



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FRANCISCO DANIEL SOUZA DE LIMA
FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

FORTALEZA

2019

FRANCISCO DANIEL SOUZA DE LIMA

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Professor Dr. Francisco Régis
Vieira Alves

FORTALEZA

2019

SUMÁRIO

1	O PRODUTO EDUCACIONAL (PE)	3
2	APRESENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL (PE)	5
2.1	Situação Didática Olímpica 4	7
2.2	Situação Didática Olímpica 5	18
2.3	Situação Didática Olímpica 6	27
2.4	Situação Didática Olímpica 7	35
2.5	Situação Didática Olímpica 8	43
2.6	Situação Didática Olímpica 9	48
2.7	Situação Didática Olímpica 10	54
2.8	Situação Didática Olímpica 11	62
3	Endereço para download e QR Code para leitura	68
	REFERÊNCIAS	72

1 O PRODUTO EDUCACIONAL (PE)

A Coordenação de Pessoal de Nível Superior (Capes) aponta o crescimento dos programas de Mestrado Profissional (MP) no Brasil. Até a data em que os dados foram apurados, houve aumento muito expressivo dos MPs no país.

O programa de MP para a área da educação é direcionado, sobretudo, para a formação dos professores em exercício que atuam na educação básica. Como afirma Ribeiro (2005, p. 8) seu principal objetivo “é formar alguém que, no mundo profissional externo à academia, saiba localizar, reconhecer, identificar e, sobretudo, utilizar a pesquisa de modo a agregar valor a suas atividades, sejam essas de interesse mais pessoal ou mais social.” Isto confirma o caráter prático do MP para o cotidiano de trabalho de quem procura essa modalidade de mestrado.

No que tange especificamente ao MP em ensino de Ciências e Matemática, como é o modelo do programa de mestrado ENCIMA, Moreira e Nardi afirmam que:

O mestrando deve desenvolver, por exemplo, alguma estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino para determinados conteúdos, um aplicativo, um ambiente virtual, um texto; enfim, um processo ou produto de natureza educacional e implementá-lo em condições reais de sala de aula ou de espaços não formais ou informais de ensino, relatando resultados dessa experiência. No momento atual, particular atenção deve ser dada à atualização curricular e ao uso das tecnologias de comunicação e informação na educação básica; mas, independente disso, o trabalho de conclusão deve necessariamente gerar um produto educacional que possa ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores. (MOREIRA; NARDI, 2009, p. 4).

Desse modo, nesse contexto de discussão, o futuro mestre deverá confeccionar um trabalho que realmente contribua para a melhoria do ensino em uma área da Ciência ou da Matemática. Esse trabalho é tradicionalmente nomeado de dissertação, como no mestrado acadêmico, porém com um diferencial, o Produto Educacional (PE). Portanto, o ponto máximo do programa de MP dá-se com a elaboração do PE, que deve ter fundamentação científica, epistemológica e pedagógica, atrelado à investigação da viabilidade de aplicação desse produto e, ainda, que possa potencializar a compreensão de determinados conteúdos, no caso do contexto educacional, os recursos didáticos devem ser direcionados para a utilização em sala de aula (TRENTIN, 2017).

Assim, segundo a Capes, um PE “trata-se de um relato de experiência de implementação de estratégias ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino em uma área específica do conhecimento” (CAPES, 2012, p. 2).

Todas essas questões corroboram para a importância da natureza do PE, uma vez que, no Brasil, é cada vez mais evidente a necessidade de políticas educacionais que busquem, dentre outras, a formação dos professores desse país. Por isso, esse tipo de trabalho tem uma importância ímpar como recurso a ser utilizado pelo público docente, a fim de buscar melhorias do ensino e aprendizagens dos alunos desta nação e, conseqüentemente, o desenvolvimento social.

Portanto, ciente dessa responsabilidade, preparamos um material direcionado aos professores de matemática atuantes na Educação Básica. Nesse trabalho, estão selecionadas todas as questões da segunda fase do nível três da OBMEP com respeito ao conteúdo de funções matemáticas. A abordagem dessas questões ancora-se na Teoria das Situações Didáticas (TSD), do pesquisador Guy Brousseau, dividindo-se em quatro fases: Ação, Formalização, Validação e Institucionalização. Feito isso, passaremos a denominar as questões de Situações Didáticas Olímpicas (SDO). Além disso, nosso trabalho usará como recurso auxiliar o software GeoGebra, versão 5.0, disponível para *download* gratuitamente no sítio *geogebra.org*, que possibilitará o dinamismo de cada SDO e, por conseguinte, permitirá a interação do professor com cada Problema Olímpico (PO) abordado.

É importante ressaltar que o nosso Produto Educacional (PE) ficará disponível gratuitamente no sítio oficial do *geogebra.org*, cujo endereço específico é página <<https://www.geogebra.org/u/danielufc.souza>>. Uma vez no sítio eletrônico, basta clicar no link cujo nome é materiais; o PE também será divulgado na página Geogebra Brasil no *facebook*, que conta com mais de sete mil professores, em sua grande maioria de matemática. O documento será divulgado, ainda, no Curso de Geogebra, dado anualmente em parceria com a Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Esse curso propõe uma formação para professores de matemática do ensino básico e superior de todo Brasil. Há edições em que são disponibilizadas até mesmo vagas para professores de outros países, com uma média de quatrocentas vagas visando ao aprendizado dos conhecimentos básicos do software Geogebra, com vistas ao suporte pedagógico do docente. Disponibilizaremos ainda, de maneira mais formal, o Produto Educacional, sobretudo, no repositório de dissertações de mestrado da Universidade Federal do Ceará (UFC) e, de forma mais abrangente, estará disponível também no portal do professor do Ministério da Educação (MEC).

2 APRESENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL (PE)

O Produto Educacional que estamos apresentando aqui é o resultado de um árduo trabalho de pesquisa, de muita dedicação e cautela na elaboração por parte dos autores. Nosso objetivo central é oferecer um material que possibilite ao professor de matemática uma proposta de outro tipo de abordagem das questões da segunda fase de nível três da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) sobre o tema funções ou, ainda, sugerir o uso desse material em suas aulas convencionais para uma abordagem da OBMEP, quando convier ao professor.

Utilizamos a metodologia de ensino Teoria das Situações Didáticas (TSD) na abordagem das questões da segunda fase do nível três da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) sobre o tema funções. Com a TSD, abordamos os problemas relacionados ao conteúdo de funções matemáticas, assunto recorrente na referida olimpíada desde a sua primeira edição, no ano de 2005. Desse modo, nosso trabalho apresenta várias Situações Didáticas Olímpicas (SDO) com o referido tema, a fim de fornecer um leque de opções para que os docentes possam encontrar nesse material um apoio para sua preparação em um tipo de abordagem diferente dos métodos convencionais disponibilizados pelo site oficial da OBMEP, dentre outros.

Além disso, escolhemos a OBMEP em virtude de ela ser uma Olimpíada muito importante. Dentre as competições existentes em matemática, a referida olimpíada se destaca por ser muito difundida e, por ter o maior número de participantes nesse modelo de competição. Outro aspecto importante está no fato de ela ser direcionada aos alunos da Educação Básica, instância na qual normalmente atuam os professores que são o público-alvo deste trabalho. Esses profissionais são cotidianamente solicitados a trabalharem seus conteúdos habituais de matemática em sala de aula direcionados para a referida competição, mas nem sempre dispõem dos recursos necessários para ministrar uma aula que seja mais atrativa e proveitosa no tocante à aprendizagem dos alunos.

Assim, acreditamos que nosso trabalho pode ser um recurso diferencial, auxiliando a formação do professor para essa abordagem, o que poderá ajudar a potencializar o ensino e aprendizagem tão almejadas nas suas aulas. Portanto, nada mais justo que oferecer um material para que esses profissionais que lidam com o ensino de matemática possam encontrar um contributo a mais na sua formação profissional em nosso PE.

A introdução das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) na educação tem crescido exponencialmente e trazido verdadeiros impactos positivos nos

avanços da educação. Sobre os ambientes computacionais, na utilização de software no auxílio educacional, Borba e Villareal (2005) afirmam que há um rápido *feedback* proporcionado pelas mídias em seus aspectos visuais. Os autores ressaltam a importância desses processos no condicionamento do pensamento matemático dos estudantes. Essa abordagem visual é caracterizada, na Educação Matemática, principalmente pelos seguintes fatos:

- Visualização constitui um meio de acesso alternativo ao conhecimento matemático;
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles;
- Visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas. (BORBA; VILLAREAL, 2005, p. 96)

Portanto, foi com esse intuito que escolhemos como recurso tecnológico o software GeoGebra (versão 5.0), uma vez que ele proporciona dinamismo às construções, é de fácil manuseio constitui-se como um software de domínio público que pode facilmente ser usado em diversos sistemas operacionais de diferentes aparelhos tecnológicos, tais como: *smartphones*, *tablets*, notebooks, computadores, dentre outros.

Nessa perspectiva, conscientes de que esse trabalho é voltado para a formação de professores de matemática, orientando-os na abordagem das questões de segunda fase no nível três da OBMEP, do tema *função matemática*, versamos sobre os exercícios pertinentes a essa competição, com o intuito de apresentar um material com uma abordagem diferente da convencional. Além disso, cada construção é acompanhada de ricos comandos que possibilitam a construção de cada uma delas (das aludidas funções) no software. Acreditamos que, dessa maneira, o nosso trabalho cumpre uma função dupla, qual seja, disponibilizar as construções prontas com os comandos no software para o uso Didático-Pedagógico pelos docentes, e oferecer, por consequência, instrumentos de formação para os professores na realização de construções semelhantes, de forma independente, que possam surgir futuramente na presente competição, bastando para isso que se utilizem de combinações dos comandos apresentados de formas convenientes em outras questões da OBMEP que, por ventura, desejem realizar, analogamente ao nosso trabalho, no processo de transposição de outras para o GeoGebra.

Além disso, ao final das apresentações dessas Situações Didáticas Olímpicas (SDO), disponibilizamos o link para seu download. Em razão da popularização dos *smartphones*, que podem ser usados como ferramenta pedagógica em sala de aula para o

aprendizado, disponibilizamos também por meio do *QR Code* o endereço de cada uma das construções. Assim, basta que os interessados ativem a câmera de seus *smartphones*, apontem para o *QR Code* ou que utilizem um aplicativo próprio para a leitura desse código. Desse modo, serão direcionados às páginas das respectivas Situações Didáticas Olímpicas que estarão prontas para serem manipuladas no seu próprio aparelho celular.

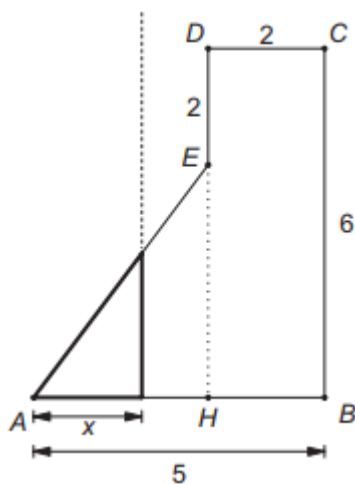
Nesse sentido, estão presentes em nossa pesquisa onze Situações Didáticas Olímpicas envolvendo problemas da OBMEP, oito no presente documento e três no corpo da dissertação, contemplando a TSD e o uso do software GeoGebra.

2.1 Situação Didática Olímpica 4

Conhecimentos prévios: Teorema de Pitágoras, Perímetro, Semelhança de Triângulos e Função do 1º grau.

Problema (OBMEP-2016. 2º Fase, Questão 3, Nível 3): A figura mostra um polígono ABCDE em que todos os lados, exceto AE, são horizontais ou verticais e têm os comprimentos indicados na figura. Considere, agora, uma reta vertical distante x do vértice A, com $0 < x \leq 5$. Ela divide o polígono ABCDE em dois polígonos, um situado à direita da reta e outro à esquerda. Considere a função f que associa a cada valor de x o perímetro do polígono situado à esquerda da reta. Por exemplo, $f(3)$ é o perímetro do triângulo AHE, enquanto $f(5)$ é o perímetro do polígono ABCDE.

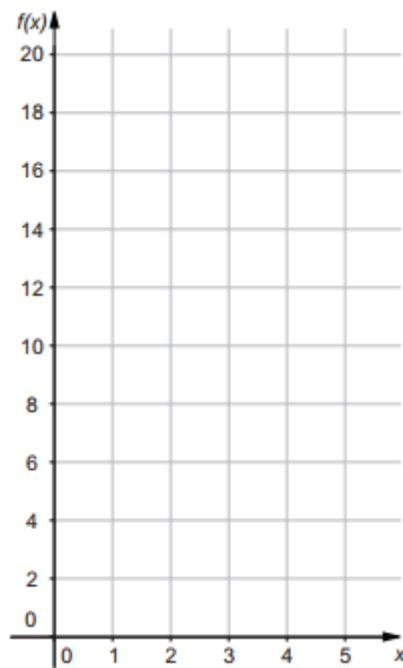
Figura 1 – Polígonos



Fonte: OBMEP (2016).

- a) Calcule $f(3)$.
- b) Calcule $f(5)$.
- c) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 < x \leq 3$ e para $3 < x \leq 5$.
- d) Esboce o gráfico da função f .

Figura 2 – plano cartesiano

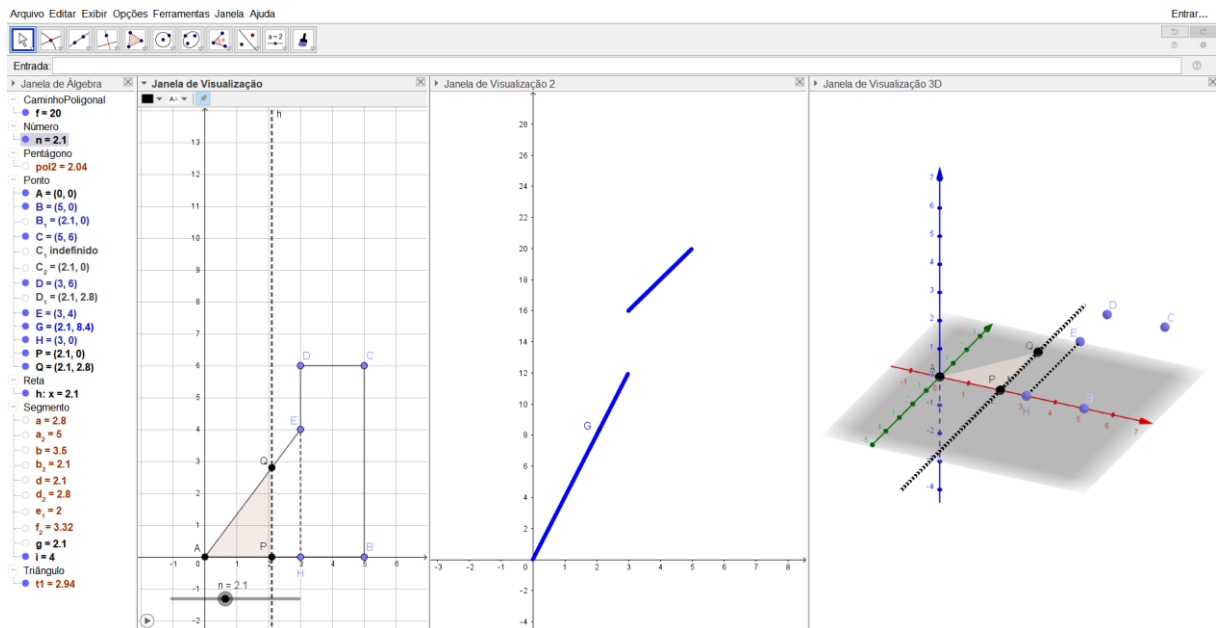


Fonte: OBMEP (2016).

Dialética da Ação: Nessa fase, como afirma Almouloud (2007, p. 38), “é essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações do *milieu*”. Nela, o docente, ao mover o controle deslizante n ¹, deverá perceber inicialmente a correspondência da construção com o enunciado do problema. Nesse momento, por meio da observação das janelas de visualização 1, 2 e 3, ele poderá iniciar suas reflexões sobre a proposta da questão.

¹ Chamamos o deslizante de n e não de x , que se adequaria melhor ao enunciado do problema, pois o GeoGebra não permite essa denominação, uma vez que ele reserva a letra x para as abscissas dos pontos somente. Assim, onde se tem n , entenda-se x

Figura 3 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 4, parte 1)

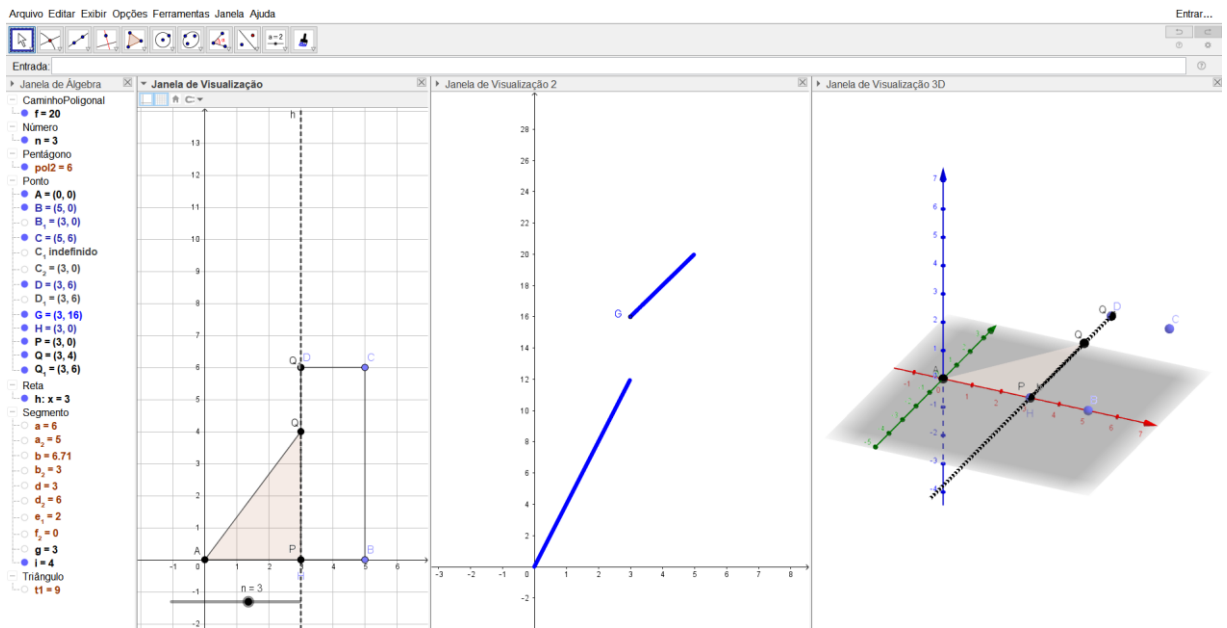


Fonte: elaborado pelo autor.

Assim, na janela de visualização 1, o docente deverá notar que, à medida que a reta h se move, em função do movimento do deslizador n , surgirão dois polígonos, um situado à direita dessa reta e outro à esquerda dela, como afirma o próprio enunciado do problema. O polígono da esquerda é aquele referido pelos itens do problema. Então, o docente, observando a janela de visualização 2, poderá estabelecer uma correspondência entre o gráfico que surgirá nela com o surgimento do polígono da esquerda da reta h na janela 1, que, por sua vez, depende do movimento do deslizador n . De posse do enunciado e da construção, dá-se início ao processo de elaboração do raciocínio a fim de chegar às soluções de cada item.

Dialética da Formulação: Nessa etapa, os sujeitos passarão a conjecturar e testar hipóteses levantadas, visando solucionar a questão. Na construção para o primeiro item, ao posicionar o deslizador na posição $n = 3$, os sujeitos visualizarão a seguinte figura:

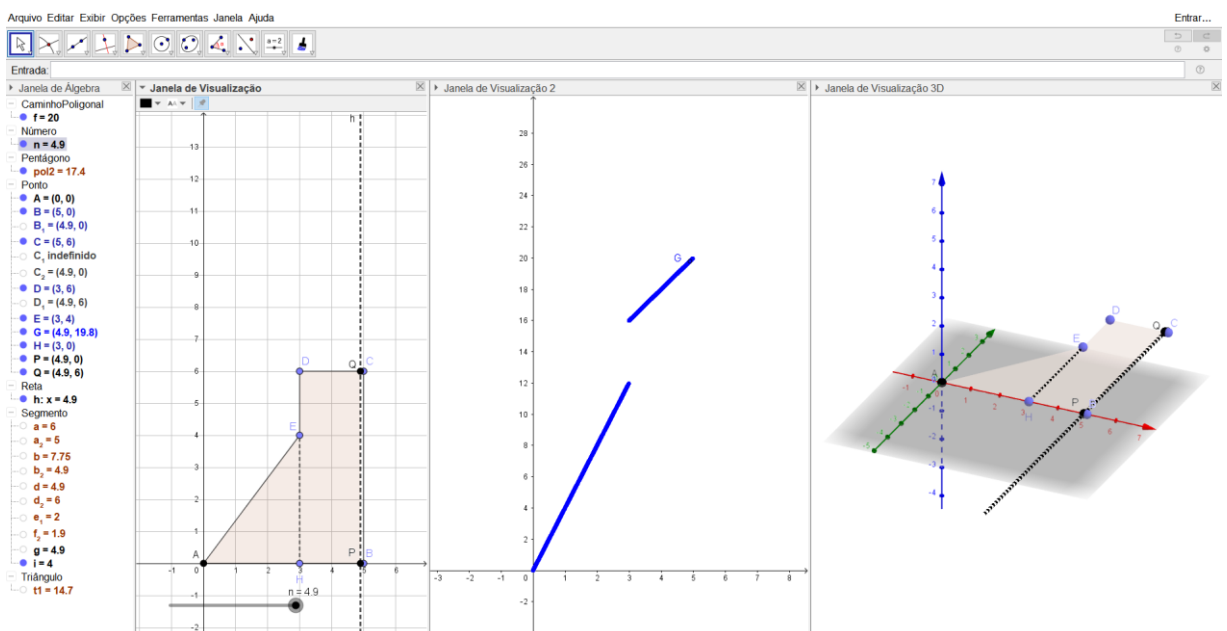
Figura 4 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 4, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Pela construção, perceberão que os catetos do triângulo ΔAPQ são dados, basta aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar a hipotenusa \overline{AQ} , obtendo, assim, todos os lados do polígono formado. Em seguida, eles devem notar que, com o mesmo raciocínio, posicionando o deslizante em $n = 5$, basta realizar a soma dos lados do polígono obtido.

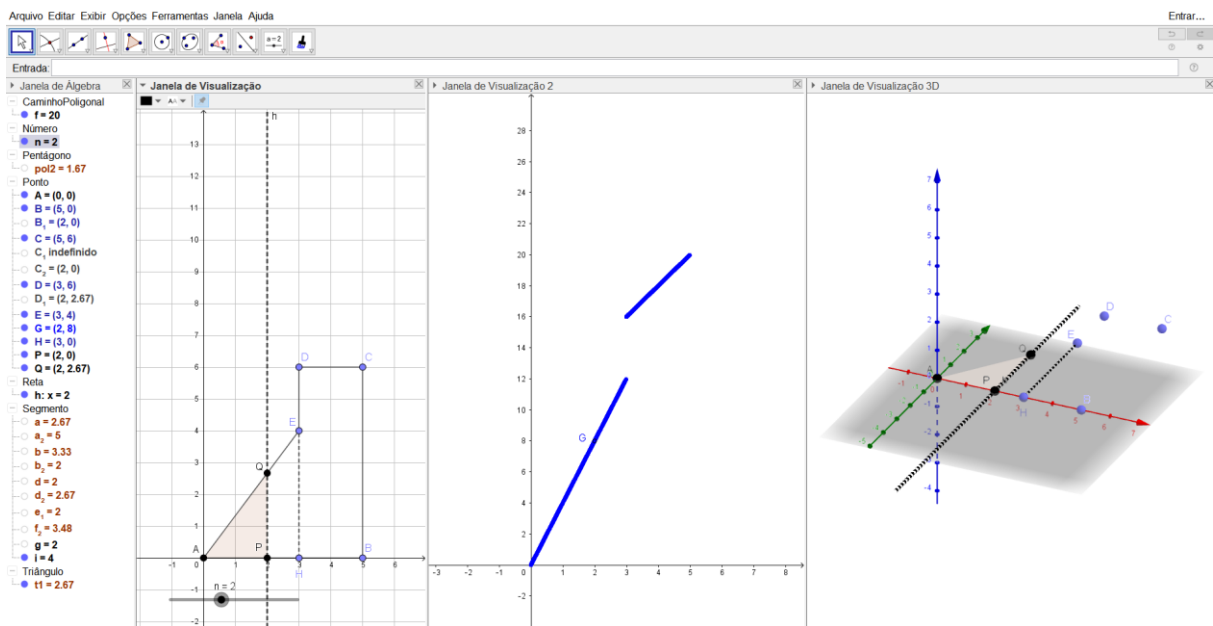
Figura 5 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 4, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Para o item c, eles deverão notar que será preciso separar o problema em duas partes, uma vez que surgirão polígonos diferentes para cada região varrida pela reta h , a saber: entre $0 < x \leq 3$, um triângulo e, em entre $3 < x \leq 5$, um pentágono, como podemos observar nas duas figuras imediatamente acima. Desse modo, Para $0 < x \leq 3$, os docentes observarão que, posicionando o deslizador em qualquer ponto nesse intervalo, digamos $n = 2$, teremos:

Figura 6 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 4, parte 4)

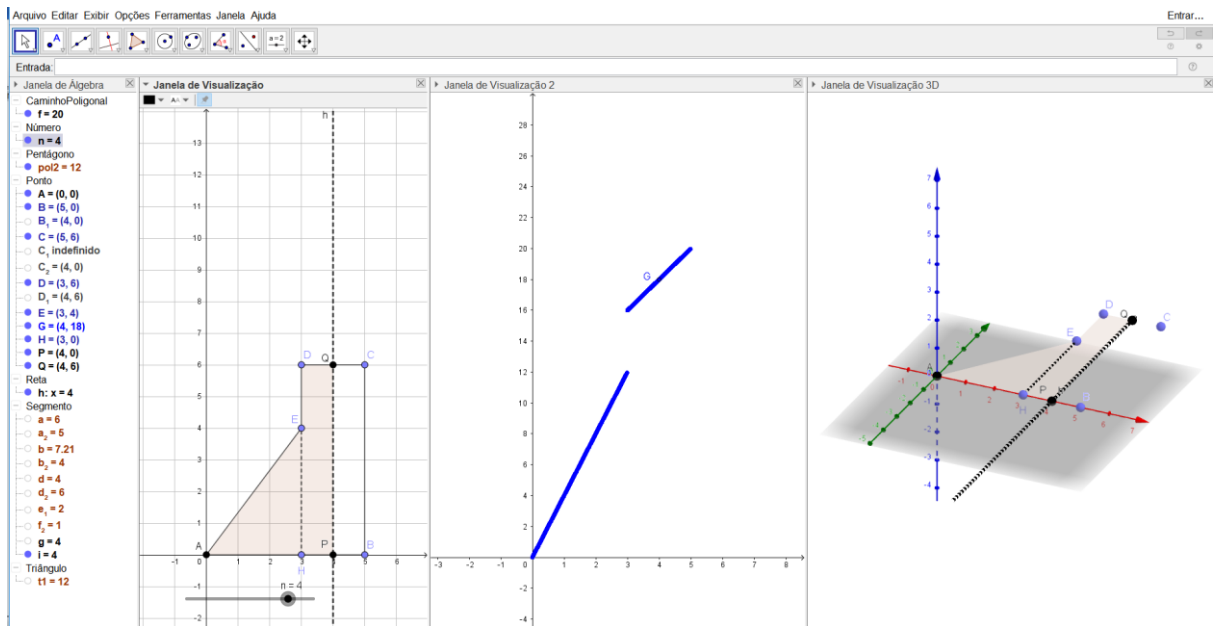


Fonte: elaborado pelo autor.

Assim, terão de compreender que os triângulos ΔAPQ e ΔAHE são semelhantes. Ao aplicarem semelhança nos lados correspondentes dos triângulos, encontrarão $f(x) = 4x$, ou seja, a função que corresponde ao perímetro desse polígono em função da variação de n nesse intervalo.

Para $3 < x \leq 5$, os docentes observarão agora que, posicionando o deslizador em qualquer nesse intervalo, digamos $n = 4$, obter-se-á:

Figura 7 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 4, parte 5)



Fonte: elaborado pelo autor.

Poderão determinar com os lados do polígono formado a função $f(x) = 2x + 10$ que corresponde ao perímetro desse polígono em função da variação de n nesse intervalo. Finalmente, no último item eles terão de analisar o gráfico das duas funções em cada intervalo dado e esboçá-lo como na janela de visualização 2 da figura imediatamente acima.

Dialética da Validação: Essa é a etapa que os docentes irão procurar validar os argumentos que comprovem a forma de abordagem, as estratégias da etapa anterior. Poderão também analisar a formalização da escrita algébrica e as relações geométricas utilizadas. O software pode ser também usado como apoio nessa fase.

Dialética da Institucionalização: Nessa etapa, o pesquisador retoma a situação e realiza a formalização matemática para que fique claro o saber em jogo. Ou seja, ele deverá explicar como os conhecimentos acerca do Teorema de Pitágoras, Perímetro, Semelhança de Triângulos e Função do 1º grau poderão ser usados para resolução da questão. Assim, no item a, pela construção, posicionando o deslizante em $n = 3$, podemos perceber que o triângulo ΔAPQ , retângulo em P, tem catetos $\overline{AP} = 3$ e $\overline{PQ} = 4$; logo, aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos a hipotenusa $\overline{AQ} = 5$. Desse modo, o perímetro do polígono ΔAPQ para $f(3) = 3 + 4 + 5 = 12$.

