

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES**

**CARACTERIZAÇÃO VISCOELÁSTICA LINEAR DE  
MISTURAS ASFÁLTICAS:  
Operacionalização Computacional e Análise pelo Método dos  
Elementos Finitos**

**Henrique Nogueira Silva**

**Dissertação submetida ao Programa de  
Mestrado em Engenharia de Transportes  
da Universidade Federal do Ceará, como  
parte dos requisitos para a obtenção do  
título de Mestre em Ciências (M.Sc.) em  
Engenharia de Transportes**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Jorge Barbosa Soares**

**Fortaleza**

**2009**

## FICHA CATALOGRÁFICA

S58c Silva, Henrique Nogueira  
Caracterização viscoelástica linear de misturas asfálticas:  
operacionalização computacional e análise pelo método dos elementos  
finitos / Henrique Nogueira Silva.  
210f: il. color. enc.

Orientador: Prof. PhD. Jorge Barbosa Soares  
Área de concentração: Infra-Estrutura de Transportes  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de  
Tecnologia. Depto. de Engenharia de Transportes, 2009.

1. Viscoelasticidade 2. Misturas Asfálticas 3. Método dos Elementos  
Finitos 4. Série de Prony 5. Interconversão 6. *wxWidgets* I. Soares, Jorge  
Barbosa (orient.) II. Universidade Federal do Ceará – Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Transportes III. Título

CDD 388

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, H. N. (2009) Caracterização Viscoelástica Linear de Misturas Asfálticas: Operacionalização Computacional e Análise pelo Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 210 fl.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Henrique Nogueira Silva

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Caracterização Viscoelástica Linear de Misturas Asfálticas: Operacionalização Computacional e Análise pelo Método dos Elementos Finitos.

Mestre / 2009

É concedida à Universidade Federal do Ceará permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Henrique Nogueira Silva

Rua 432, Nº 135, 2ª etapa, Conjunto Ceará

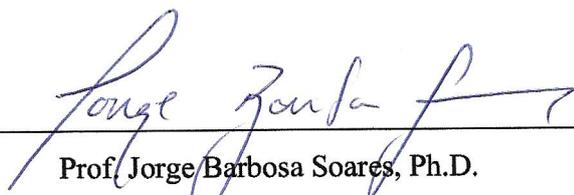
60.531-110 – Fortaleza/CE – Brasil

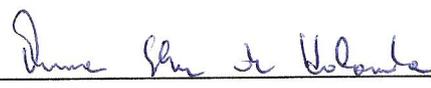
CARACTERIZAÇÃO VISCOELÁSTICA LINEAR DE MISTURAS ASFÁLTICAS:  
OPERACIONALIZAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS

Henrique Nogueira Silva

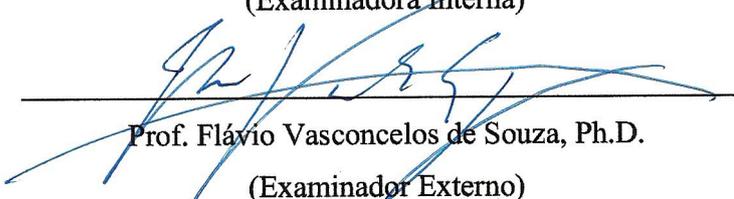
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
MESTRADO EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE  
TRANSPORTES.

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Jorge Barbosa Soares, Ph.D.  
(Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof.ª Áurea Silva de Holanda, D.Sc.  
(Examinadora Interna)

  
\_\_\_\_\_  
Prof.ª Verônica Teixeira Franco Castelo Branco, Ph.D.  
(Examinadora Interna)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Flávio Vasconcelos de Souza, Ph.D.  
(Examinador Externo)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Ivaldo Dário da Silva Pontes Filho, D.Sc.  
(Examinador Externo)

FORTALEZA, CE – BRASIL

DEZEMBRO DE 2009

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais, José e Iracema, pelo grande amor e apoio nos estudos.

Ao meu irmão Everton, pelo grande apoio e torcida.

A minha noiva, Larissa, pelo amor, paciência e sonhos compartilhados.

Aos sinceros amigos que adquiri ao longo da vida.

DEDICO.

*“Limitations of Human Wisdom*

*When I tried to gain wisdom  
and to observe the activity on earth –  
even though it prevents anyone from sleeping day or night –  
then I discerned all that God has done:  
No one really comprehends what happens on earth.  
Despite all human efforts to discover it, no one can ever grasp it.  
Even if a wise person claimed that he understood,  
he would not really comprehend it.”*

*Ecclesiastes 8:16–17*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida concedida. Além disso, gostaria de agradecer a Deus pela esperança que o Senhor me tem concedido para enfrentar os desafios encontrados ao longo desta vida passageira.

Ao filho de Deus e Senhor Jesus Cristo, por sua morte para remissão de meus pecados e pela esperança de uma vida melhor no reino de Deus. Amém.

A meus queridos pais, José Berismar Moreira da Silva e Iracema Lúcio Nogueira da Silva, que sempre demonstraram um grande amor por mim e meu irmão Everton, lutando correta e perseverantemente para garantir uma vida melhor para nossa família, seja na saúde, na alimentação, na orientação e no apoio nos estudos.

A meu estimado irmão Everton Nogueira Silva, que sempre muito generoso se constitui “os braços” da família, não medindo esforços para ajudar a todos da família. Espero um dia poder retribuí-lo por sua grande estima que tem por mim.

A minha avó Terezinha Ramos Nogueira (em memória) cujo amor por mim e minha família me surpreende até os dias de hoje. Saudades vó...

A minha noiva Larissa Sousa Sampaio, que tem se revelado capaz de se modificar continuamente para fortalecer nossa união. Obrigado amor e espero colher muitos frutos desta união que estar por vir.

Ao professor e orientador de mestrado Jorge Barbosa Soares pelo grande ensinamento de que o tudo é possível desde que se tenha verdadeira obstinação para alcançar as metas traçadas. Um segundo agradecimento ao professor Jorge Soares diz respeito ao imenso apoio moral para o término desta dissertação de mestrado. Suas palavras de apoio na reta final deste trabalho me serviram muito mais que qualquer orientação e, certamente, devo esta dissertação a ele. Muito obrigado professor Jorge Soares!

Ao professor e orientador de iniciação científica Carlos Felipe Grangeiro Loureiro, que foi um verdadeiro tutor durante minha graduação, sempre tentando me ensinar a realizar análises críticas bem fundamentadas sobre os problemas de engenharia. Além disso, seu comportamento ético e dedicado àquilo que se propõe realizar não me deixa outra alternativa que não seja tentar imitá-lo! Obrigado professor Felipe!

Aos professores Evandro Parente e Áurea Holanda, sempre muito receptivos e abertos àqueles que têm interesse em ingressar no mundo empolgante da modelagem mecânico-computacional.

À professora Verônica Castelo Branco pelo grande apoio nos experimentos finais deste trabalho.

À professora Suelly Barroso (coordenadora do PETRAN) pelo incentivo também na reta final do mestrado.

Ao amigo Pedro Cavalcanti de Sousa pela parceria no desenvolvimento do programa *ViscoTool* e ensinamentos repassados sobre Programação Orientada a Objetos. Sua ajuda me permitiu dar um salto de qualidade durante esta pós-graduação. Obrigado Pedro e siga em frente na sua caminhada brilhante que tens trilhado!

Aos mestrandos Pedro Custódio e Manuela bem como ao bolsista de iniciação científica Lorrán pelo grande apoio na caracterização experimental das misturas asfálticas investigadas neste trabalho.

Ao recém-doutor Flávio Vasconcelos de Souza pela influência positiva de seus trabalhos na área de viscoelasticidade e modelagem computacional. Também gostaria de agradecê-lo pela sempre boa receptividade nos e-mails trocados ao longo deste mestrado.

Ao laboratorista Rômulo pela fabricação dos corpos de prova das misturas asfálticas analisadas.

Às sempre eficientes Annie e Lucimar pela resolução dos mais diversos problemas relativos ao LMP.

Ao CNPq pelo suporte financeiro para desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas do LMP que me proporcionaram bons momentos no ambiente de trabalho: Sérgio Costa, Renato, Ermano, Enson, Boris, Lilian, Rodrigo e Márcio.

Aos amigos “cabeças chatas” (cearenses) que durante o curso de especialização em Engenharia de Petróleo da Universidade Petrobras foram minha família. Eis a turma: Élton Luís, Antônio José, Francisco Rafael, Ulisses, Luís Sérgio, Raimundo Neto, Paulo Henrique Marchon, Henrique Rafael, Bruno Lucas, Zé Ricardo, Thiago Batista e Bruno Fontenele.

Resumo da Dissertação submetida ao PETRAN/UFC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências (M.Sc.) em Engenharia de Transportes.

CARACTERIZAÇÃO VISCOELÁSTICA LINEAR DE MISTURAS ASFÁLTICAS:  
Operacionalização Computacional e Análise pelo Método dos Elementos Finitos.

Henrique Nogueira Silva

Dezembro/2009

Orientador: Prof. Jorge Barbosa Soares, Ph.D.

Uma mistura asfáltica apresenta um comportamento mecânico complexo que pode ser idealizado por um modelo viscoelastoplástico, que considera a existência de deformações recuperáveis (elástico e viscoelástico) e não recuperáveis (plástico e viscoplástico). No entanto, o estado da arte da pesquisa brasileira tem considerado um modelo mais restrito, o modelo viscoelástico linear. Este modelo trata o comportamento mecânico do material como dependente do carregamento e da correspondente taxa (temporal) de aplicação, que representa um avanço considerável na modelagem mecânico-computacional de misturas asfálticas frente ao modelo elástico linear (clássico) comumente empregado em projetos nacionais de dimensionamento de pavimentos. Ainda assim, o modelo viscoelástico apresenta alguns inconvenientes que dificultam seu uso. Um primeiro inconveniente é que para uma representação compatível com os dados experimentais, a caracterização constitutiva viscoelástica exige a manipulação de uma grande quantidade de coeficientes da série de Prony, dificultando o processo de ajuste de curva e posterior manipulação da série. Além disso, o processo formal de interconversão entre as propriedades viscoelásticas fundamentais, comumente necessário por questões operacionais, trata-se de um método não trivial. Para facilitar o emprego da teoria da viscoelasticidade (linear) na caracterização de misturas asfálticas, o presente trabalho se propôs ao desenvolvimento de um programa computacional específico que facilita o uso do modelo viscoelástico linear. Este programa realiza o ajuste de curva de séries de Prony e a interconversão entre propriedades viscoelásticas fundamentais no domínio do tempo, quais sejam, a Função Fluência  $D(t)$  e o Módulo de Relaxação  $E(t)$ . Como principal resultado, foi possível aplicar este programa computacional na caracterização de duas misturas nacionais típicas, Areia Asfalto (AA) e Concreto Asfáltico (CA), mostrando de forma detalhada os passos necessários para uma representação constitutiva viscoelástica adequada. Ainda como parte dos resultados obtidos, foi avaliada a eficácia da técnica de ajuste de curva por Mínimos Quadrados Não Linear (MQNL) para séries de Prony, sob a expectativa de incorporação desta técnica em versões futuras do programa computacional desenvolvido. Para explicitar o avanço da simulação mecânica de pavimentos que o modelo viscoelástico possibilita frente ao modelo elástico (clássico), ao final do trabalho foram realizadas análises computacionais utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) para estimar os parâmetros mecânicos de projeto de pavimentos (tensões de deformações) considerando o modelo viscoelástico das misturas asfálticas investigadas, AA e CA.

Abstract of Thesis submitted to PETRAN/UFC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.) in Transportation Engineering

LINEAR VISCOELASTIC CHARACTERIZATION OF ASPHALT MIXES:  
Computational Operationalization and Analysis using the Finite Element Method

Henrique Nogueira Silva

December/2009

Advisor: Prof. Jorge Barbosa Soares, Ph.D.

An asphalt mixture has a complex mechanical behavior can be idealized by a viscoelastoplastic model that considers the existence of recoverable (elastic and viscoelastic) and non-recoverable deformations (plastic and viscoplastic). However, the state of the art of Brazilian research has considered a more restricted model, the linear viscoelastic model. This model treats the mechanical behavior of the material as dependent on the load and the corresponding (temporal) rate, which represents a considerable advance in mechanical-computational modeling of asphalt mixtures compared to the linear elastic (classic) model commonly employed on projects of national pavement design. But the viscoelastic model has some drawbacks that hinder its use. A first drawback is that for a representation compatible with the experimental data, the constitutive viscoelastic characterization requires handling a large number of Prony series coefficients, which makes difficult the curve fitting process and subsequent handling of the series. Futhermore, the formal process of interconversion between the fundamental viscoelastic properties, commonly required for operational reasons, is a non-trivial task. In order to enable the employment of the theory of (linear) viscoelasticity in the characterization of asphalt mixtures, this study proposed the development of a specific computer program that facilitates the use of the linear viscoelastic model. This program carries out curve fitting of Prony series and interconversion of fundamental viscoelastic properties in time domain, namely, Creep Compliance  $D(t)$  and Relaxation Modulus  $E(t)$ . As a main result, it was possible to use this program in characterization of two national typical mixtures, Sand Asphalt (SA) and Asphalt Concrete (AC), showing in details the steps necessary for a proper viscoelastic constitutive representation. Also as part of the results, it was tested the efficacy of the technique of curve fitting by Nonlinear Least Squares (NLS) for the Prony series, under the expectation of incorporating this technique in future versions of this ongoing software. In order to explain the advances that viscoelastic model can enable in mechanical simulation of pavement, instead of using the elastic (classic) model, at the end of this study it was performed computational analysis using the Finite Element Method (FEM) to estimate the mechanical design parameters of pavements (stress and strains), considering the viscoelastic model of the investigated asphalt mixtures, SA and AC.

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. PROBLEMA DE PESQUISA.....</b>	<b>8</b>
<b>1.2. OBJETIVOS.....</b>	<b>9</b>
1.2.1. Objetivo Geral.....	9
1.2.2. Objetivos Específicos .....	9
<b>1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO .....</b>	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>12</b>
<b>2.1. MODELOS CONSTITUTIVOS PARA MISTURAS ASFÁLTICAS .....</b>	<b>12</b>
<b>2.2. NATUREZA DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO.....</b>	<b>15</b>
2.2.1. Propriedades Viscoelásticas Fundamentais.....	19
2.2.2. Limite de Viscoelasticidade Linear: Conceituação e Valores de Referência .....	31
2.2.3. Construção de Curvas Mestras pelo PSTT .....	34
<b>2.3. EQUAÇÕES ANALÍTICAS PARA REPRESENTAÇÃO DAS PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS.....</b>	<b>37</b>
<b>2.4. TÉCNICAS DE AJUSTE DE CURVA DA SÉRIE DE PRONY .....</b>	<b>45</b>
2.4.1. Linearização pelo Método da Colocação .....	45
2.4.1.1. Método da Colocação Clássico de SCHAPERY (1961) .....	45
2.4.1.2. Método da Colocação por Mínimos Quadrados Linear (MQL).....	49
<b>2.5. INTERCONVERSÃO ANALÍTICA ENTRE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS .....</b>	<b>52</b>
2.5.1. Interconversão entre Propriedades no Domínio do Tempo e da Frequência .....	52
2.5.2. Definição das Constantes de Tempo da Função Interconvertida.....	54
<b>2.6. FORMULAÇÃO PELO MEF DO MODELO CONSTITUTIVO VISCOELÁSTICO LINEAR.....</b>	<b>57</b>
<b>CAPÍTULO 3 OPERACIONALIZAÇÃO DA MODELAGEM CONSTITUTIVA VISCOELÁSTICA NO DOMÍNIO DO TEMPO..</b>	<b>62</b>
<b>3.1. MOTIVAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL <i>VISCOTOOL</i> .....</b>	<b>62</b>
<b>3.2. FILOSOFIA DE PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS E AMBIENTE DE DESENVOLVIMENTO DO <i>VISCOTOOL</i>.....</b>	<b>63</b>
<b>3.3. ORGANIZAÇÃO DE CLASSES DO PROGRAMA <i>VISCOTOOL</i>.....</b>	<b>66</b>

<b>3.4. FUNCIONALIDADES DO PROGRAMA <i>VISCOTOOL</i> .....</b>	<b>69</b>
<b>3.5. VALIDAÇÃO DO AJUSTE DE CURVA E INTERCONVERSÃO UTILIZANDO O <i>VISCOTOOL</i> .....</b>	<b>75</b>
<b>CAPÍTULO 4 MISTURAS ASFÁLTICAS INVESTIGADAS E PLANEJAMENTO DE ANÁLISE PELO MEF .....</b>	<b>80</b>
<b>4.1. DEFINIÇÃO DAS MISTURAS ASFÁLTICAS .....</b>	<b>80</b>
<b>4.2. DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA.....</b>	<b>83</b>
<b>4.3. ESPECIFICAÇÕES DO ENSAIO DE FUNÇÃO FLUÊNCIA .....</b>	<b>87</b>
<b>4.4. DESCRIÇÃO DA ANÁLISE COMPUTACIONAL DE PAVIMENTO TÍPICO PELO MEF .....</b>	<b>91</b>
<b>CAPÍTULO 5 MODELAGEM CONSTITUTIVA DE MISTURAS ASFÁLTICAS.....</b>	<b>96</b>
<b>5.1. DISCUSSÃO PRELIMINAR DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>96</b>
<b>5.2. MODELAGEM CONSTITUTIVA DA AREIA ASFALTO (AA).....</b>	<b>98</b>
<b>5.2.1. Resultados Experimentais – Areia Asfalto .....</b>	<b>98</b>
<b>5.2.2. Construção da Curva Mestre da Função Fluência <math>D(t)</math> – Areia Asfalto</b>	<b>101</b>
<b>5.2.3. Avaliação do Método da Colocação Clássico e por MQL para Obtenção da     Série de Prony da Função Fluência <math>D(t)</math> – Areia Asfalto .....</b>	<b>113</b>
<b>5.2.4. Ajuste Manual das Constantes de Tempo para Obtenção de Termos     Dependentes Positivos da Série de Prony – Areia Asfalto.....</b>	<b>123</b>
<b>5.2.5. Validação da Interconversão da Função Fluência <math>D(t)</math> para o Módulo de     Relaxação <math>E(t)</math> – Areia Asfalto.....</b>	<b>133</b>
<b>5.2.6. Avaliação da Técnica de MQNL para Obtenção da Série de Prony da     Função Fluência <math>D(t)</math> – Areia Asfalto .....</b>	<b>135</b>
<b>5.3. MODELAGEM CONSTITUTIVA DO CONCRETO ASFÁLTICO (CA) ...</b>	<b>144</b>
<b>5.3.1. Resultados Experimentais – Concreto Asfáltico .....</b>	<b>144</b>
<b>5.3.2. Construção da Curva Mestre da Função Fluência <math>D(t)</math> – Concreto     Asfáltico .....</b>	<b>146</b>
<b>5.3.3. Obtenção da Série de Prony da Função Fluência <math>D(t)</math> e Interconversão     para o Módulo de Relaxação <math>E(t)</math> – Concreto Asfáltico .....</b>	<b>148</b>
<b>5.3.4. Validação da Interconversão da Função Fluência <math>D(t)</math> para o Módulo de     Relaxação <math>E(t)</math> – Concreto Asfáltico .....</b>	<b>153</b>
<b>5.4. RESULTADOS DA ANÁLISE COMPUTACIONAL DE PAVIMENTO TÍPICO PELO MEF .....</b>	<b>155</b>
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>163</b>
<b>6.1. CONCLUSÕES.....</b>	<b>163</b>

<b>6.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>166</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>169</b>
<b>APÊNDICE: DEDUÇÃO DA INTERCONVERSÃO ANALÍTICA ENTRE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS NO DOMÍNIO DO TEMPO .....</b>	<b>176</b>
<b>A.1. OBTENÇÃO DA FUNÇÃO FLUÊNCIA <math>D(t)</math> A PARTIR DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO <math>E(t)</math> .....</b>	<b>177</b>
<b>A.2. OBTENÇÃO DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO <math>E(t)</math> A PARTIR DA FUNÇÃO FLUÊNCIA <math>D(t)</math> .....</b>	<b>184</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1:</b> Esquema de análise mecânica de pavimentos asfálticos.....	3
<b>Figura 2.1:</b> Representação esquemática dos componentes da deformação total de um material viscoelastoplástico. ....	13
<b>Figura 2.2:</b> Comportamento tensão-deformação para sólidos elásticos. ....	15
<b>Figura 2.3:</b> Comportamento tensão-deformação para líquidos viscosos. ....	16
<b>Figura 2.4:</b> Comportamento tensão-deformação para materiais viscoelásticos. ....	17
<b>Figura 2.5:</b> Representação esquemática de uma cadeia flexível de polímero de um material viscoelástico.....	18
<b>Figura 2.6:</b> Propriedades viscoelásticas fundamentais no domínio do tempo – Módulo de Relaxação $E(t)$ e Função Fluência $D(t)$ . ....	21
<b>Figura 2.7:</b> Tipos de conexões poliméricas de rede ( <i>coupling entanglement</i> ) para explicação do platô final das propriedades viscoelásticas. ....	22
<b>Figura 2.8:</b> Carregamento real em um ensaio viscoelástico no domínio do tempo.....	24
<b>Figura 2.9:</b> Relação entre módulos no domínio do tempo com e sem interferência do trecho transiente $\Delta t_t$ . ....	26
<b>Figura 2.10:</b> Tensão e deformação harmônicas de ensaio no domínio da frequência. ..	27
<b>Figura 2.11:</b> Propriedades viscoelásticas fundamentais no domínio da frequência – Módulo Complexo $E^*(\omega)$ e Compliância Complexa $D^*(\omega)$ . ....	30
<b>Figura 2.12:</b> Esquema do ensaio de fluência e recuperação. ....	32
<b>Figura 2.13:</b> Ilustração do uso de leis de potência para representação da Função Fluência $D(t)$ de uma mistura asfáltica. ....	39
<b>Figura 2.14:</b> Efeito isolado de cada termo da série de Prony da Função Fluência $D(t)$ e composição de duas séries completas (7 e 3 termos). ....	42
<b>Figura 2.15:</b> Análogos mecânicos para representação de funções viscoelásticas no domínio do tempo pelo uso de séries de Prony. ....	43
<b>Figura 2.16:</b> Ajuste de curva pelo método da colocação simplificado com e sem pré-suavização dos dados experimentais.....	48
<b>Figura 2.17:</b> Escolha gráfica das constantes de tempo da série de Prony da função interconvertida. ....	56
<b>Figura 3.1:</b> Ambiente de desenvolvimento do <i>ViscoTool</i> . ....	65
<b>Figura 3.2:</b> Principais classes do programa de caracterização viscoelástica <i>ViscoTool</i> .67	67
<b>Figura 3.3:</b> Tela principal do programa de caracterização viscoelástica <i>ViscoTool</i> .....	70
<b>Figura 3.4:</b> Dados de entrada e visualização no <i>ViscoTool</i> . ....	71
<b>Figura 3.5:</b> Construção de curva mestra no <i>ViscoTool</i> . ....	72
<b>Figura 3.6:</b> Ajuste de curva por série de Prony no <i>ViscoTool</i> . ....	74

<b>Figura 3.7:</b> Validação do ajuste de curva e interconversão realizados pelo <i>ViscoTool</i> .	78
<b>Figura 4.1:</b> Composição granulométrica das misturas asfálticas.....	82
<b>Figura 4.2:</b> Distribuição do percentual de vazios no corpo de prova fabricado no compactador giratório.....	83
<b>Figura 4.3:</b> Dimensões dos corpos de prova recomendadas por KIM (2006). .....	85
<b>Figura 4.4:</b> Posicionamento lateral dos LVDTs nos corpos de prova. ....	86
<b>Figura 4.5:</b> Máquina UTM-25 para ensaio de Função Fluência.....	88
<b>Figura 4.6:</b> Tipos de fixação de LVDTs nos corpos de prova de misturas asfálticas....	91
<b>Figura 4.7:</b> Malha de Elementos Finitos para modelo axissimétrico de estrutura típica de pavimento asfáltico. ....	93
<b>Figura 4.8:</b> Duração dos pulsos de carga e velocidades correspondentes. ....	95
<b>Figura 5.1:</b> Exemplos de resultados experimentais obtidos na UTM-25 para a Função Fluência $D(t)$ da AA. ....	97
<b>Figura 5.2:</b> Resultados experimentais da Função Fluência $D(t)$ da AA.....	99
<b>Figura 5.3:</b> Curva mestra da Função Fluência $D(t)$ da AA – equação de Arrhenius. ....	103
<b>Figura 5.4:</b> Curva mestra da Função Fluência $D(t)$ da AA – equação de WLF.....	106
<b>Figura 5.5:</b> Curva mestra da Função Fluência $D(t)$ da AA – método de WLF ( $C_1 = -8,86$ ; $C_2 = 101,6$ K) com correção da temperatura. ....	111
<b>Figura 5.6:</b> Curva mestra final da Função Fluência $D(t)$ da AA.....	112
<b>Figura 5.7:</b> Coeficiente de determinação ajustado $R_{ajustado}^2$ versus número de termos da série de Prony no método da colocação – Função Fluência $D(t)$ da AA.....	114
<b>Figura 5.8:</b> Método da colocação da Função Fluência $D(t)$ da AA – 3 termos.....	118
<b>Figura 5.9:</b> Método da colocação da Função Fluência $D(t)$ da AA – 7 termos.....	120
<b>Figura 5.10:</b> Método da colocação da Função Fluência $D(t)$ da AA – 8 termos.....	121
<b>Figura 5.11:</b> Método da colocação da Função Fluência $D(t)$ da AA – 9 termos.....	122
<b>Figura 5.12:</b> Função Fluência da AA $D(t)$ obtida pelo ajuste manual de $\tau_j$ (primeiro ajuste) e Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ .....	127
<b>Figura 5.13:</b> Escolha gráfica das constantes de tempo do Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ da AA (primeiro ajuste). ....	128
<b>Figura 5.14:</b> Função Fluência $D(t)$ da AA obtida pelo ajuste manual de $\tau_j$ (segundo ajuste) e Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ .....	131
<b>Figura 5.15:</b> Escolha gráfica das constantes de tempo do Módulo de Relaxação $E(t)$ da AA (segundo ajuste). ....	133
<b>Figura 5.16:</b> Avaliação da relação de reciprocidade entre propriedades viscoelásticas – AA.....	134
<b>Figura 5.17:</b> Espectro inicial utilizado no algoritmo <i>lsqcurvefit</i> baseado em MQNL. ....	137

<b>Figura 5.18:</b> Ajuste de curva da Função Fluência $D(t)$ da AA por MQNL com restrições – constantes de tempo iniciais $\tau_j^{(1)}$ .....	141
<b>Figura 5.19:</b> Ajuste de curva da Função Fluência $D(t)$ da AA por MQNL com restrições – constantes de tempo iniciais $\tau_j^{(2)}$ .....	142
<b>Figura 5.20:</b> Ajuste de curva da Função Fluência $D(t)$ da AA por MQNL com restrições – constantes de tempo iniciais $\tau_j^{(3)}$ .....	143
<b>Figura 5.21:</b> Resultados experimentais da Função Fluência $D(t)$ do CA. ....	145
<b>Figura 5.22:</b> Curva mestra final da Função Fluência $D(t)$ do CA. ....	147
<b>Figura 5.23:</b> $R_{ajustado}^2$ versus número de termos da série de Prony no método da colocação – Função Fluência $D(t)$ do CA. ....	149
<b>Figura 5.24:</b> Função Fluência do CA $D(t)$ obtida pelo ajuste manual de $\tau_j$ e Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ . ....	152
<b>Figura 5.25:</b> Escolha gráfica das constantes de tempo do Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ do CA. ....	153
<b>Figura 5.26:</b> Avaliação da relação de reciprocidade entre propriedades viscoelásticas – CA. ....	154
<b>Figura 5.27:</b> Séries de Prony do Módulo de Relaxação $E(t)$ utilizadas para análise computacional pelo MEF. ....	155
<b>Figura 5.28:</b> Deslocamento vertical no topo da camada de revestimento – $d_v^{(tr)}$ . ....	157
<b>Figura 5.29:</b> Tensão horizontal no fundo da camada de revestimento – $\sigma_x^{(fr)}$ .....	158
<b>Figura 5.30:</b> Tensão vertical no topo do subleito – $\sigma_y^{(ts)}$ .....	159
<b>Figura 5.31:</b> Variação dos valores máximos dos parâmetros mecânicos de projeto em função da velocidade do carregamento. ....	160

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 2.1:</b> Constantes de Arrhenius típicas de misturas asfálticas. ....	36
<b>Tabela 2.2:</b> Constantes de WLF típicas de sistemas poliméricos e misturas asfálticas. ....	37
<b>Tabela 3.1:</b> Módulo de Relaxação $E(t)$ e Função Fluência interconvertida $D(t)$ de mistura asfáltica – obtidos de KIM (2008). ....	76
<b>Tabela 3.2:</b> Função Fluência $D(t)$ e Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ de mistura asfáltica – obtidos pelo <i>ViscoTool</i> . ....	77
<b>Tabela 4.1:</b> Especificação da AA e CA. ....	81
<b>Tabela 4.2:</b> Tensões aplicadas nos corpos de prova para ensaio da Função Fluência. ...	89
<b>Tabela 4.3:</b> Propriedades mecânicas das camadas inferiores do pavimento asfáltico típico considerado. ....	94
<b>Tabela 4.4:</b> Duração dos pulsos de carga, discretização do tempo e velocidades correspondentes. ....	94
<b>Tabela 5.1:</b> Construção da curva mestra da Função Fluência $D(t)$ da AA – equação de Arrhenius. ....	105
<b>Tabela 5.2:</b> Construção da curva mestra da Função Fluência $Dt$ da AA – equação de WLF. ....	105
<b>Tabela 5.3:</b> Construção da curva mestra da Função Fluência $D(t)$ da AA – método de WLF com correção da temperatura. ....	110
<b>Tabela 5.4:</b> Fatores de deslocamento finais da Função Fluência $D(t)$ da AA. ....	113
<b>Tabela 5.5:</b> Função Fluência $D(t)$ da AA obtida pelo método da colocação (primeiro ajuste) e Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ . ....	125
<b>Tabela 5.6:</b> Função Fluência $D(t)$ da AA obtida pelo método da colocação (segundo ajuste) e Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ . ....	130
<b>Tabela 5.7:</b> Resumo dos Resultados do Ajuste de séries de Prony por MQNL. ....	138
<b>Tabela 5.8:</b> Fatores de deslocamento finais da Função Fluência $D(t)$ do CA. ....	147
<b>Tabela 5.9:</b> Função Fluência $D(t)$ do CA obtida pelo método da colocação e Módulo de Relaxação interconvertido $E(t)$ . ....	151

# SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

## SÍMBOLOS

$C$	constante da equação de Arrhenius
$C_1, C_2$	constantes empíricas da equação de WLF
$D_0$	termo independente da série de Prony da Função Fluência
$D(t)$	Função Fluência
$D^*(\omega)$	Compliância Complexa
$D'(\omega)$	Módulo de Armazenamento - parte real de $D^*(\omega)$
$D''(\omega)$	Módulo de Perda - parte imaginária de $D^*(\omega)$
$D_{\Delta t_t}(t)$	Função Fluência com interferência do trecho transiente $\Delta t_t$ , representado por lei de potência simplificada
$d_v^{(tr)}$	deslocamento vertical no topo do revestimento asfáltico
$E$	Módulo de Elasticidade
$E_\infty$	termo independente da série de Prony do Módulo de Relaxação
$E(t)$	Módulo de Relaxação
$E^*(\omega)$	Módulo Complexo
$E'(\omega)$	Módulo de Armazenamento - parte real de $E^*(\omega)$
$E''(\omega)$	Módulo de Perda - parte imaginária de $E^*(\omega)$
$E_{\Delta t_t}(t)$	Módulo de Relaxação com interferência do trecho transiente $\Delta t_t$ , representado por lei de potência simplificada
$M$	número de pontos medidos em ensaio experimental
$N$	número de termos da série de Prony
$R_D$	razão entre a Função Fluência com interferência do trecho transiente $D_{\Delta t_t}(t)$ e sem interferência do trecho transiente $D(t)$
$R_E$	razão entre o Módulo de Relaxação com interferência do trecho transiente $E_{\Delta t_t}(t)$ e sem interferência do trecho transiente $E(t)$
$t_k$	tempo discreto
$t_r$	tempo reduzido
$t_R$	tempo adimensionalizado pelo período transiente $\Delta t_t$
$t_{R,corte}$	tempo de corte adimensionalizado pelo período transiente $\Delta t_t$ a partir do qual o efeito transiente é desprezível
$\Delta t_t$	duração do carregamento transiente em ensaio de fluência ou relaxação ( <i>ramp tests</i> )

$T_R$  temperatura de referência

### Letras gregas

$\alpha_T$	fator de deslocamento horizontal
$\gamma$	deformação cisalhante
$\delta$	ângulo de fase de ensaio harmônico
$\varepsilon$	deformação normal (axial, longitudinal)
$\varepsilon_0$	deformação aplicada em ensaio de relaxação
$\varepsilon_m$	deformação máxima (amplitude) em ensaio harmônico
$\varepsilon^e$	deformação elástica
$\varepsilon^{ve}$	deformação viscoelástica
$\varepsilon^p$	deformação plástica
$\varepsilon^{vp}$	deformação viscoplástica
$\eta$	viscosidade dinâmica de Newton
$\rho_i$	constantes de tempo da série de Prony do Módulo de Relaxação
$\sigma$	tensão normal (axial, longitudinal)
$\sigma_0$	tensão aplicada em ensaio de fluência
$\sigma_m$	tensão máxima (amplitude) em ensaio harmônico
$\sigma_x^{(fr)}$	tensão horizontal no fundo da camada de revestimento asfáltico
$\sigma_y^{(ts)}$	tensão vertical no topo do subleito
$\tau$	tensão cisalhante, ou variável <i>dummy</i> de integração no tempo
$\tau_j$	constantes de tempo da série de Prony da Função Fluência
$\omega$	freqüência angular de ensaio harmônico

### Tensores, Matrizes e Vetores

$\sigma_{ij}$	tensor de tensões
$C_{ijkl}$	tensor de quarta ordem da relação constitutiva linear, lei de Hooke
$\varepsilon_{kl}$	tensor de deformações
<b>B</b>	matriz de funções de interpolação que relacionam deformações e deslocamentos
$\sigma^k$	vetor de tensões no tempo discreto $t_k$
$\Delta\sigma^k$	vetor do incremento de tensões entre tempos $t_k$ e $t_{k+1}$
$\Delta\hat{\sigma}^k$	vetor do incremento de tensões – componente recursiva

$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^k$	vetor do incremento de deformações entre tempos $t_k$ e $t_{k+1}$
$\Delta \mathbf{u}^k$	vetor do incremento de deslocamento entre tempos $t_k$ e $t_{k+1}$
$\mathbf{S}_i^k$	vetor recursivo entre tempos $t_k$ e $t_{k+1}$ para $i$ -ésimo termo da série de Prony
$\mathbf{f}^{k+1}$	vetor local de forças externas no tempo $t_{k+1}$

## NOMENCLATURA

$\dot{a}$	taxa temporal da grandeza $a$
$a\{b\}$	grandeza resultante $a$ devido ao histórico da grandeza $b$
$\bar{f}(s)$	transformada de Laplace de $f(t)$
$\tilde{f}(s)$	transformada de Carson de $f(t)$

## ABREVIações

AA	Areia Asfalto
CA	Concreto Asfáltico
CAP	Cimento Asfáltico de Petróleo
DNMA	Diâmetro Nominal Máximo do Agregado
EVR	Elemento de Volume Representativo
LVDTs	<i>Linear Variable Differential Transformers</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MQL	Mínimos Quadrados Linear
MQNL	Mínimos Quadrados Não Linear
PSTT	Princípio da Superposição Tempo Temperatura
POO	Programação Orientada a Objetos
UML	<i>Unified Modeling Language</i>
UTM	<i>Universal Testing Machine</i>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Os investimentos brasileiros em infraestrutura de transportes têm sido historicamente aplicados no modal rodoviário. O boletim estatístico da Confederação Nacional do Transporte (CNT, 2009) mostra um acentuado desequilíbrio da matriz de transportes brasileira, pois existem no país aproximadamente 29.000 km de vias navegáveis, 30.000 km de ferrovias, em contraste com uma malha rodoviária de 1.600.000 km. Apesar desta histórica priorização do modal rodoviário por parte do governo, existem ainda muitas melhorias a serem implantadas para garantir um nível de serviço adequado ao transporte rodoviário. A pesquisa rodoviária mais recente realizada pela CNT (CNT, 2007) mostra que apenas 13% das rodovias são pavimentadas e, desse percentual, avalia-se que 74% se encontram com o pavimento em estado regular, ruim ou péssimo. Para modificar o quadro atual das rodovias nacionais, será necessário um investimento de cerca de 23,4 bilhões de reais para recuperação de pavimentos e mais 1,3 bilhões de reais por ano para adequada conservação e manutenção.

Paralelamente aos investimentos necessários, é importante também o desenvolvimento de técnicas mais realistas de projeto, de análise mecânica de tensões e deformações, e de construção e reabilitação de pavimentos, que resultem em uma maior confiabilidade na qualidade destes pavimentos. Particularmente relativo ao desenvolvimento da análise mecânica de tensões e deformações mais próxima da realidade, a comunidade técnico-científica brasileira de infraestrutura de transportes deve realizar uma avaliação mecânico-constitutiva minuciosa dos diferentes materiais de pavimentação. Dentre estes materiais, merece destaque o Concreto Asfáltico (CA), por tratar-se da mistura asfáltica que constitui a camada superior do pavimento das principais rodovias nacionais, sendo, portanto, diretamente exposto a solicitações mecânicas originadas pelo tráfego e condições climáticas.

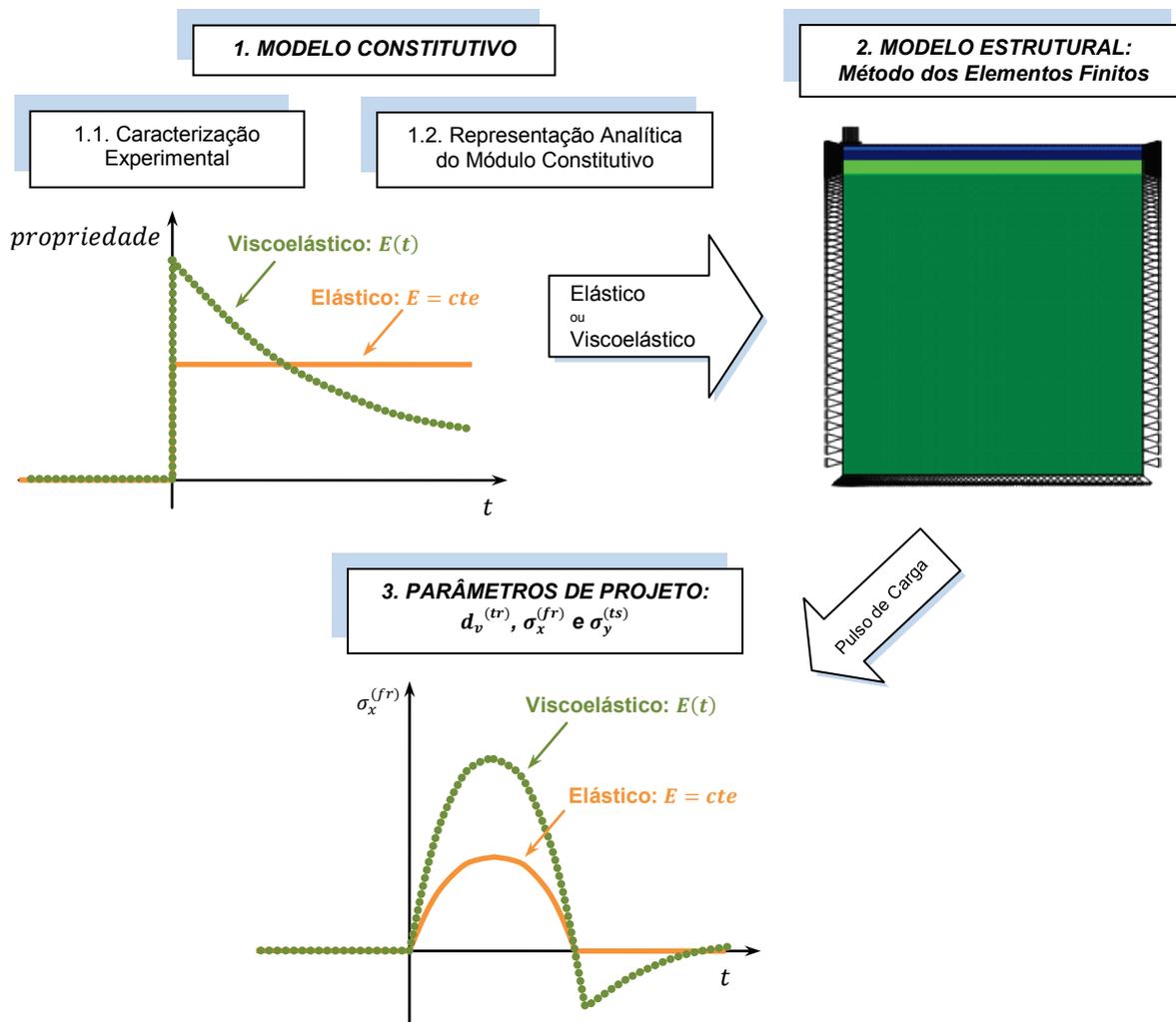
No Brasil, é comum o desenvolvimento de análises de tensões e deformações considerando o comportamento mecânico-constitutivo das misturas asfálticas, entre elas o Concreto Asfáltico, como do tipo elástico linear. Muito embora o modelo constitutivo

elástico linear seja adequado para uma gama ampla de materiais de construção civil – como o concreto estrutural solicitado ao longo da vida útil de edifícios, pontes e barragens – para a mistura asfáltica em particular, este modelo não é adequado. Uma mistura asfáltica apresenta um comportamento constitutivo bastante complexo que, do ponto de vista mais abrangente, pode ser melhor representado por um modelo viscoelastoplástico (TASHMAN, 2003; DESSOUKY, 2005; KIM, 2006). Ao considerar um modelo viscoelastoplástico, a deformação total que a mistura asfáltica é submetida pode ser separada em termos recuperáveis (elástico e viscoelástico) e não recuperáveis (plástico e viscoplástico).

Considerando somente a parte recuperável da deformação total, uma mistura asfáltica apresenta um comportamento dependente do tempo e da taxa temporal de aplicação do carregamento (ROBERTS *et al.*, 1996; LEE e KIM, 1998; MOMM, 2001; HUANG, 2004; FINEP/PETROBRAS, 2008). A implicação prática do comportamento dependente do tempo de uma mistura asfáltica é que o efeito mecânico causado em uma rodovia por um veículo com baixa velocidade (elevado tempo de carregamento) é consideravelmente diferente do efeito resultante de um veículo com alta velocidade (reduzido tempo de carregamento). Uma alternativa viável para a modelagem da parcela recuperável da deformação de uma mistura asfáltica (e demais materiais asfálticos como ligante e mástiques) é a teoria da viscoelasticidade. Alguns trabalhos nacionais têm apontado para a adequabilidade da teoria da viscoelasticidade na caracterização de materiais asfálticos para pequenas deformações (SOUZA, 2005; EVANGELISTA JR., 2006; MEDEIROS JR., 2006; THEISEN, 2006; FINEP/PETROBRAS, 2008). A teoria da viscoelasticidade considera o material em um estado de transição entre sólido (elástico) e líquido (viscoso), apresentando respostas dependentes do carregamento (comportamento elástico) e da taxa temporal de aplicação deste carregamento (comportamento viscoso) (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERLY, 1982; LAKES, 1998).

A Figura 1.1 compara o processo de obtenção dos parâmetros mecânicos comumente analisados para dimensionamento de pavimentos,  $d_v^{(tr)}$ ,  $\sigma_x^{(fr)}$  e  $\sigma_y^{(ts)}$ , para as abordagens elástica linear e viscoelástica. O símbolo  $d_v^{(tr)}$  representa o deslocamento vertical no topo da camada de revestimento constituída por uma mistura

asfáltica. A tensão  $\sigma_x^{(fr)}$  representa a tensão horizontal no fundo da camada de revestimento e  $\sigma_y^{(ts)}$  denota a tensão vertical no topo do subleito.



**Figura 1.1:** Esquema de análise mecânica de pavimentos asfálticos.

Inicialmente é montado um modelo constitutivo para representar o comportamento mecânico do material (etapa 1). Para tanto, é realizada inicialmente uma caracterização experimental de um módulo que relaciona as tensões resultantes com as deformações impostas na mistura asfáltica (etapa 1.1). Para o modelo clássico elástico linear este módulo não é função do tempo de carregamento, assumindo um valor constante conhecido como Módulo de Elasticidade  $E$ , ou ainda Módulo de Resiliência (THEISEN, 2006; BERNUCCI *et al.*, 2007). Por sua vez, o modelo viscoelástico considera um módulo que exibe claramente uma dependência com o tempo de aplicação

do carregamento, sendo denominado Módulo de Relaxação  $E(t)$ . Este último módulo é mais adequado para a descrição do comportamento constitutivo da mistura asfáltica que o modelo elástico linear clássico, uma vez que as observações experimentais do comportamento mecânico de misturas, para pequenas deformações, se ajustam bem ao modelo viscoelástico.

Após a obtenção dos dados experimentais, é escolhida uma equação analítica (função matemática) para representar o módulo constitutivo (etapa 1.2) que será posteriormente inserido no modelo numérico de análise de tensões e deformações (etapa 2). Para o caso elástico comumente adotado na análise clássica de tensões em pavimentos, o módulo constitutivo é simplesmente representado por uma constante  $E = cte$ . Por sua vez, o modelo viscoelástico é representado por uma série de exponenciais com diversos graus de liberdade, denominada série de Prony (PARK e SCHAPERLY, 1999; PARK e KIM, 2001; SOUZA, 2005; EVANGELISTA JR., 2006; SOUSA e SOARES, 2007).

Superada a etapa 1.2 de representação analítica do módulo constitutivo, é empregado algum modelo estrutural para o cálculo de tensões e deformação (etapa 2), sendo o Método dos Elementos Finitos (MEF) o mais comumente usado devido a sua adequabilidade em incorporar os mais diversos modelos constitutivos, sejam elásticos (lineares ou não), plásticos, viscoelásticos ou a combinação entre estes. No esquema da Figura 1.1 é definido um pulso de carga que representa a passagem de uma carga móvel (EVANGELISTA JR., 2006) e, após a solução das condições de contorno e carregamento pelo MEF (BATHE, 1996; COOK *et al.*, 2002), são obtidos os parâmetros de projeto  $d_v^{(tr)}$ ,  $\sigma_x^{(fr)}$  e  $\sigma_y^{(ts)}$  mostrados na etapa 3. Por brevidade, a Figura 1.1 está representando apenas a tensão horizontal no fundo do revestimento  $\sigma_x^{(fr)}$ , porém em uma análise real os outros dois parâmetros  $v^{(tr)}$  e  $\sigma_y^{(ts)}$  são também considerados. Nesta figura, ilustra-se a diferença sensível nos parâmetros de projeto ao se considerar o modelo constitutivo viscoelástico em vez de elástico. O pico de tensão horizontal de tração no fundo do revestimento  $\sigma_x^{(fr)}$  considerando o modelo viscoelástico pode ser bastante superior quando comparado ao advindo do modelo elástico linear (EVANGELISTA JR., 2006; SILVA *et al.*, 2008c). Além disso, o modelo viscoelástico prevê uma tensão horizontal de compressão na base do

revestimento  $\sigma_x^{(fr)}$  após a passagem do pulso de carga, ao passo que o modelo elástico não é capaz de prever tal resposta mecânica.

O trabalho de EVANGELISTA JR. (2006), posteriormente reforçado por SILVA *et al.* (2008c), indica ainda que, quando levado em consideração o comportamento constitutivo viscoelástico da mistura asfáltica, a tensão horizontal no fundo da camada de revestimento  $\sigma_x^{(fr)}$  considerando níveis de tráfego lento (velocidade de 8km/h, por exemplo) e rápido (velocidade de 130 km/h, por exemplo) difere por um fator de 200%. Estes estudos verificaram que o comportamento dependente do tempo da mistura asfáltica também induz respostas consideravelmente diferentes nos outros dois parâmetros mecânicos de um projeto de pavimento asfáltico, tensão vertical no topo do subleito  $\sigma_y^{(ts)}$  e deslocamento vertical no topo da camada de revestimento  $v^{(tr)}$ . Novamente, esta diferença expressiva nos valores dos parâmetros mecânicos de projeto para níveis distintos de velocidade de tráfego não é captada quando da consideração de comportamento elástico linear para a mistura asfáltica.

Sendo o comportamento elástico assumido pelo estado da prática da engenharia rodoviária, no Brasil e em diversos outros países (SOARES *et al.*, 2009), os projetos de estradas são então, não raro, baseados em parâmetros mecânicos destoantes da realidade, o que pode ser um importante fator contribuinte para a deterioração (dano) precoce das vias por fadiga e deformação permanente. Neste sentido, é importante o emprego de modelos constitutivos mais avançados para representar o comportamento constitutivo da mistura asfáltica, sob a expectativa de obtenção de parâmetros de projeto  $d_v^{(tr)}$ ,  $\sigma_x^{(fr)}$  e  $\sigma_y^{(ts)}$  mais realistas, elevando, dessa forma, a confiabilidade dos projetos dos pavimentos rodoviários.

Muito embora os estudos sobre a teoria da viscoelasticidade já se encontrem bem consolidados no campo teórico (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERY, 1982; LAKES, 1998) e alguns trabalhos tenham apontado para a adequabilidade desta formulação na descrição do comportamento constitutivo de misturas asfálticas (LEE e KIM, 1998; SOUZA, 2005; EVANGELISTA JR., 2006; MEDEIROS JR., 2006; THEISEN, 2006; ARAÚJO JR. *et al.*, 2009) existem algumas

dificuldades para o emprego da teoria da viscoelasticidade na análise de tensões e deformações em pavimentos asfálticos.

Uma primeira dificuldade é a escassez de resultados experimentais de laboratório para misturas asfálticas utilizadas em pavimentação a nível nacional. A nível internacional, cita-se como exemplo os resultados experimentais de módulos viscoelásticos de misturas asfálticas encontrados em GIBSON *et al.*, (2003) e em KIM (2009). Já a nível nacional, a escassez de resultados experimentais é notória, dado que a bibliografia existente sobre análise viscoelástica de misturas asfálticas se restringe praticamente aos trabalhos de TAIRA e FABBRI (2001), MEDEIROS JR. (2006), EVANGELISTA JR. (2006), THEYSEN (2006) e ARAÚJO JR. *et al.* (2009). É importante ressaltar que a disponibilidade de ensaios viscoelásticos nacionais é fundamental para melhorar a qualidade dos projetos brasileiros, uma vez que não existe garantia de comportamento constitutivo idêntico entre misturas nacionais e estrangeiras. Isto se deve ao fato de que o comportamento da mistura asfáltica é influenciado pelos mais diversos parâmetros, que abrangem o tipo de CAP utilizado, o método de compactação, o volume de vazios adotado, e a qualidade e granulometria dos agregados empregados para compor a mistura.

Uma segunda dificuldade é a obtenção da série de Prony para representar o comportamento constitutivo viscoelástico das misturas asfálticas. Embora se saiba que a série de Prony é computacionalmente eficiente para o emprego no MEF (TAYLOR *et al.*, 1970; ZOCHER, 1995; EVANGELISTA JR., 2006; SILVA *et al.*, 2008a; ARAÚJO JR. *et al.*, 2009), a obtenção da mesma por meio de um ajuste de curva (*curve fitting*) se caracteriza como um processo de difícil implementação em uma planilha eletrônica, uma vez que uma representação ao longo de todo o domínio do tempo exige muitos termos (graus de liberdades) desta série. Além disso, alguns termos da série de Prony são de natureza não linear, dificultando ainda mais a estimação de seus parâmetros. Esta dificuldade operacional de obtenção da série de Prony a partir dos dados experimentais das misturas asfálticas desestimula o uso da teoria da viscoelasticidade na análise de tensões e deformações e, conforme dito anteriormente, reduz a qualidade da estimativa dos parâmetros mecânicos  $d_v^{(tr)}$ ,  $\sigma_x^{(fr)}$  e  $\sigma_y^{(ts)}$  utilizados nos projetos de pavimentos.

Uma terceira dificuldade para o emprego da teoria da viscoelasticidade na análise de tensões e deformações de pavimentos asfálticos é a necessidade de interconversão entre propriedades viscoelásticas. Uma análise mais detalhada sobre a obtenção de um módulo viscoelástico, apontada na etapa 1.1 da Figura 1.1, indica que o Módulo de Relaxação  $E(t)$ , apesar de ser aquele utilizado na formulação do MEF, não é o parâmetro viscoelástico de mais fácil obtenção devido a restrições do equipamento utilizado e dificuldades operacionais. Sendo o Módulo de Relaxação  $E(t)$  um ensaio com aplicação súbita de uma deformação controlada, a tensão resultante nos instantes iniciais pode exceder ao limite de carga hidráulica do equipamento, resultando em dano na célula de carga deste equipamento. Devido a essa restrição, geralmente realiza-se um ensaio alternativo com aplicação súbita de uma tensão controlada, sendo este denominado ensaio de Função Fluência  $D(t)$ . Neste caso, a célula de carga do equipamento não é prejudicada, uma vez que se tem o controle do nível de tensão aplicado, que deve ser baixo para garantir a região de linearidade do comportamento viscoelástico da mistura (SCHAPERLY, 1982).

De posse de resultados experimentais originados a partir de um ensaio de Função Fluência  $D(t)$  realiza-se então uma interconversão para obter o Módulo de Relaxação  $E(t)$ , contornando assim, as dificuldades citadas no parágrafo anterior relativas ao ensaio de  $E(t)$  (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERLY, 1982; PARK e SCHAPERLY, 1999). Da mesma forma que o ajuste de curva (*curve fitting*) da série de Prony citado no parágrafo anterior, a técnica de interconversão da Função Fluência  $D(t)$  para viabilizar a obtenção do Módulo de Relaxação  $E(t)$  apresenta dificuldades de implementação computacional em uma planilha eletrônica devido à grande quantidade de variáveis envolvidas e procedimento matemático não trivial.

## 1.1. PROBLEMA DE PESQUISA

Apesar da grande potencialidade da teoria da viscoelasticidade para melhoria na predição dos parâmetros mecânicos de projeto de rodovias ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $d_v$ ), dificuldades relacionadas à disponibilização de dados experimentais do comportamento constitutivo de misturas asfálticas, ao emprego da série de Prony na modelagem matemática dos dados experimentais, e ao processo de interconversão entre propriedades viscoelásticas, dificultam o uso imediato da teoria da viscoelasticidade. Por consequência, estas dificuldades desencorajam a disseminação da teoria da viscoelasticidade na caracterização constitutiva de misturas asfálticas.

Como o intuito de reduzir a escassez de resultados experimentais das funções constitutivas viscoelásticas de misturas asfálticas nacionais se faz necessário realizar tais ensaios. Além disso, as dificuldades de manipulação dos dados experimentais obtidos e de implementação em planilha eletrônica motivam o desenvolvimento de um programa computacional específico que facilite a obtenção de séries de Prony do Módulo de Relaxação  $E(t)$  e Função Fluência  $D(t)$ , bem como a interconversão entre estes módulos viscoelásticos.

Dessa forma, o presente trabalho de pesquisa se propõe a realizar uma caracterização constitutiva experimental da Função Fluência  $D(t)$  bem como disponibilizar um programa computacional que automatize o processo de ajuste de curva (*curve fitting*) dos dados experimentais. Este programa computacional desenvolvido especificamente para modelagem constitutiva viscoelástica incorpora ainda o procedimento de interconversão entre as duas propriedades viscoelásticas no domínio do tempo a partir da representação de suas respectivas séries de Prony. Espera-se que este trabalho possa então facilitar o uso da teoria da viscoelasticidade linear contribuindo para a disseminação desta teoria na descrição do comportamento constitutivo de misturas asfálticas, elevando a qualidade de projetos de misturas e dimensionamento de pavimentos asfálticos.

## 1.2. OBJETIVOS

### 1.2.1. Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho de pesquisa é facilitar a operacionalização da caracterização viscoelástica de materiais asfálticos por meio do desenvolvimento de um programa computacional que seja capaz de realizar ajuste de curva especializado para séries de Prony, bem como interconverter as propriedades viscoelásticas fundamentais no domínio do tempo. Para ilustrar o uso deste programa computacional especificamente desenvolvido para caracterização viscoelástica, serão mostrados resultados experimentais de módulos viscoelásticos de duas misturas asfálticas brasileiras típicas: Areia Asfalto (AA) e Concreto Asfáltico (CA). Estes resultados experimentais visam contribuir para a redução da escassez de resultados experimentais nacionais no que diz respeito à caracterização constitutiva viscoelástica de materiais asfálticos.

