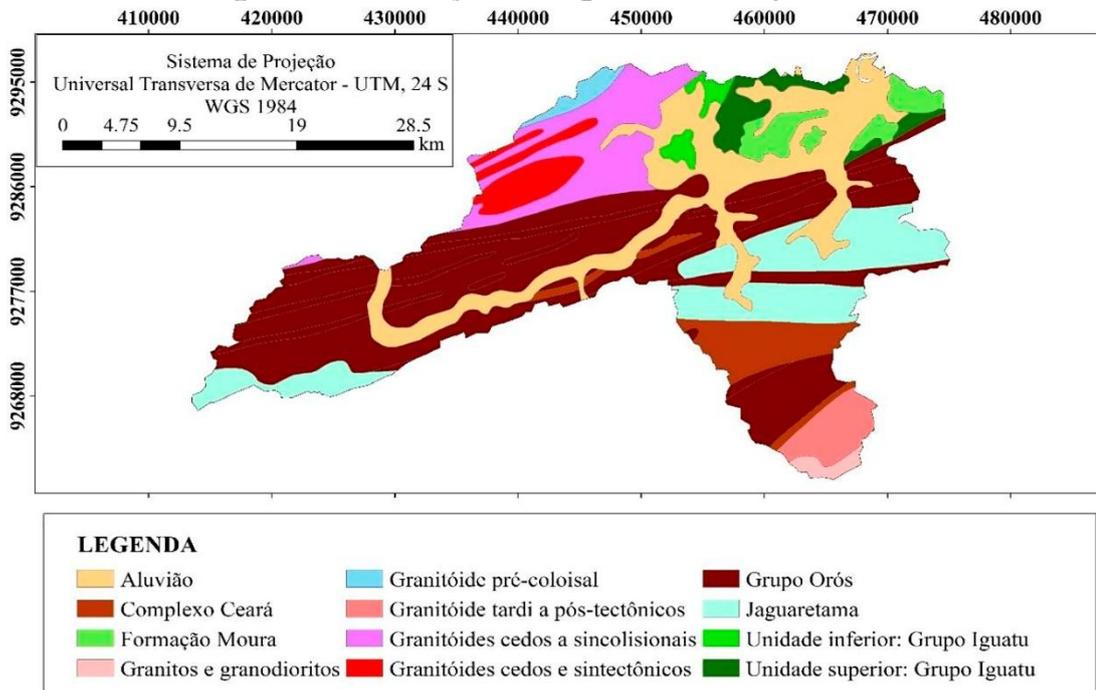
Atributos Fisiográficos	Valor	Unidade
Área	1013,72	Km ²
Comprimento da rede de drenagem	567,24	Km
Densidade da rede de drenagem	0,56	Km Km ⁻²
Maior cota topográfica	638,00	m
Menor cota topográfica	211,00	m
Declividade média	8,00	mKm ⁻¹
Sinuosidade do curso principal	1,43	-
Coefficiente de Compacidade	2,72	-
Fator de Forma	0,52	h
Tempo de concentração (Kirpich)	30,76	Km
Perímetro	309,78	Km
Comprimento do curso principal	63,00	Km

Fonte: Fontenele (2015)

3.4 Geologia

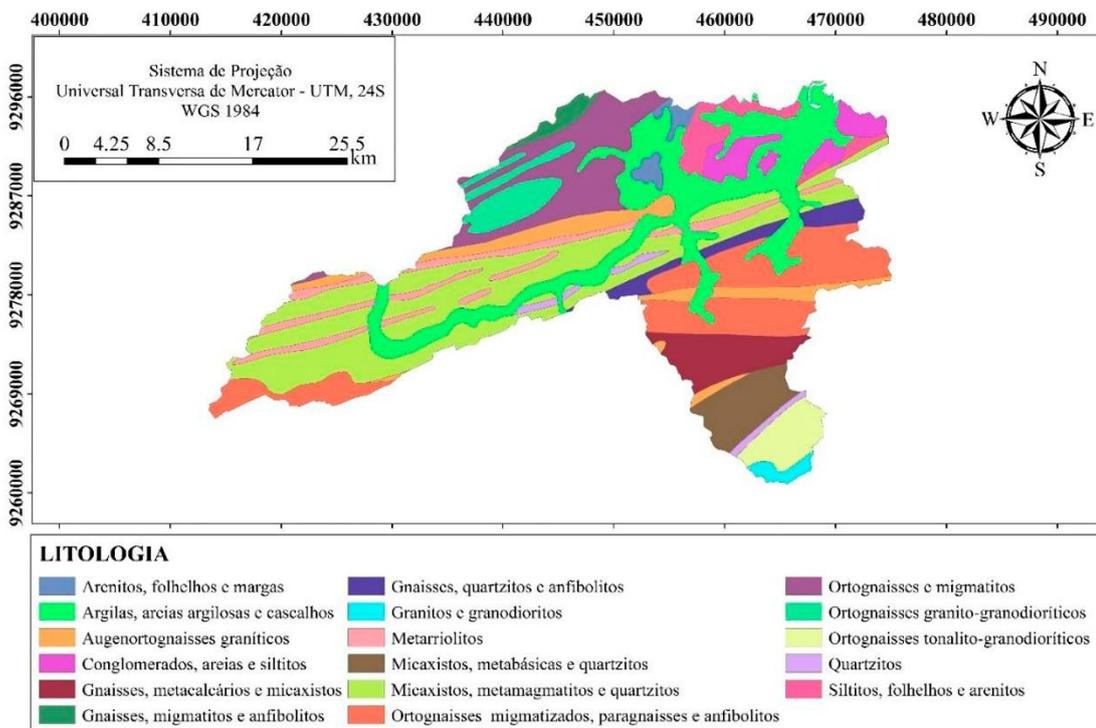
A geologia da área experimental é predominantemente cristalina e por estar situada na bacia do Alto Jaguaribe, sua região sedimentar é composta por aquíferos aluvionares não confinados (MALVEIRA; De ARAÚJO; GÜNTNER, 2012). De acordo com Silva (2018) a formação geológica aluvionar da SBHPCI possui uma litologia típica composta por argilas, areia argilosa e cascalho. As Figuras 10 e 11 apresentam, respectivamente, as principais formações geológicas e a heterogeneidade da litológica da SBHPCI.

Figura 10 - Formação Geológica da área experimental



Fonte: Silva (2018)

Figura 11 – Litologia da área experimental

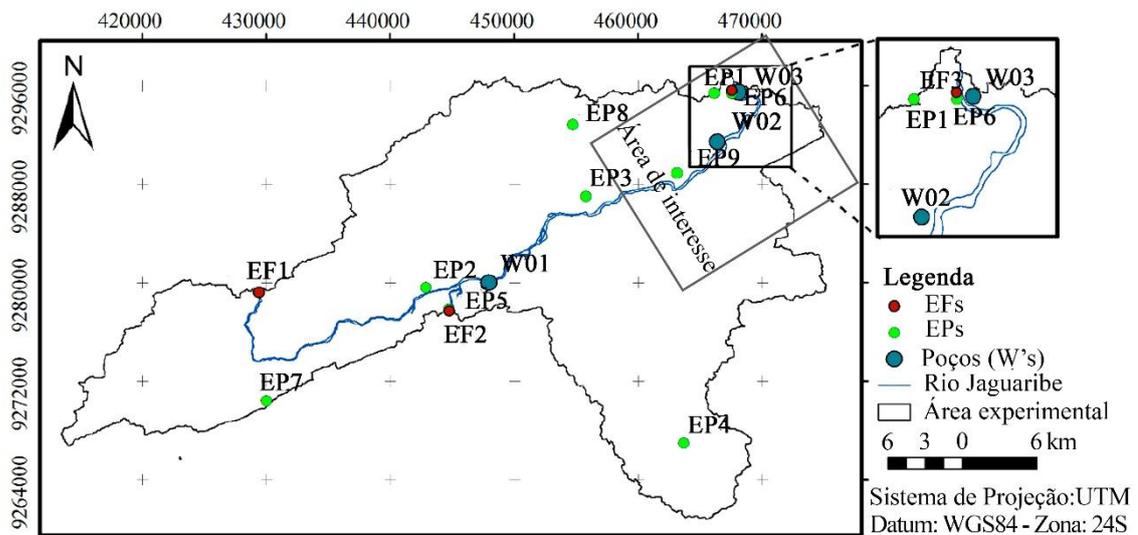


Fonte: Silva (2018)

4 METODOLOGIA

Os dados utilizados no presente trabalho referem-se ao período de abril de 2010 a novembro de 2013. As precipitações e vazões foram obtidas da Fundação Cearense de Meteorologia (FUNCEME), da Agência Nacional das Águas (ANA) e da Companhia de Pesquisa dos Recursos Hídricos (CPRM), disponibilizadas no sistema Hidrotelemetria (<http://www.snirh.gov.br/hidrotelemetria/Mapa.aspx>). Já as cargas hidráulicas aquíferas foram obtidas do trabalho de monitoramento de Fontenele (2015) por meio de sensores de pressão Hobo water level (Onset®). As localizações e informações das estações pluviométricas (EP1 - EP9) e fluviométricas (EF1 - EF3) e dos poços (W1 - W3) encontram-se na Figura 12 e na Tabela 3.

Figura 12 – Estações de monitoramento de dados hidrológicos na área experimental



Fonte: Adaptado de Fontenele (2015)

Tabela 3 - Estações de monitoramento fluviométrico, pluviométrico e de níveis freáticos presentes na SBHPCI

ID	Localização	Coordenada UTM		Variável	Intervalo de Tempo	Órgão Responsável
		Latitude (Y)	Longitude (X)			
EF1	rio Jaguaribe/ sítio Patos/ Jucás	9279206	429393	Vazão	1 dia	CPRM/ANA
EF2	rio Cariús/z. urbana/ Cariús	9277688	444751	Vazão	1 dia	CPRM/ANA
EF3	rio Jaguaribe/z. urbana/ Iguatu	9295639	467559	Vazão	1 dia	CPRM/ANA
EP1	Iguatu	9295402	466146	Precipitação	1 dia	FUNCEME
EP2	Jucás	9279652	442876	Precipitação	1 dia	FUNCEME

EP3	Barro Alto/Iguatu	9287034	455770	Precipitação	1 dia	FUNCEME
EP4	Caipú/Cariús	9266773	464997	Precipitação	1 dia	FUNCEME
EP5	Cariús	9277812	444721	Precipitação	1 dia	FUNCEME
EP6	Iguatu	9294964	467498	Precipitação	1 dia	CPRM/ANA
EP7	São Sebatião/ Cariús	9270425	429988	Precipitação	1 dia	FUNCEME
EP8	Baú/Iguatu	9292561	455765	Precipitação	1 dia	FUNCEME
EP9	Quixoa/Iguatu	9288881	463140	Precipitação	1 dia	FUNCEME
W01	Sítio Lobato/ Cariús	9280051	447964	Nível Freático	6 horas	FONTENELE (2015)
W02	Penha/Iguatu	9292475	466412	Nível Freático	6 horas	FONTENELE (2015)
W03	SAE/Iguatu	9295539	468145	Nível Freático	6 horas	FONTENELE (2015)

Fonte: Adaptado de Fontenele (2015)

O presente trabalho fez uso da mesma caracterização textural das camadas da aluvião estratificada utilizadas no modelo MHIRA, das quais se obteve a porosidade, a sucção da frente de umedecimento e a condutividade hidráulica saturada a partir de Rawls, Brakensiek e Miller (1983), já a produção específica foi determinada a partir de Johnson (1967). A Tabela 4 apresenta as texturas das camadas e os valores representativos dos parâmetros associados.

Tabela 4 - Textura e parâmetros das camadas da aluvião estratificada

Textura	Porosidade (cm ³ /cm ³)	Sucção da frente de umedecimento (cm)	Condutividade hidráulica saturada (m/s)	Produção específica (%)
Areia	0,437	4,95	3,27x10 ⁻⁵	27
Areia argilosa	0,430	23,90	1,67x10 ⁻⁷	7
Argila	0,475	31,63	8,33x10 ⁻⁸	2

Fonte: Próprio autor

A malha do modelo ficou limitada à zona aluvionar dentro da área de interesse (Figura 12) que contém o trecho do rio monitorado. Na definição da malha determina-se, levando em consideração os dados disponíveis à simulação, o número de trechos do rio modelado, colunas aquíferas em cada trecho, profundidade do sistema aquífero e número de subcamadas do solo de acordo com a disponibilidade de dados.

O hidrograma de entrada foi definido, como em Costa, Bronstert e de Araújo (2012) e Fontenele (2015), pela soma das vazões observadas nas estações fluviométricas EF1 e EF2. A infiltração foi considerada apenas sob o leito do rio. Para isso, definiu-se uma função que

identifica se uma célula da malha é uma célula rio/aquífero. Caso verifique-se a ocorrência, o valor um é atribuído às células nas colunas subjacente ao rio e zero nas demais.

A condutividade hidráulica saturada representativa para o fluxo subterrâneo foi tomada como a média ponderada das condutividades hidráulicas calibradas tendo como pesos as espessuras das camadas. E a produção específica foi definida por calibração, adotando a faixa de valores de 0,01 a 0,25 (Tabela 4).

Na calibração dos parâmetros do modelo utilizou-se o Coeficiente de Eficiência proposto por Nash e Sutcliffe (1970) (CENS) dado pela Equação 4.1 e o Erro Médio Absoluto (EMA) dado pela Equação 4.2.

$$CENS = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N (Q_t^{obs} - Q_t^{calc})^2}{\sum_{t=1}^N (Q_t^{obs} - Q_m^{obs})^2} \quad (4.1)$$

Em que, Q_t^{obs} é a vazão observada na seção de saída do canal, Q_t^{calc} é a vazão calculada na seção de saída do canal e Q_m^{obs} é a média das vazões observadas na saída do canal.

$$EMA = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |H_t^{obs} - H_t^{calc}| \quad (4.2)$$

Em que, N é o número de passos de tempo do evento, H_t^{obs} é a carga hidráulica aquífera observada no poço de monitoramento e H_t^{calc} é a carga hidráulica aquífera calculada pelo modelo.

Segundo Gupta, Sorooshian e Yapo (1999) o CENS é sempre menor que 1, mais precisamente, $-\infty < CENS \leq 1$. Ainda segundo esses autores valores do CENS negativo é um indicativo de que é preferível usar a média dos dados observados do que usar o valor estimado pelo modelo enquanto valores positivos do CENS sugerem aceitabilidade do modelo quanto a estimativa dos valores observados (no presente trabalho as vazões). Já o EMA é sempre não negativo e quanto mais próximo estiver de zero, o EMA mais próximo estão os valores das cargas hidráulicas aquíferas calculadas e medidas. Neste trabalho, o EMA foi usado para avaliar se as cargas hidráulicas aquíferas calculadas representam o comportamento das observadas.

Na calibração ajustou-se apenas os parâmetros mais sensíveis do modelo que foram identificados após uma análise de sensibilidade. O processo de calibração foi manual, por tentativa e erro, buscando maximizar o CENS e minimizar o EMA simultaneamente.

Quatro eventos de cheias observados por Fontenele (2015) foram utilizados para o desenvolvimento do presente trabalho. Um deles foi usado na calibração do modelo e os outros três na validação. O desempenho do modelo na determinação das cargas hidráulicas aquíferas deu-se usando o EMA. Já o desempenho do modelo na determinação do hidrograma calculado considerando as trocas hídricas rio-aquífero deu-se avaliando o CENS e os erros relativos cometidos no cálculo do pico das vazões e do volume escoado. Os resultados obtidos pelo presente modelo foram comparados com os do modelo MHIRA.

Os três eventos de cheias usados no presente trabalho foram caracterizados em relação à perdas em trânsito a partir da taxa de variação volumétrica relativa de acordo com Costa *et al.* (2013). Segundo estes autores, as perdas em trânsitos (PT) [$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$] podem ser avaliadas pela equação

$$PT = \frac{\text{output} - \text{input}}{\text{input}} \quad (4.3)$$

Em que, output é a vazão volumétrica de medida a jusante do canal [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$] e input é a vazão volumétrica medida à montante do canal [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$].

Sendo que:

- a) Se $PT \approx -1$, a vazão volumétrica de entrada foi completamente anulada pelas perdas em trânsito;
- b) Se $-1 < PT < 0$, as perdas em trânsito foram relevantes reduzindo a vazão volumétrica de entrada;
- c) Se $PT \approx 0$, as perdas em trânsito são praticamente nulas ou foram compensadas pelas contribuições da área de drenagem;
- d) Se $PT > 0$, as contribuições da área de drenagem superam as perdas em trânsito.

No desenvolvimento do presente modelo (MHIRA 2.0) foi mantida a estrutura base do modelo MHIRA (Figura 8) e foram propostas mudanças matemática-computacionais nas rotinas propagação da onda, infiltração em solo de multicamadas e fluxo subterrâneo.

O método numérico utilizado para resolver as equações diferenciais governantes dos processos hidrológicos foi o método das diferenças finitas com esquema do tipo implícito para evitar problemas de instabilidade numérica.

As condições de contorno das equações diferenciais usadas no modelo MHIRA 2.0 são as de Dirichlet e nas condições iniciais foram utilizados dados valores de área molhada, perímetro molhado, vazão, umidade do solo e nível freático.

O FORTRAN foi a linguagem de programação utilizada para escrever o código computacional do MHIRA 2.0. Essa mesma linguagem também foi usada no desenvolvimento do MHIRA.

5 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados o desenvolvimento matemático-computacional das rotinas do modelo MHIRA 2.0, as diferenças entre cada rotina do presente modelo e do MHIRA, o resultado da análise de sensibilidade, as respostas do MHIRA 2.0 no processo de calibração e a análise de desempenho dos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA na determinação dos hidrogramas nos eventos usados para validação.

5.1 Rotina propagação da onda no MHIRA 2.0

Uma das equações básica para a rotina Propagação de Onda é a equação de Saint-Venant sob a forma clássica da equação da continuidade clássica. No caso, é a mesma Equação 2.10 adotada por Fontenele (2015), porém sem o fator multiplicativo que faz referência a sinuosidade do rio [-]. As hipóteses simplificadoras para esta equação (CHOW, 1959; CHOW; MAIDMENT; MAYS, 1988) são:

- a) O escoamento é unidimensional. A profundidade e a velocidade variam apenas na direção longitudinal do canal;
- b) O escoamento varia gradualmente ao longo do canal de modo que a pressão hidrostática prevalece e as acelerações verticais são desprezadas;
- c) O eixo longitudinal do canal é retilíneo(aproximadamente);
- d) O canal possui uma declividade baixa;
- e) A declividade da linha de energia pode ser determinada por uma equação estabelecida para o regime permanente e uniforme como a equação de Manning;
- f) O fluido é incompressível e de densidade constante ao longo do fluxo.