No item b, posicionando o deslizante em $n = 5$, temos o polígono ABCDE. Basta somar a medida de seus lados: $f(5) = 5 + 6 + 2 + 2 + 5 = 20$. No item c, para o primeiro

intervalo, $0 < x \leq 3$, a fim de visualizar a situação, posicionamos o deslizador em $n = 2$, por exemplo, e aplicamos semelhança nos triângulos ΔAPQ e ΔAHE . Assim: $\frac{x}{3} = \frac{PQ}{4}$ e $\frac{x}{3} = \frac{AQ}{5}$, temos $\overline{PQ} = \frac{4x}{3}$ e $\overline{AQ} = \frac{5x}{3}$. Para o perímetro desse polígono teremos:

$$f(x) = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{PA} = x + \frac{4x}{3} + \frac{5x}{3} = 4x$$

Para o segundo intervalo $3 < x \leq 5$, a fim de visualizar a situação, posicionando o deslizador em $n = 4$, por exemplo, temos:

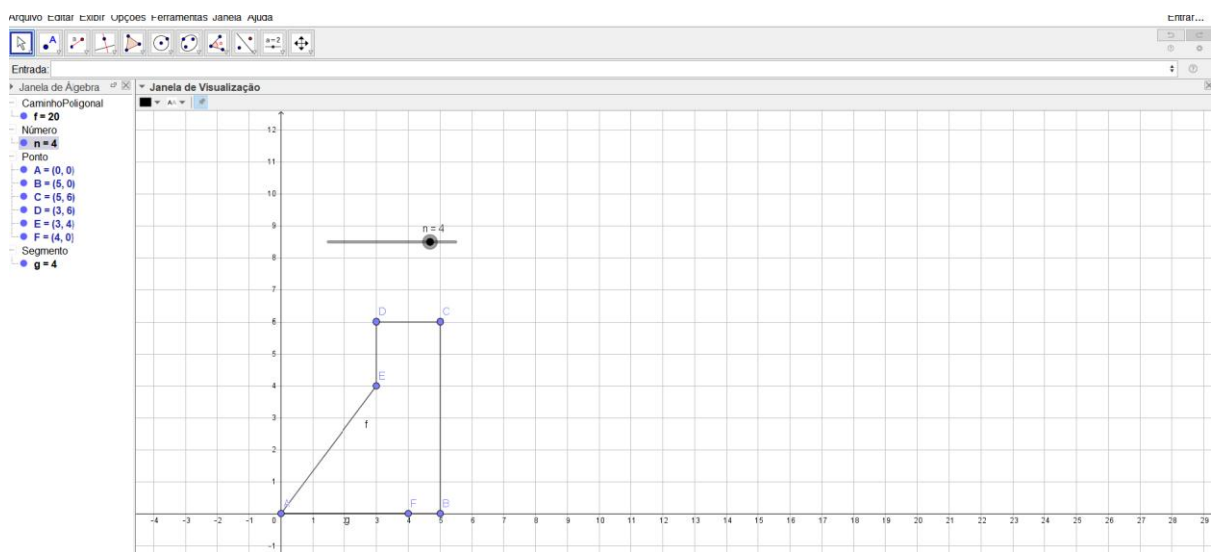
$$f(x) = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{PD} + \overline{DE} + \overline{EA} = x + 6 + 9 + (x - 3) + 2 + 5 = 2x + 10$$

No item d, para esboçar o gráfico das duas funções, basta analisar seu comportamento no seu respectivo intervalo.

Descrição dos comandos no GeoGebra: A seguir, temos os comandos para obter a construção em discussão. Abra o GeoGebra e siga os passos abaixo.

Passo 1: Na caixa de entrada escreva: Caminho poligonal ((0,0), (5,0),(5,6),(3,6),(3,4),(0,0)) denominado de f . Com a ferramenta deslizador, crie o controle deslizador n de intervalo 0 a 5 com incremento de 0,1. Com a ferramenta ponto, marque os pontos A, B, C, D e E nos vértices do polígono f . Com a ferramenta “segmento com comprimento fixo” selecionada, clique no ponto A, defina seu comprimento como sendo n , sua extremidade será denominada por F pelo software. Mova o deslizador para ver o resultado parcial.

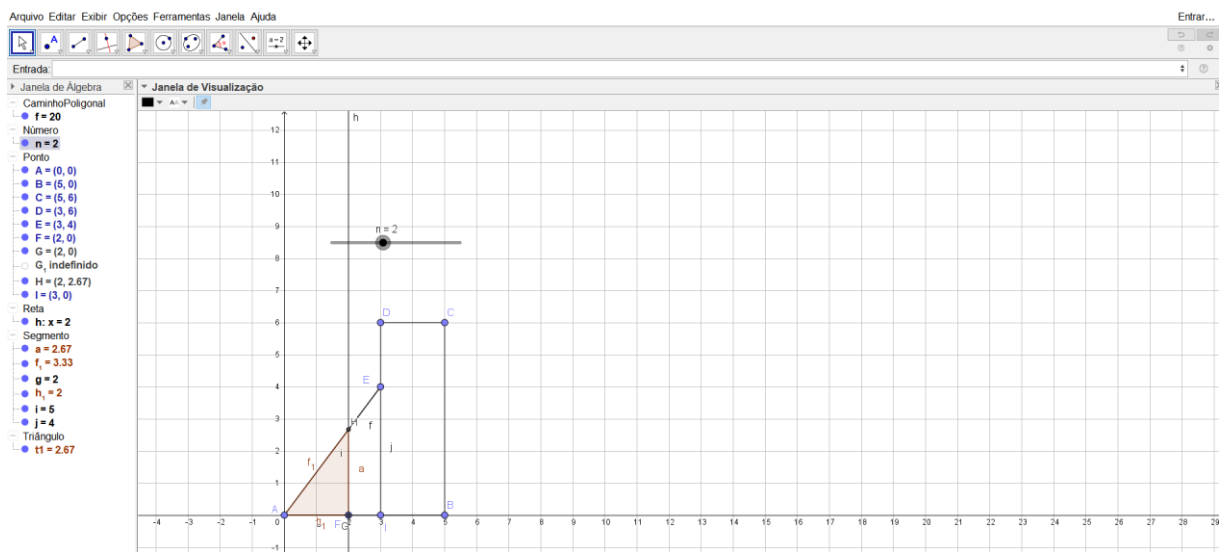
Figura 8 – Construção (SDO 4, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 2: Com a ferramenta reta perpendicular crie a reta h , perpendicular ao eixo ox , passando por F , extremidade do segmento de comprimento fixo. Com a ferramenta “segmento” crie o segmento i clicando no segmento \overline{AE} . Com a ferramenta “intersecção entre dois objetos”, clique na reta h e no caminho poligonal f para obter os pontos G e H . Posicione o deslizante em 2. Com a ferramenta polígono, clique em A , G , H e A para obter polígono $t1$. Com a ferramenta “ponto”, marque o ponto $I=(3,0)$ e, com a ferramenta segmento, crie o segmento \overline{IE} .

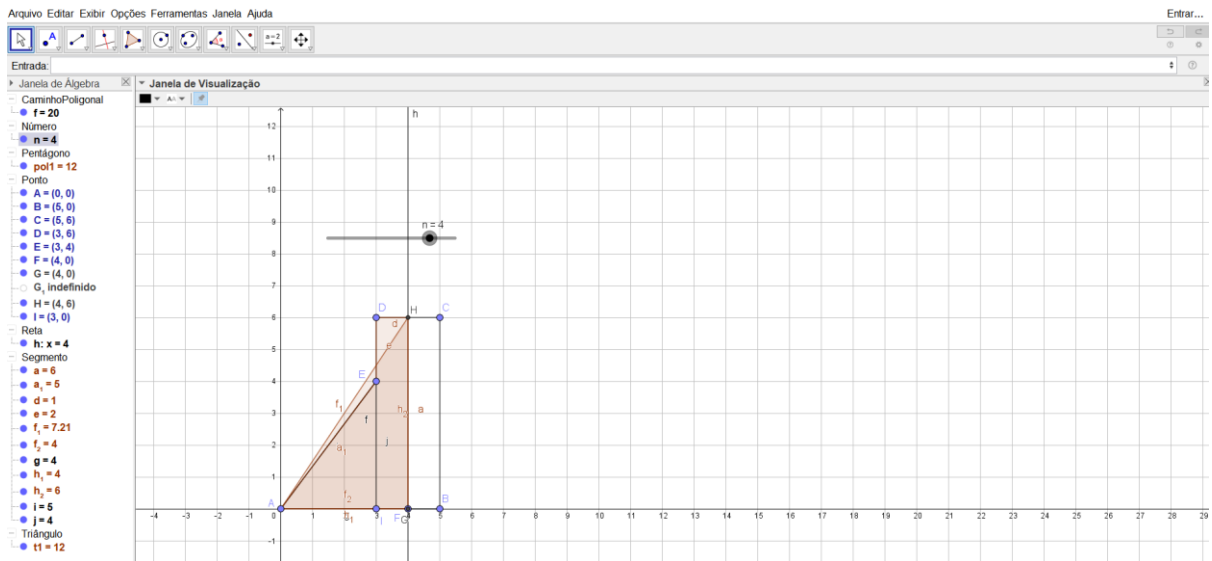
Figura 9 – Construção (SDO 4, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 3: Posicione o deslizante em 4. Com a ferramenta “polígono”, marque o polígono $pol1$ clicando em A , E , D , H , G e A .

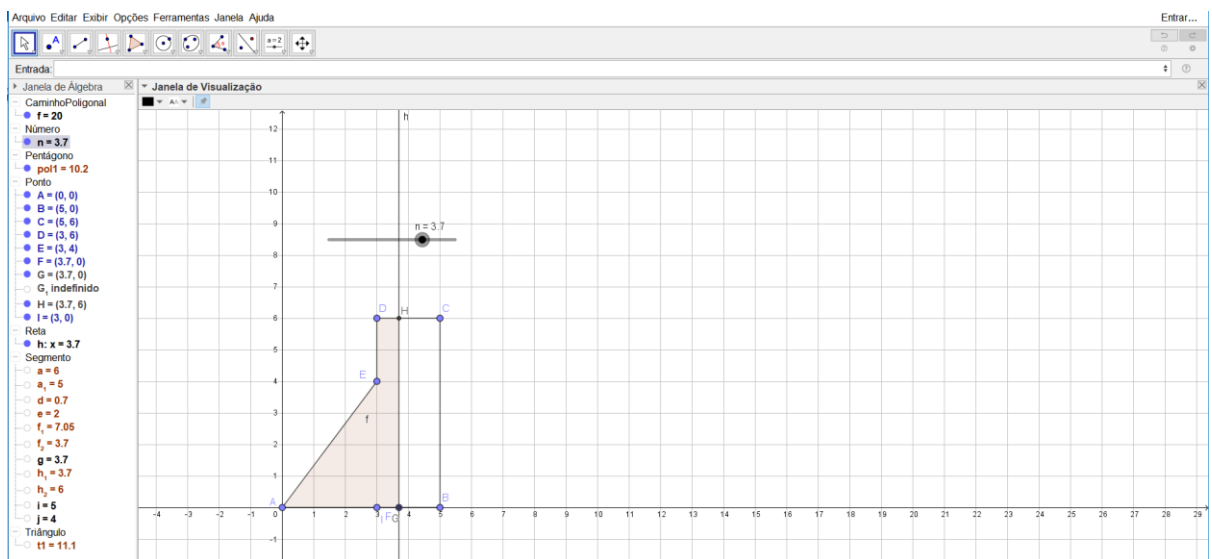
Figura 10 – Construção (SDO 4, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 4: Posicione o deslizante em 2, clique com botão direito do mouse sobre o triângulo t1, vá em propriedades, depois em avançado digite: $y(H) \leq 4$ para definir a condição de exibição de t1. Posicione o deslizante em 4, clique com o botão direito do mouse sobre o polígono ou em pol1 na janela de álgebra, vá em propriedades, depois em avançado digite: $y(H) \geq 4$ para definir a condição de exibição de pol1. Vá à janela de álgebra, na aba “segmentos”, clique com o botão direito sobre o nome e desmarque a opção “exibir objeto” e “exibir rótulos”. Movimente o deslizante para ver o resultado.

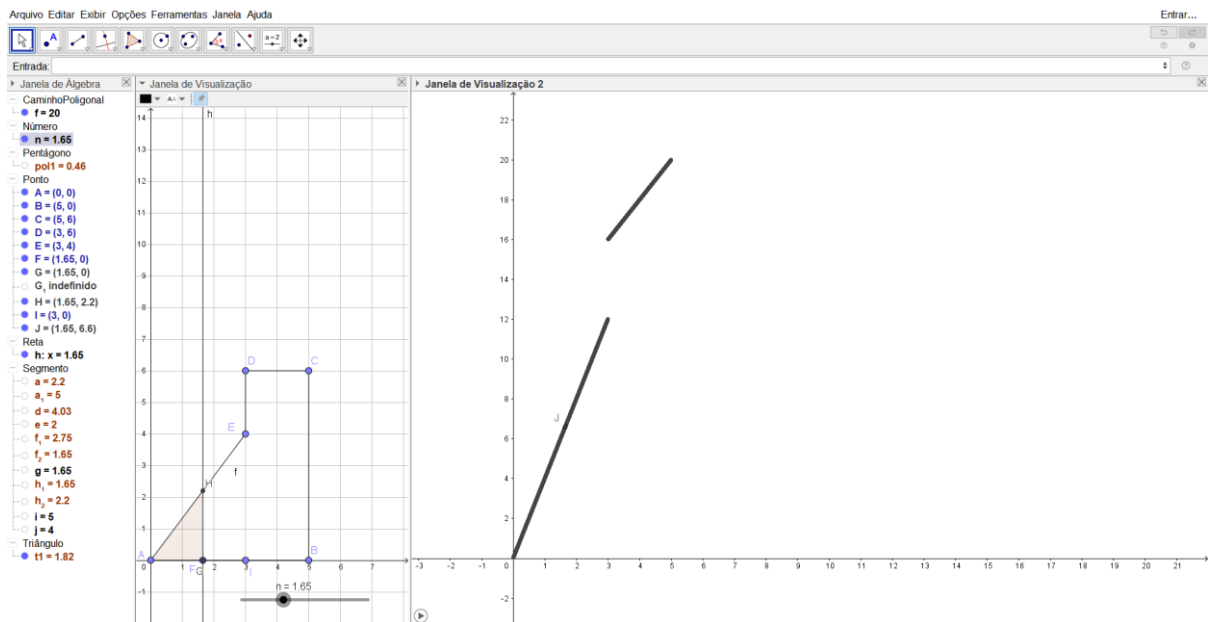
Figura 11 – Construção (SDO 4, parte 4)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 5: Vá ao menu exibir, clique em exibir outra janela 2D. Com ela selecionada, digite na caixa de entrada o comando: $(n, \text{Se}(y(H) \leq 4, \text{Perímetro}(t1), \text{Perímetro}(pol1)))$. Surgirá o ponto J cujo gráfico é a área do perímetro dos polígonos $t1$ e $pol1$ à medida que o deslizador varia. Posicione o deslizador em 5. Para que o ponto J apareça na tela, com a janela de visualização 2 selecionada, clique na ferramenta “mover janela”. Em seguida, posicione o ponteiro do mouse sobre o eixo y até surgir uma seta dupla. Clique e arraste o eixo y para baixo até o ponto J surgir na tela. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto J, escolha a opção “habilitar rastro”. Para que o rastro se torne contínuo, clique com o botão direito do mouse no deslizador n , vá em propriedades e retire o incremento. Anime o deslizador para ver o resultado.

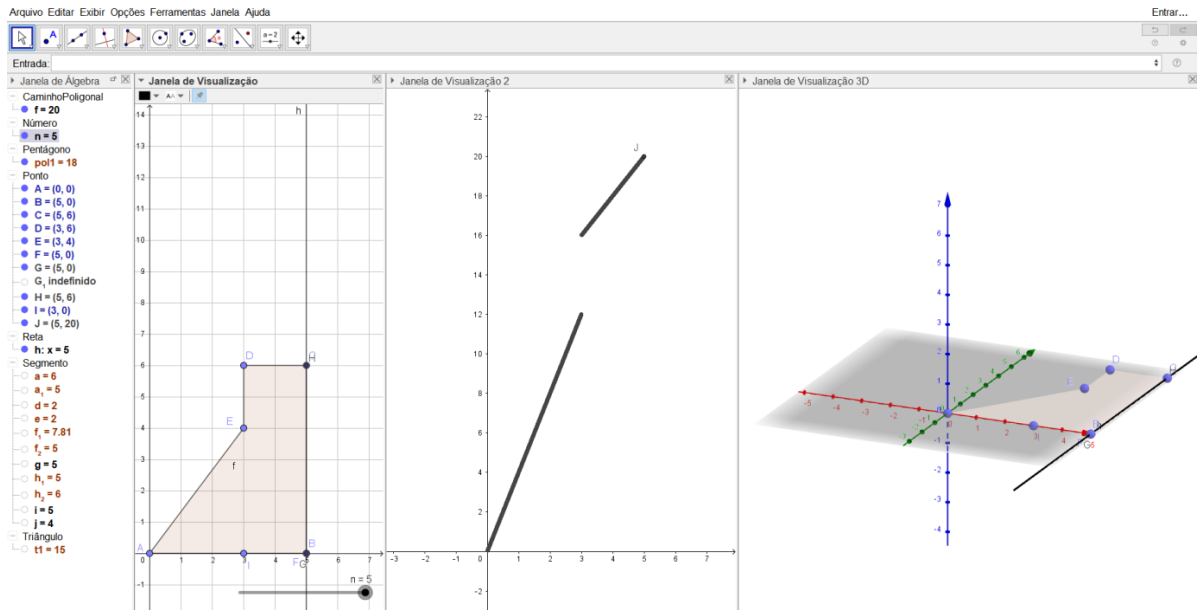
Figura 12 – Construção (SDO 4, parte 5)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 6: A fim de explorar outros aspectos da construção, vá ao menu exibir, peça para exibir a janela de visualização 3D.

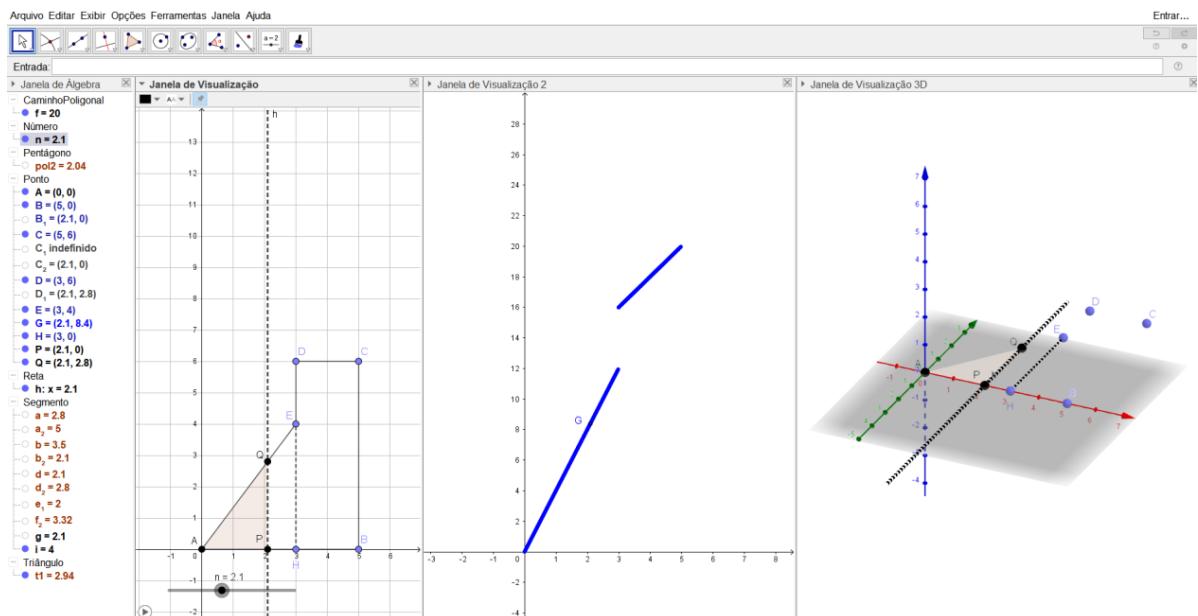
Figura 13 – Construção (SDO 4, parte 6)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 7: Este passo é opcional, está relacionado ao estilo da cada um a fim de adequar o problema ao visual como ele se encontra na OBMEP. Iremos renomear pontos, mudar o estilo da reta, de segmento e de alguns pontos, do gráfico, dentre outros. Iremos omitir os passos por se tratar de conhecimentos básicos do software. Em nosso caso, preferimos a apresentação da SDO assim:

Figura 14 – Construção (SDO 4, parte 7)



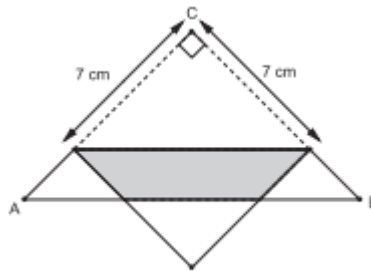
Fonte: elaborado pelo autor.

2.2 Situação Didática Olímpica 5

Conhecimentos prévios: Áreas do Quadrado e do Triângulo, Propriedade do Triângulo Isósceles, Função do 2º grau.

Problema (OBMEP-2013. 2º Fase, Questão 4, Nível 3): A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm^2 , da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura abaixo a área da região cinzenta, em cm^2 , é $f(7)$.

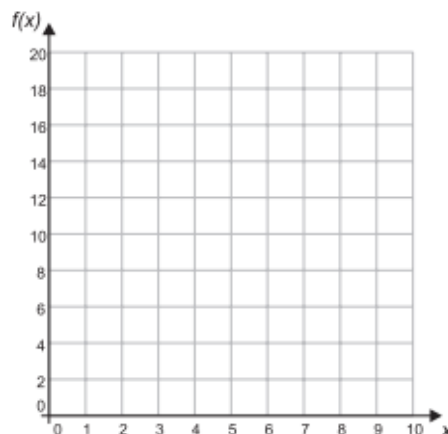
Figura 15 – Triângulo



Fonte: OBMEP (2013).

- Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.
- Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.
- Faça o gráfico de $f(x)$ em função de x .

Figura 16 – Plano cartesiano

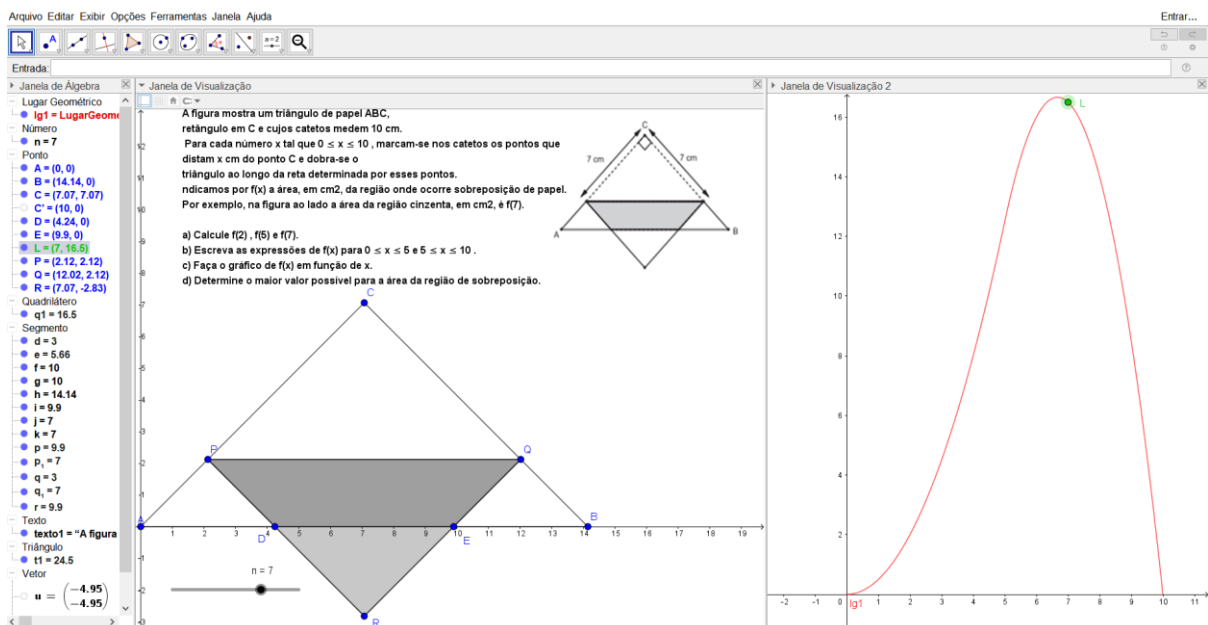


Fonte: OBMEP (2013).

d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

Dialética da Ação: Como essa fase se caracteriza por revelar toda ação inicial, acreditamos que os docentes, movendo o deslizante n , se ambientarão com o texto proposto na questão e perceberão sua correlação com a construção no software. Espera-se, ainda, que eles testem sucessivas posições para n , por exemplo, $n = 2$, $n = 5$ e $n = 7$, propostos pela questão, para conjecturar sobre comportamento da dobradura dos polígonos destacados em cinza claro ou escuro. Além disso, deverão entender que relação de dependência existe entre o movimento do polígono na primeira janela com gráfico na segunda janela, na qual consta a curva da área de sobreposição dos polígonos (do papel) onde, por sua vez, desliza o ponto L.

Figura 17 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 5, parte 1)



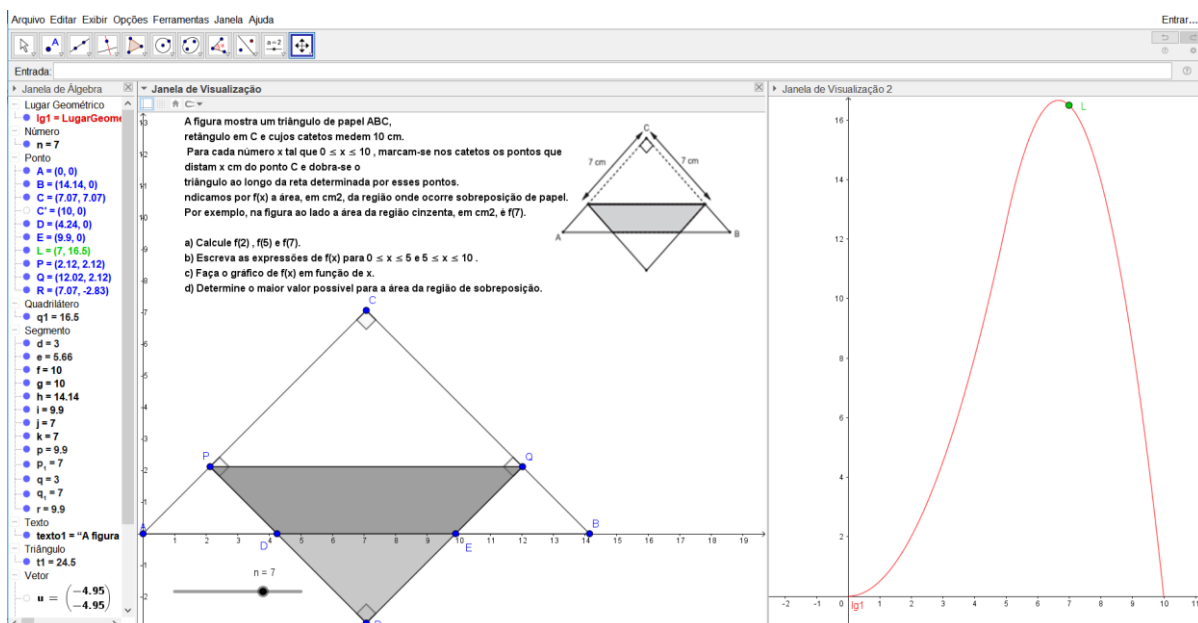
Fonte: elaborado pelo autor.

Dialética da Formulação: Nessa etapa, o docente deverá perceber os caminhos até a resposta desejada, apresentando de forma verbal ou escrita sua percepção a respeito das janelas de visualização 1 e 2 ao movimentar o deslizante n na construção realizada no GeoGebra. Nessa fase, o objetivo é o de despertar conjecturas, o raciocínio que descreva a solução, sendo que estas apresentações podem ser seguidas de uma variável micro-didática, ou seja, a partir dos questionamentos feitos pelo pesquisador aos sujeitos.

Por meio da construção eles poderão realizar a modelagem matemática, a fim de chegar à solução de todos os itens. Acreditamos que o primeiro item será realizado com certa facilidade, já que em cada posição pedida teremos sempre a metade de um quadrado, ou seja,

o ΔPRQ cujos lados são conhecidos. Para $n = 7$, acreditamos que o aprendiz também perceberá que a região pedida, o trapézio, $PDEQ$ será dada, por exemplo, pela diferença entre os triângulos ΔPRQ e ΔDRE , cujos catetos também são iguais, já que se pode concluir facilmente que os triângulos ΔAPD e ΔEQB são isósceles.

Figura 18 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 5, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

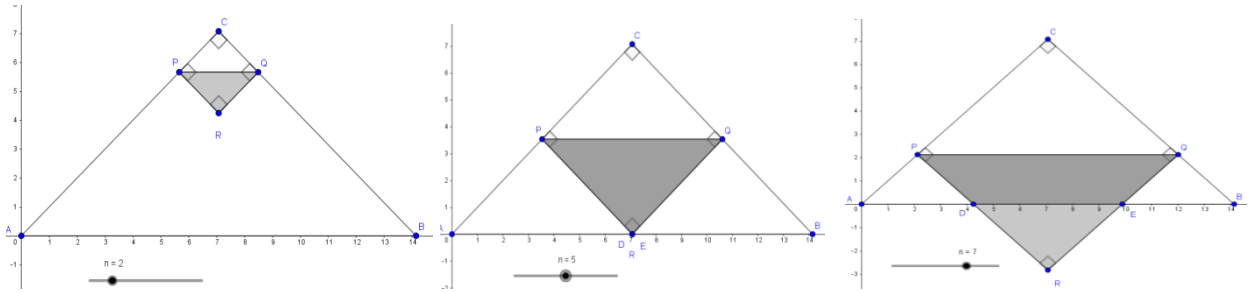
Nos demais itens, os sujeitos poderão posicionar o deslizante em cada intervalo dado, $0 \leq x \leq 5$ e $5 < x \leq 10$, realizando o mesmo raciocínio do primeiro item para encontrar cada uma das expressões desses intervalos e, finalmente, chegar ao gráfico da janela de visualização 2 que relaciona área da sobreposição dos polígonos em função da variação de x (no nosso caso n).