### 1.2.2. Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral, este trabalho de pesquisa tem como objetivos específicos:

- a) fornecer um programa computacional que permite a caracterização viscoelástica completa (ajuste de curva e interconversão) das funções viscoelásticas no domínio do tempo por meio de séries de Prony;
- b) realizar caracterização experimental viscoelástica de misturas asfálticas do tipo AA e CA de uso comum no Brasil por meio do ensaio de Função Fluência  $D(t)$ ;
- c) avaliar técnicas mais comuns de ajuste de curva (*curve fitting*) de séries de Prony da Função Fluência  $D(t)$ , bem como estimar o Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  para as duas misturas asfálticas (AA e CA);

- d) avaliar o efeito do modelo viscoelástico linear na previsão dos parâmetros mecânicos de projeto ( $d_v^{(tr)}$ ,  $\sigma_x^{(fr)}$  e  $\sigma_y^{(ts)}$ ) de uma estrutura típica de pavimento asfáltico.

### 1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO

O conteúdo restante do presente trabalho está organizado da seguinte forma:

No CAPÍTULO 2 é realizada uma revisão bibliográfica dos principais tópicos necessários ao desenvolvimento do presente trabalho. São abordados os conceitos da teoria da viscoelasticidade linear, seguido pelos modelos analíticos disponíveis para representação das funções viscoelásticas, dando ênfase as séries de Prony. Na sequência são discutidos os tipos de ajuste de curva possíveis para obtenção da série de Prony bem como os resultados finais do procedimento de interconversão analítica entre as propriedades viscoelásticas.

No CAPÍTULO 3 é descrito o programa computacional *ViscoTool* especificamente desenvolvido para realizar tanto o ajuste de curva de séries de Prony a partir dos dados experimentais, como a interconversão entre estas propriedades viscoelásticas. Neste capítulo são descritas as classes gráficas e numéricas desenvolvidas no ambiente de programação orientado a objetos escolhido: a linguagem de programação C++. São descritas ainda as funcionalidades do programa *ViscoTool* do ponto de vista do usuário, bem como enumeradas melhorias a serem implantadas em versões futuras do programa computacional.

No CAPÍTULO 4 são descritos os materiais utilizados para fabricação dos corpos de prova de AA e CA. São mostrados ainda detalhes sobre a geometria ideal de corpos de prova para realização dos ensaios, configuração dos transdutores que medem a deformação no equipamento UTM (*Universal Testing Machine*) e nível de tensão aplicado sob a expectativa de regime de viscoelasticidade linear.

No CAPÍTULO 5 são discutidos os resultados experimentais do ensaio de Função Fluência  $D(t)$  para os dois tipos de misturas asfálticas contempladas neste

trabalho, AA e CA. São mostrados detalhes da construção de suas respectivas curvas mestras, seguidos dos métodos de ajuste de curva por colocação e mínimos quadrados não linear. Na sequência são mostrados os resultados finais da interconversão para obtenção do Módulo de Relaxação  $E(t)$  de ambas as misturas. Por fim, são mostrados os resultados da modelagem computacional pelo MEF de um pavimento típico considerando a camada de revestimento com comportamento viscoelástico linear.

No CAPÍTULO 6 são mostradas as conclusões do presente trabalho e sugestões para o avanço na caracterização viscoelástica de misturas asfálticas no tocante ao programa computacional *ViscoTool*, bem como nos procedimentos operacionais de experimentos de caracterização constitutiva viscoelástica no domínio do tempo.

## CAPÍTULO 2

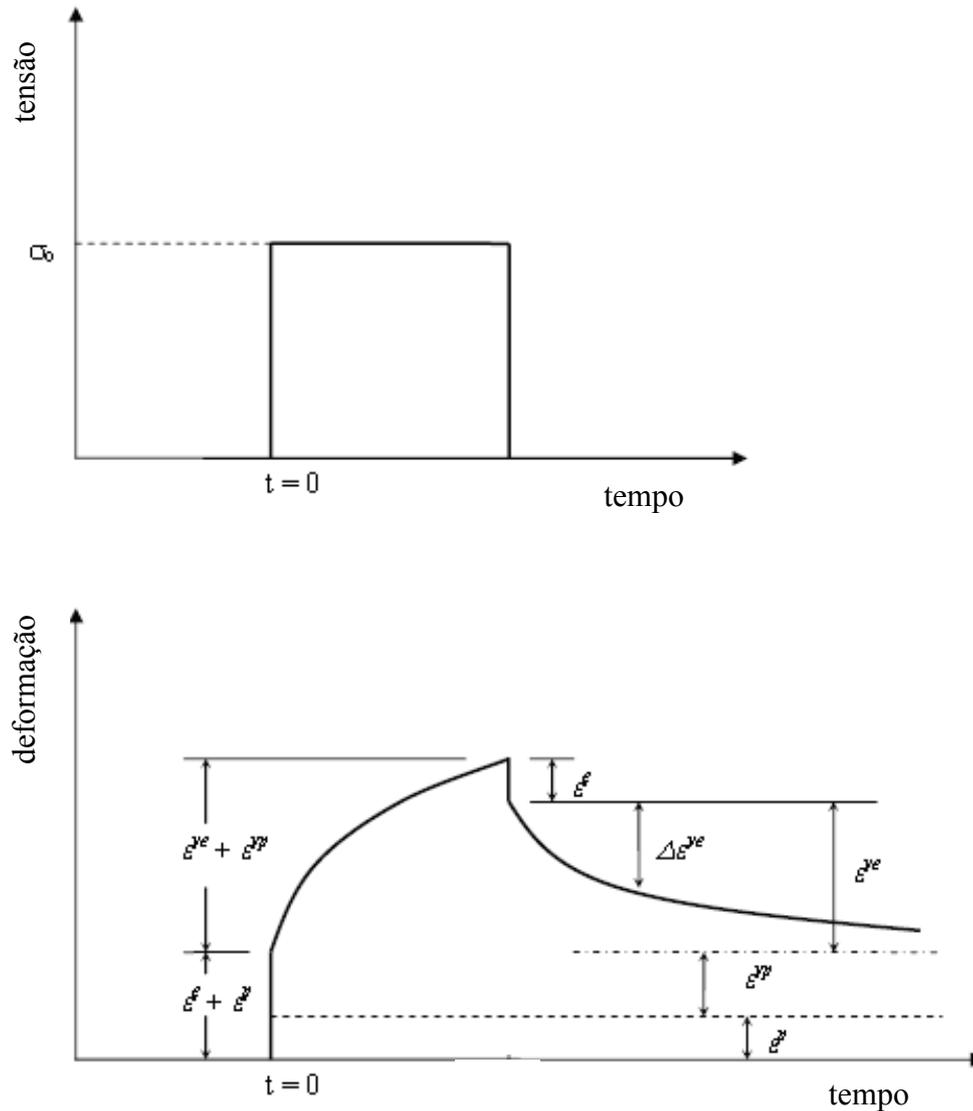
### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica dos principais tópicos referentes ao desenvolvimento do presente trabalho de pesquisa. Inicialmente são mostrados os modelos usualmente empregados para caracterização constitutiva de misturas asfálticas dando ênfase ao modelo viscoelástico linear, tema central do trabalho. Na sequência, são mostradas as equações analíticas mais comumente utilizadas para representação das propriedades viscoelásticas fundamentais, seguido pela descrição das técnicas de ajuste de curva pelo método da colocação e por Mínimos Quadrados Não Linear (MQNL). Logo após, é descrito o procedimento de interconversão analítica de propriedades viscoelásticas no domínio do tempo e da frequência. Ao final, é mostrada a formulação do modelo constitutivo viscoelástico linear pelo MEF, seguido por uma breve descrição de técnicas mais avançadas de modelagem constitutiva/computacional de misturas asfálticas.

#### 2.1. MODELOS CONSTITUTIVOS PARA MISTURAS ASFÁLTICAS

As misturas asfálticas apresentam comportamento mecânico complexo. Diferentemente do concreto de cimento Portland – que durante sua vida útil é representado, sem grandes erros, por um modelo elástico linear – as misturas asfálticas necessitam de modelos constitutivos mais gerais para resultar em uma representação condizente com a realidade observada em campo. Neste sentido, alguns autores têm reportado o modelo viscoelastoplástico como representativo de misturas asfálticas (GIBSON *et al.*, 2003; TASHMAN, 2003; DESSOUKY, 2005; KIM, 2009).

A Figura 2.1 representa esquematicamente os tipos de deformações desenvolvidas para o modelo viscoelastoplástico em um ensaio de fluência e recuperação (*creep and recovery test*).



**Figura 2.1:** Representação esquemática dos componentes da deformação total de um material viscoelastoplástico.

Fonte: TASHMAN (2003)

A deformação total é separada em quatro componentes: uma deformação elástica  $\epsilon^e$ , que é recuperável e independente do histórico de tensão aplicado; uma deformação viscoelástica  $\epsilon^{ve}$ , que é recuperável e dependente do histórico de tensão aplicado; uma deformação plástica  $\epsilon^p$ , que é irrecuperável e independente do histórico de tensão aplicado; e uma deformação viscoplástica  $\epsilon^{vp}$ , que é irrecuperável e dependente de histórico de tensão aplicado. No modelo viscoelastoplástico, a resposta (deformação total) instantânea devido à aplicação súbita da tensão  $\sigma_0$  inclui as componentes elástica ( $\epsilon^e$ ) e plástica ( $\epsilon^p$ ). Por sua vez, a resposta (deformação total) dependente do tempo

durante o carregamento inclui as componentes viscoelástica ( $\varepsilon^{ve}$ ) e viscoplástica ( $\varepsilon^{vp}$ ) (TASHMAN, 2003; DESSOUKY, 2005; KIM, 2009). Após a remoção do carregamento, a resposta instantânea inclui somente a resposta elástica e a resposta dependente do tempo após o carregamento é devida somente à parcela viscoelástica. Após longos tempos de observação na fase de descarregamento, a deformação do material tende a uma assíntota horizontal que é a soma das componentes plástica e viscoplástica, que são irrecuperáveis (TASHMAN, 2003; DESSOUKY, 2005; KIM, 2009).

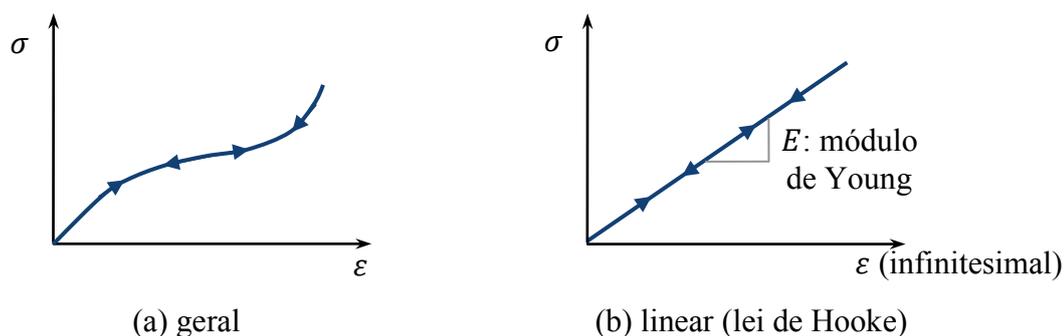
Entretanto, devido a dificuldades relativas à compreensão, procedimentos experimentais e computacionais para o caso de modelos mais gerais, tal como o modelo viscoelastoplástico, é prática comum a adoção de simplificações que resultem em modelos constitutivos mais restritos e, portanto, de mais fácil entendimento teórico e comprovação experimental. Após a total compreensão destes modelos mais restritos, surge então a necessidade de integrar tais modelos para resultar em uma teoria abrangente que representa adequadamente o comportamento mecânico-constitutivo das misturas asfálticas, como, por exemplo, o modelo viscoelastoplástico descrito por KIM (2008) e/ou modelos de dano contidos em SOUZA (2005) e TEIXEIRA *et al.* (2007).

Devido à necessidade de simplificação do modelo constitutivo para misturas asfálticas citada no parágrafo anterior, é comum a adoção da hipótese de pequeno nível de tensão aplicada nos corpos de prova de misturas asfálticas. Neste caso, o modelo viscoelastoplástico é reduzido ao modelo viscoelástico, uma vez que as deformações plástica ( $\varepsilon^p$ ) e viscoplástica ( $\varepsilon^{vp}$ ) são desprezíveis para um nível baixo de tensão. Nos estudos de caracterização constitutiva por modelos mais restritos, o modelo viscoelástico deve ser investigado prioritariamente frente aos modelos plástico e viscoplástico, uma vez que os últimos se desenvolvem somente após um elevado número de ciclos de carga durante a vida útil da mistura (KIM, 2008, 2009). Ao se estudar os modelos de deformações não recuperáveis (plástico e viscoplástico), as deformações viscoelásticas necessariamente também estarão presentes, justificando, dessa maneira, a necessidade de investigação primeira do modelo viscoelástico. No item a seguir, o modelo viscoelástico é discutido com maiores detalhes uma vez que este será o modelo constitutivo assumido durante o desenvolvimento do presente trabalho de

pesquisa. Para simplificar a notação, a partir deste ponto, as deformações e tensões serão sempre referidas ao modelo viscoelástico.

## 2.2. NATUREZA DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO

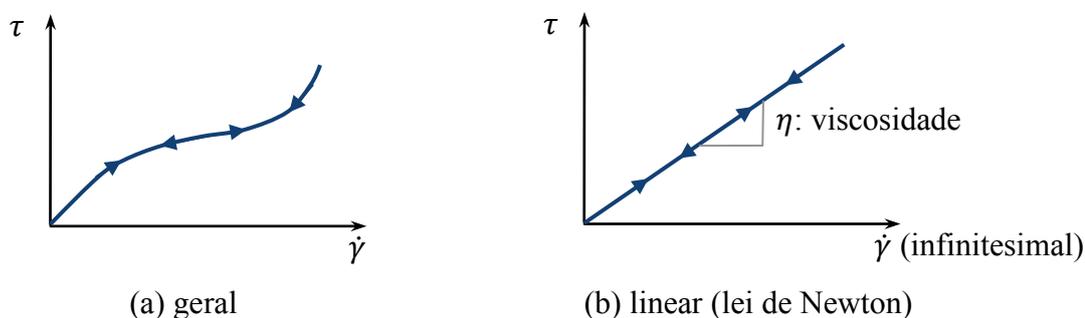
A teoria clássica da elasticidade trata das propriedades mecânicas dos sólidos elásticos, em que a tensão resultante é sempre proporcional à deformação aplicada, mas independente da taxa de deformação (FERRY, 1980; TIMOSHENKO e GOODIER, 1980). Uma implicação experimental da teoria da elasticidade é que ao descarregar a deformação axial  $\varepsilon$  inicialmente imposta em um corpo de prova, a tensão longitudinal  $\sigma$  seguirá o mesmo caminho da fase de carregamento, porém no sentido contrário. A Figura 2.2a esquematiza a idealização da teoria da elasticidade clássica com as setas indicando os sentidos de carregamento e descarregamento. Dessa forma, o valor corrente (atual) da tensão depende somente do valor corrente da deformação imposta (FERRY, 1980; TIMOSHENKO e GOODIER, 1980). Uma particularização frequentemente adotada para a maioria dos materiais utilizados na engenharia é que os deslocamentos são pequenos (deslocamentos infinitesimais) e, portanto, a proporcionalidade se manifesta de forma linear, obedecendo à lei de Hooke  $\sigma = E \varepsilon$  descrita na Figura 2.2b, sendo a constante de proporcionalidade  $E$  denominada módulo elástico ou módulo de Young (TIMOSHENKO e GOODIER, 1980; SCHAPERLY, 1982; VILLAÇA e GARCIA, 1998).



**Figura 2.2:** Comportamento tensão-deformação para sólidos elásticos.

Por outro lado, a teoria clássica da hidrodinâmica trata das propriedades dos líquidos viscosos em que a tensão cisalhante corrente  $\tau$  é sempre proporcional à taxa de

deformação cisalhante  $\dot{\gamma}$  aplicada no líquido no mesmo instante, mas independente da deformação cisalhante  $\gamma$  propriamente dita (FERRY, 1980; FINDLEY *et al.*, 1989; KIM, 2006), conforme ilustrado na Figura 2.3a. Restringindo esta lei constitutiva para o caso de pequenos deslocamentos e pequenas taxas de deformação, chega-se na lei de Newton da hidrodinâmica, que estabelece uma relação linear entre a tensão cisalhante corrente  $\tau$  e a taxa de deformação cisalhante corrente  $\dot{\gamma}$ . Dessa forma, a relação constitutiva de líquidos viscosos passa a ser  $\tau = \eta \dot{\gamma}$ , sendo  $\eta$  a viscosidade dinâmica de Newton (**ver** Figura 2.3b).



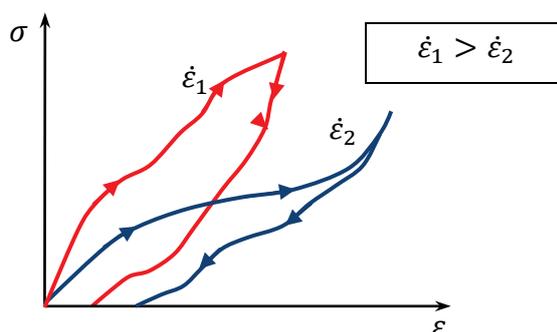
**Figura 2.3:** Comportamento tensão-deformação para líquidos viscosos.

No entanto, existe uma classe de materiais que, mesmo quando solicitados por deformações e taxas de deformação infinitesimais, apresentam comportamento consideravelmente destoante dos modelos clássicos mencionados acima. Estes materiais são ditos viscoelásticos e combinam características de sólido e de líquido ao mesmo tempo (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERY, 1982; KIM, 2009). Os materiais viscoelásticos abrangem uma grande quantidade de materiais de diferentes naturezas. Apenas para citar exemplos mais comuns de materiais que apresentam este comportamento de transição entre sólidos e líquidos, temos: (i) polímeros durante fase de processamento e conformação, (ii) materiais betuminosos em geral, (iii) domos de sal de formações geológicas e (iv) estruturas biológicas, tais como pele e tecidos animais.

Para estes materiais a aplicação de uma tensão longitudinal  $\sigma$  constante resulta em uma deformação continuamente crescente ao longo do tempo, sendo este fenômeno denominado fluência (*creep*). Se algum destes materiais for submetido a uma

deformação longitudinal  $\varepsilon$  constante, a tensão longitudinal  $\sigma$  requerida para mantê-lo neste nível de deformação constante irá continuamente diminuir ao longo do tempo, sendo este fenômeno conhecido por relaxação (*relaxation*) (FERRY, 1980; SCHAPERY, 1982). Um comportamento similar também pode se manifestar em materiais com aparência de líquidos. Neste caso, um material não totalmente líquido fluindo sob tensão cisalhante  $\tau$  constante pode armazenar parte da energia (tensão) aplicada, ao invés de dissipar parcialmente a energia aplicada na forma de calor como ocorre no caso de líquidos viscosos comuns (FERRY, 1980). Caso a tensão cisalhante  $\tau$  aplicada seja removida, parte da deformação cisalhante  $\gamma$  é então recuperada.

Do ponto de vista experimental, ao se aplicar um histórico de deformação longitudinal qualquer  $\{\varepsilon\}$  em um material viscoelástico, e, posteriormente, descarregar este histórico de deformação, será obtida uma curva geral esquematizada de acordo com a Figura 2.4.

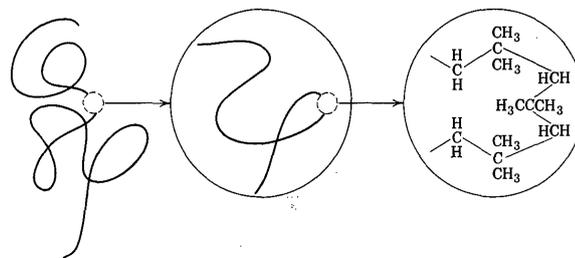


**Figura 2.4:** Comportamento tensão-deformação para materiais viscoelásticos.

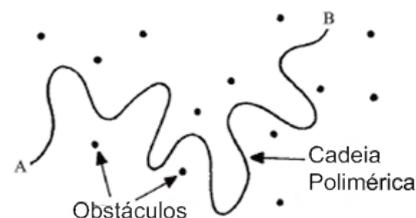
Nesta figura, os valores atuais da tensão longitudinal  $\sigma$  são diferentes entre os trechos de carregamento e de descarregamento. Observações experimentais desta natureza levaram pesquisadores a formular que a tensão corrente (atual)  $\sigma$  em materiais viscoelásticos depende não somente do valor corrente da deformação aplicada  $\varepsilon$ , e sim de todo o histórico de deformação aplicado  $\{\varepsilon\}$  (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERY, 1982). Em outras palavras, a tensão longitudinal corrente  $\sigma$  depende dos valores anteriores da deformação  $\varepsilon^{ant}$  e da taxa de deformação  $\dot{\varepsilon}^{ant}$  longitudinais, bem como dos valores atuais da deformação  $\varepsilon$  e da taxa de deformação  $\dot{\varepsilon}$  (KIM, 2006). Ainda observando a Figura 2.4, pode-se constatar que a representação típica de modelos

constitutivos em um gráfico  $\sigma$  versus  $\varepsilon$  é insuficiente, pois não torna explícito o histórico de deformações imposto. Portanto, para tornar explícito o histórico de deformação (ou tensão) imposto, faz-se necessário representar as relações constitutivas de materiais viscoelásticos ao longo do tempo por dois gráficos:  $\sigma$  versus  $t$  e  $\varepsilon$  versus  $t$  (SCHAPERLY, 1982; KIM, 2006).

Segundo FERRY (1980), os materiais viscoelásticos são formados por cadeias moleculares (poliméricas) que possuem extensão muito superior à escala atômica do arranjo cristalino bem definido de sólidos simples (comportamento elástico) e à escala molecular de líquidos simples (comportamento viscoso) e, por isso, apresentam um comportamento de transição entre líquidos e sólidos. A Figura 2.5a ilustra o conceito idealizado por FERRY (1980) de que um material viscoelástico é constituído por longas cadeias poliméricas com configuração espacial contorcida em diversas escalas. A Figura 2.5b mostra a interação desta molécula polimérica com suas moléculas vizinhas, que se constituem obstáculos que definirão o nível de fluência (ou relaxação) que o material irá desenvolver ao longo de ensaios macroscópicos. No item a seguir serão mostradas as propriedades fundamentais para caracterização de materiais viscoelásticos, bem como feitas considerações mais detalhadas sobre o arranjo polimérico destes materiais.



(a) cadeia polimérica em diferentes escalas



(b) obstáculos devido a cadeias poliméricas vizinhas

**Figura 2.5:** Representação esquemática de uma cadeia flexível de polímero de um material viscoelástico.

Fonte: FERRY (1980)

### 2.2.1. Propriedades Viscoelásticas Fundamentais

Para materiais no regime de viscoelasticidade linear as tensões (ou deformações) resultantes dependem de todo o histórico de carregamento (deformações ou tensões, respectivamente) e estas grandezas são relacionadas por meio de integrais de convolução (CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERY, 1982), também conhecidas por integrais hereditárias. Para o caso unidimensional as integrais de convolução podem ser expressas pelas Equações (2.1) e (2.2) a seguir.

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (2.1)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (2.2)$$

onde,

$\sigma(t)$  e  $\varepsilon(t)$ : tensão e deformação no tempo instantâneo  $t$ , respectivamente;

$E(t)$  e  $D(t)$ : Módulo de Relaxação e Função Fluência, respectivamente;

$\tau$ : variável *dummy* de integração com dimensão de tempo (*time like variable*);

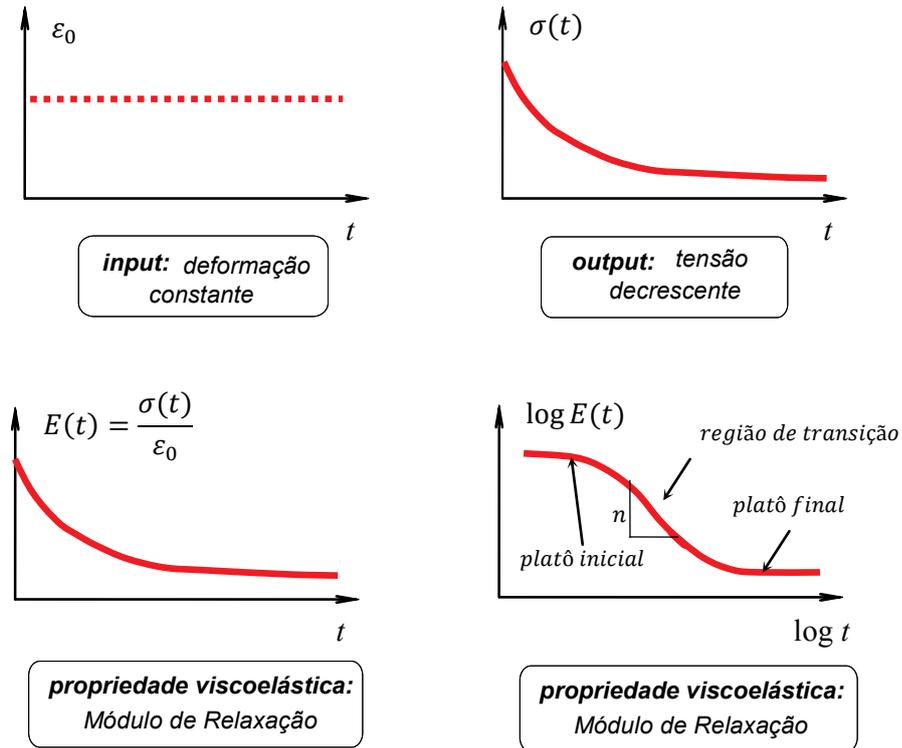
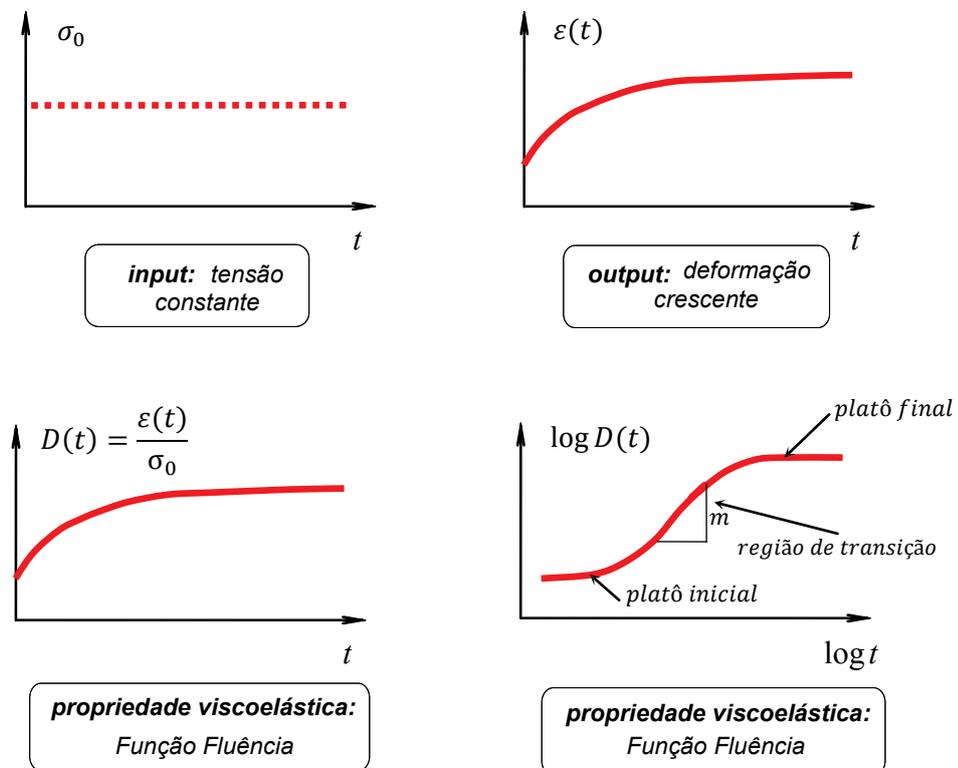
Por brevidade, não serão mostradas as deduções das integrais de convolução acima, que podem ser encontradas em SCHAPERY (1982), SOUZA (2005) e EVANGELISTA JR. (2006). Os parâmetros  $E(t)$  e  $D(t)$  são propriedades constitutivas fundamentais do material viscoelástico em questão e, quando utilizadas nas Equações (2.1) e (2.2), permitem avaliar a resposta mecânica para qualquer histórico de tensão ou deformação imposto (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERY, 1982; KIM, 2009). O primeiro parâmetro,  $E(t)$ , é denominado Módulo de Relaxação, ao passo que o segundo,  $D(t)$ , é conhecido por Função Fluência (ou Compliância). Diferentemente do módulo elástico usualmente empregado para análise de pavimentos asfálticos, o Módulo de Relaxação e a Função Fluência são funções do tempo de aplicação do carregamento e permitem a consideração do fator tempo nas análises computacionais de pavimentos asfálticos (HUANG, 2004; HOLANDA *et al.*, 2006). Para a obtenção destas propriedades constitutivas deve-se realizar um estudo experimental com aplicação de

um nível constante de uma grandeza (tensão ou deformação) e observação da evolução ao longo do tempo da segunda (deformação ou tensão, respectivamente) (FERRY, 1980; SCHAPERY, 1982; FINDLEY *et al.*, 1989; LAKES, 1998).

Conforme esquematizado na Figura 2.6a, o Módulo de Relaxação  $E(t)$  de um material viscoelástico é obtido aplicando-se neste material uma deformação constante (*input*)  $\varepsilon = \varepsilon_0$  e medindo-se as tensões resultantes (*output*) continuamente decrecentes ao longo do tempo  $\sigma(t)$ . Uma vez assegurada a hipótese de regime de viscoelasticidade linear, que será discutido no item 2.2.2 a seguir, o Módulo de Relaxação  $E(t)$  é definido pelo quociente  $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$ .

Para a Função Fluência  $D(t)$ , a Figura 2.6b mostra a aplicação de uma tensão constante (*input*)  $\sigma = \sigma_0$  no material viscoelástico e as deformações resultantes (*output*) continuamente crescentes ao longo do tempo  $\varepsilon(t)$  são medidas. A Função Fluência  $D(t)$  é então definida pelo quociente  $D(t) = \varepsilon(t) / \sigma_0$ .

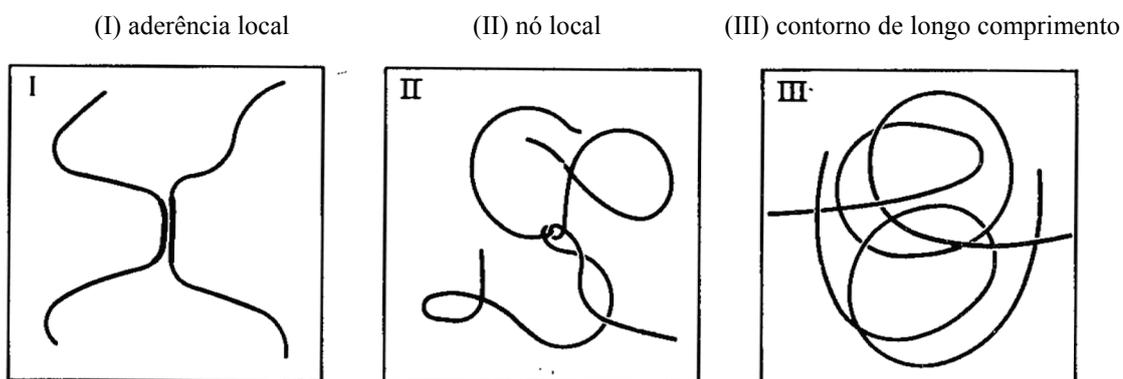
Os livros que abordam a teoria da viscoelasticidade (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERY, 1982; LAKES, 1998; KIM, 2006) ressaltam que as propriedades viscoelásticas  $E(t)$  e  $D(t)$  não são grandezas independentes, uma vez que mensuram a mesma propriedade intrínseca do material, que é o comportamento constitutivo viscoelástico. No entanto, estes autores destacam que as propriedades viscoelásticas fundamentais  $E(t)$  e  $D(t)$  não apresentam relação de reciprocidade perfeita, ou seja, uma não é simplesmente o inverso da outra. No item 2.5.1 é mostrado o procedimento analítico que permite interconverter as propriedades viscoelásticas, ou seja, obter uma propriedade viscoelástica de maneira indireta –  $E(t)$  ou  $D(t)$  – a partir da medição de uma segunda propriedade –  $D(t)$  ou  $E(t)$ , respectivamente.

(a) Módulo de Relaxação  $E(t)$ (b) Função Fluência  $D(t)$ 

**Figura 2.6:** Propriedades viscoelásticas fundamentais no domínio do tempo – Módulo de Relaxação  $E(t)$  e Função Fluência  $D(t)$ .

É interessante notar na Figura 2.6 que as propriedades viscoelásticas  $E(t)$  e  $D(t)$ , quando exibidas em um gráfico do tipo log-log (dois eixos em escala logarítmica), revelam um formato de “S”. Para o caso particular de misturas asfálticas, o platô inicial, também denominado estado vítreo do material, corresponde a intervalos de tempo bastante reduzidos, da ordem de  $10^{-4}$  a  $10^{-3}$  segundos. Após tempos de observação mais elevados, a parcela viscosa do material começa então a se pronunciar, resultando no trecho de transição. Este trecho de transição requer, dependendo do material, diversas décadas logarítmicas de tempo para a sua completa manifestação. Para o caso de materiais asfálticos, após um tempo de observação da ordem de  $10^4$  a  $10^5$  segundos a região de transição fica menos evidente, resultando em um trecho de curva que se aproxima de um platô final, também denominado *rubberlike behavior* (FERRY, 1980).

Para explicar o comportamento no trecho de platô final, pesquisadores idealizaram a existência de conexões entre as cadeias poliméricas que constituem o material viscoelástico (no inglês, estas conexões são denominadas *coupling entanglements*). Conforme esquematizado na Figura 2.7, FERRY (1980) classifica estes tipos de conexões em três grandes grupos, denominados “aderência local”, “nó local” e “contorno de longo comprimento”. A conexão polimérica do tipo “contorno de longo comprimento” é então aquela utilizada para justificar a existência de um platô final nas propriedades viscoelásticas fundamentais no domínio do tempo.



**Figura 2.7:** Tipos de conexões poliméricas de rede (*coupling entanglement*) para explicação do platô final das propriedades viscoelásticas.

Fonte: FERRY (1980)

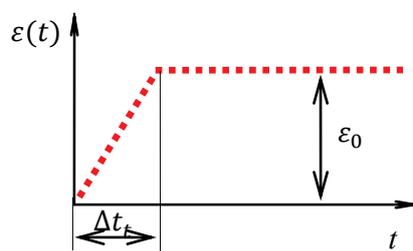
Outra característica importante do comportamento de materiais viscoelásticos é a grande variação da magnitude de suas propriedades constitutivas fundamentais,  $E(t)$  ou  $D(t)$ , para a região de transição. Para o caso particular de misturas asfálticas, estas propriedades podem variar de 1 a 4 décadas logarítmicas, sendo função de uma série de parâmetros tais como composição percentual e tipo de ligante asfáltico utilizado, composição granulométrica dos agregados e percentual de vazios (KIM, 2008, 2009). Para o caso de ligantes asfálticos (sem a presença de agregados) as propriedades viscoelásticas variam ainda mais, da ordem de 3 a 5 décadas logarítmicas (KIM, 2008).

Apesar da simplicidade conceitual das propriedades viscoelásticas Módulo de Relaxação  $E(t)$  e Função Fluência  $D(t)$ , existem dificuldades operacionais para obtenção das mesmas a partir de experimentos.

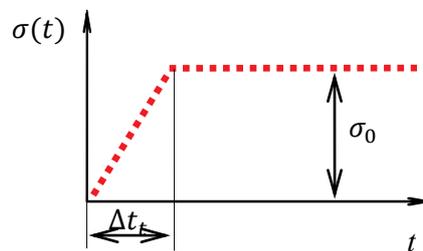
Uma primeira dificuldade refere-se à aplicação súbita de um nível de deformação constante  $\varepsilon_0$  para o caso de um ensaio de Módulo de Relaxação. O nível de deformação subitamente imposto  $\varepsilon_0$  geralmente resulta em níveis de tensão extremamente elevados para os instantes iniciais de tempo (KIM, 2006, 2008). As tensões elevadas resultantes nos instantes iniciais podem estar acima da capacidade de carga do equipamento, e, neste caso, haverá dificuldades de manter o nível de deformação imposto  $\varepsilon_0$ , violando o pressuposto do ensaio de relaxação ( $\varepsilon_0 = \text{cte}$ ). Além disso, o nível de tensão nos instantes iniciais poderá ser de tal magnitude que implique na quebra da célula de carga do equipamento de teste, resultando em prejuízos de ordem financeira e atrasos nos ensaios (KIM, 2006; MEDEIROS JR., 2006; SILVA *et al.*, 2008c). Devido a estas dificuldades, do ponto de vista experimental, a Função Fluência  $D(t)$  é preferível frente ao Módulo de Relaxação  $E(t)$ , por tratar-se de um ensaio com tensão controlada  $\sigma_0$ , que é de mais fácil estabilização e com baixo risco de quebra da célula de carga do equipamento de teste.

Outra dificuldade reportada na literatura (SCHAPERLY, 1982) é a impossibilidade de aplicação instantânea de alguma grandeza mecânica (tensão  $\sigma_0$  ou deformação  $\varepsilon_0$ ) em um material viscoelástico. Na realidade, o carregamento que o equipamento de teste é capaz de aplicar no material viscoelástico não é instantâneo, e sim apresenta um trecho transiente. A Figura 2.8 mostra o comportamento real da

aplicação súbita de uma tensão (ensaio de fluência) ou deformação (ensaio de relaxação). Como se pode perceber nesta figura, os níveis de tensão e deformação constantes só serão atingidos após um intervalo transiente de duração  $\Delta t_t$ . Durante este período transiente, assume-se comumente que os ensaios apresentam uma evolução linear, ou seja, neste período implica em  $\frac{d\varepsilon}{dt} = cte$  para um ensaio de relaxação e  $\frac{d\sigma}{dt} = cte$  para um ensaio de fluência. Devido à variação linear, os testes reais de relaxação ou fluência são também denominados *ramp tests*.



(a) Módulo de Relaxação  $E(t)$



(b) Função Fluência  $D(t)$

**Figura 2.8:** Carregamento real em um ensaio viscoelástico no domínio do tempo.

Fonte: SCHAPERLY (1982)

SCHAPERLY (1982), utilizando leis de potência simplificadas para representar o Módulo de Relaxação e a Função Fluência (**ver** Equações (2.16) e (2.17) no item 2.3), chegou em relações entre o módulo viscoelástico com e sem a interferência do trecho transiente  $\Delta t_t$ . A razão obtida por SCHAPERLY (1982) entre o Módulo de Relaxação com e sem interferência do trecho transiente é dada pela Equação (2.3) a seguir.

$$R_E \equiv \frac{E_{\Delta t_t}(t)}{E(t)} = \frac{t_R}{1-n} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{t_R} \right)^{1-n} \right) \quad (2.3)$$

onde,

$E_{\Delta t_t}(t)$ : Módulo de Relaxação com interferência do trecho transiente  $\Delta t_t$ , representado por lei de potência simplificada;

$E(t)$ : Módulo de Relaxação sem interferência do trecho transiente  $\Delta t_t$ , representado por lei de potência simplificada;

$t_R \equiv \frac{t}{\Delta t_t}$ : tempo adimensionalizado pelo período transiente  $\Delta t_t$ ;

$n$ : expoente da lei de potência simplificada do Módulo de Relaxação.

Por sua vez, a relação para a Função Fluência é dada pela Equação (2.4).

$$R_D \equiv \frac{D_{\Delta t_t}(t)}{D(t)} = \frac{t_R}{1+m} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{t_R} \right)^{1+m} \right) \quad (2.4)$$

onde,

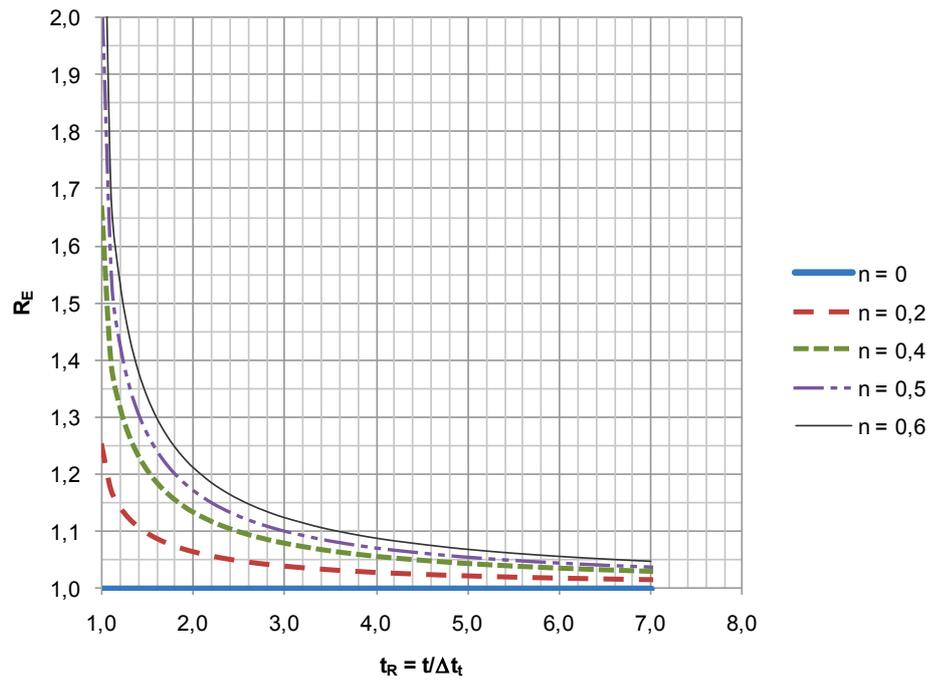
$D_{\Delta t_t}(t)$ : Função Fluência com interferência do trecho transiente  $\Delta t_t$ , representado por lei de potência simplificada;

$D(t)$ : Função Fluência sem interferência do trecho transiente  $\Delta t_t$ , representado por lei de potência simplificada;

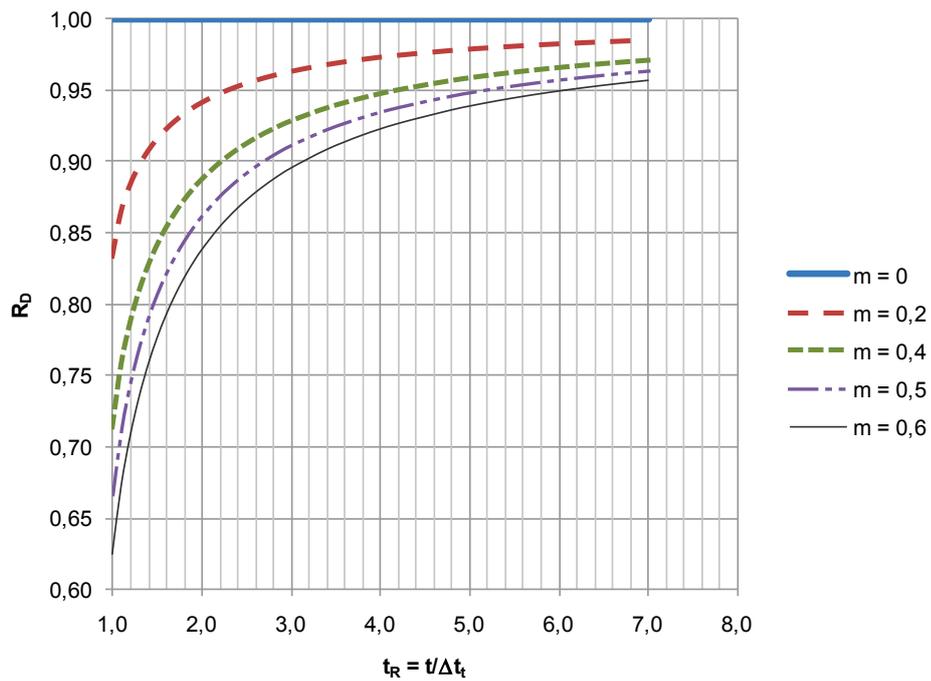
$t_R \equiv \frac{t}{\Delta t_t}$ : tempo adimensionalizado pelo período transiente  $\Delta t_t$ ;

$m$ : expoente da lei de potência simplificada da Função Fluência.

As expressões (2.3) e (2.4) estão representadas graficamente pela Figura 2.9 para valores típicos de  $n$  ou  $m$ . Nesta figura pode-se verificar que o trecho transiente  $\Delta t_t$  tende a superestimar o Módulo de Relaxação ( $R_E > 1$ ) ao passo que subestima a Função Fluência ( $R_D < 1$ ).



(a) Módulo de Relaxação



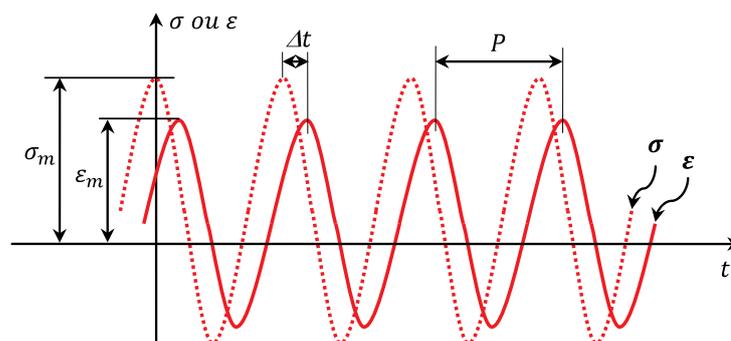
(b) Função Fluência

**Figura 2.9:** Relação entre módulos no domínio do tempo com e sem interferência do trecho transiente  $\Delta t_t$ .

Atribuindo uma relação bem próxima de 1 (que resulta em pequeno erro), e calculando o coeficiente angular em escala log-log da propriedade em questão ( $m$  ou  $n$ ) para longos tempos ( $t > 10\Delta t_t$ ), pode-se determinar o tempo adimensional de corte  $t_{R,corte}$  a partir do qual o efeito transiente é desprezível. De posse desse tempo adimensional de corte, e medindo a duração do carregamento transiente  $\Delta t_t$  de cada curva experimental, obtém-se o tempo de corte dimensional  $t_{corte}$ , a partir do qual os resultados experimentais são uma boa aproximação da propriedade viscoelástica no domínio do tempo em questão. Na Figura 2.9 verifica-se que para erro de 5% ( $R_E = 1,05$  e  $R_D = 0,95$ ) o tempo de corte  $t_{corte}$  varia entre 2 a 7 vezes o tempo transiente  $\Delta t_t$  a depender do nível de viscoelasticidade do material (valores de  $n$  ou  $m$ ).

SCHAPERLY (1982) e KIM (2006, 2009) chamam atenção ainda que o trecho transiente do carregamento imposto no ensaio de Módulo de Relaxação  $E(t)$  possui duração  $\Delta t_t$  maior que aquela do ensaio de Função Fluência  $D(t)$ , implicando em um motivo adicional para dar preferência ao ensaio de Função Fluência comparado ao de Módulo de Relaxação.

Devido aos problemas operacionais citados acima, ensaios de natureza oscilatória têm sido investigados (LEE e KIM, 1998; MEDEIROS JR., 2006; KIM, 2008). Estes ensaios consistem na aplicação de um carregamento oscilatório harmônico (domínio da frequência) e medição da resposta, também de natureza harmônica. As propriedades resultantes também são consideradas propriedades constitutivas viscoelásticas fundamentais. A Figura 2.10 ilustra um carregamento (tensão ou deformação) de natureza harmônica e resposta mecânica (deformação ou tensão, respectivamente) obtida em um material viscoelástico.



**Figura 2.10:** Tensão e deformação harmônicas de ensaio no domínio da frequência.

Caso o carregamento imposto seja uma deformação harmônica (com deformação máxima aplicada  $\varepsilon_m$ ), a tensão resultante, após o regime permanente ter sido atingido (FINDLEY *et al.*, 1989), apresentará uma resposta oscilatória defasada de um determinado ângulo de fase  $\delta$  conforme descrito na Equação (2.5).

$$\begin{aligned} \text{input:} \quad & \varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t) \\ \text{output:} \quad & \sigma(t) = \sigma_m \cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde,

$\varepsilon_m$  e  $\sigma_m$ : valores máximos de deformação e tensão harmônicas, respectivamente;

$\omega$ : frequência angular da oscilação harmônica;

$\delta$ : ângulo de fase.

O ângulo de fase  $\delta$  está relacionado com o retardo observado experimentalmente na resposta ( $\Delta t$ ) – ver Figura 2.10 – e é dada pela Equação (2.6) a seguir.

$$\delta = \frac{2\pi\Delta t}{P} \quad (2.6)$$

onde,

$\Delta t$ : retardo observado experimentalmente na resposta harmônica;

$P$ : período do carregamento harmônico.

Quanto mais próximo de  $90^\circ$  ( $\pi/2$  rad) for o ângulo de fase  $\delta$ , maior é o retardo entre carregamento e a resposta, e mais pronunciada é a parcela viscosa do material viscoelástico frente a sua parcela elástica (CHRISTENSEN, 1982; KIM, 2006, 2008).

Ao final, é obtida a propriedade viscoelástica denominada Módulo Complexo  $E^*(\omega)$  dada formalmente pela Equação (2.7), mas que do ponto de vista operacional é calculado pelas Equações (2.8) e (2.9) (LAKES, 1998). A grandeza  $|E^*(\omega)|$  é conhecida na literatura por Módulo Dinâmico e expressa a relação entre os valores máximos da resposta mecânica harmônica obtida (tensão  $\sigma_m$ ) e do carregamento imposto (deformação  $\varepsilon_m$ ) (SCHAPERLY, 1982; SOUZA, 2005; MEDEIROS JR., 2006; KIM, 2008). A partir do Módulo Dinâmico, calcula-se então o Módulo de

Armazenamento  $E'(\omega)$  (*Storage Modulus*) – que é a parte real de  $E^*(\omega)$  e está associado à energia armazenada e recuperada nas deformações harmônicas – e o Módulo de Perda  $E''(\omega)$  (*Loss Modulus*) – que é a parte imaginária de  $E^*(\omega)$  e está associado com a dissipação de energia em forma de calor do material viscoelástico. – conforme a Equação (2.9).

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (2.7)$$

$$|E^*(\omega)| = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} \quad (2.8)$$

$$E'(\omega) = |E^*(\omega)| \cos(\delta) \quad (2.9)$$

$$E''(\omega) = |E^*(\omega)| \sin(\delta)$$

De maneira similar, a imposição de um carregamento dado por uma tensão harmônica – *input* da Equação (2.10) – resulta em uma deformação harmônica – *output* da Equação (2.10) – resultando na propriedade denominada Compliância Complexa  $D^*(\omega)$ , calculada pelas Equações (2.11) e (2.12) a seguir.

$$\text{input:} \quad \sigma(t) = \sigma_m \cos(\omega t) \quad (2.10)$$

$$\text{output:} \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \delta)$$

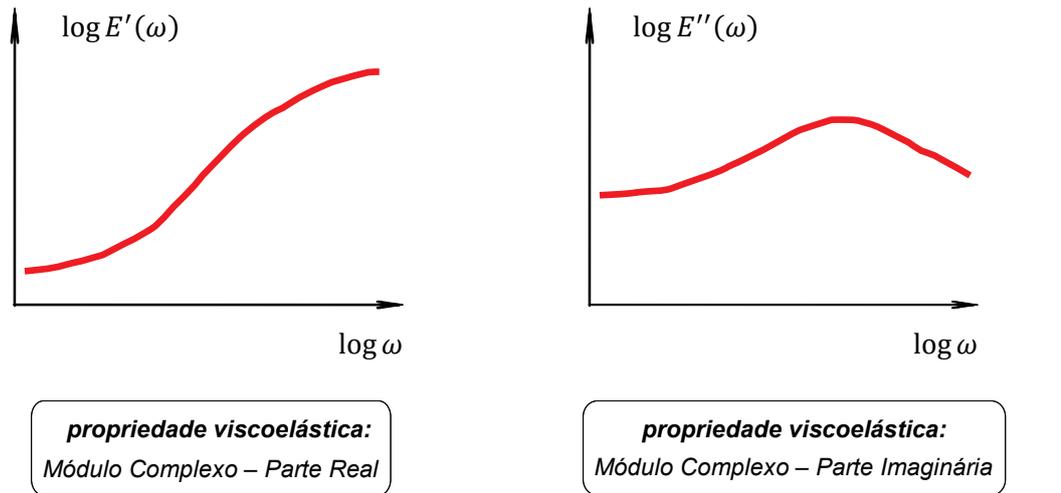
$$|D^*(\omega)| = \frac{\varepsilon_m}{\sigma_m} \quad (2.11)$$

$$D'(\omega) = |D^*(\omega)| \cos(\delta) \quad (2.12)$$

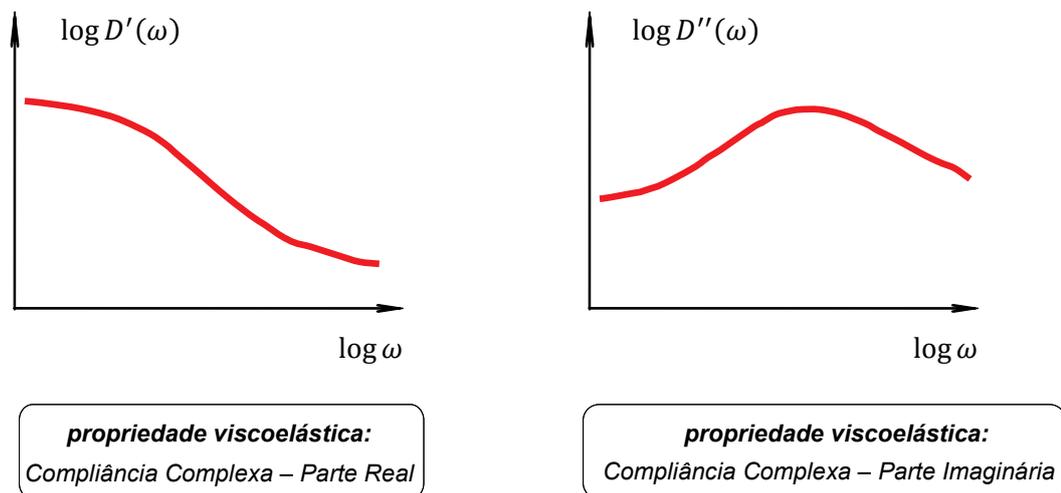
$$D''(\omega) = |D^*(\omega)| \sin(\delta)$$

A Figura 2.11 mostra uma representação qualitativa das funções viscoelásticas de armazenamento –  $E'(\omega)$  e  $D'(\omega)$  – e de perda –  $E''(\omega)$  e  $D''(\omega)$  extraídas de FERRY (1980) e SCHAPERY (1982). Destaca-se que os ensaios no domínio da frequência, embora tenham um apelo menos intuitivo, apresentam algumas vantagens operacionais frente a seus ensaios correspondentes no domínio do tempo.

Uma primeira vantagem decorre da duração mais curta dos ensaios no domínio da frequência. Enquanto ensaios (para uma determinada temperatura) no domínio do tempo demoram cerca de 1 hora (BERNUCCI *et al.*, 2007), uma varredura de frequência típica demora cerca de 20 minutos, implicando em um grande aumento de produtividade em programas experimentais de grande porte (KIM, 2006).



(a) Módulo Complexo  $E^*(\omega)$



(b) Compliância Complexa  $D^*(\omega)$

**Figura 2.11:** Propriedades viscoelásticas fundamentais no domínio da frequência – Módulo Complexo  $E^*(\omega)$  e Compliância Complexa  $D^*(\omega)$ .

Fonte: FERRY (1980) e SCHAPERY (1982)

Além do ganho de produtividade ao optar por ensaios de caráter harmônico, existe uma vantagem ainda mais importante. Conforme será mencionado no item seguinte (ver item 2.2.2), o ensaio de Função Fluência em misturas asfálticas (que é preferível frente ao Ensaio de Módulo de Relaxação) exige um nível de tensão extremamente pequeno para garantir o regime de viscoelasticidade linear. Caso contrário, o efeito do intertravamento dos agregados poderá interferir nos resultados. Segundo KIM (2009), os ensaios no domínio da frequência garantem mais facilmente o regime de viscoelasticidade linear, uma vez que a natureza do carregamento oscilatório resulta em deformações e tensões suficientemente pequenas para que os agregados não causem o efeito de intertravamento.