A equação

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q \quad (5.1)$$

Em que, Q é a descarga no canal natural [$L^3 T^{-1}$], x é o comprimento da seção ao longo do eixo do canal [L]; S é o coeficiente de sinuosidade do trecho do rio [-]; A é a área molhada da seção transversal [L^2]; t é o tempo [T]; q é a entrada de fluxo lateral por unidade de comprimento do canal [$L^3 T^{-1} L^{-1}$]; É a equação de Saint-Venant sob a forma da equação da continuidade.

Chow, Maidment e Mays (1988) deduzem a Equação 5.1 como consequência dos pressupostos supramencionados, Teorema do Transporte de Reynolds e a lei da conservação da massa.

Na rotina propagação da onda do MHIRA 2.0 utiliza-se o método da propagação da onda cinemática baseado no trabalho desenvolvido por Li, Simons e Stevens (1975). São duas as equações básicas para a rotina Propagação de Onda, uma dada pela versão da equação da continuidade da equação de Saint-Venant (Equação 5.2) e a outra é a equação da energia (Equação 5.3):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q + I_{RA} \quad (5.2)$$

Em que o termo I_{RA} é o termo referente à interação rio-aquífero por unidade de comprimento do canal [$L^3 T^{-1} L^{-1}$] que pode estar relacionado com infiltração no leito do rio (sinal negativo) ou drenagem do aquífero (sinal positivo).

$$A = \alpha Q^\beta \quad (5.3)$$

Em que, Q é a descarga no canal natural [$L^3 T^{-1}$], A é a área molhada da seção transversal [L^2] e α e β são constates numéricas [-]. Tal equação expressa a área molhada A como uma função potência que depende da vazão Q .

Assim, tomando a derivada parcial em relação a t da Equação 5.3 obtém-se:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha \beta Q^{(\beta-1)} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (5.4)$$

Substituindo a Equação 5.4 na Equação 5.2 obtém-se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha \beta Q^{(\beta-1)} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = q + I_{RA} \quad (5.5)$$

A Equação 5.2 possui duas variáveis, a vazão Q e a área molhada A . Usando a Equação 5.3 modifica-se a forma da Equação 5.2 para uma versão que possui apenas uma variável transiente, a saber a vazão Q .

No entanto, com algumas manipulações algébricas aplicadas à Equação 5.3 consegue-se expressar Q como uma função potência da área molhada. Para isto basta observar que (5.3) implica em

$$Q = \tau A^\gamma \quad (5.6)$$

Em que,

$$\tau = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad e \quad \gamma = \frac{1}{\beta} \quad (5.7)$$

Adotando-se um procedimento análogo as manipulações matemáticas que permitiram chegar na Equação 5.5 utilizando a Equação 5.3, é possível utilizando a Equação 5.6, obter uma versão da Equação (5.2) similar Equação (5.5), porém tendo como A (área molhada) a única variável.

Assim, a princípio, é possível desenvolver um método numérico baseado numa versão modificada da Equação 5.2 que depende de apenas uma variável. No caso dependeria apenas de Q se for usado a Equação 5.3 ou dependeria apenas de A se for usado a Equação 5.6.

A razão pela qual nesse modelo usou-se a Área molhada como função potência da Vazão (Equação 5.3) e não o contrário, é porque essa escolha faz com que os erros relativos de cálculo numérico não sejam amplificados, que é uma característica desejável em um método numérico de solução de uma equação diferencial. Isso pode ser visto tomando-se o logaritmo natural na Equação 5.3

$$\ln(A) = \ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(Q) \quad (5.8)$$

Da Equação (5.8) obtém-se a seguinte equação diferencial correspondente

$$\frac{dA}{A} = \beta \frac{dQ}{Q} \quad (5.9)$$

Tendo em vista a Equação 5.9 temos que se adotarmos A como função de Q como na Equação 5.3 os erros de cálculo numéricos não aumentam tendo em vista que neste estudo

$0 < \beta < 1$. Se, porém, Q for tomado como função potência de A, teríamos ampliação de erros relativos pois $\frac{1}{\beta} > 1$.

5.1.1 Método numérico para resolver as equações básicas da rotina Propagação da Onda

Neste método de solução numérica foram implementados dois esquemas (1) Esquema não linear e (2) Esquema linear. O esquema não linear faz uso do método das diferenças finitas com formulação implícita e o esquema linear usa uma formulação explícita. As subseções que seguem explicam em detalhes esses esquemas e como eles interagem entre si para resolver as equações base da presente rotina.

5.1.1.1 Esquema não linear

A Equação 5.2 pode ser aproximada em diferenças finitas da seguinte forma

$$\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + \frac{A_{i+1}^{j+1} - A_{i+1}^j}{\Delta t} = \frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} + \frac{Ira_{i+1}^{j+1} + Ira_{i+1}^j}{2} \quad (5.10)$$

Da Equação 5.3 tem-se que

$$A_{i+1}^{j+1} = \alpha(Q_{i+1}^{j+1})^\beta \quad e \quad A_{i+1}^j = \alpha(Q_{i+1}^j)^\beta \quad (5.11)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação 5.10 por Δt , obtém-se:

$$\Delta t \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + (A_{i+1}^{j+1} - A_{i+1}^j) = \Delta t \left(\frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} + \frac{Ira_{i+1}^{j+1} + Ira_{i+1}^j}{2} \right) \quad (5.12)$$

Substituindo as igualdades de (5.11) na Equação 5.12 obtém-se

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} Q_{i+1}^{j+1} + \alpha(Q_{i+1}^{j+1})^\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i^{j+1} + \alpha(Q_{i+1}^j)^\beta + \Delta t \left(\frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} + \frac{Ira_{i+1}^{j+1} + Ira_{i+1}^j}{2} \right) \quad (5.13)$$

A Equação 5.13 é não linear em Q_{i+1}^{j+1} . Além disso, Q_{i+1}^{j+1} é a única variável desconhecida desta equação. As demais quantidades envolvidas nesta equação ou são constantes numéricas, ou parâmetros previamente determinados, ou variáveis que foram determinadas ou do passo iterativo anterior ou das condições de fronteiras ou das condições iniciais.

O valor de Q_{i+1}^{j+1} tal que a Equação 5.13 é satisfeita não pode ser obtido diretamente com as manipulações algébricas convencionais. Dito em outros termos, a raiz $r = Q_{i+1}^{j+1}$ da Equação 5.13 deve ser obtida implicitamente. A ferramenta matemática aqui utilizada para resolver esse problema é o método de Newton.

A fim do método de Newton determinar a raiz $r = Q_{i+1}^{j+1}$ da Equação 5.13 se faz necessário estimar um valor inicial para esta raiz. A partir dessa estimativa inicial o método de Newton busca iterativamente pela raiz da equação. O número de iterações necessárias para que este método encontre a raiz procurada depende do critério de convergência (aqui estabelecido de forma análoga a Li, Simons e Stevens (1975)) e da estimativa inicial para a raiz.

Assim, uma vez estabelecido o critério de convergência, quanto melhor for a estimativa inicial para a raiz, menor é a quantidade de passos iterativos para chegar na estimativa que satisfaz tal critério. De acordo com Li, Simons e Stevens (1975) o Esquema Linear, explicado a seguir, fornece a melhor estimativa inicial para a determinação da raiz $r = Q_{i+1}^{j+1}$ da Equação 5.13 via método de Newton.

5.1.1.2 Esquema linear

Neste esquema é usada a seguinte aproximação em diferenças finitas para a Equação 5.5:

$$\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + \alpha\beta \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \left(\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{\Delta t} \right) = \frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} + \frac{Ira_{i+1}^{j+1} + Ira_{i+1}^j}{2} \quad (5.14)$$

Na aproximação em diferenças finitas da Equação 5.5 tem-se que o termo $Q^{(\beta-1)}$ foi aproximado por $\left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1}$ diferentemente da aproximação desse tipo de termo no esquema não linear que foi $(Q_{i+1}^{j+1})^{\beta-1}$. Este tipo de aproximação é o que se denomina de linearização fazendo referência ao nome do esquema.

Isolando-se Q_{i+1}^{j+1} na Equação 5.14 obtém-se

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i^{j+1} + \alpha \beta Q_{i+1}^j \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} + \Delta t \left(\frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} + \frac{Ira_{i+1}^{j+1} + Ira_{i+1}^j}{2} \right)}{\frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha \beta \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1}} \quad (5.15)$$

Na Equação 5.15, a vazão a ser estimada é determinada pelo esquema explícito. A solução desta equação é a melhor estimativa inicial para a solução da Equação 5.13 via método de Newton.

Se na Equação 5.15 ocorrer que Q_{i+1}^j e Q_i^{j+1} são ambos iguais a zero, tem-se que

$$\left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} = 0^{\overset{\leq 0}{\beta-1}} \quad (5.16)$$

Portanto, a inconsistência observada em (5.16) mostra que a Equação (5.15) não é aplicável quando Q_{i+1}^j e Q_i^{j+1} são ambos nulos. Em tal caso, troca-se a Equação 5.15 pela equação adaptada daquela recomendada por Li, Simons e Stevens (1975) nesta situação, a saber

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i^{j+1} + \alpha (Q_{i+1}^j)^{\beta} + \Delta t \left(\frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} + \frac{Ira_{i+1}^{j+1} + Ira_{i+1}^j}{2} \right)}{\frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha} \quad (5.17)$$

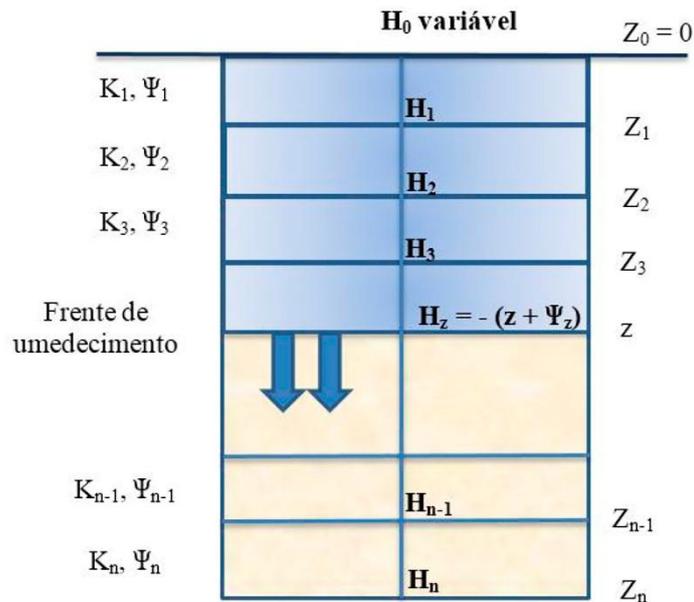
5.2 Desenvolvimento da rotina Infiltração

A rotina de infiltração desenvolvida no MHIRA 2.0 tem por objetivo estimar a taxa de infiltração e determinar o tempo de viagem da frente ao longo das camadas não saturadas do solo e tem como base as mesmas equações adaptadas de Chu e Mariño (2005) usadas no modelo MHIRA.

Uma forma de obter as versões das equações bases da presente rotina é adotar um procedimento análogo destes autores na obtenção das equações por eles desenvolvidas, porém considerando desde o princípio uma carga variável na superfície. Com efeito, considerando um perfil de solo, com empçamento H_0 variável, subdividido em n camadas (Figura 13) e sejam dados os nas camadas 1, 2, ..., n , respectivamente, as condutividades hidráulicas saturadas K_1 , K_2 , ..., K_n ; as cargas hidráulicas H_1 , H_2 , ..., H_n ; as sucções da frente de umedecimento Ψ_1 , Ψ_2 ,

..., Ψ_n com profundidades Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Além disso, o parâmetro H_z que representa a carga hidráulica numa profundidade z qualquer é dado em função da posição z da frente de umedecimento e da carga sucção Ψ_z nessa profundidade, mais precisamente $H_z = -(z + \Psi_z)$.

Figura 13 - Esquema da modelagem da infiltração da água no solo em camadas



Fonte: Adaptado de Chu-Mariño (2005)

Assim, admitindo como em Chu e Mariño (2005) o equilíbrio hidráulico instantâneo quando a frente de umedecimento passa pelas interfaces de camadas de solo distintas, deduz-se as equações da taxa de infiltração e do tempo de viagem da frente de umedecimento ao longo de cada camada descritos nas subseções a seguir.

5.2.1 Frente de umedecimento na camada 1

Neste caso a profundidade da frente de umedecimento é z com $0 < z \leq Z_1$. Expressando a taxa de infiltração f_z pela lei de Darcy tem-se que:

$$f_z = V_1 = -K_1 \frac{dH}{dz} = \frac{K_1}{z - z_0} (H_0 - H_z) = \frac{K_1}{z} (H_0 + z + \Psi_1) \quad (5.18)$$

Em que V_1 é a velocidade de percolação da água na camada 1 do solo [L/T];

A infiltração acumulada F_z é dada por:

$$F_z = z(\eta_1 - \theta_1) = z\Delta\theta_1 \quad (5.19)$$

Em que η_1 é a porosidade na camada 1 [L^3/L^3]; θ_1 é a umidade inicial na camada 1; $\Delta\theta_1$ é a diferença entre a porosidade e a umidade inicial na camada 1 [L^3/L^3].

Sabendo que

$$f_z = \frac{dF_z}{dt} \quad (5.20)$$

Aplicando a regra da cadeia a Equação 5.20, obtém-se:

$$f_z = \frac{dF_z}{dt} = \frac{dF_z}{dz} \frac{dz}{dt} \quad (5.21)$$

Assim das Equações 5.19 e 5.21 chega-se em:

$$f_z = \frac{dz}{dt} \Delta\theta_1 \quad (5.22)$$

E as Equações 5.18 e 5.22 fornecem:

$$\int_0^{t_z} dt = \int_0^z \frac{\Delta\theta_1 z}{K_1(z + \Psi_1 + H_0)} dz \quad (5.23)$$

Resolvendo a Equação 5.23 obtém-se:

$$t_z = \frac{\Delta\theta_1}{K_1} z - \frac{\Delta\theta_1(\Psi_1 + H_0)}{K_1} \ln\left(\frac{z + \Psi_1 + H_0}{\Psi_1 + H_0}\right) \quad (5.24)$$

A Equação 5.24 fornece o tempo de viagem para que a frente de umedecimento leva para chegar na profundidade z localizada na camada 1.

5.2.2 Frente de umedecimento na camada 2

Neste caso a profundidade da frente de umedecimento é z com $Z_1 < z \leq Z_2$. Considerando a velocidade da frente de umedecimento uniforme temos:

$$f_z = V_1 = V_2 \quad (5.25)$$

Das igualdades em (5.25), obtém-se

$$\frac{K_1}{z_1 - z_0} (H_0 - H_1) = \frac{K_1}{z - z_1} (H_1 - H_z) \quad (5.26)$$

A partir da Equação 5.26 e da condição de fronteira inferior dada por $H_z = - (z + \Psi_z) = - (z + \Psi_2)$ obtém-se:

$$H_1 - H_0 = - \frac{z + \Psi_2 + H_0}{\frac{K_1}{z_1} \left(\frac{z_1 + z - z_1}{K_1 + K_2} \right)} \quad (5.27)$$

Multiplicando ambos os membros da Equação 5.27 por K_1/Z_1 e tendo em vista as igualdades em (5.25), obtém-se

$$f_z = \frac{z + \Psi_2 + H_0}{\left(\frac{z_1}{K_1} + \frac{z - z_1}{K_2} \right)} \quad (5.28)$$

A infiltração acumulada é dada por:

$$F_z = F_{z_1} + (z - z_1)(\eta_2 - \theta_2) = (z_1 - z_0)\Delta\theta_1 + (z - z_1)\Delta\theta_2 \quad (5.29)$$

Em que η_2 é a porosidade na camada 2 [L^3/L^3]; θ_2 é a umidade inicial na camada 2; $\Delta\theta_2$ é a diferença entre a porosidade e a umidade inicial na camada 2 [L^3/L^3].

Das Equações 5.21, 5.28 e 5.29 obtém-se

$$t_z = t_{z_1} + \frac{\Delta\theta_2}{K_2} (z - z_1) + \Delta\theta_2 \left[z_1 \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right) - \frac{\Psi_2 + H_0}{K_2} \right] \ln \left(\frac{z + \Psi_2 + H_0}{z_1 + \Psi_2 + H_0} \right) \quad (5.30)$$

A Equação 5.30 fornece o tempo de viagem que a frente de umedecimento leva para chegar na profundidade z localizada na camada 2. O termo t_{z_1} desta equação é determinado usando a Equação 5.24.

5.2.3 Frente de umedecimento na camada $n \geq 3$

Procedendo com um raciocínio análogo ao feito para o caso $n = 2$, quando a frente de umedecimento estiver na profundidade z ($Z_{n-1} < z \leq Z_n$), considerando a velocidade uniforme da frente de umedecimento e a condição de fronteira inferior dada por $H_z = -(z + \Psi_z)$, chega-se, para todo $i = 2, 3, \dots, n$, em:

$$H_i = \frac{(\alpha_{i-1} + \alpha_i)H_{i-1} - \alpha_i H_{i-2}}{\alpha_i} \quad (5.31)$$

Em que os α_i 's são dados por:

$$\alpha_i = \frac{K_i}{z_i - z_{i-1}} \quad (5.32)$$

Por conseguinte, obtém-se:

$$H_1 - H_0 = - \frac{z + \Psi_n + H_0}{\frac{K_1}{z_1} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{z_j - z_{j-1}}{K_j} \right) + \frac{z - z_{n-1}}{K_n} \right]} \quad (5.33)$$

As Equações 5.31 e 5.32 fornecem as expressões das cargas hidráulicas nas interfaces das camadas do solo.