Dialética da Validação: Nessa etapa, é esperado que os sujeitos validem seus argumentos ou não, o que dependerá das conjecturas levantadas inicialmente e da percepção da coerência do seu raciocínio com a construção em si, das suas anotações escritas, das discussões orais, dentre outras. Fundamentalmente, todo o processo perpassa de forma mais objetiva a interação com a situação didática criada.

Dialética da Institucionalização: Nessa fase, caso julgue necessário, cabe ao professor que conduz o processo formalizar a solução do problema. Ressaltamos, mais uma vez, que onde se tem n , denominação do deslizante, entenda-se x , por razões já explicadas anteriormente.

Assim, quanto ao item a, para obtermos a área de sobreposição dos polígonos para $n = 2$, $n = 5$ e $n = 7$, no qual R representa a posição de C após a dobradura, temos:

Figura 19 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 5, parte 3)

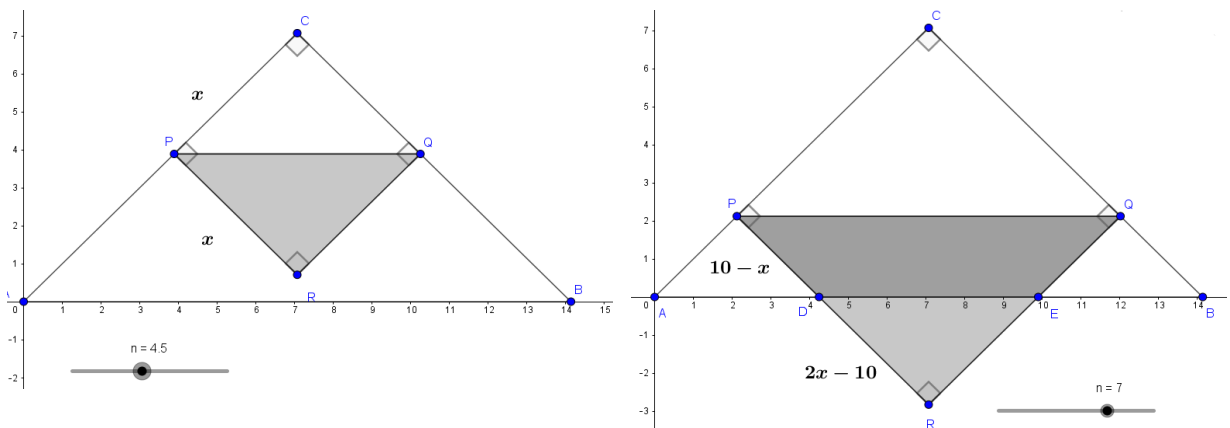


Fonte: elaborado pelo autor.

O polígono CPRQ é um quadrado. Assim, para $n = 2$, $n = 5$ área do triângulo em cinza será dada, respectivamente por $A_{PRQ} = f(x) = \frac{x^2}{2}$, portanto $f(2) = \frac{2^2}{2} = 2 \text{ cm}^2$ e $f(5) = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2} \text{ cm}^2$. Para $n = 7$, a área do trapézio $PDEQ$ será a diferença entre as áreas dos triângulos ΔPRQ e ΔDRE cujos catetos também são iguais, já que se pode concluir facilmente que os triângulos ΔAPD e ΔEQB são isósceles. Pela construção tem-se $f(7) = \frac{7^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \frac{33}{2} \text{ cm}^2$.

Para o item b, posicionando o deslizante entre os dois intervalos pedidos, temos:

Figura 20 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 5, parte 4)

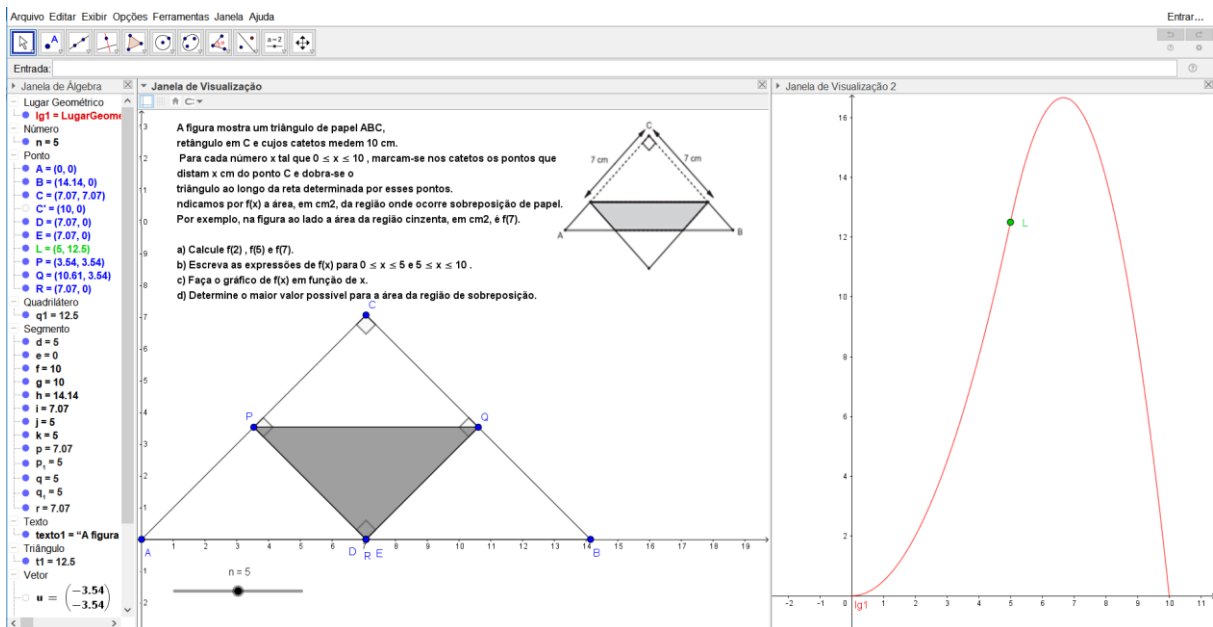


Fonte: elaborado pelo autor.

Retomando o raciocínio do primeiro item. Na figura à direita, cujo intervalo é $0 \leq x \leq 5$, a área da sua região sombreada nesse intervalo será dada pela função $f(x) = \frac{x^2}{2}$. De modo análogo, na figura à esquerda, cujo intervalo é $5 < x \leq 10$, a área da região sombreada será dada pela função $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{(2x-10)^2}{2} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 40x - 100)$.

Para o item c, analisando a expressão das duas funções obtidas nos seus respectivos intervalos fica fácil perceber o comportamento das duas parábolas e traçar os dois gráficos como mostramos na construção.

Figura 21 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 5, parte 5)



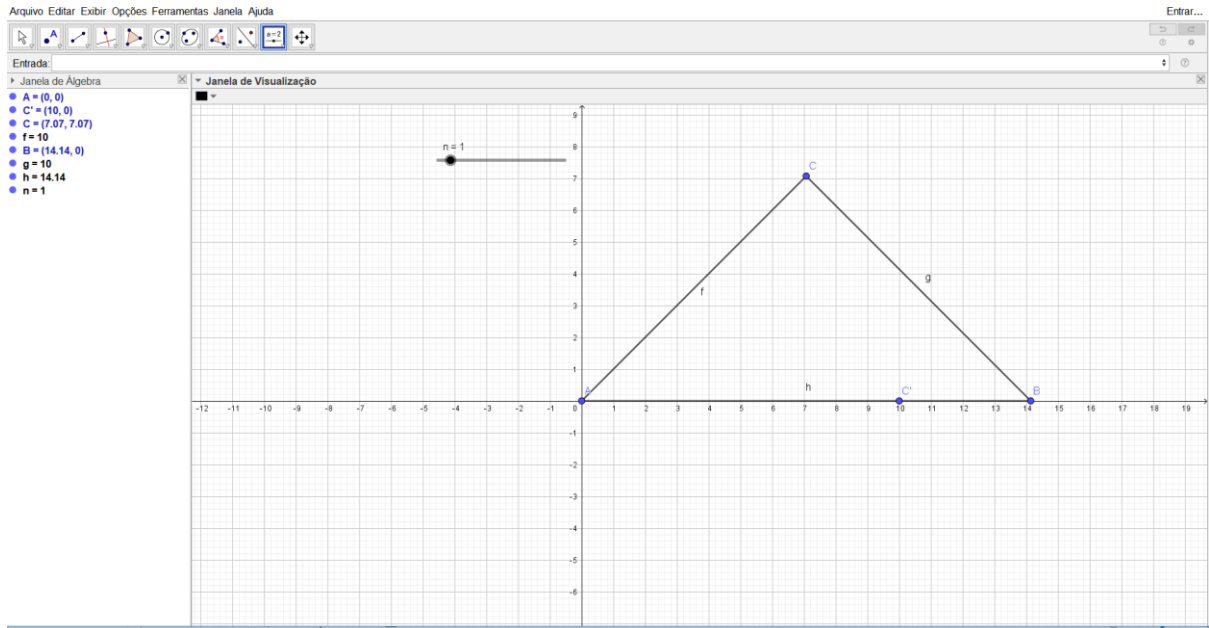
Fonte: elaborado pelo autor.

Finalmente, no item d, com o auxílio da construção podemos notar que o maior valor possível para a área da região sombreada ocorrerá para $n = 6,66 \dots = \frac{20}{3}$, basta observar a posição na qual se encontra o ponto L. Portanto, da segunda função decorre que a área será $\frac{50}{3} \text{ cm}^2$. Outra forma de determinar essa área máxima seria trabalhar com o ponto médio entre as raízes da segunda função.

Descrição dos comandos no GeoGebra: A seguir, temos os comandos para obter a construção em discussão. Assim, abra o GeoGebra e siga os passos abaixo.

Passo 1: Na entrada, digite os pontos, um por vez e dê *enter*: $A = (0,0)$, $C' = (10,0)$, $C = \text{girar}(C', \pi/4)$, $B = (10\sqrt{2}, 0)$. Em seguida, trace os segmentos \overline{AC} , \overline{BC} e \overline{AB} . Finalize essa etapa com o deslizante n variando de 0 a 10 com incremento 0.1.

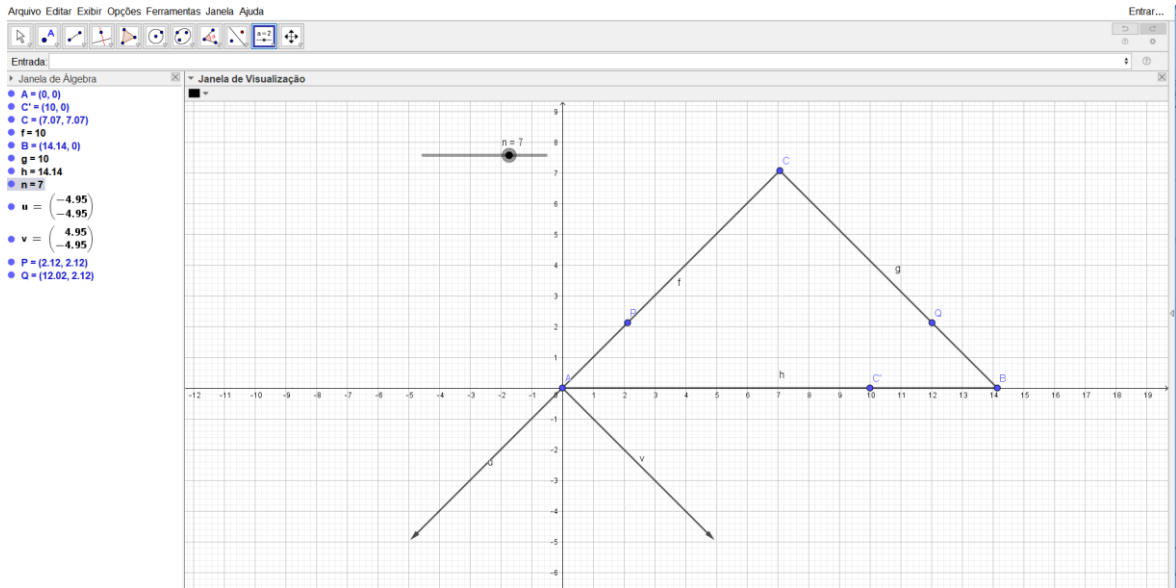
Figura 22 – Construção (SDO 5, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 2: Nesse passo, vamos marcar nos catetos do triângulo ΔABC os pontos que distam x cm do ponto C , da seguinte forma: na entrada, digite os vetores $u = \text{vetor}(C,A) \cdot n/10$ e $v = \text{vetor}(C, B) \cdot n / 10$; ainda na entrada, digite $P = \text{Transladar}(C, u)$ e $Q = \text{Transladar}(C, v)$. Finalize essa etapa traçando o segmento \overline{PQ} e esconda os vetores u, v .

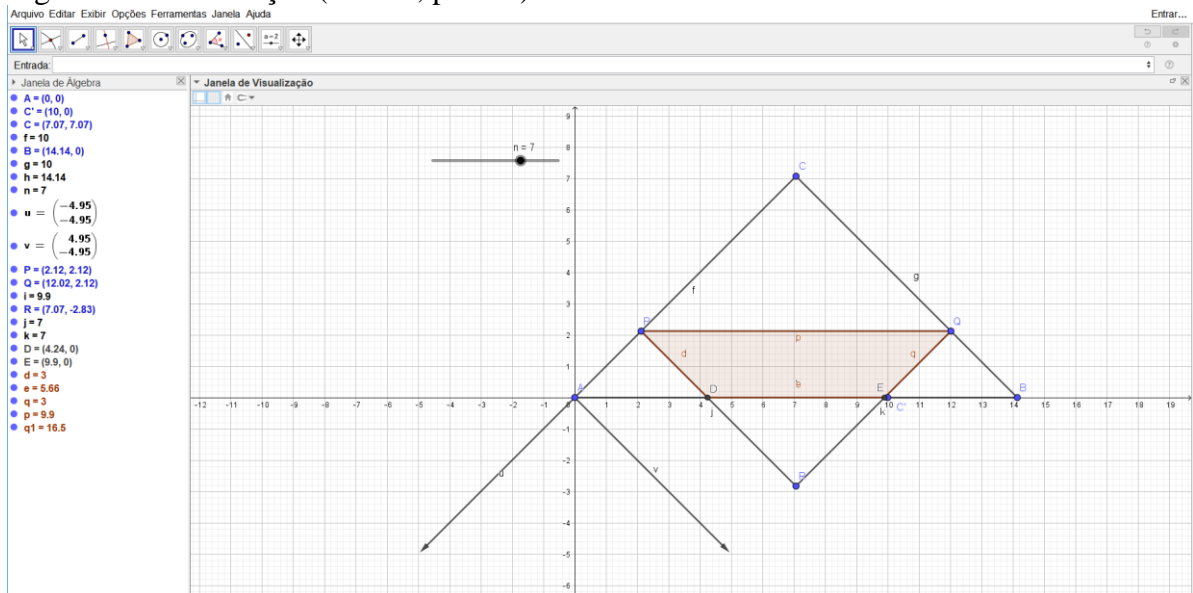
Figura 23 – Construção (SDO 5, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 3: Agora vamos determinar a primeira região cinzenta após a dobradura do triângulo de papel. Posicione o deslizante n em 7. Com a ferramenta segmento, crie o segmento i , \overline{PQ} . Em seguida, digite na caixa de entrada $R = \text{Reflexão}(C, i)$. Com a ferramenta segmento criar os segmentos \overline{PQ} e \overline{QR} . Agora com a ferramenta “interseção de dois objetos”, clique em cada um dos segmentos criados anteriormente e no eixo x , a fim de obter os pontos D e E . Finalize esse passo selecionando a ferramenta “polígono”. Clique nos pontos PQEDP para obter o polígono $q1$.

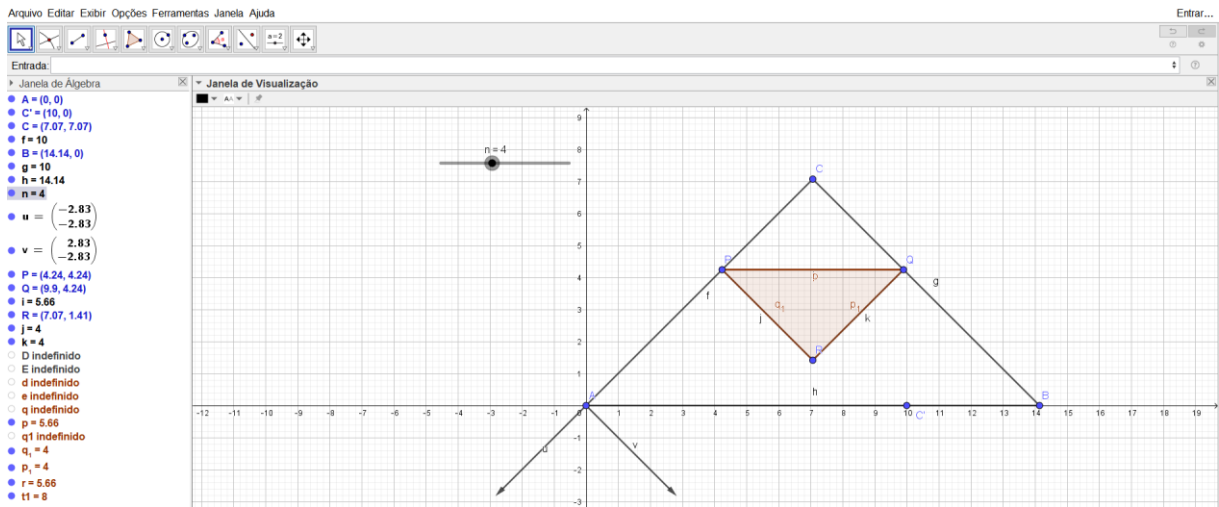
Figura 24 – Construção (SDO 5, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 4: Agora vamos determinar a segunda região cinzenta após a dobradura do triângulo de papel. Posicione o deslizante n em 4. Com a ferramenta “polígono” clique em PQR para determinar o triângulo t1. Peça para animar o controle deslizante e observe os dois polígono q1 e t1 feitos, pois o próximo passo depende da interpretação deles via controle deslizante.

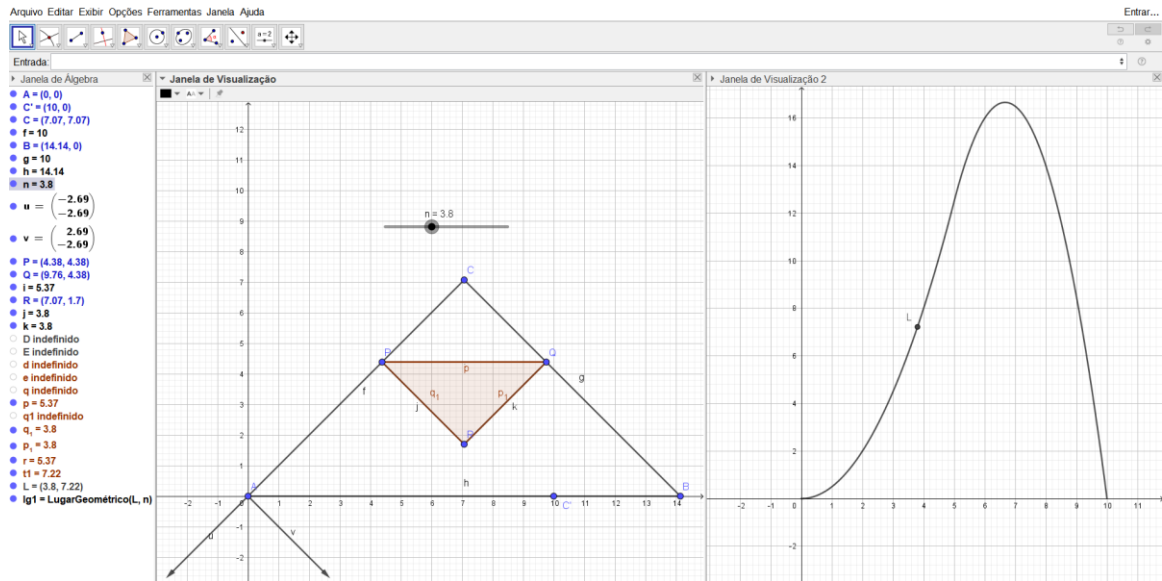
Figura 25 – Construção (SDO 5, parte 4)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 5: Investigando o movimento do controle deslizante e o surgimento dos polígonos criados, pode-se concluir que precisaremos obter dois lugares geométricos: um para a região quadrilátera que surge quando $5 < n \leq 10$ e outro para a região triangular que surge quando $0 < n \leq 5$. Assim, vá ao menu exibir e clique em “janela de visualização 2”. Agora vamos plotar o gráfico da área dos dois objetos em função da distância dos pontos P e Q ao ponto C. Com ela selecionada, na caixa de entrada digite $L = \text{Se}(n > 5, (n, q1), (n, t1))$. Finalize a construção digitando na caixa de entrada o passo LugarGeométrico(L, n). Anime o controle deslizante para ver o resultado.

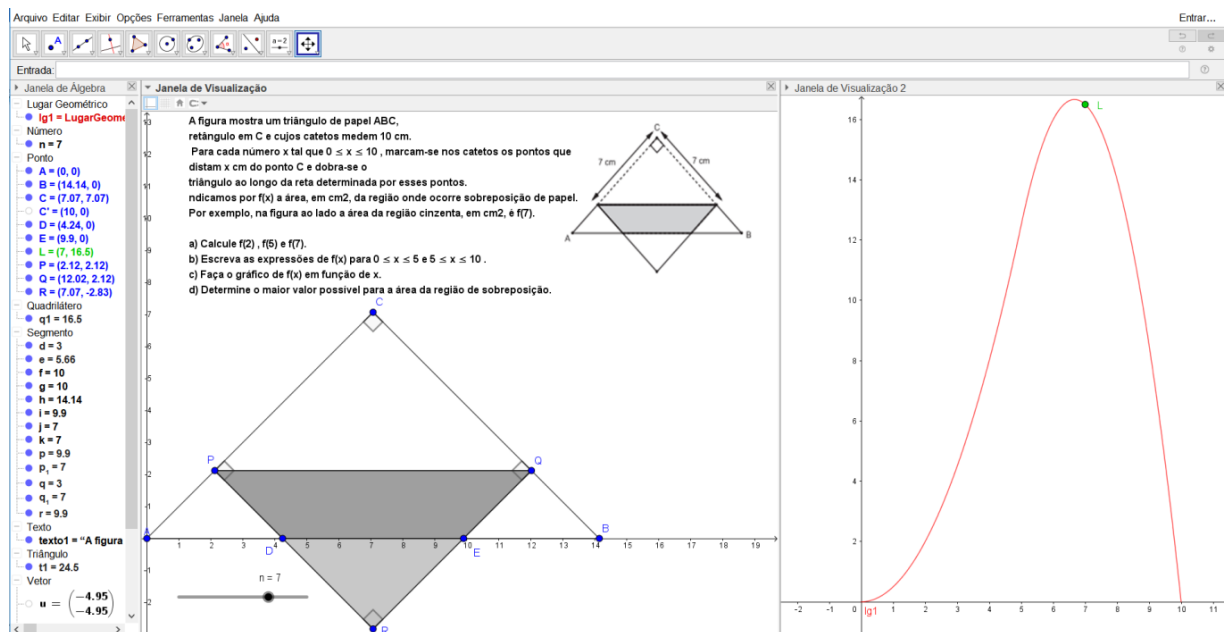
Figura 26 – Construção (SDO 5, parte 5)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 6: Esta etapa é opcional. Nesse passo, ocultamos os vetores e alguns pontos, mudamos as cores de alguns objetos, damos estilos em alguns pontos, colocamos os ângulos e inserimos o enunciado do problema, a fim de deixar a construção semelhante à apresentada pela edição da OBMEP:

Figura 27 – Construção (SDO 5)



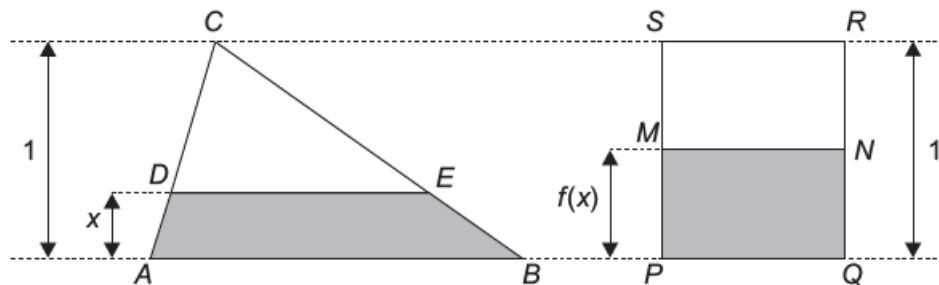
Fonte: elaborado pelo autor.

2.3 Situação Didática Olímpica 6

Conhecimentos prévios: Áreas do Triângulo e do Trapézio, Congruência de Triângulo e Função do 2º grau.

Problema (OBMEP-2008. 2º Fase, Questão 3, Nível 3): Na figura, o triângulo ABC e o retângulo PQRS têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de x entre 0 e 1 desenha-se o trapézio ABED de altura x e depois o retângulo PQNM de área igual à do trapézio, como na figura. Seja f a função que associa a cada x a altura do retângulo PQNM.

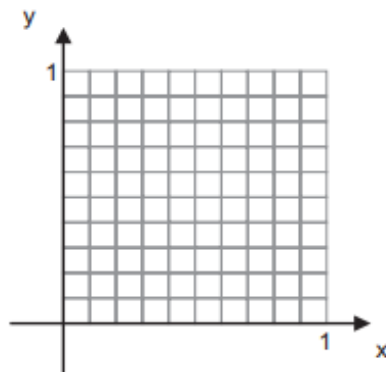
Figura 30 – Triângulo e Retângulo



Fonte: OBMEP (2008).

- Qual é a razão entre AB e PQ?
- Qual é o valor de $f(\frac{1}{2})$?
- Ache a expressão de $f(x)$ e desenhe o gráfico de f .

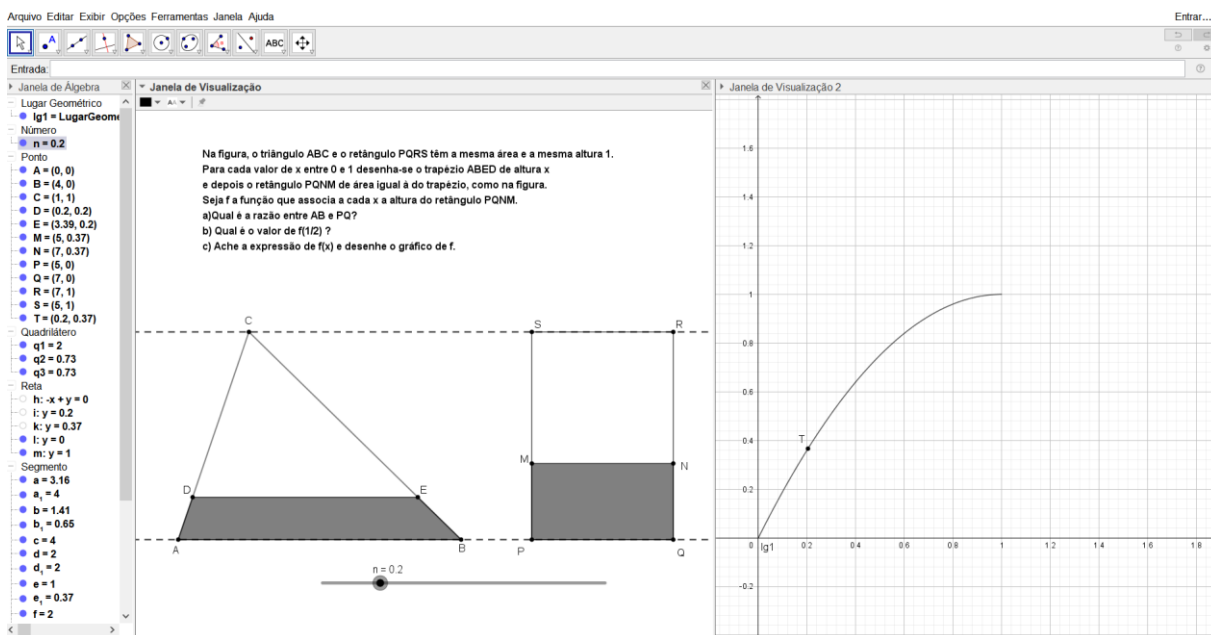
Figura 31 – Plano cartesiano



Fonte: OBMEP (2008).

Dialética da Ação: Essa fase é caracterizada pelo momento em que o sujeito da investigação tem os primeiros contatos com a situação didática, na qual se elaboram as primeiras hipóteses pela leitura do enunciado da questão, pela manipulação do deslizante n e pelos correspondentes resultados gerados ao movimentar o deslizante com efeitos mostrados nas janelas de visualizações 1 e 2.