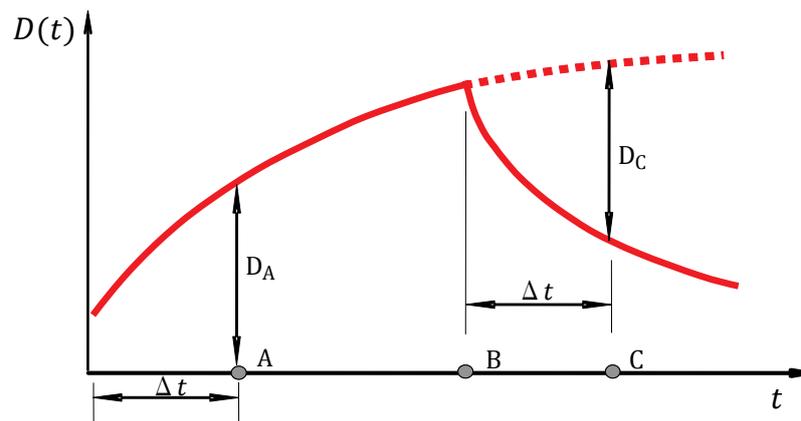
Devido a estas vantagens, as normas americanas referentes à caracterização de misturas asfálticas *AASHTO TP 62-03* (AASHTO, 2005) e *ASTM D 3497* (ASTM, 1979) preconizam o uso de ensaios no domínio da frequência. Reforçando essa tendência, o novo método de dimensionamento da AASHTO, o *Mechanistic Empirical Pavement Desig Guide* (MEPDG), faz uso do Módulo Dinâmico  $|E^*(\omega)|$  que será abordado novamente no final do item 2.3. Para maiores esclarecimentos sobre as propriedades no domínio da frequência, recomenda-se a leitura de SOUZA (2005) e MEDEIROS JR. (2006).

### **2.2.2. Limite de Viscoelasticidade Linear: Conceituação e Valores de Referência**

Para aplicação da teoria da viscoelasticidade linear, é necessário verificar os princípios da superposição e homogeneidade de Boltzmann (SCHAPERLY, 1982). De posse da informação prática que o princípio da homogeneidade está contido no princípio da superposição, pode-se estabelecer que a deformação  $\varepsilon\{\sigma_1 + \sigma_2\}$  (resposta, neste caso), devido a dois históricos de tensão  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  (entradas), pode ser obtida a partir do efeito combinado (superposto) das repostas isoladas, ou seja,  $\varepsilon\{\sigma_1 + \sigma_2\} = \varepsilon\{\sigma_1(t - t_1)\} + \varepsilon\{\sigma_2(t - t_2)\}$ .

A verificação deste princípio é importante, uma vez que se constitui como hipótese fundamental para o desenvolvimento das integrais de convolução do modelo constitutivo viscoelástico – Equações (2.1) e (2.2) – e definições das propriedades

constitutivas Módulo de Relaxação  $E(t)$  e Função Fluência  $D(t)$ . Para a verificação experimental do princípio da superposição, SOARES e SOUZA (2002) mostram a aplicação de um teste simples em que se realiza um ensaio de fluência seguido de um ensaio de recuperação (*creep and recovery test*), conforme esquematizado na Figura 2.12 a seguir.



**Figura 2.12:** Esquema do ensaio de fluência e recuperação.

O procedimento para verificação da linearidade se dá por meio da medição da distância vertical  $D_A$  na região de fluência (*creep*) após ter-se decorrido um tempo  $\Delta t$  depois do início do ensaio (ponto A da Figura 2.12). Na região de recuperação (*recovery*), mede-se a distância vertical  $D_C$  em um ponto C, de mesma distância horizontal  $\Delta t$ , tomando como origem o ponto B de início da fase de recuperação. Caso as distâncias  $D_A$  e  $D_C$  sejam as mesmas, verifica-se que o nível de tensão aplicado  $\sigma_0$  foi suficientemente pequeno para garantir o regime de viscoelasticidade linear (FERRY, 1980; SOARES e SOUZA, 2002). Caso as distâncias verticais apresentem valores discrepantes entre si para aquele nível de tensão aplicado  $\sigma_0$ , a teoria da viscoelasticidade linear não é suficiente para explicar o fenômeno, sendo necessário introduzir modelo(s) constitutivo(s) complementar(es) baseado(s) na teoria da viscoelasticidade não linear (SCHAPERY, 2000), na teoria da plasticidade e viscoplasticidade (SIMO e HUGHES, 1997; GIBSON *et al.*, 2003) e/ou teoria do dano (SCHAPERY, 1975; TASHMAN, 2003; DESSOUSY, 2005).

Com relação aos níveis de tensão necessários para garantir o regime de viscoelasticidade linear, SOUZA e SOARES (2003) realizaram testes em misturas asfálticas com tensões aplicadas na ordem de 50 kPa e concluíram que o regime de viscoelasticidade linear **não** foi garantido. KIM e LITTLE (2004), estudando mástiques (mistura de ligante asfáltico com agregado fino), chegaram à conclusão que o limite máximo de tensão que poderia ser aplicada em mástiques asfálticos para garantir a região de viscoelasticidade linear é da ordem 5 kPa. Para maiores esclarecimentos sobre comportamento constitutivo de mástiques asfálticos, recomenda-se a leitura de CASTELO BRANCO (2008), que explicita diferentes modelos constitutivos em mástiques – tais como viscoelasticidade não linear, dano por fadiga e deformação plástica – baseado em métodos de energia. Em razão de que o níveis de tensão aplicados para garantir o regime de viscoelasticidade linear devem ser baixos, KIM (2009) destaca que níveis de tensão da ordem de 100 kPa são difíceis de serem aplicados em máquinas de teste, mesmo que servo-hidráulicas, uma vez que exige sensores com alta sensibilidade para medir os pequenos níveis de deformação resultantes da tensão extremamente baixa aplicada.

É importante destacar que os níveis de tensão encontrados em misturas asfálticas, a partir de análises pelo MEF de uma estrutura típica, são da ordem 1 MPa para a tensão horizontal no fundo da camada de revestimento  $\sigma_x^{(fr)}$  (EVANGELISTA JR., 2006; SILVA *et al.*, 2008c), o que implica em regime viscoelástico não linear e/ou outros modelos constitutivos mais avançados. Estes resultados computacionais sugerem que, além da consideração do fator tempo nas análises numéricas viscoelásticas, deve-se estabelecer um estudo continuado dos modelos constitutivos complementares, tais como, modelos viscoelásticos não lineares abordados por FINDLEY *et al.* (1989) e SCHAPERLY (2000), modelos plástico e/ou viscoplástico discutido por KIM (2008, 2009) e modelos de dano contínuo discutidos por TEIXEIRA *et al.* (2007) e KIM (2008). Na sequência, é feita uma breve discussão da construção de curvas mestras baseadas em um importante princípio utilizado para materiais viscoelásticos, o Princípio da Superposição Tempo Temperatura (PSTT).

### 2.2.3. Construção de Curvas Mestras pelo PSTT

Segundo estudos clássicos sobre teoria da viscoelasticidade linear (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982), para uma descrição completa do comportamento dos materiais viscoelásticos é necessário que as propriedades viscoelásticas sejam observadas em uma faixa de tempo bastante ampla, em torno de 10 a 15 décadas logarítmicas. Do ponto de vista experimental, isto é impraticável, uma vez que: (i) exigiria observações de tempo da ordem de  $10^8$  segundos (três anos!) e (ii) seria necessário mensurar a propriedade em questão em intervalos de tempo da ordem de  $10^{-5}$  segundos (escala de tempo ao nível de vibração molecular!).

Para contornar estas dificuldades operacionais, utiliza-se o Princípio da Superposição Tempo Temperatura (PSTT), que estabelece uma equivalência de comportamentos entre as variáveis tempo e temperatura (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; SCHAPERLY, 1982; FINDLEY *et al.*, 1989; LAKES, 1998; KIM, 2009). O PSTT estabelece que, qualitativamente, um aumento na temperatura é aproximadamente equivalente a um aumento no tempo de observação. Dessa maneira, para evitar tempos de observação demasiadamente longos (8 décadas logarítmicas), pode-se realizar um ensaio com um curto tempo de observação – de ordem de 1 hora, que implica em apenas 2 décadas logarítmicas de tempo –, porém este ensaio é repetido para diferentes temperaturas.

O PSTT garante a possibilidade de deslocar no eixo do tempo (eixo horizontal) as curvas experimentais (obtidas em um curto tempo de observação) por um fator  $\alpha_T$ , denominado fator de deslocamento horizontal, resultando em uma curva com faixa de domínio de tempo bem mais ampla, denominada curva mestra. A curva mestra terá então a faixa de observação de tempo necessária para uma completa caracterização viscoelástica – da ordem de 10 a 12 décadas logarítmicas – construída sinteticamente, porém com tempo de execução de ensaios da ordem de apenas dias (3 décadas logarítmicas), e não anos como o comportamento viscoelástico de misturas asfálticas poderia exigir em um estado isotérmico.

Dessa forma, se estará substituindo a dependência das funções viscoelásticas no domínio do tempo – Função Fluência e Módulo de Relaxação – de duas variáveis (tempo  $t$  e temperatura  $T$ ) por uma única variável (tempo reduzido  $t_r$ , no caso). Para tanto, escolhe-se uma curva em uma determinada temperatura de referência ( $T_R$ ), calcula-se um fator de translação horizontal (*horizontal shift factor*)  $a_T$  e deslocam-se horizontalmente as demais curvas para o estado térmico da temperatura de referência. Este fator pode ser calculado a partir da Equação (2.13) de Arrhenius (FERRY, 1980), dada a seguir.

$$\log(a_T) = C \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_R} \right) \quad (2.13)$$

onde,

$T_R$ : temperatura de referência;

$a_T$ : fator de deslocamento horizontal (*horizontal shift factor*) para a temperatura de ensaio  $T$  em relação à temperatura de referência  $T_R$ ;

$C$ : constante da equação de Arrhenius, característica de cada material viscoelástico.

Por sua vez, a constante da equação de Arrhenius  $C$  é proporcional a um parâmetro intrínseco do material viscoelástico, denominado Energia de Ativação de Fluxo ( $E_a$ ), dada pela Equação (2.14) a seguir.

$$C = \frac{434,2 E_a}{R} \quad (2.14)$$

onde,

$E_a$ : energia de ativação de fluxo (kJ/mol), característica de cada material viscoelástico;

$R$ : constante universal dos gases (= 8,314 kJ/mol.K).

Alternativamente, WILLIAMS *et al.* (1955) propôs uma relação puramente empírica – conhecida por equação de WLF – que estima o fator de deslocamento horizontal  $a_T$  para sistemas poliméricos viscoelásticos gerais, cuja descrição segue na Equação (2.15) logo abaixo. KIM (2006) cita que esta equação, apesar de ter sido inicialmente proposta para diversos sistemas, se ajusta muito bem na composição de curvas mestras para misturas asfálticas.

$$\log(a_T) = \frac{C_1 \cdot (T - T_R)}{C_2 + T - T_R} \quad (2.15)$$

onde,

$C_1$  e  $C_2$ : constantes empíricas da equação de WLF, características de cada material viscoelástico.

Os valores encontrados na literatura para as constantes empíricas das Equações (2.14) e (2.15) de cálculo do fator de translação horizontal para materiais asfálticos estão indicados na Tabela 2.1 (equação de Arrhenius) e na Tabela 2.2 (equação de WLF). Vale ressaltar ainda que a utilização das Equações (2.14) e/ou (2.15) deve ser acompanhada de observação visual da curva mestra resultante, pois o PSTT estabelece apenas uma relação *aproximada* entre o tempo de observação e a temperatura de execução do ensaio.

Esta afirmação é reforçada pelo trabalho de BUTTLAR *et al.* (1998) que esclarecem que, em razão da heterogeneidade das misturas asfálticas, dificilmente existirá uma equação analítica única capaz de descrever um fator de translação horizontal adequado para todas as temperaturas de ensaio e, conseqüentemente, métodos numéricos ou adaptações das equações analíticas devem ser utilizados. KIM (2009) cita ainda que as Equações (2.14) e (2.15) podem ser utilizadas em conjunto com equações analíticas representativas em algum método de otimização para que se possam encontrar os valores mais adequados das constantes empíricas para as misturas asfálticas em questão.

**Tabela 2.1:** Constantes de Arrhenius típicas de misturas asfálticas.

<i>Fonte</i>	<i>Energia de Ativação <math>E_a</math> (kJ/mol)</i>	<i>C (K)</i>	<i>Material</i>
CHRISTENSEN JR. e ANDERSON (1992)	261	13.631	Mistura asfáltica
LYTTON <i>et al.</i> (1993)	–	13.060	Mistura asfáltica
MEDANI e HUURMAN (2003)	196	10.237	Mistura asfáltica
JACOBS (1995)	–	7.680	Mistura asfáltica

**Tabela 2.2:** Constantes de WLF típicas de sistemas poliméricos e misturas asfálticas.

<i>Fonte</i>	$C_1$	$C_2$ (K)	<i>Material</i>
FERRY (1980)	-8,86	101,6	Sistemas poliméricos em geral
SAYEGH (1967)	-9,5	95	Mistura asfáltica
LYTTON <i>et al.</i> (1993)	-19	92	Mistura asfáltica
MEDANI e HUURMAN (2003) <sup>1</sup>	-12	102	Mistura asfáltica

<sup>1</sup> aplicando curva sigmoidal para ensaio no domínio da frequência.

### 2.3. EQUAÇÕES ANALÍTICAS PARA REPRESENTAÇÃO DAS PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS

Após a obtenção experimental de uma das propriedades viscoelásticas fundamentais, juntamente com a devida construção de sua curva mestra pelo PSTT para uma representação mais abrangente, faz-se necessário representar tais propriedades por equações analíticas. Do ponto de vista de modelagem computacional de pavimentos asfálticos, a representação matemática se faz importante para que se possa considerar o modelo viscoelástico na avaliação das integrais de convolução, dadas pelas Equações (2.1) e (2.2) (ZOCHER, 1995; HOLANDA *et al.*, 2006). Além disso, é comum realizar um procedimento analítico de interconversão entre propriedades viscoelásticas, sendo necessária, portanto, uma função analítica representativa da propriedade viscoelástica medida experimentalmente.

Para propriedades fundamentais no domínio do tempo, uma das primeiras funções utilizada foi a chamada lei de potência simples (*pure power law*) descrita pelas Equações (2.16) e (2.17) (SCHAPERLY, 1982; KIM, 2009).

$$E(t) = E_1 t^{-n} \quad (2.16)$$

$$D(t) = D_1 t^m \quad (2.17)$$

onde,

$E_1$  e  $D_1$ : constante de amplitude do Módulo de Relaxação e Função Fluência, respectivamente;

$n$  e  $m$ : valor absoluto do expoente do Módulo de Relaxação e Função Fluência para representação por lei de potência simples, respectivamente.

Os expoentes das equações de lei de potência simples ( $n$  e  $m$ ), são também interpretados como coeficientes angular, em escala log-log, da taxa de variação da respectiva função viscoelástica em relação ao tempo, podem ser utilizados como parâmetro para avaliar o grau de viscoelasticidade do material em questão. Quanto maior o valor de  $n$  (ou  $m$ ) mais acentuado é o comportamento viscoelástico do material.

As equações citadas acima se ajustam bem à região de transição esquematizada na Figura 2.6. No entanto, as equações descritas por uma lei de potência simples não são capazes de representar analiticamente as regiões de platô inicial e final características de funções como aquelas indicadas na Figura 2.6. Para contornar esta situação, pesquisadores passaram a introduzir um termo independente adicional ( $E_0$  e  $D_0$ ), resultando nas Equações (2.18) e (2.19) do tipo lei de potência generalizada (*generalized power law*).

$$E(t) = E_0 + E_1 t^{-n} \quad (2.18)$$

$$D(t) = D_0 + D_1 t^m \quad (2.19)$$

onde,

$E_0$  e  $D_0$ : termos independentes, ou valores iniciais, do Módulo de Relaxação e Função Fluência, respectivamente.

Devido à introdução dos termos independentes  $E_0$  e  $D_0$ , as equações do tipo lei de potência simples apresentam um ponto de inflexão que é capaz de representar a região de platô inicial, mas não a de platô final (KIM, 2009).

Avançando na representação analítica, pode-se utilizar as Equações (2.20) e (2.21), que são conhecidas por funções de lei de potência modificada (*modified power law*) que, por sua vez, apresentam dois pontos de inflexão capazes de representar analiticamente todo o domínio das propriedades viscoelásticas Função Fluência e Módulo de Relaxação (PARK e KIM, 2001; KIM, 2006, 2009).

$$E(t) = E_\infty + \frac{E_0 - E_\infty}{\left(1 + \frac{t}{\rho_0}\right)^\lambda} \quad (2.20)$$

$$D(t) = D_0 + \frac{D_\infty - D_0}{\left(1 + \frac{\tau_0}{t}\right)^\mu} \quad (2.21)$$

onde,

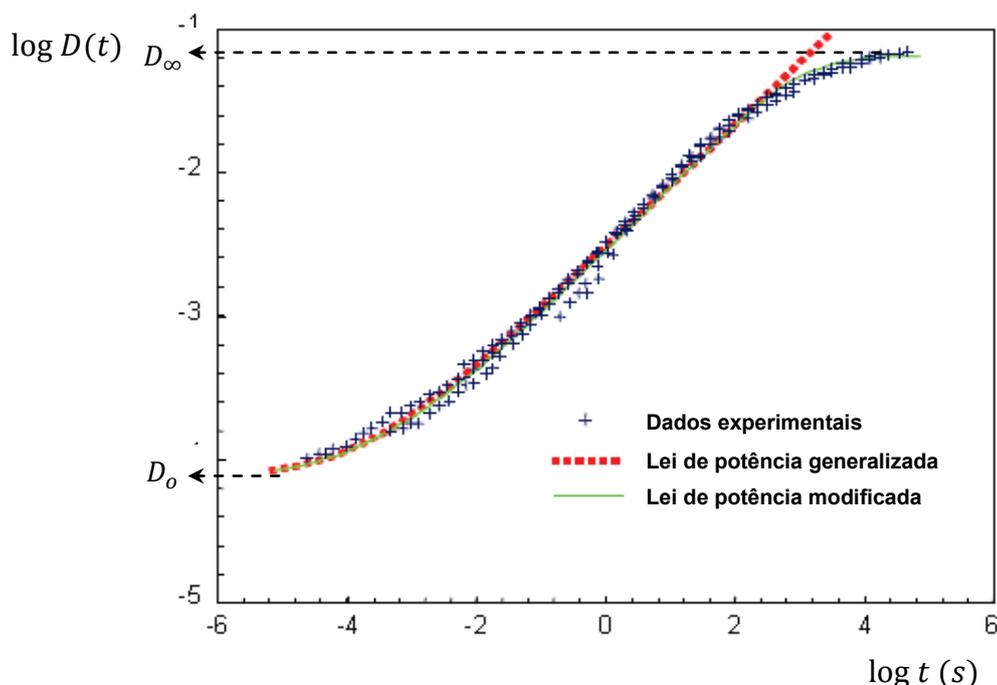
$E_0$  e  $D_0$ : valor inicial do Módulo de Relaxação e da Função Fluência, respectivamente;

$E_\infty$  e  $D_\infty$ : valor final do Módulo de Relaxação e da Função Fluência, respectivamente;

$\rho_0$  e  $\tau_0$ : constante de tempo do Módulo de Relaxação e da Função Fluência, respectivamente;

$\lambda$  e  $\mu$ : expoente do Módulo de Relaxação e da Função Fluência para representação por lei de potência modificada, respectivamente.

A Figura 2.13 compara o ajuste da Função Fluência a dados experimentais reais utilizando a lei de potência simples – Equação (2.19) – e a lei de potência modificada – Equação (2.21). Nota-se um melhor ajuste da lei de potência modificada devido ao segundo ponto de inflexão (em escala log-log) capaz de representar a região de platô final. KIM (2009) destaca que a lei de potência generalizada foi a primeira função analítica capaz de se ajustar de forma satisfatória a dados experimentais viscoelásticos de materiais asfálticos.



**Figura 2.13:** Ilustração do uso de leis de potência para representação da Função Fluência  $D(t)$  de uma mistura asfáltica.

Fonte: KIM (2006)

Apesar deste relativo sucesso, a lei de potência modificada não garante uma representação geral, capaz de se adequar aos mais diversos tipos materiais asfálticos, como ligantes, mástiques e misturas asfálticas, sem ou com aditivos. Para garantir uma maior generalização aos diferentes materiais asfálticos, podem-se adotar séries de potência baseadas na lei de potência modificada dadas pelas Equações (2.22) e (2.23). Estas séries são conhecidas por séries de lei de potência modificada (*modified power law series*) e se ajustam muito bem a uma gama ampla de dados experimentais de diversos materiais viscoelásticos devido à introdução de  $N$  termos para a série (PARK, 2001; PARK e KIM, 2001).

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{\left(1 + \frac{t}{\rho_i}\right)^{\lambda}} \quad (2.22)$$

$$D(t) = D_0 + \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\left(1 + \frac{\tau_j}{t}\right)^{\mu}} \quad (2.23)$$

onde,

$E_{\infty}$  e  $D_0$ : valor final do Módulo de Relaxação e valor inicial da Função Fluência para série de lei de potência modificada, respectivamente;

$E_i$  e  $D_j$ : termos dependentes da série de Prony do Módulo de Relaxação e da Função Fluência, respectivamente;

$\rho_i$  e  $\tau_j$ : constantes de tempo série de lei de potência modificada do Módulo de Relaxação e da Função Fluência, respectivamente.

$\lambda$  e  $\mu$ : expoente do Módulo de Relaxação e da Função Fluência para representação por série de lei de potência modificada, respectivamente.

Considerando simplesmente o ajuste de curva aos dados experimentais, as séries de lei de potência modificada acima seriam suficientes. No entanto, estas séries matemáticas tornam difícil a manipulação algébrica para avaliação das integrais de convolução – ver Equações (2.1) e (2.2) –, bem como da interconversão entre propriedades viscoelásticas fundamentais (PARK e SCHAPERLY, 1999; PARK e KIM, 2001; KIM, 2006, 2008, 2009). Além disso, o uso de propriedades viscoelásticas representadas por séries de lei potência modificadas não garante eficiência computacional para análise em uma formulação pelo MEF. Alternativamente, os dados

experimentais de propriedades viscoelásticas (no domínio do tempo) podem ser representados pelas séries de Prony (também conhecidas por séries de Dirichlet) dadas pelas Equações (2.24) e (2.25) a seguir.

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-t}{\rho_i}} \quad (2.24)$$

$$D(t) = D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}} \right) \quad (2.25)$$

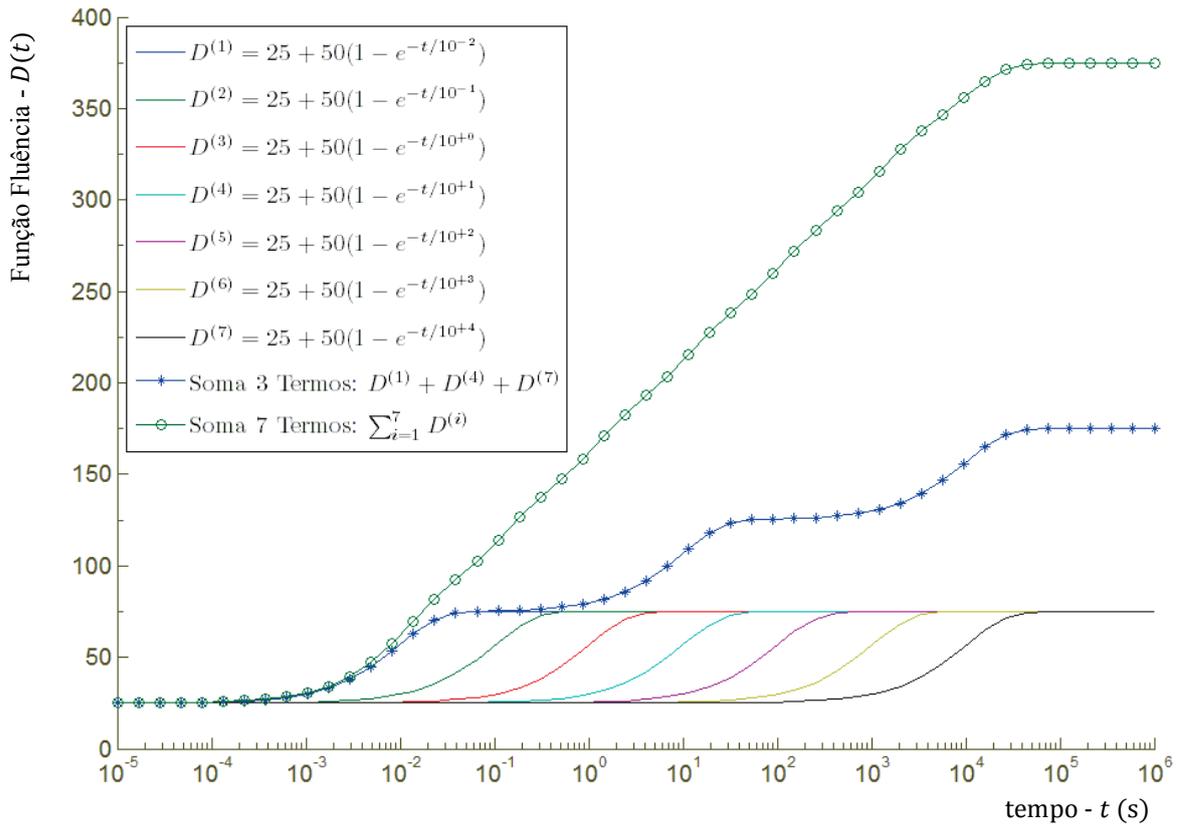
onde,

$E_{\infty}$  e  $D_0$ : termo independente da série de Prony do Módulo de Relaxação e da Função Fluência, respectivamente;

$E_i$  e  $D_j$ : termos dependentes da série de Prony do Módulo de Relaxação e da Função Fluência, respectivamente;

$\rho_i$  e  $\tau_j$ : constantes de tempo da série de Prony do Módulo de Relaxação e da Função Fluência, respectivamente.

A necessidade de definir  $N$  termos exponenciais na série de Prony é justificada pelo comportamento menos abrangente de funções de natureza exponencial (SCHAPERLY, 1982; KIM, 2006). Para ilustrar esta necessidade, a Figura 2.14 mostra que, isoladamente, cada termo exponencial da série de Prony tem influência em apenas 2 décadas logarítmicas. Como já dito anteriormente, a completa manifestação do comportamento viscoelástico de materiais asfálticos exige escalas de tempo de diversas décadas logarítmicas e, portanto, são igualmente necessários diversos termos da série de Prony. (SOUZA, 2005; MEDEIROS JR., 2006; SOUSA e SOARES, 2007). Nesta Figura, pode-se perceber que a composição de  $N = 7$  termos resulta em escala de tempo bem mais abrangente (de  $10^{-3}$  a  $10^5$  s) e, portanto, adequado para materiais asfálticos.

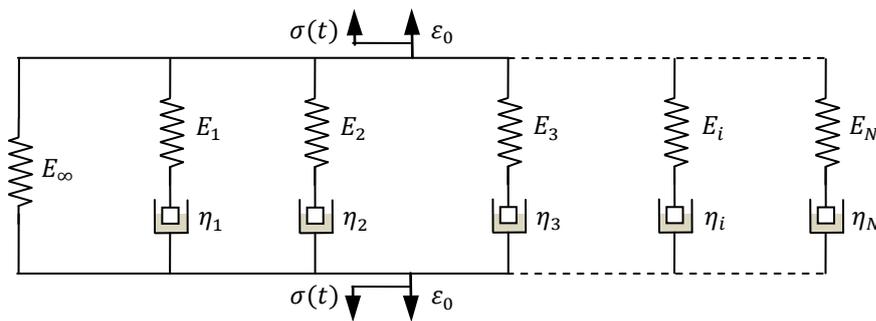


**Figura 2.14:** Efeito isolado de cada termo da série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  e composição de duas séries completas (7 e 3 termos).

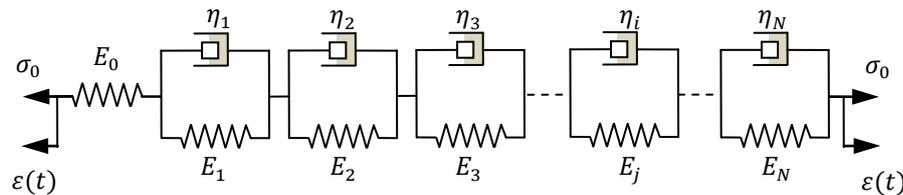
As séries de Prony apresentam vantagens consideráveis frente ao uso das séries de potência modificadas. Uma primeira vantagem do uso de série de Prony é a obtenção de um algoritmo computacionalmente eficiente para avaliação das integrais de convolução em uma formulação pelo MEF (TAYLOR *et al.*, 1970; ZOCHER, 1995). O item mais adiante descreve sucintamente o desenvolvimento deste algoritmo baseado no emprego de séries de Prony para representar propriedades viscoelásticas no domínio do tempo. Além disso, uma segunda vantagem do uso de séries de Prony é possibilidade de desenvolvimento algébrico de procedimentos analíticos para interconversão formal (não aproximada) entre propriedades viscoelásticas, devido à natureza exponencial das séries de Prony (PARK e SCHAPERLY, 1999). No item 2.5 é descrito o procedimento de interconversão analítica formal baseada em séries de Prony.

Outra vantagem do uso de séries de Prony é possibilidade de interpretação física dos coeficientes obtidos utilizando análogos mecânicos resultantes da associação entre molas e amortecedores (FERRY, 1980; SCHAPERLY, 1982; SOUZA, 2005; SOUSA e

SOARES, 2007). Na Figura 2.15 estão indicados os análogos mecânicos utilizados para representação física do Módulo de Relaxação  $E(t)$  pelo análogo mecânico generalizado de Maxwell e da Função Fluência  $D(t)$  pelo análogo mecânico generalizado de Voigt. Nesta figura, as constantes  $E_i$  (e  $D_j$ ) representam as constantes das molas regidas pela lei de Hooke e  $\eta_i$  representa a viscosidade dos amortecedores regidos pela lei da hidrodinâmica de Newton.



(a) modelo mecânico generalizado de Maxwell para  $E(t)$



(b) modelo generalizado de Voigt para  $D(t)$

**Figura 2.15:** Análogos mecânicos para representação de funções viscoelásticas no domínio do tempo pelo uso de séries de Prony.

FERRY (1980) chama atenção ainda para uma generalização das séries de Prony pela consideração de infinitos termos para os análogos mecânicos da Figura 2.15. Dessa maneira, o Módulo de Relaxação e a Função Fluência passam a ser descritos pelas Equações (2.26) e (2.27), respectivamente.

$$E(t) = E_{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} H e^{\frac{-t}{\rho_i}} d \ln \rho \quad (2.26)$$

$$D(t) = D_0 + \int_{-\infty}^{\infty} L \left( 1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}} \right) d \ln \tau \quad (2.27)$$

A função  $H(\rho)$  é conhecida por espectro de relaxação (*relaxation spectrum*), ao passo que  $L(\tau)$  é chamado de espectro de retardação (*retardation spectrum*). Uma vantagem dessas funções contínuas está na interpretação gráfica de funções analíticas viscoelásticas baseadas em modelo de exponenciais. Devido a isto, alguns trabalhos têm dado uma interpretação gráfica para as séries de Prony descritas pelas Equações (2.24) e (2.25) (PARK e KIM, 2001). Nesta abordagem, as séries de Prony dadas pelas Equações (2.24) e (2.25) são encaradas como uma representação discreta dos espectros contínuos definidos pelas Equações (2.26) e (2.27).

Por sua vez, para representar analiticamente as propriedades viscoelásticas no domínio da frequência, é prática comum adotar as funções matemáticas deduzidas a partir de técnicas analíticas de interconversão da série de Prony de suas propriedades correspondentes no domínio do tempo (ver item 2.5).

Uma última equação analítica que se ajusta bem às propriedades viscoelásticas, seja no domínio do tempo ou da frequência, é a curva sigmoidal de quatro parâmetros. A versão no domínio da frequência para representar o Módulo Dinâmico  $|E^*(\omega)|$  está descrita na Equação (2.28) abaixo.

$$\log|E^*(\omega)| = \alpha + \frac{\beta}{1 + \frac{1}{e^{\gamma + \delta(\log\omega)}}} \quad (2.28)$$

onde,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ : graus de liberdade da curva sigmoidal.

Para uma interpretação gráfica de cada um dos graus de liberdade da curva sigmoidal, o leitor é referenciado ao trabalho de KIM (2008). Segundo KIM (2009), a curva sigmoidal pode ser empregada para pré-suavização de dados experimentais, bem com na automação da construção de curvas mestras por meio da incorporação de seus 4 graus de liberdade em algoritmos de otimização simples.

## 2.4. TÉCNICAS DE AJUSTE DE CURVA DA SÉRIE DE PRONY

Uma vez definida a série de Prony como função matemática preferível para representação analítica das propriedades viscoelásticas no domínio do tempo, é importante conhecer as técnicas disponíveis para ajuste de curva. As seções seguintes tratam das técnicas mais comuns para ajuste de séries de Prony a dados experimentais.

### 2.4.1. Linearização pelo Método da Colocação

Uma das dificuldades encontradas para ajuste de séries de Prony a partir de dados experimentais trata-se da resolução de um sistema de equações não lineares. Um procedimento que pode evitar a resolução desse sistema não linear é a adoção de valores razoáveis para as constantes de tempo ( $\rho_i$  ou  $\tau_j$ ), tornando assim o sistema de equações com natureza exclusivamente linear para os termos dependentes  $E_i$  ou  $D_j$  (SCHAPERLY, 1982; SOUZA, 2005; SOUSA e SOARES, 2007). Uma segunda simplificação ainda pode existir, resultando no conhecido método da colocação clássico de Schapery (SCHAPERLY, 1961) descrito a seguir.

#### 2.4.1.1. Método da Colocação Clássico de SCHAPERLY (1961)

O método da colocação clássico de SCHAPERLY (1961) consiste na escolha de um subespaço reduzido a partir das informações experimentais de tal forma que o problema do ajuste de curva da série de Prony reduza-se a um problema de interpolação simples. A resolução desta interpolação consistirá, em última instância, na resolução de um sistema de equações lineares e, portanto, de fácil resolução numérica. Este método tem sido historicamente empregado desde os anos 1960 em que procedimentos numéricos de cálculo ainda eram bastante demorados e, portanto, justificava-se o emprego de um método simplificado para obtenção dos coeficientes da série de Prony.

Nesta abordagem, a partir do domínio de tempo completo medido experimentalmente  $t_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ) (onde  $M$  é o número de pontos medidos experimentalmente), extrai-se um subespaço  $t_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ) (onde  $N$  é o número de termos da série de Prony, previamente estabelecido conforme o item 2.3) e então monta-se um sistema de equações lineares. Este subespaço  $t_l$  é mais comumente conhecido

como pontos de colocação (*collocation points*), e a escolha dos mesmos é fundamental para o sucesso do método. No método da colocação simplificado é prudente adotar a recomendação feita por SCHAPERLY (1982) de que a escolha de um ponto de colocação  $t_l$  deva ser de tal forma que seu correspondente termo da série de Prony atinja metade de seu valor máximo quando  $t = t_l$ . Para o caso do Módulo de Relaxação  $E(t)$ , esta recomendação é expressa pela Equação (2.29) a seguir.

$$E_i \cdot e^{\frac{-t_l}{\rho_i}} \geq 1/2 E_i \quad i = l = 1, \dots, N \quad (2.29)$$

, que resulta na seguinte inequação.

$$t_l \leq \rho_i/1,44 \quad i = l = 1, \dots, N \quad (2.30)$$

Por sua vez, para a Função Fluência  $D(t)$  a recomendação de SCHAPERLY (1982) é expressa pela (2.31) abaixo.

$$D_i \cdot \left(1 - e^{\frac{-t_l}{\tau_i}}\right) \geq 1/2 D_i \quad i = l = 1, \dots, N \quad (2.31)$$

, que resulta na inequação seguinte.

$$t_l \geq \tau_i/1,44 \quad i = l = 1, \dots, N \quad (2.32)$$

Percebe-se, portanto, que a escolha dos pontos de colocação  $t_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ) é função da escolha das constantes de tempo  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Em geral, a escolha limite das Equações (2.30) e (2.32) é suficiente para garantir o máximo proveito do domínio de variação de cada termo da série de Prony (SOUZA, 2005). Vejamos então a formulação analítica propriamente dita para o método da colocação simplificado.

Para o Módulo de Relaxação  $E(t)$ , o ajuste de curva pelo método da colocação simplificado é descrito pelo sistema de equações lineares descrito em notação indicial pela Equação (2.33) a seguir.

$$\sum_{i=1}^N e^{\frac{-t_l}{\rho_i}} \cdot E_i = E(t_l) - E_{\infty} \quad (i = l = 1, \dots, N) \quad (2.33)$$

Que em notação matricial se torna,

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{-t_1}{\rho_1}} & e^{\frac{-t_1}{\rho_2}} & \dots & e^{\frac{-t_1}{\rho_i}} & \dots & e^{\frac{-t_1}{\rho_N}} \\ e^{\frac{-t_2}{\rho_1}} & e^{\frac{-t_2}{\rho_2}} & \dots & e^{\frac{-t_2}{\rho_i}} & \dots & e^{\frac{-t_2}{\rho_N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\frac{-t_l}{\rho_1}} & e^{\frac{-t_l}{\rho_2}} & \dots & e^{\frac{-t_l}{\rho_i}} & \dots & e^{\frac{-t_l}{\rho_N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\frac{-t_N}{\rho_1}} & e^{\frac{-t_N}{\rho_2}} & \dots & e^{\frac{-t_N}{\rho_i}} & \dots & e^{\frac{-t_N}{\rho_N}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E(t_1) - E_{\infty} \\ E(t_2) - E_{\infty} \\ \vdots \\ E(t_l) - E_{\infty} \\ \vdots \\ E(t_N) - E_{\infty} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Por sua vez, a obtenção dos termos dependentes de série de Prony da Função Fluência pelo método da colocação simplificado é descrita pela Equação (2.35) seguinte.

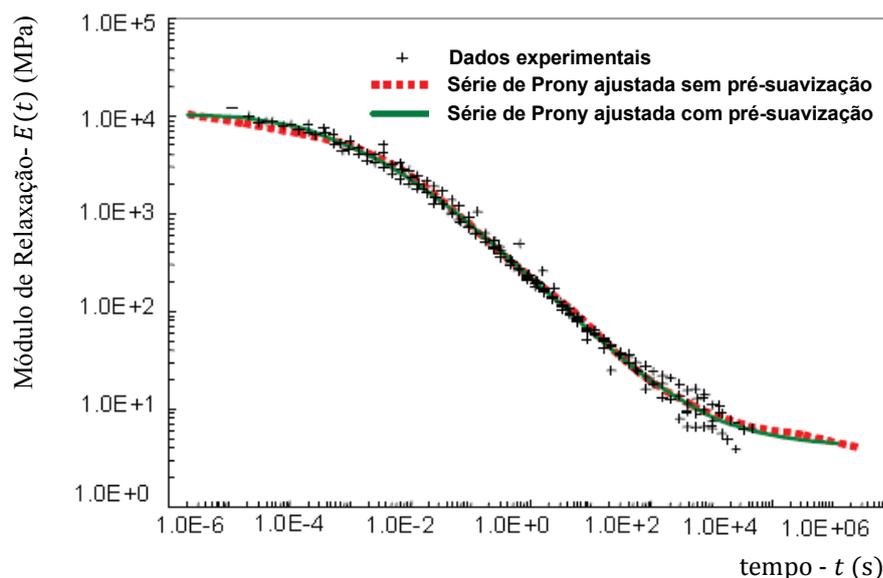
$$\sum_{j=1}^N \left(1 - e^{\frac{-t_l}{\tau_j}}\right) \cdot D_j = D(t_l) - D_0 \quad (j = l = 1, \dots, N) \quad (2.35)$$

Que na forma matricial é dada pela Equação (2.36) a seguir.

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{\frac{-t_1}{\tau_1}} & 1 - e^{\frac{-t_1}{\tau_2}} & \dots & 1 - e^{\frac{-t_1}{\tau_j}} & \dots & 1 - e^{\frac{-t_1}{\tau_N}} \\ 1 - e^{\frac{-t_2}{\tau_1}} & 1 - e^{\frac{-t_2}{\tau_2}} & \dots & 1 - e^{\frac{-t_2}{\tau_j}} & \dots & 1 - e^{\frac{-t_2}{\tau_N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - e^{\frac{-t_l}{\tau_1}} & 1 - e^{\frac{-t_l}{\tau_2}} & \dots & 1 - e^{\frac{-t_l}{\tau_j}} & \dots & 1 - e^{\frac{-t_l}{\tau_N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - e^{\frac{-t_N}{\tau_1}} & 1 - e^{\frac{-t_N}{\tau_2}} & \dots & 1 - e^{\frac{-t_N}{\tau_j}} & \dots & 1 - e^{\frac{-t_N}{\tau_N}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_j \\ \vdots \\ D_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D(t_1) - D_0 \\ D(t_2) - D_0 \\ \vdots \\ D(t_l) - D_0 \\ \vdots \\ D(t_N) - D_0 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

As Equações (2.34) e (2.36) descritas acima é que tem sido comumente empregadas para realizar o ajuste de curva de séries de Prony a partir de sua respectiva curva mestra. Restringindo-se ao âmbito nacional, SOUZA (2005) e MEDEIROS JR. (2006) utilizaram esta técnica. Este procedimento, no entanto gera instabilidades numéricas devido à forte dependência com os pontos de colocação (*collocation points*) escolhidos. Devido a problemas dessa natureza, que podem gerar termos dependentes negativos ou até mesmo uma série de Prony ajustada visivelmente não representativa da curva mestra, o método da colocação simplificado tem sido proposto com o uso combinado de uma pré-suavização dos dados experimentais.

PARK e KIM (2001) sugerem o uso da série de lei de potência modificada – ver Equações (2.22) e (2.23) – para realizar uma pré-suavização dos dados, sob a expectativa de reduzir a instabilidade numérica presente no método da colocação simplificado. A Figura 2.16 mostra duas séries de Prony ajustadas a dados experimentais de uma mistura asfáltica, sem e com pré-suavização, com uso da série de lei de potência modificada. Apesar de graficamente parecerem indistinguíveis (em escala log-log) os resultados dos coeficientes obtidos ( $E_i$ , no caso) são significativamente diferentes.



**Figura 2.16:** Ajuste de curva pelo método da colocação simplificado com e sem pré-suavização dos dados experimentais.

Fonte: KIM (2006)

#### 2.4.1.2. Método da Colocação por Mínimos Quadrados Linear (MQL)

Devido aos problemas de instabilidade numérica do método da colocação simplificado, é interessante considerar uma técnica de ajuste mais robusta, ou seja, que a qualidade dos resultados não seja tão dependente dos pontos de colocação escolhidos. Para tanto, o método dos Mínimos Quadrados Linear (MQL) pode ser utilizado.

Para o caso do Módulo de Relaxação  $E(t)$ , após a definição da função de mínimos quadrados e derivação em relação às constantes de tempo ( $\rho_i$ , no caso), chega-se na Equação (2.37).

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_i}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_j}} \cdot E_i = \sum_{k=1}^M (E(t_k) - E_{\infty}) \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_j}} \quad (2.37)$$

$$(i = j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, M)$$

Nota-se que, diferentemente do método da colocação simplificado descrito pela Equação (2.33), considera-se todos os pontos experimentais  $t_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ). Apesar de resultar em uma equação mais complexa, este esforço adicional é recompensado devido a uma maior robustez nos resultados, uma vez que os termos dependentes procurados ( $E_i$ , no caso) apresentam uma menor dependência em relação aos pontos de colocação escolhidos. Além disso, a técnica de MQL é considerada uma técnica de regressão baseada em conceitos estatísticos, que permite fazer estimativas do nível de significância dos parâmetros estimados (NOCEDAL e WRIGHT, 1999; KIUSALAAS, 2005).

Na forma expandida matricialmente, a Equação (2.37) se torna então a Equação (2.38) dada na sequencia.

$$\begin{bmatrix}
 \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} & \dots & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_i}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} & \dots & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_N}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} \\
 \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} & \dots & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_i}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} & \dots & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_N}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_j}} & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_j}} & \dots & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_i}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_j}} & \dots & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_N}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_j}} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_N}} & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_N}} & \dots & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_i}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_N}} & \dots & \sum_{k=1}^M e^{\frac{-t_k}{\rho_N}} \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_N}}
 \end{bmatrix} \cdot$$

(2.38)

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^M (E(t_k) - E_\infty) \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_1}} \\ \sum_{k=1}^M (E(t_k) - E_\infty) \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_2}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^M (E(t_k) - E_\infty) \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_j}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^M (E(t_k) - E_\infty) \cdot e^{\frac{-t_k}{\rho_N}} \end{Bmatrix}$$

Por sua vez, a obtenção dos termos dependentes da Função Fluência  $D(t)$  pelo método da colocação por MQL é descrita pela Equação (2.39) a seguir, cuja notação matricial expandida é descrita pela Equação (2.40).

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{\frac{-t_k}{\tau_j}}\right) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t_k}{\tau_i}}\right) \cdot D_j \\
 & = \sum_{k=1}^M (D(t_k) - D_0) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t_k}{\tau_i}}\right)
 \end{aligned}$$

(2.39)

$$(i = j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, M)$$

$$\begin{bmatrix}
\sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) & \dots & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) & \dots & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) \\
\sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) & \dots & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) & \dots & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_i}}\right) & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_i}}\right) & \dots & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_i}}\right) & \dots & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_i}}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right) & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right) & \dots & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right) & \dots & \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right)
\end{bmatrix}$$

(2.40)

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_j \\ \vdots \\ D_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^M (D(t_k) - D_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_1}}\right) \\ \sum_{k=1}^M (D(t_k) - D_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_2}}\right) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^M (D(t_k) - D_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_i}}\right) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^M (D(t_k) - D_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_N}}\right) \end{Bmatrix}$$

## 2.5. INTERCONVERSÃO ANALÍTICA ENTRE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS

### 2.5.1. Interconversão entre Propriedades no Domínio do Tempo e da Frequência

A interconversão entre propriedades viscoelásticas é prática comum devido aos problemas de ordem experimentais citados no item 2.2.1. Ressalta-se, por exemplo, que a obtenção do Módulo de Relaxação por meio de interconversão a partir de outra propriedade viscoelástica é, em geral, o único meio viável de obter esta propriedade viscoelástica, devido às dificuldades de equipamentos realizarem ensaios de deformação controlada (KIM, 2006). Utilizando séries de Prony para representação matemática de ambas as propriedades viscoelásticas fundamentais no domínio do tempo, é possível, por meio da teoria da viscoelasticidade linear, obter relações relativamente simples de interconversão entre estas propriedades.

Após uma dedução formal baseado no trabalho de PARK e SCHAPERY (1999) (ver o Apêndice A), pode-se chegar à equação de interconversão (2.41), que permite obter a Função Fluência  $\mathbf{D}(\mathbf{t})$  a partir do Módulo de Relaxação  $\mathbf{E}(\mathbf{t})$ .

$$A_{kj}D_j = B_k \quad (\text{soma em } j; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m)$$

onde,

$$A_{kj} = E_\infty \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{E_i t_k}{\tau_j} e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \quad \text{se } \tau_j = \rho_i$$

$$A_{kj} = E_\infty \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i E_i}{\rho_i - \tau_j} \left( e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) \quad \text{se } \tau_j \neq \rho_i \quad (2.41)$$

e

$$B_k = 1 - \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right] / \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i \right]$$

Nota-se que esta equação, assim como a técnica de ajuste de curva pelo método da colocação, resulta na resolução de um sistema de equações lineares, portanto, de fácil implementação computacional. Para o caso inverso, que é o sentido de interconversão utilizado do ponto de vista experimental, a obtenção do Módulo de Relaxação  $E(t)$  a partir da Função Fluência  $D(t)$  é dada pela Equação (2.42) a seguir.

$$A_{ki}E_i = B_k \quad (\text{soma em } i; i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n)$$

onde,

$$A_{ki} = -D_0 \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^n -D_j \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{D_j t_k}{\rho_i} e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \quad \text{se } \rho_i = \tau_j \quad (2.42)$$

$$A_{ki} = -D_0 \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^n -D_j \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j D_j}{\tau_j - \rho_i} \left( e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) \quad \text{se } \rho_i \neq \tau_j$$

e

$$B_k = 1 - \left[ D_0 + \sum_{j=1}^n D_j \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) \right] / D_0$$

Para o caso de propriedades no domínio da frequência, as relações baseadas em séries de Prony são dadas a seguir (PARK e KIM, 1999).

### $E(t)$ , $E'(\omega)$ e $E''(\omega)$

$$E'(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{\omega^2 \rho_i^2 E_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (2.43)$$

$$E''(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{\omega \rho_i E_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (2.44)$$

**$D(t)$ ,  $D'(\omega)$  e  $D''(\omega)$**

$$D'(\omega) = D_0 + \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\omega^2 \tau_j^2 + 1} \quad (2.45)$$

$$D''(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{\omega \tau_j d_j}{\omega^2 \tau_j^2 + 1} \quad (2.46)$$

As Equações (2.43), (2.44), (2.45) e (2.46) é que permitem obter a série de Prony (curva matemática no domínio do tempo) a partir de dados experimentais no domínio da frequência. Para este caso, procedimentos de ajuste de curva similares àqueles discutidos no item 2.4 podem ser utilizados.

Ressalta-se que existe uma série de equações aproximadas propostas para realizar interconversão entre propriedades viscoelásticas no domínio do tempo e/ou da frequência, mas que não serão explicitadas nesta revisão bibliográfica uma vez que foge do escopo do trabalho. Para consultar tais relações sugere-se a leitura de CHRISTENSEN (1982), EVANGELISTA JR. (2006) e MEDEIROS JR. (2006).

### **2.5.2. Definição das Constantes de Tempo da Função Interconvertida**

Uma questão relevante para a obtenção de resultados satisfatórios de interconversão entre  $D(t)$  e  $E(t)$  trata-se da escolha das constantes de tempo da função interconvertida (função alvo). Um procedimento simplificado que pode ser adotado segundo PARK e SCHAPERLY (1999) é simplesmente atribuir constantes de tempo da função interconvertida (função alvo) idênticas àquelas da função medida experimentalmente (função fonte). No entanto, ainda PARK e SCHAPERLY (1999) citam um procedimento de escolha mais acurada das constantes de tempo da função alvo que será descrito na sequência.

Neste caso, partindo das transformadas de Laplace do Módulo de Relaxação  $\bar{E}(s)$  e da Função Fluência  $\bar{D}(s)$ , definidas de acordo com as Equações (2.47) e (2.48) a seguir, devidamente representadas por suas respectivas séries de Prony – Equações

(2.24) e (2.25) – é possível obter as Equações (2.49) e (2.50). A variável  $s$  é denominada variável de Laplace, ou campo de Laplace. Estas duas últimas equações são chamadas de transformadas de Carson das séries de Prony, definidas por  $\tilde{E}(s) \equiv s\bar{E}(s)$  e  $\tilde{D}(s) \equiv s\bar{D}(s)$ .

$$\bar{E}(s) \equiv \int_0^{\infty} E(t)e^{-st} dt \quad (2.47)$$

$$\bar{D}(s) \equiv \int_0^{\infty} D(t)e^{-st} dt \quad (2.48)$$

$$\tilde{E}(s) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^m \frac{s\rho_i E_i}{s\rho_i + 1} \quad (2.49)$$

$$\tilde{D}(s) = D_0 + \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{s\tau_j + 1} \quad (2.50)$$

As equações da transformada de Carson das séries de Prony dadas pelas Equações (2.49) e (2.50) é que servem de base para obtenção mais acurada das constantes de tempo da função alvo.

Observando a Equação (2.49), caso a variável de Laplace  $s$  tenda a  $-1/\rho_i$  resulta em  $\tilde{E}(s) = \pm\infty$ . De igual forma, na Equação (2.50), a variável de Laplace  $s$  tendendo a  $-1/\tau_j$  resulta em  $\tilde{D}(s) = \pm\infty$ . Pela relação de reciprocidade perfeita entre as transformadas de Carson dada pela Equação (2.51) a seguir (SCHAPERLY, 1982; PARK e SCHAPERLY, 1999).

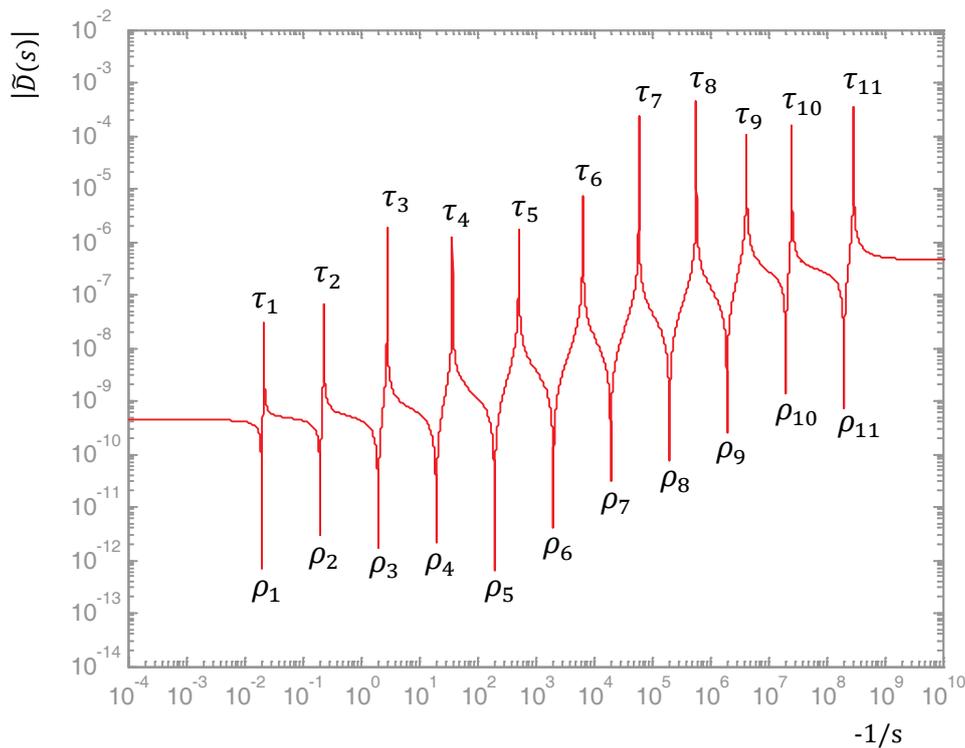
$$\tilde{D}(s)\tilde{E}(s) = 1 \quad (2.51)$$

Conclui-se que,

$$\lim_{s \rightarrow -1/\tau_j} \tilde{E}(s) = 0 \quad (2.52)$$

$$\lim_{s \rightarrow -1/\rho_i} \tilde{D}(s) = 0 \quad (2.53)$$

Dessa maneira, plotando-se o valor absoluto da transformada de Laplace da função fonte ( $|\tilde{E}(s)|$  ou  $|\tilde{D}(s)|$ ) *versus* a variável  $-1/s$  (com  $s$  negativo) em um gráfico log-log verifica-se a existência de valores máximos (tendendo a infinito) e mínimos (tendendo a zero). Para exemplificar, a Figura 2.17, baseado nos resultados descritos por PARK e SCHAPERY (1999), mostra o comportamento do gráfico  $\tilde{D}(s)$  *versus*  $-1/s$  para o caso da função fonte correspondendo à Função Fluência  $D(t)$ . Neste caso, a abscissa dos pontos de máximo (que tendem a infinito) refere-se às constantes de tempo  $\tau_j$  (conhecidas) da Função Fluência  $D(t)$  (função fonte) ao passo que a abscissa dos pontos de mínimo (que tendem a zero) indica os valores procurados das constantes de tempo  $\rho_i$  do Módulo de Relaxação  $E(t)$  (função alvo).



**Figura 2.17:** Escolha gráfica das constantes de tempo da série de Prony da função interconvertida.

Fonte: PARK e SCHAPERY (1999)

## 2.6. FORMULAÇÃO PELO MEF DO MODELO CONSTITUTIVO VISCOELÁSTICO LINEAR

Conforme mencionado no CAPÍTULO 1, uma das principais vantagens do uso de séries de Prony para representação de propriedades viscoelásticas diz respeito à eficiência computacional obtida para avaliar a integral de convolução da Equação (2.1) para análise pelo MEF (TAYLOR, 1970; ZOCHER, 1995; PARK e KIM, 1999; SOUZA, 2005; EVANGELISTA JR., 2006; ARAÚJO JR. *et al.*, 2009). Antes de mostrar os resultados desta formulação computacionalmente eficiente para o caso do modelo viscoelástico linear considerado neste trabalho, é válido tomar inicialmente o modelo elástico linear, também conhecido por Lei de Hooke, pois servirá de base para o entendimento do escopo de aplicação da teoria da viscoelasticidade linear aplicada em formulação pelo MEF abordada neste trabalho.