Da Equação 5.33 e da velocidade uniforme da frente de umedecimento resulta:

$$f_z = \frac{z + \Psi_n + H_0}{\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{z_j - z_{j-1}}{K_j} \right) + \frac{z - z_{n-1}}{K_n}} \quad (5.34)$$

A infiltração acumulada é dada por:

$$F_z = F_{z_{n-1}} + (z - z_{n-1})(\eta_n - \theta_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (z_j - z_{j-1}) \Delta j + (z - z_{n-1}) \Delta \theta_n \quad (5.35)$$

Em que, $\forall i = 3, 4, \dots, n$, η_i é a porosidade na camada i [L^3/L^3]; θ_i é a umidade inicial na camada i ; $\Delta \theta_i$ é a diferença entre a porosidade e a umidade inicial na camada i [L^3/L^3].

A partir das Equações 5.21, 5.34 e 5.35 chega-se à expressão do tempo de viagem que a frente de umedecimento leva para chegar na profundidade z localizada na camada n , dada pela igualdade a seguir:

$$t_z = t_{z_{n-1}} + \frac{\Delta\theta_n}{K_n}(z - z_{n-1}) + \Delta\theta_n \left[\sum_{j=1}^{n-1} z_j \left(\frac{1}{K_j} - \frac{1}{K_{j+1}} \right) - \frac{\Psi_n + H_0}{K_n} \right] \ln \left(\frac{z + \Psi_n + H_0}{z_{n-1} + \Psi_n + H_0} \right) \quad (5.36)$$

Isso encerra a demonstração das equações de Chu-Mariño (2005) levando em consideração o empoçamento variável. Estas equações são a base da rotina Infiltração. Para o entendimento prático dessa rotina, as equações base são a equação da taxa de infiltração (Equação 5.34) e a equação do tempo de viagem (Equação 5.36). Porém, como pode-se perceber no processo dedutivo aqui apresentado, as Equações 5.31 – 5.36 são usadas para a modelagem do processo de infiltração no solo de multicamadas.

5.3 Desenvolvimento da rotina fluxo subterrâneo

Uma das equações base para rotina Fluxo subterrâneo é a equação diferencial parcial bidimensional que governa o fluxo subterrâneo de densidade constante, não estacionário, em um meio heterogêneo e anisotrópico em aquíferos livres (FREEZE; CHERRY, 1979) dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(hk_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(hk_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.37)$$

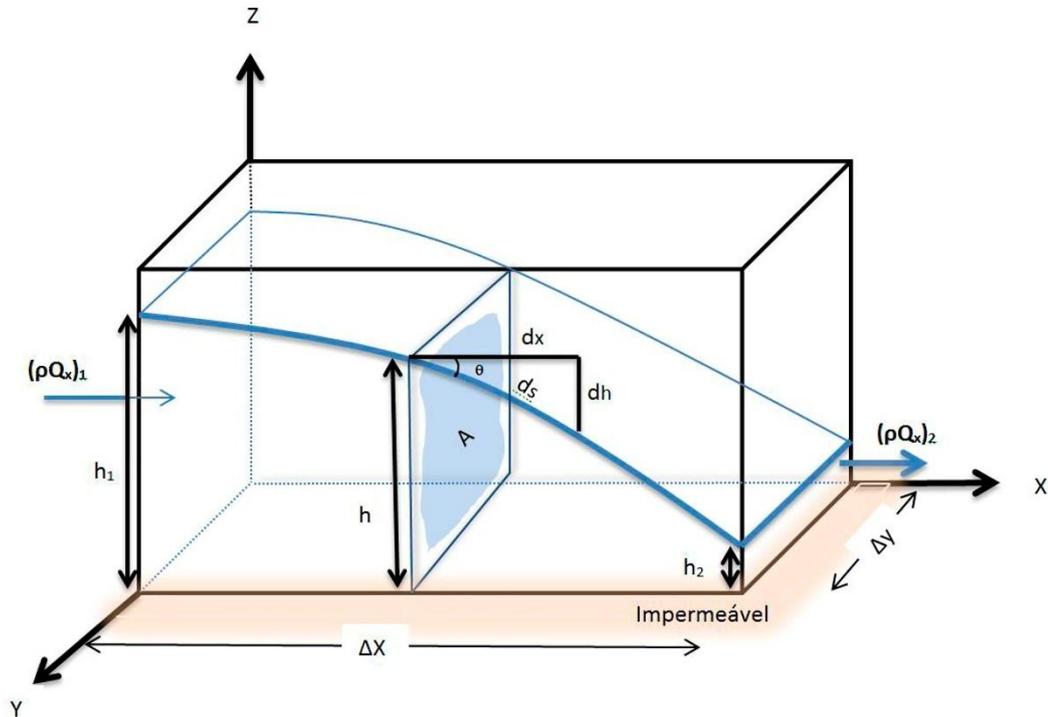
Em que, k_x , k_y e k_z são as condutividades hidráulica ao longo dos eixos coordenados x , y e z , respectivamente [$L T^{-1}$]; h é a carga hidráulica [L]; W é o volume de água que entra ou sai no sistema por unidade de área horizontal do aquífero por unidade de tempo [$L T^{-1}$]; S é a produção específica do aquífero livre; e t é o tempo [T].

A Equação (5.37) pode ser obtida a partir da lei de Darcy, do princípio da conservação da massa e das hipóteses de Dupuit-Forchheimer que considera o escoamento uniforme e horizontal em qualquer seção vertical com o gradiente hidráulico igual a inclinação da superfície freática (FREEZE e CHERRY, 1979).

Com efeito, o pressuposto de considerar o escoamento uniforme e horizontal em qualquer seção vertical, permite que seja usado uma seção de controle que se estende da

superfície impermeável até a linha freática cuja inclinação define o potencial hidráulico h . Assim, pode-se definir um volume de controle de acordo com a Figura 14 a seguir:

Figura 14 - Volume de controle e elementos básicos usados na dedução da equação do fluxo subterrâneo para aquíferos livres



Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo o referencial a superfície impermeável. Analisando a variação do fluxo na direção do eixo x , obtém-se:

$$(\rho Q_x)_2 - (\rho Q_x)_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\rho q_x A) \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} (\rho q_x h \Delta y) \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} (\rho q_x h) \Delta y \Delta x \quad (5.38)$$

Portanto,

$$(\rho Q_x)_2 - (\rho Q_x)_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\rho q_x h) \Delta y \Delta x \quad (5.39)$$

A lei de Darcy na direção x , fornece:

$$q_x = k_x \frac{\partial h}{\partial s} = k_x \text{sen} \theta \quad (5.40)$$

A Equação (5.40) diz que para obter a velocidade de Darcy na direção x é necessário conhecer o comportamento da linha freática (vide a Figura 14) o que não é muito prático. No entanto, admitindo que a inclinação da linha freática define o gradiente hidráulico, obtém-se:

$$q_x = k_x \operatorname{tg} \theta = k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.41)$$

isso torna a modelagem mais prática, pois ao invés de lidar com a linha freática trabalha-se com a variação da carga hidráulica.

A substituição da Equação 5.41 na Equação 5.39, fornece

$$(\rho Q_x)_2 - (\rho Q_x)_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\rho h k_x \frac{\partial h}{\partial x}) \Delta y \Delta x \quad (5.42)$$

Procedendo de forma análoga na direção y, obtém-se:

$$(\rho Q_y)_2 - (\rho Q_y)_1 = \frac{\partial}{\partial y} (\rho h k_y \frac{\partial h}{\partial y}) \Delta y \Delta x \quad (5.43)$$

Uma vez que o fluxo é considerado apenas horizontal, na direção z, a variação nessa direção é nula. Tem-se na direção z que

$$(\rho Q_z)_2 - (\rho Q_z)_1 = 0 \quad (5.44)$$

Assim, aplicando a lei da conservação da massa, ou seja, usando o fato de que a variação da massa no tempo pelo volume de controle é a soma das variações da massa nas direções x, y e z. Obtém-se das Equações 5.42, 5.43 e 5.44, a seguinte igualdade

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \rho \Delta x \Delta y = \frac{\partial M}{\partial t} \quad (5.45)$$

Sendo dV_a a taxa de variação do armazenamento da água tem-se que

$$dV_a = S_y \Delta x \Delta y dh \quad (5.46)$$

ou seja, o produto da porosidade efetiva S_y pelo volume de água $\Delta x \Delta y dh$ constitui uma estimativa para a taxa de variação dV_a do armazenamento da água no volume de controle.

Multiplicando a Equação 5.46 por ρ (densidade) e tendo em vista que

$$\rho dV_a = \rho S_y \Delta x \Delta y dh = dM \quad (5.47)$$

em que dM é a variação da massa no volume de controle.

Assim, a substituição da Equação 5.47 em 5.45, fornece

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S_y \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.48)$$

Acrescentando na Equação 5.48 o termo W associado a recarga ou extração do aquífero, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W = S_y \frac{\partial h}{\partial t}$$

Esta é a Equação 5.37 que é uma das equações base da rotina Fluxo subterrâneo.

5.3.1 Solução numérica da equação bidimensional do fluxo subterrâneo

O esquema numérico adotado no modelo MHIRA 2.0 é um esquema implícito em diferenças finitas aplicado a Equação 5.38. Semelhante ao MHIRA, aqui adota-se a hipótese simplificadora de que o meio é isotrópico e homogêneo. A seguir é descrito a solução numérica da Equação 5.37. O desenvolvimento da solução numérica tem como base as referências (WROBEL *et al*, 1989; WANG e ANDERSON 1982; ANDERSON e WOESSNER 1992).

Admitindo

$$K = k_x = k_y \quad (5.49)$$

Assim, usando as igualdades em (5.49) na Equação 5.37 obtém-se

$$k \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] + W = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.50)$$

Do cálculo diferencial, observa-se que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = h \frac{\partial h}{\partial x} \quad e \quad \frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} = h \frac{\partial h}{\partial y} \quad (5.51)$$

Aplicando as igualdades em (5.51) na Equação 5.50, obtém-se

$$\frac{K}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right] + W = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.52)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} + \frac{2W}{K} = \frac{2S}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.53)$$

Fazendo a mudança de variável

$$v = h^2 \quad (5.54)$$

Derivando (5.54) em relação a t obtém-se

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial h^2}{\partial t} = 2h \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.55)$$

O que implica em

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2h} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.56)$$

Substituindo as Equações 5.54 e 5.56 na Equação 5.53, obtém-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2W}{K} = \frac{S}{K\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.57)$$

Assim, uma vez resolvida a Equação 5.57, obtém-se a solução da Equação 5.53 via mudança de variável estabelecida pela Equação 5.54.

Apresenta-se a seguir um esquema numérico implícito em diferenças finitas que resolve a Equação 5.57 que na verdade também resolve a Equação 5.53 por conta da mudança de variável estabelecida em (5.54).

A princípio, considera-se as seguintes aproximações em diferenças finitas para as derivadas parciais espaciais:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \gamma \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \gamma) \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \gamma \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + (1 - \gamma) \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (5.59)$$

Em que, os índices, n , j e i representam, respectivamente, a variação temporal, a variação espacial na direção x e a variação espacial na direção y . As retas nas direções x e y compõe um sistema de eixo cartesiano coordenados e γ é um número real que varia na faixa de valores que vai de 0 até 1.

As aproximações em diferenças finitas em (5.58) e (5.59) são dadas pela média ponderada. Em outras palavras, γ e $(1 - \gamma)$ são os pesos da média ponderada que estima a derivada espacial segunda de v .

As parcelas ponderadas do lado direito das aproximações em (5.58) e (5.59) são dadas pelas diferenças finitas centrais. A parcela que é ponderada por γ está associada a um passo de tempo adiante ($n + 1$). Por sua vez, a parcela ponderada por $(\gamma - 1)$ está avaliada no passo de tempo anterior n . De acordo com o valor assumido por γ as aproximações são caracterizadas por algum tipo de esquema de diferenças finitas. Mais especificamente, as aproximações em diferenças finitas em (5.58) e (5.59) são do tipo explícita quando $\gamma = 0$, implícita para $\gamma = 1$ e semi-implícita caso $0 < \gamma < 1$.

A derivada temporal de v é aproximada da seguinte forma:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (5.60)$$

Admitindo que,

$$a = \Delta x = \Delta y \quad (5.61)$$

Substituindo (5.58), (5.59), (5.60) e (5.61) na Equação 5.57, obtém-se

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{a^2} + (1-\gamma) \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{a^2} + \gamma \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{a^2} + \dots \\ & \dots + (1-\gamma) \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{a^2} + \frac{2}{K} W = \frac{S}{K \cdot \sqrt{v_{i,j}^n}} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.62)$$

A Equação 5.62 pode ser reescrita para a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{a^2} (v_{i+1,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1} - 4v_{i,j}^{n+1}) + \dots \\ & \dots + \frac{1-\gamma}{a^2} (v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n - 4v_{i,j}^n) + \frac{2}{K} W = \frac{S}{K \cdot \sqrt{v_{i,j}^n}} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.63)$$

Por sua vez, a Equação 5.63 pode ser reescrita como segue

$$\begin{aligned} & \frac{4\gamma}{a^2} \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{4} - v_{i,j}^{n+1} \right) + \dots \\ & \dots + \frac{4(1-\gamma)}{a^2} \left(\frac{v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n}{4} - v_{i,j}^n \right) + \frac{2}{K} W = \frac{S}{K \cdot \sqrt{v_{i,j}^n}} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.64)$$

A fim de simplificar a escrita da Equação 5.64, adota-se a notação a seguir

$$\widehat{v}_{i,j}^n = \frac{v_{i-1,j}^n + v_{i+1,j}^n + v_{i,j-1}^n + v_{i,j+1}^n}{4} \quad (5.65)$$

Assim, a Equação 5.64 reescrita com a notação definida em (5.65) fica da seguinte forma

$$\frac{4\gamma}{a^2} (\widehat{v}_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}) + \frac{4(1-\gamma)}{a^2} (\widehat{v}_{i,j}^n - v_{i,j}^n) + \frac{2}{K} W = \frac{S}{K \cdot \sqrt{v_{i,j}^n}} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (5.66)$$

Multiplicando a Equação 5.66 por $a^2/4$ obtém-se

$$\gamma (\widehat{v}_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}) + (1-\gamma) (\widehat{v}_{i,j}^n - v_{i,j}^n) + \frac{a^2}{2K} W = \frac{Sa^2}{4K \cdot \sqrt{v_{i,j}^n}} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (5.67)$$

Adotando a notação

$$\omega_{i,j}^n = \frac{Sa^2}{4\Delta tK \cdot \sqrt{v_{i,j}^n}} \quad (5.68)$$

Tem-se que a substituição da notação definida em (5.68) na Equação 5.64, fornece

$$\gamma(\widehat{v_{i,j}^{n+1}} - v_{i,j}^{n+1}) + (1 - \gamma)(\widehat{v_{i,j}^n} - v_{i,j}^n) + \frac{a^2}{2K}W = \omega_{i,j}^n(v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n) \quad (5.69)$$

Isolando $v_{i,j}^{n+1}$ na Equação 5.69, obtém-se

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{\gamma\widehat{v_{i,j}^{n+1}} + (1-\gamma)(\widehat{v_{i,j}^n} - v_{i,j}^n) + \frac{a^2}{2K}W - \omega_{i,j}^n v_{i,j}^n}{\omega_{i,j}^n + \gamma} \quad (5.70)$$

A Equação 5.70 observada as notações definidas em (5.61), (5.65) e (5.68) juntamente com a mudança de variável definida pela Equação 5.54, constituem o método numérico que resolve a equação do fluxo subterrâneo bidimensional em aquíferos livres que é uma das equações bases da rotina Fluxo subterrâneo.

5.3.2 Interação rio-aquífero

Na Equação 5.37 o termo W representa as trocas hídricas entre rio e aquífero. Para a definição desse termo é usado as equações definidas no pacote River do MODFLOW (MCDONALD; HARBAUGH, 1988) dada por

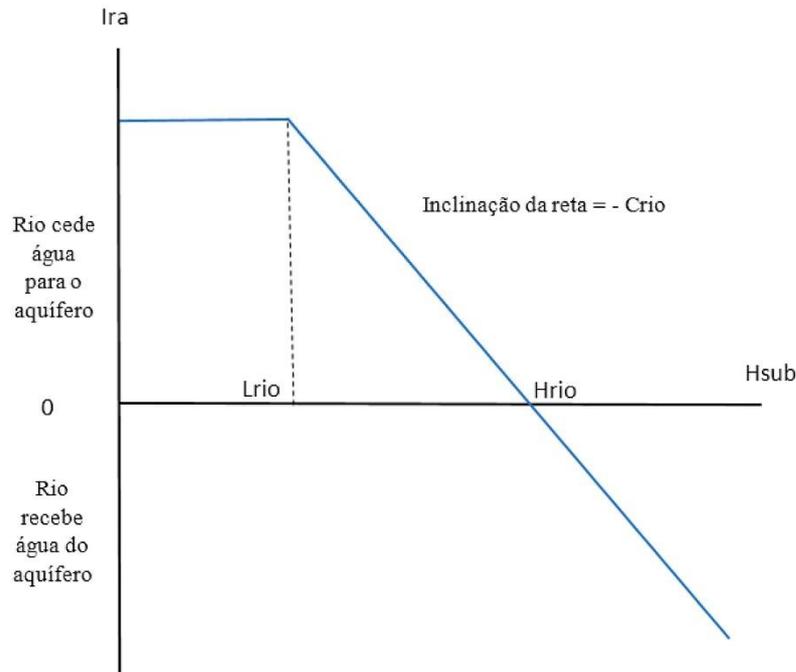
$$\begin{cases} Ira = Crio \cdot (Hrio - Haq), & \text{se } Haq > Lrio \\ Ira = Crio \cdot Hrio, & \text{se } Haq \leq Lrio \end{cases} \quad (5.71)$$

As equações definidas em (5.71) modelam as interações rio-aquífero Ira, em função da condutância do rio Crio, da carga hidráulica do rio Hrio e da carga hidráulica aquífera Haq, dependendo da posição do nível freático em relação ao leito do rio Lrio.

Em particular, tem-se de (5.71) que fixado os valores da condutância do rio Crio e da carga do rio Hrio, as interações rio-aquífero Ira funcionam de acordo com o que está

mostrado na Figura 15. A interação rio-aquífero I_{ra} é positiva e constante enquanto o nível freático estiver abaixo do leito do rio e varia linearmente em função da carga do aquífero, quando o nível freático estiver acima do leito do rio.