Figura 32 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 6, parte 1)

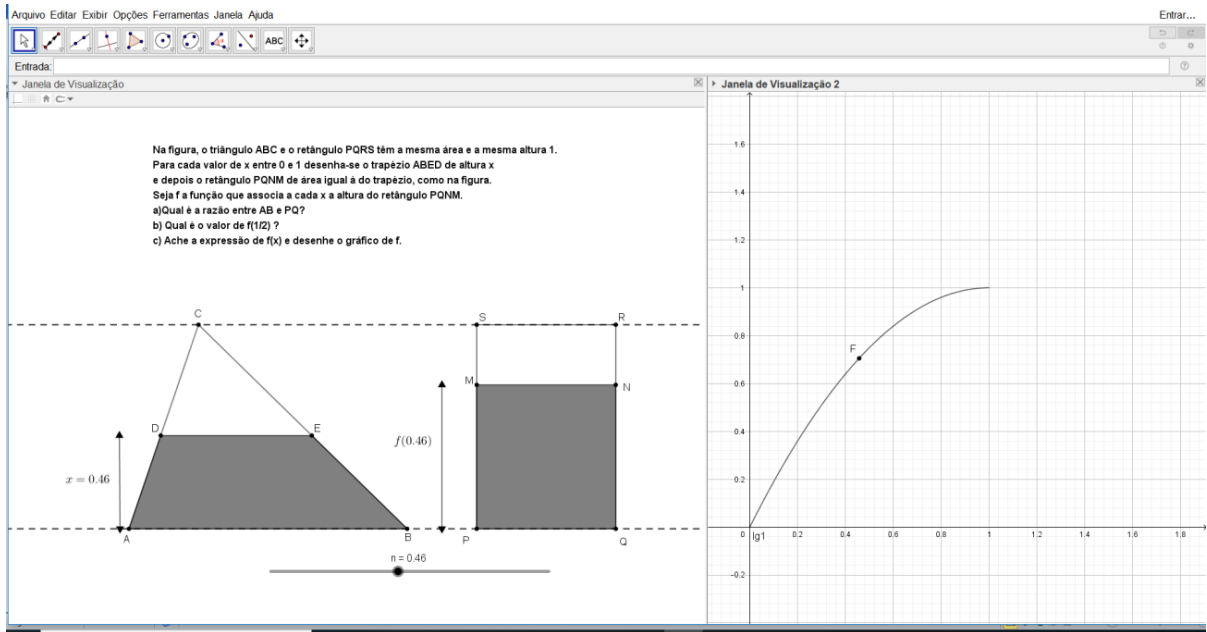


Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse momento, espera-se que os aprendizes busquem a conexão das suas conjecturas e hipóteses com o problema, bem como procurem a relação com o conteúdo matemático envolvido e a construção. De acordo com Pais (2002, p. 72) “o aluno realiza procedimentos mais imediatos para a resolução de um problema, resultando na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica”.

Dialética da Formulação: Nessa etapa, são previstas interações entre os sujeitos da pesquisa. Espera-se que eles anotem suas ideias, discutam entre si as estratégias para solucionar o problema e sejam capazes de observar algumas formas de abordagem da situação, uma vez que já tenham identificado qual conhecimento matemático será necessário para abordagem do exercício previsto pelas hipóteses da fase anterior. A fidelidade da construção aos conhecimentos matemáticos na situação didática auxiliará nisso.

Figura 33 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 6, parte 2)

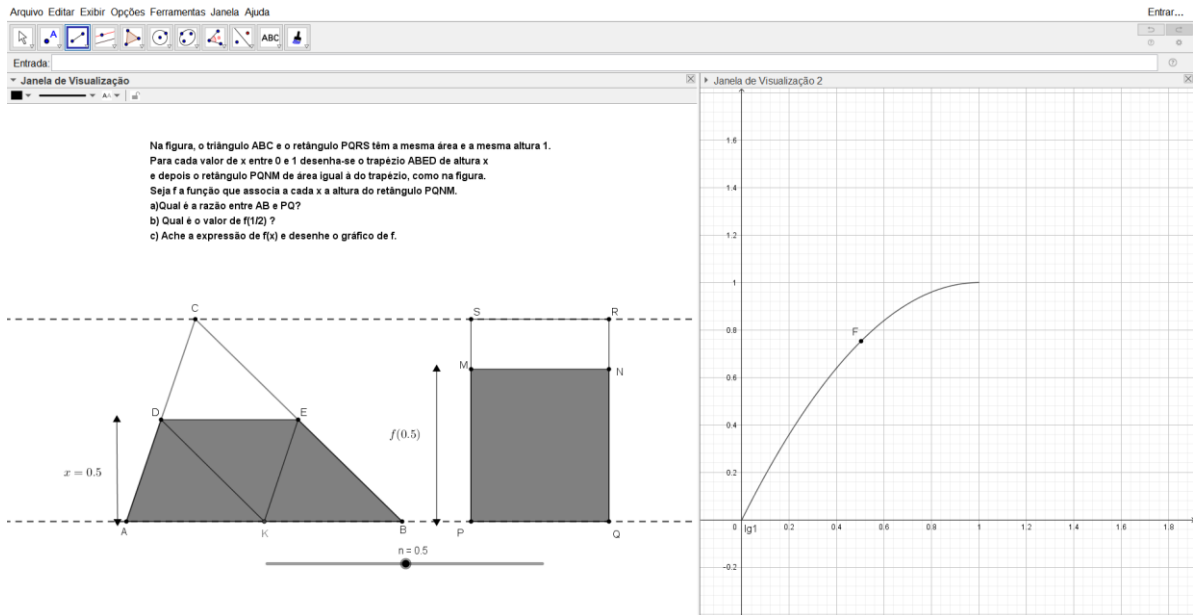


Fonte: elaborado pelo autor.

Desse modo, os sujeitos perceberão pelo enunciado e pela manipulação do deslizador n que a altura dos dois polígonos varia. A altura do triângulo varia no intervalo de $0 \leq x \leq 1$ e a altura do retângulo varia em função da do triângulo, ao passo que suas bases \overline{AB} e \overline{PQ} permanecem constantes. Chamando-as, respectivamente, de a e b , perceberão que a área dos polígonos serão dadas por $A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot x}{2}$ e $A_{PQRS} = b \cdot x$. Eles deverão observar ainda pelo enunciado do problema e pela construção que as áreas são iguais, então o aprendiz deverá chegar em $\frac{a}{b} = 2$ e, assim concluirá o primeiro item da questão.

Para o segundo item do problema, que pede a altura do retângulo, quando a altura do triângulo for $\frac{1}{2}$, ou seja, $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Dessa maneira, espera-se que os aprendizes percebam que posicionando o deslizador em $n = \frac{1}{2} = 0,5$, os pontos D e E estarão nos pontos médio dos segmentos \overline{AC} e \overline{BC} , nessa ordem.

Figura 34 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 6, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Voltando-se para a construção como recurso auxiliar para a resolução, os sujeitos deverão perceber que terão de determinar também o ponto médio (K) do segmento \overline{AB} , para então notar que traçando segmento por esses pontos médios o triângulo ΔABC fica dividido em quatro triângulos menores (ΔDKA , ΔDKE , ΔEKB e ΔCDE) congruentes entre si. Espera-se que cheguem à conclusão que de a área $A_{ABED} = \frac{3}{4} \cdot A_{\Delta ABC} = \frac{3a}{8}$. Como as áreas do retângulo A_{PQNM} e do trapézio A_{ABED} são iguais, chegarão em: $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot b = \frac{3a}{8} = \frac{3 \cdot (2b)}{8} = \frac{3b}{4}$, portanto $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. O que conclui o segundo item da questão.

Para o terceiro e último item do problema, esperamos que os aprendizes concluam que, para chegar à expressão $f(x)$ pedida, uma saída é encontrar a área do trapézio A_{ABED} pela diferença entre as áreas dos triângulos $A_{\Delta ABC}$ e $A_{\Delta CDE}$, uma vez que são semelhantes, e complementar com o mesmo raciocínio do item anterior. Então, terão de notar que, correspondentemente à razão entre as áreas dos triângulos é igual ao quadrado da razão entre as suas alturas, logo:

$$\frac{A_{\Delta CDE}}{A_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1-x}{1}\right)^2, \text{ assim } A_{\Delta CDE} = (1-x)^2 \cdot A_{\Delta ABC} \text{ donde se tira que } A_{\Delta CDE} = \frac{(1-x)^2 \cdot a}{2}.$$

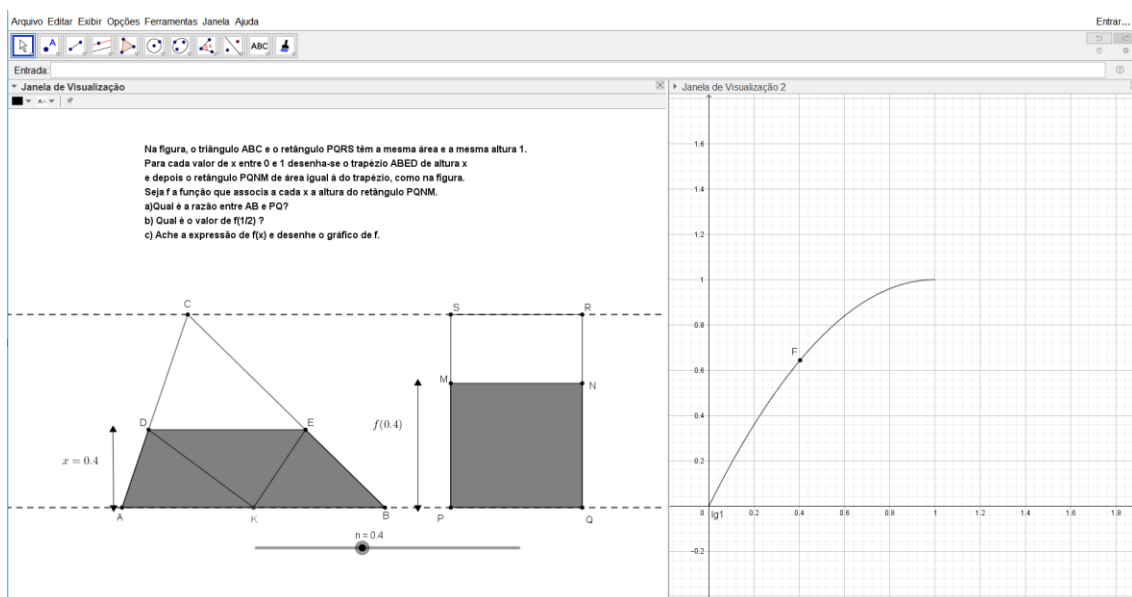
Para chegarem à expressão pedida, terão de fazer:

$$A_{ABED} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta CDE}$$

$$A_{ABED} = \frac{a}{2} - \frac{(1-x)^2 \cdot a}{2} = \frac{2b}{2} - \frac{(1-x)^2 \cdot 2b}{2} = (2x - x^2) \cdot b$$

Como a área do triângulo ΔABC é igual à área do trapézio $PQNM$ no intervalo dado, $0 \leq x \leq 1$, temos: $(2x - x^2) \cdot b = f(x) \cdot b$. Assim, chegamos à expressão da função que associa cada valor da altura do trapézio $ABED$ à área do retângulo $PQNM$, $f(x) = 2x - x^2$. Agora, basta determinar o gráfico no intervalo dado, ele encontra-se também na janela de visualização 2 onde o ponto F demonstra a relação pedida.

Figura 35 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 6, parte 4)



Fonte: elaborado pelo autor.

Vale salientar que o pesquisador poderá intervir com questionamentos aos sujeitos quando julgar necessário, pois os aprendizes poderão encontrar alguma dificuldade para observar alguns pontos chaves que levam a solução de cada item.

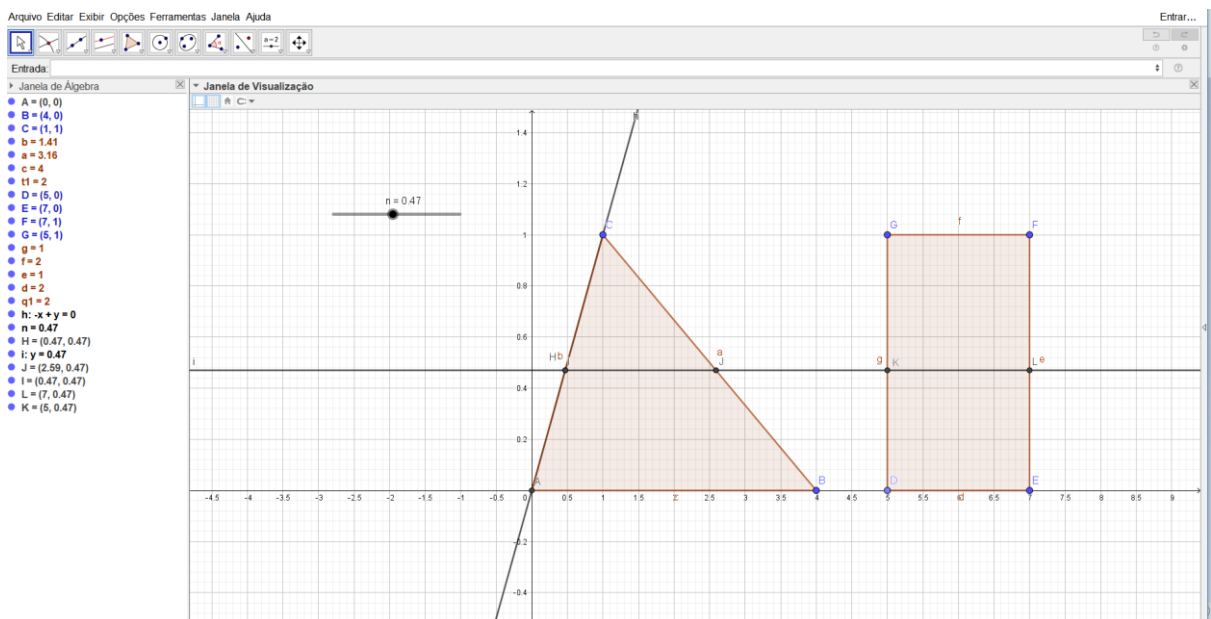
Dialética da Validação: Nessa fase, os sujeitos devem provar e comprovar seus resultados, através de apresentação e discussão sobre o que foi feito, para que sejam eliminadas quaisquer dúvidas ainda existentes e validado as respostas. Realizando uso dos conceitos e principais ideias usadas nesse problema é esperado que os sujeitos percebam a forte relação dos conceitos matemáticos desenvolvidos, a saber: semelhanças de triângulos, funções e seu domínio, no caso do último item, além do conceito de área de triângulo nesta questão.

Dialética da Institucionalização: É a fase de formalização da solução, caso o professor pesquisador julgue necessário. Então deverá formalizar a solução do problema, ressaltando os conhecimentos e os argumentos matemáticos usados. Desse modo, para a formalização do problema em questão, basta que o professor siga o raciocínio que fizemos na etapa “Dialética da Formalização”, onde descrevemos o que esperamos dos sujeitos dessa investigação durante o contato com a situação didática descrita acima.

Descrição dos comandos no GeoGebra: A dimensão da base do triângulo foi escolhida de forma arbitrária, porém, uma vez escolhida, temos de seguir a proposta dos problemas, ou seja, considerar as relações de dependência da base do retângulo com a do triângulo.

Passo 1: Com a ferramenta “polígono”, crie o triângulo $\triangle ABC$, denominado de t1 pelo software, com vértices em $A=(0,0)$ $B=(4,0)$ $C=(1,1)$. Finalize clicando em C novamente, e o Retângulo q1 com vértices nos pontos $D=(5,0)$, $E=(7,0)$, $F=(7,1)$, $G=(5,1)$ Finalize clicando em D novamente. Crie a reta h passando pelos pontos A e C de t1. Crie o deslizante n mínimo de 0 e máximo de 1 com incremento de 0,001. Agora, vá à ferramenta “reta paralela”, clique no eixo x e levante uma paralela a ele pelo ponto H. Encerre essa etapa clicando em “interseção entre dois objetos” e clique na reta i e na região interna de t1 para obter o ponto J.

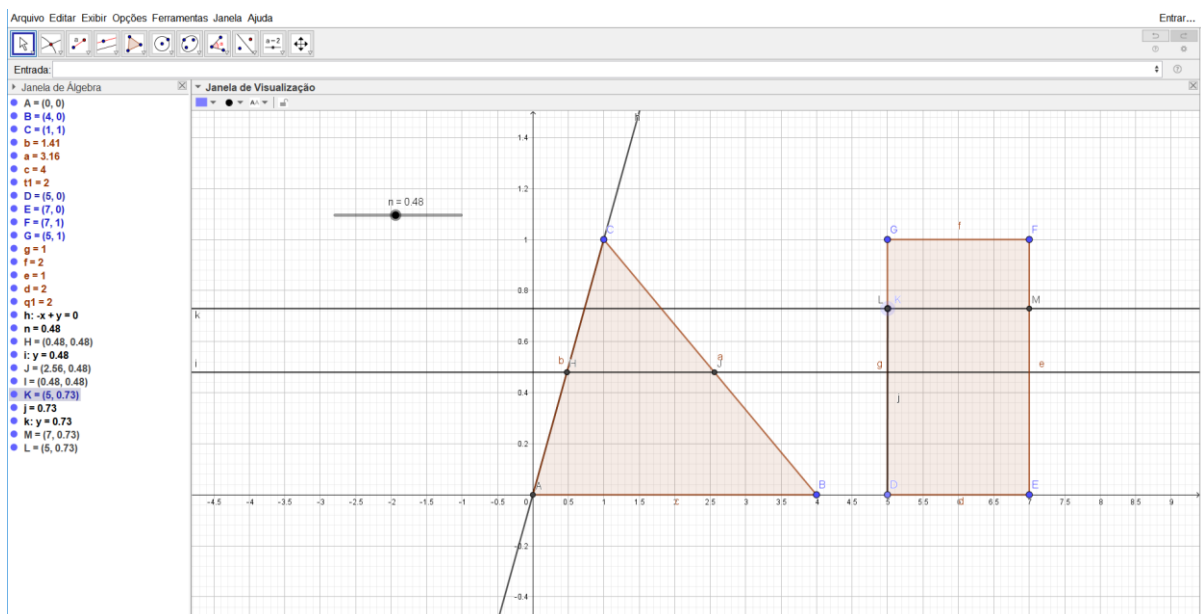
Figura 36 – Construção (SDO 6, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 2: Com a ferramenta “segmento de amplitude fixa”, clique no ponto D e defina a amplitude em função do deslizante n ficando $2n - n^2$. Com a ferramenta “mover”, ajuste o segmento j criado sobre o segmento \overline{DG} . Agora, clique na ferramenta “reta paralela”, clique no eixo x e levante uma paralela a ele pelo ponto K. Finaliza essa etapa, clicando em interseção entre dois objetos e clique na reta k e na região interna de q1 para obter os pontos L e M. Mova o deslizante para ver o resultado e perceber que as retas i no ponto C e a reta k no segmento \overline{GF} , chegarão ao mesmo tempo.

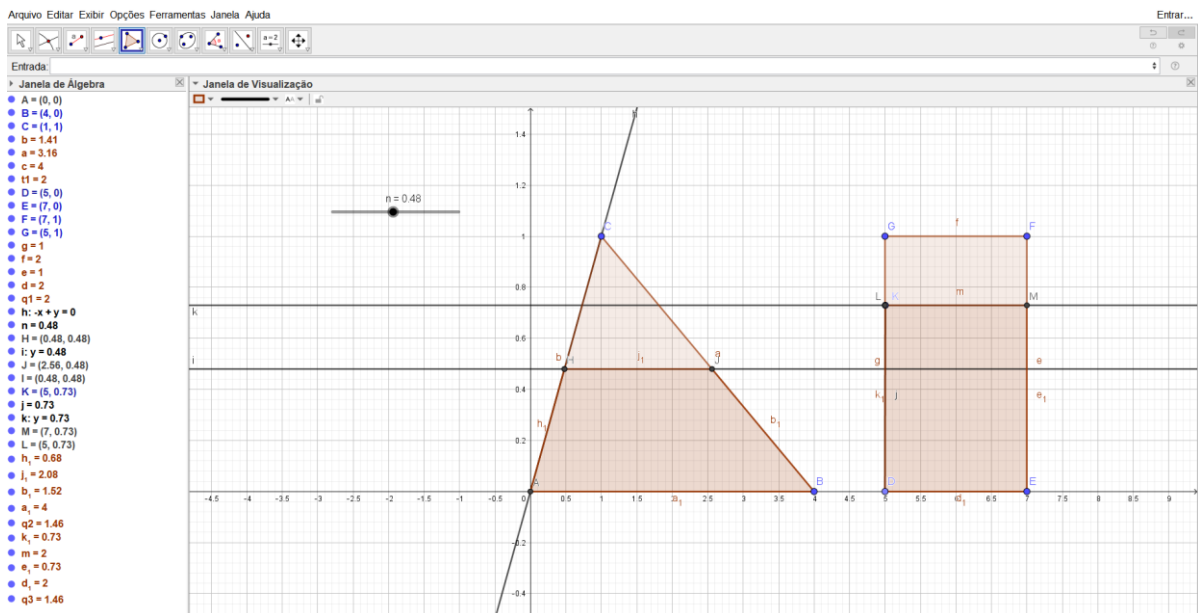
Figura 37 – Construção (SDO 6, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 3: Neste passo, vamos criar os polígonos, q2 e q3, cujas áreas estarão em função do movimento do deslizante n . Assim, clique na ferramenta polígono e clique nos pontos A, B, J, H e A; em seguida, clique em D, E, M, L e D.

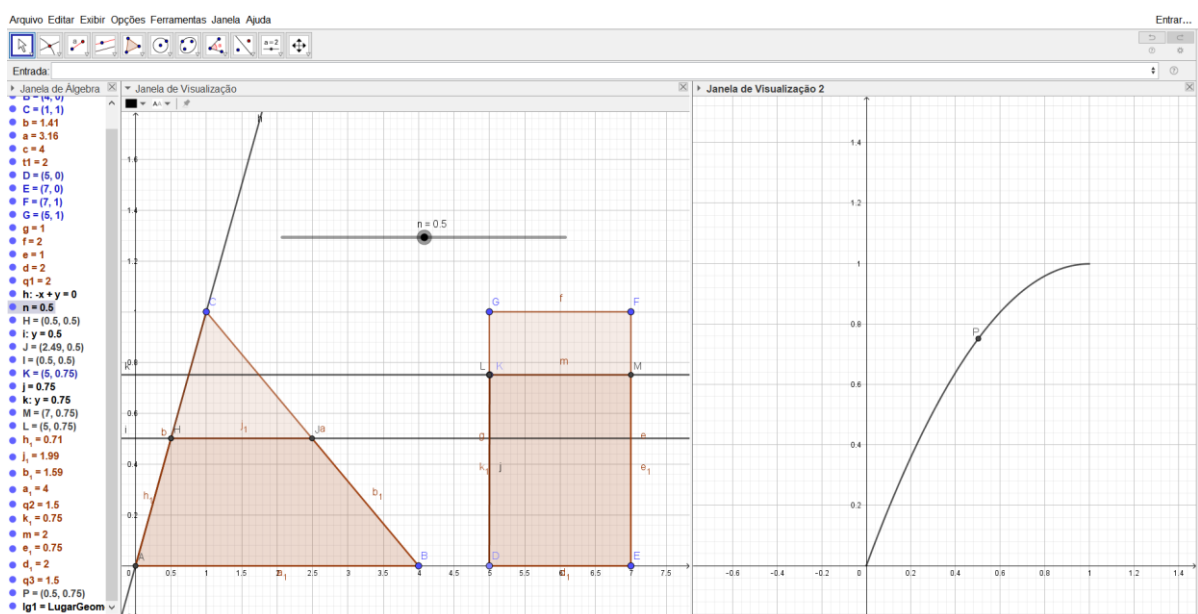
Figura 38 – Construção (SDO 6, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 4: Clique no menu exibir, abra a janela de visualização 2. Com ela selecionada, digite na caixa de entrada o comando $P=(n,q3/2)$ ou $P=(n,q2/2)$ a fim de obter o gráfico que associa a altura do trapézio A,B, J, H à área do retângulo D, E, M, L. Ainda na caixa de entrada digite o comando LugarGeométrico(P, n) para obter o gráfico. Finalize a construção ajustando os eixos coordenados a fim de obter melhor visualização do gráfico.

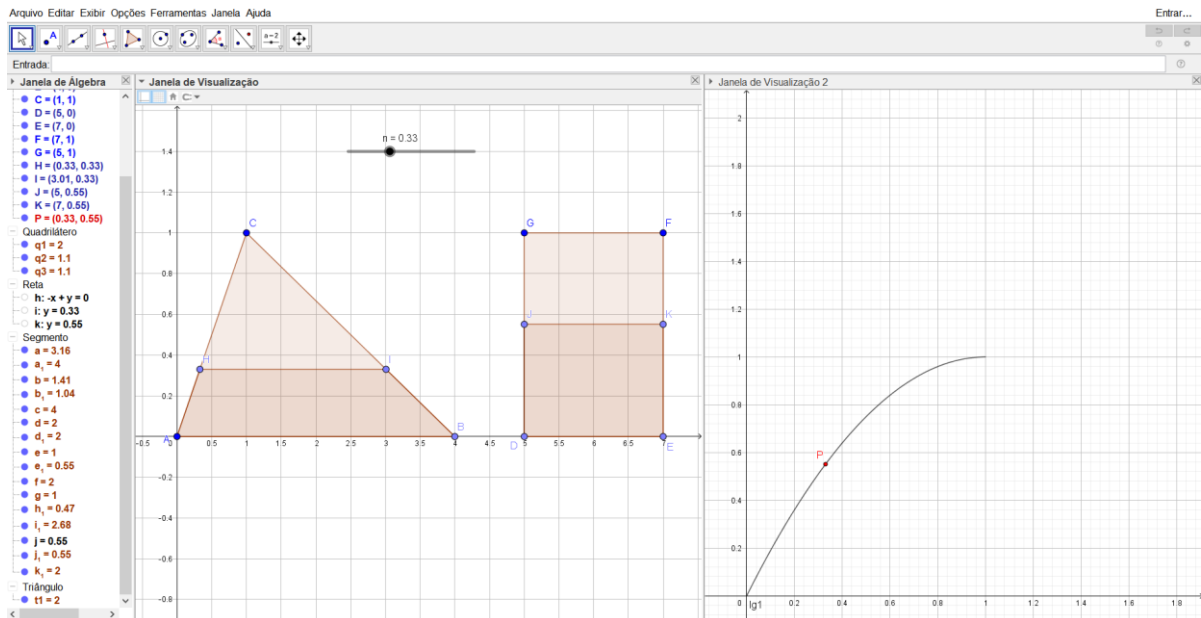
Figura 39 – Construção (SDO 6, parte 4)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 5: Esta etapa é opcional. Nesse passo, ocultamos algumas retas e alguns pontos, mudamos as cores de alguns objetos, damos estilos em alguns pontos, a fim de deixar a construção semelhante a apresentada pela edição da OBMEP.

Figura 40 – Construção (SDO 6)



Fonte: elaborado pelo autor.

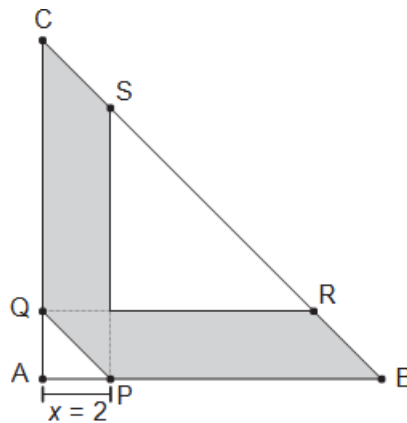
2.4 Situação Didática Olímpica 7

Conhecimentos prévios: Áreas do Triângulo e Função do 2º grau.

Problema (OBMEP-2018, 2º Fase, Questão 4, Nível 3): O triângulo retângulo ABC tem catetos de medidas $AB = 10$ e $AC = 10$. O ponto P sobre o lado AB está a uma distância x de A. O ponto Q sobre o lado AC é tal que PQ é paralelo a BC. Os pontos R e S sobre BC são tais que QR é paralelo a AB e PS é paralelo a AC. A união dos paralelogramos PBRQ e PSCQ determina uma região cinza de área $f(x)$ no interior do triângulo ABC.

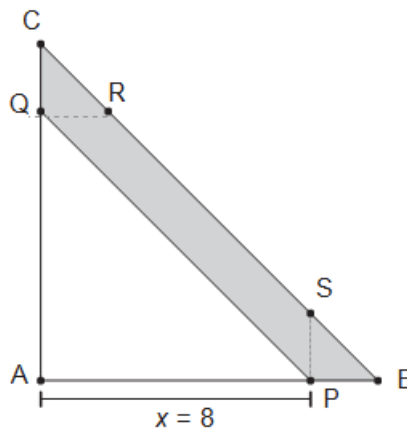
a) Calcule $f(2)$

Figura 41 – Triângulo



Fonte: OBMEP (2018).

b) Calcule $f(8)$.

Figura 42 – $f(8)$ 

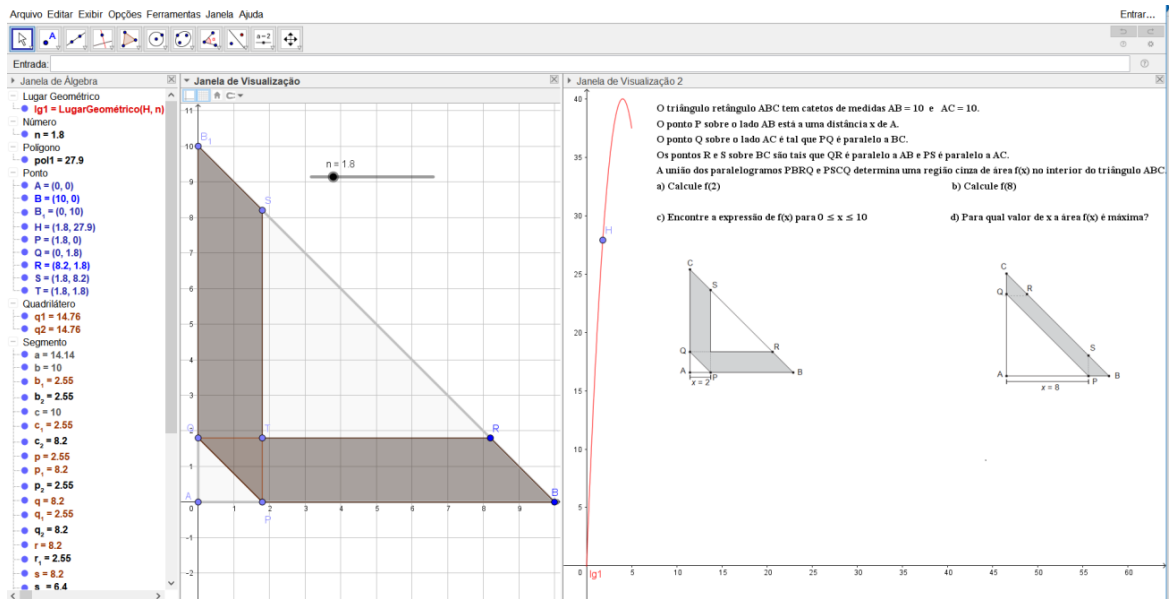
Fonte: OBMEP (2018).

c) Encontre a expressão de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$.

d) Para qual valor de x a área $f(x)$ é máxima?