A teoria da elasticidade linear estabelece que a quantidade de deformação que um corpo é submetido é linearmente proporcional à tensão causadora desta deformação (TIMOSHENKO e GOODIER, 1980). Esta lei é uma aproximação comumente adotada para a maior parte dos materiais empregados em obras civis ao longo de sua vida útil, uma vez que as mesmas são submetidas a pequenas deformações. Partindo da forma generalizada tridimensional do estado de tensões (tensor  $\sigma_{ij}$ ) e deformações (tensor  $\varepsilon_{kl}$ ), a Lei de Hooke estabelece que estas grandezas físicas estão linearmente relacionadas por um tensor de quarta ordem  $C_{ijkl}$  conforme descrito na Equação (2.54).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.54)$$

Para a Equação (2.54) acima, seriam necessárias 81 constantes para relacionar o tensor de tensões com o tensor de deformações. Após uma série de simplificações, pode-se chegar a uma equação com um número menor de constantes e, portanto, de mais fácil interpretação física e caracterização experimental. As simplificações assumidas na teoria da elasticidade linear são: (a) simetria do tensor de tensões ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , com  $i \neq j$ ) devido ao equilíbrio rotacional de forças, e simetria do tensor de deformações ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , com  $i \neq j$ ), implicando na redução da quantidade de constantes necessárias de 81 para 36; (b) simetria do tensor constitutivo  $C_{ijkl}$  baseado no teorema

de BETTI (VILLAÇA e GARCIA, 1998), reduzindo para 21 constantes; (c) desacoplamento entre grandezas lineares (tensões e deformações axiais) e angulares (tensões e deformações cisalhantes), reduzindo para 12 constantes; e (d) condição de isotropia, que indica mesmas propriedades para todas as direções, resultando em apenas 2 constantes para relacionar as tensões com as deformações em um ponto material. Assume-se ainda que o material seja homogêneo e, portanto, as relações desenvolvidas para um ponto material, são, na realidade, válidas para todos os pontos do corpo em estudo. Considerando ainda uma configuração simétrica em torno de um eixo (modelo axissimétrico) a relação matricial explícita da teoria da elasticidade linear é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = E \cdot \frac{1}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

onde,

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal, ou módulo de Young; e

$\nu$  = coeficiente de Poisson.

A expressão matricial acima pode ser escrita na seguinte forma compacta:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.56)$$

onde,

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12}\}^T;$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12}\}^T; e$$

$$\mathbf{C} = E \mathbf{A}(\nu) = E \frac{1}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Para o caso da teoria da viscoelasticidade linear, uma abordagem simplificada considera o coeficiente de Poisson como um valor constante (SCHAPERLY, 1975;

ELSEIFI *et al.*, 2006) e substitui o Módulo de Elasticidade Longitudinal  $E$  pelo Módulo de Relaxação  $E(t)$ . Destaca-se que, do ponto de vista experimental, é mais fácil realizar um ensaio de Função Fluência  $D(t)$  para então obter o Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ , ambos representados por suas respectivas séries de Prony conforme indicado no item 2.3. Para desenvolver uma relação constitutiva para a teoria da viscoelasticidade linear considerando um modelo axissimétrico, a Equação (2.56) é substituída por uma relação baseada na integral de convolução descrita na Equação (2.1) resultando na Equação (2.57).

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{A}(\nu) \int_0^t E(t - \tau) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad (2.57)$$

Para análise das tensões estimada pela Equação (2.57) pelo MEF considera-se uma análise discretizada no tempo pela definição de um intervalo de tempo  $\Delta t$  constante e suficientemente pequeno em relação à ordem de variação do carregamento prescrito. Para tanto, assume-se conhecido o estado de tensões no tempo discreto  $t_k$  ( $\boldsymbol{\sigma}^k$ ) e estima-se o estado de tensões no próximo passo de tempo  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  ( $\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}^k$ ). Portanto, as tensões são estimadas de forma incremental por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}^k \quad (2.58)$$

Por sua vez, após uma série de manipulações algébricas, chega-se no seguinte resultado para o incremento de tensões  $\Delta \boldsymbol{\sigma}^k$  na iteração  $k$ :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^k = \bar{E} \mathbf{A}(\nu) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^k \quad (2.59)$$

onde,

$$\bar{E} = E_\infty + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^m E_i \rho_i \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \right);$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^k = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}^k;$$

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^k = -\sum_{i=1}^n \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \right) \mathbf{S}_i^k; e$$

$$\mathbf{S}_i^k = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \mathbf{S}_i^{k-1} + E_i \rho_i \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \right) \mathbf{A}(\nu) \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}}{\Delta t}.$$

A matriz  $\mathbf{B}$  é a matriz de funções de interpolação que estimam os incrementos de deformações  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^k$  a partir dos incrementos de deslocamentos  $\Delta\mathbf{u}^k$  e depende do tipo de elemento finito utilizado (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000; COOK *et al.*, 2002). O vetor  $\mathbf{S}_i^k$  é um parâmetro interno recursivo referente ao tempo discreto  $t_k$ , pois para seu cálculo é necessário apenas o seu valor no tempo discreto imediatamente anterior  $\mathbf{S}_i^{k-1}$  (referente a  $t_{k-1}$ ). O vetor interno referente ao tempo inicial  $t_0$  ( $\mathbf{S}_i^0$ ) pode ser considerado nulo sem incorrer grandes erros, desde que se tenha um incremento de tempo  $\Delta t$  suficientemente pequeno. Dessa forma, para avaliar as tensões no tempo discreto  $t_{k+1}$  ( $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$ ) não é necessário realizar uma integração numérica conforme sugerido pela integral de convolução da Equação (2.57), bastando avaliar o incremento de tensões do próximo tempo discreto  $t_{k+1}$  pela Equação recursiva (2.59). Esta técnica resulta em um procedimento computacionalmente eficiente, tanto do ponto de vista de armazenamento de dados, quanto do ponto de vista de esforço computacional. Os detalhes sobre este desenvolvimento recursivo podem ser encontrados em SOUZA (2005), EVANGELISTA JR. (2006) e ARAÚJO JR. *et al.* (2009).

Uma vez calculada a tensão  $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$  para o tempo discreto  $t_{k+1}$ , o equilíbrio de forças local assume a forma vetorial dada pela Equação (2.60), onde  $\mathbf{f}^{k+1}$  é o vetor local de forças externas. Após o cálculo do incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{u}^{k+1}$  para a iteração  $k + 1$ , a análise é avançada no tempo por mais um incremento  $t_{k+2} = t_{k+1} + \Delta t$  pelo cálculo das tensões  $\boldsymbol{\sigma}^{k+2}$  por meio de equação similar à Equação (2.58).

$$\left[ \int_V \mathbf{B}^T \bar{E} \mathbf{B} dV \right] \Delta\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{f}^{k+1} - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{k+1} dV \quad (2.60)$$

Ressalta-se a importância do entendimento preciso do escopo de sua aplicação da expressão recursiva mostrada acima – Equação (2.59). A mistura asfáltica é considerada solicitada por pequenas deformações (da ordem de centenas de *microstrains*) resultando em comportamento viscoelástico linear. Ainda devido à hipótese de pequenas deformações, o comportamento plástico e viscoplástico da mistura asfáltica também é desprezado. Além disso, a mistura asfáltica é considerada homogênea e, portanto, assume-se que a descrição constitutiva da amostra é válida para todos os pontos da mistura asfáltica. Considera-se ainda que o nível de tensão aplicado

na mistura asfáltica não é suficiente para que a orientação dos agregados resulte em algum comportamento anisotrópico (THEISEN, 2006). Apesar da série de simplificações adotadas, pode-se afirmar que a formulação apresentada nesta seção do modelo viscoelástico no MEF é a mais frequentemente adotada na pesquisa nacional. Modelos constitutivo-computacionais mais sofisticados podem ser consultados em TASHMAN (2003), SOUZA (2005), DESSOUKY (2005) e TEIXEIRA *et al.* (2007).

## CAPÍTULO 3

### OPERACIONALIZAÇÃO DA MODELAGEM CONSTITUTIVA VISCOELÁSTICA NO DOMÍNIO DO TEMPO

O presente capítulo apresenta o programa computacional desenvolvido especificamente para tornar operacional a caracterização constitutiva no domínio do tempo de materiais viscoelásticos na região de linearidade por meio do uso séries de Prony. Para tanto, são citadas a motivação para criação deste programa computacional específico bem como o ambiente de desenvolvimento utilizado. Na sequência, são mostradas as principais classes que compõe este programa desenvolvido sob o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). Ao final do capítulo são mostradas as funcionalidades do programa desenvolvido, seguido de uma validação da implementação no programa específico da técnica de ajuste de curva pelo método da colocação e do procedimento de interconversão formal (não aproximado), ambos baseados no uso de séries de Prony para funções viscoelásticas no domínio do tempo.

#### 3.1. MOTIVAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL *VISCOTOOL*

Conforme já apresentado no CAPÍTULO 2, a modelagem constitutiva viscoelástica utilizando um modelo analítico computacionalmente eficiente por séries de Prony apresenta alguns inconvenientes do ponto de vista operacional, seja na técnica de ajuste de curva envolvendo uma grande quantidade de graus de liberdade (coeficientes) para uma correta representação analítica (ver itens 2.3 e 2.4), seja no processo de interconversão para obtenção de funções viscoelásticas mais convenientes por meio da aplicação de integrais de convolução (ver item 2.5). Com o intuito de contornar estas dificuldades operacionais, em meados de 2007 o Laboratório de Mecânica dos Pavimentos da Universidade Federal do Ceará (LMP/UFC) iniciou o desenvolvimento de um programa computacional específico para fomentar o emprego de séries de Prony na modelagem constitutiva viscoelástica de materiais asfálticos. Este programa foi batizado de *ViscoTool* e teve como um de seus desenvolvedores o autor desta dissertação de mestrado. A evolução do desenvolvimento deste programa, bem como exemplos de sua aplicação, pode ser encontrada nos trabalhos de SOUSA *et al.*

(2008) e SILVA *et al.* (2008b). Na sequência é feita menção da filosofia de desenvolvimento utilizada, o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO), seguida de uma breve descrição do ambiente de desenvolvimento deste programa específico.

### **3.2. FILOSOFIA DE PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS E AMBIENTE DE DESENVOLVIMENTO DO *VISCO TOOL***

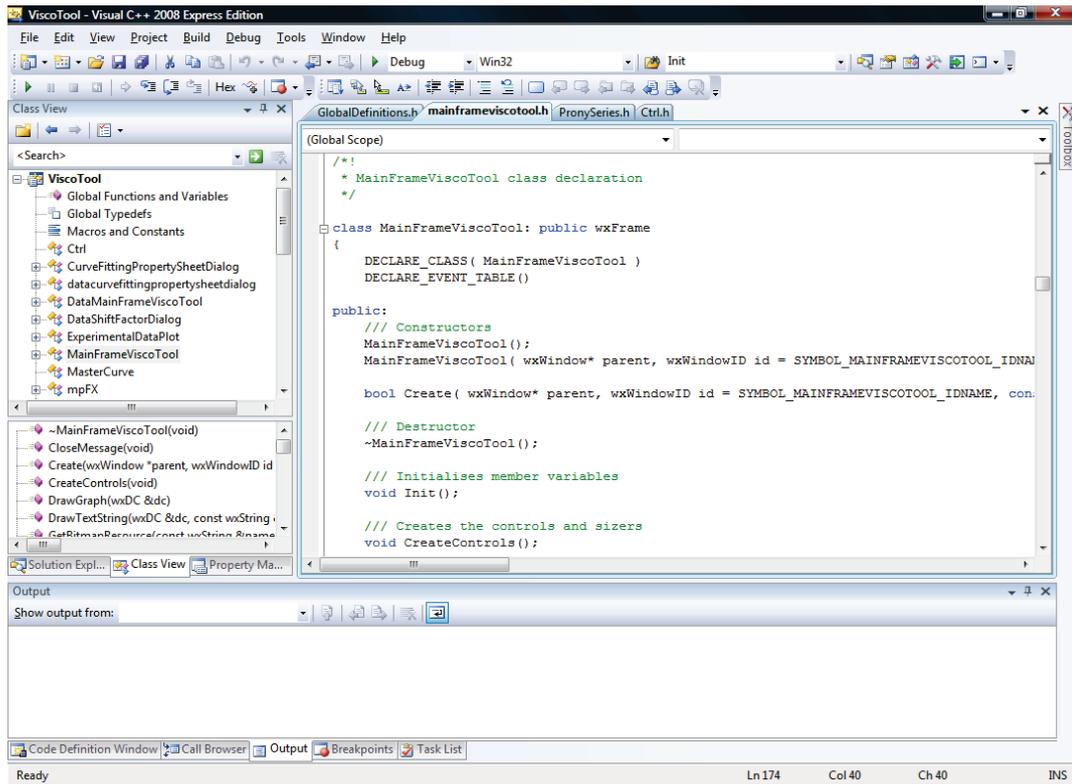
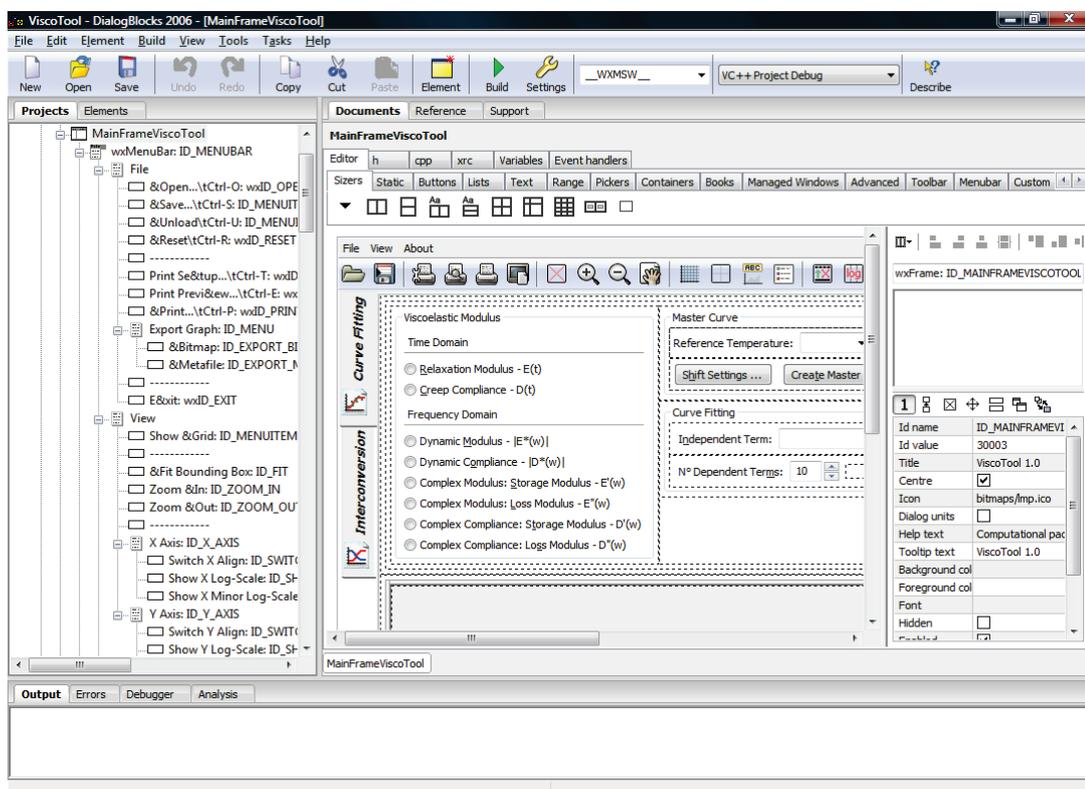
A primeira questão levantada a respeito da criação do programa de caracterização constitutiva viscoelástica diz respeito à filosofia de desenvolvimento, e, em última instância, à linguagem de programação utilizada. Para desenvolver o programa de caracterização viscoelástica *ViscoTool* foi decidido empregar conceitos da Filosofia de Orientação a Objetos, também conhecido por Programação Orientada a Objetos (POO). Existem inúmeras vantagens da POO frente à filosofia de Programação Estruturada (PE) mais clássica (STROUSTRUP, 1997; ZIMMERMANN *et al.*, 1998; ARCHER *et al.*, 1999; MARTHA e PARENTE JR., 2002; PRATA, 2005; HOLANDA *et al.*, 2006; FANG *et al.*, 2007). As principais vantagens são: (i) reutilização mais natural e facilitada de trechos de código pelo mecanismo de herança entre classes (*class inheritance*); (ii) proteção de dados (*data hiding*) pela definição de escopo de acesso, exigindo um mecanismo formal de passagem de mensagens entre objetos; (iii) sobrecarga de operadores (polimorfismo de funções) permitindo que múltiplas funções compartilhem o mesmo rótulo; (iv) definição de amizade entre classes (*friend classes*), que resulta em código fonte mais organizado; e (v) classes *templates* para reutilização de classes com mesmos atributos e estrutura de dados, mas tipo de dados diferentes. As vantagens citadas acima favorecem à POO no desenvolvimento de um código conceitualmente mais consistente, mais organizado, mais simples de incorporar novas implementações e mais produtivo.

Para emprego de conceitos de POO no desenvolvimento do programa proposto, foi decidido pelo uso da linguagem de programação C++, uma das linguagens científicas atualmente mais utilizadas no mundo (STROUSTRUP, 1997; PRATA, 2005). Associado à linguagem de programação C++, foi decidido também utilizar a biblioteca gráfica *wxWidgets* (SMART *et al.*, 2007) que se revela uma ótima opção para construir interfaces gráficas de programas desenvolvidos em C++. Esta biblioteca, além

de empregar compreensivamente os conceitos de POO utilizando a sintaxe da linguagem C++, apresenta outras características desejáveis tais como: (i) código livre, ou seja, pode-se utilizá-la para desenvolvimento de programas comerciais ou de uso livre sem necessidade de pagamento algum de direitos autorais; (ii) código aberto (*open source*), ou seja, o código fonte da biblioteca é aberto para que desenvolvedores de interface gráfica possam criar entidades gráficas personalizadas; (iii) portabilidade multi-plataforma, que permite migrar facilmente o programa desenvolvido de um sistema operacional para outro (o programa desenvolvido pode migrar, por exemplo, do sistema operacional Windows para Linux realizando somente pequenas alterações); e (iv) característica look-and-feel nativa, que significa que a interface gráfica construída pela biblioteca *wxWidgets* apresenta mesma aparência do sistema operacional utilizado (formato e cores de janelas, menus, abas, etc.) e, portanto, acompanha a evolução da aparência gráfica dos sistemas operacionais.

Com relação ao ambiente de desenvolvimento, foram utilizadas duas ferramentas de desenvolvimento de aplicativos: (i) a IDE (*Integrated Development Environment*) *Microsoft Visual Studio C++ 2008 Express Edition* (MICROSOFT, 2008) e (ii) o programa de geração de interfaces gráficas *DialogBlocks 2006*, específico para o desenvolvimento otimizado de interfaces gráficas baseadas na biblioteca gráfica orientada a objetos *wxWidgets* (ANTHEMION, 2008).

Com o uso da IDE *Microsoft Visual Studio C++ 2008* (MICROSOFT, 2008) foram projetadas e desenvolvidas as classes de caráter eminentemente numérico (não gráficas), relativas, portanto, aos procedimentos de ajuste de curva e interconversão por séries de Prony de funções viscoelásticas no domínio do tempo descritos no CAPÍTULO 2. A Figura 3.1a mostra a tela inicial deste ambiente de programação integrado que reúne compilador, editor de código fonte e *debugger*.

(a) *Visual C++ Express* para desenvolvimento de classes numéricas(b) *DialogBlocks* para desenvolvimento de classes gráficas (interface gráfica)**Figura 3.1:** Ambiente de desenvolvimento do *ViscoTool*.

Por sua vez, o programa *DialogBlocks 2006* (ANTHEMION, 2008) indicado na Figura 3.1b permitiu o desenvolvimento da interface gráfica de forma mais simplificada, uma vez que a criação do código fonte que descreve as entidades gráficas do programa desenvolvido é feita de maneira automática, bastando que o desenvolvedor insira as entidades gráficas na tela principal do *DialogBlocks 2006*. Este programa apresenta uma descrição das entidades gráficas disponíveis na biblioteca *wxWidgets*, que facilita a escolha da entidade mais adequada para criação da janela de interação com o usuário pretendida. Existe ainda a possibilidade de modificação manual do código gerado e compilação do mesmo dentro do ambiente *DialogBlocks 2006*.

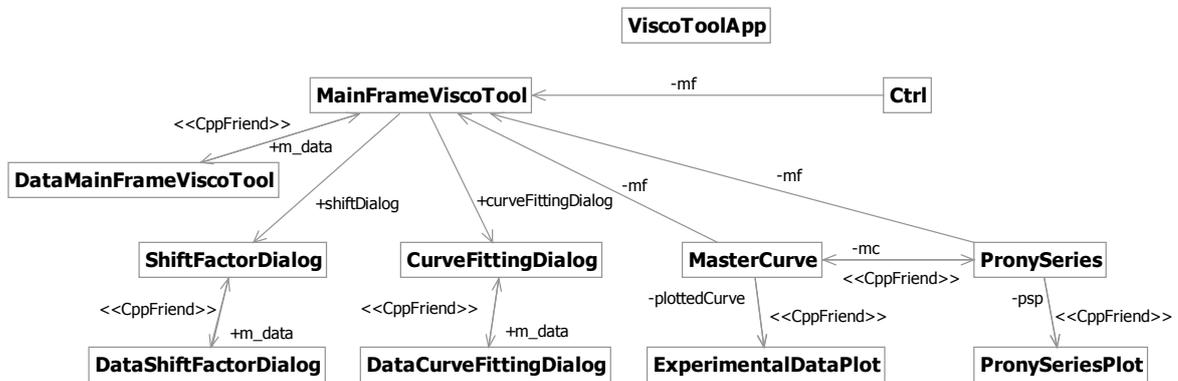
Um último recurso utilizado do ponto de vista de desenvolvimento do *ViscoTool* foi a biblioteca gratuita de construção de gráficos cartesianos, denominada *wxMathPlot* (SCHALIG e RONDINI, 2003). A biblioteca de gráficos cartesianos *wxMathPlot* é, por sua vez, um exemplo real da filosofia de código livre estimulada pela biblioteca gráfica *wxWidgets*, uma vez que a primeira é uma sub-biblioteca da segunda criada pelos desenvolvedores SCHALIG e RONDINI (2003) não pertencentes ao grupo *wxWidgets*. Destaca-se que a utilização do mecanismo de herança entre classes na biblioteca *wxMathPlot* para construção dos gráficos do programa *ViscoTool* é, por si só, uma amostra de que o paradigma de POO permite uma reutilização mais natural e facilitada de códigos já existentes.

### 3.3. ORGANIZAÇÃO DE CLASSES DO PROGRAMA *VISCOTOOL*

As principais classes criadas para a versão atual do *ViscoTool* estão exibidas na Figura 3.2 da página seguinte. Nesta figura, que segue a notação UML (*Unified Modeling Language*) (OMG, 1997), estão representadas classes tanto de natureza gráfica (classes *viscoToolApp*, *MainFrameViscoTool*, *ShifFactorDialog*, *CurveFittingDialog*, *ExperimentalDataPlot* e *PronySeriesPlot*), quanto de natureza numérica (classes *Ctrl*, *MasterCurve* e *PronySeries*).

A criação de inúmeras classes permitiu utilizar extensivamente o conceito de encapsulamento de dados, resultando em um controle maior sobre modificações pelo mecanismo formal de consulta e atribuição de dados (*set and get functions*). Além disso,

a criação de classes representando entidades com escopo de atuação limitado permitiu uma maior organização do código, tornando sua expansão mais fácil para versões futuras do *ViscoTool*. Os parágrafos seguintes apresentam uma breve descrição das classes gráficas e numéricas criadas.



**Figura 3.2:** Principais classes do programa de caracterização viscoelástica *ViscoTool*.

Com relação às classes gráficas criadas para o *ViscoTool*, tem-se inicialmente a classe *ViscoToolApp* que é responsável pela inicialização do programa pela instanciação da classe principal de interface com usuário (*MainFrameViscoTool*). Esta última é responsável pela tela inicial do *ViscoTool* e contém diversas entidades gráficas disponíveis na biblioteca *wxWidgets* (menus, toolbars, etc.) e uma área de plotagem derivada da biblioteca *wxMathPlot* para visualização dos resultados experimentais, construção de curva mestra e visualização de séries de Prony. Conforme indicado na Figura 3.2 a estrutura de dados desta classe é deslocada para uma segunda classe específica (classe *DataMainFrameViscoTool*). A conexão entre a classe gráfica (classe *MainFrameViscoTool*) e a classe contendo a estrutura de dados (classe *DataMainFrameViscoTool*) é feita pelo mecanismo de amizade entre classes (*friend classes*). Esta técnica, embora pareça um esforço desnecessário à primeira vista, é sugerido por SMART *et al.* (2006), um dos fundadores da biblioteca *wxWidgets*, para providenciar um código mais modular pela separação explícita entre o código fonte das entidades gráficas e sua estrutura de dados.

Outras duas classes gráficas criadas foram *ShiftFactorDialog* e *CurveFittingDialog* que representam caixas de diálogos secundárias para interação com usuário no que diz respeito à construção de curvas mestras pelo PSTT e técnica de

ajuste de curva para obtenção da série de Prony, respectivamente. A comunicação das mesmas com a classe gráfica principal (classe *MainFrameViscoTool*) é feita pelo mecanismo de ponteiros, mecanismo este computacionalmente eficiente, pois evita cópia desnecessária de estrutura de dados. Por sua vez, a classe principal *MainFrameViscoTool* tem acesso aos dados das classes *ShifFactorDialog* e *CurveFittingDialog* somente via chamada de funções de acesso (*set and get fuctions*), que é uma realização do mecanismo de encapsulamento de dados (PRATA, 2005). Nestas duas classes de diálogo secundárias também foi utilizada a técnica de isolamento da estrutura de dados de suas respectivas entidades gráficas.

Já com relação às classes numéricas do *ViscoTool*, temos inicialmente a classe *Ctrl* que é uma classe estática (PRATA, 2005) que gerencia todos os aspectos numéricos (não gráficos) do *ViscoTool*. O programa *ViscoTool* foi desenvolvido de tal forma que a classe numérica *Ctrl* é o único modo com que a classe gráfica principal *MainFrameViscoTool* pode passar informações para demais classes numéricas (classes *MasterCurve* e *PronySeries*). Esta decisão de projeto foi realizada pela definição de classe estática para *Ctrl* conforme sugerido no trabalho de HOLANDA *et al.* (2006).

A segunda classe numérica é a classe *MasterCurve* que é responsável por armazenar os dados experimentais de Função Fluência  $D(t)$  ou Módulo de Relaxação  $E(t)$  para as diferentes temperaturas de ensaio. Além disso, esta classe constrói a curva mestra da propriedade viscoelástica em questão a partir da aplicação dos fatores de translação horizontal  $\alpha_T$  (ver item 2.2.3) nos dados experimentais. Ao final, a curva mestra é ordenada ao longo do tempo pela chamada do algoritmo recursivo de ordenação computacionalmente eficiente QuickSort (PRESS, 2007). Logo após sua ordenação, a curva mestra é plotada utilizando a classe *ExperimentalDataPlot*, que é uma classe derivada da biblioteca *wxMathPlot*.

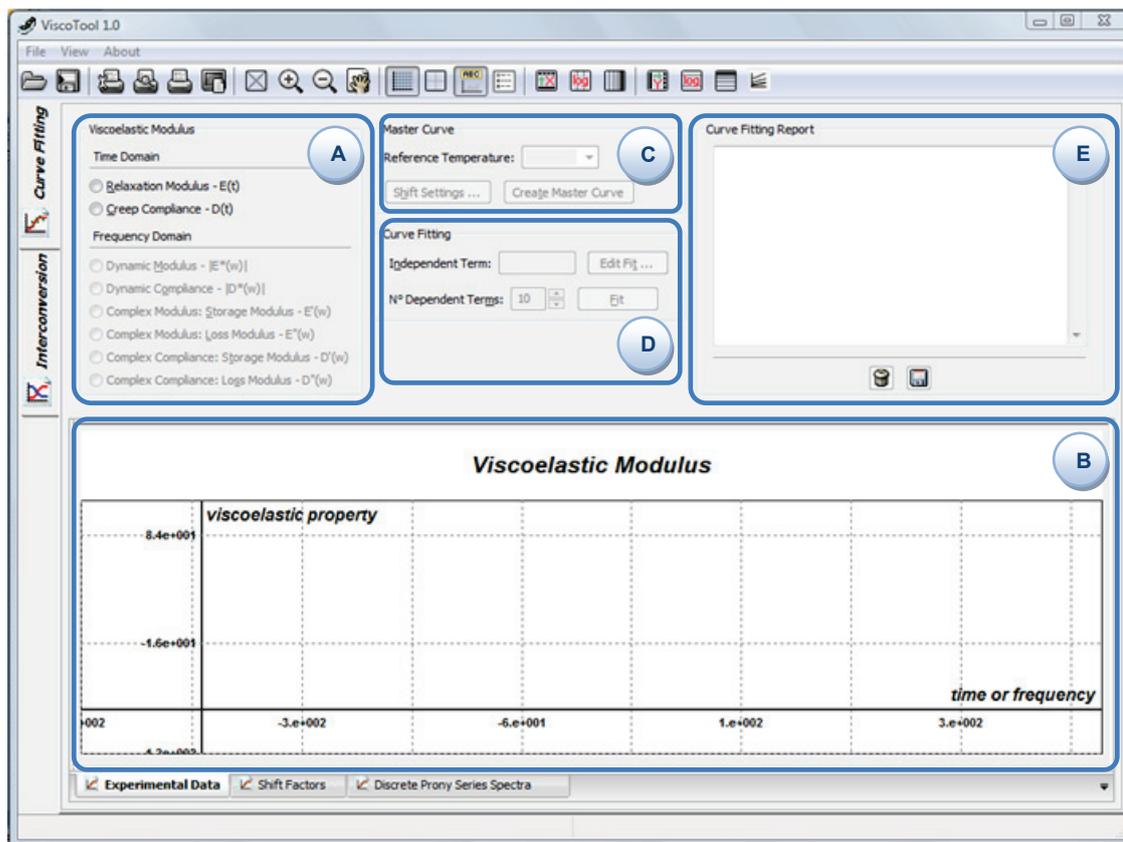
A última classe numérica construída trata-se da classe *PronySeries* que é responsável pelo armazenamento das constantes (graus de liberdade) das séries de Prony indicadas nas equações (2.24) e (2.25). Esta classe contém os métodos que realizam o ajuste de curva da série de Prony pelo método da colocação mais clássico (com e sem pré-suavização) e método da colocação por mínimos quadrados linear,

descritos nos item 2.4 da revisão bibliográfica. A partir da classe *PronySeries* é realizada também a interconversão entre propriedades viscoelásticas no domínio do tempo mostrada no item 2.5. Neste caso, a classe *Ctrl* contém os métodos que realizam a interconversão, a partir da consulta dos atributos da classe *PronySeries*. Para fins de informação, o sistema linear resultante do ajuste de curva e/ou interconversão é resolvido pelo algoritmo de Gauss-Jordan com pivoteamento parcial, que é um algoritmo numericamente estável para resolução de pequenos sistemas lineares (PRESS, 2007).

Ao final, as séries de Prony, ajustada a partir dos dados experimentais e interconvertida, são plotadas pela classe *PronySeriesPlot*, que, conforme já explicado anteriormente, consiste em uma classe derivada da biblioteca *wxMathPlot*. No próximo item, são mostradas as funcionalidades do programa *ViscoTool* do ponto de vista de um usuário do programa computacional.

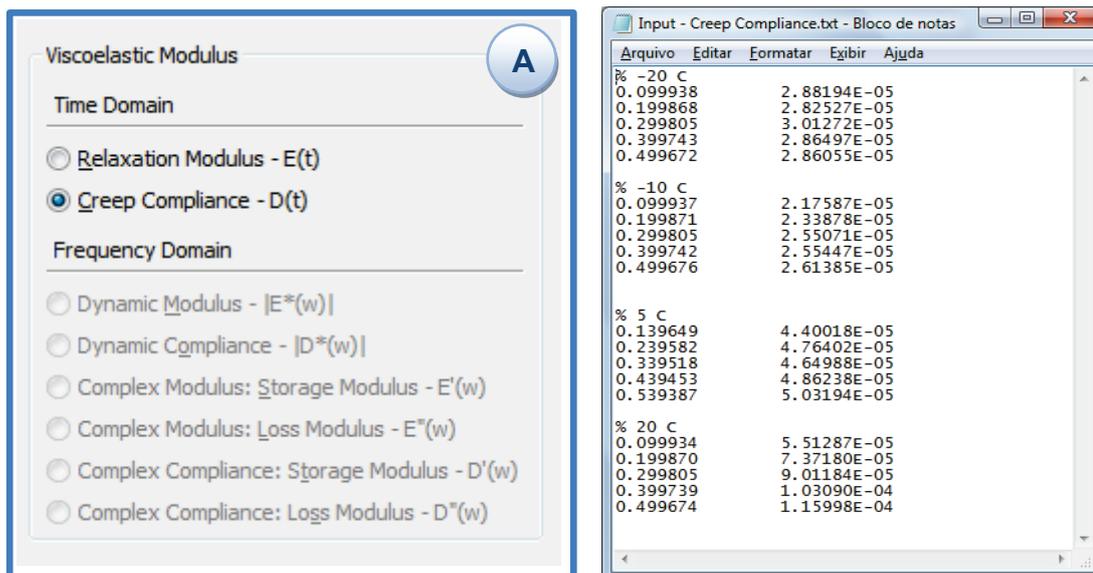
### **3.4. FUNCIONALIDADES DO PROGRAMA *VISCOTOOL***

A tela principal do programa computacional proposto para caracterização constitutiva viscoelástica está indicada na Figura 3.3. Este programa apresenta duas abas principais, uma primeira denominada *Curve Fitting* e uma segunda denominada *Interconversion*. A aba *Curve Fitting* possibilita ao usuário construir a curva mestra pelo PSTT a partir dos resultados experimentais (**ver** item 2.2.3) e realizar o ajuste de curva para obtenção dos coeficientes da série de Prony (**ver** item 2.4). Além disso, a série de Prony da função viscoelástica a ser interconvertida (**ver** item 2.5) é prontamente calculada logo após o ajuste de curva dos dados experimentais, permitindo avaliar mais facilmente a qualidade dos resultados da modelagem constitutiva com um todo (ajuste de curva e interconversão). Espera-se que versões futuras do programa *ViscoTool*, possam contemplar o desenvolvimento da interface gráfica e rotinas numéricas da aba *Interconversion* que, por sua vez, garantirá uma maior flexibilidade de uso do *ViscoTool*, como por exemplo, carregar um arquivo com série de Prony de uma propriedade e realizar interconversões sem necessariamente ter como origem resultados experimentais.



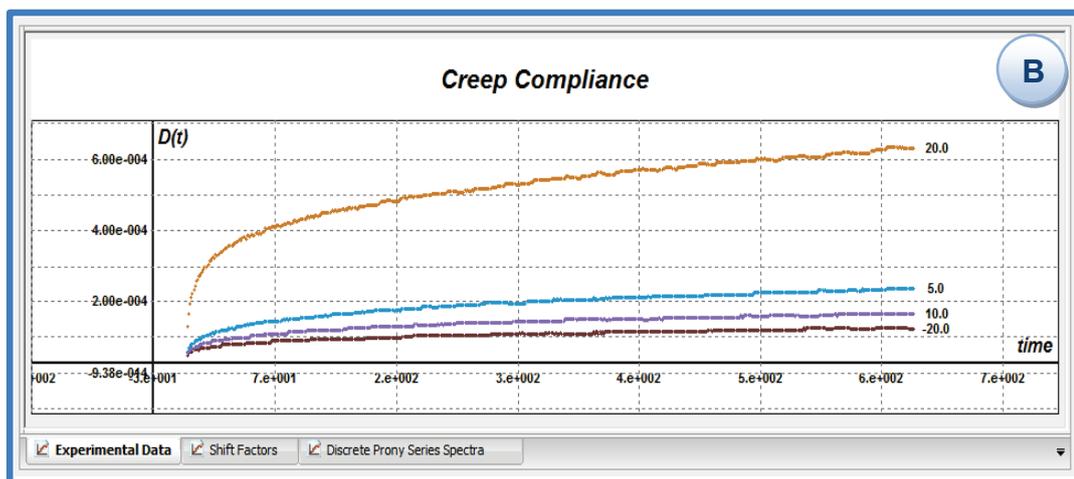
**Figura 3.3:** Tela principal do programa de caracterização viscoelástica *ViscoTool*.

Na Figura 3.3 estão indicadas diferentes regiões de interação com o programa (rotuladas com letras de A até E) que serão descritas a seguir, segundo a sequência natural de uso do programa. Inicialmente, o usuário seleciona a propriedade viscoelástica a ser investigada – Função Fluência  $D(t)$  ou Módulo de Relaxação  $E(t)$  – conforme indicada na região A da Figura 3.3 e ampliado na Figura 3.4a. Nesta última figura que está exibida de forma inativa as propriedades viscoelásticas no domínio da frequência derivadas da Compliância Complexa  $D^*(\omega)$  e Módulo Complexo  $E^*(\omega)$ . Espera-se versões futuras do programa *ViscoTool* possam contemplar estas propriedades haja vista que tratam-se de propriedades cujos resultados experimentais são mais facilmente obtidas e com maior acurácia (MEDEIROS JR., 2006; KIM, 2009). Logo após, o usuário realiza a leitura de um arquivo de texto contendo os dados experimentais organizados segundo a estrutura mostrada na Figura 3.4b.



(a) escolha da propriedade viscoelástica

(b) arquivo de dados de entrada



(c) área de plotagem dos dados experimentais e séries de Prony

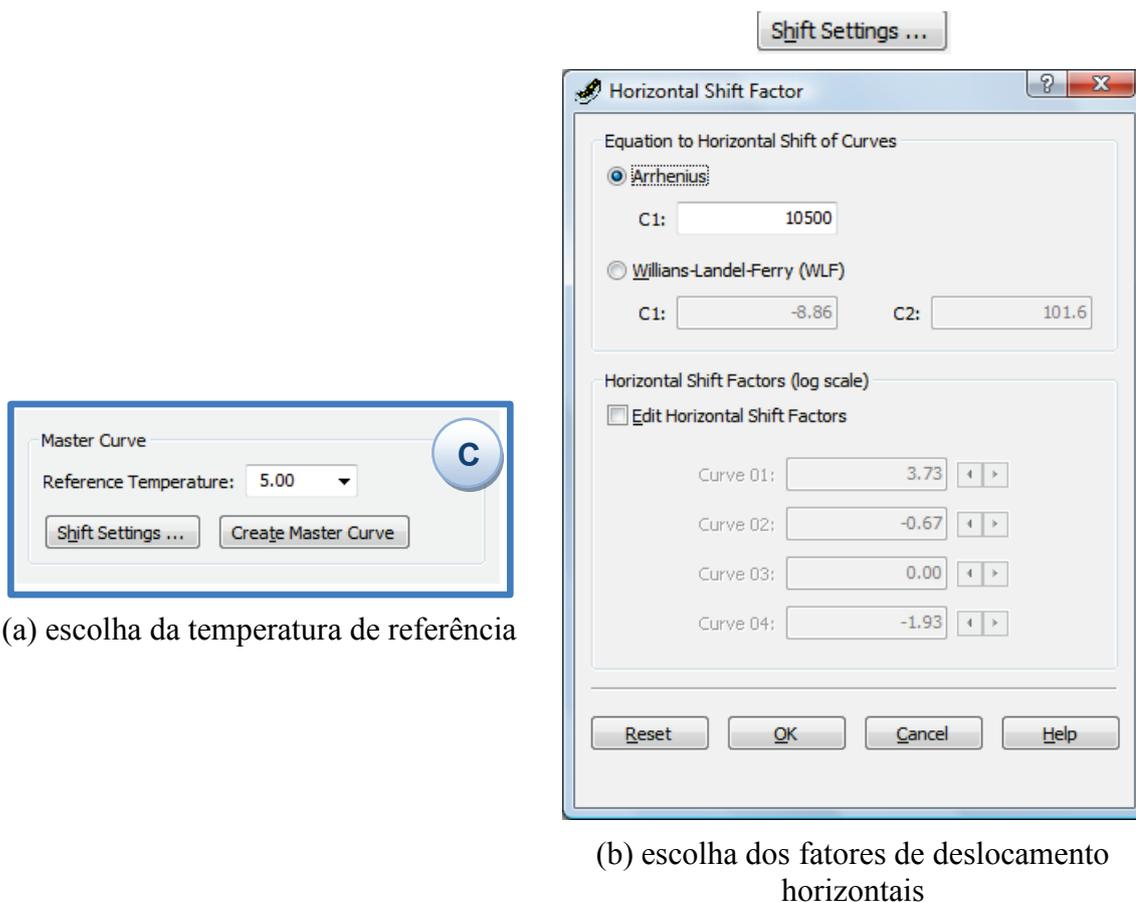
**Figura 3.4:** Dados de entrada e visualização no *ViscoTool*.

No arquivo de dados de entrada (*input file*) da Figura 3.4b as observações experimentais são divididas em blocos de acordo com a(s) temperatura(s) de realização de ensaio. Em cada bloco é reportada uma lista de pares: tempo *versus* propriedade viscoelástica. Em seguida, os resultados experimentais para cada temperatura de ensaio são automaticamente mostrados na região B da Figura 3.3 (ver ampliação na Figura 3.4c).

Nesta última figura, estão indicadas ainda sub-abas que, em versões futuras do *ViscoTool*, serão capazes de plotar os fatores de deslocamento horizontais (sub-aba *Shift*

*Factors*) e o espectro discreto da série de Prony (sub-aba *Discrete Prony Series Spectra*). Ressalta-se que antes da criação do arquivo com dados de entrada, talvez seja necessário realizar, em um ambiente externo ao programa *ViscoTool*, um pré-tratamento dos dados experimentais para eliminar *outliers* e/ou trechos iniciais que apresentam efeitos inerciais não desprezíveis. Por padrão, as curvas experimentais de  $D(t)$  ou  $E(t)$  são plotadas em escala geométrica para ambos os eixos coordenados. No entanto, o usuário tem a opção de plotar o gráfico em escala logarítmica no eixo horizontal (tempo), no eixo vertical (propriedade viscoelástica), ou ambas.

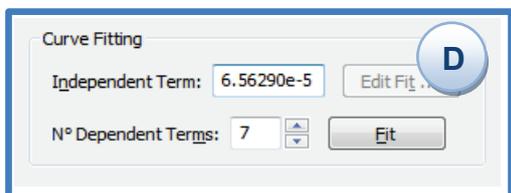
Após a leitura e a plotagem dos dados experimentais, o usuário escolhe uma temperatura de referência  $T_R$  na região C da Figura 3.3 (ver ampliação na Figura 3.5a) para aplicar os fatores de deslocamento horizontais nas curvas experimentais e, então, construir a curva mestra. Na sequência o usuário chama uma caixa de diálogo que trata dos detalhes da construção da curva mestra segundo a Figura 3.5b.



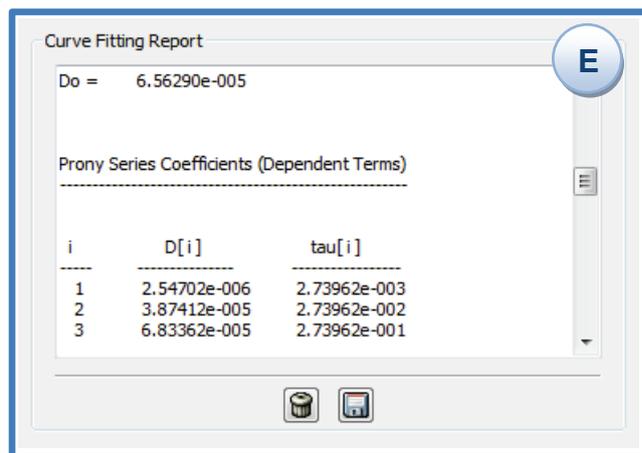
**Figura 3.5:** Construção de curva mestra no *ViscoTool*.

Na caixa de diálogo da Figura 3.5b o usuário pode escolher qual critério utilizar para o cálculo dos fatores de deslocamento horizontais, se a Equação (2.13) do método de Arrhenius ou se a Equação (2.15) do método de WLF. Ainda nesta caixa de diálogo, foi disponibilizada ao usuário a flexibilidade de escolha de quaisquer fatores de translação horizontais, podendo, por exemplo, aplicar a equação de Arrhenius para um grupo de curvas experimentais e a equação de WLF para um segundo grupo. Na sequência, o *ViscoTool* constrói a curva mestra e a exibe na área de plotagem da Figura 3.4c.

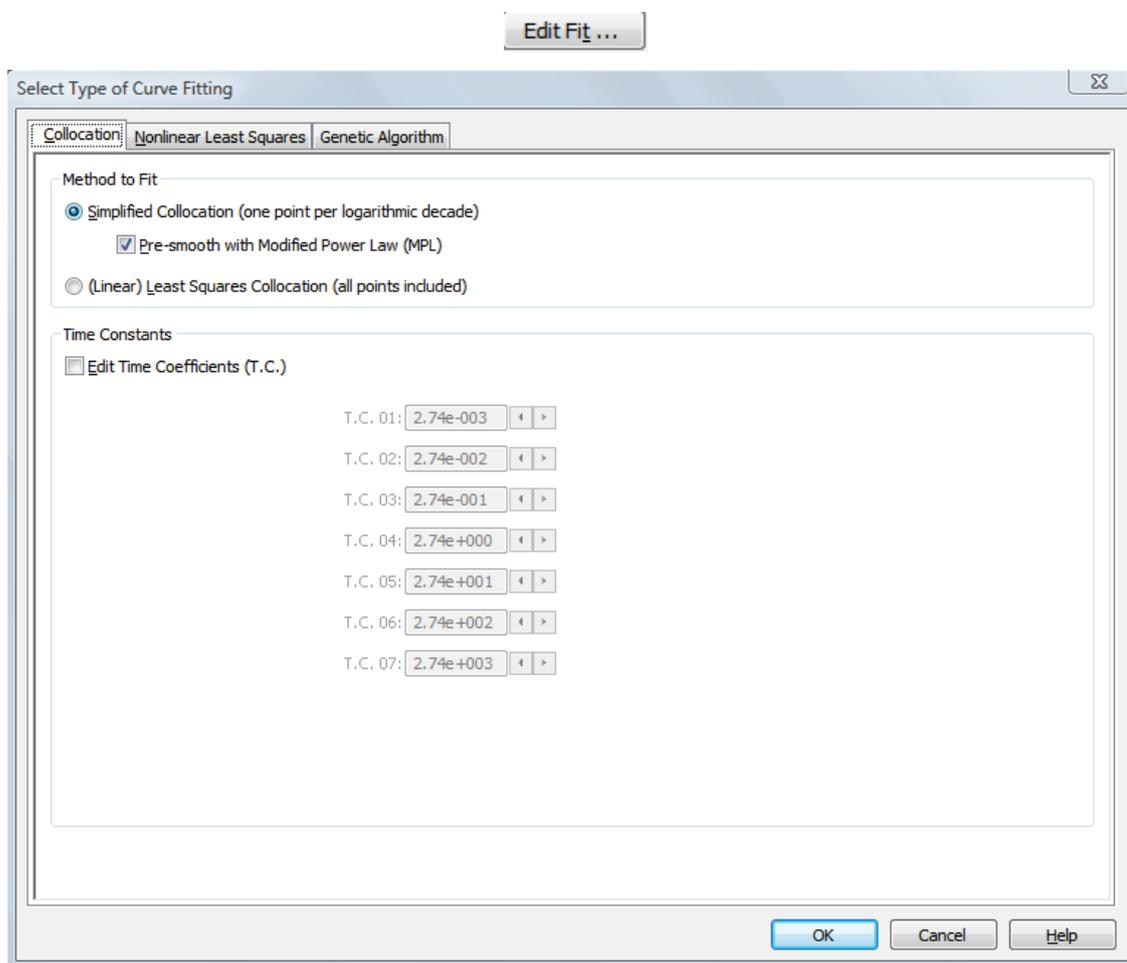
A próxima etapa consiste no ajuste de curva a partir da curva mestra conforme indicado na Figura 3.6 da página 74. O programa *ViscoTool* sugere ao usuário os valores mais prováveis para o termo independente ( $D_0$  ou  $E_\infty$ ) e para o número de termos dependentes ( $D_j$  ou  $E_i$ ) conforme indicado na região D da Figura 3.3 (ver ampliação na Figura 3.6a). No entanto, o usuário pode escolher valores mais apropriados uma vez que a identificação do termo independente ( $D_0$  ou  $E_\infty$ ) deve ser baseada na inspeção gráfica da curva mestra. A Figura 3.6c exibe a caixa de diálogo com os detalhes da técnica de ajuste de curva. Nesta caixa de diálogo existem três abas, sendo que somente a aba *Collocation* está disponível, que realiza o ajuste pelo método da colocação. As demais abas (*Nonlinear Least Squares* e *Genetic Algorithm*) devem ser desenvolvidas em versões futuras, sob a expectativa de tornar o processo operacional de ajuste de séries de Prony uma tarefa ainda eficiente. O usuário pode então escolher entre o método da colocação clássico de SCHAPERY (1961) descrito no item 2.4.1.1 (sem ou com pré-suavização da curva mestra por meio da LPM) ou o método da colocação por Mínimos Quadrados Linear (MQL) descrito no item 2.4.1.2. É possibilitado ainda ao usuário escolher constantes de tempo não rigorosamente espaçadas de uma década logarítmica.



(a) termo independente e quantidade de termos dependentes



(b) relatório da série de Prony ajustada e interconversão



(c) escolha das constantes de tempo para método da colocação

**Figura 3.6:** Ajuste de curva por série de Prony no *ViscoTool*.

Ao final, um relatório é criado na área indicada região E da Figura 3.3 (ver ampliação na Figura 3.6b) contendo todos os graus de liberdade (coeficientes) da série

de Prony ajustada da função experimental investigada –  $D_0$ ,  $\tau_j$  e  $D_j$  para a Função Fluência  $D(t)$ ; e  $E_\infty$ ,  $\rho_i$  e  $E_i$  para o Módulo de Relaxação  $E(t)$  – e da função viscoelástica prontamente interconvertida. A representação gráfica das séries de Prony ajustada e interconvertida são então exibidas na região de plotagem. No relatório são mostrados também o nível de ajuste mensurado pelo coeficiente de determinação ajustado  $R_{ajust}^2$  bem como as opções iniciais escolhidas. Este relatório pode então ser copiado para documento de texto ou planilha eletrônica para posterior análise dos resultados. Por fim, ressalta-se que este processo de ajuste de curva e interconversão acoplada pode ser repetido no *ViscoTool* quantas vezes o usuário julgue necessário para obtenção de bons resultados de modelagem constitutiva, sendo permitido escolher quais curvas exibir na área de plotagem ao longo deste processo.

### **3.5. VALIDAÇÃO DO AJUSTE DE CURVA E INTERCONVERSÃO UTILIZANDO O *VISCO TOOL***

Para validação da implementação das técnicas de ajuste de curva e interconversão no *ViscoTool* foram tomados por base os resultados mostrados na Tabela 3.1, que contém a série de Prony do Módulo de Relaxação  $E(t)$  e da Função Fluência  $D(t)$  de uma mistura asfáltica descrita em KIM (2008). Como referência, o trabalho de GIBSON *et al.* (2003) também contém séries de Prony das propriedades viscoelásticas no domínio do tempo de misturas asfálticas.

A série de Prony do Módulo de Relaxação descrita nesta tabela foi obtida a partir de um ajuste de curva de medidas experimentais realizadas por KIM (2008). Por sua vez, KIM (2008) obteve a Função Fluência a partir da interconversão mostrada pela Equação (2.41), sob a aproximação de mesmas constantes de tempo da função alvo  $\tau_j$  e função fonte  $\rho_i$  (ver item 2.5.2). Pode-se verificar que um termo dependente de cada série de Prony apresentou valor negativo, exemplificando que a obtenção de termos (dependentes) todos positivos de uma série de Prony não é uma questão trivial, seja durante o ajuste de curva a partir de dados experimentais, seja durante o processo de interconversão analítica.

**Tabela 3.1:** Módulo de Relaxação  $E(t)$  e Função Fluência interconvertida  $D(t)$  de mistura asfáltica – obtidos de KIM (2008).

<b>Propriedade Medida: Módulo de Relaxação <math>E(t)</math></b>			<b>Propriedade Interconvertida: Função Fluência <math>D(t)</math></b>		
<b><math>i</math></b>	<b><math>\rho_i</math> (s)</b>	<b><math>E_i</math> (MPa)</b>	<b><math>j</math></b>	<b><math>\tau_j</math> (s)</b>	<b><math>D_j</math> (1/MPa)</b>
1	1,00E-6	9,34E+2	1	1,00E-6	1,26E-6
2	1,00E-5	4,09E+3	2	1,00E-5	6,53E-6
3	1,00E-4	5,39E+3	3	1,00E-4	1,54E-5
4	1,00E-3	4,84E+3	4	1,00E-3	2,48E-5
5	1,00E-2	5,19E+3	5	1,00E-2	5,27E-5
6	1,00E-1	2,96E+3	6	1,00E-1	1,64E-4
7	1,00E+0	1,31E+3	7	1,00E+0	3,33E-4
8	1,00E+1	1,33E+2	8	1,00E+1	2,93E-3
9	1,00E+2	1,14E+2	9	1,00E+2	3,21E-3
10	1,00E+3	3,57E+1	10	1,00E+3	1,63E-2
11	1,00E+4	1,44E+0	11	1,00E+4	7,48E-3
12	1,00E+5	-3,00E-1	12	1,00E+5	-1,52E-3
<b>Termo Independente:</b> $E_\infty = 3,45E+1$ MPa			<b>Termo Independente:</b> $D_0 = 4,00E-5$ 1/MPa		

Conforme já discutido no item 2.2.1 da revisão bibliográfica, do ponto de vista experimental, o sentido de interconversão mais apropriado é, na realidade, o inverso daquele mostrado por KIM (2008) e transcrito na Tabela 3.1. Ou seja, partindo de resultados experimentais de Função Fluência  $D(t)$ , o sentido prático da interconversão no domínio do tempo é realizar a interconversão por meio da Equação (2.42) para obter o Módulo de Relaxação  $E(t)$ , que é o módulo viscoelástico linear utilizado em simulações numéricas pelo MEF.

Dessa forma, considerando a Função Fluência  $D(t)$  mostrada na Tabela 3.1 como a propriedade viscoelástica fornecida experimentalmente, foi testada a técnica de ajuste de curva pelo método da colocação por MQL mostrada pela Equação (2.40). Os coeficientes ajustados utilizando o programa *ViscoTool* para a Função Fluência estão exibidos na Tabela 3.2 a seguir.

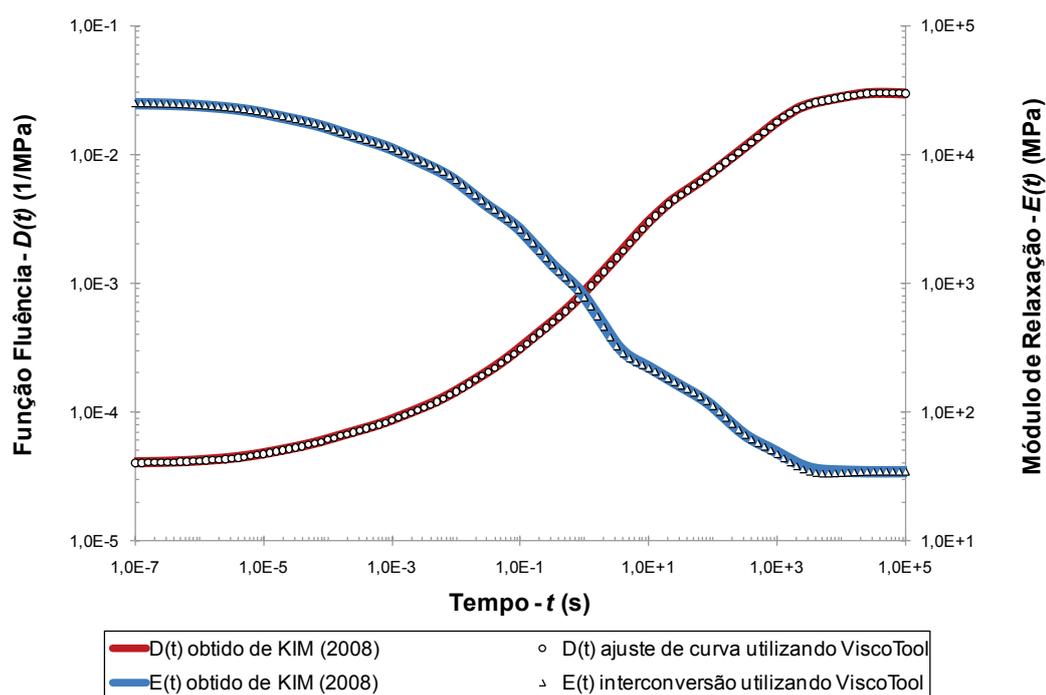
**Tabela 3.2:** Função Fluência  $D(t)$  e Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  de mistura asfáltica – obtidos pelo *ViscoTool*.