Figura 15 - Interpretação geométrica da Interação rio-aquífero



Fonte: Adaptado de McDonald e Harbaugh (1988)

Quando o nível freático está acima do leito do rio, o valor da interação rio-aquífero I_{ra} pode ser positivo, negativo ou nulo. I_{ra} é positivo caso o nível freático esteja entre a cota do leito do rio e a cota do rio. Neste caso, o valor de I_{ra} vai diminuindo e se aproximando de zero à medida que o nível freático se aproxima da cota do rio. Por sua vez o valor de I_{ra} aumenta positivamente à medida que o nível freático, abaixo da cota do rio, vai se aproximando do leito do rio.

Para o caso em que o nível freático está acima da cota do rio, o valor de I_{ra} é negativo e diminui em valores absolutos à medida que o nível freático rebaixando se aproxima da cota do rio. E, por outro lado, o valor de $I_{ra} < 0$ aumenta em valores absoluto, à medida que o nível freático acima da cota do rio continua a elevar-se.

Valores positivos de I_{ra} significa que o rio está cedendo água para o aquífero (rio de perda). Valores negativos de I_{ra} significa que o rio está recebendo água do aquífero (rio de ganho). Por sua vez $I_{ra} = 0$ que é o caso quando o nível freático atinge a cota do rio (vide Figura 16).

Quando o nível freático está acima da cota do rio o valor de Ira é negativo e cresce absolutamente quanto mais o nível freático estiver acima da cota do rio e decresce em valor absoluto à medida que o nível freático se aproxima da cota do rio superiormente. Fisicamente, Ira positivo indica que o rio está cedendo água para o aquífero. Ira nulo indica equilíbrio, o rio não cede água para o aquífero nem recebe água do aquífero. E finalmente, Ira negativo indica que o rio recebe água do aquífero.

5.4 Comparação entre as rotinas dos modelos MHIRA e MHIRA 2.0

Os modelos MHIRA e MHIRA 2.0 possuem as mesmas rotinas: Propagação da onda, Infiltração e Fluxo subterrâneo. Esta seção é dedicada a fazer uma análise comparativa da modelagem matemática-computacional rotina a rotina desses dois modelos.

5.4.1 Rotina Propagação da Onda: MHIRA vs MHIRA 2.0

Na rotina propagação da onda os dois modelos resolvem numericamente a equação da continuidade de Saint-Venant na variável Q , pois usam equações que correlacionam as vazões (Q) com as áreas molhadas (A). No MHIRA esta equação é polinomial de grau 5 e no MHIRA 2.0 é uma função potência (Equação 5.3).

O uso da Equação 5.3 no MHIRA 2.0 implicou na estabilidade numérica do método da rotina (vide seção 5.1). Já o uso do polinômio de grau 5 que fornece a área molhada em função da vazão conduz a uma estratégia numérica distinta da adotada no MHIRA 2.0, no caso Fontenele (2015) usou um esquema explícito na discretização das áreas molhadas e implícito para as discretização das vazões (vide seção 2.4.1). Uma vez que esquemas explícitos estão sujeitos a critérios de estabilidade, a rotina propagação de onda do MHIRA está sujeita a problemas de oscilações numéricas.

A rotina propagação de onda do modelo MHIRA possibilita usar uma subrotina chamada Nash que otimiza o fator ponderador $\theta \in [0,1]$ na solução numérica da equação de Saint-Venant, usando o CENS na obtenção do θ ótimo em cada passo de tempo. Mais precisamente, a cada passo de tempo escolhe-se o θ do conjunto $\left\{ \theta = 0,5 + \frac{k}{100}; k = 1, 2, 3, \dots, 49 \right\}$ que apresente o maior valor do CENS para as vazões. No entanto, tendo em vista que no cálculo do CENS é necessário informações das vazões medidas, a sub-rotina Nash não é aplicável, caso o MHIRA seja usado para prever vazões. Além disso, o uso dessa rotina

aumenta o esforço computacional, por conta do processo de escolha do θ ótimo. Por sua vez, o método numérico da rotina propagação no MHIRA 2.0 é sempre convergente por conta do esquema implícito e sua velocidade de convergência é otimizada devido ao seu esquema linear (vide seção 5.1).

5.4.2 Rotina Infiltração: MHIRA vs MHIRA 2.0

Na rotina infiltração ambos os modelos usam as mesmas equações base, que são as equações da taxa de infiltração (Equação 5.34) e do tempo de viagem da frente de umedecimento (Equação 5.36) desenvolvidas por Chu e Marinõ (2005) considerando o empoçamento variável na superfície.

As diferenças dos modelos em relação a essa rotina estão nas soluções numéricas dessas equações base. No MHIRA a cada avanço dz da frente de umedecimento calcula-se a taxa de infiltração f_z (Equação 5.34) e o tempo de viagem da frente t_z de umedecimento (Equação 5.36), sendo necessário corrigir a taxa de infiltração a cada passo do tempo, pois em geral, o tempo de viagem t_z difere do tempo de simulação. Já no MHIRA 2.0, a cada passo de tempo determina-se a posição instantânea z da frente de umedecimento, para isso foi usado o método de Newton aplicado a Equação (5.36), pois na equação do tempo de viagem a localização z da frente de umedecimento está definida implicitamente. Com a localização instantânea z determina-se a taxa de infiltração (Equação 5.34), que neste caso não precisa ser corrigida, diminuindo as incertezas e ajudando numa melhor representatividade das perdas em trânsito.

A rotina infiltração no MHIRA realiza operações matemáticas que poderiam ser evitadas. Com efeito, o perfil do solo sob o rio Jaguaribe na região de interesse da área experimental é de 40 m de acordo com Fontenele (2015). Assim, por exemplo, na parte a jusante, o solo foi caracterizado em duas camadas, sendo a espessura da camada superior de 4 m e a espessura da camada inferior de 36 m de acordo com a caracterização de Fontenele (2015) também usada neste trabalho.

No desenvolvimento dessa rotina, Fontenele (2015) dividiu o solo em 20 subcamadas de espessura $dz = 0,2$ m. Assim, pela notação aqui adotada (vide Figura 13) $Z_0 = 0$ m é o topo do perfil do solo, e parte inferior das subcamadas 1, 2, ..., 200 são, respectivamente, $Z_1 = 0,2$ m, $Z_2 = 0,4$ m, ..., $Z_{200} = 40$ m. Note que a parte inferior da subcamada $(i - 1)$ é a parte superior da subcamada (i) , assim a profundidades superior e inferior da subcamada (i) , são $Z_{i-1} = 0,2(i-1)$ e $Z_i = 0,2i$.

Associado às camadas 1, 2, ..., 200 de espessura $dz = 20\text{cm}$ tem-se, respectivamente, as condutividades hidráulicas saturadas K_1, K_2, \dots, K_{200} ; as cargas hidráulicas H_1, H_2, \dots, H_{200} ; as sucções da frente de umedecimento $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{200}$; as porosidades $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{200}$ e as umidades iniciais $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{200}$.

Nesta configuração, as 20 primeiras subcamadas encontram-se na primeira camada e as demais 180 subcamadas encontram-se na segunda camada. Em particular, tem-se que as condutividades K_i são iguais entre si, as condutividades K_j são iguais entre si e $K_i \neq K_j$ para $i = 1, 2, \dots, 20$ e $j = 21, 22, \dots, 200$.

Tendo em vista o somatório $\sum_{j=1}^n z_j \left(\frac{1}{K_j} - \frac{1}{K_{j+1}} \right)$ da equação do tempo de viagem (Equação 5.35), à medida que a frente de umedecimento avança, são computados desnecessariamente pelo algoritmo parcelas nulas, que são as diferenças do inverso das condutividades hidráulicas saturadas que estão em subcamadas dentro de uma mesma camada. No MHIRA 2.0 como a frente de umedecimento é determinada instantaneamente, trabalha-se apenas com as camadas e não com várias subcamadas. Nesse sentido, a rotina infiltração do MHIRA 2.0 exige um menor esforço computacional, diminuindo os erros numéricos de arredondamentos.

Uma fonte de incerteza na determinação das perdas em trânsito por infiltração do modelo MHIRA, foi identificado após a análise do algoritmo computacional da sua rotina infiltração, que está relacionado a uma restrição no código que impõe que o logaritmando do logaritmo da equação do tempo de viagem (Equação 3.55) é sempre maior que ou igual a 2,72. Pois tendo em vista que o número de Euler $e < 2,72$, $\ln(e) = 1$ e que a função $f(x) = \ln(x)$ é crescente, tem-se que $1 = \ln(e) < \ln(2,72)$. Portanto, o logaritmo da equação do tempo de viagem (Equação 5.36) vai sempre configurar como um fator multiplicativo maior que 1, como segue

$$t_z = t_{z_{n-1}} + \frac{\Delta\theta_n}{K_n} (z - z_{n-1}) + \Delta\theta_n \left[\sum_{j=1}^{n-1} z_j \left(\frac{1}{K_j} - \frac{1}{K_{j+1}} \right) - \frac{\Psi_n + H_0}{K_n} \right] \underbrace{\ln \left(\frac{z + \Psi_n + H_0}{z_{n-1} + \Psi_n + H_0} \right)}_{>1} \quad (5.72)$$

Por outro lado, em um dado tempo $t > 0$, a frente de umedecimento está em alguma subcamada do solo ($z_{i-1} \leq z \leq z_i$). Portanto,

$$\frac{z + \Psi_i + H_0}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0} \geq \frac{z_{i-1} + \Psi_i + H_0}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0} = 1 \quad (5.73)$$

Tomando o logaritmo natural em (5.73) tem-se

$$\ln\left(\frac{z + \Psi_i + H_0}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0}\right) \geq \ln\left(\frac{z_{i-1} + \Psi_i + H_0}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0}\right) = \ln(1) = 0 \quad (5.74)$$

Assim, a partir do momento que a frente de umedecimento atingir a segunda subcamada (numa profundidade maior que 20 cm), ou seja, $0,2m \leq Z_{i-1} < z \leq Z_i$ com $i \geq 1$.

1. Obtém-se, $z - Z_{i-1} \leq Z_i - Z_{i-1} = 0,2 m \leq Z_{i-1}$, E, portanto,

$$\frac{z + \Psi_i + H_0}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0} = \frac{z - Z_{i-1} + z_{i-1} + \Psi_i + H_0}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0} = \underbrace{\frac{z - Z_{i-1}}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0}}_{\leq 1} + 1 \leq 2 < e \quad (5.75)$$

De (5.75) obtém-se,

$$\ln\left(\frac{z + \Psi_i + H_0}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0}\right) < 1 \quad (5.76)$$

Segue das desigualdades (5.74) e (5.76) que a partir do momento que a frente de umedecimento passar da primeira subcamada verifica-se

$$0 \leq \ln\left(\frac{z + \Psi_i + H_0}{z_{i-1} + \Psi_i + H_0}\right) < 1 \quad (5.77)$$

Portanto,

$$t_z = t_{z_{n-1}} + \frac{\Delta\theta_n}{K_n}(z - z_{n-1}) + \Delta\theta_n \left[\sum_{j=1}^{n-1} z_j \left(\frac{1}{K_j} - \frac{1}{K_{j+1}} \right) - \frac{\Psi_n + H_0}{K_n} \right] \underbrace{\ln\left(\frac{z + \Psi_n + H_0}{z_{n-1} + \Psi_n + H_0}\right)}_{\text{real positivo} < 1} \quad (5.78)$$

Segue de (5.72) e (5.78) que a condição estabelecida no desenvolvimento do algoritmo da rotina Infiltração do MIRA pode estar artificialmente antecipando o momento em que ocorre a conexão hidráulica do sistema rio-aquífero, o que pode comprometer os cálculos das perdas em trânsitos da dinâmica interativa rio-aquífero. Tendo em vista que na rotina infiltração do MHIRA 2.0 a equação do tempo de viagem (Equação 5.55) sem tal restrição é usada na determinação instantânea da posição da frente do umedecimento, o momento da

conexão hidráulica no MHIRA 2.0 deve estar sendo calculado com menos incertezas e maior precisão, o que ajuda na modelagem das interações rio-aquífero.

5.4.3 Rotina Fluxo subterrâneo: MHIRA vs MHIRA 2.0

A equação base para a rotina Fluxo subterrâneo dos modelos é a equação diferencial governante do fluxo subterrâneo em aquíferos livres. No MHIRA a equação é unidimensional (Equação 2.16) e no MHIRA 2.0 a equação é bidimensional (Equação 5.50).

O método numérico desenvolvido no MHIRA para a rotina Fluxo subterrâneo é um esquema em diferenças finitas do tipo explícito (vide seção 2.41) e uma condição necessária para sua estabilidade é (REMSON; HORNBERGER; MOLZ, 1971):

$$\Delta t \leq \frac{s_y \Delta x}{2K} \quad (5.79)$$

Assim, para evitar problemas de instabilidade numérica, o passo de tempo Δt na rotina Fluxo subterrâneo do MHIRA não pode ser muito alto e é influenciado pela porosidade efetiva S_y , condutividade hidráulica saturada K e passo espacial Δx .

Na rotina fluxo subterrâneo do MHIRA 2.0 o método numérico depende do valor de γ escolhido na Equação 5.70 (vide seção 5.3.1). Para $\gamma = 0$ o método é explícito, para $\gamma = 1$ o método é completamente implícito, para γ entre 0 e 1 o método é implícito (para $\gamma = \frac{1}{2}$ Crank-Nicolson). Portanto, a rotina subterrâneo do MHIRA 2.0 é mais flexível e pode-se evitar a escolha do método explícito tomando γ diferente de zero que foi o caso do presente trabalho.

Uma outra diferença entre as rotinas fluxo subterrâneo nos modelos está na forma de determinação do parâmetro Condutância do rio, no MHIRA esse parâmetro é determinado por calibração e no MHIRA 2.0 determina-se internamente a rotina sob a hipótese de que no momento da conexão rio-aquífero o fluxo de Green-Ampt, obtido pela Equação (5.80), é o mesmo fluxo das trocas hídricas (Equação 5.73).

$$Ira = f_z \cdot \Delta x \cdot P \quad (5.80)$$

Em que, Δx é o passo espacial [L] e P é o perímetro molhado na seção do rio [L].

Finalmente, apenas a rotinas fluxo subterrâneo do MHIRA 2.0 possui uma sub-rotina, descrita na próxima sub-seção, que resolve a equação do fluxo subterrâneo no estado estável como uma forma de estimar inicialmente as cargas hidráulicas aquíferas para o desenvolvimento da solução da equação do fluxo subterrâneo no caso transiente.

5.4.3.1 Solução da equação do fluxo subterrâneo para o caso estacionário

A versão estável da Equação 5.53 desconsiderando os ganhos e perdas é dado por:

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = 0 \quad (5.81)$$

Utilizando a mudança de variável em $v = h^2$ na Equação 5.81, obtém-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (5.82)$$

As derivadas parciais da Equação 5.82 considerando as

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{a^2} \quad (5.83)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{a^2} \quad (5.84)$$

Substituindo as Equações 5.83 e 5.84 na Equação 5.82 obtém-se

$$v_{i,j}^n = \frac{v_{i-1,j}^n + v_{i+1,j}^n + v_{i,j-1}^n + v_{i,j+1}^n}{4} \quad (5.85)$$

A partir da Equação 5.85 obtém-se as estimativas iniciais para h usando a mudança de variável $v = h^2$.

A Tabela 5 apresenta um resumo dos métodos numéricos desenvolvidos pelos modelos MHIRA e MHIRA 2.0 nas suas rotinas computacionais.

Tabela 5 - Métodos numéricos das rotinas dos modelos MHIRA e MHIRA 2.0

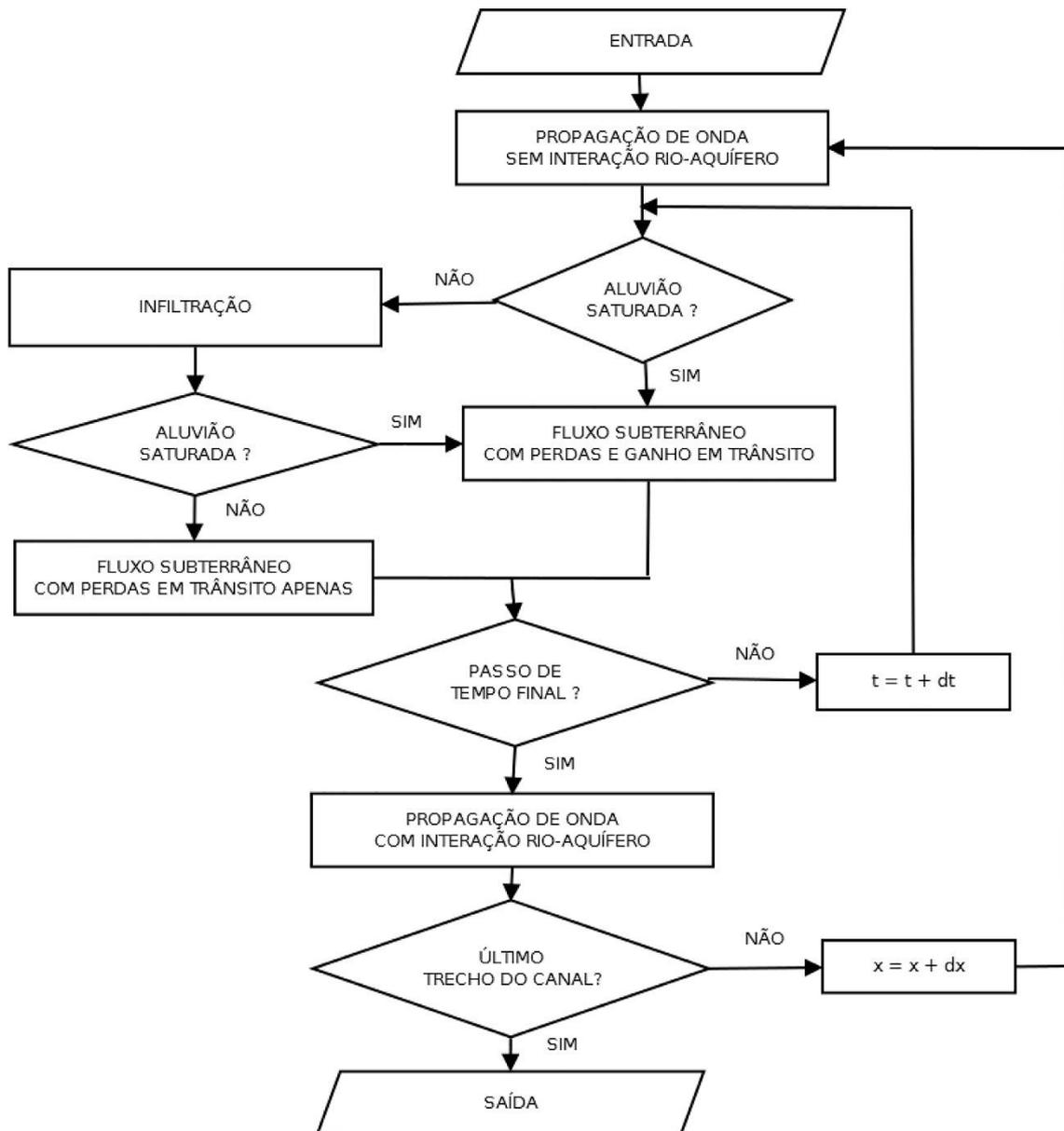
Rotinas	Modelos	
	MHIRA	MHIRA 2.0
Propagação da onda	Resolve numericamente a equação da continuidade de Saint-Venant aplicando um esquema implícito para as vazões e um esquema explícito para as áreas molhadas. Usa uma função polinomial de grau cinco para correlacionar vazão e área molhada.	Resolve numericamente a equação da continuidade de Saint-Venant aplicando o método da onda cinemática. Usa uma função potência para correlacionar vazão e área molhada.
Infiltração	Resolve numericamente as equações de Chu-Mariño (2005) do tempo de viagem e da taxa de infiltração, determinando a taxa de infiltração fz e o tempo de viagem tz para cada avanço dz da frente de umedecimento.	Resolve numericamente as equações de Chu-Mariño (2005) do tempo de viagem e da taxa de infiltração, determinando implicitamente pelo método de Newton a localização instantânea z da frente de umedecimento e a taxa de infiltração associada fz para cada passo de tempo.
Fluxo subterrâneo	Resolve numericamente a equação diferencial unidimensional do fluxo subterrâneo com um esquema explícito.	Resolve numericamente a equação diferencial bidimensional do fluxo subterrâneo com um esquema numérico implícito.