Dialética da Ação: Nessa fase, nos primeiros contatos com a situação didática, espera-se dos sujeitos da pesquisa a compreensão do enunciado do problema, a fim de realizar as devidas abordagens dos mesmos junto à construção didática proposta, ou seja, fazer as devidas hipóteses, conjecturas e questionamentos de forma coerente com a situação proposta e, ainda, que possam levar à solução do problema. Pela construção, temos que:

Figura 43 – Modelagem na questão no GeoGebra (SDO 7, parte 1)

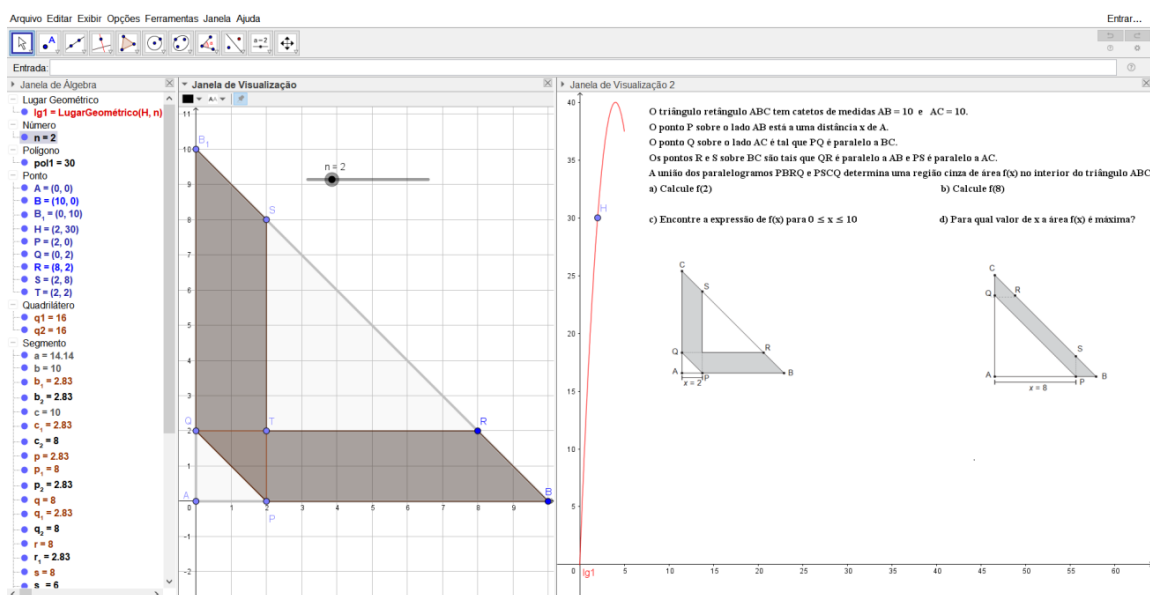


Fonte: elaborado pelo autor.

Com isso, ao mover o deslizante n , esperamos que os sujeitos da pesquisa estejam melhor habituados com a proposta do enunciado, ao observar o resultado nas janelas de visualização 1 e 2.

Dialética da Formulação: Nessa fase, espera-se que os docentes percebam o conteúdo matemático em jogo e suas relações com a construção. Além disso, devem formalizar suas estratégias para resolver o problema, assim, a partir das hipóteses esperadas, percebam que ao movimentar o deslizante n para a posição 2, chegarão à solução do item a

Figura 44 – Modelagem na questão no GeoGebra (SDO 7, parte 2)

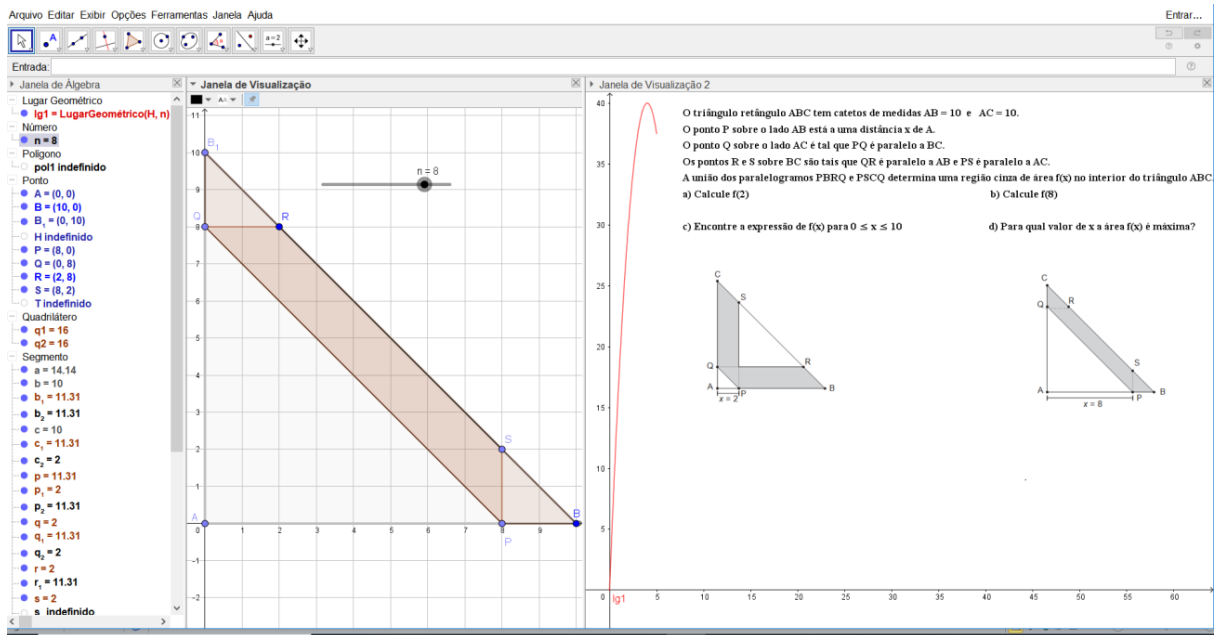


Fonte: elaborado pelo autor.

Esperamos que os sujeitos percebam que, nesse primeiro item, a área procurada será obtida por: $f(2) = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta APQ} - A_{\Delta TRS}$, então $f(2) = \frac{10 \cdot 10}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 6}{2} = 30$, concluirá o primeiro, item a.

Para o segundo item, de modo análogo posicionando $n = 8$, temos:

Figura 45 – Modelagem na questão no GeoGebra (SDO 7, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Eles concluirão que: $f(8) = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta APQ}$, assim, $f(8) = \frac{10 \cdot 10}{2} - \frac{8 \cdot 8}{2} = 18$, concluirá o segundo, item b.

Para o terceiro item, esperamos que retomem ao raciocínio do item a para o intervalo $x \leq 5$, e do item b, $x \geq 5$, respectivamente, voltando a posicionar o deslizante n em 2 e em 8 descrito anteriormente. Desta feita, deverão chegar às expressões pedidas, nessa ordem.

Assim, na primeira situação (do item a), deverão chegar à seguinte equação:

$$f(x) = 50 - \frac{x^2}{2} - \frac{(10 - 2x)^2}{2} = -\frac{5x^2}{2} + 20x$$

Na segunda situação (do item b), deverão chegar a: $f(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$.

No quarto e último item, para traçar o gráfico que relaciona a área da região destacada pedida em função de x que faz com que os pontos P e Q se desloquem, os docentes envolvidos na pesquisa, deverão analisar cada uma das expressões obtidas anteriormente para os subintervalos $x \leq 5$ e $x \geq 5$ do intervalo $0 \leq x \leq 10$. Assim poderão chegar ao gráfico

mostrado na janela de visualização 2 e relacionar o movimento do ponto H com o que está sendo pedido na questão.

Caso, os sujeitos da pesquisa tenham dificuldades ou não consigam chegar a tais raciocínios, o professor pesquisador deverá fazer as provocações, as indagações necessárias para que cheguem ao caminho da solução do problema.

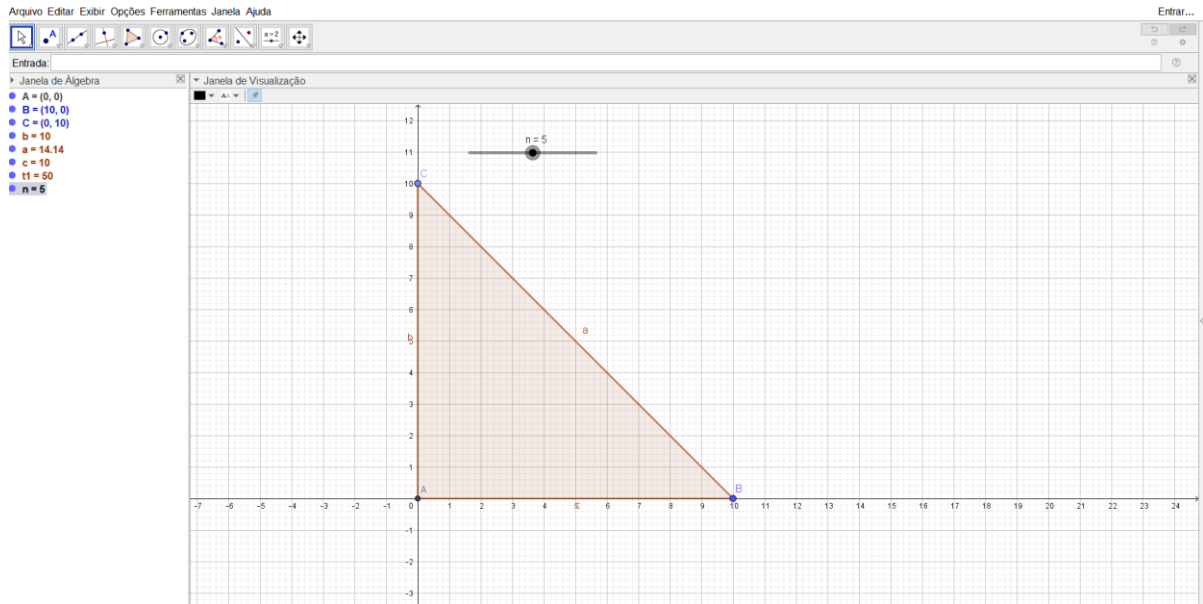
Dialética da Validação: Nesse momento, os docentes deverão validar os resultados encontrados na etapa anterior. O software GeoGebra poderá contribuir novamente para isso, bastará que os envolvidos analisem com cuidado as duas janelas de visualização e, ao movimentar o deslizador n , percebam os conceitos matemáticos em jogo, bem como a sua consistência com respeito à construção da situação didática. Muitas dúvidas poderão surgir nesse momento e segundo Almouloud (2007, p. 39), o emissor deverá justificar a veracidade do seu modelo, comparando, por exemplo, o resultado obtido através do modelo matemático com o que foi obtido da resolução.

Dialética da Institucionalização: O professor deverá retomar a condução das atividades e fazer o fechamento das ideias, caso julgue necessário. Poderão surgir dúvidas acerca da utilização dos conhecimentos matemáticos na abordagem de cada item da questão, o que deve ser sanado pelo pesquisador nessa fase. Almouloud (2007, p. 40) ressalta que “depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-se assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos”.

Descrição dos comandos no GeoGebra:

Passo 1: Com a ferramenta “polígono”, crie o triângulo ΔABC com vértice nos pontos $A=(0,0)$, $B=(10,0)$ e $C=(0,10)$ e o controle deslizador n com mínimo 0 e máximo de 10, incremento de 1.

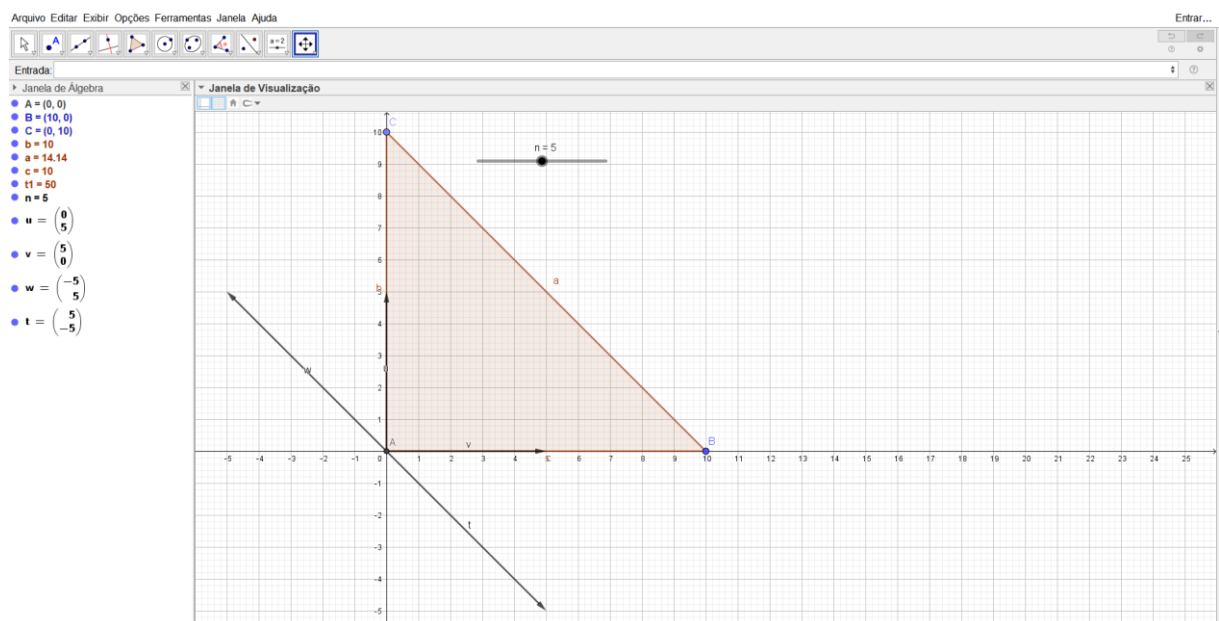
Figura 46 – Construção (SDO 7, parte1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 2: Na caixa de entrada, escreva os vetores separadamente e dê *enter* para cada um: $u = \text{vetor}(A,C) \cdot n/10$ e $v = \text{vetor}(A,B) \cdot n/10$ e $w = \text{vetor}(B,C) \cdot n/10$ e $t = \text{vetor}(C,B) \cdot n/10$.

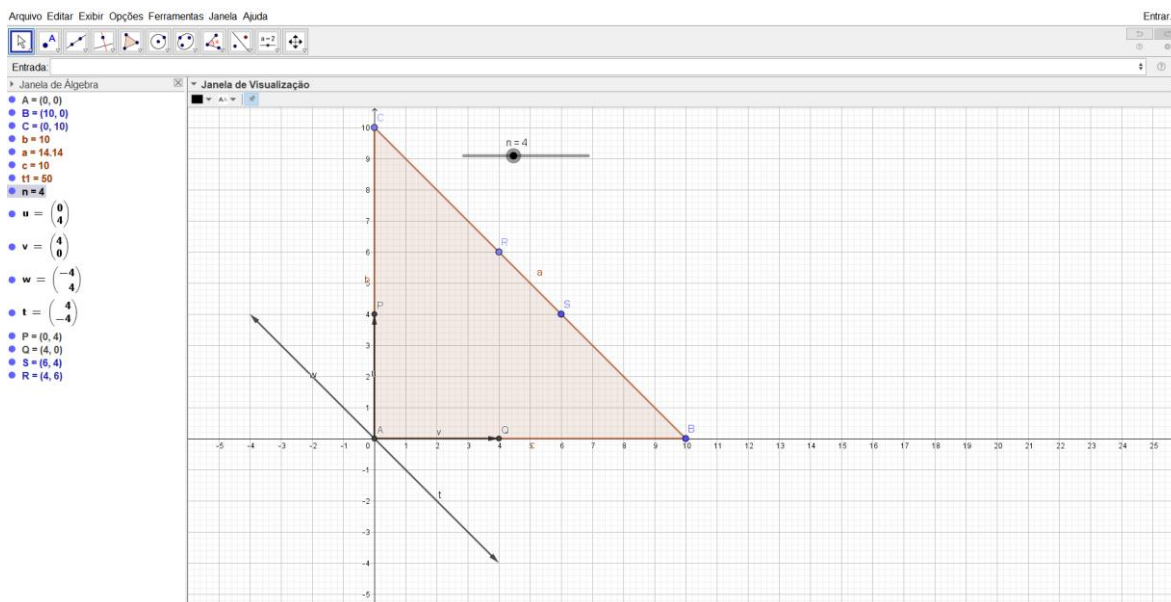
Figura 47 – Construção (SDO 7, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 3: Deixe o deslizante em 4. Escreva na caixa entrada um por vez e dê *enter*, o comando, $P = \text{Transladar}(A, u)$ e $Q = \text{Transladar}(A, v)$ e $S = \text{Transladar}(B, w)$ e $R = \text{Transladar}(C, t)$.

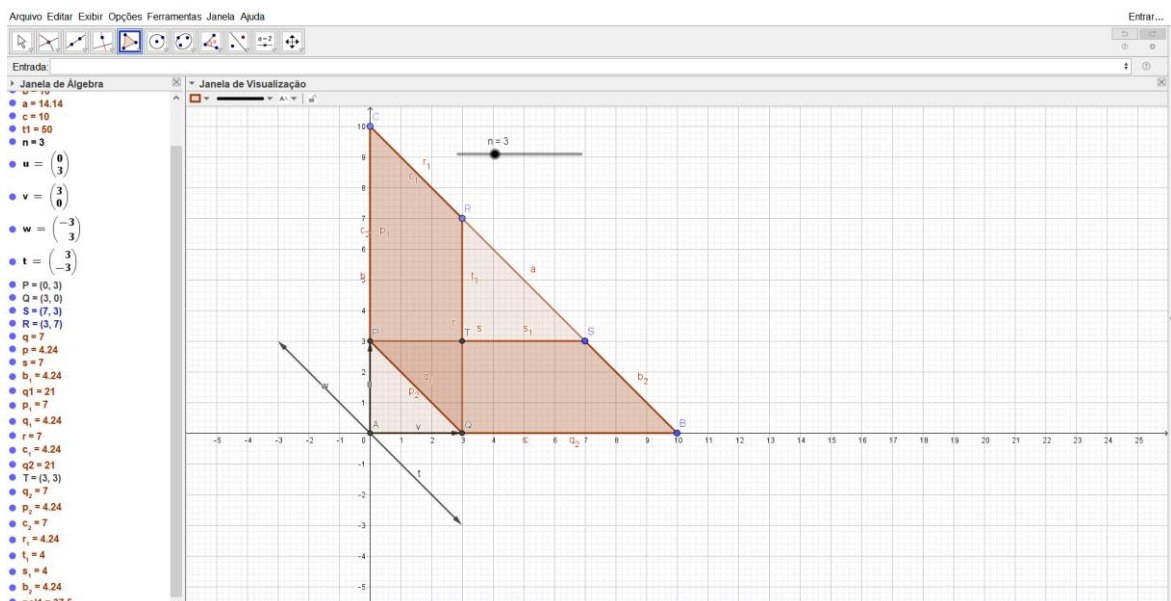
Figura 48 – Construção (SDO 7, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 4: Com a ferramenta “polígono”, crie os polígonos: BSPQB, CRQPC. Com a ferramenta “intersecção de dois objetos” clique nos segmentos SP e RQ para criar o ponto D (renomear para T). Finalize essa etapa clicando na ferramenta “polígono” e, crie o polígono pol1 BSTRCPQB.

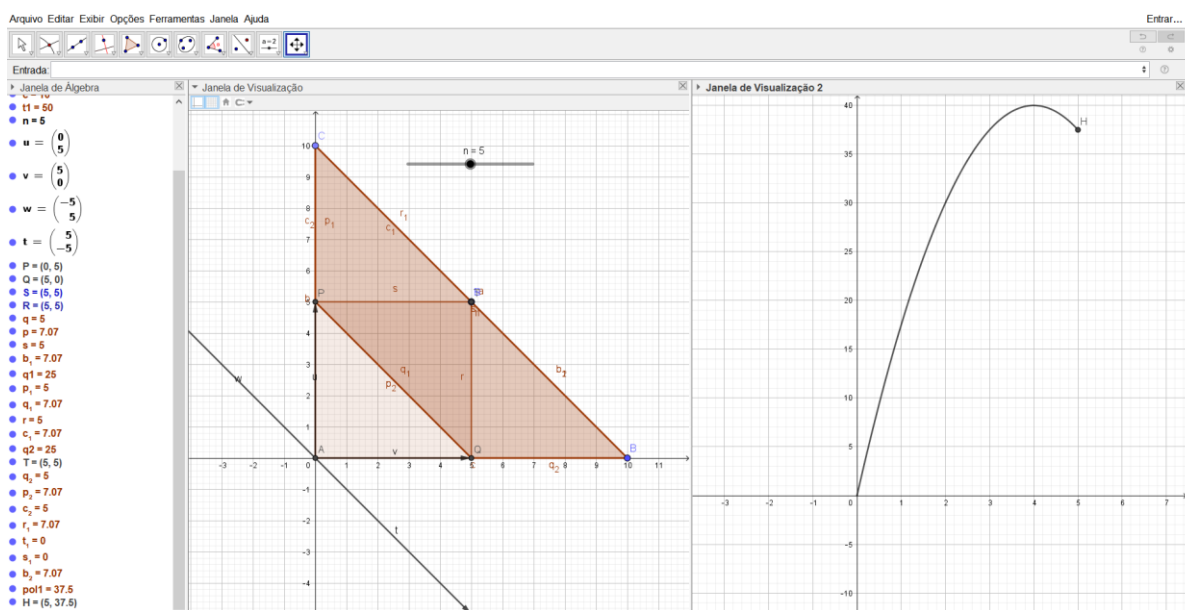
Figura 49 – Construção (SDO 7, parte 4)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 5: Com o menu exibir, clique uma nova janela de visualização 2D. Na caixa de entrada, escreva $H=(n, \text{pol1})$, dê *enter*. Em seguida, ainda com essa janela de visualização 2 selecionada, digite na caixa de entrada o comando $\text{LugarGeométrico}(H, n)$, dê *enter*. Assim, surgirá o gráfico da área da região BSTRCPQ em função do deslocamento dos pontos P e Q, ou seja, do movimento do deslizante n .

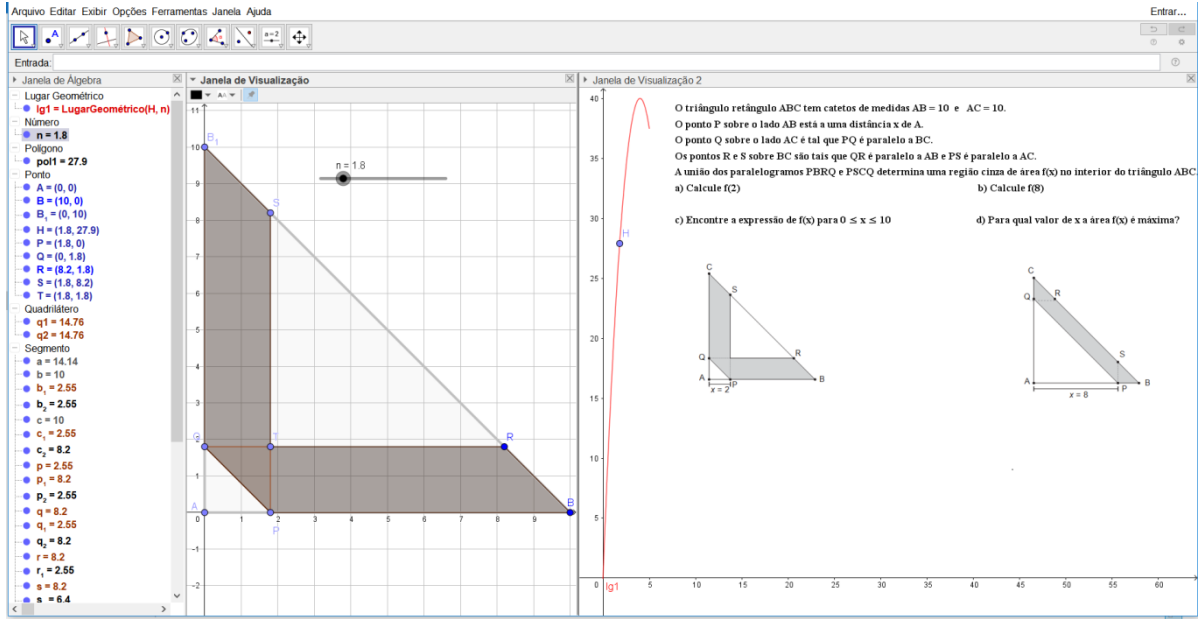
Figura 50 – Construção (SDO 7, parte 5)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 6: Esta etapa é opcional. Nesse passo, ocultamos os vetores e alguns pontos, mudamos as cores de alguns objetos, damos estilos em alguns pontos, inserimos o enunciado do problema a fim de deixar a construção semelhante à apresentada pela edição da OBMEP.

Figura 51 – Construção (SDO 7, parte 6)



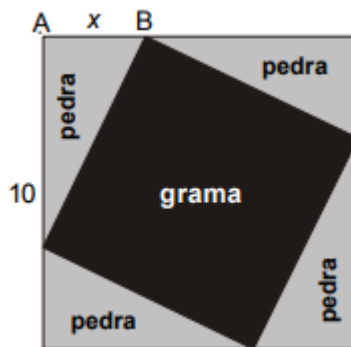
Fonte: elaborado pelo autor.

2.5 Situação Didática Olímpica 8

Conhecimentos prévios: Áreas do Quadrado e do Triângulo, Teorema de Pitágoras e Função do 2º grau.

Problema (OBMEP-2005. 2º Fase, Questão 4, Nível 3): Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.

Figura 52 – Praça



Fonte: OBMEP (2005).

a) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.

b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x .

Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

c) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

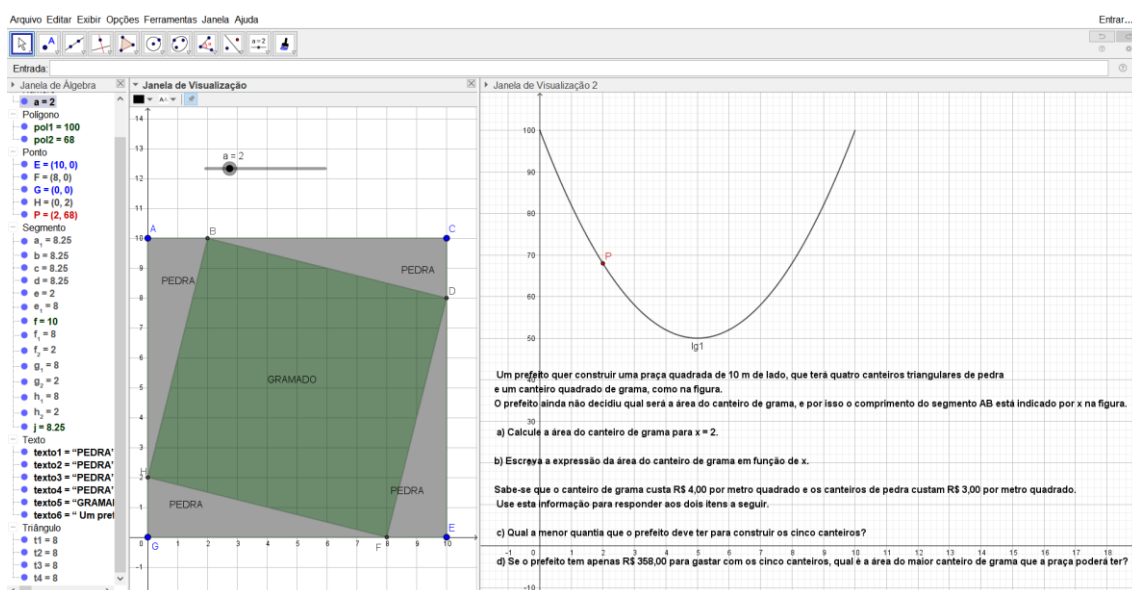
d) Se o prefeito tem apenas R\$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

Dialética da Ação: Essa etapa é o momento, de acordo com (ALMOULOU, 2007), em que o aluno vai agir sobre a situação, formulando suas conjecturas, e a Situação Didática (SD) lhe retorna informações à medida que os sujeitos compreendem a proposta da questão e vão interagindo com ela.

Dialética da Formulação: Nessa etapa, ocorre interação entre os sujeitos acerca da abordagem da SD. Nesse momento, eles farão as primeiras anotações, discutirão quais conhecimentos matemáticos serão necessários para a solução do problema e debaterão sobre como o modelo pensado poderá ajudá-los na solução do problema.

Dialética da Validação: Nessa fase, os sujeitos irão mostrar a validade do modelo matemático criado a fim de chegar à solução da Situação Didática Olímpica (SDO). Assim, espera-se que eles se voltem para a construção e, posicionem o deslizante em $a = 2$, para resolver o primeiro item. Os envolvidos terão esta visualização:

Figura 53 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 8, parte 1)

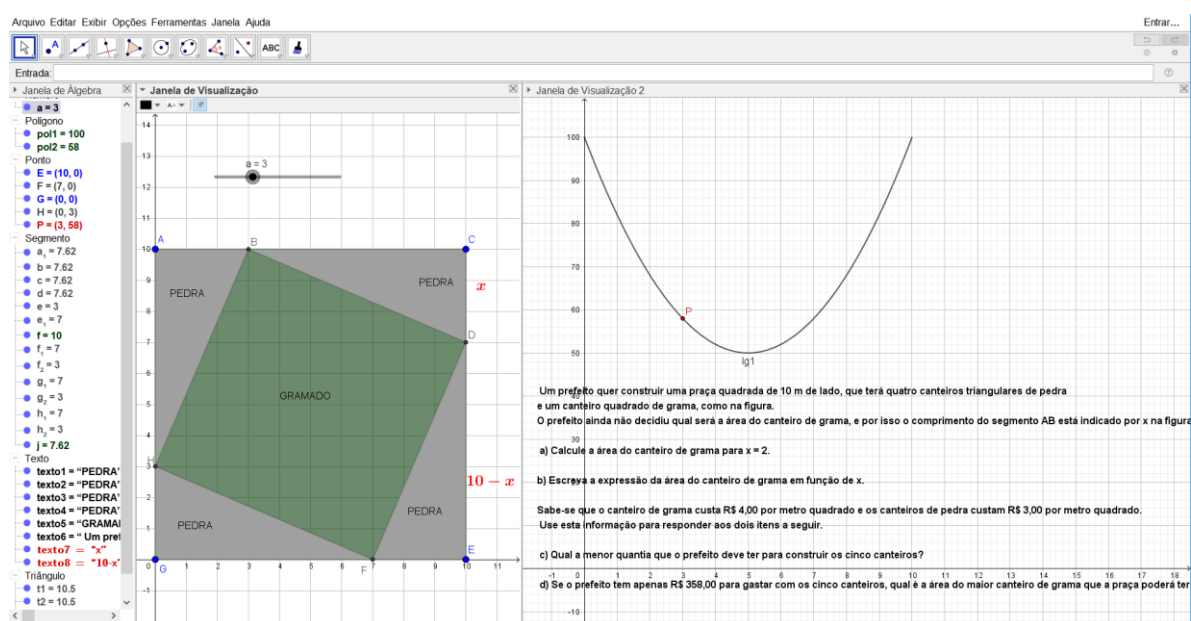


Fonte: elaborado pelo autor.