<b>Propriedade Ajustada pelo Método da Colocação: Função Fluência <math>D(t)</math></b>			<b>Propriedade Interconvertida: Módulo de Relaxação <math>E(t)</math> (<math>\rho_i = \tau_j</math>)</b>		
<b><math>j</math></b>	<b><math>\tau_j</math> (s)</b>	<b><math>D_j</math> (1/MPa)</b>	<b><math>i</math></b>	<b><math>\rho_i</math> (s)</b>	<b><math>E_i</math> (MPa)</b>
1	1,00E-6	1,32E-6	1	1,00E-6	8,97E+2
2	1,00E-5	6,26E-6	2	1,00E-5	3,81E+3
3	1,00E-4	1,61E-5	3	1,00E-4	5,77E+3
4	1,00E-3	2,34E-5	4	1,00E-3	4,53E+3
5	1,00E-2	5,53E-5	5	1,00E-2	5,33E+3
6	1,00E-1	1,59E-4	6	1,00E-1	3,04E+3
7	1,00E+0	3,43E-4	7	1,00E+0	1,31E+3
8	1,00E+1	2,91E-3	8	1,00E+1	1,15E+2
9	1,00E+2	3,24E-3	9	1,00E+2	1,16E+2
10	1,00E+3	1,63E-2	10	1,00E+3	4,03E+1
11	1,00E+4	7,48E-3	11	1,00E+4	-2,53E+0
12	1,00E+5	-1,51E-3	12	1,00E+5	3,56E-1
<b>Informações Adicionais:</b> Método de Regressão: Colocação com mínimos quadrados linear Coeficiente de Determinação Ajustado: $R_{ajust}^2 = 0,9999$ <b>Termo Independente:</b> $D_0 = 4,00E-5$ 1/MPa			<b>Informações Adicionais:</b> Método de Interconversão: Integral de convolução com escolha simplificada das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i = \tau_j$ ) <b>Termo Independente:</b> $E_\infty = 3,44E+1$ MPa		

Como se pode verificar, os coeficientes ajustados da série de Prony da Função Fluência obtidos pelo *ViscoTool* (ver Tabela 3.2) estão bastante próximos dos resultados de KIM (2008) (ver Tabela 3.1), confirmando que a técnica da colocação por MQL foi corretamente postulada segundo a Equação (2.40) e a sua implementação no *ViscoTool* foi realizada com sucesso.

Por sua vez, a comparação dos coeficientes do Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  da Tabela 3.2 com aqueles da Tabela 3.1 mostram que a interconversão no sentido  $D(t) \rightarrow E(t)$  foi corretamente deduzida segundo a Equação (2.42) (ver também Apêndice A) e implementada no *ViscoTool*. Nota-se que, assim como os resultados descritos na Tabela 3.1, o Módulo de Relaxação interconvertido, descrito na Tabela 3.2, obtido pelo *ViscoTool* apresentou um termo dependente negativo para sua série de Prony, devido ao termo negativo da série de Prony da função fonte simulada (Função Fluência). O sentido inverso de interconversão, aquele disponível no trabalho de PARK e SCHAPERY (1999),  $E(t) \rightarrow D(t)$ , também foi corretamente implementado e testado no programa desenvolvido *ViscoTool*.

A Figura 3.7 mostra a representação gráfica das séries de Prony mostradas na Tabela 3.1 e na Tabela 3.2.



**Figura 3.7:** Validação do ajuste de curva e interconversão realizados pelo *ViscoTool*.

Embora os coeficientes das séries de Prony obtidos com o uso do *ViscoTool* (Tabela 3.2) não sejam rigorosamente idênticos àqueles descritos no trabalho de KIM (2008) (Tabela 3.1) verifica-se que o resultado gráfico é praticamente indistinguível

quando plotados em um gráfico com escala log-log e, portanto, admite-se que o programa *ViscoTool* gera resultados válidos no que diz respeito a ajuste de curva e interconversão baseados em séries de Prony.

Após a descrição da implementação computacional e funcionalidades do *ViscoTool*, bem como validação deste programa proposto para caracterização constitutiva viscoelástica, ressalta-se que existe uma série de melhorias a serem implantadas em versões futuras do *ViscoTool*. No CAPÍTULO 6 são listadas sugestões de melhorias no tocante à interface gráfica e aos métodos/técnicas numéricas envolvidas. No entanto, conforme será mostrado no CAPÍTULO 5, a versão atual do *ViscoTool* descrita nesta dissertação já disponibiliza um ferramental mínimo para caracterização constitutiva viscoelástica de materiais asfálticos de forma mais eficiente.

## CAPÍTULO 4

### MISTURAS ASFÁLTICAS INVESTIGADAS E PLANEJAMENTO DE ANÁLISE PELO MEF

Este capítulo descreve os materiais utilizados na composição das misturas asfálticas investigadas, AA e CA, seguido das especificações das dimensões dos corpos de prova utilizados. Na sequência são definidas as principais características do ensaio de Função Fluência  $D(t)$  para caracterização constitutiva viscoelástica linear das misturas investigadas. Ao final é realizada uma breve descrição das ferramentas computacionais utilizadas para realizar a simulação pelo MEF de uma estrutura típica de pavimento, bem como definição das camadas consideradas, dos modelos constitutivos associados a cada camada e do pulso de carga representativo da passagem de um eixo padrão sobre o pavimento.

#### 4.1. DEFINIÇÃO DAS MISTURAS ASFÁLTICAS

Para a caracterização constitutiva viscoelástica linear no domínio do tempo foram escolhidas duas misturas, o CA e a AA. Estas misturas são típicas de projetos de rodovias nacionais, sendo a primeira comum em vias de tráfego pesado e vias urbanas, e a segunda principalmente em regiões onde não há disponibilidade de material pétreo. As estatísticas descritivas de média e desvio padrão das propriedades dos corpos de prova indicadas na Tabela 4.1 foram estimadas com base na fabricação de 12 corpos de prova para cada mistura. O teor de ligante foi de 9,2% para a AA e 6,0% para o CA, sendo o ligante utilizado do tipo Cimento Asfáltico de Petróleo (CAP) classificado por penetração como CAP 50/70, produzido na Refinaria de Duque de Caxias – REDUC. Com relação à metodologia de dosagem, foram utilizadas as especificações Superpave do SHRP (*Strategic Highway Research Program*) considerando valores médios no percentual de vazios variando de 3,5 a 4,0%. Os agregados utilizados, de origem granítica, são provenientes da pedra de Itaitinga, situada a aproximadamente 30 km da cidade de Fortaleza, no Ceará. Na Tabela 4.1 está indicada ainda a composição granulométrica dos agregados das duas misturas, correspondentes à faixa C do DNIT

(BERNUCCI *et al.*, 2007). A representação gráfica da composição granulométrica das misturas está indicada na Figura 4.1.

**Tabela 4.1:** Especificação da AA e CA.

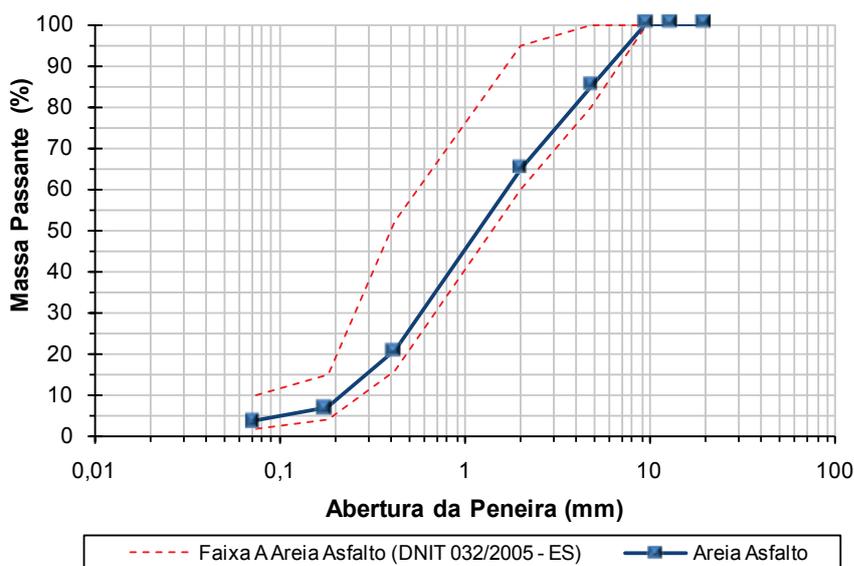
<i>Propriedade</i>	<i>Tipo de Mistura Asfáltica</i>	
	<i>AA</i>	<i>CA</i>
Tipo de Ligante	CAP 50/70	CAP 50/70
Teor de Ligante (%)	9,2	6,0
Média do Volume de Vazios (%)	4,0	3,6
Desvio Padrão do Volume de Vazios (%)	0,66	0,68
Média da Massa Específica (g/cm <sup>2</sup> )	2,217	2,323
Desvio Padrão da Massa Específica (g/cm <sup>2</sup> )	0,015	0,016
Altura do Corpo de Prova (mm)	150	150
Diâmetro do Corpo de Prova (mm)	100	100
Massa Total (g)	2570,0	2650,0
Massa de Agregados (g)	2333,6	2491,0
<i>Peneira (Abertura)</i>	<i>Massa Passante (%)</i>	
3/4" (19,1 mm) <sup>1</sup>	100	100
1/2" (12,7 mm)	100	88
3/8" (9,5 mm) <sup>2</sup>	100	78
Nº 4 (4,8 mm)	85	54
Nº 10 (2,0 mm)	65	34
Nº 40 (0,42 mm)	21	17
Nº 80 (0,18 mm)	7	10
Nº 200 (0,074 mm)	4	6
Fundo	–	–

<sup>1</sup> Diâmetro Nominal Máximo do Agregado (DNMA) para CA.

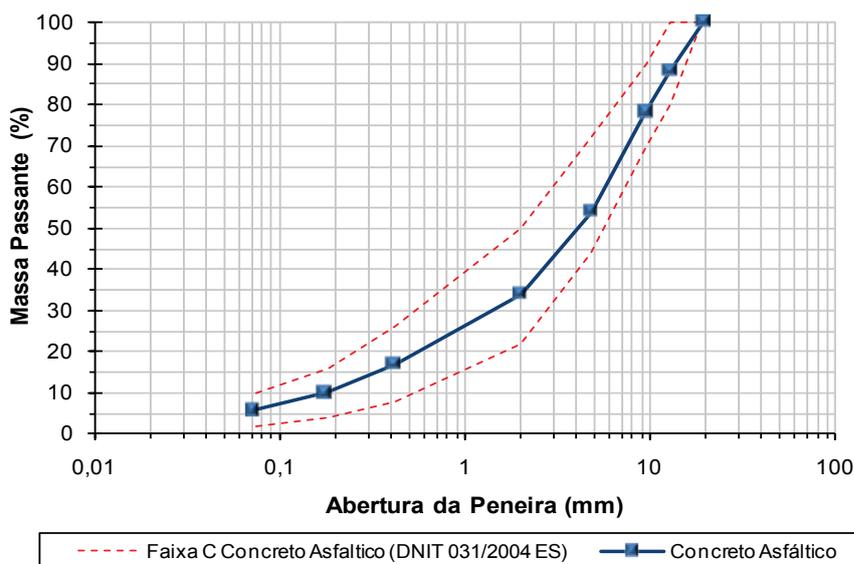
<sup>2</sup> Diâmetro Nominal Máximo do Agregado (DNMA) para AA.

Na tabela acima estão indicadas ainda as dimensões utilizadas para os corpos de prova de 100 mm de diâmetro e 150 mm de altura segundo especificações da norma americana AASHTO TP 62-03 (AASHTO, 2005). Na definição destas dimensões

assume-se, por hipótese, estar se trabalhando com um Elemento de Volume Representativo (EVR). No entanto, existem divergências na literatura quanto às dimensões dos corpos de prova de misturas asfálticas e cuidados operacionais para garantir um EVR apropriado. A seção a seguir discute as principais referências sobre dimensões de corpos de prova de misturas asfálticas, mostrando quais cuidados foram tomados para a fabricação dos corpos de prova do presente trabalho.



(a) AA

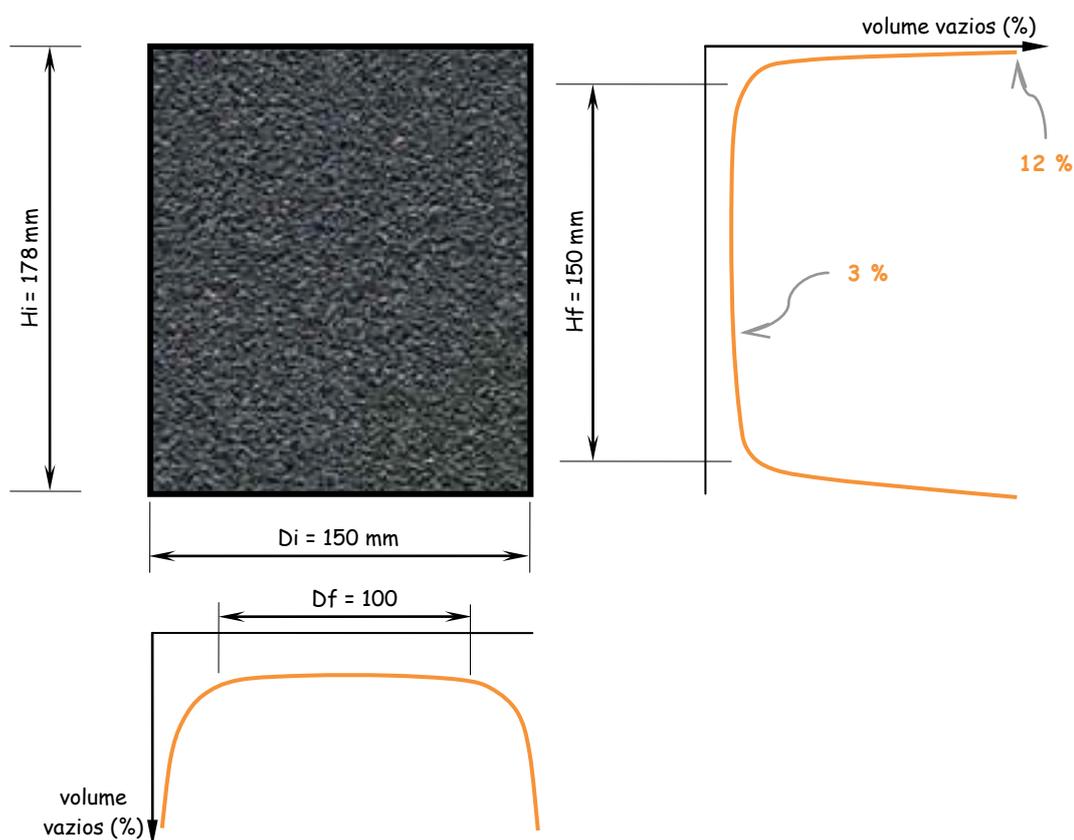


(b) CA

**Figura 4.1:** Composição granulométrica das misturas asfálticas.

## 4.2. DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA

A mistura asfáltica é um material essencialmente heterogêneo devido à natureza não regular dos materiais constituintes e ao processo de fabricação (SOUZA, 2005). Devido a isto, existem alguns cuidados a serem tomados durante a fabricação de corpos de prova de misturas asfálticas a fim de garantir um EVR. Um primeiro cuidado diz respeito à distribuição do percentual de vazios ao longo do corpo de prova. Segundo KIM (2006) o volume de vazios percentual no corpo de prova de uma mistura asfáltica fabricado no compactador giratório não é uniforme, tendendo a haver um maior volume de vazios nas regiões próximas as bordas do corpo de prova, conforme esquematizado na Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Distribuição do percentual de vazios no corpo de prova fabricado no compactador giratório.

Fonte: KIM (2006)

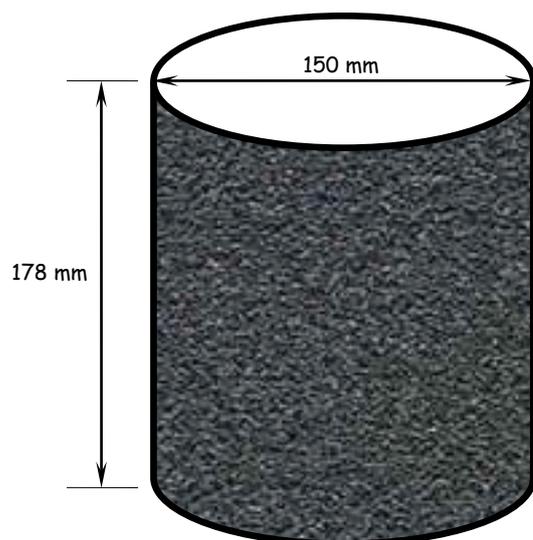
Para evitar o volume de vazios elevado nas bordas dos corpos de prova, que não corresponde ao volume de vazios de misturas em campo, KIM (2006) recomenda a

fabricação de corpos de prova com 178 mm de altura (limite máximo alcançado pelo compactador giratório) e 150 mm de diâmetro. Recomenda ainda que sejam, posteriormente, realizados cortes no corpo de prova nas direções axial e radial a fim de garantir um corpo de prova com percentual de vazios mais uniforme. As dimensões finais, recomendadas por KIM (2006), são 150 mm de altura e 100 mm de diâmetro, que, por sua vez, estão de acordo com o recomendado pela norma americana AASHTO TP 62-03 (AASHTO, 2005). Devido a dificuldades de manuseio da serra que realiza o corte radial dos corpos de prova, este procedimento operacional não foi realizado para a fabricação dos corpos de prova do presente trabalho. Recomenda-se que estudos futuros possam realizar este procedimento.

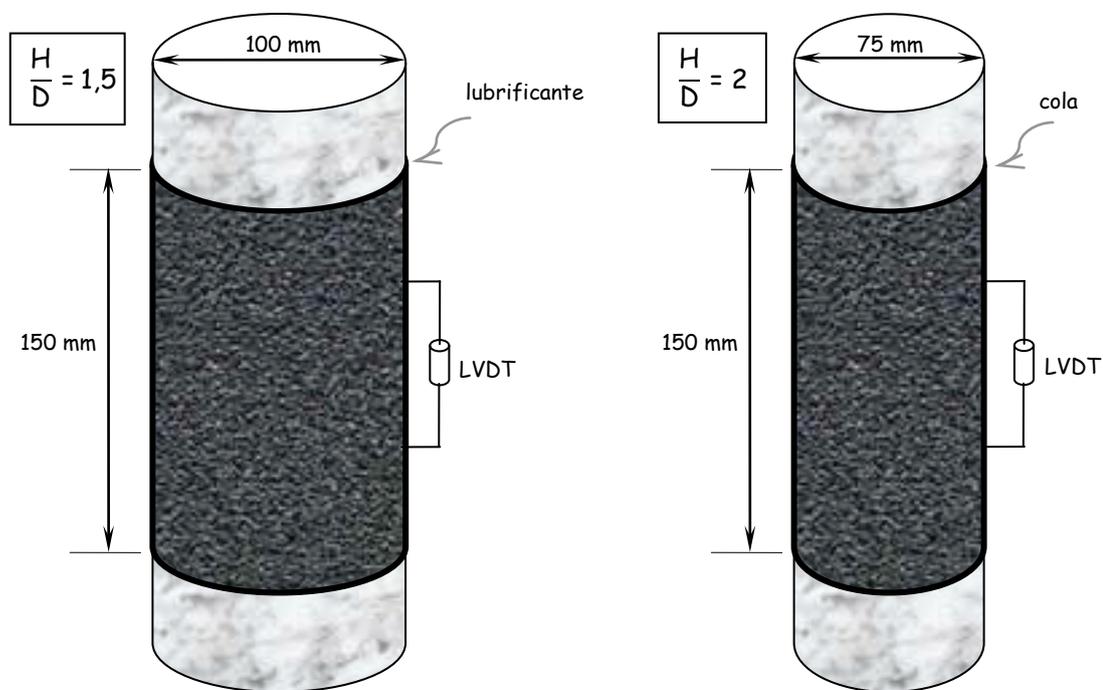
Um segundo cuidado a ser tomado trata da relação altura/diâmetro (H/D) do corpo de prova para minimizar os efeitos de borda (*edge effects*). A norma americana AASHTO TP 62-03 (AASHTO, 2005) recomenda uma relação H/D de 1,5. Por sua vez, a norma ASTM D 3497 (ASTM, 1979) recomenda uma relação H/D de 2, sugerindo um diâmetro de, no mínimo, 100 mm. Ambas as normas citam apenas ensaios de compressão axial. Por outro lado, KIM (2006) recomenda relações altura/diâmetro diferentes dependendo do tipo de ensaio a ser realizado, se de compressão ou de tração.

Conforme esquematizado na Figura 4.3, KIM (2006) recomenda uma relação  $H/D = 1,5$  para ensaios de compressão e uma relação  $H/D = 2$  para ensaios de tração. A exigência de uma relação H/D maior para ensaios de tração está associada à necessidade de fixação das bordas do corpo de prova com as placas metálicas do aparelho de medição para permitir o tracionamento do corpo de prova. Neste caso, ao tracionar (alongar) o corpo de prova no sentido axial sabe-se que haverá uma redução no diâmetro do corpo de prova devido ao efeito de Poisson. No entanto, devido à fixação das bordas para permitir o tracionamento, o estado de tensão próximo às bordas não é constante, interferindo significativamente nos resultados obtidos. Neste trabalho optou-se por realizar somente o ensaio de compressão devido à maior facilidade operacional, e, portanto, as dimensões dos corpos de prova fabricados para o presente trabalho foram 100 mm de diâmetro e 150 mm de altura, conforme recomendado por AASHTO (2005) e KIM (2006) e indicado na Figura 4.3a.

Uma terceira recomendação diz respeito ao posicionamento para os sensores de deslocamento linear, ou, LVDTs (*Linear Variable Differential Transformers*). Ainda segundo KIM (2006) deve-se dar preferência a medições das deformações tomando por base a porção central do corpo de prova a fim de minimizar o efeito indesejado do estado de tensão não uniforme próximo às bordas corpo de prova.



(a) fabricado no compactador giratório

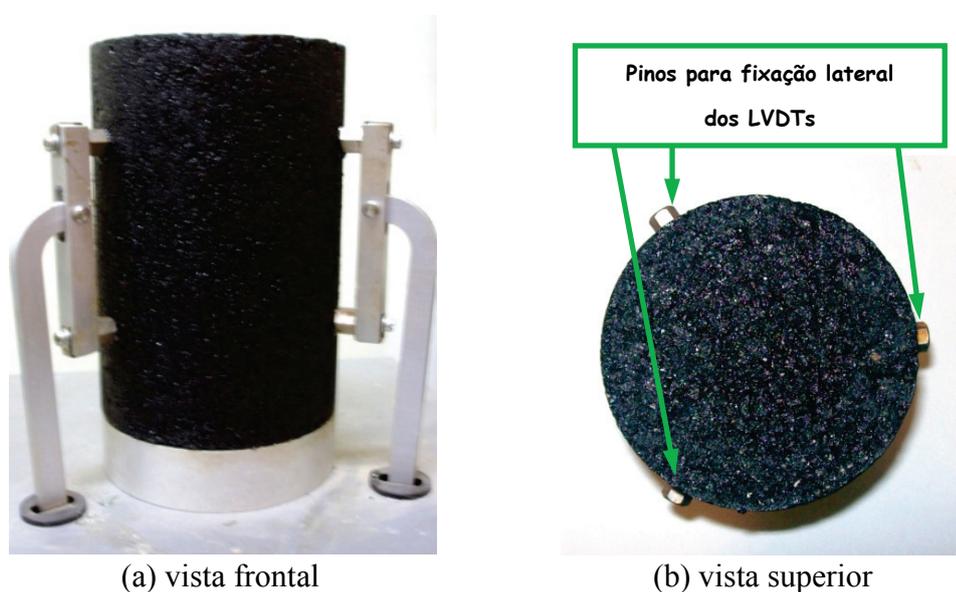


(b) ensaio de compressão

(c) ensaio de tração

**Figura 4.3:** Dimensões dos corpos de prova recomendadas por KIM (2006).

A Figura 4.4 mostra a fixação de 3 pinos espaçados radialmente que servirão de base para o posicionamento dos LVDTs na porção central dos corpos de prova fabricados para o presente estudo. O equipamento que realiza a fixação possui um gabarito que resulta em comprimento efetivo para cálculo das deformações de aproximadamente 76 mm. O método disponível de fixação dos pinos consiste na utilização de cola de pega rápida, não sendo utilizado nenhum dispositivo mais sofisticado que garanta uma fixação mais segura. Para trabalhos futuros, recomenda-se que seja desenvolvido um mecanismo mais confiável de fixação dos pinos espaçadores de fixação lateral dos LVDTs.



**Figura 4.4:** Posicionamento lateral dos LVDTs nos corpos de prova.

Um último cuidado a ser tomado diz respeito à limitação das dimensões do agregado utilizado. Para fabricar corpos de prova de misturas asfálticas deve-se ter em mente que agregados com dimensões próximas ao diâmetro  $D$  do corpo de prova não garante um EVR e, dessa forma, invalida qualquer resultado experimental obtido. Estudos experimentais citados por KIM (2006) mostraram que se deve utilizar um Diâmetro Nominal Máximo para o Agregado (DNMA) tal que a relação  $D/DNMA$ , seja maior ou igual a 3. Portanto, para o diâmetro utilizado de 100 mm, o DNMA corresponde a 33 mm, aproximadamente. De acordo com a Tabela 4.1, o DNMA das duas misturas utilizadas está abaixo do limite máximo estabelecido de 33 mm e, de acordo com o trabalho de KIM (2006), não haverá problemas de representatividade do

corpo de prova com relação à dimensão máxima dos agregados empregados para compor as misturas asfálticas AA e CA.

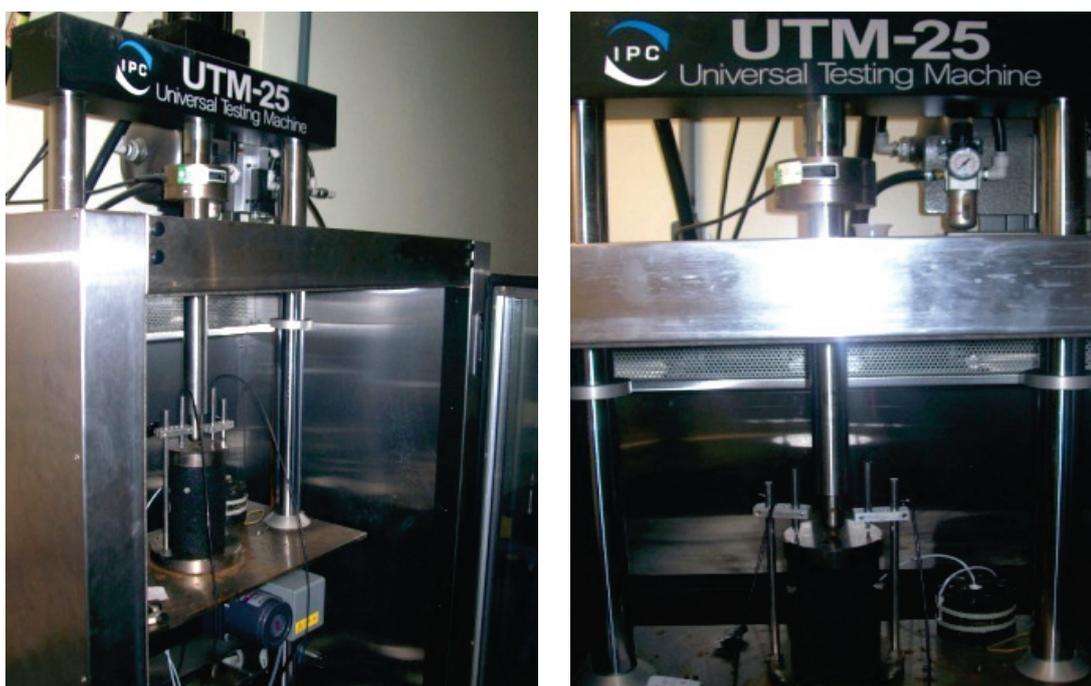
### 4.3. ESPECIFICAÇÕES DO ENSAIO DE FUNÇÃO FLUÊNCIA

O ensaio escolhido para caracterização viscoelástica linear das misturas asfálticas foi o ensaio de Função Fluência  $D(t)$ , que consiste na aplicação súbita de uma tensão axial constante  $\sigma_0$  no corpo de prova e medição das deformações axiais continuamente crescentes ao longo do tempo  $\varepsilon(t)$ , conforme já explicado no item 2.2.1 da revisão bibliográfica. O equipamento utilizado para ensaios de Função Fluência foi a Máquina UTM-25 (*Universal Testing Machine*) indicada na Figura 4.5, que pertence ao Laboratório de Mecânica dos Pavimentos da Universidade Federal do Ceará (LMP–UFC).

A UTM-25 possui uma câmara de isolamento térmico para imposição da temperatura desejada de ensaio. Este equipamento possibilita realizar diversos ensaios, sejam de tensão controlada ou deformação controlada, no domínio do tempo ou da frequência, não destrutivos ou destrutivos (ensaio de vida de fadiga, por exemplo). É importante chamar atenção que, do ponto de vista operacional, os ensaios com tensão controlada, tais como o ensaio de Função Fluência e Compliância Complexa, resultam em menores chances de prejudicar a célula de carga do equipamento utilizado (KIM, 2006) e, portanto, devem ser preferidos para uma primeira investigação. Por sua vez, os ensaios com deformação controlada se caracterizam pela aplicação súbita de uma elongação (deformação) e, conseqüentemente, podem induzir uma carga (tensão) elevada para os instantes iniciais do ensaio devido à parcela viscosa da mistura asfáltica que, em última instância, prejudicam a célula de carga do equipamento.

Para reduzir o tempo de execução do experimento, os ensaios de Função Fluência foram realizados para sete temperaturas diferentes: -16, -5, 10, 25, 33, 40 e 51 °C. Para escolha destas temperaturas foi tomado como referência a norma AASHTO TP 62-03 (AASHTO, 2005) que, por sua vez, recomenda a realização de ensaios nas temperaturas de -10, 5, 21, 38 e 54°C. Embora a norma AASHTO TP 62-03 tenha sido formulada para um ensaio no domínio da frequência (*Dynamic Modulus*) acredita-se

que as temperaturas recomendadas sejam igualmente válidas para o ensaio de Função Fluência (domínio do tempo), por tratar-se do mesmo material em estudo. Com o intuito de aproveitar a carga térmica natural vinda do ambiente externo à UTM-25, os ensaios a serem realizados partem da menor temperatura (-16 °C, no caso) para a maior temperatura (54 °C), também conforme recomendada pela norma AASHTO TP-62-03.



**Figura 4.5:** Máquina UTM-25 para ensaio de Função Fluência.

Com relação à duração do ensaio, decidiu-se utilizar um intervalo de tempo de 1 hora de duração, para cada uma das sete temperaturas estabelecidas no programa experimental. BERNUCCI *et al.* (2007) citam que não existe ainda um consenso sobre qual intervalo de tempo seja mais adequado para ensaios no domínio do tempo (Função Fluência e Módulo de Relaxação), porém mencionam ainda que o intervalo de 1 hora é o que tem sido mais frequentemente utilizado. Outra questão importante é a definição do tempo a partir do qual as observações experimentais serão medidas, uma vez que a Função Fluência (bem como todas as outras propriedades viscoelásticas) se manifesta em diferentes escalas de tempo. Neste trabalho, para fins de investigação, decidiu-se registrar na UTM-25 os resultados experimentais a partir de tempos da ordem de  $10^{-1}$  segundo. Acredita-se que os resultados experimentais encontrados neste trabalho

servirão para avaliar a adequação dos instantes iniciais e finais de observação experimental.

Outra questão fundamental na definição do ensaio de Função Fluência é o nível de tensão constante ( $\sigma_0$ ) aplicada nos corpos de prova, uma vez que este nível de tensão aplicado é que garante ou não o regime de linearidade, hipótese esta assumida ao longo de todo o desenvolvimento da teoria da viscoelasticidade linear discutido no CAPÍTULO 2. As normas americanas ASTM D 3497 (ASTM, 1979) e AASHTO TP 62-03 (AASHTO, 2005) lançam diretrizes para o nível de tensão aplicado em um ensaio no domínio da frequência. A ASTM D 3497 limita o nível de tensão na ordem de 200 kPa, independente da temperatura de execução do ensaio e tipo de mistura utilizada. Por sua vez, a AASHTO TP 62-03 apresenta um nível maior de detalhe, estabelecendo uma faixa de tensão em função da temperatura de ensaio conforme a Tabela 4.2.

**Tabela 4.2:** Tensões aplicadas nos corpos de prova para ensaio da Função Fluência.

<i>Temperatura recomendada<sup>1</sup></i> <i>(°C)</i>	<i>Temperatura aplicada</i> <i>T (°C)</i>	<i>Tensão recomendada<sup>1</sup></i> <i>(kPa)</i>	<i>Tensão aplicada</i> <i><math>\sigma_0</math> (kPa)</i>
–	-16,0	–	1.000
-10,0	-5,0	1.400 a 2.800	1.000
5,0	10,0	700 a 1.400	400
21,0	25,0	350 a 700	150
–	33,0	–	100
38,0	40,0	140 a 250	100
54,0	51,0	35 a 70	100

<sup>1</sup> Baseado na norma americana AASHTO TO 62-03 Determining Dynamic Modulus of Hot-Mix Asphalt Concrete Mixtures (AASHTO, 2005).

Percebe-se que quanto maior a temperatura do ensaio, menor deverá ser o nível de tensão aplicada no corpo de prova na tentativa de garantir o regime de viscoelasticidade linear. Ressalta-se que o nível de tensão para garantir o regime de viscoelasticidade linear recomendado por ambas as normas americanas (ASTM D34 e AASHTO TP 62-03) é inferior às tensões obtidas por simulações numéricas de um

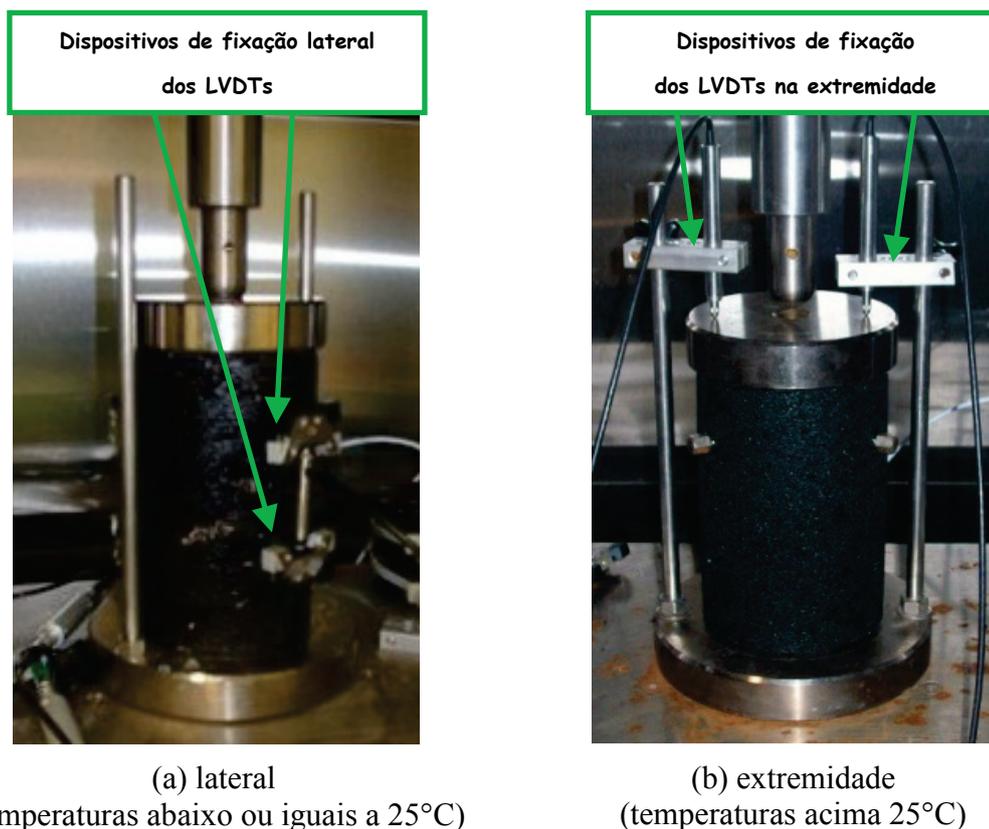
pulso de carga de um eixo padrão (EVANGELISTA JR., 2006; SILVA *et al.*, 2008c; ARAÚJO JR. *et al.*, 2009) e, portanto, estudos sobre o regime de viscoelasticidade não linear devem ser incentivados para melhor adequação da teoria constitutiva aos resultados gerados pelos modelos numéricos.

A Tabela 4.2 indica ainda o nível de tensão efetivamente aplicado ( $\sigma_0$ ) para as sete temperaturas escolhidas para execução dos ensaios. Como não existe uma norma que recomende limites de tensão para ensaios viscoelásticos no domínio do tempo, foram escolhidos níveis de tensões baseados em um critério bastante conservador: um nível de tensão aplicada no corpo de prova menor que o valor mínimo recomendado pela norma americana para ensaios viscoelásticos no domínio da frequência AASHTO TP 62-03 (AASHTO, 2005). Este critério conservador foi estabelecido pelo fato de não se saber se os níveis de tensão recomendados para um ensaio no domínio da frequência – Módulo Dinâmico  $E^*(\omega)$  e Fluência complexa  $D^*(\omega)$  – são válidos para um ensaio no domínio do tempo, que inclui a Função Fluência  $D(t)$  abordada neste trabalho de pesquisa.

Em razão do presente trabalho não contemplar ensaios de verificação do limite de viscoelasticidade linear, recomenda-se que trabalhos futuros investiguem o nível de tensão limítrofe entre o regime de viscoelasticidade linear e não linear das duas misturas em questão por meio de ensaio de Fluência e Recuperação descrito em SOARES e SOUZA (2002) ou mesmo técnicas mais elaboradas descritas em KIM (2006).

Um último detalhe dos ensaios de Função Fluência estabelecidos para caracterização constitutiva das misturas asfálticas diz respeito ao posicionamento dos LVDTs. Após os primeiros ensaios, verificou-se que o mecanismo de fixação lateral sugerido na Figura 4.4 não foi eficaz para as temperaturas mais elevadas em razão do desprendimento dos pinos fixadores pelo aumento da temperatura. Portanto, para temperaturas entre -16 e 25°C foi utilizado o procedimento de fixação lateral dos LVDTs recomendado por KIM (2006) (**ver** Figura 4.6a). Para temperaturas mais elevadas (33°C ou superior) foi realizada uma medição alternativa com dois LVDTs posicionados na extremidade dos corpos de prova segundo a Figura 4.6b.

Destaca-se que foram utilizados dois corpos de prova, implicando em duas medições para algumas temperaturas a fim de validar o procedimento experimental. No entanto, não foi utilizada uma quantidade expressiva de corpos de prova (observações) que possibilitasse um tratamento estatístico das curvas analíticas ajustadas como, por exemplo, definição de intervalos de confiança dos coeficientes estimados das séries de Prony.



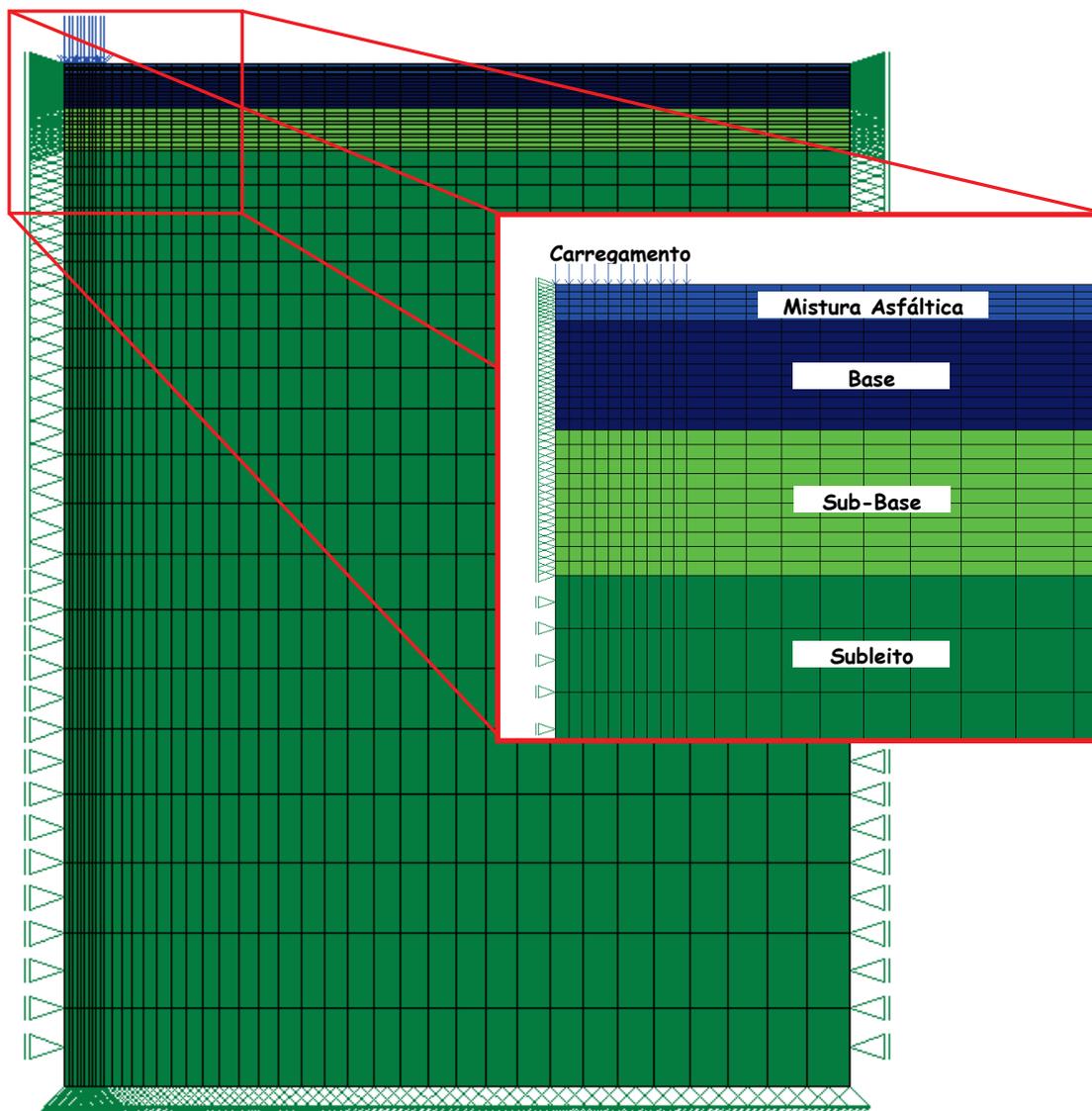
**Figura 4.6:** Tipos de fixação de LVDTs nos corpos de prova de misturas asfálticas.

#### 4.4. DESCRIÇÃO DA ANÁLISE COMPUTACIONAL DE PAVIMENTO TÍPICO PELO MEF

Após obtenção do Módulo de Relaxação  $E(t)$  das misturas asfálticas AA e CA, devidamente representadas por suas respectivas séries de Prony, pode-se realizar uma análise numérica pelo MEF para estimar os campos de tensões e deformações de uma estrutura típica de um pavimento (EVANGELISTA JR., 2006; SILVA *et al.*, 2008c; ARAÚJO JR. *et al.*, 2009). Para tanto, as ferramentas utilizadas para análise pelo MEF neste trabalho foram: (i) o programa computacional de geração de malhas (pré-processamento) de Elementos Finitos bidimensionais MTOOL do Tecgraf (TECGRAF,

1997); (ii) o programa computacional de processamento numérico por Elementos Finitos CAP3D em desenvolvimento pelo Laboratório de Mecânica dos Pavimentos da Universidade Federal do Ceará (LMP/UFC) (HOLANDA *et al.*, 2006); e (iii) o programa de visualização dos resultados NLPOS (pós-processamento) desenvolvido por PITANGUEIRA e PARENTE JR.(1997).

Na modelagem por Elementos Finitos foram utilizadas 4 camadas que representam a configuração de um pavimento asfáltico típico: (i) uma camada de revestimento asfáltico com 5 cm de espessura; (ii) uma camada de base com 15 cm de espessura; (iii) uma camada de sub-base com 20 cm de espessura; e (iv) um subleito considerado semi-infinito. A Figura 4.7 na página seguinte ilustra a malha de Elementos Finitos axissimétrica utilizada, modelo geométrico este utilizado para simulação aproximada de um carregamento de um eixo padrão de 21,6 cm de diâmetro com tensão constante de 560 kPa (HUANG, 2004). Seguindo as recomendações de DUNCAN *et al.* (1968) para simular um subleito semi-infinito, as dimensões totais da malha de Elementos Finitos empregadas foram de 14 vezes o raio do carregamento para distância radial (correspondente a 2,16 m) e 29 vezes o raio do carregamento para profundidade total da malha (correspondente a 4,47 m). Para discretização do domínio no espaço bidimensional axissimétrico foram utilizados 1800 elementos de 8 nós com funções de interpolação quadrática (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000; COOK *et al.*, 2002).



**Figura 4.7:** Malha de Elementos Finitos para modelo axissimétrico de estrutura típica de pavimento asfáltico.

Para as camadas inferiores do pavimento (base, sub-base e subleito), foi considerado o modelo elástico linear uma vez que modelos constitutivos mais elaborados para as camadas inferiores do pavimento fogem do escopo do presente trabalho. O trabalho de HOLANDA *et al.* (2007) apresenta um modelo mais refinado (e mais realista) de camadas inferiores de pavimentos asfálticos. A Tabela 4.3 exibe as propriedades mecânicas assumidas para as camadas inferiores extraídas de SOARES *et al.* (2000). Para poder avaliar o grau de influência que o modelo viscoelástico possui nas tensões e deformações, além de simulação considerando as misturas asfálticas AA e CA com comportamento viscoelástico linear, também foi

avaliado o caso de mistura asfáltica considerada de comportamento elástico linear. Neste último caso, foi assumido um valor constante de 3.000 MPa para o módulo elástico das misturas asfálticas, tomando por base os resultados de ensaios de Módulo de Resiliência de misturas nacionais típicas contidos em SILVA *et al.* (2008c) e ARAÚJO JR. *et al.* (2009). Embora se saiba que cada mistura asfáltica apresente um Módulo Resiliente diferente, um valor único foi adotado por simplificação.

**Tabela 4.3:** Propriedades mecânicas das camadas inferiores do pavimento asfáltico típico considerado.

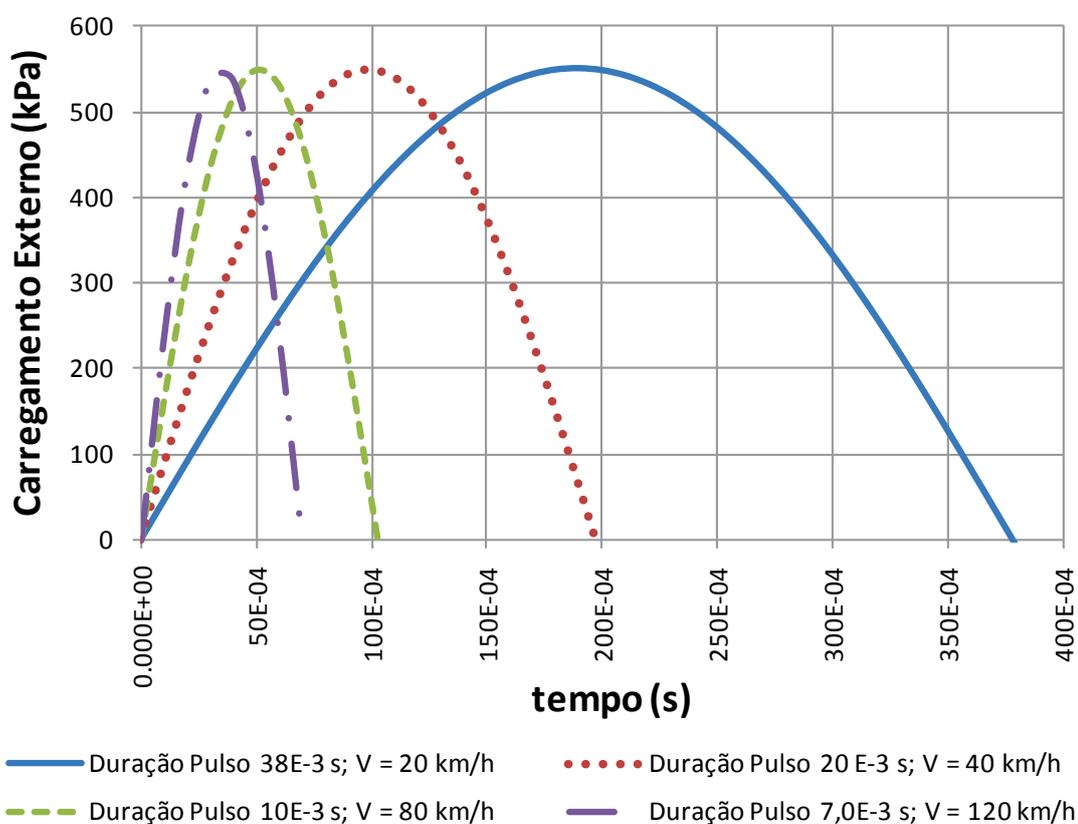
<i>Camada</i>	<i>Módulo Elástico E (MPa)</i>	<i>Coefficiente de Poisson <math>\nu</math></i>
Base	300	0,35
Sub-base	200	0,35
Subleito	100	0,35

Para simular o movimento de um eixo padrão sobre o pavimento, foi considerado um pulso de carga transiente de comportamento semi-senoidal com duração  $t_p$ . A duração do pulso está relacionada de maneira inversa com a velocidade do carregamento e detalhes sobre uma equação que relaciona estas duas grandezas podem ser encontrados em EVANGELISTA JR. (2006) e SILVA *et al.* (2008c). A Tabela 4.4 mostra os quatro pulsos diferentes de carga utilizados correspondentes às velocidades de 20, 40, 80 e 120 km/h.

**Tabela 4.4:** Duração dos pulsos de carga, discretização do tempo e velocidades correspondentes.

<i>Duração do pulso de carga <math>t_p</math> (s)</i>	<i>Discretização do tempo <math>\Delta t</math> (s)</i>	<i>Velocidade correspondente (km/h)</i>
38E-3	38E-6	20
20E-3	20E-6	40
10E-3	10E-6	80
7E-3	7E-6	120

Nesta tabela, pode-se verificar ainda a discretização do tempo  $\Delta t$  utilizada para a aplicação da Equação (2.59). O valor da discretização corresponde a 1/1000 da duração de pulso  $t_p$ , cujo estudo de convergência já foi previamente realizado por EVANGELISTA JR. (2006). As velocidades mais baixas escolhidas (20 e 40 km/h) representam velocidades típicas de pavimentos de uma via urbana, ou seja, vias de tráfego mais lento, ao passo que as velocidades mais elevadas escolhidas (80 e 120 km/h) são referentes a pavimentos de vias não urbanas. A representação gráfica dos pulsos de carga está indicada na Figura 4.8 a seguir.



**Figura 4.8:** Duração dos pulsos de carga e velocidades correspondentes.

## CAPÍTULO 5

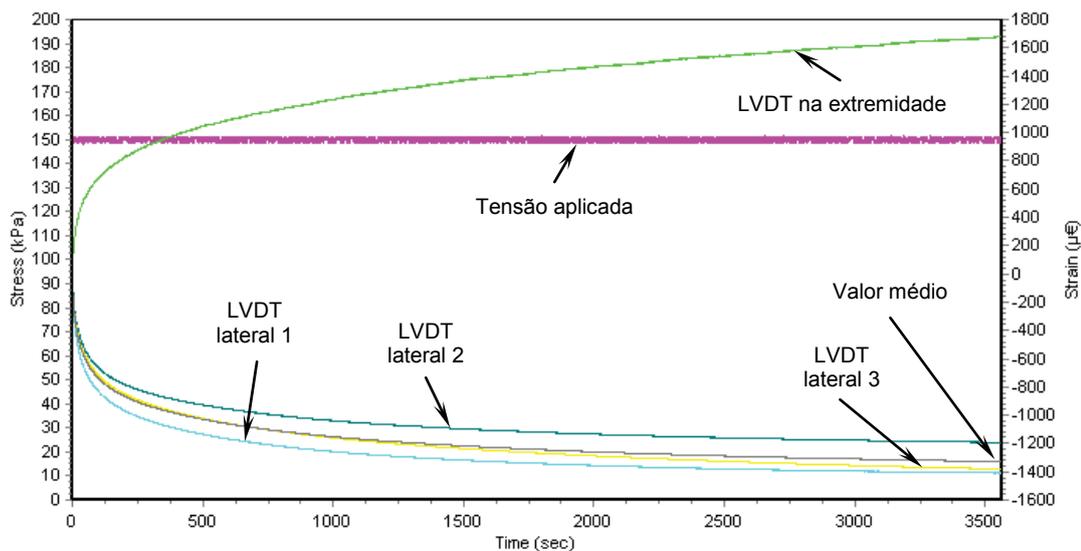
### MODELAGEM CONSTITUTIVA DE MISTURAS ASFÁLTICAS

Neste capítulo são mostrados os resultados experimentais obtidos nos ensaios de Função Fluência  $D(t)$  para as duas misturas investigadas: AA e CA. Após discussão da construção de curvas mestras, são mostrados o processo de ajuste de curva das séries de Prony pelo método da colocação clássico, pelo método da colocação por Mínimos Quadrados Linear (MQL) e por regressão por Mínimos Quadrados Não Linear (MQNL). A discussão destas técnicas é acompanhada pela avaliação da qualidade da interconversão para obtenção do Módulo de Relaxação  $E(t)$ , módulo este necessário para análises mecânico-computacionais de pavimentos asfálticos pelo MEF. Ao final do capítulo, é avaliada a influência do modelo constitutivo viscoelástico linear nos parâmetros de projeto  $d_v^{(tr)}$ ,  $\sigma_x^{(fr)}$  e  $\sigma_y^{(ts)}$  pelo emprego das séries de Prony do Módulo de Relaxação  $E(t)$  para as duas misturas asfálticas investigadas.

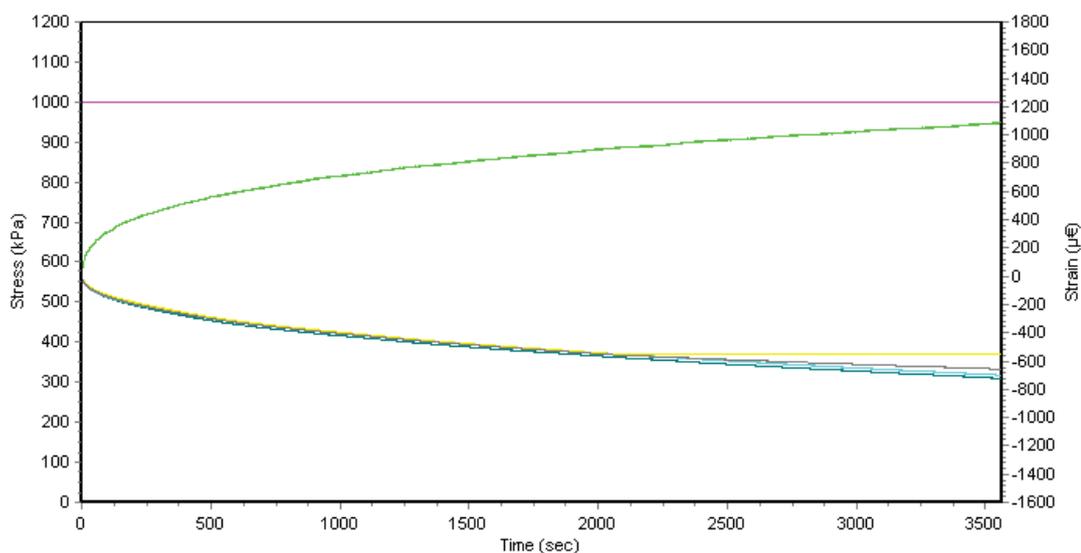
#### 5.1. DISCUSSÃO PRELIMINAR DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A modelagem constitutiva das duas misturas investigadas é iniciada a partir da obtenção dos resultados experimentais da Função Fluência  $D(t)$  por meio do equipamento de teste UTM-25 mostrado na Figura 4.5. Ressalta-se que foi escolhida a Função Fluência para realização das medidas experimentais em razão de uma série de facilidades operacionais frente ao ensaio de Módulo de Relaxação. Para revisão destes benefícios, rever item 2.2.1 (Propriedades Viscoelásticas Fundamentais).