Fonte: Próprio autor

5.5 Interação entre as rotinas do MHIRA 2.0

As rotinas do modelo MHIRA 2.0 interagem dinamicamente entre si modelando os três processos hidrológicos base (propagação do escoamento em rios, infiltração em solo de multicamadas e fluxo subterrâneo), para determinar o hidrograma do rio e as variações das cargas hidráulicas aquíferas conforme ilustra a Figura 16.

Figura 16 - Interação entre as rotinas do MHIRA 2.0



Fonte: Próprio autor

A rotina propagação de onda é executada sem considerar as interações rio-aquífero, fornecendo as cargas hidráulicas do trecho que definem o empoçamento variável.

Enquanto a aluvião não estiver saturada, a frente de umedecimento avança e a interação rio-aquífero é governada pelas perdas por infiltração calculadas da rotina infiltração que informa a rotina fluxo subterrâneo o tempo da conexão hidráulica do sistema rio-aquífero, a partir do qual as trocas hídricas rio-aquífero passam a ser governada pelas perdas e ganhos, calculados da rotina fluxo subterrâneo.

Durante todo o processo as cargas hidráulicas aquíferas são calculadas pela rotina fluxo subterrâneo e no final o hidrograma do rio é calculado pela rotina propagação da onda considerando as interações rio-aquífero.

5.6 Eventos usados na Calibração e Validação

Os quatro eventos usados apresentaram características distintas quanto a duração, a magnitude da vazão de pico e a variação volumétrica relativa (Tabela 6).

Tabela 6 - Características dos eventos monitorados

Eventos	Duração (dias)	Vazão de pico (m ³ /s)		Volume escoado (10 ⁶ m ³)		Variação volumétrica relativa (-)
		Entrada	Saída	Entrada	Saída	
1	22	7,14	3,74	5,39	1,64	-0,70
2	22	13,65	5,04	9,98	1,12	-0,89
3	44	18,52	24,20	16,60	10,45	-0,37
4	205	791,50	719,96	799,58	906,36	+0,13

Fonte: Próprio autor

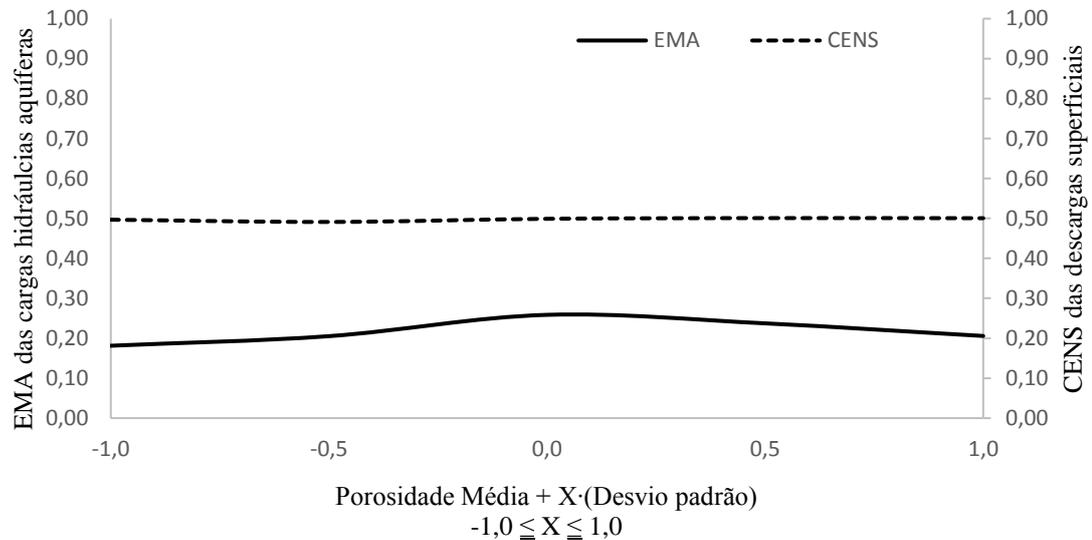
Os Eventos 1 e 2 são de curta duração, pequena magnitude e de alta variação volumétrica negativa (de grandes perdas em trânsito). O Evento 4 é de longa duração, grande magnitude e de variação volumétrica positiva (ganho em trânsito). O Evento 3 apresenta uma variação volumétrica intermediária, porém negativa (de perdas em trânsito inferior as dos Eventos 1 e 2). Observa-se ainda que neste evento a vazão de pico na seção de saída é maior do que a de entrada, indicando um possível ganho em trânsito em algum trecho do rio.

O Evento 3 foi escolhido para calibração dos parâmetros sensíveis do modelo definidos pela análise de sensibilidade e os outros três eventos foram usados na validação do modelo.

5.7 Análise de Sensibilidade

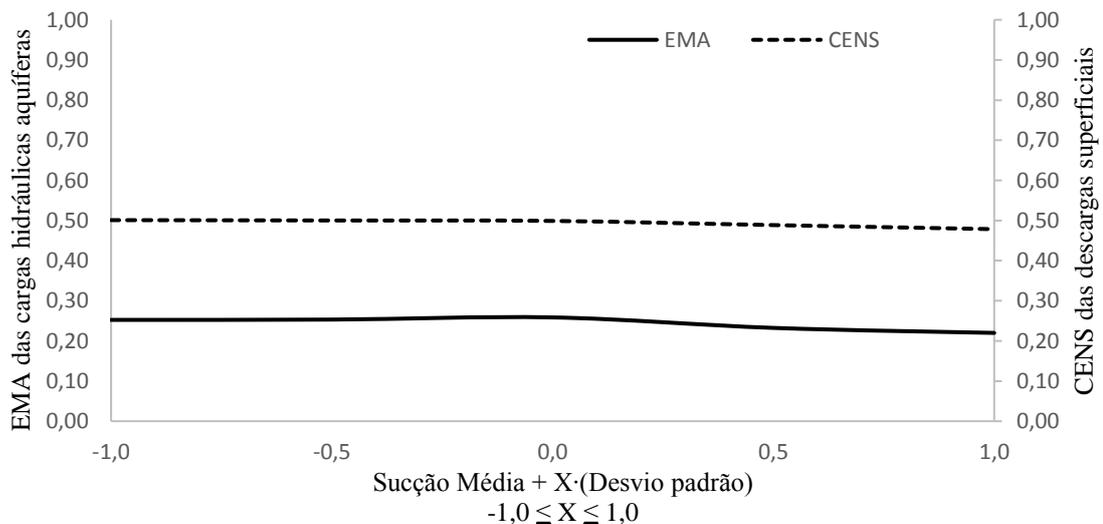
Os parâmetros analisados foram a porosidade, sucção da frente de umedecimento, condutividade hidráulica saturada e produção específica. As Figuras 17 – 20 apresentam os resultados da análise de sensibilidade para estes parâmetros.

Figura 17 - Análise de sensibilidade do parâmetro porosidade no modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 3



Fonte: Próprio autor

Figura 18 - Análise de sensibilidade do parâmetro carga de sucção da frente de umedecimento no modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 3

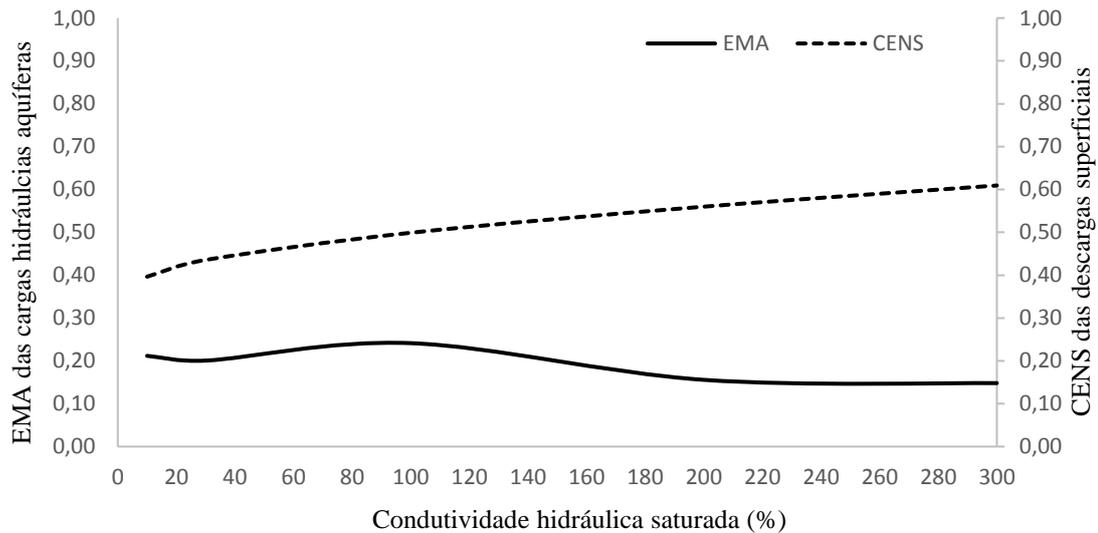


Fonte: Próprio autor

Os resultados da análise de sensibilidade para a porosidade e sucção da frente de umedecimento apontam que variações de um desvio padrão em torno dos valores médios representativos desses parâmetros determinados em Rawls *et al.* (1983) praticamente não influenciaram nas respostas as vazões e as carga hidráulica aquífera. Esse resultado para a porosidade pode ser explicado porque a faixa de valores definida por um desvio padrão em torno da sua média obtidas de Rawls, Brakensiek e Miller (1983) é relativamente baixa. Quanto a carga de sucção da frente de umedecimento que possui um maior grau de variabilidade em

Rawls, Brakensiek e Miller (1983), a sua não influência nas respostas do modelo pode ser explicado pela possibilidade de que o evento usado na calibração seja de ganho/perda (com predominância das perdas) em trânsito como anteriormente discutido, pois havendo uma rápida conexão, esse parâmetro perde a sua influência na dinâmica interativa rio-aquífero.

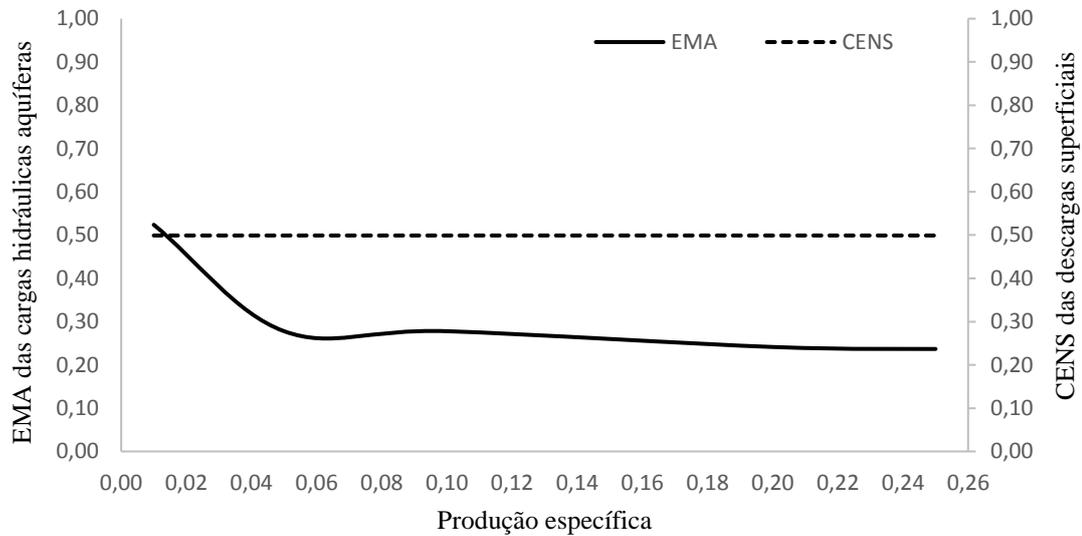
Figura 19 - Análise de sensibilidade do parâmetro condutividade hidráulica saturada no modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 3



Fonte: Próprio autor

As variações percentuais de 10 – 300% sobre os valores médios representativos das condutividades hidráulicas saturadas (Tabela 4) influenciaram nas respostas as vazões e as cargas hidráulicas aquíferas. O que mostra a importância de ajustar os valores desse parâmetro presente nas rotinas infiltração e fluxo subterrâneo.

Figura 20 - Análise de sensibilidade do parâmetro produção específica no modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 3



Fonte: Próprio autor

Ao variar a produção específica, parâmetro presente apenas na rotina fluxo subterrâneo, na faixa de valores de 0,1 a 0,25 (Tabela 4) constatou-se que as respostas as vazões não foram influenciadas, mas as respostas as cargas hidráulicas foram. Assim, esse parâmetro também precisou ser ajustado no processo de calibração.

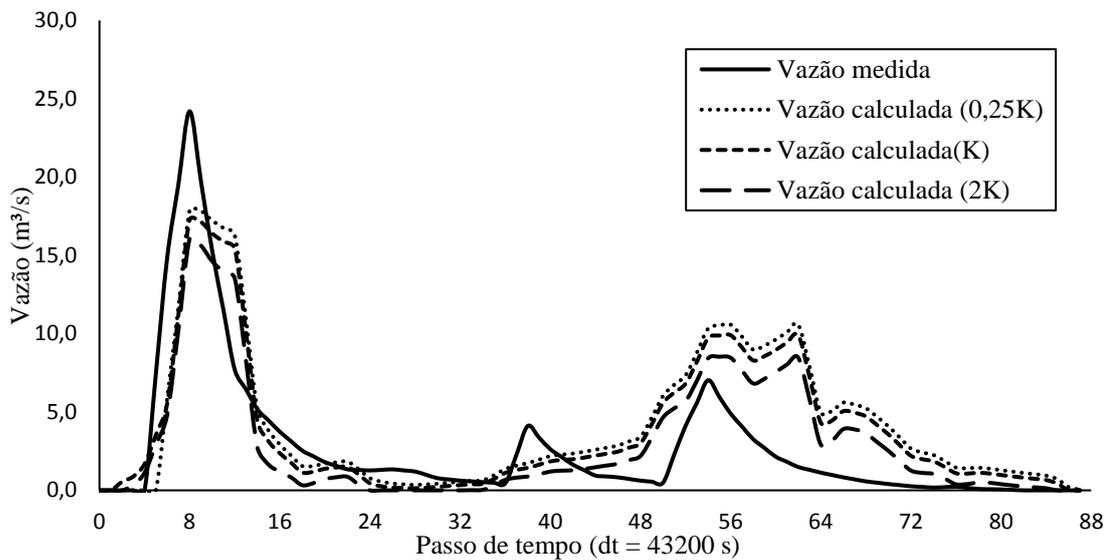
Diante da análise de sensibilidade observou-se que os parâmetros mais sensíveis do modelo estão presentes na rotina fluxo subterrâneo, o que também ocorreu na análise de sensibilidade do modelo MHIRA. Além disso, a condutividade hidráulica saturada que está presente tanto na rotina infiltração como no fluxo subterrâneo foi o parâmetro que apresentou maior sensibilidade ao modelo, influenciando nas respostas as vazões e as cargas hidráulicas aquíferas.

5.8 Calibração

No processo de calibração foram ajustados os dois parâmetros mais sensíveis do modelo. Primeiro ajustou-se a condutividade hidráulica saturada, mantendo os valores médios dos demais parâmetros. Em seguida ajustou-se a produção específica, mantendo o valor ajustado da condutividade hidráulica saturada e os valores médios dos demais parâmetros.