Assim, a área do canteiro de grama será $A_{Gramado} = A_{ACEG} - 4 \cdot A_{Pedra}$, daí $A_{Gramado} = 10 \cdot 10 - 4 \cdot \frac{2 \cdot 8}{2} = 100 - 32 = 68 \text{ m}^2$.

Para o segundo item, uma forma de resolver é retornar novamente à construção e realizar um raciocínio análogo ao que foi usado para solucionar o primeiro item, ou seja, perceber que as dimensões dos catetos do triângulo da região cinza, as regiões destinadas aos canteiros de pedra, variam em função do deslizante a que, para efeito da escrita da expressão, vamos chamar de x , como já justificamos em SDO anteriores. Assim, as expressões para os referidos catetos ficam x e $10 - x$. Como na figura abaixo.

Figura 54 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 8, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Portanto, a expressão pedida vem do item a: $A_{Gramado} = A_{ACEG} - 4 \cdot A_{Pedra}$, assim: $A_{Gramado}(x) = 100 - 4 \cdot \frac{x \cdot (10-x)}{2} = 2x^2 - 20x + 100$.

Para o item c, como sugestão, para efeito didático poderão chamar a expressão que associa a cada valor de x à área do gramado e de cada canteiro de pedra de $C(x)$, custo total da região da grama e das regiões de pedra, cujo metro quadrado custa respectivamente R\$ 4,00 e R\$ 3,00. Assim: $C(x) = 4 \cdot (2x^2 - 20x + 100) + 3 \cdot \left[4 \cdot \frac{x \cdot (10-x)}{2} \right]$, logo chegamos à expressão $C(x) = 2x^2 - 20x + 400$, cujo gráfico encontra-se na janela de visualização 2, em que o ponto P associa a variação do deslizante à área da região do gramado. Portanto, como temos uma função do segundo grau, a menor quantia que se pode gastar está relacionada às coordenadas do vértice da parábola, o que se pode obter de imediato.

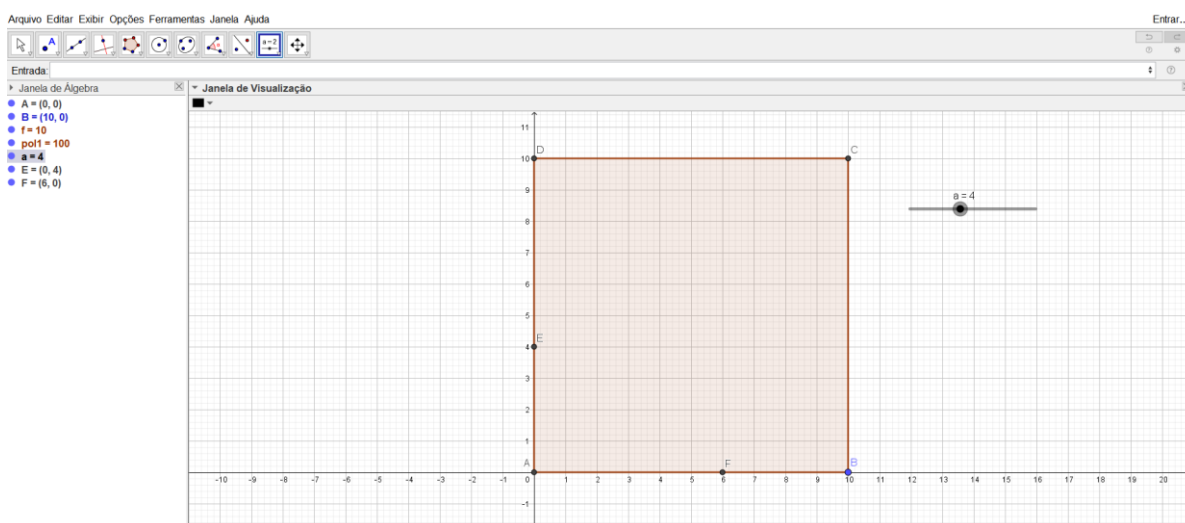
Para o último item, os sujeitos deverão notar que o custo está relacionado com a área das duas regiões, ou seja, à medida que a área cresce o custo também cresce. Chamando de a a área de cada região, temos que o custo total da praça será dado por: $4 \cdot a + 3 \cdot (100 - a) = 358$, máximo que se pode gastar. Desse modo, compreenderão que a maior área possível para o canteiro de grama será de $a = 58 \text{ m}^2$. Vale ainda ressaltar que, caso o pesquisador perceba que os sujeitos da pesquisa estejam com alguma dificuldade no raciocínio do problema, ele poderá intervir fazendo os questionamentos cabíveis, a fim de direcionar o pensamento dos sujeitos para o conhecimento matemático em jogo e para a lógica envolvida na situação didática.

Dialética da Institucionalização: Nessa estágio, o professor pesquisador fala explicitamente sobre todos os conteúdos envolvidos na SDO. Retoma a condução das atividades e faz o fechamento das ideias, resolvendo a situação didática caso julgue necessário, a fim de que o conhecimento matemático seja incorporado pelos docentes da pesquisa.

Descrição dos comandos no GeoGebra:

Passo 1: Com a ferramenta “polígono regular”, clique em $A=(0,0)$ e em $B=(10,0)$ e escolha número de lado quatro para criar o polígono pol1. Crie o controle deslizante “a” variando de 0 até 10 com incremento de 0,1. Na caixa de entrada, digite os pontos $E=(0,a)$ e $F=(10-a,0)$. Mova o deslizante para ver o resultado parcial da construção.

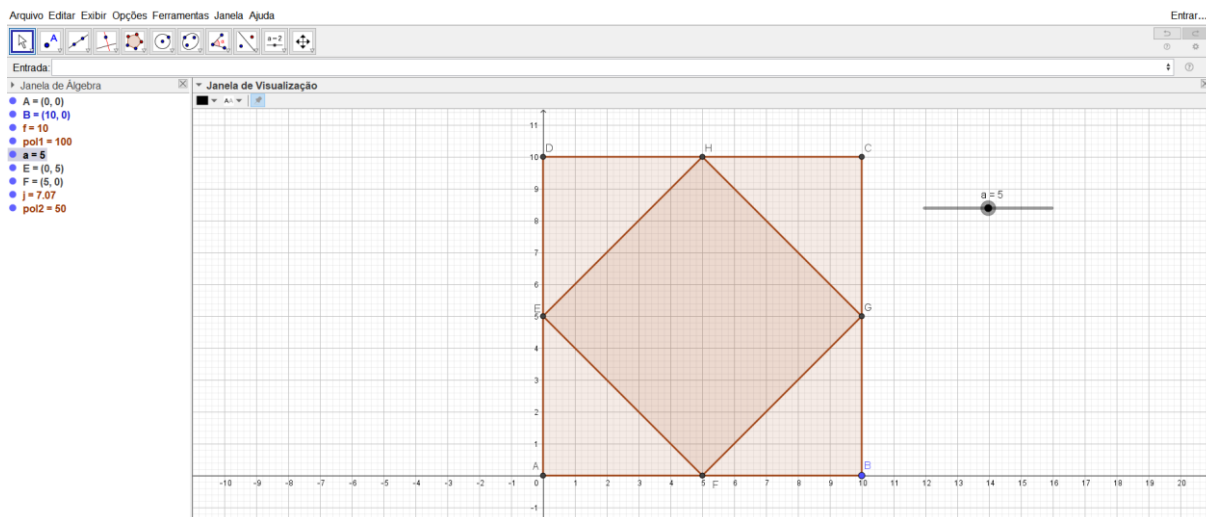
Figura 55 – Construção (SDO 8, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 2: Selecione novamente a ferramenta polígono regular e clique em E e F, nessa ordem. Escolha número de lado quatro para criar o polígono pol2.

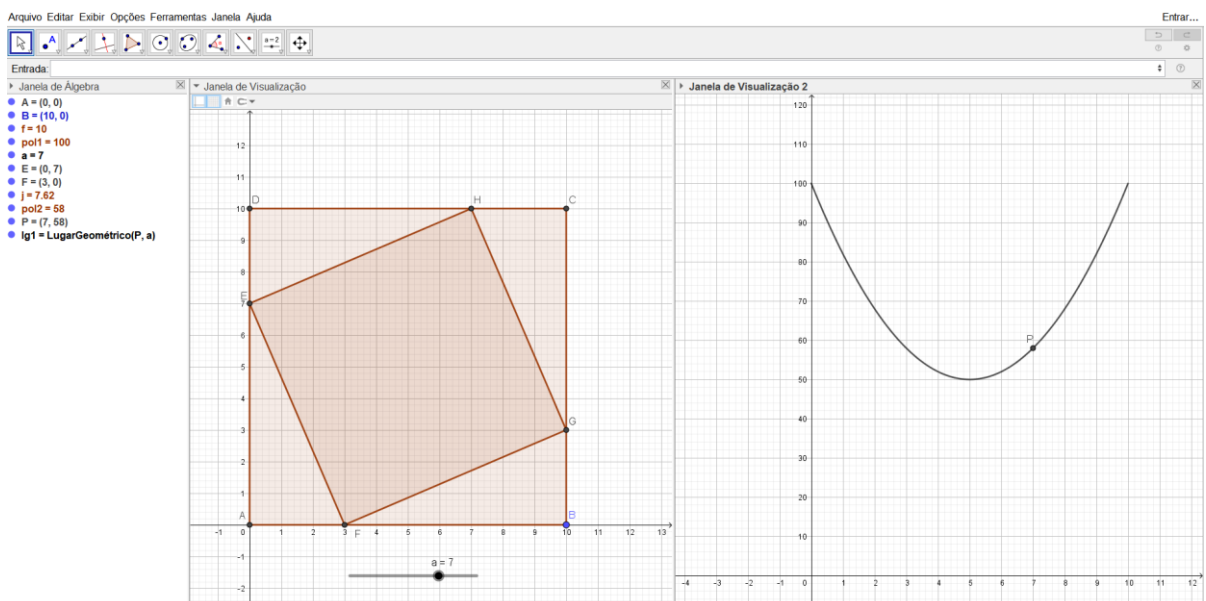
Figura 56 – Construção (SDO 8, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 3: No menu exibir, clique em janela de visualização 2. Com ela selecionada, realize os comandos seguintes: na caixa de entrada, digite o ponto $P=(a, \text{pol2})$. Ajuste o eixo y para o espaçamento de 10 a fim de obter a visualização do ponto P. Agora, na caixa de entrada novamente, escreva $\text{LugarGeométrico}(P, a)$ para finalizar a construção.

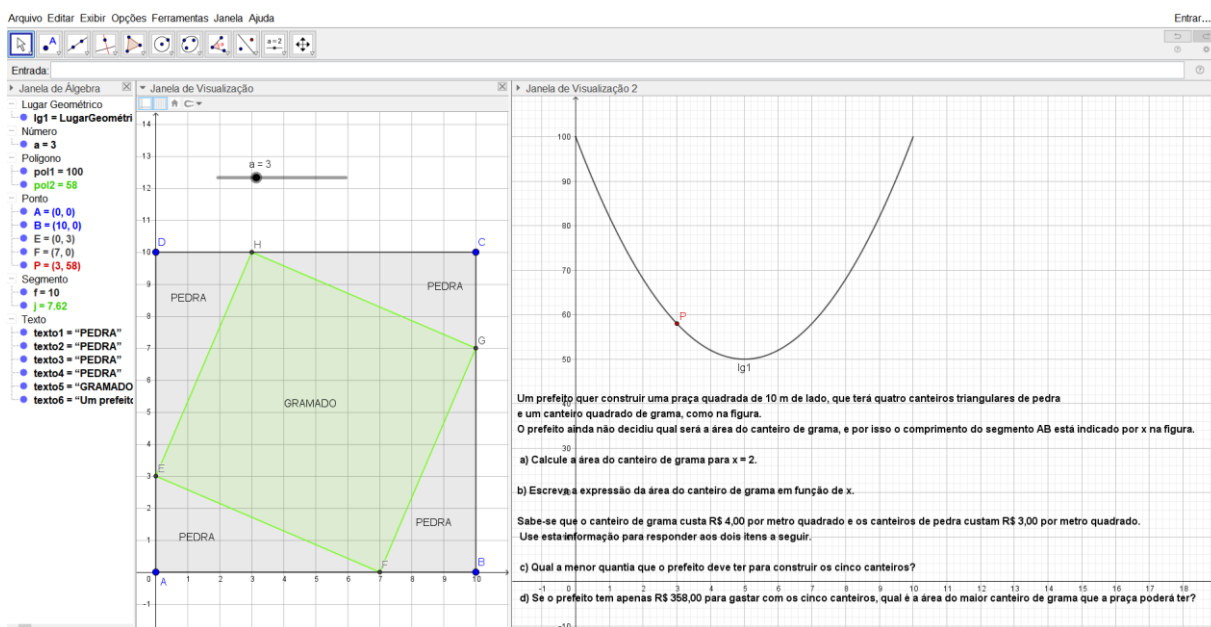
Figura 57 – Construção (SDO 8, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 4: Esta etapa é opcional. Nesse passo, modificamos as cores em alguns pontos, mudamos as cores de alguns objetos, inserimos o texto do problema a fim de deixar a construção semelhante à apresentada pela edição da OBMEP.

Figura 58 – Construção (SDO 8, parte 4)



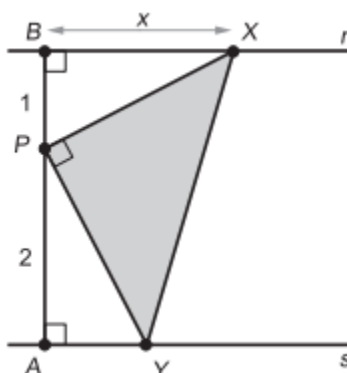
Fonte: elaborado pelo autor.

2.6 Situação Didática Olímpica 9

Conhecimentos prévios: Relação entre Ângulos, Semelhança de Triângulo, Área de Triângulo e Equação do 2º Grau.

Problema (OBMEP-2012. 2º Fase, Questão 4, Nível 3): Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P , nesse segmento, é tal que $AP = 2$ e $BP = 1$. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x . O ponto Y pertence à reta s e o triângulo XPY é retângulo em P .

Figura 59 – Segmentos



Fonte: OBMEP (2012).

- Explique por que os triângulos PAY e XBP são semelhantes.
- Calcule a área do triângulo XPY em função de x .
- Para quais valores de x a área do triângulo XPY é igual a $\frac{5}{2}$?
- Determine o valor de x para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule o valor dessa área.

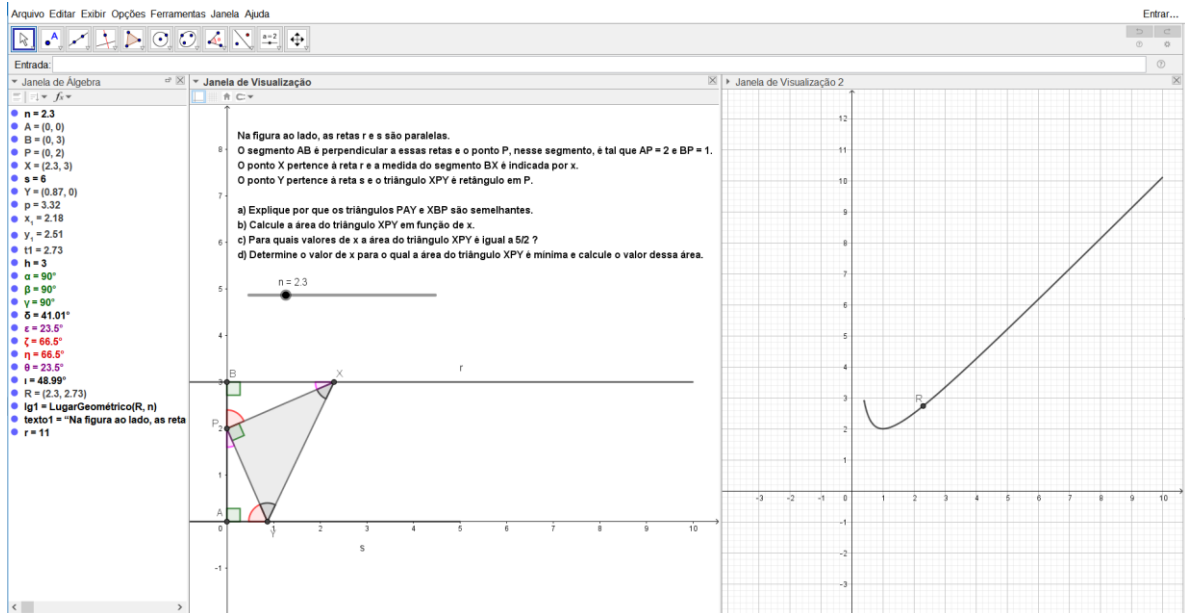
Dialética da Ação: Nessa fase, primeiros contatos com a SD, os sujeitos analisam o problema, seu enunciado. Refletem sobre o mesmo. Espera-se que eles hipotetizem as possíveis formas de abordagem do mesmo. Para Almouloud (2007, p.38), “essa fase é essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações sobre o *milieu*”. Portanto, a manipulação da construção poderá auxiliar nesses primeiros aspectos, pois poderão mover o deslizando e observar o resultado apresentado nas duas janelas de visualização.

Dialética da Formulação: Nessa etapa, os sujeitos interagem entre si, formulam abordagem, escrevem esquemas de possíveis soluções, refletem qual o argumento matemático a ser usado. Almouloud (2007, p. 38) explicita-nos que, “essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas”.

Dialética da Validação: Período em que os sujeitos envolvidos na pesquisa têm de validar os argumentos expostos para a resolução do problema, bem como a modelagem criada para a questão. Esperamos que validem seus argumentos nessa etapa, com o auxílio da construção apresentada na figura abaixo, usando uma estratégia de solução para o item a observando que, sendo os triângulos retângulos ΔYAP e ΔPBX em A e B , nessa ordem e, que $B\hat{P}X + 90^\circ + A\hat{P}Y = 180^\circ$, logo $A\hat{P}Y = 90^\circ - B\hat{P}X$. Além disso, no triângulo ΔPBX os

ângulos $B\hat{P}X$ e $B\hat{X}P$ são complementares então, $B\hat{X}P = 90^\circ - B\hat{P}X$, logo $B\hat{P}X = B\hat{X}P$, lhes permitirão concluir que os triângulos ΔYAP e ΔPBX são semelhantes.

Figura 60 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 9, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Inicialmente, chamando, por exemplo, os lados $\overline{BX} = x$ e $\overline{AY} = y$, uma solução possível esperada para o item b virá consiste em considerar o trapézio $AYXB$ sua decomposição nos triângulos ΔYAP , ΔYPX e ΔPBX , bem como a relação entre suas áreas e a semelhança deles entre si a fim de chegar à função pedida Assim espera-se que eles cheguem às relações seguintes: $A_{\Delta YPX} = A_{AYXP} - A_{\Delta YAP} - A_{\Delta PBX}$ (i) e da semelhança entre os triângulos ΔYAP e ΔPBX , cheguem à expressão $\frac{y}{1} = \frac{2}{x} \rightarrow y = \frac{2}{x}$ (ii).

De (i) e (ii), terão que: $A_{\Delta YPX}(x) = \frac{3x}{2} + \frac{3}{x} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x} = x + \frac{1}{x}$, portanto, a área do triângulo em questão em função x , cujo gráfico encontra-se na janela de visualização 2.

No item c, bastará que os sujeitos observem que, pela resolução da equação obtida da relação $A_{\Delta YPX}(x) = \frac{5}{2}$, chegarão ao que o item exige.

Para o item d, os sujeitos deverão perceber que sua resolução é análoga ao item b. Para isso, basta igualar a expressão da função da área do triângulo a um parâmetro p , qualquer. Então, deverão resolver a equação obtida de $A_{\Delta YPX}(x) = a$, em seguida fazer o estudo da equação obtida em função desse parâmetro.

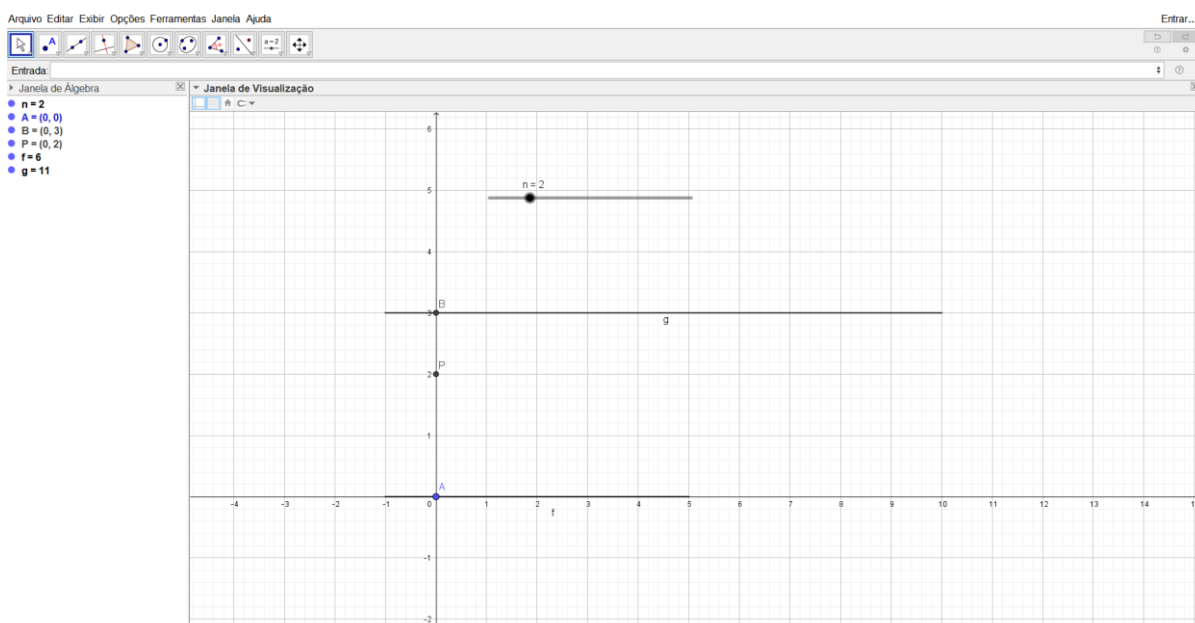
É sempre importante frisar que o professor pesquisador poderá intervir nessa etapa, caso ache adequado, em razão de eventuais dúvidas dos docentes, para que possam retomar o raciocínio do problema de forma coerente, a partir de questionamentos convenientes.

Dialética da Institucionalização: Nessa etapa, esperamos designar de maneira formalizada a solução de cada item, retornando ao raciocínio formal dos argumentos matemáticos para cada um, tornando claro todos os procedimentos e os conhecimentos usados. Isso é importante para que os conhecimentos em questão sejam assimilados na cultura matemática desses docentes. Além disso, é importante deixar claro para eles que a construção da situação didática é fundamental para a solução do problema em razão da visualização durante a interação com software.

Descrição dos comandos no GeoGebra:

Passo 1: Inicialmente, vamos criar o deslizante n com mínimo de 0,4 a máximo de 10, incremento de 0,1. Depois marcamos o ponto $A=(0,0)$. Na caixa de entrada, marcar o ponto $B=(x(A), y(A) + 3)$ e $P=(x(A), y(A) + 2)$. Ainda na caixa de entrada, digite: Segmento((-1, 0), (5, 0)) e Segmento((-1, y(B)), (10, y(B))) e dê *enter*.

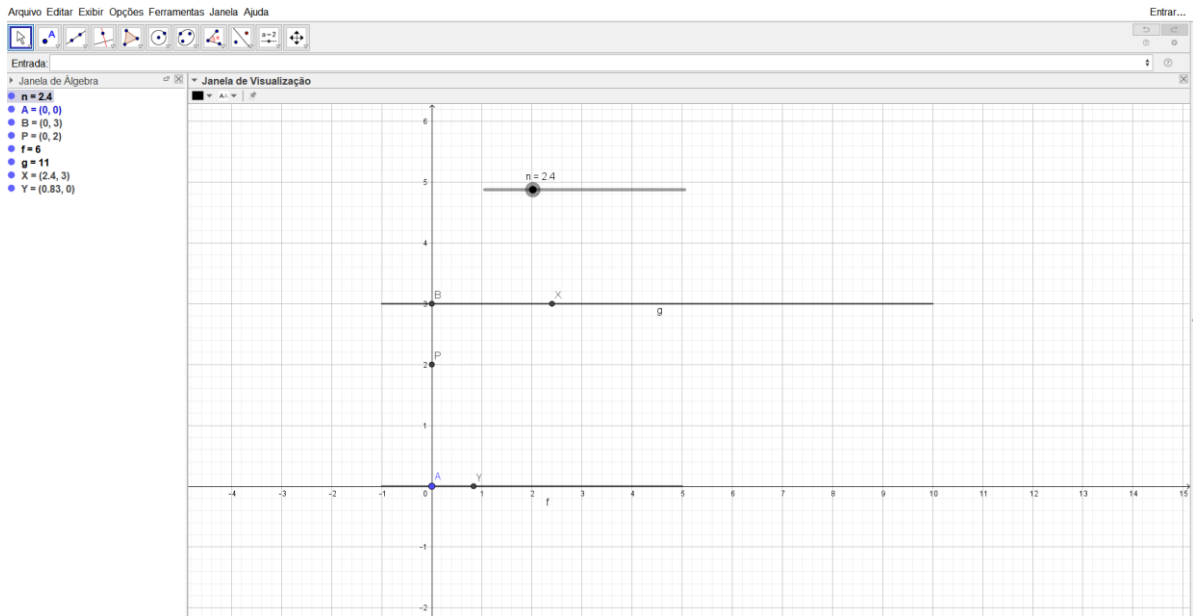
Figura 61 – Construção (SDO 9, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 2: Na caixa de entrada, digite o ponto $X=(x(B) + n, y(B))$ sobre o segmento g e $Y=Interseção(Perpendicular(P, Reta(X, P)), f)$ sobre o segmento f . Mova o deslizador para ver o resultado parcial.

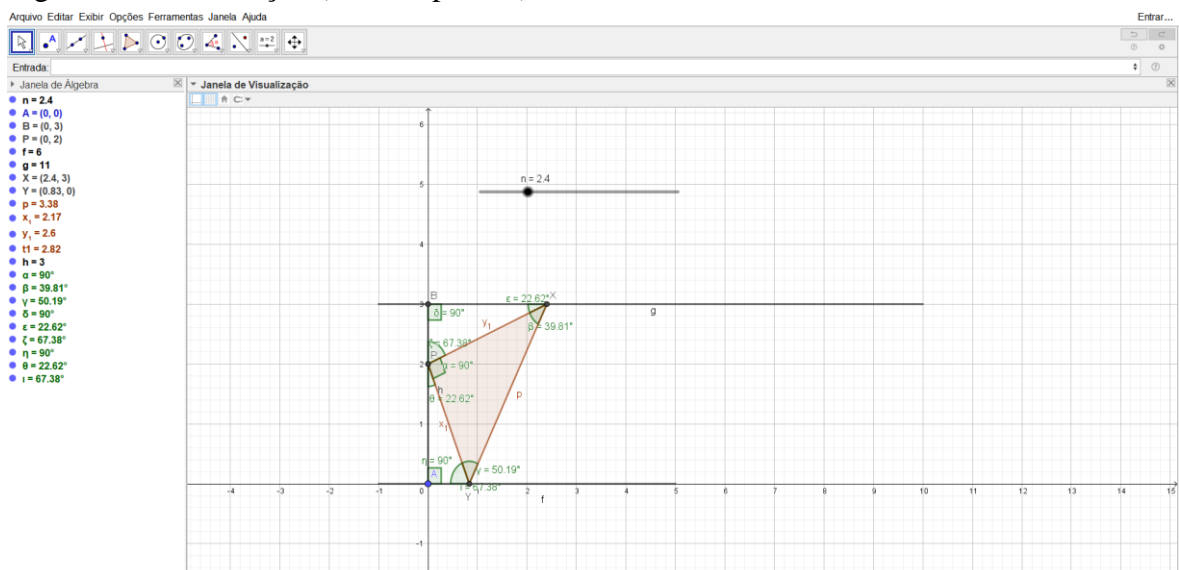
Figura 62 – Construção (SDO 9, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 3: Com a ferramenta “polígono”, criar o polígono $t1$, clicando em $XPYX$. Na sequência, na caixa de entrada, digite Segmento(A, B). Agora, com a ferramenta “ângulo”, clique em YPX , PXY , XYP a fim de obter os ângulos de $t1$. Ainda com essa ferramenta, obtenha os ângulos dos demais triângulos: PBX , BXP , XPB , YAP , APY e PYA .