Para exemplificar os resultados experimentais obtidos, a Figura 5.1 mostra a Função Fluência da AA para as temperaturas -5 e 25°C. Nesta figura estão indicados o nível de tensão aplicado (em kPa) e as deformações resultantes (em micros, que significa  $10^{-6}$ ) para LVDTs posicionados tanto lateralmente quanto na extremidade dos corpos de prova (ver Figura 4.6). Pode-se perceber que as deformações obtidas pelos LVDTs laterais são menores que aquelas medidas por LVDTs posicionados na extremidade do corpo de prova. Mais adiante serão discutidas as implicações da diferença nas deformações devido ao posicionamento dos LVDTs.



(a) 25°C



(b) -5,0°C

**Figura 5.1:** Exemplos de resultados experimentais obtidos na UTM-25 para a Função Fluência  $D(t)$  da AA.

Uma primeira análise dos resultados experimentais de ensaios viscoelásticos deve sempre tratar da questão da região de linearidade discutida no item 2.2.2 da revisão bibliográfica. Segundo KIM (2009), para ensaios no domínio do tempo, deformações superiores a 100 micros já seriam suficientes para resultar em viscoelasticidade não linear e/ou deformações não recuperáveis (plástica e viscoplástica) ou até mesmo dano no corpo de prova. Como o programa experimental deste trabalho de pesquisa não se propôs a testar o limite de viscoelasticidade linear, não

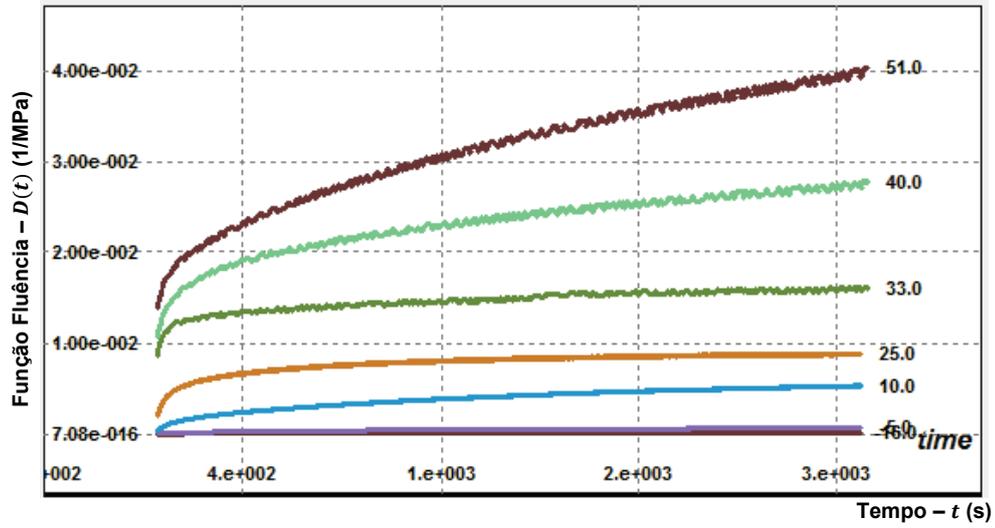
foi possível testar a afirmação de KIM (2009). No entanto, ainda que as deformações totais obtidas pelos ensaios apresentem alguma parcela de deformações não recuperáveis – e, portanto, a hipótese de regime de viscoelasticidade linear não seria válida para os resultados experimentais mostrados neste trabalho de pesquisa – isto não invalida um dos objetivos principais do programa experimental realizado, que é de avaliar os detalhes e as dificuldades inerentes ao processo de modelagem constitutiva (ajuste de curva de série de Prony e interconversão) a partir de dados experimentais reais.

Uma consequência das supostas deformações não recuperáveis desenvolvidas nos ensaios é que a Função Fluência  $D(t)$  mostrada ao longo deste trabalho pode estar superestimada em relação a um ensaio contido na região de viscoelasticidade linear, uma vez que as deformações experimentais obtidas podem incluir, além da contribuição viscoelásticas ( $\varepsilon^{ve}$ ), parcelas de deformações plásticas ( $\varepsilon^p$ ), viscoplásticas ( $\varepsilon^{vp}$ ) ou até mesmo alguma forma dano. Em razão disso, os resultados experimentais apresentados neste trabalho de pesquisa devem ser encarados como indicativos de um limite superior para a Função Fluência  $D(t)$  das duas misturas asfálticas investigadas. Consequência direta dessa afirmação é que o Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  das misturas investigadas pode estar subestimado. Recomenda-se que trabalhos futuros possam investigar qual nível de tensão deve ser aplicado para garantir o regime de viscoelasticidade linear em um ensaio de Função Fluência para as duas misturas nacionais investigadas. Nos itens 5.2 e 0 que seguem será mostrado o processo de modelagem constitutiva da AA e do CA, respectivamente.

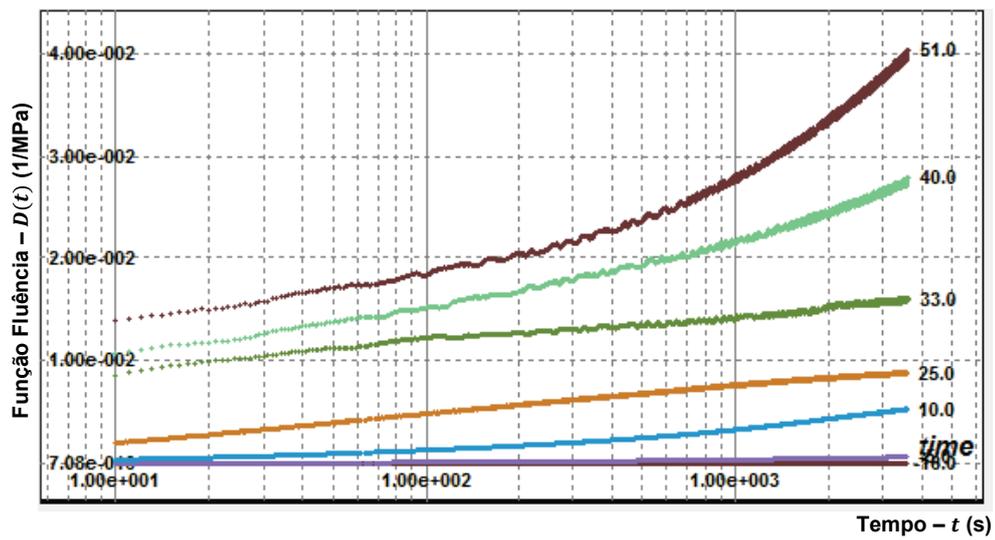
## **5.2. MODELAGEM CONSTITUTIVA DA AREIA ASFALTO (AA)**

### **5.2.1. Resultados Experimentais – Areia Asfalto**

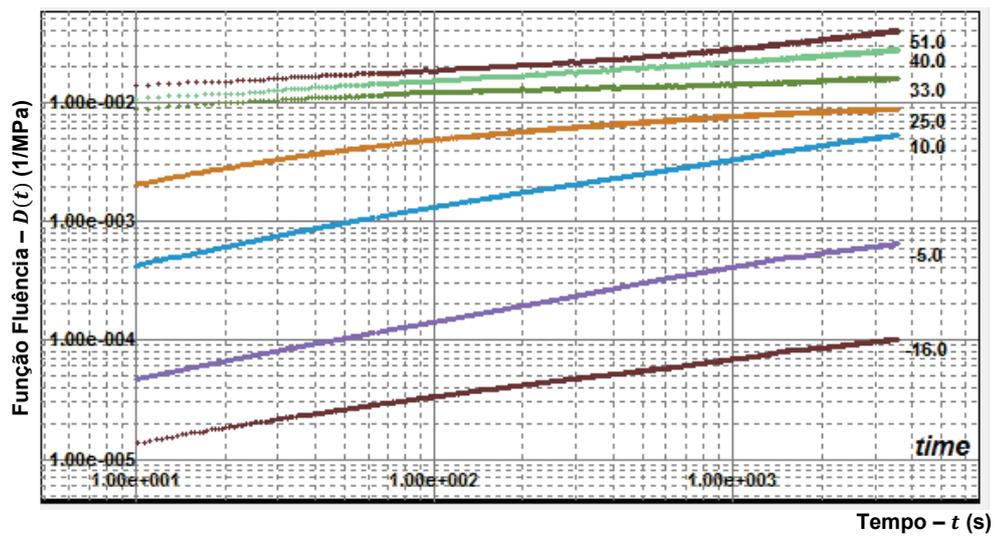
Os resultados experimentais da Função Fluência  $D(t)$  da AA para as sete temperaturas consideradas está descrita na Figura 5.2 da página a seguir. Os gráficos a seguir foram construídos a partir do ambiente gráfico do programa desenvolvido *ViscoTool*.



(a) Escala geométrica



(b) Escala semi-log (eixo do tempo)



(c) Escala log-log

Figura 5.2: Resultados experimentais da Função Fluência  $D(t)$  da AA.

Para visualizar melhor as diferentes informações desta propriedade viscoelástica, os resultados experimentais foram plotados em três gráficos diferentes: (i) um gráfico com escala linear para os dois eixos que permite avaliar com precisão os valores últimos (máximos) da Função Fluência correspondentes às temperaturas de ensaio mais elevadas; (ii) um segundo gráfico em que apenas o eixo do tempo é plotado em escala logarítmica (escala semi-log) permitindo visualizar melhor o comportamento da Função Fluência nos instantes iniciais do ensaio; e (iii) um terceiro gráfico com os dois eixos plotados em escala logarítmica (escala log-log) que, além de visualizar melhor o comportamento nos instantes iniciais, possibilita uma visão mais precisa dos diferentes níveis de fluência encontrados para as 7 temperaturas de ensaio escolhidas.

Vale ressaltar que, apesar de terem sido registradas as grandezas mecânicas a partir de  $10^{-1}$  segundos (precisão da máquina UTM), os resultados experimentais da Figura 5.2c foram mostrados após o descarte do intervalo entre  $10^{-1}$  e  $10^1$  segundos, em razão dos resultados experimentais indicarem um tempo de corte  $t_{corte}$  de aproximadamente 10 segundos. O intervalo de tempo inferior a 10 segundos apresentou uma expressiva subestimação da Função Fluência devido ao efeito do trecho transiente  $\Delta t_t$  discutido no item 2.2.1. Estabelecendo uma tolerância de 10% ( $R_D = 0,90$ ); observando coeficientes angulares experimentais  $m$  (em escala log-log) variando entre 0,2 e 0,5 e trechos transientes  $\Delta t_t$  variando entre 2 e 5 segundos; e utilizando a Figura 2.9b, foram encontrados tempos de corte entre 3 e 11 segundos para diferentes temperaturas de ensaio. Então, por simplificação, adotou-se o valor único  $t_{corte} = 10$  segundos para todas as temperaturas.

Os resultados da Figura 5.2a estão de acordo com o PSTT que estabelece maiores fluências para temperaturas mais elevadas. A Figura 5.2a mostra ainda que não existe uma relação simples entre a temperatura que a mistura está submetida e o nível último de fluência para o tempo final de 1 hora. Para exemplificar, observa-se que a diferença entre os níveis últimos (máximos) de fluência para o tempo de 1 hora das curvas de  $-5^\circ\text{C}$  e  $10^\circ\text{C}$  (diferença de  $15^\circ\text{C}$ ) não é igual à distância entre os níveis últimos das curvas de  $10^\circ\text{C}$  e  $25^\circ\text{C}$ , e nem entre as curvas de  $25^\circ\text{C}$  e  $40^\circ\text{C}$ . Portanto, pode-se verificar que, apesar de válida a informação qualitativa de que temperaturas maiores resultam em maior fluência, não existe uma relação quantitativa trivial que

expresse o valor da Função Fluência  $D(t)$  da AA como função somente da temperatura do ensaio.

Parece razoável justificar este comportamento pela dependência do arranjo das cadeias poliméricas do cimento asfáltico com a temperatura, comportamento este não trivial, que varia desde a restrição de movimento das moléculas do cimento asfáltico para as temperaturas mais baixas de  $-16^{\circ}\text{C}$  e  $-5^{\circ}\text{C}$  (zona vítrea), passando por evolução progressivamente crescente da fluência para temperaturas intermediárias de  $10^{\circ}\text{C}$  e  $25^{\circ}\text{C}$  (zona de transição) devido ao rearranjo molecular e chegando até o chamado platô final que resulta em crescimento menor (quase constante) da Função Fluência para temperaturas mais elevadas de  $33^{\circ}\text{C}$ ,  $40^{\circ}\text{C}$  e  $51^{\circ}\text{C}$ . Este último padrão é devido ao chamado *coupling entanglement effect* discutido no item 2.2 da revisão bibliográfica e é mais facilmente percebido na escala log-log indicada na Figura 5.2c.

Ainda na Figura 5.2c verifica-se que a temperatura mínima de  $-16^{\circ}\text{C}$  não foi suficiente para atingir a região de platô inicial (*solidlike behavior*). Isto pode ser atribuído ao possível regime de viscoelasticidade não linear e/ou deformações permanentes desenvolvidas ao longo do ensaio. No entanto, conforme já citado, esta hipótese não pôde ser testada uma vez que foge do escopo experimental desta pesquisa. Por outro lado, FERRY (1980) chama atenção de que o platô inicial da Função Fluência é de difícil identificação mesmo para temperaturas abaixo da transição vítrea. A realização de ensaios em temperaturas menores que  $-16^{\circ}\text{C}$  e níveis de tensão aplicados menores que aqueles utilizados neste trabalho possivelmente apresentarão inclinações (em escala log-log) cada vez mais reduzidas, facilitando a identificação do platô inicial e, conseqüentemente, do termo independente da série de Prony.

Na seção seguinte, será discutida a etapa subsequente à obtenção experimental da Função Fluência, qual seja, o processo de construção da curva mestra.

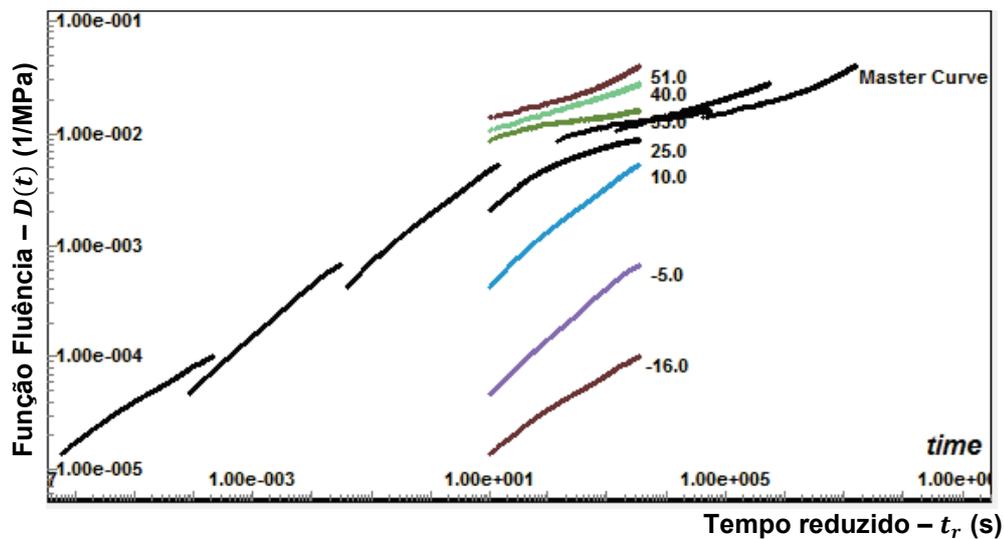
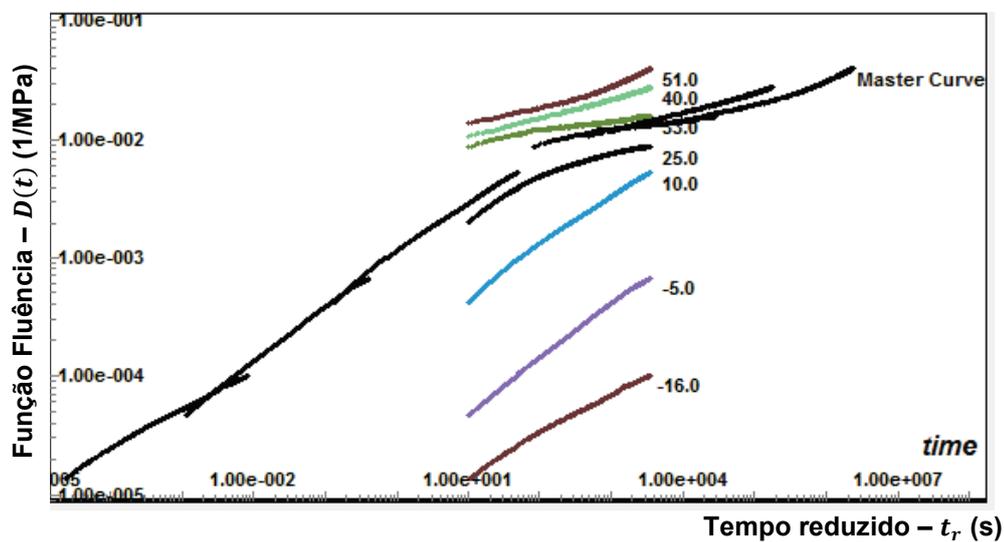
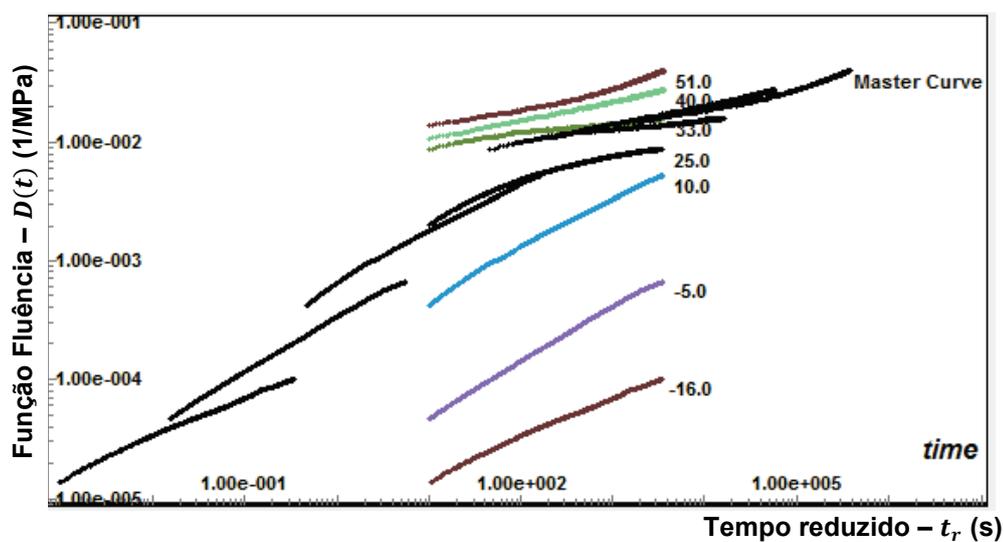
### **5.2.2. Construção da Curva Mestra da Função Fluência $D(t)$ – Areia Asfalto**

A partir dos resultados experimentais da Função Fluência obtidos para a AA foi construída a curva mestra baseada no PSTT descrito no item 2.2.3. Aplicando a relação

de Arrhenius descrita pela Equação (2.13) para todas as temperaturas, e escolhendo a temperatura de 25°C como temperatura de referência ( $T_R$ ), foram construídas as curvas mestras indicadas na Figura 5.3 pelo auxílio do programa *ViscoTool*. Foram utilizados os valores para a constante  $C$  da Equação (2.13) de 13.500, 10.500 e 7.500 K, que são compatíveis com aqueles descritos na Tabela 2.1.

É importante destacar também que a escolha da temperatura de referência  $T_R$  deve ser compatível com a temperatura em que a mistura asfáltica é submetida em campo, uma vez que os resultados experimentais ora discutidos servirão como dados de entrada para simulação computacional de tensões e deformações em um pavimento real. A escolha da temperatura de 25°C parece razoável como uma primeira investigação, uma vez que este valor se aproxima da temperatura média do pavimento ao longo de um período contínuo de 24 horas (KIM, 2009). Voltando para a análise da curva mestra pela equação de Arrhenius, pode-se verificar na Figura 5.3 que a constante de Arrhenius  $C = 10.500$  K foi aquela que melhor se ajustou aos dados experimentais.

Os valores dos fatores de translação horizontal ( $a_T$ ) para obtenção do tempo reduzido estão indicados na Tabela 5.1. O valor da constante  $C = 13.500$  K resultou em fatores de translação horizontal superestimados ao passo que a constante  $C = 7.500$  K resultou em fatores de translação subestimados, principalmente para as temperaturas mais baixas (10, -5 e -16°C). De acordo com a Figura 5.3b, é interessante notar que mesmo para a melhor constante de Arrhenius ( $C = 10.500$  K) os fatores de translação horizontal  $a_T$  para obtenção do tempo reduzido não resultaram em uma curva mestra com concordância perfeita entre as curvas de diferentes temperaturas.

(a) Constante  $C = 13.500$  K(b) Constante  $C = 10.500$  K(c) Constante  $C = 7.500$  K

**Figura 5.3:** Curva mestra da Função Fluência  $D(t)$  da AA  
– equação de Arrhenius.

Devido à concordância parcial da curva mestra tomando por base somente a equação de Arrhenius, foi investigada ainda a aplicabilidade da equação de WLF descrita pela Equação (2.15). A Figura 5.4 mostra a curva mestra da Função Fluência  $D(t)$  da AA utilizando a equação de WLF para valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$  descritas na Tabela 5.2.

Nesta tabela estão indicados ainda os valores dos fatores de translação horizontal  $\alpha_T$  para obtenção do tempo reduzido pela equação de WLF. Observando a Figura 5.4, nota-se que os valores das constantes  $C_1 = -8,86$  e  $C_2 = 101,6$  K citados por FERRY (1980) foram aqueles que resultaram na curva mestra de melhor concordância visual em escala log-log. Os outros valores mostraram que o ajuste será tão pior quanto o valor de  $C_1$  se afasta do valor  $-8,86$ , citado por FERRY (1980).

Focando a análise visual do ajuste da curva mestra pela equação de WLF somente para o melhor caso (Figura 5.4a), verifica-se que as curvas referentes às temperaturas de  $10^\circ\text{C}$  e  $-5^\circ\text{C}$  apresentaram um excelente ajuste (em escala log-log) em relação à temperatura de referência  $T_R = 25^\circ\text{C}$ . Por sua vez, a temperatura mínima do ensaio ( $-16^\circ\text{C}$ ) e as temperaturas mais elevadas ( $33^\circ\text{C}$ ,  $40^\circ\text{C}$  e  $51^\circ\text{C}$ ) não resultaram em boa concordância com a temperatura de referência. Para cada uma destas situações (temperaturas baixas e temperaturas elevadas) existe uma explicação distinta e, portanto, são discutidas de forma separada a seguir.

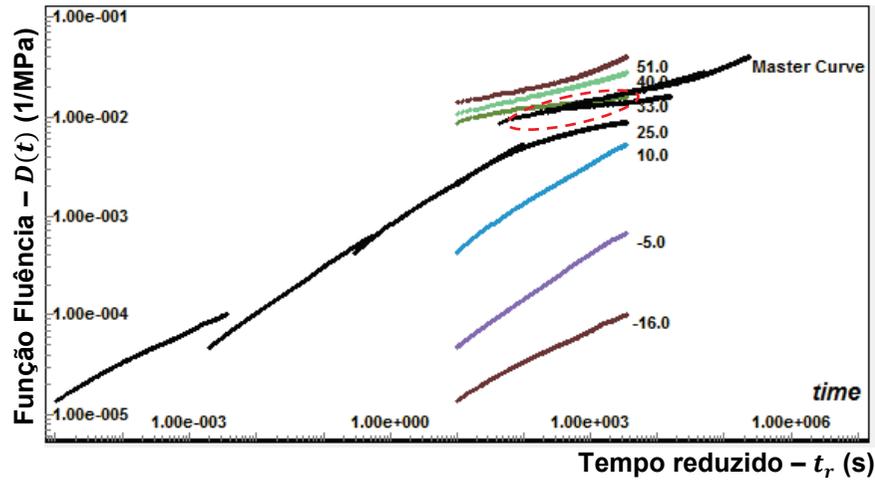
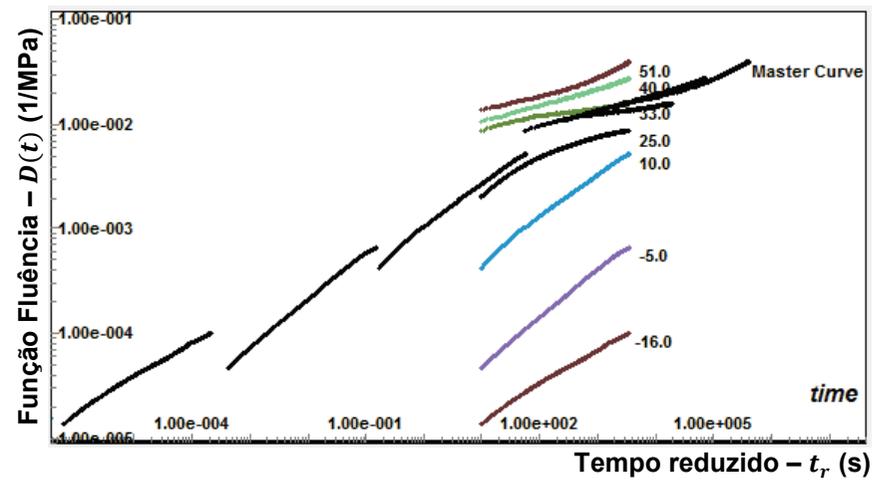
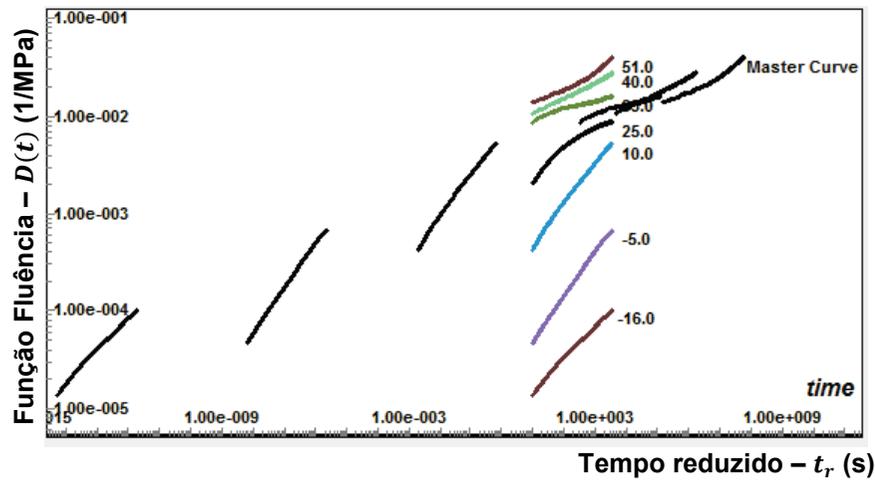
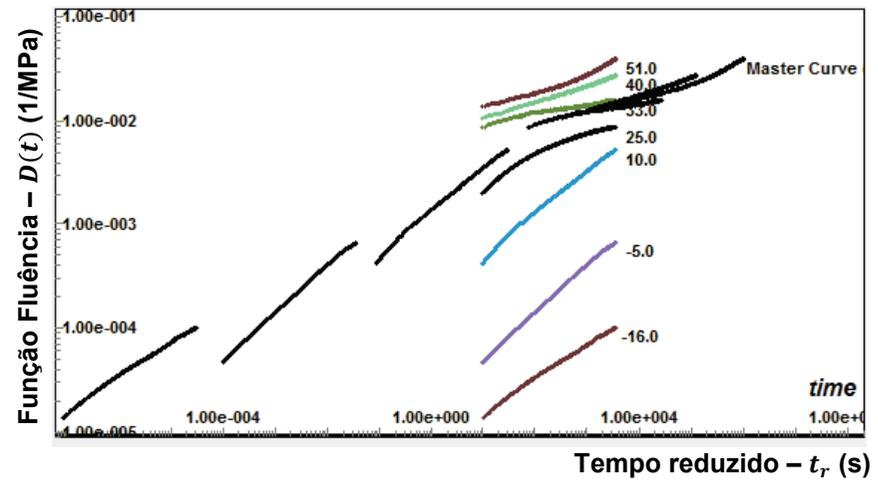
Com relação às temperaturas mais elevadas ( $33^\circ\text{C}$ ,  $40^\circ\text{C}$  e  $51^\circ\text{C}$ ) uma primeira consideração é que, a partir da temperatura de  $33^\circ\text{C}$ , os ensaios de fluência realizados na UTM-25 tiveram os LVDTs colocados nas extremidades do corpo de prova (ver Figura 4.6b) e não na parte central (ver Figura 4.6a) conforme recomendação da literatura (KIM, 2006, 2009). Isto se deve ao fato de que para temperaturas mais elevadas (a partir de  $33^\circ\text{C}$  neste estudo), o mástique asfáltico se desprende facilmente da matriz de agregados na região de aderência do dispositivo de fixação do LVDT indicada na Figura 4.6a.

**Tabela 5.1:** Construção da curva mestra da Função Fluência  $D(t)$  da AA  
– equação de Arrhenius.

<i>Constante C (K)</i>	<i>Fator de Deslocamento Horizontal</i>						
	<i>Curva 1 (-16°C)</i>	<i>Curva 2 (-5°C)</i>	<i>Curva 3 (10°C)</i>	<i>Curva 4 (25°C)</i>	<i>Curva 5 (33°C)</i>	<i>Curva 6 (40°C)</i>	<i>Curva 7 (51°C)</i>
13.500	$10^{7,22}$	$10^{5,07}$	$10^{2,40}$	$10^{0,00}$	$10^{-1,18}$	$10^{-2,17}$	$10^{-3,63}$
10.500	$10^{5,62}$	$10^{3,94}$	$10^{1,87}$	$10^{0,00}$	$10^{-0,92}$	$10^{-1,69}$	$10^{-2,82}$
7.500	$10^{4,01}$	$10^{2,81}$	$10^{1,33}$	$10^{0,00}$	$10^{-0,66}$	$10^{-1,20}$	$10^{-2,02}$

**Tabela 5.2:** Construção da curva mestra da Função Fluência  $D(t)$  da AA  
– equação de WLF.

<i>Constante C<sub>1</sub></i>	<i>Constante C<sub>2</sub> (K)</i>	<i>Fator de Deslocamento Horizontal</i>						
		<i>Curva 1 (-16°C)</i>	<i>Curva 2 (-5°C)</i>	<i>Curva 3 (10°C)</i>	<i>Curva 4 (25°C)</i>	<i>Curva 5 (33°C)</i>	<i>Curva 6 (40°C)</i>	<i>Curva 7 (51°C)</i>
-8,86	101,6	$10^{5,99}$	$10^{3,71}$	$10^{1,53}$	$10^{0,00}$	$10^{-0,65}$	$10^{-1,14}$	$10^{-1,81}$
-9,5	95	$10^{7,21}$	$10^{4,38}$	$10^{1,78}$	$10^{0,00}$	$10^{-0,74}$	$10^{-1,30}$	$10^{-2,04}$
-19	92	$10^{15,27}$	$10^{9,19}$	$10^{3,70}$	$10^{0,00}$	$10^{-1,52}$	$10^{-2,66}$	$10^{-4,19}$
-12	102	$10^{8,07}$	$10^{5,00}$	$10^{2,07}$	$10^{0,00}$	$10^{-0,87}$	$10^{-1,54}$	$10^{-2,44}$

(a) Constantes  $C_1 = -8,86$  e  $C_2 = 101,6$  K(b) Constantes  $C_1 = -9,5$  e  $C_2 = 95$  K(c) Constantes  $C_1 = -19$  e  $C_2 = 92$  K(d) Constantes  $C_1 = -12$  e  $C_2 = 102$  K**Figura 5.4:** Curva mestra da Função Fluência  $D(t)$  da AA – equação de WLF.

Por sua vez, a fixação de LVDTs na extremidade do corpo de prova não exige aderência entre o dispositivo fixador de LVDT e o corpo de prova, sendo os LVDTs simplesmente apoiados no disco metálico superior conforme ilustrado na Figura 4.6b. A consequência desta dificuldade operacional é que em vez de se estar considerando apenas a parte central do corpo de prova (comprimento de 76 mm) que, por sua vez, evitaria a influência do efeito de borda nas medidas experimentais de fluência, se está considerando, na realidade, o comprimento total do corpo de prova (147 mm). A implicação dessa mudança de configuração do LVDT foi ilustrada na Figura 5.1 do item 5.1.

A Figura 5.1 mostra que o LVDT posicionado na extremidade do corpo de prova resulta em deformações superiores àquelas originadas pelos LVDTs laterais. Observando os resultados para a temperatura de 25°C percebe-se que o nível último de deformação com LVDT fixado na extremidade foi em torno de 1700 micros ao passo que o valor médio dos LVDTs laterais ficou em torno de 1.300 micros – sendo a deformação dos LVDTs laterais plotada como valores negativos apenas para distinguir mais facilmente do resultado do LVDT posicionado na extremidade do corpo de prova –, resultando em um fator de 1,3. Resultados ainda mais discrepantes foram obtidos para a temperatura de -5°C, com níveis últimos de deformação de 1.100 micros para LVDT posicionado na extremidade e 650 micros para valor médio dos LVDTs laterais, que por sua vez resulta em fator de 1,7. Portanto, caso se considere o LVDT posicionado na extremidade do corpo de prova para o cálculo da Função Fluência  $D(t)$ , se estará superestimando esta propriedade e, portanto, justifica parcialmente a não concordância das curvas com temperaturas mais elevadas para a composição da curva mestra indicada na Figura 5.4a. Logicamente, para temperaturas menores ou iguais a 25°C não há necessidade de realizar medições de deformações nas extremidades do corpo de prova, uma vez que nestas temperaturas não existem problemas de aderência dos LVDTs laterais, sendo a medição com LVDT na extremidade de caráter exclusivamente investigativo.

Uma segunda consideração com relação a não concordância da curva mestra para as temperaturas mais elevadas (33, 40 e 51°C, neste caso) diz respeito à influência da temperatura nas conexões poliméricas de rede (*coupling entanglement*) discutida no

item 2.2 da revisão bibliográfica. Embora se tenha encontrado apenas uma referência clássica de sistemas poliméricos em geral que aborde este problema (FERRY, 1980), os dados experimentais obtidos sugerem que este fenômeno possa existir no caso da AA, desde que o regime de viscoelasticidade linear seja comprovado em estudos futuros. A afirmação em questão está fundamentada na presença da região destacada na Figura 5.4a, que indica uma não concordância entre curvas medidas apenas com o LVDT posicionado na extremidade do corpo de prova, ou seja, curvas referentes às temperaturas de 33, 40 e 51°C.

Caso as temperaturas mais elevadas não influenciassem nas conexões poliméricas de rede (*coupling entanglement*) do ligante asfáltico seria razoável esperar que as curvas referentes às temperaturas de 33, 40 e 51°C apresentassem uma boa concordância visual (em escala log-log), uma vez que foram obtidas com o uso do mesmo aparato experimental (LVDT posicionado na extremidade do corpo de prova). Portanto, a não concordância entre as curvas com maior temperatura medidas com o mesmo aparato experimental sugere uma influência significativa da temperatura nas conexões poliméricas de rede. Destaca-se ainda que os resultados experimentais do CA apresentados na seção 5.3.2 também indicaram este fenômeno, reforçando a ideia que este fenômeno pode ser relevante para o caso de misturas asfálticas.

Uma vez identificada a existência deste fenômeno, resta corrigir o seu efeito para obter uma curva mestra mais apropriada. Partindo da curva mestra obtida pela equação de WLF indicada na Figura 5.4a, realiza-se a correção da temperatura nas conexões poliméricas de rede pela introdução da variável  $f$  no eixo da Função Fluência (eixo vertical) e  $f^2$  no eixo do tempo (eixo horizontal). Os valores dos fatores de correção  $f$  e  $f^2$  foram calculados de acordo com valores de energia de dissociação  $\Delta H_d$  da mesma ordem de grandeza do valor reportado em FERRY (1980) e estão indicados na Tabela 5.3, devidamente acompanhados pelo fator de translação horizontal  $\alpha_T$  predito pela equação de WLF para constantes  $C_1 = -8,86$  e  $C_2 = 101,6$  K. A Figura 5.5 mostra as curvas mestras obtidas pela introdução dos fatores de correção aqui discutidos. Comparando a Figura 5.4a com a Figura 5.5 verifica-se que a correção da temperatura pela introdução dos fatores de correção  $f$  e  $f^2$  resulta em curvas mestras mais concordantes na região do platô final destacada em vermelho. As curvas referentes

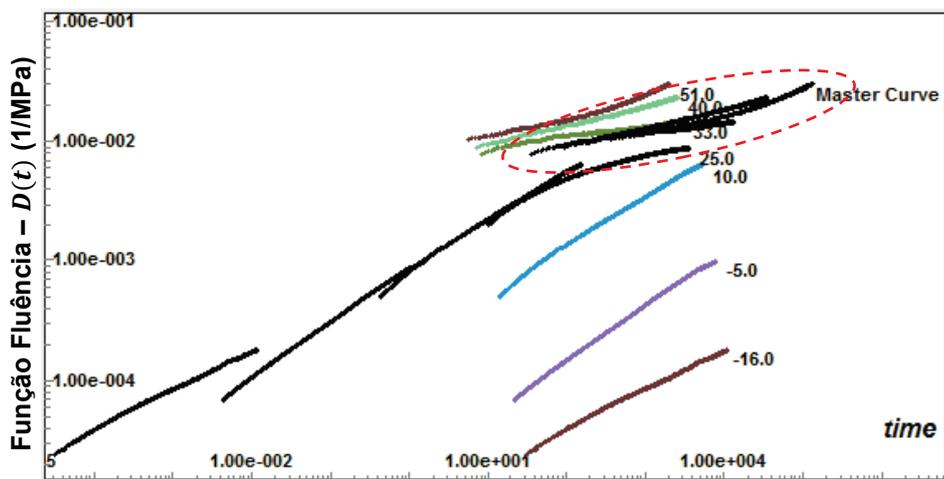
às temperaturas acima da temperatura de referência  $T_R = 25^\circ\text{C}$  foram verticalmente deslocadas para baixo e horizontalmente deslocadas para a esquerda. O raciocínio inverso se aplica para as curvas obtidas nas temperaturas inferiores à temperatura de referência.

Com relação ao valor mais indicado para a energia de dissociação  $\Delta H_d$  utilizada, os resultados experimentais apontaram que o valor de 4.500 cal/mol é preferível. No entanto, não se deve utilizar este valor como uma referência rígida, uma vez que existe o fator superposto do LVDT colocado na extremidade do corpo de prova para as temperaturas mais elevadas (33, 40 e  $51^\circ\text{C}$ ), além do que as deformações permanentes podem ser significativas nos testes realizados. Recomenda-se que trabalhos experimentais futuros sejam realizados com um único aparato de medição (de preferência àquele com LVDT fixado apenas na parte central do corpo de prova) a fim de confirmar a influência da temperatura nas conexões poliméricas de rede das misturas asfálticas e, caso o fenômeno seja significativo, avaliar com mais precisão a energia de dissociação necessária para tal correção.

Após a correção da temperatura no chamado *coupling entanglement effect* para o melhor caso ( $\Delta H_d = 4.500$  cal/mol), verifica-se que a concordância visual em escala log-log para a temperatura de  $-16^\circ\text{C}$  com a curva mais próxima ( $-5^\circ\text{C}$ ) não é satisfatória. Seguindo as orientações de KIM (2006) a temperatura de  $-16^\circ\text{C}$  está próxima da temperatura de transição vítrea  $T_g$  de misturas asfálticas, que está entre  $-20$  e  $-30^\circ\text{C}$ . Para este caso, KIM (2006) cita que a equação de Arrhenius é mais indicada para a temperatura de  $-16^\circ\text{C}$ . A curva mestra aplicando esta consideração está indicada na Figura 5.6. Neste caso, verifica-se que o nível de concordância visual em escala log-log foi satisfatório, sendo esta curva, portanto, denominada curva mestra final da Função Fluência  $D(t)$  da AA.

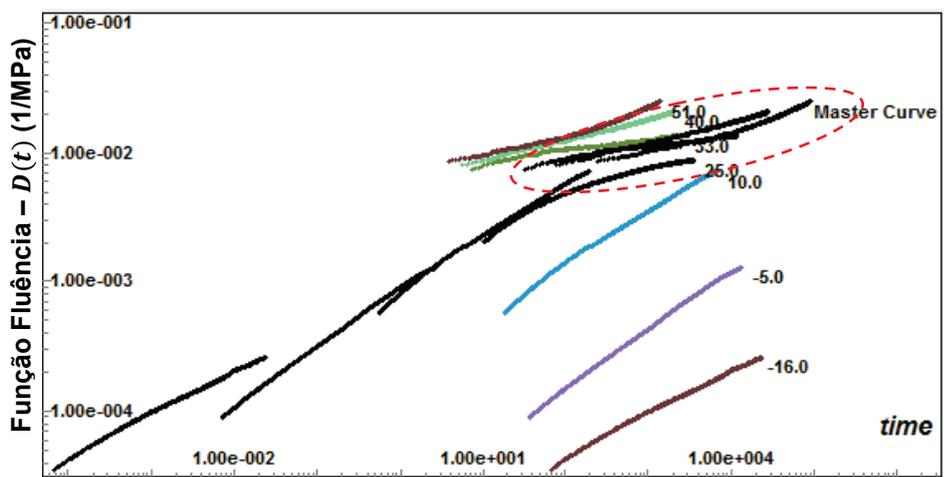
**Tabela 5.3:** Construção da curva mestra da Função Fluência  $D(t)$  da AA – método de WLF com correção da temperatura.

$C_1$	$C_2$ (K)	Energia de Dissociação $\Delta H_d$ (cal/mol)	Tipo de Fator de Deslocamento	Curva 1 (-16°C)	Curva 2 (-5°C)	Curva 3 (10°C)	Curva 4 (25°C)	Curva 5 (33°C)	Curva 6 (40°C)	Curva 7 (51°C)
-8.86	101,6	2.100	Horizontal – $\alpha_T$	$10^{5,99}$	$10^{3,71}$	$10^{1,53}$	$10^{0,00}$	$10^{-0,65}$	$10^{-1,14}$	$10^{-1,81}$
			Vertical – $f$	1,76	1,49	1,21	1,00	0,91	0,84	0,75
			Horizontal – $f^2$	3,10	2,21	1,46	1,00	0,83	0,71	0,57
		3.500	Horizontal – $\alpha_T$	$10^{5,99}$	$10^{3,71}$	$10^{1,53}$	$10^{0,00}$	$10^{-0,65}$	$10^{-1,14}$	$10^{-1,81}$
			Vertical – $f$	2,57	1,94	1,37	1,00	0,86	0,75	0,62
			Horizontal – $f^2$	6,59	3,76	1,87	1,00	0,73	0,57	0,39
		4.500	Horizontal – $\alpha_T$	$10^{5,99}$	$10^{3,71}$	$10^{1,53}$	$10^{0,00}$	$10^{-0,65}$	$10^{-1,14}$	$10^{-1,81}$
			Vertical – $f$	3,36	2,34	1,50	1,00	0,82	0,69	0,54
			Horizontal – $f^2$	11,31	5,49	2,24	1,00	0,67	0,48	0,30



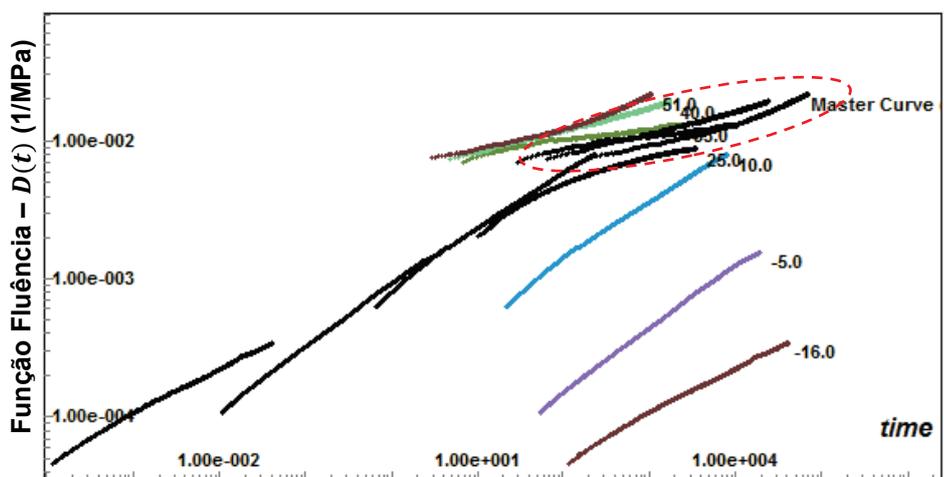
Tempo reduzido -  $t_r$  (s)

(a) Energia de dissociação  $\Delta H_d = 2.100$  cal/mol



Tempo reduzido -  $t_r$  (s)

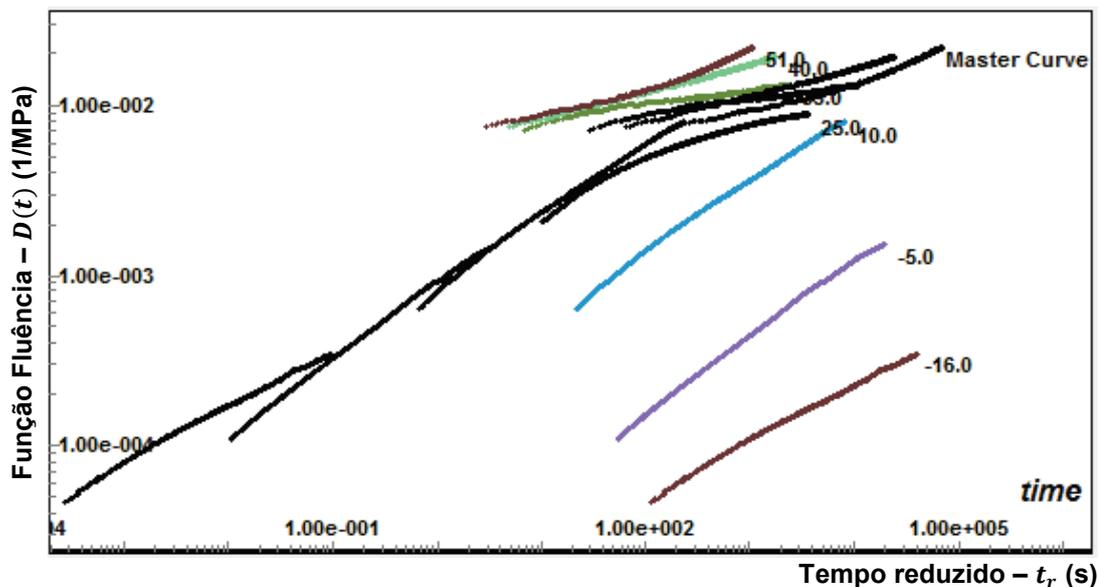
(b) Energia de dissociação  $\Delta H_d = 3.500$  cal/mol



Tempo reduzido -  $t_r$  (s)

(c) Energia de dissociação  $\Delta H_d = 4.500$  cal/mol

**Figura 5.5:** Curva mestra da Função Fluência  $D(t)$  da AA – método de WLF ( $C_1 = -8,86$ ;  $C_2 = 101,6$  K) com correção da temperatura.



**Figura 5.6:** Curva mestra final da Função Fluência  $D(t)$  da AA.

A Tabela 5.4 mostra os fatores de deslocamento utilizados para composição da curva mestra final da Função Fluência  $D(t)$  da AA. É importante destacar que nenhum dos dois métodos aplicados de forma isolada foi capaz de criar uma curva mestra concordante, dada a grande amplitude das temperaturas investigadas, chegando, inclusive, próximo à temperatura de transição vítrea da mistura asfáltica. Portanto, ao construir curvas mestras baseadas no PSTT recomenda-se avaliar ambos os critérios de WLF e Arrhenius para garantir uma curva mestra concordante. KIM (2009) cita que é comum estabelecer uma relação quadrática entre o logaritmo decimal dos fatores de deslocamento horizontais ( $\alpha_T$ ) e a diferença entre temperatura do ensaio e temperatura de referência ( $T - T_R$ ). No entanto, a relação quadrática citada não foi testada uma vez que a aplicação conjunta dos critérios de Arrhenius e WLF foi suficiente para resultar em boa concordância da curva mestra da AA. A etapa subsequente consistirá no processo de obtenção da série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  da AA a partir do método da colocação implementado no programa computacional *ViscoTool*.

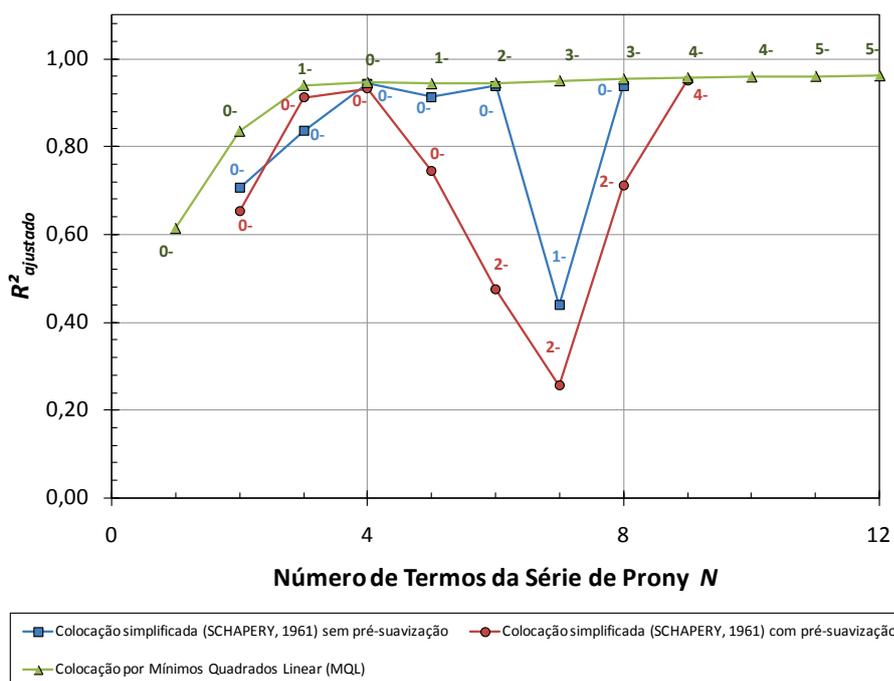
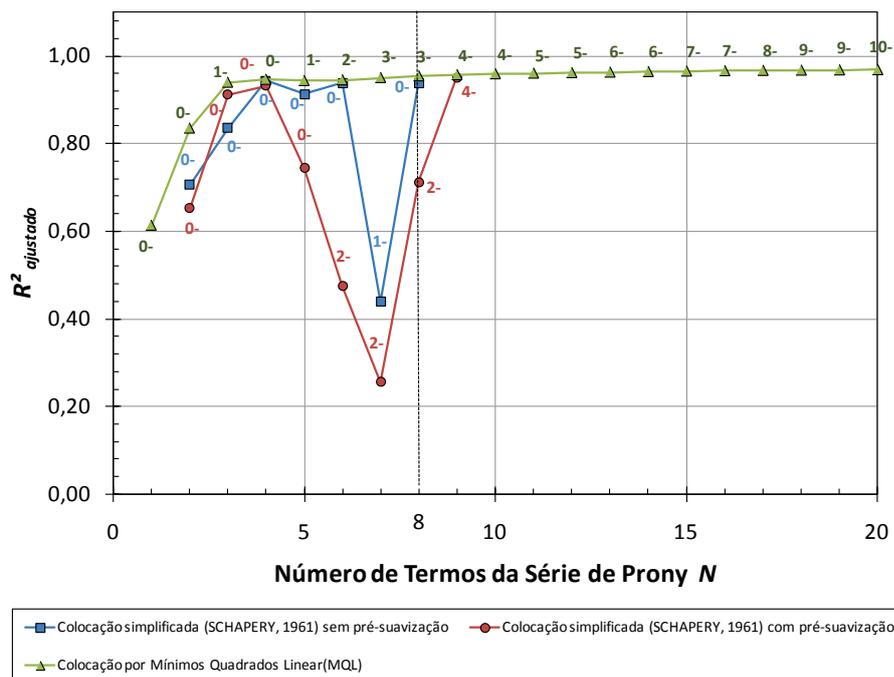
**Tabela 5.4:** Fatores de deslocamento finais da Função Fluência  $D(t)$  da AA.

<i>Curva</i>	<i>Fator de Deslocamento Vertical – f</i>	<i>Fator de Deslocamento Horizontal – f<sup>2</sup></i>	<i>Fator de Deslocamento Horizontal – <math>\alpha_T</math></i>	<i>Método para Fator de Deslocamento Horizontal – <math>\alpha_T</math></i>
<i>Curva 1 (-16°C)</i>	3,36	11,31	$10^{5,62}$	Arrhenius $C = 10.500 \text{ K}$
<i>Curva 2 (-5°C)</i>	2,34	5,49	$10^{3,71}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
<i>Curva 3 (10°C)</i>	1,50	2,24	$10^{1,53}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
<i>Curva 4 (25°C)</i>	1,00	1,00	$10^{0,00}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
<i>Curva 5 (33°C)</i>	0,82	0,67	$10^{-0,65}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
<i>Curva 6 (40°C)</i>	0,69	0,48	$10^{-1,14}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
<i>Curva 7 (51°C)</i>	0,54	0,30	$10^{-1,81}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$

### 5.2.3. Avaliação do Método da Colocação Clássico e por MQL para Obtenção da Série de Prony da Função Fluência $D(t)$ – Areia Asfalto

O método da colocação disponível no programa *ViscoTool* foi utilizado para obtenção da série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  tomando por base a curva mestra da Figura 5.6. Com o intuito de avaliar os diferentes métodos de colocação discutidos no item 2.4.1 do CAPÍTULO 2, a Figura 5.7 mostra o coeficiente de determinação ajustado ( $R_{ajustado}^2$ ) em função do número de termos dependentes  $D_j$  da série de Prony. Neste caso, as constantes de tempo  $\tau_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) utilizadas foram os valores iniciais sugeridos pelo *ViscoTool* para o método da colocação, segundo critério de constantes de tempo igualmente espaçadas em escala logarítmica (SOUSA e SOARES, 2007). Com relação ao termo independente  $D_0$  foi escolhido graficamente o valor  $5,00 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$ , valor este considerado fixo para todos os casos analisados.

Do ponto de vista de maximização do coeficiente de determinação ajustado ( $R_{ajustado}^2$ ), a Figura 5.7 mostra que o método da colocação por Mínimos Quadrados Linear (MQL) é vantajoso em relação ao método da colocação clássico de SCHAPERY (1961), pois apresenta níveis de ajuste mais elevados em relação à curva mestra ( $R_{ajustado}^2$  maiores).



**Figura 5.7:** Coeficiente de determinação ajustado  $R^2_{ajustado}$  versus número de termos da série de Prony no método da colocação – Função Fluência  $D(t)$  da AA.

Ainda mais importante é o fato de que o método da colocação por MQL resulta em uma menor sensibilidade à escolha inicial das constantes de tempo  $\tau_j$  realizada pelo *ViscoTool* a cada incremento de termos dependentes  $D_j$  em novas séries de Prony

calculadas. Isto pode ser evidenciado na Figura 5.7 pelo aumento contínuo do  $R_{ajustado}^2$  pelo MQL (curva verde), em contraste com comportamento não uniforme do método da colocação simplificado de SCHAPERLY (1961) sem pré-suavização dos dados experimentais (curva azul). Por exemplo, o uso de 7 termos dependentes  $D_j$  no método da colocação simplificado sem pré-suavização, para as constantes de tempo  $\tau_j$  igualmente espaçadas em escala logarítmica e automaticamente sugeridas pelo *ViscoTool*, resultou em  $R_{ajustado}^2$  em torno de 0,40.