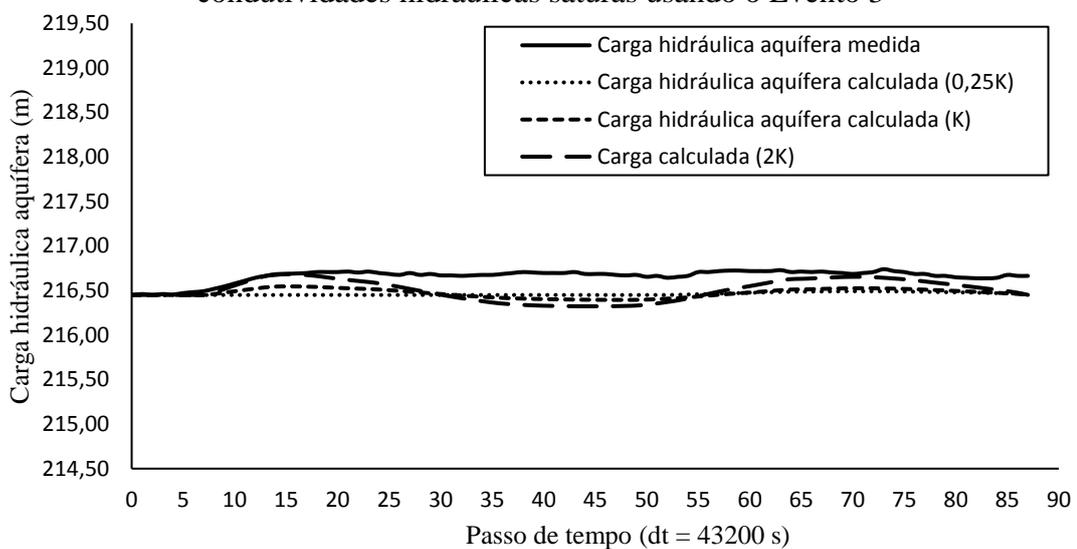
As Figuras 21 e 22 ilustram o comportamento das vazões e das cargas hidráulicas aquíferas calculadas pelo modelo, usando os valores de referências (Tabela 4) das condutividades hidráulicas saturadas (k) e percentuais de 25% e 200% desses valores ($0,25k$ e $2k$, respectivamente).

Figura 21 - Vazões calculadas pelo modelo variando-se as condutividades hidráulicas saturadas usando o Evento 3



Fonte: Próprio autor

Figura 22 – Cargas hidráulicas aquíferas calculadas pelo modelo variando-se as condutividades hidráulicas saturadas usando o Evento 3



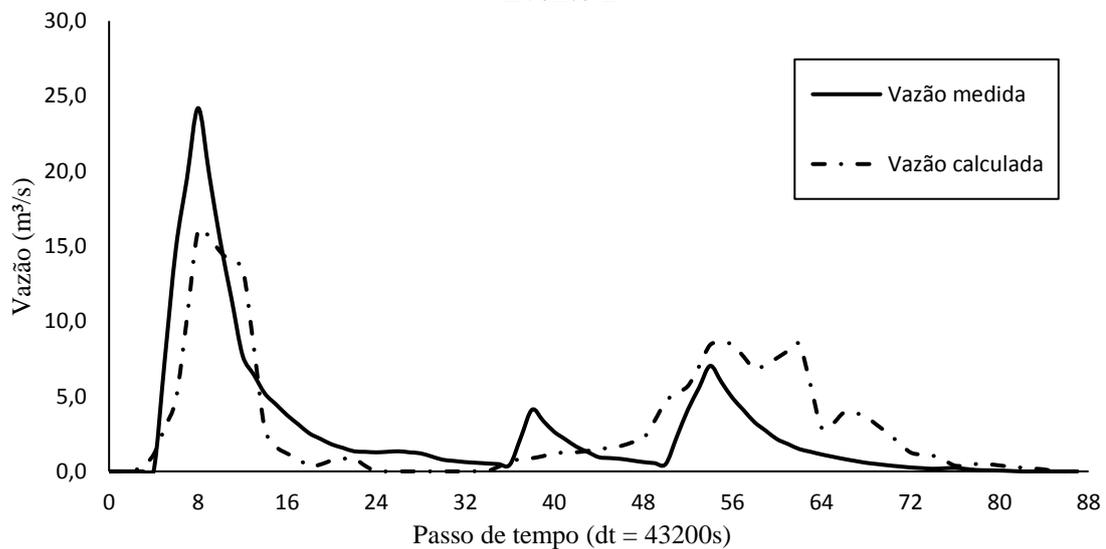
Fonte: Próprio autor

Verificou-se que as variações da condutividade hidráulica saturada em torno dos valores de referência influenciam no comportamento do escoamento superficial, de maneira que o volume escoado calculado diminui (ou aumenta) à medida que a condutividade hidráulica saturada aumenta (ou diminui) (Figura 21). No MHIRA a condutividade hidráulica não influenciou no volume do escoado.

Além disso, verificou-se ainda que baixos valores de condutividades hidráulicas saturadas não influenciaram no comportamento das cargas hidráulicas aquíferas calculadas, indicando que o aquífero não recebe contribuições do rio durante esse evento. No entanto para valores de condutividades hidráulicas saturadas mais elevadas, observa-se mudanças no comportamento das cargas hidráulicas aquíferas calculadas, indicando interação do sistema rio-aquífero (Figura 22). No MHIRA valores de condutividade hidráulica saturada acima dos de referência (Tabela 4) provocaram altas oscilações numéricas.

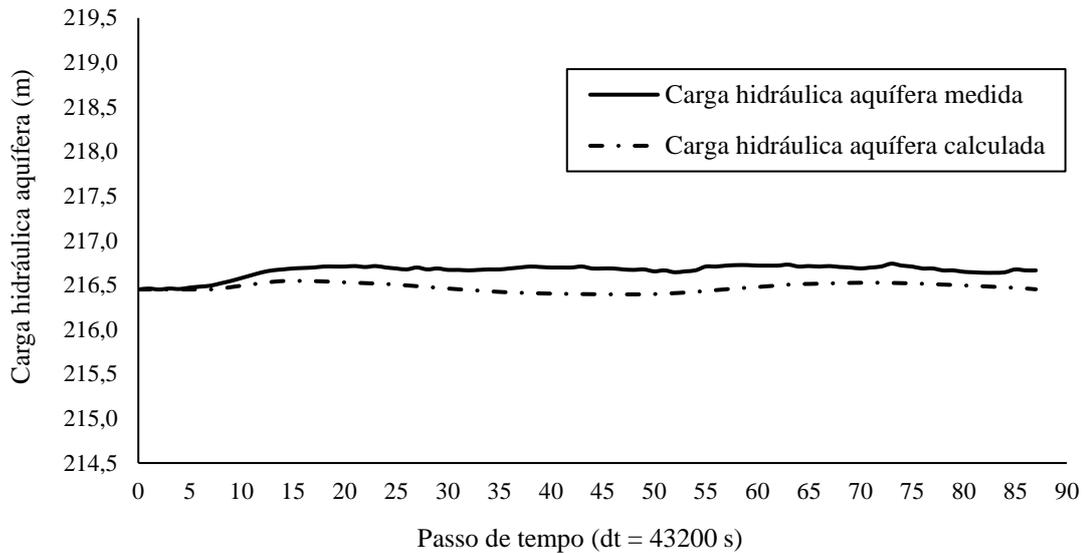
A Figura 23 apresenta o melhor ajuste das vazões do Evento 2 durante a calibração e a Figura 24, o melhor ajuste das cargas hidráulicas aquíferas.

Figura 23 - Hidrograma observado e calculado pelo MHIRA 2.0 na calibração usando o Evento 2



Fonte: Próprio autor

Figura 24 - Cargas hidráulicas medidas e calculadas pelo MHIRA 2.0 na calibração usando o Evento 2



Fonte: Próprio autor

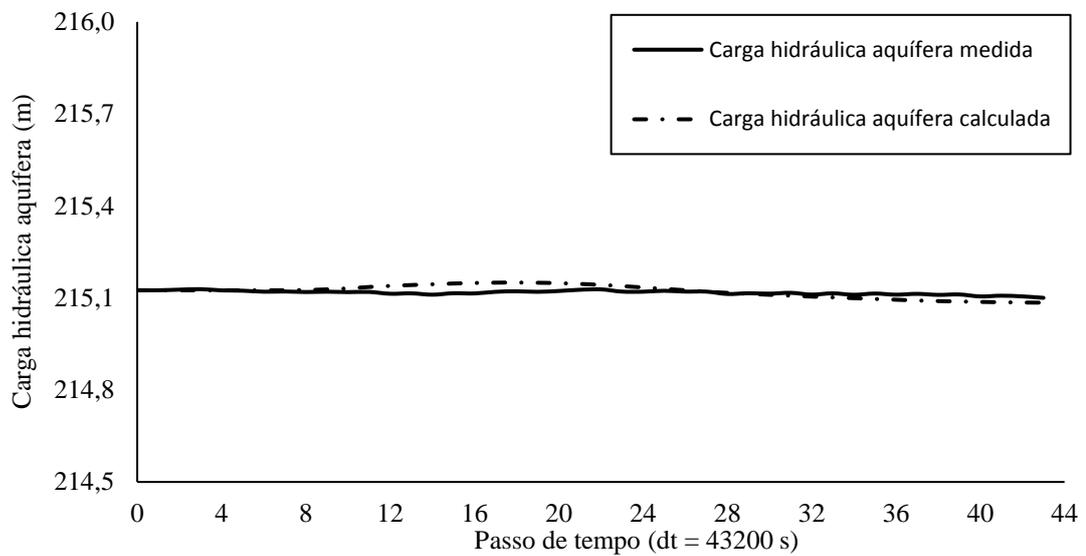
O melhor ajuste foi obtido para uma condutividade média de $3,57 \cdot 10^{-6}$ m/s e uma porosidade efetiva de 25%, representativas do meio, com CENS = 0,59 e EMA = 0,19 m.

5.9 Validação

Dos três eventos usados na validação do modelo, tem-se que dois são de curta duração, pequena magnitude e perdas em trânsito (Eventos 1 e 2) e o outro (Evento 4) é de longa duração, grande magnitude e ganho em trânsito (Tabela 6).

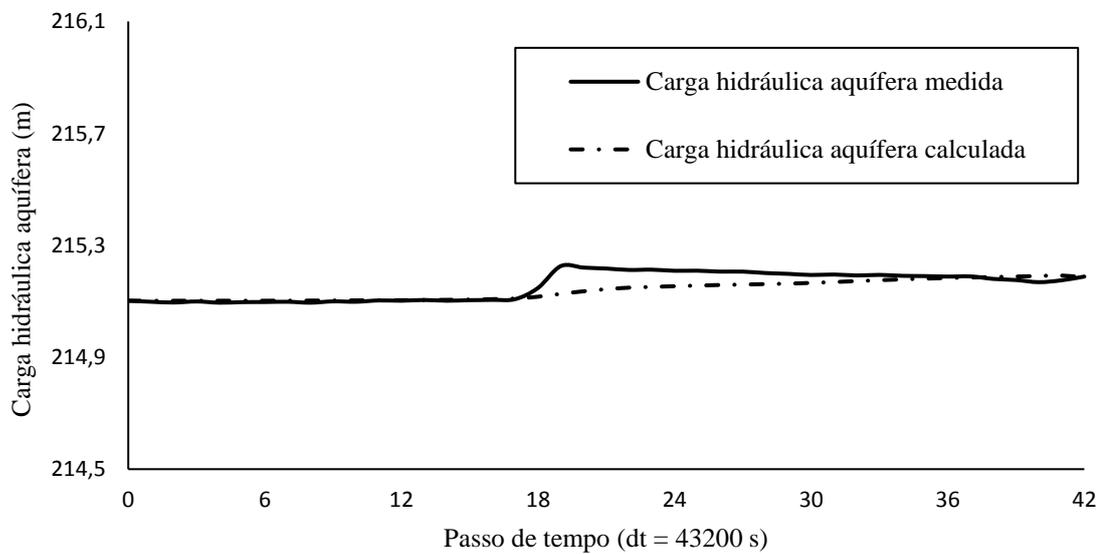
As Figuras 25, 26 e 27 ilustram as cargas hidráulicas aquíferas medidas e calculadas pelo modelo MHIRA 2.0 usando estes eventos.

Figura 25 - Cargas hidráulicas aquíferas medidas e calculadas na validação do modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 1



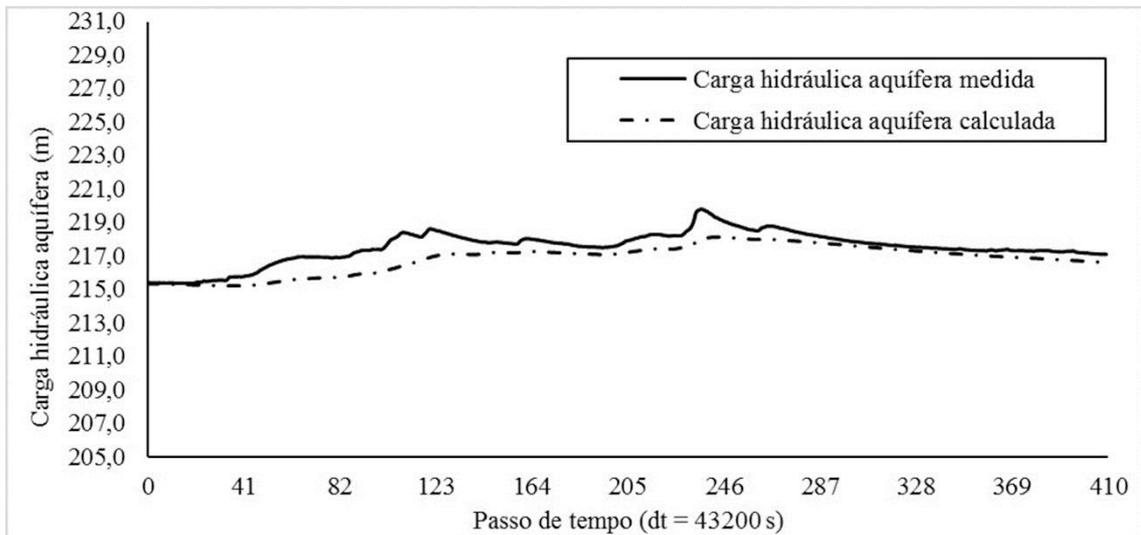
Fonte: Próprio autor

Figura 26 - Cargas hidráulicas aquíferas medidas e calculadas na validação do modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 2



Fonte: Próprio autor

Figura 27 - Cargas hidráulicas aquíferas medidas e calculadas na validação do modelo MHIRA 2.0 usando o Evento 4



Fonte: Próprio autor

Constatou-se que as cargas hidráulicas aquíferas medidas e calculadas pelo modelo MHIRA 2.0 em geral seguem a mesma tendência, que era uma limitação do MHIRA relatada por Fontenele (2015). Os EMA entre as cargas hidráulicas aquíferas calculadas e medidas nos Eventos 1, 2 e 4 foram de 0,01 m, 0,02 m e 0,43 m, respectivamente. No MHIRA os EMAs para estes eventos foram muito elevados (acima de 3,60 m). O melhor desempenho do MHIRA 2.0 em relação ao MHIRA na determinação das cargas hidráulicas aquíferas deve estar relacionado a possibilidade de ajustar os valores das condutividades hidráulicas saturadas no MHIRA 2.0 por conta da estabilidade das soluções numéricas de suas rotinas, o que não é garantido no MHIRA que faz uso de esquemas explícitos que estão sujeitos a altas oscilações numéricas como observadas por Fontenele (2015) ao avaliar a respostas do seu modelo a partir de variações dos valores da condutividade hidráulica saturada.

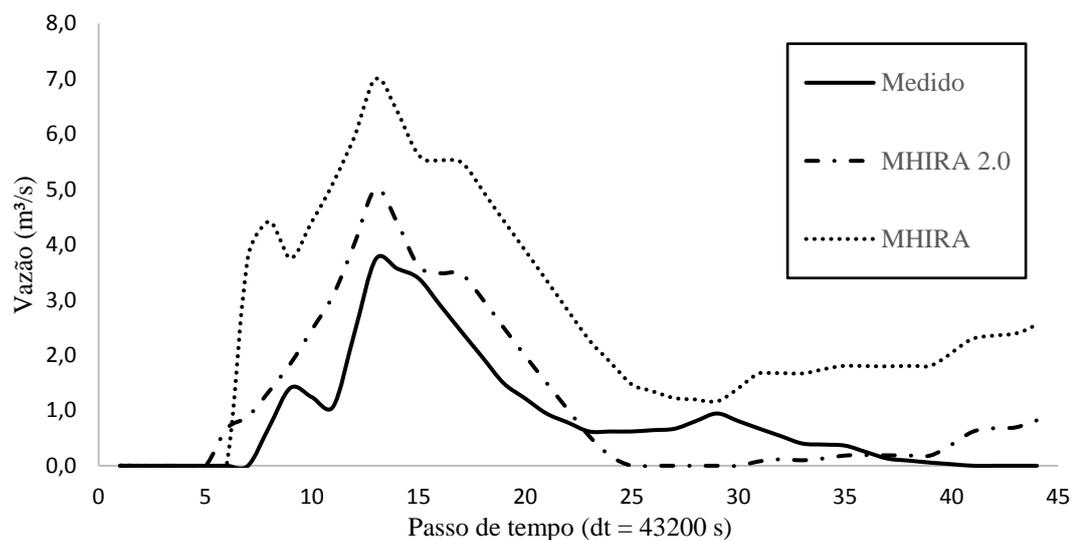
Dos três eventos usados para validação do modelo, constatou-se melhores resultados na determinação das cargas hidráulicas aquíferas para os Eventos 1 e 2 (de perdas em trânsito) que o do Evento 4 (de ganho em trânsito). Isto deve estar relacionado ao fato de que as cargas hidráulicas do rio são calculadas pela rotina propagação de onda usando a equação da continuidade de Saint-Venant sem considerar o fluxo lateral e no caso do Evento 4 (de longa duração, grande magnitude e ganho trânsito) a não contabilização dos ganhos iniciais devem estar subestimando a carga hidráulica do rio, conseqüentemente, em alguns momentos o modelo contabiliza contribuições hídricas do aquífero para o rio, onde na verdade seria o contrário (vide Equação 6), propagando as subestimativas ao longo do tempo.

Nos Eventos 1 e 2 (de curta duração, pequena magnitude e de perda em trânsito), o fluxo lateral deve não estar sendo tão influente. Além disso, como as perdas por infiltração nesses eventos são relevantes e a rotina infiltração determina instantaneamente a posição da frente de umedecimento que avança influenciando tais perdas, o momento que inicia as variações das cargas hidráulicas aquíferas tendem a ser melhor estimado, o que deve também explicar os melhores resultados no cálculo das cargas hidráulicas aquíferas nesses eventos.

Diante disso, constatou-se que a rotina de propagação de onda apresenta uma limitação associada a escassez de dados que podem influenciar na determinação das cargas hidráulicas aquíferas e conseqüentemente na determinação do hidrograma do rio uma vez que este é influenciado pelas trocas hídras rio-aquíferos modeladas a partir das posições relativas entre as cargas hidráulicas do rio e do aquífero (Equação 5.71).