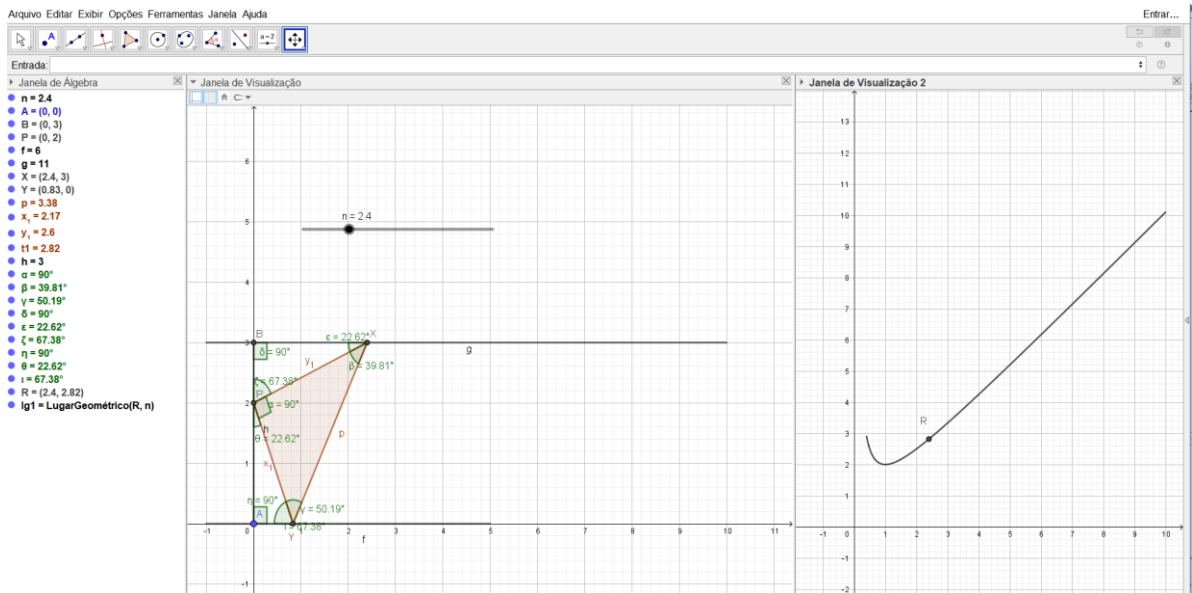
Figura 63 – Construção (SDO 9, parte 4)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 4: No menu exibir, abra uma nova janela de visualização. Na caixa de entrada, digite: $R=(n,t1)$, em seguida digite: $\text{LugarGeométrico}(R, n)$, de modo a obter o gráfico da área do triângulo XPY em função do deslizante n . Mova o deslizante n para ver o resultado da construção.

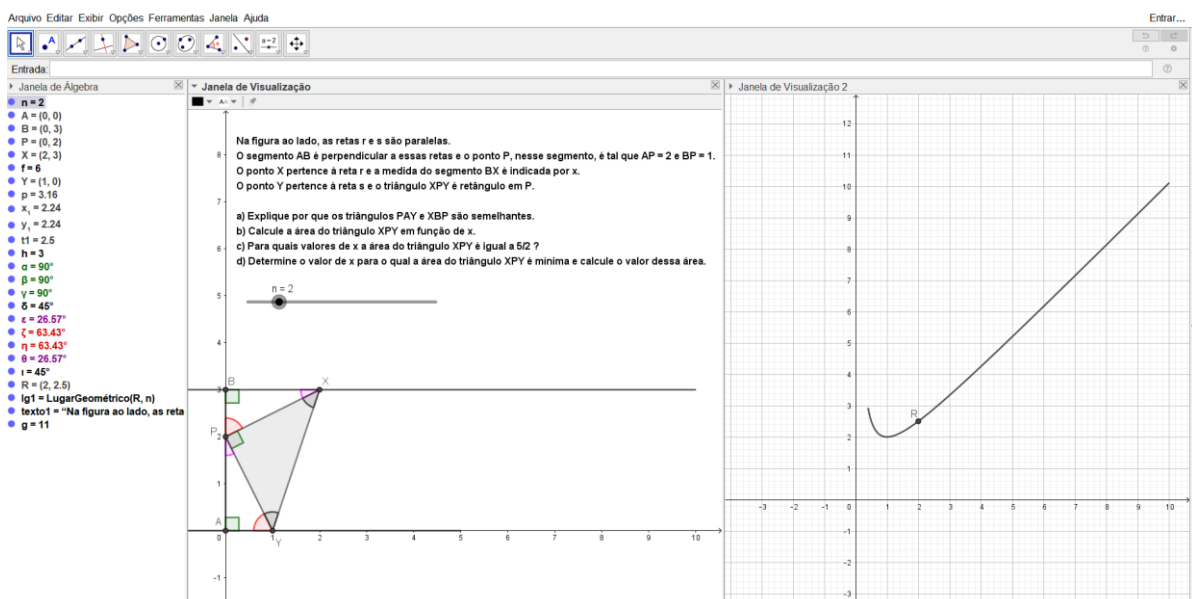
Figura 64 – Construção (SDO 9, parte 5)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 5: Esta etapa é opcional. Nesse passo, modificamos as cores de alguns pontos, ângulos e objetos, inserimos o texto do problema a fim de deixar a construção semelhante à apresentada pela edição da OBMEP.

Figura 65 – Construção (SDO 9, parte 6)



Fonte: elaborado pelo autor.

2.7 Situação Didática Olímpica 10

Conhecimentos prévios: Áreas do Quadrado e do Triângulo e Função do 2º grau.

Problema (OBMEP-2009. 2º Fase, Questão 5, Nível 3): Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

Figura 66 – Triângulos

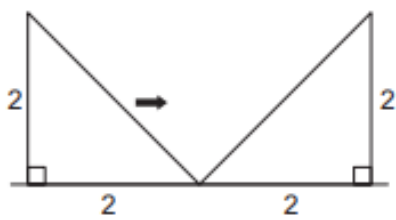


Figura 1

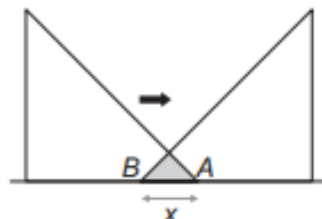


Figura 2

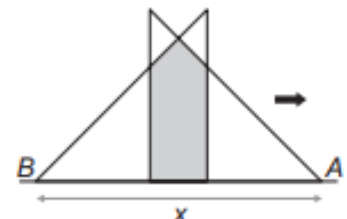


Figura 3

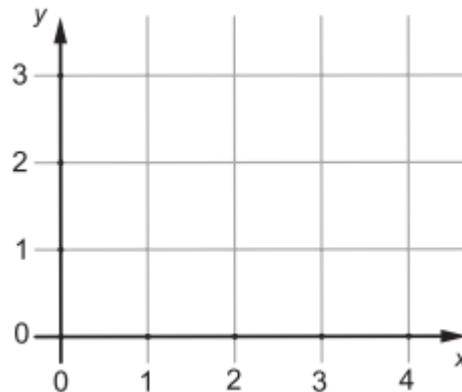
Fonte: OBMEP (2009).

Para cada x no intervalo $[0,4]$, seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

a) Calcule $f(1)$ e $f(3)$.

b) Encontre as expressões de f nos intervalos $[0,2]$ e $[2,4]$ e esboce o seu gráfico.

Figura 67 – Plano cartesiano

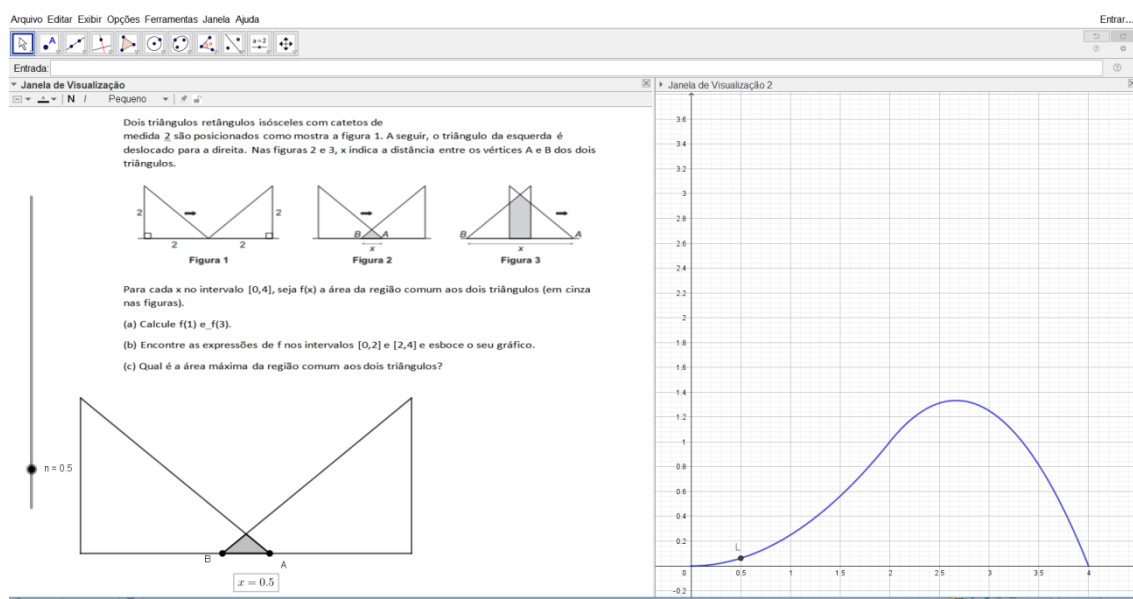


Fonte: OBMEP (2009).

c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

Dialética da Ação: Nessa etapa, os sujeitos analisam o problema pelo seu enunciado e pela construção no GeoGebra. São as tomadas de decisões iniciais, momento da elaboração das pressuposições. Assim, os aprendizes podem utilizar o controle deslizante n a fim de verificar os efeitos relacionados aos sucessivos valores assumidos por ele com deslocamento da figura da questão, na janela de visualização 1. Da mesma forma, observar tais efeitos na janela de visualização 2. E assim desenvolver o que se espera nos aspectos relacionados à dialética da próxima fase. Por exemplo, $n = 0,5$, como na figura abaixo.

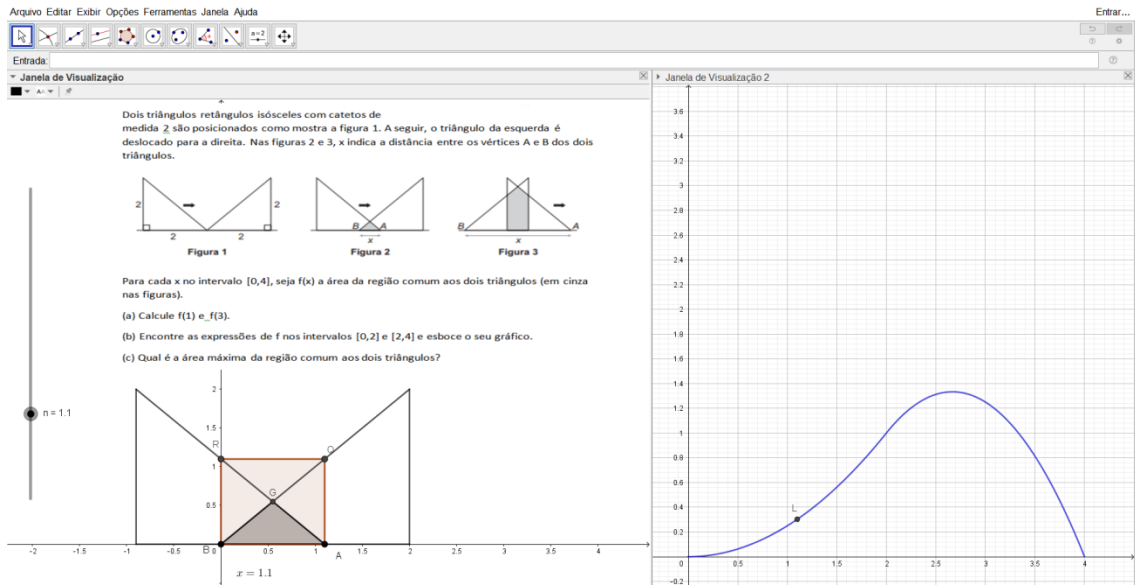
Figura 68 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 10, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Dialética da Formulação: Nesse estágio, ocorrem as trocas de informações entre os sujeitos ou entre eles e o pesquisador. Esta etapa caracteriza-se, ainda, pela exposição das ideias e estratégias de forma gradativa adotada durante o processo, cujo objetivo é a busca pela solução do problema. É esperado que os docentes percebam qual o conhecimento matemático necessário e qual estratégia de solução irão utilizar. Caso não tenham êxito nesse aspecto, o pesquisador poderá intervir habilitando o surgimento do quadrado $ABRQ$ e pedir para que eles retomem o raciocínio da questão a partir dele. Se persistir a dificuldade, o pesquisador deve orientar novamente para que eles atentem agora para a relação entre o triângulo ΔABQ e sua relação com o triângulo ΔABG e retomem o raciocínio do problema. Veja a figura 69.

Figura 69 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 10, parte 2)

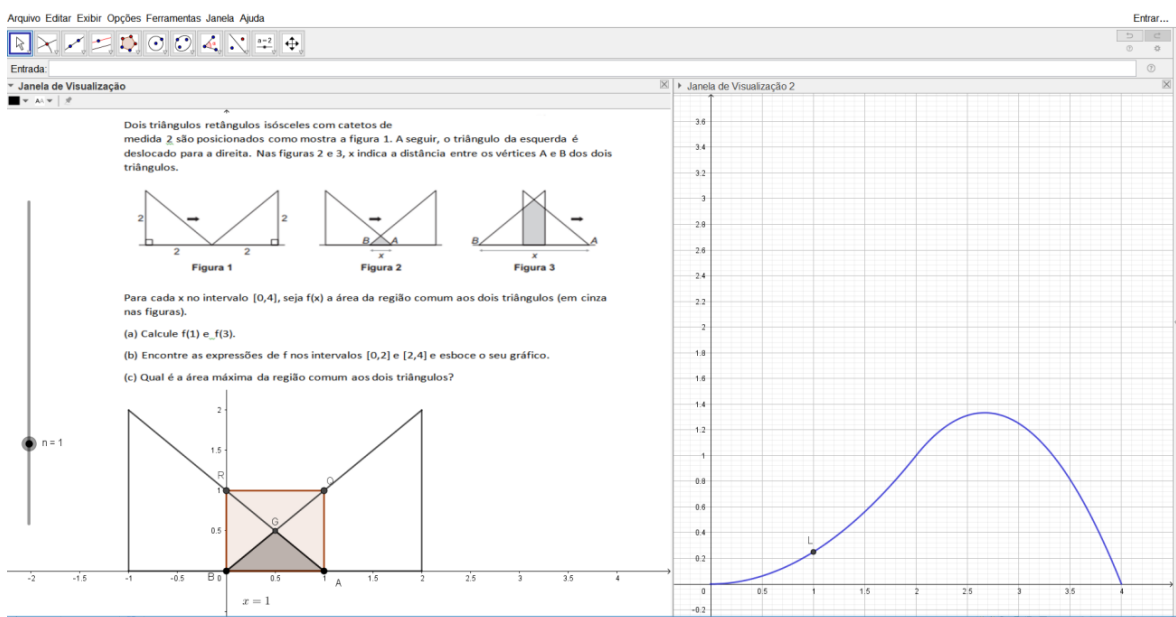


Fonte: elaborado pelo autor.

Vale observar que o novo polígono ($ABRQ$) se comporta como objeto auxiliar para a solução do problema somente no intervalo deslizante $0 \leq x \leq 2$, sendo que o deslizante $n = x$ por razões já explicadas em Situações Didáticas anteriores. A partir disso, eles irão à solução dos itens do problema.

No item a, posicionando o deslizante em $n = 1$, verão que:

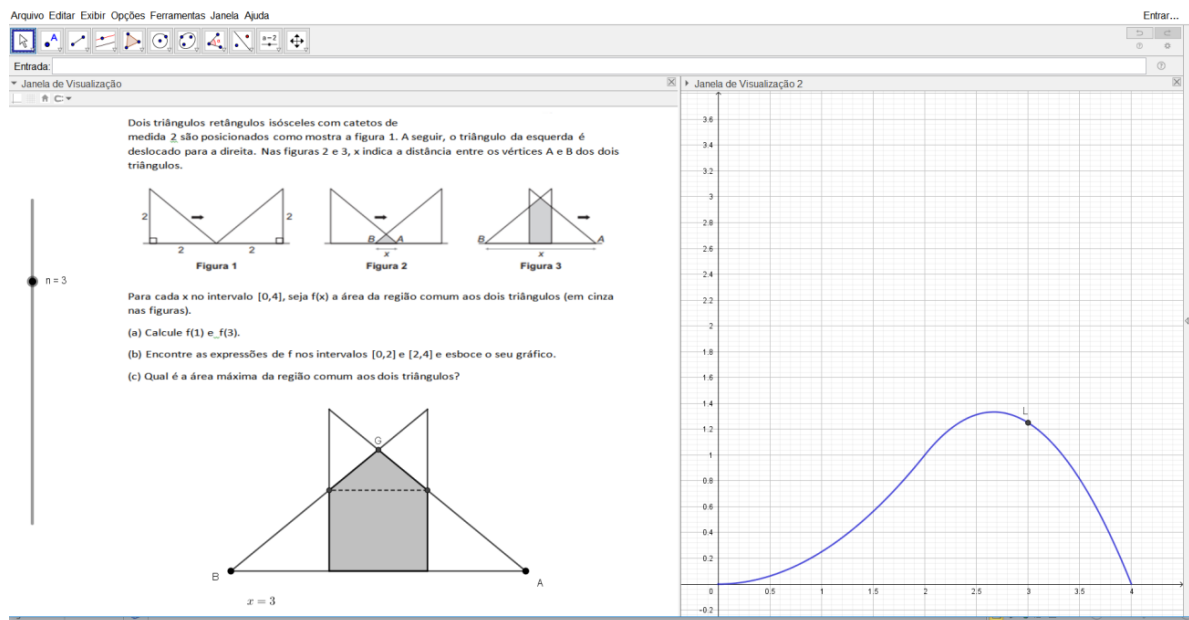
Figura 70 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 10, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

$f(1) = \frac{1}{4}$, tendo em vista que área da região de sobreposição em cinza (ΔABG) é a quarta parte do quadrado $ABRQ$ de lado 1. Ainda no item a, posicionado o deslizante em $n = 3$, temos:

Figura 71 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 10, parte 4)



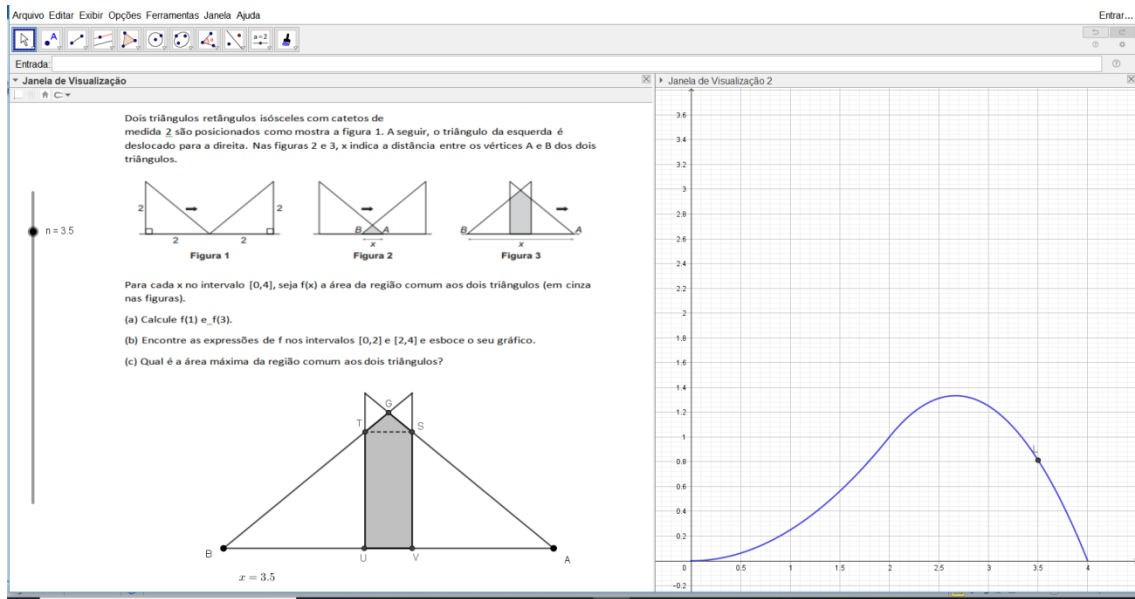
Fonte: elaborado pelo autor.

Pela construção, os docentes deverão perceber que a região de interseção em cinza é um trapézio formado por um quadrado e um triângulo. Como os catetos dos triângulos maiores medem 2 e o segmento $\overline{AB} = x = 3$, deverão concluir que o lado do quadrado em cinza mede 1. Já para o triângulo em cinza, basta retomar o raciocínio feito para obter $f(1)$. Portanto, $f(3) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Para item b, os sujeitos da pesquisa devem retomar o raciocínio anterior para determinar a expressão da função em cada intervalo pedido $0 \leq x \leq 2$ (I) e $0 \leq x \leq 4$ (II). Assim, no intervalo (I), deverão realizar o mesmo raciocínio para obter $f(1)$. Deste modo, temos para (I): $f(x) = \frac{x^2}{4}$. No intervalo (II), deverão retomar o mesmo raciocínio para obter $f(3)$, ou seja, decompor o trapézio em um retângulo e um triângulo.

Assim, temos para (II):

Figura 72 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 10, parte 5)



Fonte: elaborado pelo autor.

Do trapézio $SGTUV$, espera-se que observem que $\overline{BU} + \overline{UV} = 2 = \overline{AV} + \overline{VU}$, de

onde devem concluir que $4 = \overbrace{\overline{BU} + \overline{AV}}^x + \overline{UV} + \overline{UV} = x + \overline{UV}$, logo $\overline{UV} = 4 - x$, base do retângulo $STUV$. E, ainda, $\overline{BU} = \overline{AV} = 2 - (4 - x) = x - 2$, que também é altura do retângulo, uma vez que os catetos do triângulo ΔAVS são iguais e um deles é lado do retângulo. Portanto, a área do retângulo $STUV$, será $A_{STUV}(x) = (4 - x) \cdot (x - 2)$.

Retomando o raciocínio do item a, teremos que a área do triângulo ΔSGT , será:

$A_{\Delta SGT}(x) = \frac{(4-x)^2}{4}$. Agora, basta somar as duas expressões para obter a expressão geral para a

área do trapézio. Assim: $A_{SGTUV}(x) = (4 - x) \cdot (x - 2) + \frac{(4-x)^2}{4} = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4$.

De modo geral, os sujeitos deverão concluir esse item observando que, como a região em cinza é uma sobreposição desses dois triângulos, à medida que o triângulo da esquerda se desloca sobre o triângulo da direita em cada intervalo dado. Logo a função que associa a área de sobreposição ao deslocamento x , será:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4, & \text{para } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Quanto ao esboço do gráfico, que se encontra na janela de visualização 2, entendemos que os docentes não terão dificuldade, bastando que se atenham a cada um dos intervalos.

Para o último item, já com o esboço do gráfico feito na janela de visualização 2, é imediato que o valor máximo da função no intervalo (I) ocorre em $f(2) = 1$. Ao analisar o máximo da função no intervalo (II), determinam-se os vértices da segunda função chegando que $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3} > 1$, sendo, portanto, $\frac{4}{3}$ da função f .

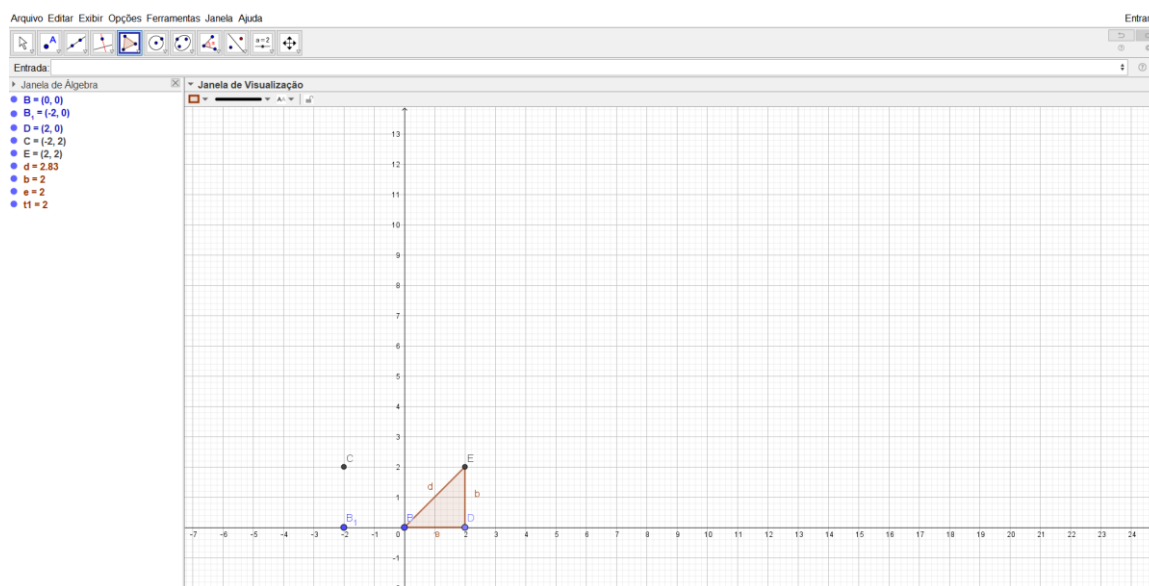
Dialética da Validação: Nessa fase, os sujeitos devem provar e comprovar seus resultados, através de apresentação e discussão sobre o que foi feito, para que sejam eliminadas quaisquer dúvidas ainda existentes e validar as respostas. Realizando uso dos conceitos e principais ideias usadas nesse problema, é esperado que os sujeitos percebam a forte relação dos conceitos matemáticos desenvolvidos com a construção da situação didática.

Dialética da Institucionalização: É a fase de formalização da solução, caso o professor pesquisador julgue necessário. Ressaltam-se os conhecimentos e os argumentos matemáticos ou os artifícios usados. Desse modo, para a formalização do problema em questão, basta que o professor siga o raciocínio que fizemos na etapa “Dialética da Formalização”, na qual descrevemos o que esperamos dos sujeitos dessa investigação durante o contato com a situação didática descrita acima.

Descrição dos comandos no GeoGebra:

Passo 1: Na caixa de entrada, digite: $B=(0,0)$, $B_1=(-2,0)$, $D=\text{Ponto}(\text{Círculo}(B, 2))$, $C=B + \text{Vetor}(B, B_1) - \text{VetorPerpendicular}(\text{Segmento}(B, B_1))$, $E=B + \text{Vetor}(B, D) + \text{VetorPerpendicular}(\text{Segmento}(B, D))$. Encerre essa etapa selecionando a ferramenta “polígono” clicando em BDEB para formar o triângulo t1.

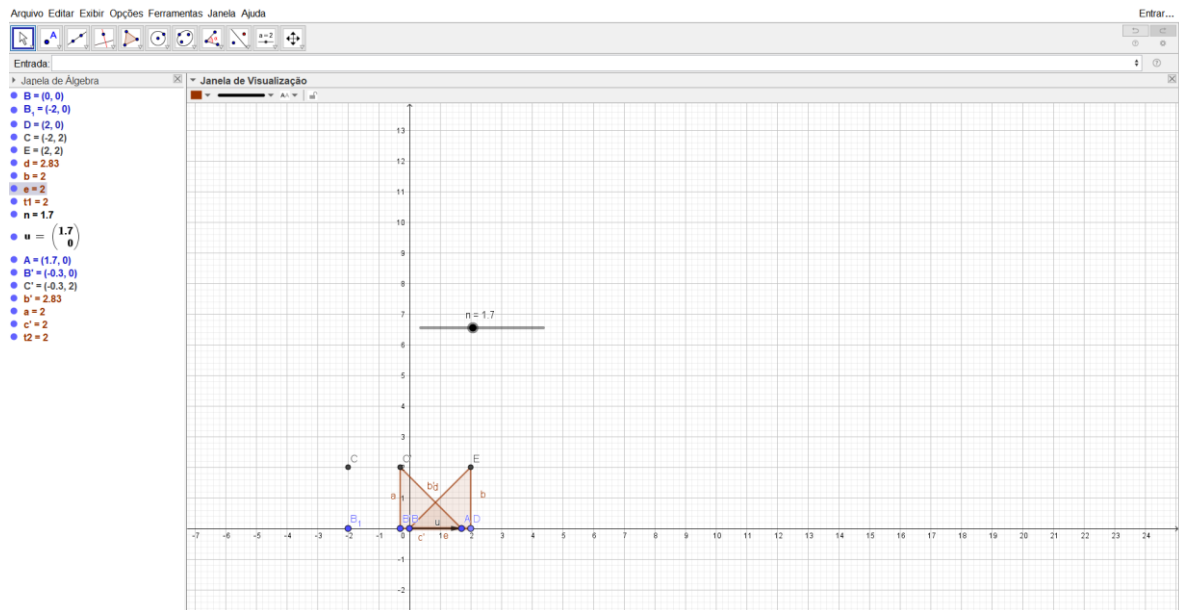
Figura 73 – Construção (SDO 10, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 2: Com a ferramenta controle deslizante, criar o deslizante com intervalo de 0 a 4, incremento de 0,1. Na caixa de entrada, digite: $u = n / 4 * \text{Vetor}(B_1, D)$. Agora, vamos transladar os ponto B, B_1 e C pelo vetor u. Digite na caixa de entrada: $A = \text{Transladar}(B, u)$, $B' = \text{Transladar}(B_1, u)$, $C' = \text{Transladar}(C, u)$. Com a ferramenta “polígono”, crie o triângulo t2 pelos pontos transladados. Mova o deslizante para ver o resultado parcial.