A maior robustez do MQL aplicado ao método da colocação se deve justamente ao fato de considerar todos os pontos experimentais da curva mestra conforme descrito na Equação (2.40). Uma vez que a curva mestra exibida na Figura 5.6 apresenta certa dispersão em torno da tendência central, o método clássico de SCHAPERLY (1961) que estabelece a escolha de apenas uma observação no tempo por década logarítmica ( $t_k$  com  $k = 1, \dots, n$ ), segundo a Equação (2.36), pode resultar em nível de ajuste reduzido, pois é fortemente dependente dos pontos escolhidos  $t_k$  para representar a curva experimental.

Esta dificuldade do método da colocação clássico de SCHAPERLY (1961) é ainda maior quando se decide utilizar uma quantidade de termos dependentes  $D_j$  maior que o mínimo recomendado (8 termos, neste caso). A partir de 9 termos, a escolha automática das constantes de tempo  $\tau_j$  sugerida pelo *ViscoTool* resultou em curvas ajustadas extremamente instáveis no método clássico de SCHAPERLY (1961), resultando inclusive em coeficientes de determinação ajustados negativos. Por outro lado, o método da colocação por MQL (curva verde) permite facilmente estabelecer uma quantidade de termos dependentes  $D_j$  maior que o mínimo recomendado pela literatura (SOUZA, 2005; SOUSA e SOARES, 2007), podendo chegar a até 20 termos, que é a quantidade de termos máxima estabelecida para o *ViscoTool*. Isto reforça a afirmação de que o método da colocação por MQL é uma técnica mais robusta de ajuste de curva em relação ao método da colocação clássico de SCHAPERLY (1961).

A Figura 5.7 indica ainda a quantidade de termos negativos gerados em cada método de ajuste. Por exemplo, o método da colocação por MQL utilizando 8 termos dependentes  $D_j$  – com escolha automática das constantes de tempo  $\tau_j$  sugerido pelo

*ViscoTool* – resultou em uma série de Prony com 3 termos dependentes  $D_j$  negativos. De acordo com o item 2.3 da revisão bibliográfica, termos negativos da série de Prony devem ser evitados para uma representação física mais adequada, uma vez que não possuem interpretação física pelos análogos mecânicos. Além da questão da interpretação física de termos negativos, dependendo da magnitude dos termos negativos encontrados, a curva analítica (série de Prony) poderá exibir oscilações significativas de algumas ordens de grandeza em determinadas regiões da escala de tempo. O problema pode ser ainda mais acentuado ao ponto de resultar em valores negativos para a função analítica (representada por séries de Prony) da Função Fluência  $D(t)$ .

Na tentativa de evitar termos negativos foi realizado então o método da colocação clássico de SCHAPERY (1961), aliado com a ideia do trabalho de KIM (2001) de realizar uma pré-suavização dos dados experimentais utilizando a série do tipo Lei de Potência Modificada (*Modified Power Law series*), conforme descrito no item 2.3 e que resulta na curva vermelha da Figura 5.7.

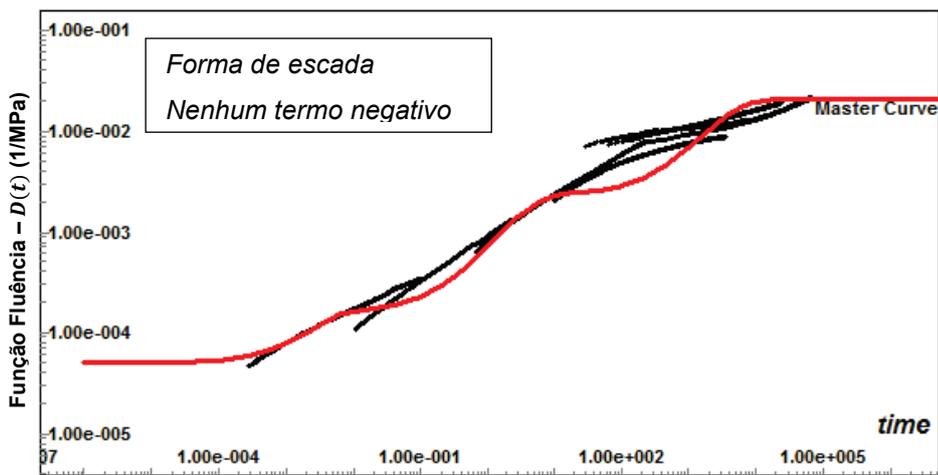
Nota-se que para este último método também não foram obtidos bons ajustes da série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  da AA. Além do mais, a pré-suavização dos dados experimentais realizada de forma simplificada pelo programa *ViscoTool* não foi capaz de eliminar os termos negativos da série de Prony ajustada.

A princípio, estes resultados parecem contradizer o trabalho de KIM (2001). No entanto, uma justificativa para o insucesso da pré-suavização realizada no presente trabalho pode ser atribuída ao fato de que o ajuste de curva da série de Lei de Potência Modificada (LPM) realizado pelo programa *ViscoTool* teve como uma de suas premissas a atribuição das constantes de tempo  $\hat{\tau}_j$  da série de LPM (da Função Fluência) iguais às constantes de tempo  $\tau_j$  automaticamente escolhidas para a respectiva série de Prony. Neste sentido, recomendam-se maiores esforços para que versões futuras do *ViscoTool* permitam atribuir valores diferentes para as constantes  $\hat{\tau}_j$  de LPM que aqueles sugeridos para  $\tau_j$  da série de Prony.

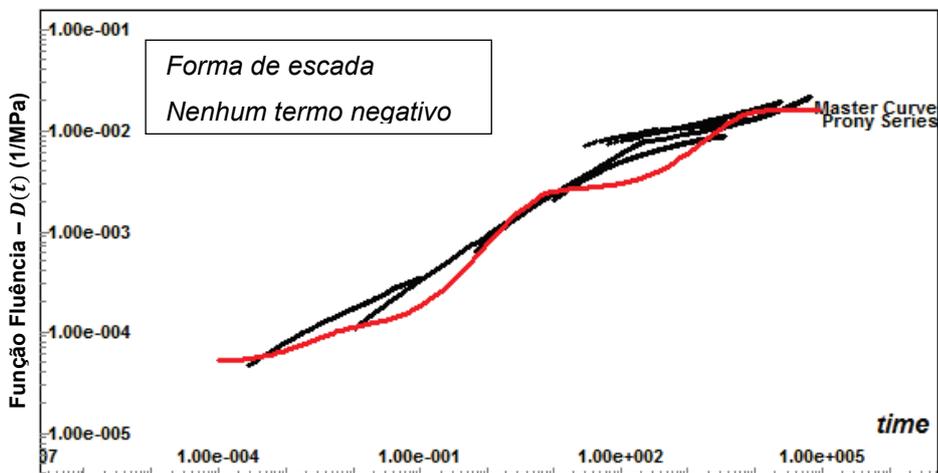
Além disso, recomenda-se utilizar um método iterativo (MQL ou MQNL) para o cálculo dos coeficientes  $\hat{D}_j$  da série de LPM, sob a expectativa de maior robustez dos resultados como se pôde perceber pela discussão realizada nos parágrafos anteriores para a série de Prony.

Vale destacar que a análise do ajuste de curva de séries de Prony deve ser realizada pela análise integrada de dois critérios: um primeiro critério baseado no coeficiente de determinação ajustado  $R_{ajustado}^2$ , que foi a análise realizada tomando por base a Figura 5.7; e um segundo critério visual baseado na comparação da função analítica ajustada (série de Prony) com a respectiva curva mestra originada a partir dos valores experimentais. Para tanto, as Figura 5.8, Figura 5.9, Figura 5.10 e Figura 5.11 das páginas seguintes mostram as séries de Prony ajustadas considerando os três métodos de colocação discutidos para um número de termos dependentes  $D_j$  igual a 3, 7, 8 e 9, respectivamente.

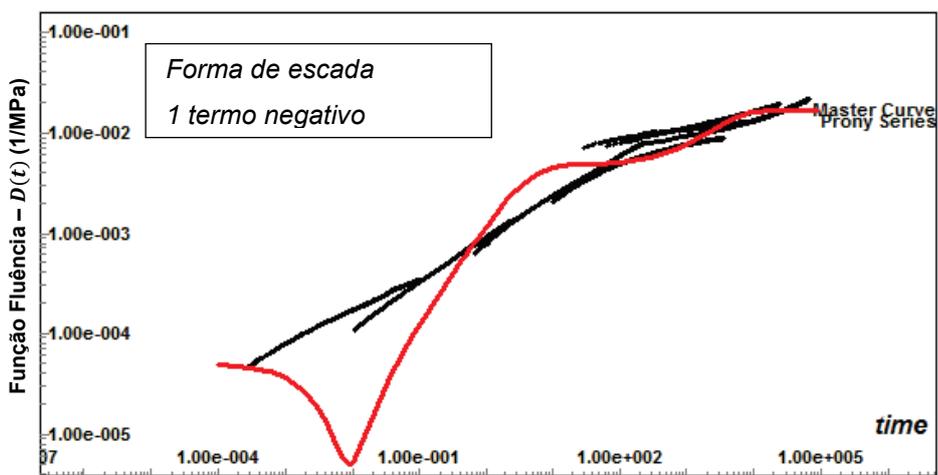
Para exemplificar, observa-se na Figura 5.8b que a série de Prony ajustada pelo método da colocação clássico com pré-suavização por MPL apresentou um coeficiente de determinação ajustado  $R_{ajustado}^2$  de 0,891, valor este que seria perfeitamente aceitável para análise de regressão em outras áreas do conhecimento, tais como ciências sociais, biológicas e de planejamento de transportes. No entanto, ao realizar uma caracterização constitutiva por série de Prony de funções viscoelásticas, valores para o coeficiente de determinação ajustado  $R_{ajustado}^2$  da ordem 0,95 podem ser ainda insuficientes, como se pode notar pela forma de escada de  $D(t)$  da Figura 5.8b, visivelmente não representativa da curva mestra em razão do emprego de poucos termos da série de Prony (SOUZA, 2005; SOUSA e SOARES, 2007). Ainda na Figura 5.8 verificou-se que, quando utilizado poucos termos dependentes na série de Prony (três termos, neste caso) não existiu diferença significativa na qualidade do ajuste entre os três métodos da colocação.

Tempo -  $t$  (s)

(a) método clássico

Tempo -  $t$  (s)

(b) método clássico com pré-suavização

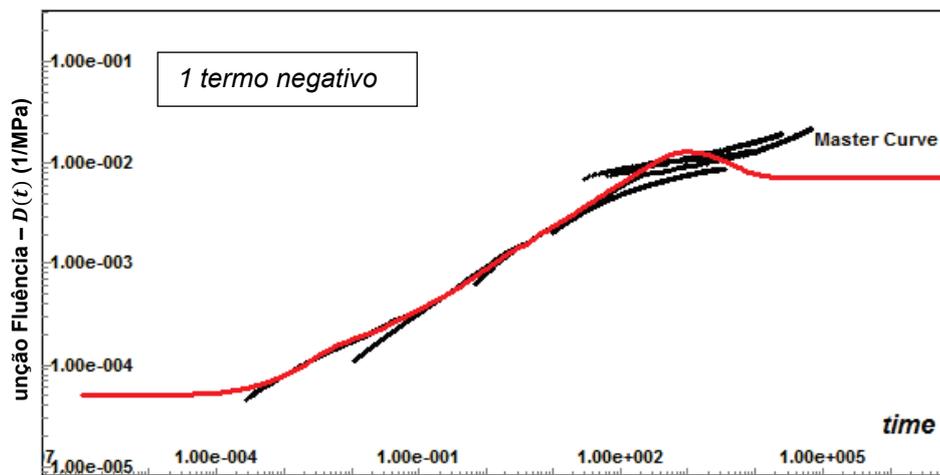
Tempo -  $t$  (s)

(c) método dos mínimos quadrados linear

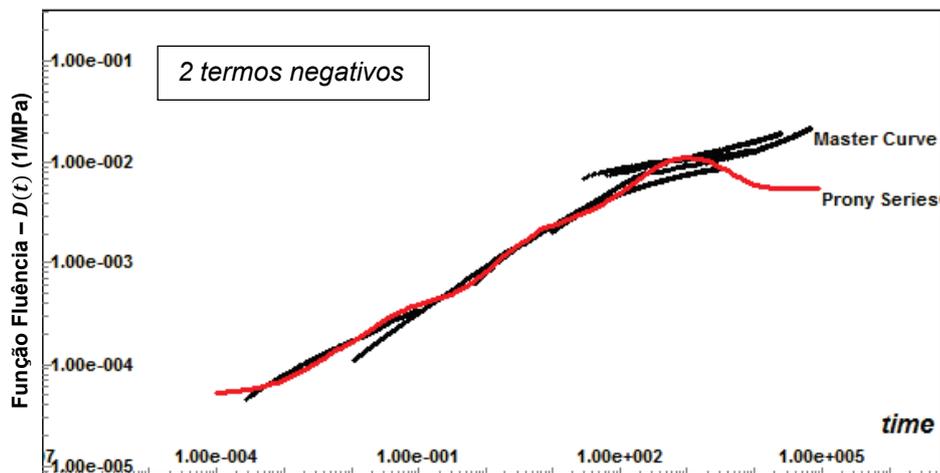
**Figura 5.8:** Método da colocação da Função Fluência  $D(t)$  da AA  
– 3 termos.

Observando a Figura 5.9 e Figura 5.10 é possível verificar que, de uma maneira geral, o método da colocação por MQL resulta em séries de Prony melhor ajustadas na parte final da curva mestra (entre  $10^2$  e  $10^5$  segundos), que apresentam maiores valores de fluência e conseqüentemente resultam em menores resíduos (maiores coeficientes  $R_{ajustado}^2$ ). No entanto, o método da colocação por MQL não foi capaz de eliminar a oscilação em torno da curva mestra.

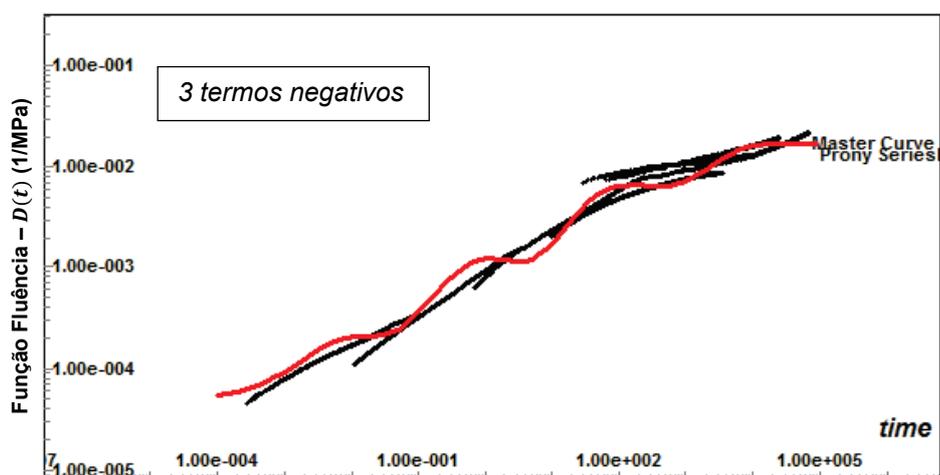
Já a Figura 5.11 exemplifica outra vantagem do método da colocação por MQL frente ao método clássico de SCHAPERLY (1961). Verifica-se que ao empregar uma quantidade de termos dependentes (9, neste caso) acima do mínimo recomendado (8, neste caso) o método clássico de SCHAPERLY indicado na Figura 5.11a apresenta uma oscilação acentuada em torno da curva mestra, sendo este efeito tão maior quanto mais termos dependentes forem empregados. Destaca-se também que embora o método da colocação clássico com pré-suavização por LPM indicado na Figura 5.11b tenha sido capaz de eliminar a oscilação neste caso, este resultado não se repete para uma maior quantidade de termos dependentes empregados. Dessa forma, o método da colocação por MQL se revela uma técnica mais robusta que o método da colocação clássico, uma vez que as séries de Prony ajustadas por MQL se mostram numericamente estáveis para uma grande quantidade de termos dependentes empregados. Diante destes resultados, o método dos MQL é o que será utilizado para as análises empregando o método da colocação deste ponto em diante.

Tempo -  $t$  (s)

(a) método clássico

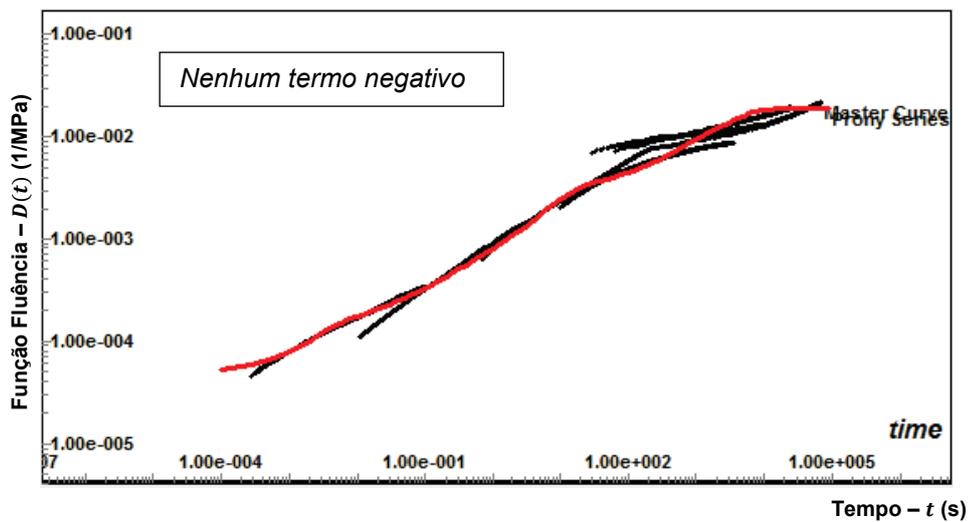
Tempo -  $t$  (s)

(b) método clássico com pré-suavização

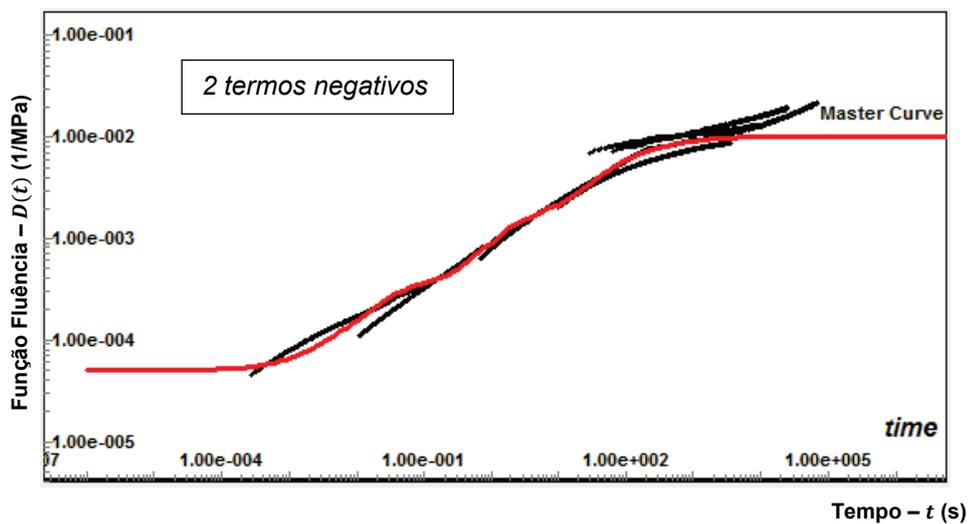
Tempo -  $t$  (s)

(c) método dos mínimos quadrados linear

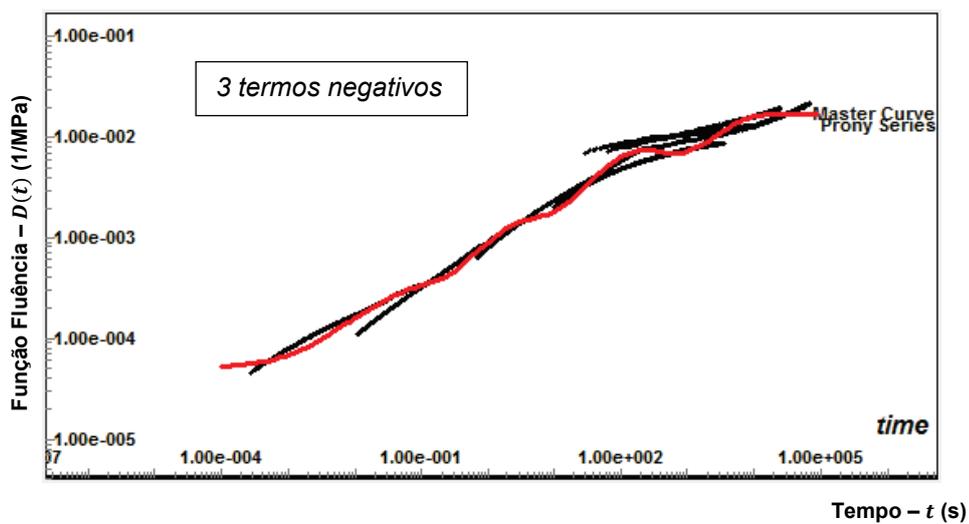
**Figura 5.9:** Método da colocação da Função Fluência  $D(t)$  da AA  
– 7 termos.



(a) método clássico

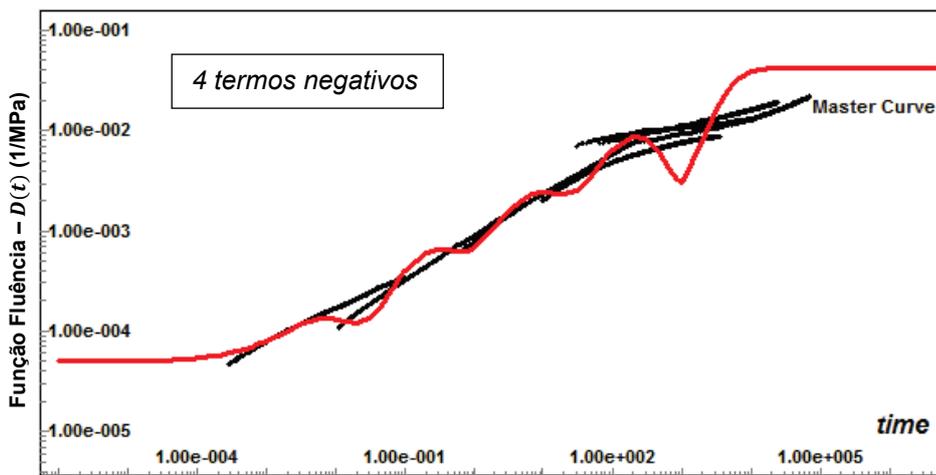


(b) método clássico com pré-suavização

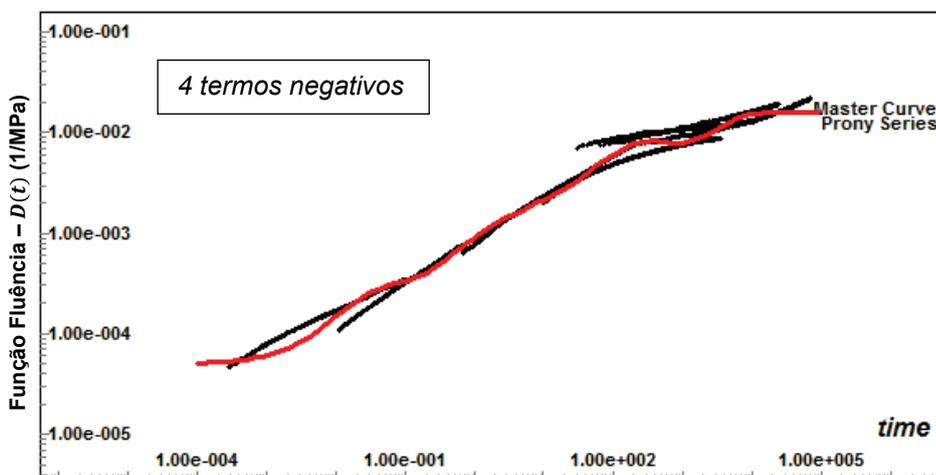


(c) método dos mínimos quadrados linear

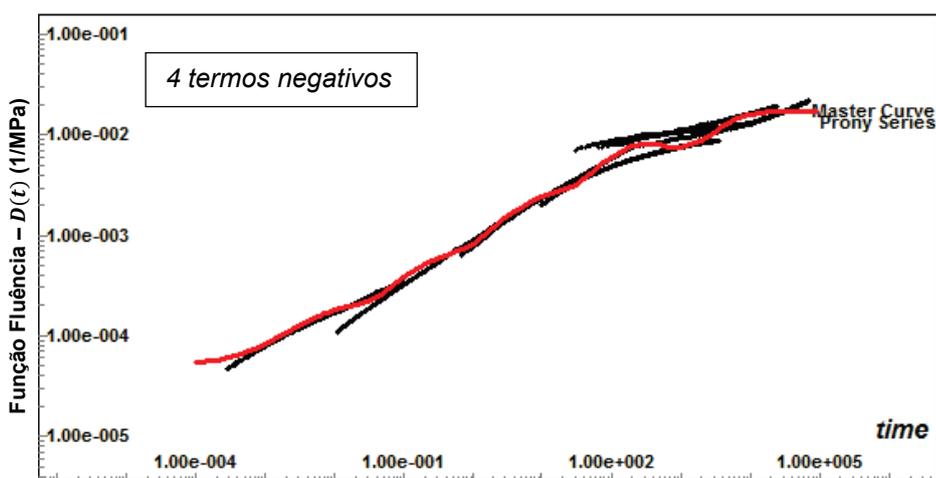
**Figura 5.10:** Método da colocação da Função Fluência  $D(t)$  da AA – 8 termos.

Tempo -  $t$  (s)

(a) método clássico

Tempo -  $t$  (s)

(b) método clássico com pré-suavização

Tempo -  $t$  (s)

(c) método dos mínimos quadrados linear

**Figura 5.11:** Método da colocação da Função Fluência  $D(t)$  da AA  
– 9 termos.

Outra questão relevante na modelagem constitutiva por série de Prony é a definição da quantidade de termos dependentes  $D_j$ . Conforme já discutido, devem-se evitar poucos termos sob pena de obtenção de uma curva analítica (série de Prony) em forma de escada visivelmente não representativa do comportamento continuamente crescente da curva mestra da Função Fluência. De acordo com os estudos de MEDEIROS JR. (2006) e SOUSA e SOARES (2007) a quantidade mínima de termos dependentes  $D_j$  recomendada para a série de Prony baseada na curva mestra da Função Fluência da AA investigada é de 8 termos.

A inspeção do coeficiente de determinação ajustado da Figura 5.7 informa ainda que o emprego de uma quantidade excessiva de termos dependentes  $D_j$  não resulta em aumento significativo no coeficiente de determinação ajustado. Por exemplo, no método dos MQL, ao se passar de 8 termos dependentes  $D_j$  ( $R_{ajustado}^2 = 0,954$ ), para 10, 15 ou 20 termos o coeficiente de determinação ajustado se modifica para 0,959, 0,965 e 0,968, respectivamente. Sendo este ganho reduzido, não se justifica o emprego de uma quantidade de termos dependentes  $D_j$  muito superior ao valor mínimo sugerido nas referências citadas (MEDEIROS JR., 2006; SOUSA e SOARES, 2007). Em razão do pequeno ganho no poder explicativo pela introdução de uma quantidade de termos dependentes maior que o mínimo recomendado, a quantidade de termos  $N$  escolhida para a série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  da AA estudada no presente trabalho será  $N = 8$  termos.

#### **5.2.4. Ajuste Manual das Constantes de Tempo para Obtenção de Termos Dependentes Positivos da Série de Prony – Areia Asfalto**

Para que se consiga uma série de Prony graficamente representativa de sua respectiva curva mestra é necessário arbitrar constantes de tempo  $\tau_j$  adequadas para utilização no método da colocação. Conforme indicado na Figura 5.7 da página 114, a escolha inicial (*default*) das constantes de tempo  $\tau_j$  sugeridas pelo *ViscoTool* – igualmente espaçadas na escala logarítmica de tempo – resultou em 3 termos negativos da série de Prony de  $D(t)$  quando empregado o método dos MQL e  $N = 8$  termos. Este

efeito se repetiu para a maior parte da faixa de termos dependentes utilizados (1 a 20) e para os três métodos da colocação empregados. Na realidade, o procedimento *default* empregado no *ViscoTool* de escolha de constantes de tempo  $\tau_j$  igualmente espaçadas em escala logarítmica deve ser encarado como apenas uma estimativa inicial dos valores adequados, uma vez que este procedimento dificilmente se adequará bem a dados experimentais reais, devido à existência dos platôs iniciais e finais e dos ruídos das funções viscoelásticas obtidas experimentalmente.

Por sua vez, após arbitrar inúmeros valores para as constantes de tempo  $\tau_j$ , foi possível perceber que os termos dependentes  $D_j$  regredidos (ajustados) pelo método da colocação são extremamente sensíveis a pequenas variações nos valores arbitrados para as constantes de tempo  $\tau_j$ . PARK e KIM (2001) citam que esta sensibilidade é intrínseca a funções matemáticas de base exponencial, que possuem um escopo de abrangência bem menor que das diversas décadas logarítmicas de curvas mestras das funções viscoelásticas. PARK e KIM (2001) citam ainda que oscilações locais (ruídos) inerentes ao processo de aquisição experimental das funções viscoelásticas induzem a termos negativos da série de Prony. Devido a estas dificuldades, foi realizada uma série de testes para os valores arbitrados para as constantes de tempo  $\tau_j$ . A principal conclusão obtida é que é possível evitar termos dependentes  $D_j$  negativos utilizando o método da colocação por MQL sem a necessidade de pré-suavização dos dados experimentais, desde que seja realizado um ajuste final das constantes de tempo em torno de suas respectivas décadas logarítmicas.

Utilizando o *ViscoTool* para realizar manualmente o ajuste final das constantes de tempo em torno de respectivas décadas logarítmicas, foi possível obter a série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  da AA descrita na Tabela 5.5 da página 125. Repare que neste caso a escolha das constantes de tempo  $\tau_j$  não rigorosamente espaçadas de uma década logarítmica resultou em termos dependentes  $D_j$  todos positivos. Isso comprova que é possível obter série de Prony pelo método da colocação por MQL, sem necessariamente realizar pré-suavização dos dados experimentais utilizando uma segunda função matemática.

**Tabela 5.5:** Função Fluência  $D(t)$  da AA obtida pelo método da colocação (primeiro ajuste) e Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ .

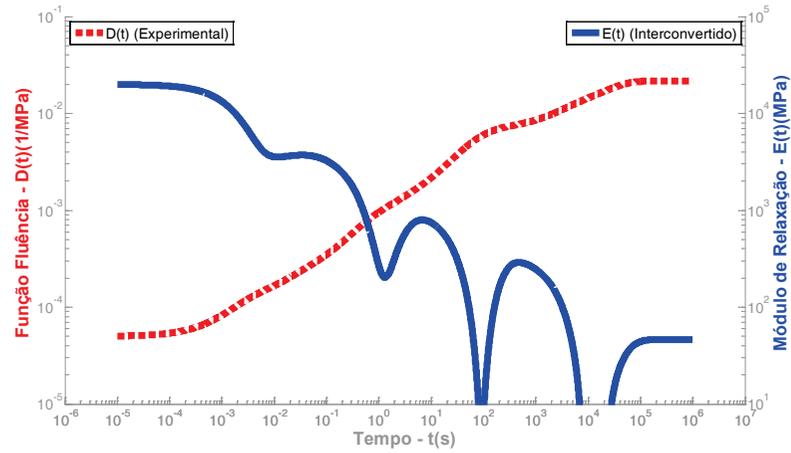
<i>Propriedade Ajustada: Função Fluência <math>D(t)</math></i>			<i>Propriedade Interconvertida: Módulo de Relaxação <math>E(t)</math> (<math>\rho_i = \tau_j</math>)</i>			<i>Propriedade Interconvertida: Módulo de Relaxação <math>E(t)</math> (<math>\rho_i &lt; \tau_j</math>)</i>		
$j$	$\tau_j$ (s)	$D_j$ (1/MPa)	$i$	$\rho_i$ (s)	$E_i$ (MPa)	$i$	$\rho_i$ (s)	$E_i$ (MPa)
1	2,0000E-3	6,7447E-5	1	2,0000E-3	1,6898E+4	1	8,0310E-4	1,2441E+4
2	2,0000E-2	8,4802E-5	2	2,0000E-2	-1,2659E+3	2	1,1450E-2	3,3344E+3
3	4,0000E-1	5,1062E-4	3	4,0000E-1	5,2679E+3	3	1,0760E-1	3,1415E+3
4	2,0000E+0	4,2881E-4	4	2,0000E+0	-2,0316E+3	4	1,3040E+0	3,6346E+2
5	4,0000E+1	3,4830E-3	5	4,0000E+1	2,1490E+3	5	9,1660E+0	5,5702E+2
6	1,0000E+2	2,3161E-3	6	1,0000E+2	-1,3997E+3	6	7,7560E+1	2,2365E+1
7	3,1000E+3	4,2994E-3	7	3,1000E+3	4,1990E+2	7	1,8430E+3	5,9409E+1
8	2,6000E+4	1,0359E-2	8	2,6000E+4	-1,0673E+2	8	1,4210E+4	3,4494E+1
<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>ViscoTool</i> Método de Regressão: Colocação por Mínimos Quadrados Linear (MQL) Coeficiente de Determinação Ajustado: $R^2_{ajustado} = 0,9762$ Termo Independente: $D_0 = 5,0000E-5$ 1/MPa			<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>ViscoTool</i> Método de Interconversão: Integral de convolução com escolha simplificada das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i = \tau_j$ ) Termo Independente: $E_\infty = 4,6299E+1$ MPa			<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>Matlab</i> Método de Interconversão: Integral de convolução com escolha gráfica das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i < \tau_j$ ) Termo Independente: $E_\infty = 4,6299E+1$ MPa		

Conforme já discutido na Revisão Bibliográfica, uma vez que faz necessário interconverter a Função Fluência  $D(t)$  para o Módulo de Relaxação  $E(t)$  para possibilitar análises mecânico-computacionais, faz necessário avaliar ainda a qualidade da série de Prony do Módulo de Relaxação interconvertido.

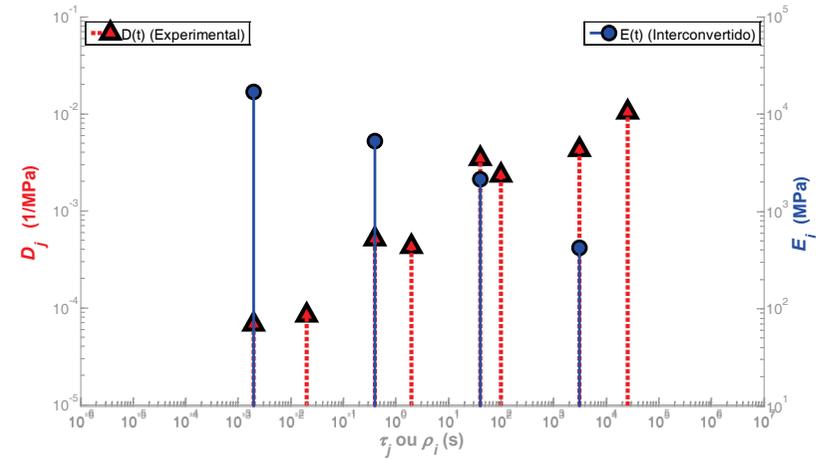
Esta avaliação é feita tomando por base a série de Prony do Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  indicada na parte central da Tabela 5.5. Esta série foi obtida sob a premissa de escolha simplificada das constantes de tempo  $\rho_i$  da função interconvertida  $E(t)$ , tomando valores iguais aos das constantes de tempo  $\tau_j$  da função viscoelástica  $D(t)$ , obtida experimentalmente. Ressalta-se que este procedimento simplificado de interconversão ( $\rho_i = \tau_j$ ) está disponível no *ViscoTool* e é executado automaticamente logo após a obtenção da série de Prony da função medida experimentalmente (função fonte), permitindo avaliar de uma maneira bastante conveniente a qualidade dos coeficientes de ambas as funções viscoelásticas, função experimental ajustada (regredida) e função interconvertida.

Voltando para a análise da qualidade da série de Prony interconvertida, verifica-se que a simplificação  $\rho_i = \tau_j$  não resulta necessariamente em termos dependentes  $E_i$  todos positivos para a série de Prony da função viscoelástica interconvertida (Módulo de Relaxação). Neste caso, foram encontrados 4 termos negativos  $E_i$  ( $i = 2, 4, 6, 8$ ). A Figura 5.12a mostra o efeito não desejável destes termos negativos na representação gráfica da série de Prony interconvertida  $E(t)$ . A Figura 5.12b indica o espectro discreto (série de Prony representada graficamente, com exceção do termo independente) das duas funções viscoelásticas  $D(t)$  e  $E(t)$  que será explorado mais adiante.

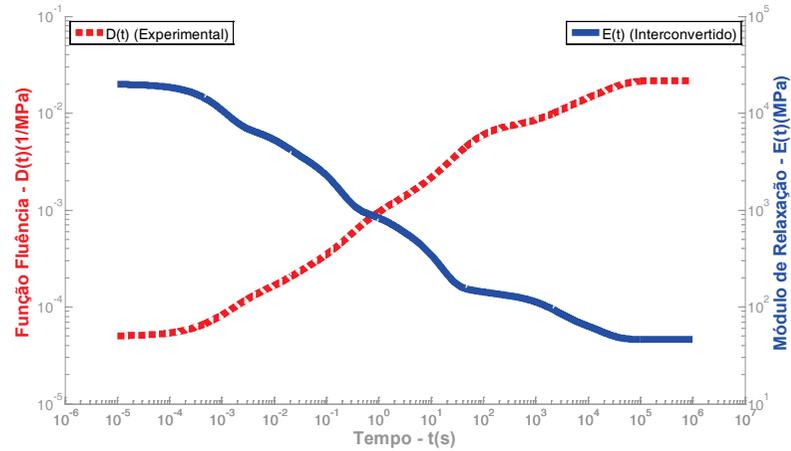
Dado o insucesso da simplificação  $\rho_i = \tau_j$  nos resultados do Módulo de Relaxação interconvertido, foi aplicada a transformada de Carson  $\tilde{D}(s)$  na Função Fluência para obtenção mais precisa (matematicamente correta) das constantes de tempo  $\rho_i$  da função alvo  $E(t)$ . A representação gráfica deste processo está indicada na Figura 5.13. Nesta figura, pode-se perceber a relação  $\rho_i < \tau_j$  citada por PARK e SCHAPERY (1999). Aplicando então as constantes de tempo  $\rho_i$ , estimadas pelo método gráfico da transformada de Carson  $\tilde{D}(s)$ , no processo de interconversão, foram obtidos os resultados descritos na última coluna principal da Tabela 5.5.



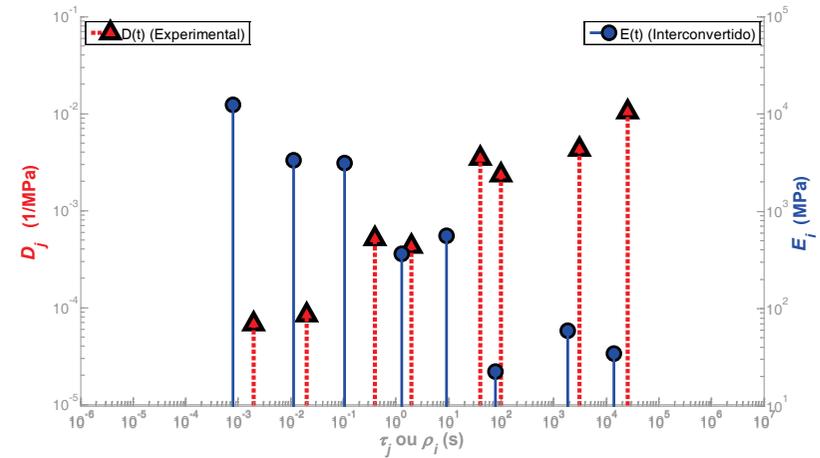
(a) séries de Prony – método simplificado



(b) espectros discretos – método simplificado

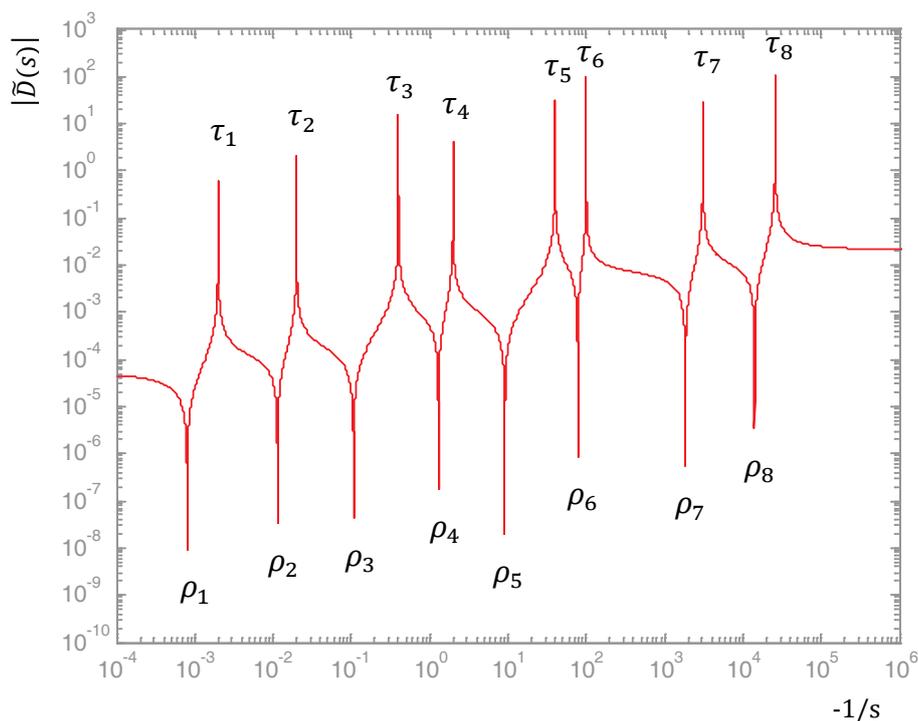


(c) séries de Prony – método gráfico



(d) espectros discretos – método gráfico

**Figura 5.12:** Função Fluência da AA  $D(t)$  obtida pelo ajuste manual de  $\tau_j$  (primeiro ajuste) e Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ .



**Figura 5.13:** Escolha gráfica das constantes de tempo do Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  da AA (primeiro ajuste).

Os resultados desta última coluna da Tabela 5.5 mostram que a escolha mais precisa (matematicamente correta) das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i$ , neste caso) resulta em termos dependentes  $E_i$  todos positivos para a série de Prony do Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ . Comparando a Figura 5.12c com a Figura 5.12a, percebe-se a melhora significativa na representação da série interconvertida, que neste último caso está sem as oscilações indesejáveis que são resultantes de termos negativos  $E_i$ . A Figura 5.12d mostra os espectros discretos da série de Prony regredida  $D(t)$  e interconvertida  $E(t)$  utilizando o método gráfico da transformada de Carson para estimativa das constantes de tempo da função alvo  $\rho_i (< \tau_j)$ . Neste caso, é possível representar todos os termos em um gráfico do tipo log-log, haja vista que não existem termos negativos.

Devido aos resultados obtidos acima, observa-se que a adoção do método gráfico da transformada de Carson para obtenção das constantes de tempo da função alvo melhora substancialmente a qualidade da série de Prony a ser interconvertida. Vale chamar atenção que o procedimento de escolha gráfica das constantes de tempo

utilizando transformada de Carson ainda não está disponível no programa *ViscoTool*, e, portanto, foi avaliado com o auxílio do pacote comercial de álgebra matricial MATLAB (MATHWORKS, 2008). Devido à obtenção de melhores resultados utilizando esta técnica, sugere-se que versões futuras do *ViscoTool* incorporem o procedimento de avaliação mais acurada das constantes de tempo da função alvo pela aplicação da transformada de Carson.

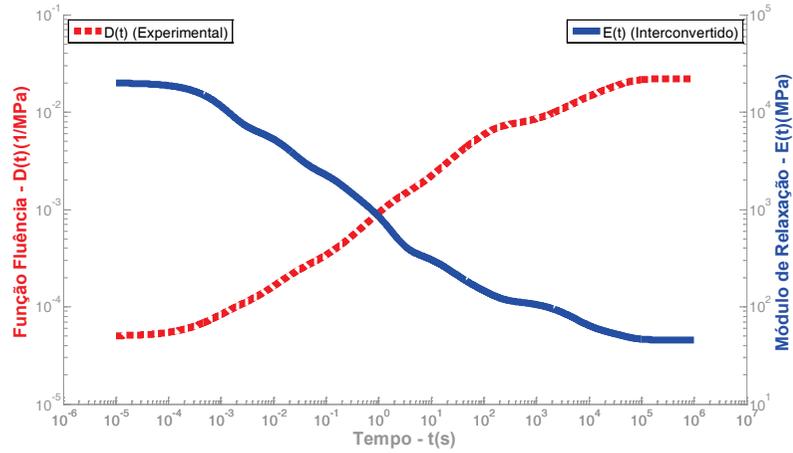
Mesmo com a necessidade de melhoria do *ViscoTool* incorporando a escolha mais acurada das constantes de tempo da série de Prony da função a ser interconvertida, o atual estágio de desenvolvimento deste aplicativo já permite obter valores adequados para a série de Prony interconvertida, mesmo com a simplificação  $\rho_i = \tau_j$ . Com o intuito de exemplificar tal afirmação foi realizada uma segunda escolha das constantes de tempo  $\tau_j$  da função fonte  $D(t)$  e verificado seu efeito na série de Prony interconvertida  $E(t)$ .

Os resultados do segundo ajuste (escolha) das constantes de tempo  $\tau_j$  estão descritos na Tabela 5.6 e Figura 5.14. Comparando o espectro discreto da Função Fluência (função fonte indicada em vermelho tracejado) do segundo ajuste na Figura 5.14b com aquele do primeiro ajuste indicado na Figura 5.12b, foi verificado que o segundo ajuste resultou em termos dependentes  $E_i$  todos positivos da série de Prony interconvertida, mesmo adotando o método simplificado de escolha das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i = \tau_j$ ).

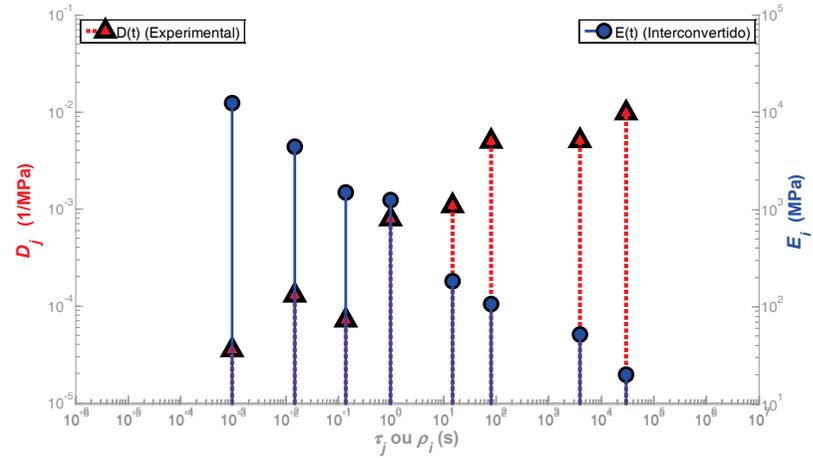
A consequência dos termos  $E_i$  todos positivos é a garantia de série de Prony visivelmente representativa do comportamento lógico esperado para o Módulo de Relaxação – compare  $E(t)$  interconvertido da Figura 5.12a e da Figura 5.14a. Embora não se tenha realizado um estudo matemático sobre o efeito da escolha das constantes de tempo da função fonte ( $\tau_j$ , neste caso) sobre os resultados da função interconvertida ( $E(t)$ , neste caso) existe uma sugestão que podem orientar investigações futuras para explicar este fenômeno.

**Tabela 5.6:** Função Fluência  $D(t)$  da AA obtida pelo método da colocação (segundo ajuste) e Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ .

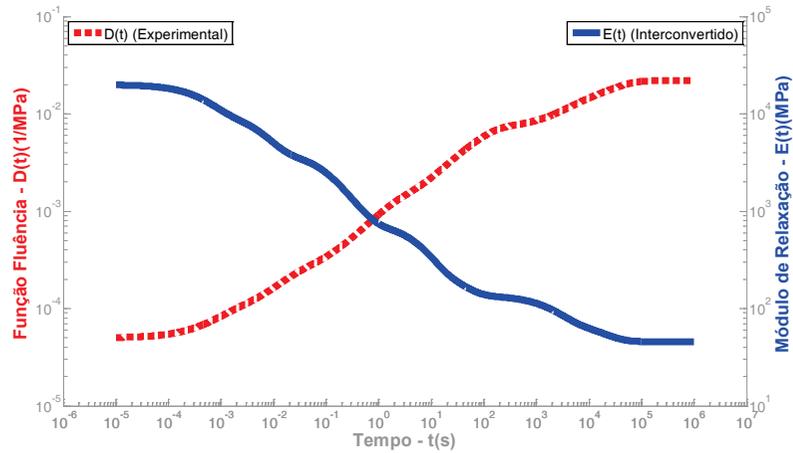
<i>Propriedade Medida: Função Fluência <math>D(t)</math></i>			<i>Propriedade Interconvertida: Módulo de Relaxação <math>E(t)</math> (<math>\rho_i = \tau_j</math>)</i>			<i>Propriedade Interconvertida: Módulo de Relaxação <math>E(t)</math> (<math>\rho_i &lt; \tau_j</math>)</i>		
$j$	$\tau_j$ (s)	$D_j$ (1/MPa)	$i$	$\rho_i$ (s)	$E_i$ (MPa)	$i$	$\rho_i$ (s)	$E_i$ (MPa)
1	9,5000E-4	3,5454E-5	1	9,5000E-4	1,2452E+4	1	5,2580E-4	9,3983E+3
2	1,5000E-2	1,2841E-4	2	1,5000E-2	4,4165E+3	2	5,8770E-3	6,4741E+3
3	1,4000E-1	7,1947E-5	3	1,4000E-1	1,4863E+3	3	9,3060E-2	1,7698E+3
4	1,0000E+0	7,8911E-4	4	1,0000E+0	1,2389E+3	4	2,9020E-1	1,5864E+3
5	1,5000E+1	1,0853E-3	5	1,5000E+1	1,8419E+2	5	6,3600E+0	4,9500E+2
6	8,0000E+1	4,9489E-3	6	8,0000E+1	1,0632E+2	6	3,0830E+1	1,3919E+2
7	4,0000E+3	5,0173E-3	7	4,0000E+3	5,1793E+1	7	2,2590E+3	6,2595E+1
8	3,0000E+4	9,7222E-3	8	3,0000E+4	2,0072E+1	8	1,7420E+4	2,8817E+1
<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>ViscoTool</i> Método de Regressão: Colocação por Mínimos Quadrados Linear (MQL) Coeficiente de Determinação Ajustado: $R_{ajust}^2 = 0,9766$ Termo Independente: $D_0 = 5,0000E-5$ 1/MPa			<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>ViscoTool</i> Método de Interconversão: Relação transiente com escolha simplificada das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i = \tau_j$ ) Termo Independente: $E_\infty = 4,5769E+1$ MPa			<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>Matlab</i> Método de Interconversão: Relação transiente com escolha gráfica das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i < \tau_j$ ) Termo Independente: $E_\infty = 4,5769E+1$ MPa		



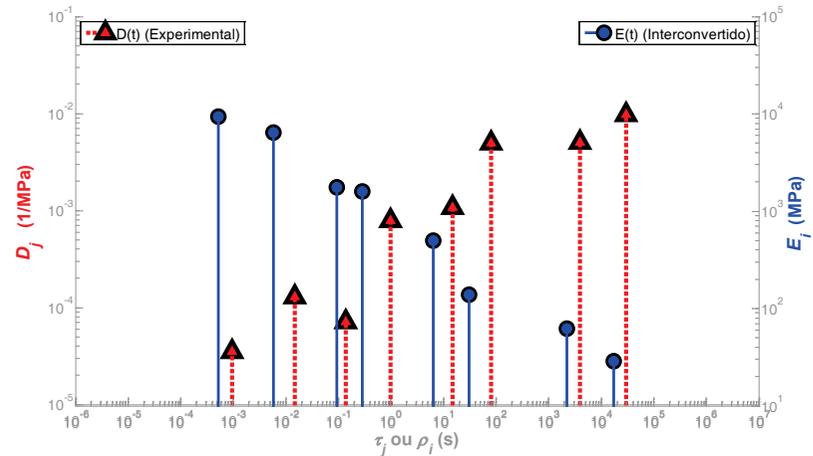
(a) séries de Prony – método simplificado



(b) espectros discretos – método simplificado



(c) séries de Prony – método gráfico



(d) espectros discretos – método gráfico

**Figura 5.14:** Função Fluência  $D(t)$  da AA obtida pelo ajuste manual de  $\tau_j$  (segundo ajuste) e Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ .

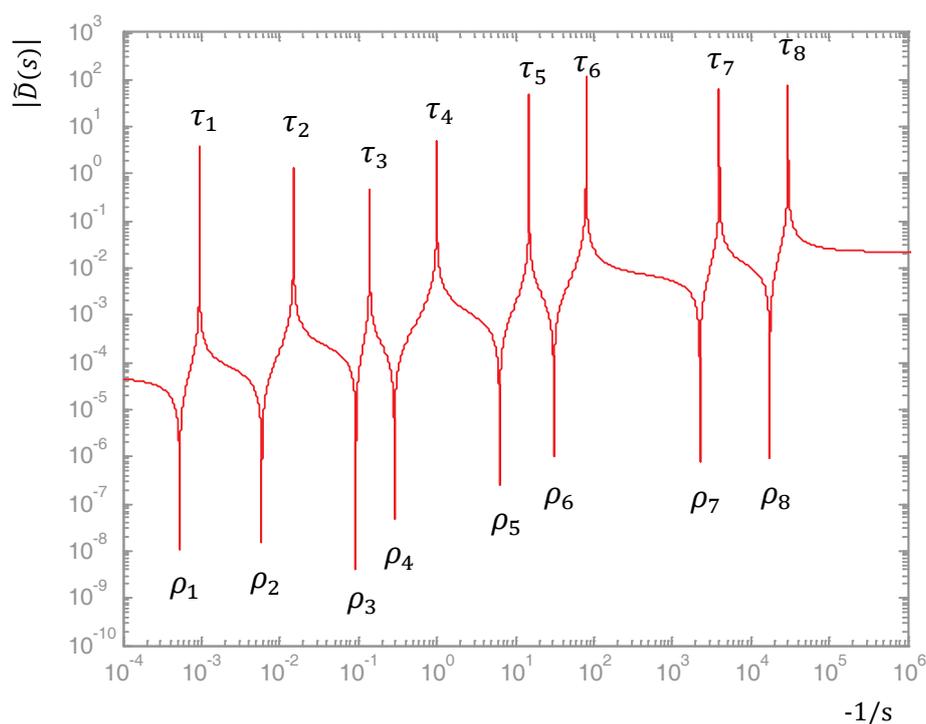
A sugestão para explicar os resultados melhores da função interconvertida  $E(t)$  é a escolha de constantes de tempo  $\tau_j$  melhor espaçadas em escala logarítmica – visualize o melhor espaçamento do espectro discreto da função fonte  $D(t)$  da Figura 5.14b em relação à Figura 5.12b.

No entanto, conforme já discutido anteriormente, sabe-se que dificilmente a escolha de constantes de tempo  $\tau_j$  (função fonte) rigorosamente espaçadas em escala logarítmica resultará em bons resultados para os termos dependentes  $D_j$  da própria função fonte e ser regredida  $D(t)$  (função fonte).

Por outro lado, um espaçamento logarítmico de  $\tau_j$  muito desuniforme, como aquele da Figura 5.12b, acaba gerando termos dependentes  $E_i$  negativos e, conseqüentemente, uma função interconvertida  $E(t)$  não representativa.

Isto mostra que o ajuste de curva (regressão) e interconversão das séries de Prony, que são de natureza exponencial, são extremamente sensíveis aos valores estimados para suas constantes de tempo. Dessa forma, seria interessante empregar métodos de otimização para escolha mais automatizada das constantes de tempo, em vez do tradicional método da colocação que supõe a escolha manual (por tentativa e erro) das constantes de tempo. De fato, um primeiro esforço neste sentido é feito no item 5.2.6 considerando a técnica de Mínimos Quadrados Não Linear (MQNL).