As Figuras 28, 29 e 30 ilustram os hidrogramas observados e calculados pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA usando os Eventos 1, 2 e 4.

Figura 28 – Hidrogramas observado e calculados pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA para o Evento 1 usado na validação



Fonte: Próprio autor

Figura 29 – Hidrogramas observado e calculados pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA para o Evento 2 usado na validação

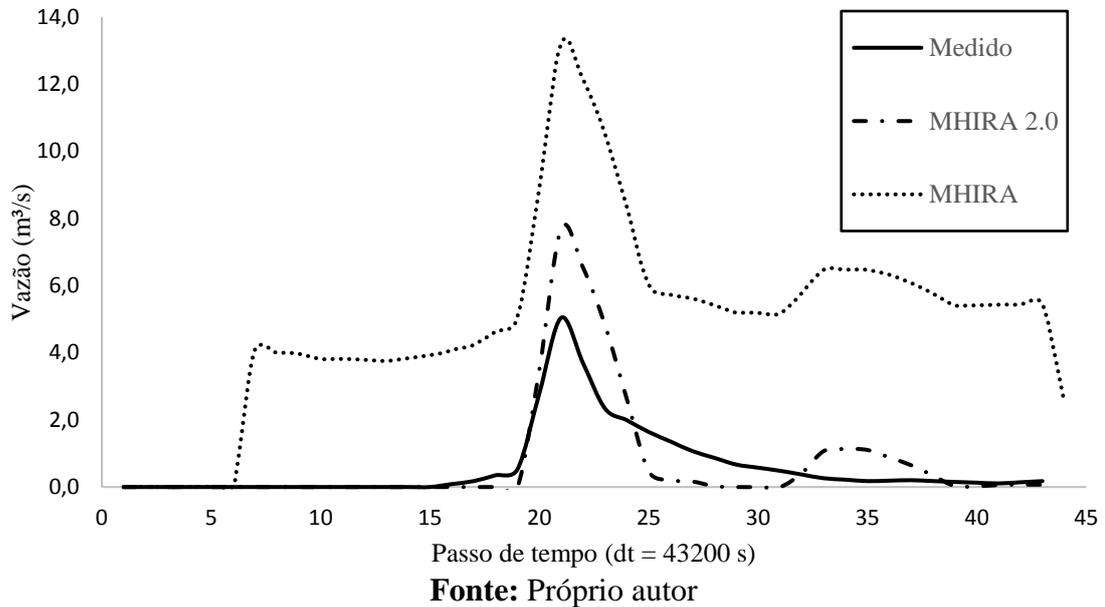
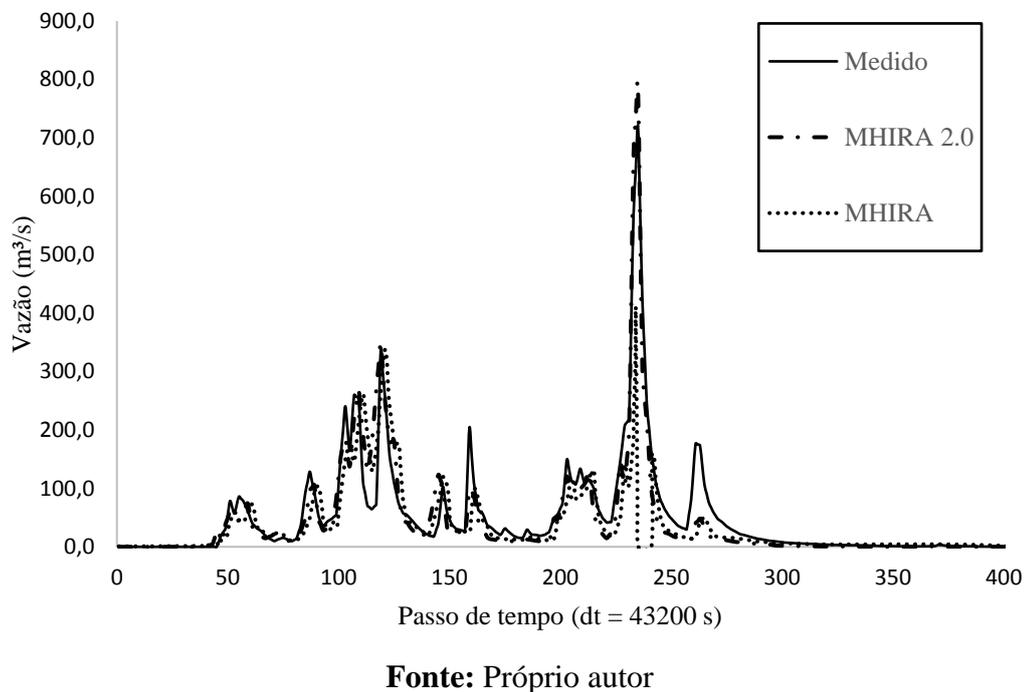


Figura 30 – Hidrogramas observado e calculados pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA para o Evento 4 usado na validação



Constatou-se que os hidrogramas calculados pelos modelos apresentaram formato semelhante e seguiram a mesma tendência dos hidrogramas medidos, o que está relacionado às semelhanças nas descrições matemáticas das rotinas dos dois modelos. No entanto, para os Eventos 1 e 2 (de perdas) observou-se que o MHIRA 2.0 modelou melhor as perdas em trânsito

em relação ao MHIRA. A restrição imposta no algoritmo da rotina do MHIRA que artificialmente podem antecipar a conexão do sistema rio-aquífero (vide seção 5.4.2) devem estar influenciando na não captura das perdas em trânsito pelo MHIRA. Além disso, o parâmetro condutividade hidráulica saturada que também no modelo MHIRA está presente nas rotinas infiltração e fluxo subterrâneo não apresentou influencia no escoamento superficial para valores abaixo dos de referências para esse parâmetro (Tabela 4) e para valores acima provocou oscilações numéricas. Essa limitação do MHIRA pode estar interferindo numa melhor representatividade das perdas em trânsito deste modelo. Por outro lado, o uso de métodos numéricos estáveis nas rotinas propagação da onda e fluxo subterrâneo do MHIRA 2.0 permitiu um melhor ajuste das condutividades hidráulicas saturadas que influenciam nos volumes escoados (vide seção 5.8). Também, a modelagem instantânea do avanço da frente de umedecimento que influenciam nas perdas por infiltração, relevantes nos eventos de perdas, certamente ajudou numa melhor representatividade dos hidrogramas calculados pelo MHIRA 2.0 nos Eventos 1 e 2.

Para os Eventos 1 e 2 o MHIRA apresentou CENS negativos enquanto que no MHIRA 2.0 os valores desses coeficientes foram, respectivamente, 0,5 e 0,3. Os erros relativos obtidos do volume escoado foram 0,3 (MHIRA 2.0) e 2,0 (MHIRA) no Evento 1 e para o Evento 2 foram 0,2 (MHIRA 2.0) e 7,3 (MHIRA). Em relação ao pico das vazões os erros relativos foram 0,3 (MHIRA 2.0) e 0,8 (MHIRA) no Evento 1 e para o Evento 2 foram 0,5 (MHIRA 2.0) e 1,6 (MHIRA).

Basicamente a diferença entre os hidrogramas calculados pelos modelos no Evento 4 (de ganho), está na estimativa da magnitude do pico das vazões (Figura 30), havendo uma subestimativa pelo MHIRA e uma superestimativa pelo MHIRA 2.0. Mesmo assim, os CENS obtidos pelos modelos foram 0,7 (MHIRA 2.0) e 0,4 (MHIRA) o que reflete a sensibilidade desse índice as estimativas dos modelos ao pico do hidrograma. Os erros relativos dos modelos na determinação da magnitude do pico das vazões foram 0,1 (MHIRA 2.0) e -0,4 (MHIRA), já para os volumes escoados constatou-se erros relativos de -0,2 (MHIRA 2.0) e -0,3 (MHIRA). A melhor representatividade do MHIRA 2.0 em relação ao MHIRA nesse evento (que é de ganho e de longa duração) deve estar associada a melhor representatividade das cargas hidráulicas pelo modelo MHIRA 2.0, pois aqui as variações das cargas hidráulicas são mais influentes na determinação dos ganhos em trânsito.

Os resultados dos modelos no cálculo dos hidrograma nos três eventos usados na validação estão resumidos na Tabela 7.

Tabela 7 – Resultados obtidos pelos modelos MHIRA 2.0 e MHIRA nos três eventos usados na validação

Eventos	Coeficiente de eficiência Nash-Sutcliffe		Erro relativo dos volumes escoados		Erro relativo dos picos das vazões	
	MHIRA 2.0	MHIRA	MHIRA 2.0	MHIRA	MHIRA 2.0	MHIRA
1	0,5	-3,4	0,3	2,0	0,3	0,8
2	0,3	-16,7	0,2	7,3	0,5	1,6
4	0,7	0,4	-0,2	-0,3	0,1	-0,4

Fonte: Próprio autor

Constatou-se que os hidrogramas calculados pelos modelos (principalmente pelo MHIRA) nos Eventos 1, 2 e 4 tiveram melhores resultados no Evento 4 (de ganho em trânsito). O que indica que apesar dos avanços indicados pelos resultados do MHIRA 2.0 em relação ao MHIRA na modelagem das trocas hídricas rio-aquífero, ainda há necessidade de melhorias na modelagem do presente modelo para eventos de curta duração, pequena magnitude e de perdas.

O desempenho do MHIRA 2.0 em relação aos eventos para validação foi bom tendo em vista suas limitações inerentes as hipóteses simplificadoras devida à escassez dos dados e a complexidade da modelagem hidrológica envolvida. As soluções numéricas das descrições matemáticas dos três processos hidrológicos base dos modelos proposta pelo MHIRA 2.0 foram importantes para garantir a estabilidade numérica nos cálculos internos das suas três rotinas computacionais e proporcionaram um melhor desempenho em relação ao MHIRA na modelagem das variações das cargas hidráulicas aquíferas e do hidrograma do rio considerando as interações rio-aquífero, representando um avanço na construção de um modelo hidrológico que possa ser aplicado para simular as trocas hídricas rio-aquífero em regiões semiáridas de dados escassos.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou uma proposta de modelagem numérica das perdas em trânsito em rios de regiões semiáridas de dados escassos, que resultou no modelo hidrológico de interação rio-aquífero, denominado MHIRA 2.0, composto por três rotinas computacionais que interagem entre si dinamicamente e modelam a propagação do escoamento em rio, a infiltração em solo de multicamadas e o fluxo subterrâneo, determinado hidrograma considerando as trocas hídricas rio-aquífero estimadas a partir das variações das cargas hidráulicas do aquífero, resultante das flutuações da recarga durante cada evento.

As soluções numéricas das equações diferenciais que modelam os processos hidrológicos, base do MHIRA 2.0 usando esquemas implícitos de diferenças finitas, garantiram a estabilidade numérica do modelo na determinação das vazões e cargas hidráulicas aquíferas. Em particular, a solução numérica da sua rotina fluxo subterrâneo, possibilitou uma boa representatividade do comportamento das cargas hidráulicas aquíferas e em conjunto com a solução numérica da sua rotina infiltração, contabilizou satisfatoriamente as perdas em trânsito nos eventos.

O estudo da análise de sensibilidade dos parâmetros do MHIRA 2.0, revelou que os parâmetros mais sensíveis do modelo foram a produção específica e a condutividade hidráulica saturada, sendo esta última a de maior sensibilidade, influenciando no escoamento superficial e fluxo subterrâneo. Em particular, verificou-se que o volume escoado calculado diminui (ou aumenta) à medida que a condutividade hidráulica saturada aumenta (ou diminui).

O processo de calibração revelou que o melhor ajuste para as vazões e cargas hidráulicas calculadas em relação aos dados medidos, ocorrem para uma condutividade média de $3,57 \cdot 10^{-6}$ m/s e uma porosidade efetiva de 25%, representativas do meio, com CENS = 0,6 e EMA = 0,2 m.

As cargas hidráulicas aquíferas calculadas pelo MHIRA 2.0 apresentaram EMA abaixo de 0,43 m, indicando uma melhoria considerável na modelagem do fluxo subterrâneo comparado aos resultados do MHIRA que apresentaram elevados EMA na determinação das cargas hidráulicas aquíferas. Nos resultados obtidos na validação do MHIRA 2.0, revelaram um CENS médio de 0,5 e erros médios relativos no cálculo dos volumes escoados e vazões de pico, respectivamente, de 0,23 e 0,3, configurando um bom desempenho do modelo tendo em vista a complexidade da modelagem proposta e as incertezas provenientes da escassez de dados.

O presente modelo mostrou-se ter potencial para simular as trocas hídricas rio-aquífero para regiões semiáridas de dados escassos, mas ainda não está pronto para aplicações

reais, precisando ser avaliado em outras áreas dessa natureza de escala e litologia distinta para um melhor entendimento das suas limitações e potencialidades e aperfeiçoamento das suas rotinas internas, o que deve ser feito em estudos posteriores. Para tanto, investimentos em projetos de monitoramento de dados hidrológicos certamente seria de grande valia.

REFERÊNCIA

- ALLEY, W.M. Another Water Budget Myth: The Significance of Recoverable Ground Water in Storage. **Groundwater**, Estados Unidos, v. 45, p. 251-251, 2007.
- ANDERSON, M. P.; WOESSNER, W. W. (1992). **Applied Groundwater Modeling: Simulation of Flow and Advective Transport**. San Diego: Academic Press, 1992.
- ANDERSON, M. P.; WOESSNER, W. W.; HUNT, R. J., 2015. Modeling Purpose and Conceptual Model, *In*: ANDERSON, M. P.; WOESSNER, W. W.; HUNT, R. J. (Eds.), **Applied Groundwater Modeling**. Elsevier Inc, p. 27–67., 2015.
- BALLEAU, W. P. Water approximation and transfer in a general hydrogeologic system. **Natural Resources Journal**, v. 29, p. 269–291, 1988. Disponível em: <https://digitalrepository.unm.edu/nrj/vol28/iss2/4>. Acesso em 12 jun. 2018.
- BAALOUSHA, H. (2008). Sensitivity, uncertainty, and reliability in groundwater modelling. *In* book: **Water Resources Research Progress**, Chapter: 14, Publisher: Nova Publisher, Editor: Liam N. Robinson, p. 327-351, 2008.
- BARAZZUOLI, P.; NOCCHI, M.; RIGATI, R.; SALLEOLINI, M. A conceptual and numerical model for groundwater management: a case study on a coastal aquifer in southern Tuscany, Italy. **Hydrogeology Journal**, [S.l.], v. 16, p. 1557–1576, 2008.
- BARLOW, P. M.; LEAKE, S. A. (2012) **Streamflow depletion by wells: understanding and managing the effects of groundwater pumping on streamflow**. U.S. Geological Survey Circular 1376, 2012, 84 p.
- BATHE, K. J., **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1982.
- BERTRAND, G.; SIERGIEIEV D.; ALA-AHO, P.; ROSSI, P. Environmental tracers and indicators bringing together groundwater, surface water and groundwater-dependent ecosystems: importance of scale in choosing relevant tools. **Environmental Earth Sciences**, Alemanha, v. 72, p. 813–827, 2014.
- BRASIL. CPRM – Serviço Geológico do Brasil. (1998). **Programa Levantamentos Geológicos Básicos do Brasil - PLGB**. Iguatu – Folha SB.24-Y-B, Estado do Ceará. Brasília: CPRM/DIEDIG/DEPAT, 1998.
- BREBBIA, C. A.; CONNOR, J. J. **Finite Element Techniques for Fluid Flow**, Butterworth, London, 1976.
- BREDEHOEFT, J. The conceptualization model problem - Surprise. **Hydrogeology Journal**, [S.l.], v. 13, p. 37–46, 2005.
- BURTE, J. D. P.; COUDRAIN, A.; MARLET, S. Use of water from small alluvial aquifers for irrigation in semi-arid regions. **Revista Ciência Agronômica**, Brasil, v. 42, n. 3, p. 635-643, 2011.

CHAVES, L. C. G.; LOPES, F. B.; MAIA, A. R. S.; MEIRELES, A. C. M.; ANDRADE, E. M. Water quality and anthropogenic impact in the watersheds of servisse reservoirs in the Brazilian semi-arid region. **Revista Ciências Agronômica**, Brasil, v. 50, p. 223-233, 2019.

CHO, J.; MOSTAGHIMI, S.; KANG, M. Development and application of a modeling approach for surface water and groundwater interaction. **Agric Water Manag**, [S.l.], v. 97, p. 123–130, 2010. DOI: 10.1016/j.agwat.2009.08.018

CHOW, V. T., **Open-channel Hydraulics**, McGraw-Hill, New York, 1959.

CHOW, V. T.; MAIDMENT, D. R.; MAYS, L. W. (1988). **Applied Hydrology**, McGraw-Hill, Singapore, 1988.

CHU, X.; MARIÑO, M. A. Determination of ponding condition and infiltration into layered soils under unsteady rainfall. **Journal of Hydrology**, [S.l.], v. 313, p. 195–207, 2005.

CLARK, M.; MCMILLAN, H.; COLLINS, D.; KAVETSKI, D.; WOODS, R. C. Hydrological field data from a modeller's perspective: Part 2: process based evaluation of model hypotheses, **Hydrological Processes**, [S.l.], v. 25, p. 523–543, 2011.

COSTA, A. C.; BRONSTERT, A.; de ARAÚJO, J. C. A channel transmission losses model for different dryland rivers, **Hydrology Earth System Sciences**, [S.l.], v. 16, p. 1111–1135, 2012.

COSTA, A. C.; FOERSTER, S.; de ARAÚJO, J. C.; BRONSTERT, A. Analysis of channel transmission losses in a dryland river reach in north-eastern Brazil using streamflow series, groundwater level series and multi-temporal satellite data. **Hydrological Processes**, [S.l.], v. 27, p. 1046 - 1060, 2013.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K. O. **Supersonic Flow and Shock Waves**, Interscience Publisers, New York, 1948.

De ARAÚJO, J. C.; BRONSTERT, A. A method to assess hydrological drought in semi-arid environments and its application to the Jaguaribe River basin, Brazil. **Water International**, [S.l.], v. 41, p. 213-230, 2016.