Figura 74 – Construção (SDO 10, parte 2)

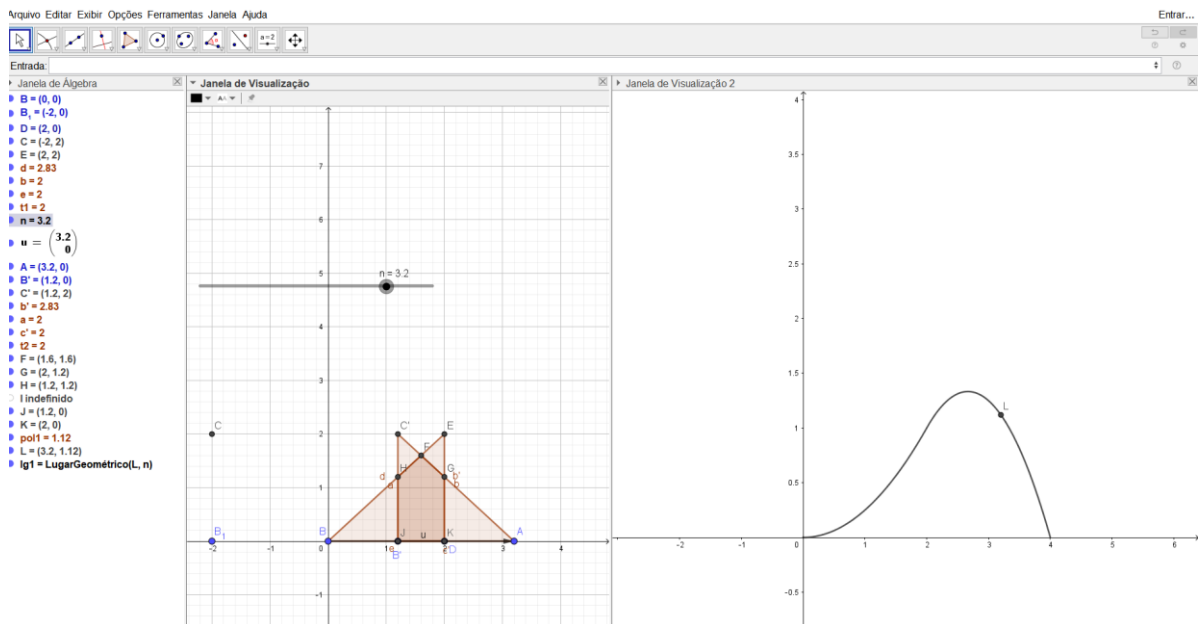


Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 3: Nessa etapa, coloque o deslizante em $n=1$. Com a ferramenta “intersecção entre dois objetos”, clique nas hipotenusas dos triângulos b’ e d para obter o ponto F. Coloque o deslizante em $n=3$. Com a mesma ferramenta, clique nos segmentos b, b’ para obter o ponto G. Repita o processo para os segmentos a, d para obter o ponto H. As demais intersecções são obtidas digitando-se na caixa de entrada. Assim, digite os pontos: $I = \text{Intersecção}(e, \text{EixoX})$, $J = \text{Intersecção}(a, e)$, $K = \text{Intersecção}(b, c')$.

Vamos agora criar uma condição para surgir o polígono pol1, intersecção entre os triângulos t1 e t2, por meio da sintaxe $\text{Polígono}(\text{Se}(\langle \text{Condição} \rangle, \langle \text{Então} \rangle))$. Assim, digite na caixa de entrada: $\text{Polígono}(\text{Se}(0 \leq n < 2, \{A, B, F\}, \{J, K, G, F, H\}))$. Vamos finalizar a construção com os dois comandos que seguem: em exibir, abra uma janela de visualização 2. Digite na caixa de entrada: $L = (n, \text{pol1})$, em seguida também na caixa de entrada, digite: $\text{LugarGeométrico}(L, n)$. Mova o deslizante para ver o resultado final da construção.

Figura 75 – Construção (SDO 10, parte 3)

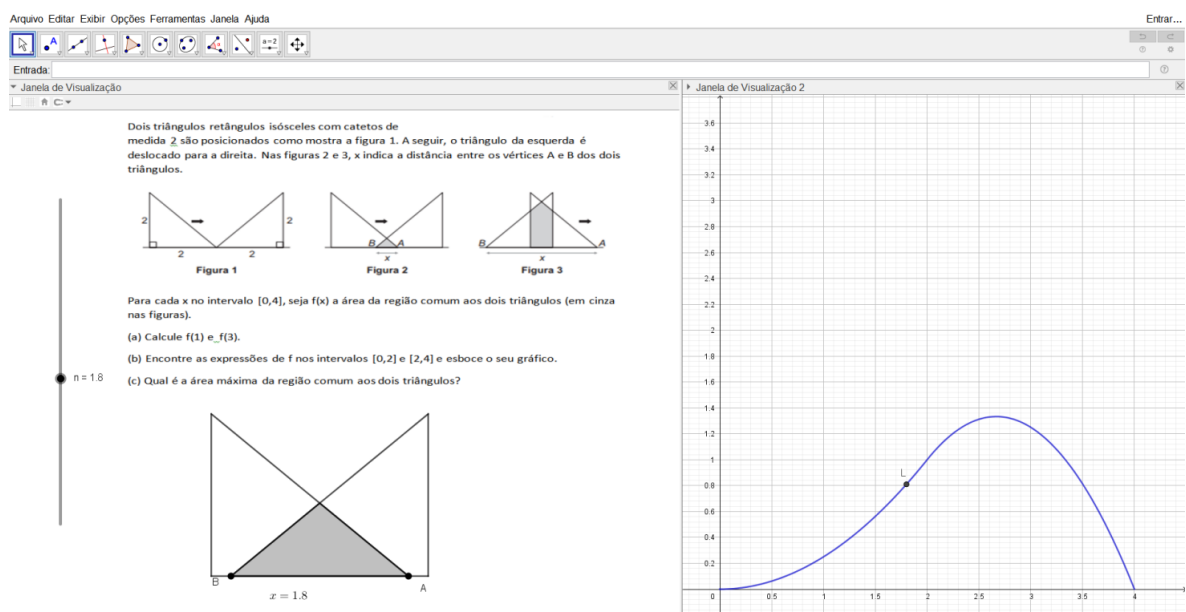


Fonte: elaborado pelo autor.

Os dois últimos comandos nos permitem plotar o gráfico da área dos polígonos $pol1$, interseção dos triângulos $t1$ e $t2$ em função do deslocamento do polígono $t2$.

Passo 4: Esta etapa é opcional. Nesse passo, modificamos as cores em alguns pontos do gráfico, mudamos as cores de alguns objetos e inserimos o texto do problema a fim de deixar a construção semelhante à apresentada pela edição da OBMEP.

Figura 76 – Construção (SDO 10, parte 5)



Fonte: elaborado pelo autor.

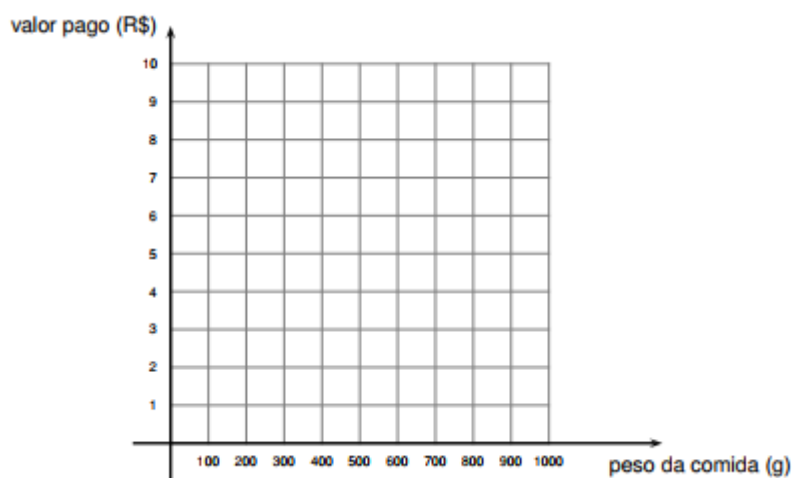
2.8 Situação Didática Olímpica 11

Conhecimentos prévios: Noções de Intervalo, Relações entre Grandezas e Função do 1º grau.

Problema (OBMEP-2006. 2º Fase, Questão 1, Nível 3): Raimundo e Macabéa foram a um restaurante que cobra R\$ 1,50 por cada 100 gramas de comida para aqueles que comem até 600 gramas e R\$ 1,00 por cada 100 gramas para aqueles que comem mais de 600 gramas.

- Quanto paga quem come 350 gramas? E quem come 720 gramas?
- Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabea, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?
- Desenhe o gráfico que representa o valor a ser pago em função do peso da comida. Marque nesse gráfico os pontos que representam a situação do item b.

Figura 77 – Plano cartesiano

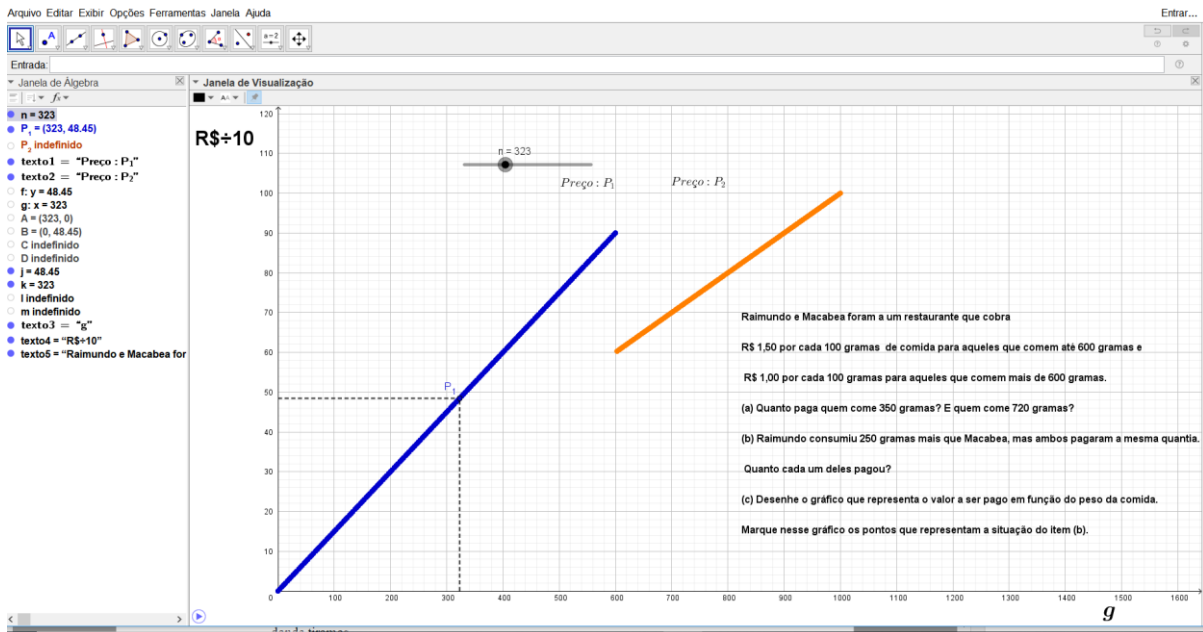


Fonte: OBMEP (2006).

Dialética da Ação: Nessa etapa, os sujeitos analisam o problema pelo seu enunciado e pela construção no GeoGebra. Ocorrem as tomadas de decisões iniciais. Nessa fase, elaboram as pressuposições acerca da questão. Assim, os aprendizes podem animar o controle deslizante n a fim de verificar os efeitos relacionados aos sucessivos valores assumidos por ele no deslocamento do ponto P (P_1 e P_2 de cada refeição) que representa o preço pago pela refeição nas duas situações apresentadas no enunciado do problema. Dessa forma, na mesma janela de visualização 1, os docentes já têm oportunidade de refletir sobre o

gráfico gerado pela situação didática, e isso permitirá que desenvolvam o que se espera nos aspectos relacionados a elaboração do raciocínio, bem como os relacionados à dialética da próxima fase. Veja na figura abaixo.

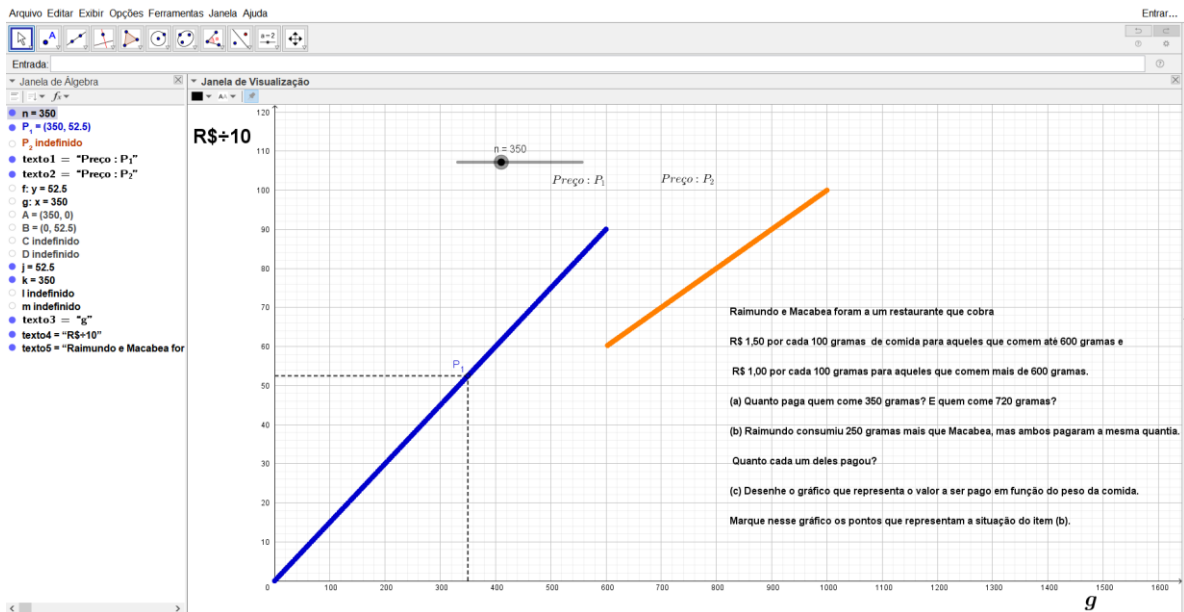
Figura 78 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 11, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Dialética da Formulação: Nessa fase, espera-se que os docentes percebam o conteúdo matemático da situação didática e suas relações com a construção. Além disso, eles devem formalizar suas estratégias para resolver o problema. A partir das hipóteses, espera-se que eles percebam, pela construção, que o eixo horizontal corresponde às gramas do alimento e o eixo vertical que corresponde ao preço a pagar. Podem movimentar o deslizante n , que corresponde às gramas de alimento consumido, e comparar com o enunciado do problema, podendo então inferir algumas abordagens coerentes com a situação didática. Desse modo, deverão perceber que, para o item a, bastará mover o deslizante n para as respectivas posições 350 gramas e 720 gramas e observar as coordenadas de P_1 ou P_2 , preço correspondente a Raimundo e Macabéa, nessa ordem, na janela de álgebra. Veja na imagem:

Figura 79 – Modelagem da questão no GeoGebra (SDO 11, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Podemos constatar que $P_1 = (350, 52.5)$, ou seja, o valor a pagar é de 5 reais e 25 centavos pelo consumo de 350 gramas de refeição. Para 720 gramas o procedimento é análogo.

Para o item c, os sujeitos terão de perceber que, se Raimundo comeu 250 gramas a mais que Macabéa e ambos pagaram a mesma quantia é porque Raimundo pagou menos por grama que Macabéa. Então, deverão retornar ao enunciado para concluir que Raimundo comeu mais de 600 gramas e Macabéa comeu no máximo 600 gramas. Sendo a e b , por exemplo, o peso em gramas consumido por Raimundo (I) e Macabéa (II), respectivamente, esperamos que os sujeitos cheguem às equações que determinarão o valor a pagar em reais por cada um. Logo: (I): $0,01 \cdot a$ e (II): $0,015 \cdot b$ onde $0,01 \cdot a = 0,015 \cdot b$, já que ambos pagaram a mesma quantia, onde $a = b + 250$. Resolvendo esse sistema, deverão concluir que ambos pagaram 7 reais e 50 centavos cada.

No último item, da leitura do enunciado do problema, os sujeitos deverão perceber de imediato que a função que associa o preço pago ao consumo em gramas será dada por:

$$p(x) = \begin{cases} 0,15x, & \text{para } x \leq 600 \\ 0,01x, & \text{para } x > 600 \end{cases}$$

O esboço do gráfico é imediato. Além disso, ele encontra-se na janela de visualização da construção, a fim de auxiliar os docentes envolvidos na pesquisa.

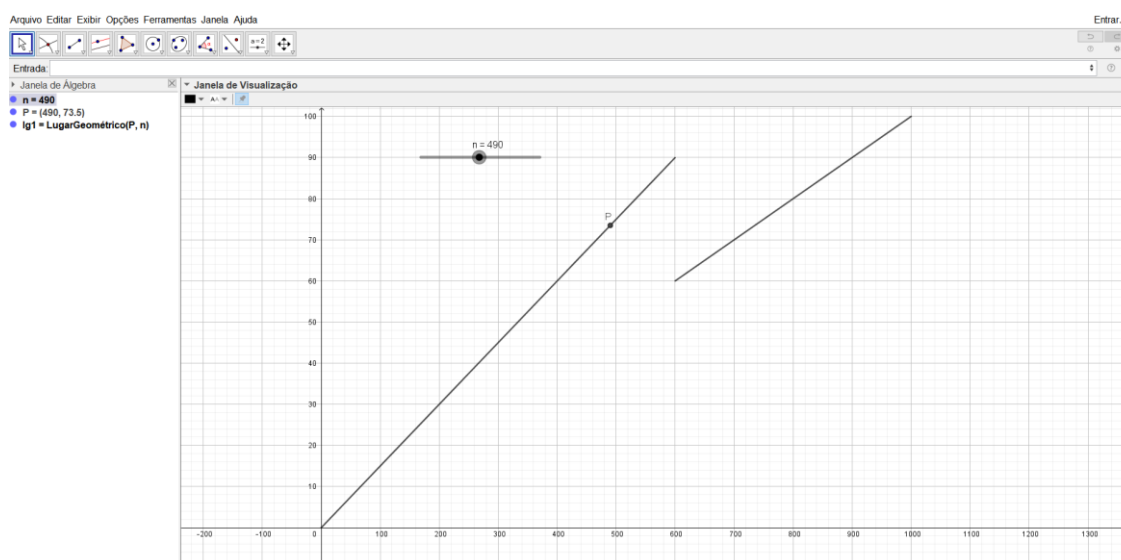
Dialética da Validação: Nesse estágio, os docentes deverão validar os resultados encontrados na etapa anterior. Poderão recorrer ao software GeoGebra como recurso auxiliar para a resolução, bastando que os envolvidos analisem com cuidado as janelas de visualização e de álgebra, ao passo que movimentam o deslizante n e perceber os conceitos matemáticos em jogo, bem como a sua consistência com respeito construção da situação didática. Podem surgir muitas dúvidas nesse momento e, segundo Almouloud (2007, p. 39), o emissor deverá justificar a veracidade do seu modelo, comparando, por exemplo, o resultado obtido através do modelo matemático com o que foi obtido da resolução.

Dialética da Institucionalização: Nesse estágio, o pesquisador deverá retomar a condução das atividades e fazer o fechamento das ideias caso julgue necessário. Poderão surgir dúvidas acerca da utilização dos conhecimentos matemáticos na abordagem de cada item da questão, o que deve ser sanado pelo professor pesquisador nessa fase. Almouloud (2007, p. 40) ressalta que “depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-se assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos”.

Descrição dos comandos no GeoGebra:

Passo 1: Com a ferramenta controle deslizante, criar o deslizante n com intervalo de 0 a 1000. Digite na caixa de entrada os pontos: $P = \text{Se}(0 \leq n \leq 600, (n, 0.15n), (n, 0.1n))$. Na caixa de entrada, digite: $\text{LugarGeométrico}(P, n)$. Ajuste os eixos x espaçamento de 100 e o eixo y 10 a fim de visualizar o gráfico.

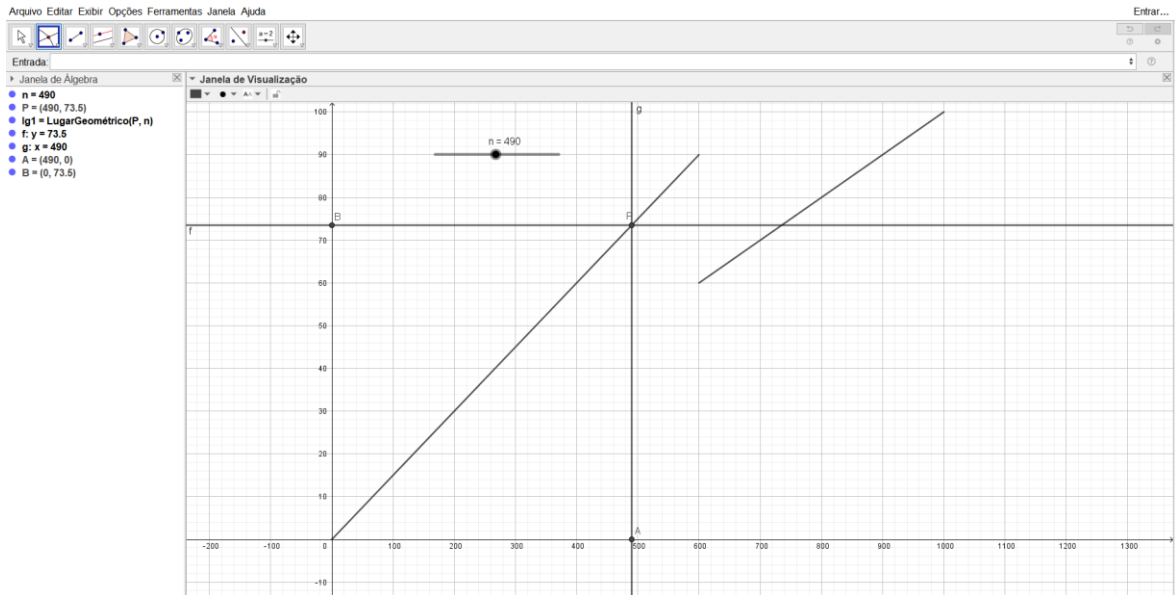
Figura 80 – Construção (SDO 11, parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 2: Posicione o deslizante em $n=300$, por exemplo. Com a ferramenta reta paralela, clique no eixo x e no ponto P para criar reta f. Clique no eixo y e no ponto P para criar a reta g. Com a ferramenta “interseção de dois objetos”, clique na reta f e no eixo x para obter o ponto A, da mesma forma clicar na reta g e no eixo y para obter o ponto B.

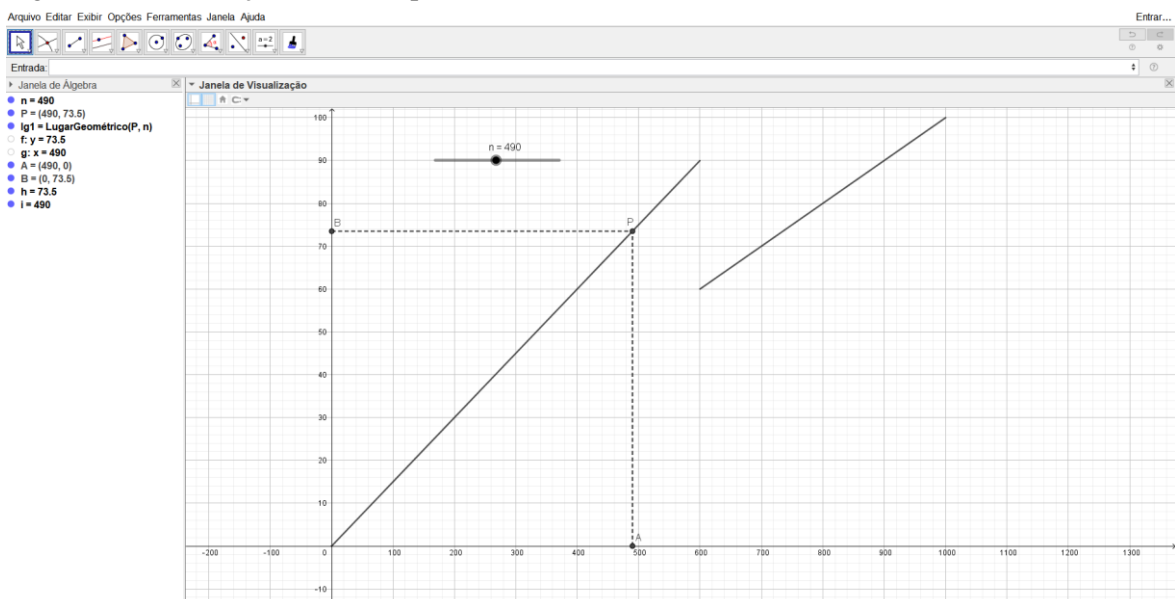
Figura 81 – Construção (SDO 11, parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 3: Para finalizar a construção, selecione a ferramenta “segmento”. Clique nos pontos A e P para criar o segmento h. Clique nos pontos B e P para criar o segmento i. Oculte as retas e os rótulos dos segmentos. Com o botão direito do mouse, clique em “propriedades” e mude o estilo dos segmentos.

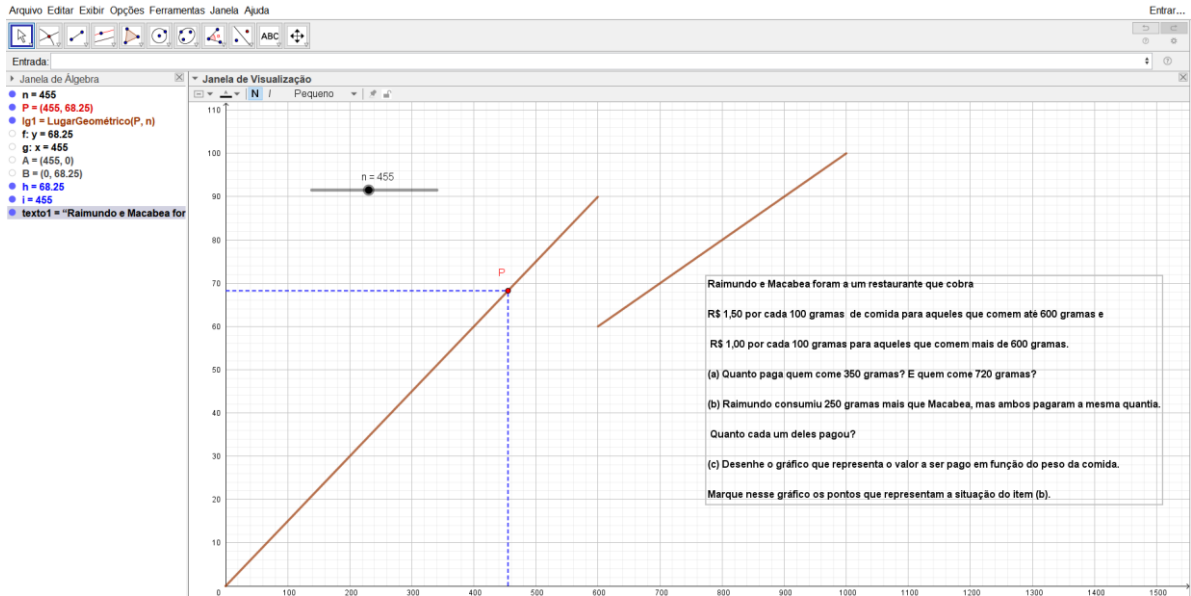
Figura 82 – Construção (SDO 11, parte 3)



Fonte: elaborado pelo autor.

Passo 4: Esta etapa é opcional. Nesse passo, modificamos as cores do ponto P, do gráfico, dos segmentos, ocultamos a parte negativa dos eixos e inserimos o texto do problema da OBMEP a fim de deixar a construção mais agradável. Veja o resultado:

Figura 83 – Construção (SDO 11, parte 4)



Fonte: elaborado pelo autor.

3 ENDEREÇO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS

Visando facilitar a visualização e a acessibilidade desse conteúdo a qualquer tempo, ou seja, das SDO apresentadas ao longo deste Produto Educacional e na dissertação a ele vinculada, disponibilizamos a seguir uma lista com importantes endereços eletrônicos referentes ao perfil do autor da presente pesquisa, nos quais se encontram as SDO por nós elaboradas. Além disso, colocamos diretamente o endereço eletrônico para acessar cada uma das construções para download. Disponibilizamos também o gráfico *QR Code* a fim de obter acesso instantâneo pelo smartphone ou aparelhos similares.

Site do software Geogebra

<https://www.geogebra.org/>

Perfil de Francisco Daniel Souza de Lima no site do software GeoGebra

<https://www.geogebra.org/u/danielufc.souza>

Situação Didática Olímpica 1

<https://www.geogebra.org/m/Q8jBQTFB>



Situação Didática Olímpica 2

<https://www.geogebra.org/m/cwe7hpac>



Situação Didática Olímpica 3

<https://www.geogebra.org/m/dqhetznm>

**Situação Didática Olímpica 4**

<https://www.geogebra.org/m/x2r23dgb>

**Situação Didática Olímpica 5**

<https://www.geogebra.org/m/v2pktpw6>



Situação Didática Olímpica 6

<https://www.geogebra.org/m/nng2cqhy>

**Situação Didática Olímpica 7**

<https://www.geogebra.org/m/w86bfjtc>

**Situação Didática Olímpica 8**

<https://www.geogebra.org/m/ufm4mjxt>



Situação Didática Olímpica 9

<https://www.geogebra.org/m/xqdaj8dn>

**Situação Didática Olímpica 10**

<https://www.geogebra.org/m/vnnhjgmy>

**Situação Didática Olímpica 11**

<https://www.geogebra.org/m/tpb7pnxc>



REFERÊNCIAS

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. **Education & Language**, New York, v. 39, Springer, 2005.

CAPES. **Relação de Cursos Recomendados e Reconhecidos**. 2014. Disponível em: <<https://www.capes.gov.br/pt/cursos-recomendados>>. Acesso em: 28 jun. 2019.

MOREIRA, Marco Antonio. O mestrado (profissional) em ensino. **Revista Brasileira de Pós-Graduação**, v. 1, n. 1, 2004.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

RIBEIRO, Renato Janine. “O mestrado profissional na política atual da Capes”. *Revista Brasileira de Pós-Graduação* 2.4 (2005).

TRENTIN, Marco Antônio Sandini. (org.) **Educação científica e tecnológica**: produtos educacionais. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2017.