DU, Y.; MA T.; DENG, Y.; SHEN, S.; LU Z. Characterizing groundwater/surface-water interactions in the interior of Jiangnan Plain, central China. **Hydrogeology Journal**, [S.l.], v. 26, p. 1047-1059, 2018.

DECKY, V. K.; NORTON, C. D.; GARDNER, H. J. Why Fortran? **Computing in Science and Engineering**, [S.l.], v. 9, p. 68-71, 2007. DOI: 10.1109/MCSE.2013.5.

ELFEKI, A. M. M.; EWEA, H. A. R.; BAHRAWI, J. A.; AL-AMRI, N. S. Incorporation transmission losses in flash flood routing in ephemeral streams by using the three-parameter Muskingum method. **Arabian Journal of Geosciences**, [S.l.], v. 8, p. 5153-5165, 2015.

ESTRELA, T.; PÉREZ-MARTIN, M.A.; VARGAS, E. Impacts of climate change on water resources in Spain. **Hydrological Sciences Journal**, [S.l.], v. 57, p. 1154–1167, 2012.

FARHOODI, R.; GAROUSI, V.; PFAHL, D.; SILLITO, J. P. Development of scientific software: A systematic mapping, bibliometrics study and a paper repository. **International Journal of Software Engineering and Knowledge Engineering**, [S.l.], v. 23, p. 463–506, 2013.

FEINSTEIN, D. Since “Groundwater and surface water - a single resource”: some US geological survey advances in modeling groundwater/surface-water interactions. **Acque Sotteranee – Italian Journal of Groundwater**, Itália, v. 1, p. 9–24, 2012.

FEINSTEIN, D. T.; HUNT, R. J.; REEVES, H. W. (2010) **Regional groundwater-flow model of the Lake Michigan Basin in support of Great Lakes Basin water availability and use studies**. US Geol Surv Sci Invest Rep 2010-5109, 2010, 379 pp

FETTER, C. W. (2001).- **Applied Hydrogeology**. Prentice-Hall, 4^a ed., 598 pp.

FONTENELE, S. B. **Trocas Hídricas entre Rio e Aquífero em Regiões do Semiárido Hidrogeologicamente Distintas**. 2015. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Agrícola, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2015.

FONTENELE, S. B.; MENDONÇA, L. A. R.; de ARAÚJO, J. C.; SANTIAGO, M. M. F.; GONÇALVES, José Y. B. Relationship between hydrogeological parameters for data-scarce regions: the case of the Araripe sedimentary basin, Brazil. **Environmental Earth Sciences**, Alemanha, v. 71, p. 885-894, 2014.

FREEZE, R. A., CHERRY, J. A. (1979) **Groundwater**. New Jersey: Prentice Hall. 603 p.

FRIED, I., **Numerical Solution of Differential Equations**, Academic Press, New York, 1979.

GILLESPIE J.; NELSON, S.; MAYO, A.; TINGEY, D. Why conceptual groundwater flow models matter: a trans-boundary example from the arid Great Basin, western USA. **Hydrogeology Journal**, [S.l.], v. 20, p. 1133 – 1147, 2012.

GLEESON, T.; BEFUS, K. M.; JASECHKO, S.; LUIJENDIJK, E.; CARDENAS, M. B. The global volume and distribution of modern groundwater. **Nature Geoscience**, [S.l.], v. 9, p. 161–167, 2016.

GORELICK, S. M.; ZHENG, C. Global change and the groundwater management challenge. **Water Resour Res**, [S.l.], v. 51, p. 3031–3051, 2015.

GREEN, W. H., AMPT, G. A. Studies on soil physics: Flow of water and air through soils. **Journal of Agricultural Science**, [S.l.], v. 4, p. 1-24, 1911.

GÜNTNER, A. **Large-scale hydrological modelling in the semi-arid North-East of Brazil**. 2002. Tese (Doutorado em Geociências), Faculdade de Engenharia e Matemática da Natureza, Universidade de Potsdam, Alemanha, 2002.

GÜNTNER, A.; BRONSTERT, A. Representation of landscape variability and lateral redistribution processes for largescale hydrological modelling in semi-arid areas. **Journal of Hydrology**, [S.l.], v. 297, p. 136–161, 2004.

GUPTA, H.V.; SOROOSHIAN, S.; YAPO, P.O. Status of automatic calibration for hydrologic models: comparison with multilevel expert calibration. **Journal of Hydrologic Engineering**, [S.l.], v. 4, p. 135-143, 1999.

HILDEBRAND, F.B., **Finite Difference Equations and Simulations**, Prentice-Hall, New York, 1979.

HUYAKORN, P. S.; PINDER, G. F. **Computational Methods in Subsurface Flow**, Academic Press, New York, 1983.

IMBEAU, M. E. (1892). ‘‘La Durance: Regime, crues et inundations.’’ **Ann. Ponts Chaussees, Mem. Doc., Ser.**, 3(I), 1892, p. 5–18 (in French).

IZADY, A.; DAVARY, K.; ALIZADEH, A.; ZIAEI, A. N.; ALIPOOR, A.; JOODAVI, A.; BRUSSEAU, M. L. A framework toward developing a groundwater conceptual model. **Arabian Journal of Geosciences**, [S.l.], v. 7, p. 3611-3631, 2014.

JOHNSON, A. I. **Specific yield: compilation of specific yields for various materials**. U.S. Geological Survey Water-Supply Paper 1662-D, 1967. 74 p.

JUSSERET, S.; TAM, V.; DASSARGUES, A. Groundwater flow modelling in the central zone of Hanoi, Vietnam. **Hydrogeology Journal**, [S.l.], v. 17, p. 915–934, 2009.

KARSSENBERG, D. The value of environmental modelling languages for building distributed hydrological models. **Hydrol. Process.**, [S.l.], v. 16, p. 2751-2766, 2002.

KIM, S. Drought and weir construction impact stationarity assumption in watershed water quality modeling in South Korea, **Ecological Informatics**, [S.l.], v. 45, p. 38 – 47, 2018.

LAPIDUS, L.; PINDER, G.F. **Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering**, Wiley, New York, 1982.

LEVY J.; XU, Y. Review: Groundwater management and groundwater/surface-water interaction in the context of South African water policy. **Hydrogeol J.**, [S.l.], v. 20, p. 205–226, 2012.

LI, R. M.; SIMONS, D. B.; STEVENS, M. A. Nonlinear Kinematic Wave Approximation for Water Routing. **Water Resources Research**, [S.l.], v. 11, p. 245 – 252, 1975.

MALVEIRA, V.; de ARAÚJO, J.; GÜNTNER, A. Hydrological Impact of a High-Density Reservoir Network in Semiarid Northeastern Brazil. **Journal of Hydrologic Engineering**, [S.l.], v. 17, p. 109-116, 2012.

MANGLIK A.; RAI, S. N. Modeling water table fluctuations in anisotropic unconfined aquifer due to time varying recharge from multiple heterogeneous basins and pumping from multiple wells. **Water Resource Management**, [S.l.], v. 29, p. 1019–1030, 2015.

MAY, R.; MAZLAN, N. S. B. Numerical simulation of the effect of heavy groundwater abstraction on groundwater-surface water interaction in Langat Basin, Selangor, Malaysia. **Environmental Earth Sciences**, Alemanha, v. 71, p. 1–10, 2013.

MAYS, L. W. Groundwater resources sustainability: past, present and future. **Water Resour Manag.**, [S.l.], v. 27(13), p. 4409–4424, 2013.

MATEUS, C.; TULLOS, D. Reliability, sensitivity, and uncertainty of reservoir performance under climate variability in basins with different hydrogeologic settings in Northwestern United States. **Int. J. River Basin Manag.**, [S.l.], v. 15, p. 21–37, 2017.

MCDONALD, M. G.; HARBAUGH, A. W. **A modular threedimensional finite-difference groundwater flow model (MODFLOW)**. Book 6. Washington: Techniques of Water Resources Investigations of the U.S. Geol. Survey. 1988. 586 p.

MYLOPOULOS, N.; MYLOPOULOS, Y.; TOLOKAS, D.; VERANIS, N. Groundwater modeling and management in a complex lake-aquifer system. **Water Resour. Manag.**, [S.l.], v. 21, p. 469–494, 2007.

MULVANY, T. J. (1850). “**On the use of self-registering rain and flood gauges.**” Proc. Inst. Civ. Eng., 4(2), 1850, p. 1–8.

MVANDABA, V.; HUGHES, D.; KAPANGAZIWIRI, E.; KAHINDA, M. J.; HOBBS, J.; MANDOSELA, S.; OOSTHUIZENA, N. The delineation of alluvial aquifers towards a better understanding of channel transmission losses in the Limpopo River Basin, **Physics and Chemistry of the Earth**, [S.l.], v. 108, p. 60-73, 2018.

NASH, J. E.; SUTCLIFFE, J. V. River flow forecasting models: model calibration and uncertainty through 39 conceptual models I: A discussion of prediction. **J Hydrol.**, [S.l.], v. 10, p. 282-290, 1970.

NASTEV, M.; RIVERA, A.; LEFEBVRE, R.; MARTEL, R.; SAVARD, M. (2005) Numerical simulation of groundwater flow in regional rock aquifers, southwestern Quebec, Canada. **Hydrogeol J.**, [S.l.], v. 13, p. 835–848, 2005.

NETO, J. R. A.; ANDRADE, E. M.; PALÁCIO, H. A. Q.; SALES, M. M.; MAIA, A. R. S. Influence of land use/occupation on water quality in the Trussu river valley, Ceará, Brazil. **Revista Ciência Agronômica**, Brasil, v. 48, p. 59-69, 2017.

NIU, G-Y.; YANG, Z-L.; DICKINSON, R. E.; GULDEN, L. E.; SU, H. Development of a simple groundwater model for use in climate models and evaluation with Gravity Recovery and Climate Experiment data, **Journal of Geophysical Research**, [S.l.], v. 112, p. 1 – 14, 2007.

PANDEY, P. K.; SOUPIR, M. L.; IKENBERRY, C. D.; REHMANN, C. R. Predicting streambed sediment and water column *Escherichia coli* levels at watershed scale. **JAWRA Journal of the American Water Resources Association**, San Diego, v. 52, p. 184-197, 2016.

PINDER, G.F.; GRAY, W.G. **Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology**, Academic Press, New York, 1977.

PULIDO-VELAZQUEZ, D.; SAHUQUILLO, A.; ANDREU, J.; PULIDO-VELAZQUEZ, M. An efficient conceptual model to simulate surface water body-aquifer interaction in conjunctive use management models. **Water Resources Research**, [S.l.], v. 43, p. 1 – 15, 2007

RAI, S.; MANGLIUK, A. (2012) An analytical solution of Boussinesq equation to predict water table fluctuations due to time varying recharge and withdrawal from multiple basins, wells and leakage sites. **Water Resour Manag**, [S.l.], v. 26, p. 243–252, 2012.

RASHID, M.; AHMED, S. Appraisal of the groundwater balance components from multi-remote sensing datasets in a semi-arid region. **Environmental Monitoring and Assessment**, [S.l.], v. 190, p. 1-13, 2018.

RAWLS, W. J.; BRAKENSIEK, D. L.; MILLER, N. Green-Ampt infiltration parameters from soils data. **Journal of Hydraulic Engineering**, [S.l.], vol. 109, p. 62-70, 1983.

REFSGAAR, J. C., CHRISTENSEN, S.; SONNENBORG, T. O.; SEIFERT, D.; HOJBERG, A. L.; TROLDBORG, L. Review of strategies for handling geological uncertainty in groundwater flow and transport modeling. **Advances in Water Resources**, [S.l.], v. 36, p. 36–50, 2012.

REMSON, I.; HORNBERGER, G. M.; MOLZ, F. J. Numerical methods in subsurface hydrology. **Wiley-Interscience**, New York, 1971.

RICHTMYER, R.D.; MORTON, K.W. **Difference Methods for Initial Value Problems**, Wiley, New York, segunda edição, 1967.

ROJAS, R.; FEYEN, L.; DASSARGUES, A. Conceptual model uncertainty in groundwater modeling: Combining generalized likelihood uncertainty estimation and Bayesian model averaging. **Water Resources Research**, [S.l.], v. 44, p. 1 – 16, 2018.

ROJAS, R.; KAHUNDE, S.; PEETERS, L.; BATELAAN, O.; FEYEN, L.; DASSARGUES, A. Application of a multimodel approach to account for conceptual model and scenario uncertainties in groundwater modelling. **Journal of Hydrology**, [S.l.], v. 394, p. 416–435, 2010.

SAHOO, S.; JHA, M. K. Numerical groundwater-flow modeling to evaluate potential effects of pumping and recharge: implications for sustainable groundwater management in the Mahanadi delta region, India. **Hydrogeology Journal**, [S.l.], v. 25, p. 2489-2511, 2017.

SANTOS, M. R. P. **Transporte advectivo de poluentes do Riacho dos Macacos ao Aquífero Rio da Batateira na cidade de Juazeiro do Norte – CE**. 2004. Dissertação (Mestrado) – Curso de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará 2004.

SEIFERT, D.; SONNENBERG, T.; SCHARLING, P.; HINSBY, K. Use of alternative

conceptual models to assess the impact of a buried valley on groundwater vulnerability. **Hydrogeol J**, [S.l.], v. 16, p. 659–674, 2008.

SCHIRMER, M.; LESCHILK, S.; MUSOLFF, A. Current research in urban hydrogeology: a review. **Adv Water Resour**, [S.l.], v. 51, p. 280–291, 2013.

SCIBEK, J.; ALLEN, D. M.; CANNON A. J.; WHITFIELD, P. H. Groundwater–surface water interaction under scenarios of climate change using a high-resolution transient groundwater model. **J Hydrol**, [S.l.], v. 333, p. 165–181, 2007.

SILVA, E. B. **Modelagem matemática da dinâmica de fluxo rio-aquífero na sub-bacia Patos/Cariús/Iguatu no semiárido cearense**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia Agrícola, Departamento de Engenharia Agrícola, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2018.

SINGH, V. P.; WOOLHISER, D. A. Mathematical modeling of watershed hydrology. **Journal of Hydrologic Engineering**, [S.l.], v. 7, p. 270–292, 2002

SMITH, B.; HUNT, B.; ANDREWS, A.; WATSON, J.; GARY, M.; WIERMAN, D.; BROUN, A. Surface water-groundwater interactions along the Blanco River of central Texas, USA. **Environmental Earth Sciences**, [S.l.], v. 74, p. 7633–7642, 2015.

SOPHOCLEOUS, Marios. Interactions between groundwater and surface water: the state of the science. **Hydrogeology Journal**. [S.l.], v. 10, p. 52 – 67. 2002.

STRICKWERDA, J. C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**, Chapman and Hall, New York, 1989.

STROUSTRUP, B. **The Design and Evolution of C++**, Addison-Wesley, 1994

THEIS, C. V. The source of water derived from wells: essential factors controlling the response of an aquifer to development. **Civil Eng.**, [S.l.], v. 10, p. 277-280, 1940.

VASCONCELOS, V. What maintains the Waters flowing in our rivers? Rethinking hydrogeology to improve public policy. **Applied Water Science**, [S.l.], v. 7, p.1579-1593, 2017.

WABLE, P.; JHA, M.; MURASING, S. Evaluation of groundwater resources for sustainable groundwater development in a semiarid river basin of India. **Environmental Earth Sciences**, Alemanha, v. 76, p. 1-17, 2017.

WADA, Y.; WISSER, D.; BIERKENS, M. F. P. Global modeling of withdrawal, allocation and consumptive use of surface water and groundwater resources. **Earth System Dynamics**, [S.l.], v. 5, p. 15–40, 2014.

WANG H, F.; ANADERSON, M. P. **Introduction to groundwater modeling: finite difference and finite element methods**. San Diego: Academic Press, 1982. 237 p.

WARMING, R. F.; HYETT, B. J. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods, **J. Comput. Phys.**, [S.l.], v. 14, p. 159–179, 1974.

WERNER, P. C.; GERSTENGARBE, FW. The Climate of Piauí and Ceará. In: GAISER, T.; KROL M.; FRISCHKORN H.; de ARAÚJO, J. C. (eds) **Global Change and Regional Impacts**. Berlin: Springer Verlag, 2003. cap. 5, p. 81-86.

WINTER, T.C.; HARVEY, J.W.; FRANKE, O. L.; ALLEY, W. M. (1998) **Ground Water and Surface Water: a Single Resource**. United States Geological Survey. 1998, 79 p.

WROBEL, L. C.; EIGER, S.; ROSMAN, P. C.; TUCCI, C. E.; CIRILO, J. A.; CABRAL, J. P. **Métodos Numéricos em Recursos Hídricos**. Associação Brasileira de Recursos Hídricos. Rio de Janeiro, 1989.

XIE, H.; SHEN, Z.; CHEN, L.; QIU, J.; DONG, J. Time-varying sensitivity analysis of hydrologic and sediment parameters at multiple timescales: Implications for conservation practices. **Sci. Total Environ.**, [S.l.], v. 598, p. 353-364, 2017.

YE, M.; POHLMANN, K. F.; CHAPMANN, J. B.; POHLL, G. M.; REEVES, D. M. A model-averaging method for assessing groundwater conceptual model uncertainty. **Ground Water**, Estados Unidos, v. 48, p. 716–728, 2010

ZHOU, Y. A critical review of groundwater budget myth, safe yield and sustainability. **J Hydrol**, [S.l.], v. 370, p. 207–213, 2009.

ZHOU, Y.; WENNINGER, J.; YANG, Z.; YIN, L.; HUANG, J.; HOU, L.; WANG, X.; ZHANG, D.; UHLENBROOK, S. Groundwater–surface water interactions, vegetation dependencies and implications for water resources management in the semi-arid Hailiutu River catchment, China: a synthesis. **Hydrol Earth Syst Sci**, [S.l.], v. 17, p. 2435–2447, 2013

ZIENKIEWICZ, O.C., **The Finite Element Method**, McGraw-Hill, New York, 1977.

ZIENKIEWICZ, O.C.; MORGAN K. **Finite Elements and Approximation**, Wiley, Chichester, 1983.

ZIO, E.; APOSTOLAKIS, E. Two Methods For The Structured Assessment Of Model Uncertainty by Experts in Performance Assessment of Radioactive Waste Repositories. **Reliability Engineering and System Safety**, [S.l.], v. 54, p. 225–241, 1996.