Na última coluna principal da Tabela 5.6 estão indicados ainda os resultados da interconversão pela escolha gráfica das constantes de tempo  $\rho_i (< \tau_j)$  da função alvo  $E(t)$  pelo transformada Carson segundo a Figura 5.15. Repare que neste segundo ajuste, não houve diferença significativa entre a escolha simplificada  $\rho_i = \tau_j$  e mais acurada  $\rho_i < \tau_j$ . No entanto, para incentivar o uso da escolha mais acurada das constantes de tempo da função alvo pelo método gráfico da transformada de Carson foi escolhida a série de Prony de  $E(t)$  da última coluna principal da Tabela 5.6 como representativa do comportamento viscoelástico da Areia Asfalto e esta série é que será utilizada para as análises mecânico-computacionais, realizadas mais a frente no item 5.4.

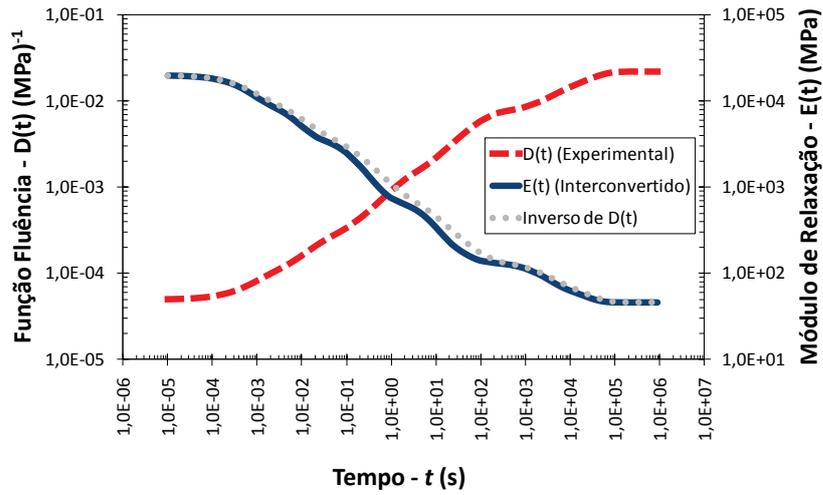
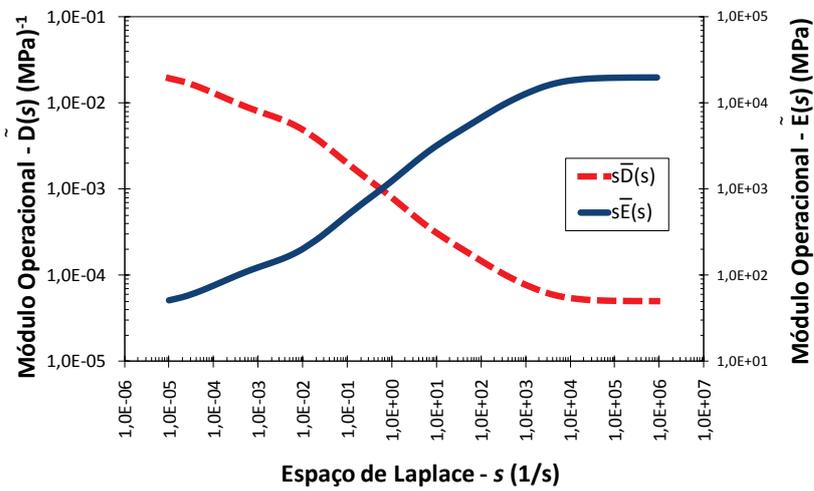
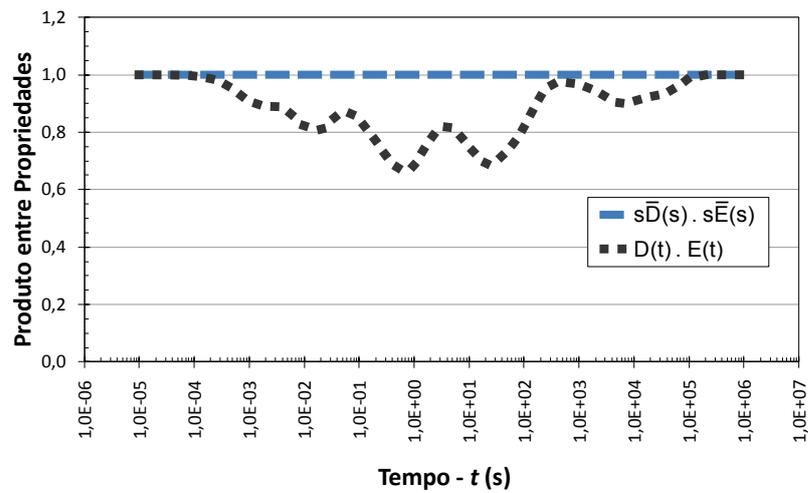


**Figura 5.15:** Escolha gráfica das constantes de tempo do Módulo de Relaxação  $E(t)$  da AA (segundo ajuste).

### 5.2.5. Validação da Interconversão da Função Fluência $D(t)$ para o Módulo de Relaxação $E(t)$ – Areia Asfalto

Apesar de já ter sido realizada uma validação da técnica de interconversão no item 3.5, uma vez que o programa computacional *ViscoTool* desenvolvido para este trabalho trata-se de uma ferramenta nova é importante realizar diversos testes a fim de checar sua confiabilidade.

Para checar a validade da interconversão deste programa, as séries de Prony regredida  $D(t)$  e interconvertida  $E(t)$  representativas da Areia Asfalto – ver última coluna principal da Tabela 5.6 – foram trazidas para o campo de Laplace pelo uso das transformadas de Carson dadas pelas Equações (2.49) e (2.50) e avaliada a identidade  $\tilde{E}(s) \cdot \tilde{D}(s) = 1$ . Caso esta relação seja válida todo o domínio do espaço de Laplace  $s$ , temos certeza que as séries de Prony  $D(t)$  e  $E(t)$  foram obtidas no *ViscoTool* pelo processo correto de interconversão. Os resultados estão resumidos na Figura 5.16.

(a)  $D(t)$ ,  $E(t)$  e  $D(t)^{-1}$ (b)  $\bar{D}(s)$  e  $\bar{E}(s)$ (c)  $D(t) \cdot E(t)$  e  $\bar{D}(s) \cdot \bar{E}(s)$ 

**Figura 5.16:** Avaliação da relação de reciprocidade entre propriedades viscoelásticas – AA.

A Figura 5.16a indica que o inverso da Função Fluência, representado por  $D(t)^{-1}$ , não é igual ao Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  e, portanto, torna explícita a relação de não reciprocidade evidenciada na literatura. É importante chamar atenção que dada a proximidade das curvas  $D(t)^{-1}$  e  $E(t)$  em um gráfico do tipo log-log, pode-se ter a falsa impressão que o inverso da Função Fluência  $D(t)^{-1}$  é uma boa aproximação do Módulo de Relaxação  $E(t)$  e resulta em erros desprezíveis. No entanto, o gráfico da Figura 5.16c deixa bem claro que o produto  $D(t).E(t)$  pode chegar a valores bem menores que 1, da ordem de 0,6 na região central mais crítica.

Por sua vez, a Figura 5.16b que mostra as funções viscoelásticas trazidas para o campo de Laplace pelo uso das transformadas de Carson, denominadas módulos operacionais  $\tilde{E}(s)$  e  $\tilde{D}(s)$ , apresentam comportamento inverso no campo de Laplace (variável  $s$ ) em relação ao domínio do tempo (variável  $t$ ).

Mais importante ainda, a Figura 5.16c mostra que a relação de reciprocidade perfeita  $\tilde{E}(s).\tilde{D}(s) = 1$  foi respeitada para todo o espaço de Laplace, indicando que o programa desenvolvido ViscoTool realiza a interconversão no domínio do tempo de forma correta.

Na seção seguinte são mostrados os resultados do ajuste de curva e interconversão utilizando um método alternativo para automação da escolha das constantes de tempo, o método dos Mínimos Quadrados Não Linear (MQNL).

#### **5.2.6. Avaliação da Técnica de MQNL para Obtenção da Série de Prony da Função Fluência $D(t)$ – Areia Asfalto**

Apesar do método da colocação por Mínimos Quadrados Linear (MQL) mostrado no item anterior ser eficaz para a obtenção da série de Prony da Função Fluência, é desejável que o processo de ajuste de curva de funções viscoelásticas seja realizado de forma mais eficiente, se possível evitando o ajuste manual por tentativa e erro das constantes de tempo, que se revela bastante trabalhoso. Para tanto, a técnica de Mínimos Quadrados Não Linear (MQNL) foi testada nos dados experimentais da curva mestra da Figura 5.6 pelo uso da rotina *lsqcurvefit* do programa comercial de álgebra

matricial MATLAB R2009b (MATHWORKS, 2008). O algoritmo implementado na rotina *lsqcurvefit* é, do ponto de vista de otimização, mais abrangente que o método da colocação por Mínimos Quadrados Linear por permitir considerar na minimização dos resíduos (SQE) não apenas os termos dependentes  $D_j$  (ou  $E_i$ ), mas também as constantes de tempo  $\tau_j$  (ou  $\rho_i$ ).

Para esta técnica iterativa foram adotados 3 critérios de convergência: (i) uma mudança relativa no valor da função a ser minimizada (SQE) menor ou igual a  $10^{-7}$ ; (ii) uma mudança relativa em todos os graus de liberdade envolvidos ( $\tau_j$  e  $D_j$ ) menor ou igual a  $10^{-6}$ ; e (iii) um número máximo de iterações igual a 200. Destaca-se que foi adotado um critério mais rigoroso para SQE ( $10^{-7}$ ) uma vez que análises preliminares indicaram a que dificilmente haverá convergência pelo critério dos graus de liberdade envolvidos, caso decida-se utilizar o mesmo rigor para os dois primeiros critérios citados,  $\tau_j$  e  $D_j$ , e SQE. Caso pelo menos um dos critérios de convergência fosse satisfeito o algoritmo da rotina *lsqcurvefit* seria finalizado e assumiria então que os graus de liberdade da iteração corrente são os valores ótimos.

Com o intuito de testar a robustez da técnica iterativa dos MQNL para o caso específico de regressão de séries de Prony, foram testados diferentes valores iniciais (espectros iniciais) utilizando as seguintes relações:  $\tau_j^{(k)} = (0,5k^2 + 2,5k - 2) \cdot 10^{j-4}$  e  $D_j^{(k)} = 10^{k-5}$  (com  $k = 1, \dots, 3$  e  $j = 1, \dots, 8$ ). Estes valores (espectros discretos) são utilizados como “vetores” de inicialização do algoritmo iterativo da rotina *lsqcurvefit* e foram definidos de forma que o espectro inicial fosse compatível com os valores da curva mestra da AA (entre  $10^{-4}$  s e  $10^5$  s para valores de tempo e entre  $10^{-5}$  MPa $^{-1}$  e  $10^{-1}$  MPa $^{-1}$  para valores de fluência). A Figura 5.17 da página seguinte mostra graficamente as nove combinações diferentes ( $\tau_j^{(k)}$ ,  $D_j^{(k)}$ ) testadas como espectro de inicialização do algoritmo iterativo da rotina de MQNL *lsqcurvefit*.

Os resultados do método dos MQNL estão resumidos na Tabela 5.7 agrupados em dois grandes grupos: (i) um primeiro sem imposição de qualquer restrição nos graus de liberdade envolvidos  $\tau_j$  e  $D_j$ ; (ii) e um segundo grupo impondo restrições para os valores permissíveis para  $D_j$ .

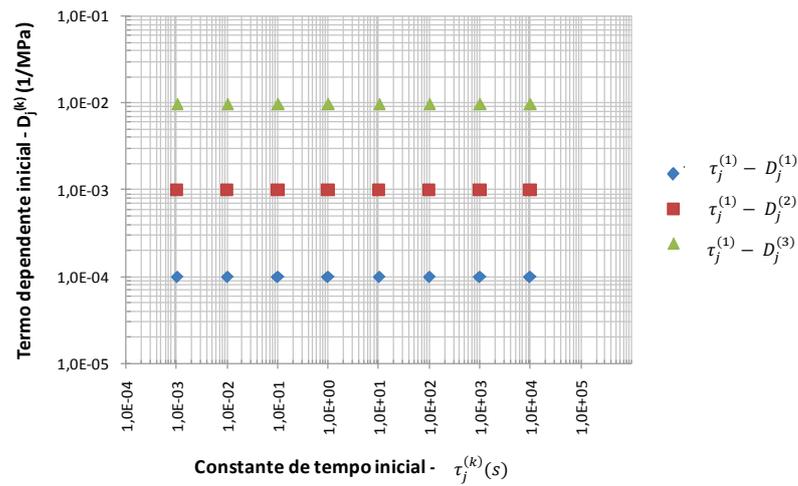
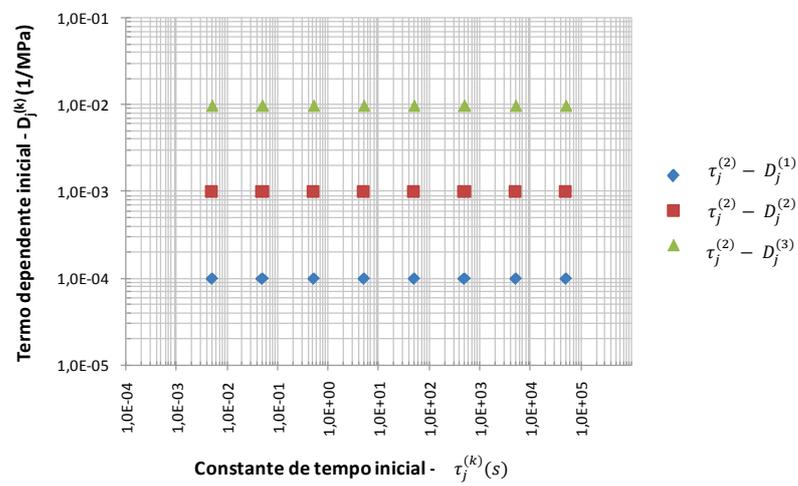
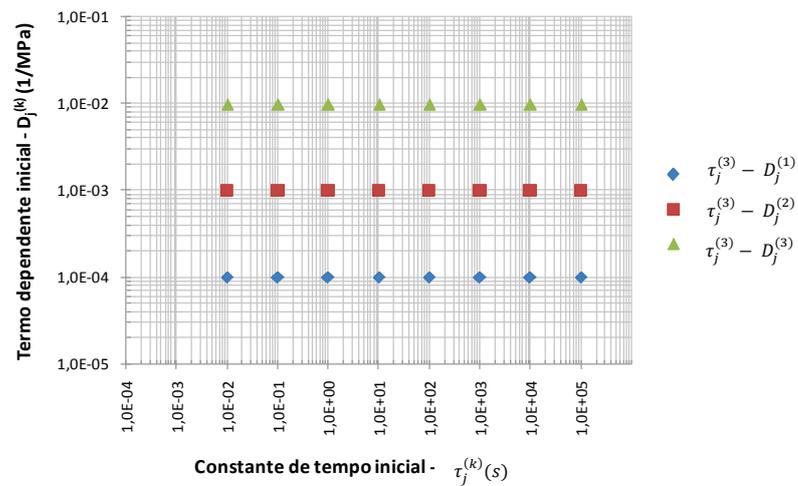
(a) Vetor de constantes de tempo  $\tau_j^{(1)}$ (b) Vetor de constantes de tempo  $\tau_j^{(2)}$ (c) Vetor de constantes de tempo  $\tau_j^{(3)}$ 

Figura 5.17: Espectro inicial utilizado no algoritmo *lsqcurvefit* baseado em MQNL.

Avaliando o método dos MQNL sem imposição de restrições nas constantes de tempo  $\tau_j$  e termos dependentes  $D_j$  verifica-se na Tabela 5.7 que o número de iterações necessárias varia significativamente em função do espectro inicial adotado.

Além disso, a Tabela 5.7 mostra ainda que, para todos os espectros iniciais considerados, a não imposição de restrições no intervalo permissível para os termos dependentes resultou em alguns termos  $D_j$  negativos para a série de Prony convergente. Ou seja, a simples imposição de minimização dos resíduos (SQE) não garante termos  $D_j$  todos positivos da série de Prony ajustada. Conclui-se, portanto, que o método dos MQNL sem imposição de restrições não é adequado para o ajuste de curva de séries de Prony a partir de dados experimentais.

**Tabela 5.7:** Resumo dos Resultados do Ajuste de séries de Prony por MQNL.

Restrição	$\tau_j^{(k)}$	$D_j^{(k)}$	Número de iterações	Critério de parada atingido	Número de termos dependentes negativos	Ajuste visual adequado ao longo de todo domínio	Constantes de tempo idênticas
sem restrição	$\tau_j^{(1)}$	$D_j^{(1)}$	32	TolSQE	1	sim	sim
		$D_j^{(2)}$	200	MaxIter	1	não	não
		$D_j^{(3)}$	200	MaxIter	2	não	não
	$\tau_j^{(2)}$	$D_j^{(1)}$	200	MaxIter	2	não	não
		$D_j^{(2)}$	55	TolSQE	2	não	não
		$D_j^{(3)}$	61	TolSQE	2	não	não
	$\tau_j^{(3)}$	$D_j^{(1)}$	200	MaxIter	1	sim	não
		$D_j^{(2)}$	200	MaxIter	1	não	não
		$D_j^{(3)}$	200	MaxIter	1	não	não
com restrição em $D_j^{(k)}$	$\tau_j^{(1)}$	$D_j^{(1)}$	112	TolSQE	0	não	sim
		$D_j^{(2)}$	68	TolSQE	0	não	sim
		$D_j^{(3)}$	200	MaxIter	0	não	sim
	$\tau_j^{(2)}$	$D_j^{(1)}$	68	TolSQE	0	sim	sim
		$D_j^{(2)}$	46	TolSQE	0	não	sim
		$D_j^{(3)}$	136	TolSQE	0	não	sim
	$\tau_j^{(3)}$	$D_j^{(1)}$	44	TolSQE	0	sim	sim
		$D_j^{(2)}$	49	TolSQE	0	não	sim
		$D_j^{(3)}$	88	TolSQE	0	não	sim

Uma segunda afirmação que pode ser verificada na Tabela 5.7 é que existem séries de Prony contendo algum termo dependente negativo e mesmo assim resultar em um ajuste visual adequado ao longo de todo o domínio de tempo. De acordo com KIM (2009), do ponto de vista de dado de entrada para modelagem computacional pelo MEF, a utilização de séries de Prony com alguns termos negativos, mas que tenham bom ajuste aos dados experimentais, não se revela um problema. No entanto, é preferível uma série com termos todos positivos devido à interpretação física por análogos mecânicos (SOUZA, 2005; SOUSA e SOARES, 2007) e, principalmente, à forte instabilidade numérica para obtenção da série interconvertida (Módulo de Relaxação  $E(t)$ , no caso). Não raro, a série de Prony interconvertida (alvo), a partir de uma série (de Prony) com termos negativos de uma função fonte, apresenta variações bruscas de algumas ordens de grandeza resultando em uma curva visivelmente não representativa da propriedade viscoelástica interconvertida em questão.

Dessa maneira, foi investigado o método dos MQNL com a imposição de restrições para a faixa de valores permissível para os termos dependentes  $D_j$ , a fim de obter coeficientes todos positivos. Para o método dos MQNL com restrições, foi decidido impor restrições apenas nos termos dependentes  $D_j$ , estabelecendo uma faixa de variação permissível para estes termos dependentes de  $10^{-5}$  a  $10^{-1}$  MPa<sup>-1</sup>. Não foi aplicada qualquer restrição às constantes de tempo justamente para avaliar se o algoritmo de busca iterativa da rotina *lsqcurvefit* seria capaz de encontrar valores adequados para  $\tau_j$  ao se restringir apenas a faixa de variação dos termos dependentes  $D_j$ .

A parte inferior da Tabela 5.7 mostra os resultados do método dos MQNL com imposição de restrições. Uma primeira observação é que a imposição de restrições resultou em uma menor variação do número de iterações em função do espectro inicial adotado (par  $\tau_j^{(k)}$ ,  $D_j^{(k)}$ ) quando comparado com método dos MQNL sem restrições. Outra constatação foi que o critério de parada mais frequentemente encontrado foi o de tolerância à mudança relativa de SQE (TolSQE). Em outras palavras, a baixa frequência do critério de número de iterações (MaxIter) indica que a imposição de restrições nos termos dependentes resulta em valores convergentes para o espectro final.

As séries de Prony para o caso dos MQNL com restrições estão mostradas na Figura 5.18, Figura 5.19 e Figura 5.20, que mostram espectros discretos e a série de Prony para constantes de tempo iniciais  $\tau_j^{(1)}$ ,  $\tau_j^{(2)}$  e  $\tau_j^{(3)}$ , respectivamente.

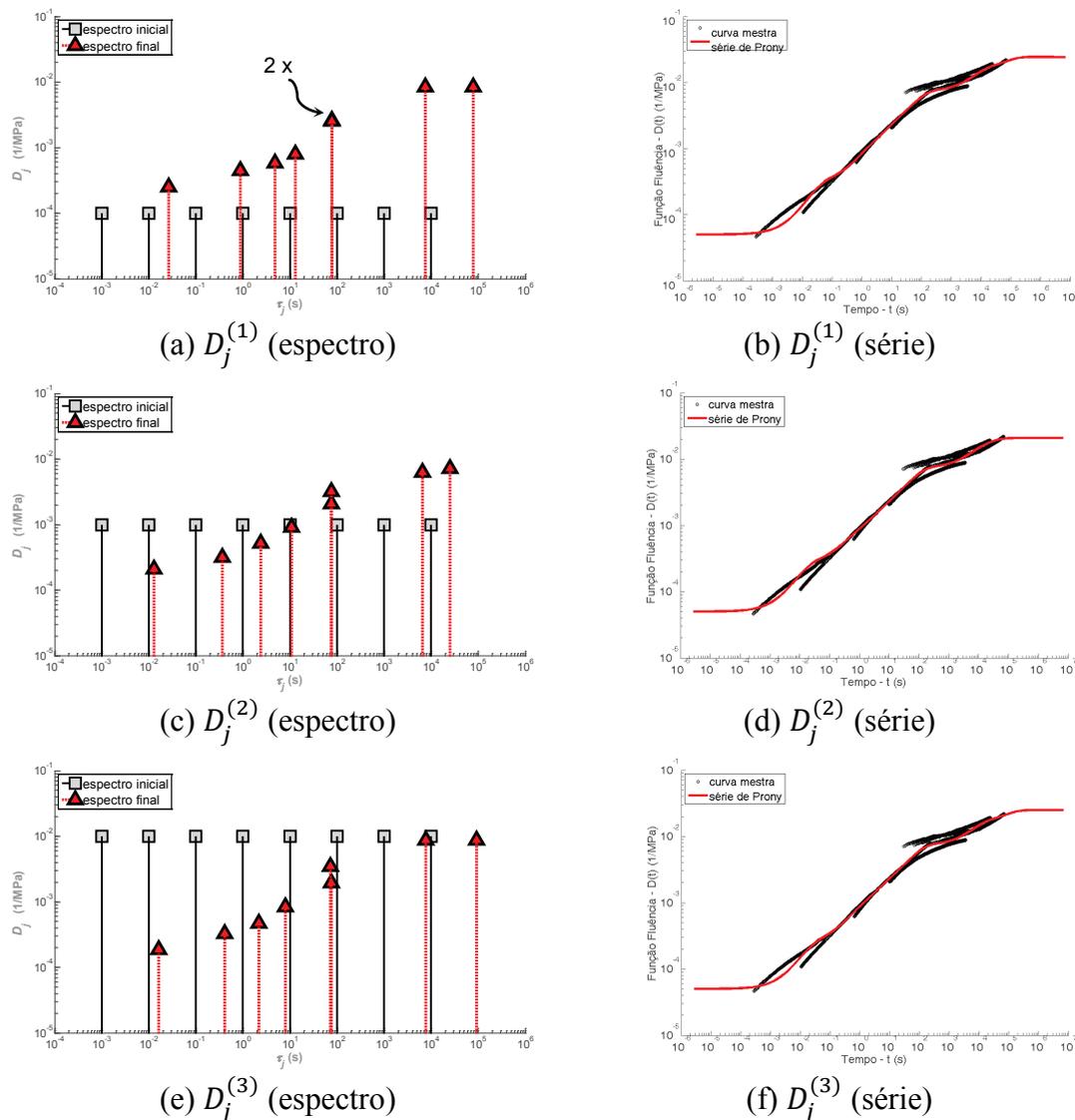
Os espectros finais (ótimos) mostrados nestas figuras sugerem que o ajuste de série de Prony a partir de dados experimentais reais sugere a existência de um problema de otimização com mínimos locais uma vez que o método dos MQNL não se revelou um algoritmo robusto, capaz de fornecer um espectro convergente único ( $D_j$  e  $\tau_j$  ótimos), mas sim dependente do espectro inicial adotado (par  $\tau_j^{(k)}$ ,  $D_j^{(k)}$ ). A variação nos resultados para os valores ótimos ( $D_j$  e  $\tau_j$  ótimos) parece mais sensível a mudanças nas constantes de tempo iniciais ( $\tau_j^{(k)}$ ) que a mudanças nos termos dependentes iniciais  $D_j^{(k)}$ .

Em razão da ausência de robustez dos MQNL, sugere-se que investigações futuras sobre ajustes de séries de Prony contemplem algoritmos de busca global (*robust optimization*), tais com os Algoritmos Genéticos descritos em KARR *et al.* (1995), VANKEERBERGHEN *et al.* (1995) e VANDERNOOT e ABRAHAMS (1997).

Outra constatação interessante para o caso de MQNL é que parece haver uma tendência de valores iniciais mais adequados para obtenção de um bom ajuste visual da série de Prony em relação a sua série de Prony. Percebe-se na Tabela 5.7 que, considerando ou não restrições nos termos dependentes, os casos indicando ajuste adequado foram somente aqueles utilizando os menores valores para os termos dependentes iniciais  $D_j^{(1)}$ . Isto pode ser compreendido pelo fato de que o trecho inicial da Função Fluência (valores da ordem de  $10^{-4}$  MPa<sup>-1</sup>) tem um impacto bem menor que o trecho final (valores da ordem de  $10^{-1}$  MPa<sup>-1</sup>) na minimização de SQE.

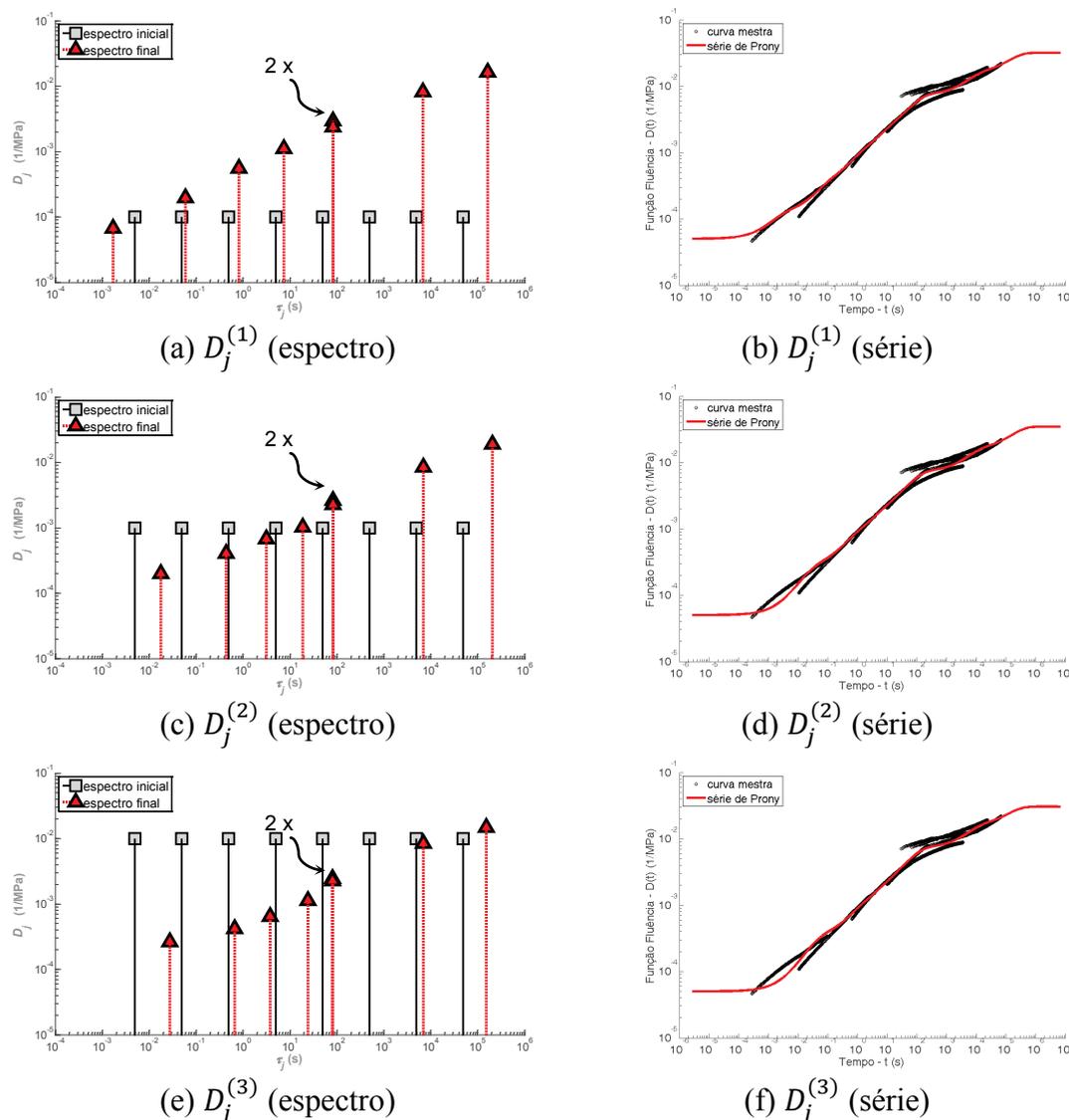
Desta forma, iniciando a busca com valores menores  $D_j^{(1)}$  talvez se esteja favorecendo à busca de valores adequados para o trecho inicial da Função Fluência. A Figura 5.19b e Figura 5.20b mostram o bom ajuste no trecho inicial para o caso com imposição de restrições nos termos dependentes. Resultados similares foram obtidos

para o caso de não imposição de restrições, mas não foram mostrados por questão de brevidade.



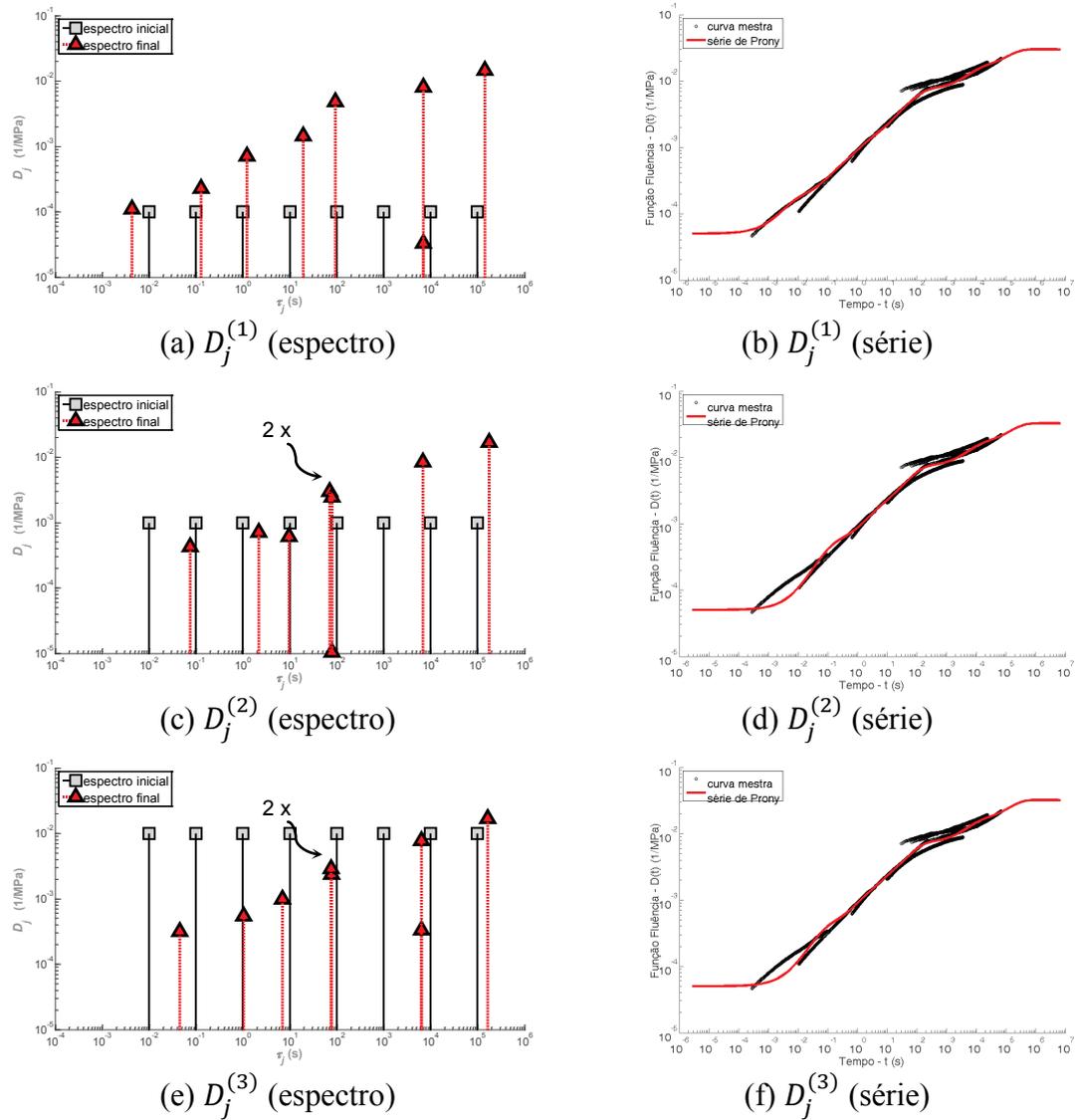
**Figura 5.18:** Ajuste de curva da Função Fluência  $D(t)$  da AA por MQNL com restrições – constantes de tempo iniciais  $\tau_j^{(1)}$ .

Uma última observação com relação ao método dos MQNL para ajuste de séries de Prony foi a obtenção de constantes de tempo convergentes praticamente idênticas. Os espectros discretos mostrados na Figura 5.18, Figura 5.19 e Figura 5.20 mostram claramente que na região de platô final da Função Fluência o algoritmo de MQNL indicou constantes de tempo idênticas, afastadas o máximo possível devido justamente ao pouco crescimento da Função Fluência na região de platô final.



**Figura 5.19:** Ajuste de curva da Função Fluência  $D(t)$  da AA por MQNL com restrições – constantes de tempo iniciais  $\tau_j^{(2)}$ .

Vale chamar a atenção que, caso decida-se utilizar alguma série de Prony da Função Fluência com constantes de tempo praticamente idênticas, fornecida pelo método dos MQNL, para proceder interconversão para o Módulo de Relaxação, deve-se agrupar estes termos pela soma dos termos dependentes  $D_j$  com (praticamente) mesma constante de tempo. A consequência disso, é que a série de Prony passa a ter um termo dependente a menos. Isto deve ser realizado uma vez que análises de interconversão realizadas com constantes de tempo bastante próximas entre si resultaram em forte instabilidade numérica com série de Prony da função interconvertida, visivelmente não representativa da função viscoelástica em questão.



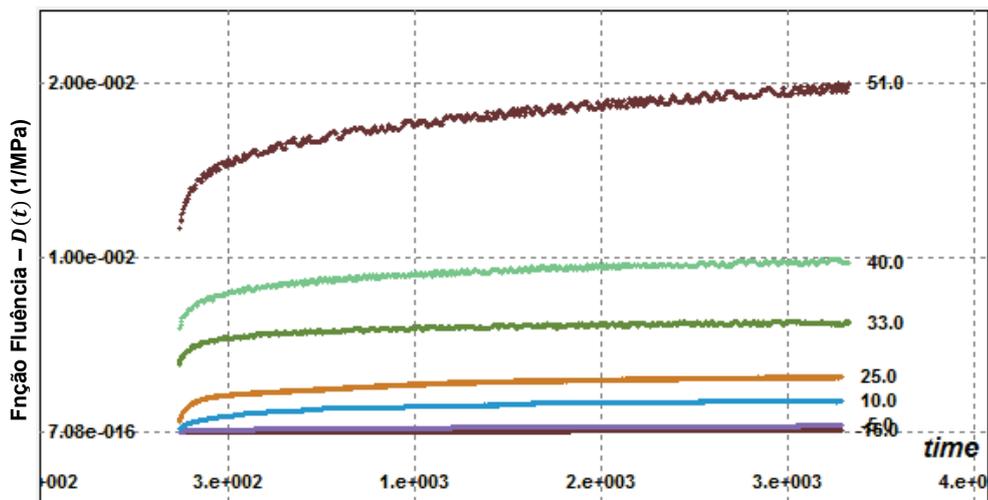
**Figura 5.20:** Ajuste de curva da Função Fluência  $D(t)$  da AA por MQNL com restrições – constantes de tempo iniciais  $\tau_j^{(3)}$ .

### **5.3. MODELAGEM CONSTITUTIVA DO CONCRETO ASFÁLTICO (CA)**

Nesta seção serão mostrados os resultados experimentais e o processo de modelagem constitutiva para o Concreto Asfáltico (CA). Dada a similaridade do procedimento discutido para a AA no item 5.2, a discussão da modelagem constitutiva do CA será limitada apenas à descrição de seus principais resultados, com enfoque nas semelhanças e diferenças em relação à AA.

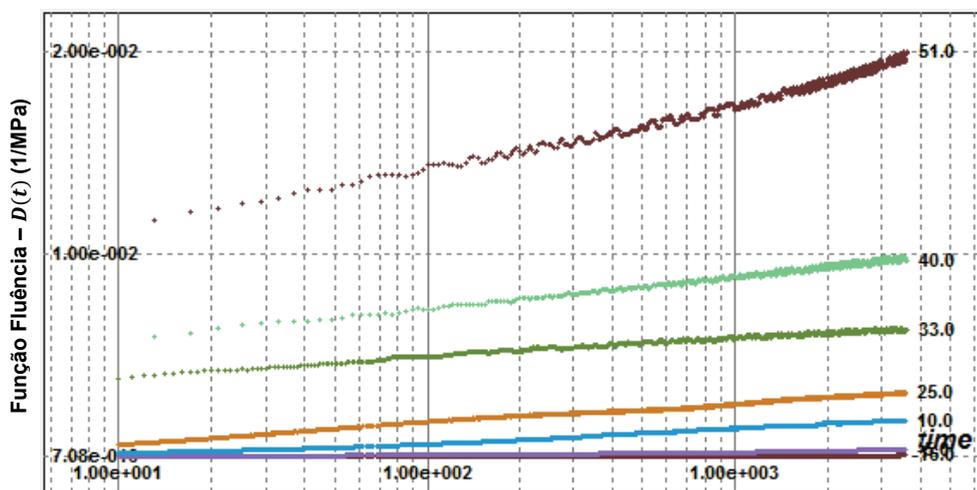
#### **5.3.1. Resultados Experimentais – Concreto Asfáltico**

A Função Fluência  $D(t)$  obtida experimentalmente do CA para as sete temperaturas avaliadas está descrita na Figura 5.21. Comparando os resultados da Figura 5.21 com os da Figura 5.2 referentes à AA, é possível verificar o comportamento esperado de Função Fluência do CA menor que a respectiva propriedade para a AA. A menor fluência do CA se deve pelo fato de este conter um teor de ligante de 6%, valor menor que os 9,2% da AA (**ver** Tabela 4.1). Além do mais, o CA apresenta agregados maiores, reduzindo, portanto, a influência do comportamento viscoelástico do ligante.



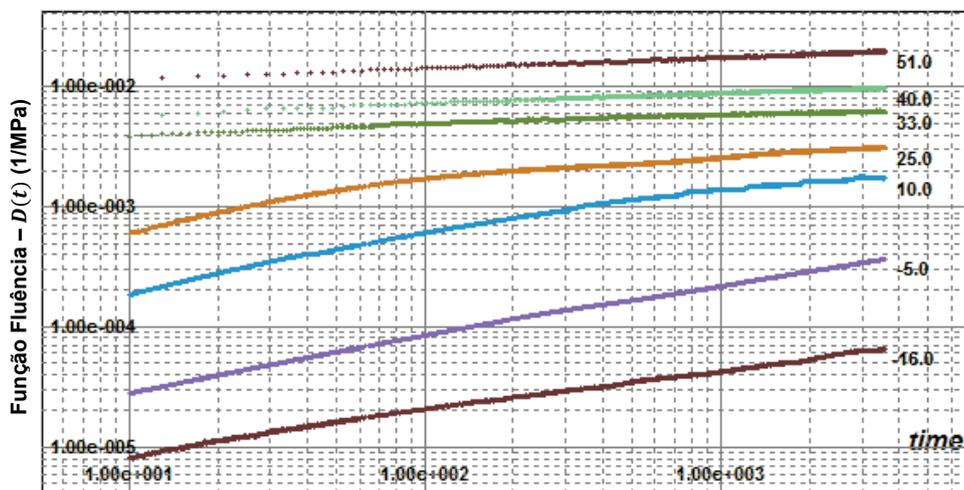
Tempo -  $t$  (s)

(a) Escala geométrica



Tempo -  $t$  (s)

(b) Escala semi-log (eixo do tempo)



Tempo -  $t$  (s)

(c) Escala log-log

Figura 5.21: Resultados experimentais da Função Fluência  $D(t)$  do CA.

### 5.3.2. Construção da Curva Mestre da Função Fluência $D(t)$ – Concreto Asfáltico

Após a obtenção dos resultados experimentais da Função Fluência para o CA foi realizada a construção de sua curva mestre. Para tanto, assim como no item 5.2.2, foram testadas as relações de Arrhenius dada pela Equação (2.13) e de WLF dada pela Equação (2.15) para estimativa dos fatores de translação horizontal  $\alpha_T$ . A temperatura de referência ( $T_R$ ) escolhida foi novamente igual a 25°C, uma vez que pretende-se ter a mesma temperatura de referência para as análises mecânico-computacionais da seção seguinte.

Após a investigação das constantes empíricas mais adequadas para cada uma das equações de predição dos fatores de translação horizontal, foram obtidos resultados similares àqueles do item 5.2.2, ou seja, de que a relação de WLF com constantes  $C_1 = -8,86$  e  $C_2 = 101,6$  K citadas por FERRY (1980) resulta nos melhores ajustes visuais para construção da curva mestre do CA. Neste caso, também foi verificado que a Equação de Arrhenius resulta em fatores de translação horizontal  $\alpha_T$  mais adequados que a Equação de WLF somente para o caso de temperaturas baixas (-16°C, neste caso).

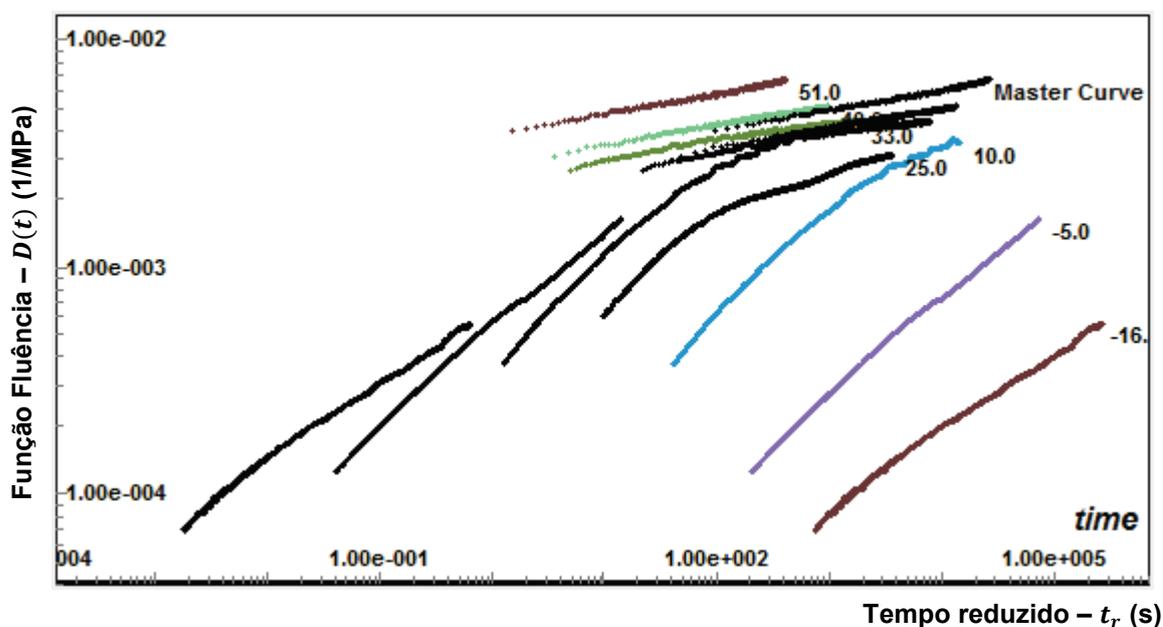
Devido às dificuldades operacionais já discutidas no item 5.2.2 para a realização de ensaios em temperaturas elevadas, foi necessário novamente introduzir os fatores de correção  $f$  e  $f^2$  para correção do efeito da temperatura nas conexões poliméricas de rede. A título de informação, a energia de dissociação encontrada para a construção de uma curva mestre mais concordante para o CA foi de  $\Delta H_d = 8.000$  cal/mol.

A Figura 5.22 mostra a curva mestre final para o CA após aplicação dos fatores de correção  $f$  e  $f^2$  para energia de dissociação  $\Delta H_d = 8.000$  cal/mol e utilização combinada dos fatores de deslocamento horizontal preditos pela relação de WLF (temperaturas de -5, 10, 25, 33, 40 e 51°C) e Arrhenius (temperatura de -16°C). A Tabela 5.8 mostra os fatores de deslocamento horizontal e vertical utilizados.

**Tabela 5.8:** Fatores de deslocamento finais da Função Fluência  $D(t)$  do CA.

Curva	Fator de Deslocamento Vertical – $f$	Fator de Deslocamento Horizontal – $f^2$	Fator de Deslocamento Horizontal – $\alpha_T$	Método para Fator de Deslocamento Horizontal – $\alpha_T$
Curva 1 (-16°C)	8,64	74,58	$10^{5,62}$	Arrhenius $C = 10.500 \text{ K}$
Curva 2 (-5°C)	4,54	20,61	$10^{3,71}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
Curva 3 (10°C)	2,05	4,19	$10^{1,53}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
Curva 4 (25°C)	1,00	1,00	$10^{0,00}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
Curva 5 (33°C)	0,70	0,49	$10^{-0,65}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
Curva 6 (40°C)	0,52	0,27	$10^{-1,14}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$
Curva 7 (51°C)	0,34	0,11	$10^{-1,81}$	WLF $C_1 = -8,86$ e $C_2 = 101,6 \text{ K}$

É interessante notar que o nível de concordância da curva mestra final para o CA (ver Figura 5.22) é inferior ao da AA (ver Figura 5.6). Uma justificativa pode ser atribuída ao menor teor de ligante do CA devido à presença de agregados maiores na mistura, resultando em material com comportamento viscoelástico menos acentuado. Dessa maneira, as equações de Arrhenius e WLF resultam em menor nível de concordância para construção da curva mestra do CA.

**Figura 5.22:** Curva mestra final da Função Fluência  $D(t)$  do CA.

### 5.3.3. Obtenção da Série de Prony da Função Fluência $D(t)$ e Interconversão para o Módulo de Relaxação $E(t)$ – Concreto Asfáltico

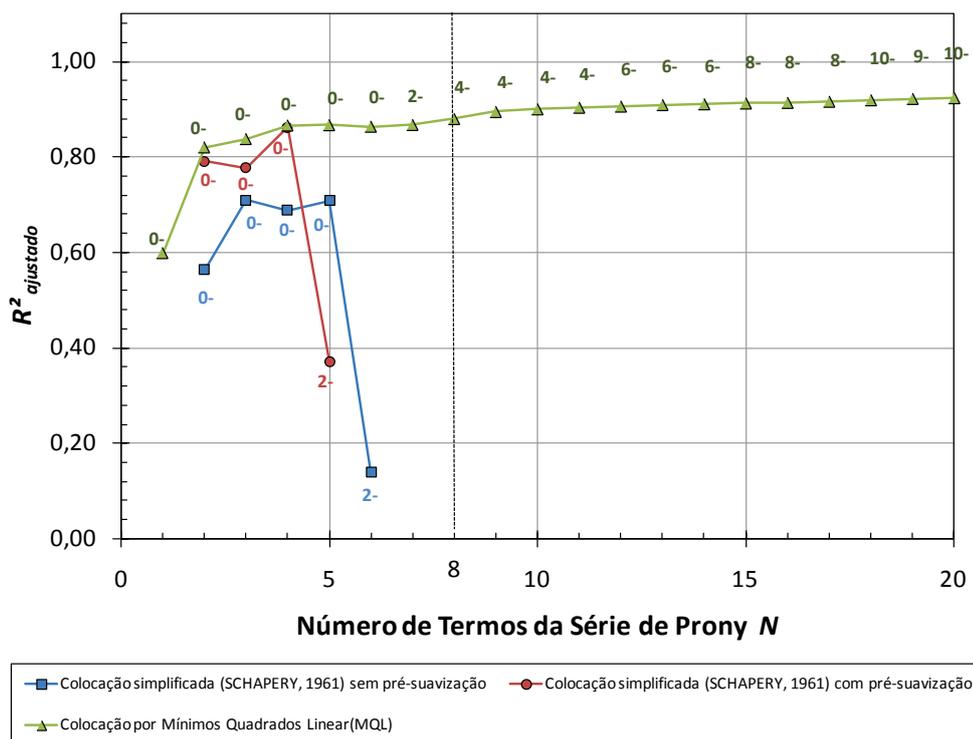
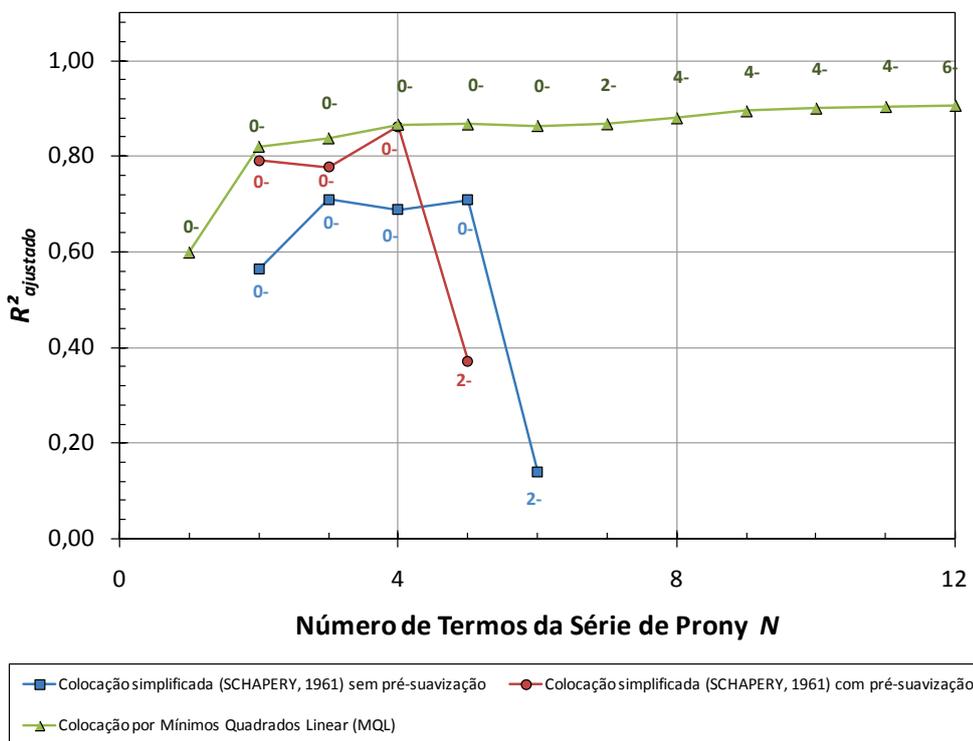
A partir da curva mestra indicada na Figura 5.22 foi utilizado novamente o programa *ViscoTool* para obtenção da série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  do CA.

De maneira similar ao item 5.2.3, a Figura 5.23 mostra o coeficiente de determinação ajustado ( $R_{ajustado}^2$ ) em função do número de termos dependentes  $D_j$  da série de Prony com escolha das constantes de tempo  $\tau_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) segundo critério de constantes de tempo igualmente espaçadas em escala logarítmica (SOUSA e SOARES, 2007).

Assim como no caso da análise do método da colocação para a AA, a Figura 5.23 mostra que o método da colocação que considera o método dos Mínimos Quadrados Linear (MQL) é vantajoso em relação ao método da colocação clássico de SCHAPERLY (1961) devido ao maior nível de ajuste (maiores  $R_{ajustado}^2$ ) e maior robustez indicada pela facilidade de obtenção de séries de Prony com maiores números de termos dependentes  $D_j$ . Para este caso, repare na Figura 5.23 que o método clássico de Schapery a partir de  $N = 6$  não é capaz de fornecer  $R_{ajustado}^2$  positivos, dada a grande instabilidade numérica do método clássico.

Ao utilizar o método da colocação com constantes de tempo  $\tau_j$  igualmente espaçadas em escala logarítmica foram encontrados novamente termos dependentes  $D_j$  negativos, independente do tipo de método da colocação utilizado. Dessa forma, diante dos resultados obtidos para o método da colocação para ajuste de curva a partir de dados experimentais reais de misturas asfálticas, é possível concluir que é necessário um ajuste final das constantes de tempo.

Dessa maneira, reforça-se a importância do programa computacional desenvolvido *ViscoTool*, pois facilita a manipulação necessária dos diversos graus de liberdade (constantes de tempo) da série de Prony no método da colocação.

(a) número máximo de termos  $D_j: 20$ (b) número máximo de termos  $D_j: 12$ 

**Figura 5.23:**  $R^2_{ajustado}$  versus número de termos da série de Prony no método da colocação – Função Fluência  $D(t)$  do CA.

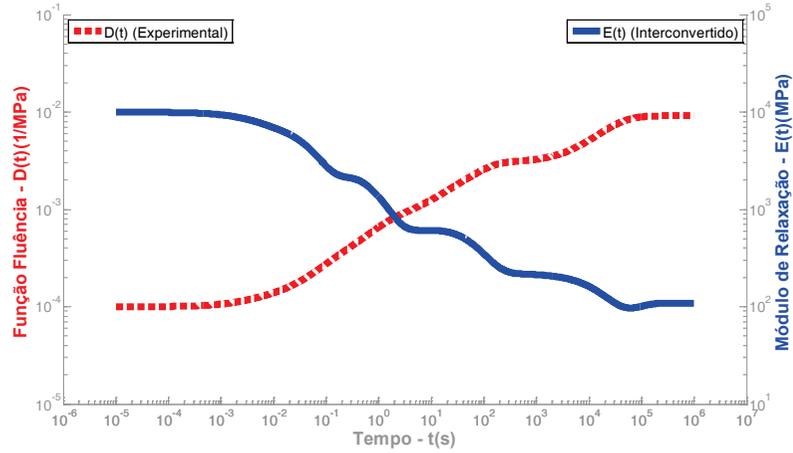
Realizando o ajuste manual das constantes de tempo para o método da colocação por MQL, e atribuindo para o termo independente  $D_0 = 1,00E-4$  1/MPa, foi obtida a série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  com termos dependentes  $D_j$  todos positivos. A Tabela 5.9 mostra estes resultados e as séries de Prony do Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ , utilizando a aproximação  $\rho_i = \tau_j$  bem como valores mais acurados para as constantes de tempo da função interconvertida ( $\rho_i < \tau_j$ ). A representação gráfica das séries de Prony ajustada (Função Fluência) e interconvertida (Módulo de Relaxação) estão indicadas na Figura 5.24.

É interessante notar que, diferentemente do espectro discreto suavizado obtido no segundo ajuste da série de Prony da AA (ver Figura 5.14), o espectro discreto obtido para a Função Fluência do CA indicado na Figura 5.24 não apresentou um comportamento suave o suficiente para resultar em termos dependentes  $E_i$  todos positivos para a série de Prony do Módulo de Relaxação interconvertido (ver coluna central da Tabela 5.9).

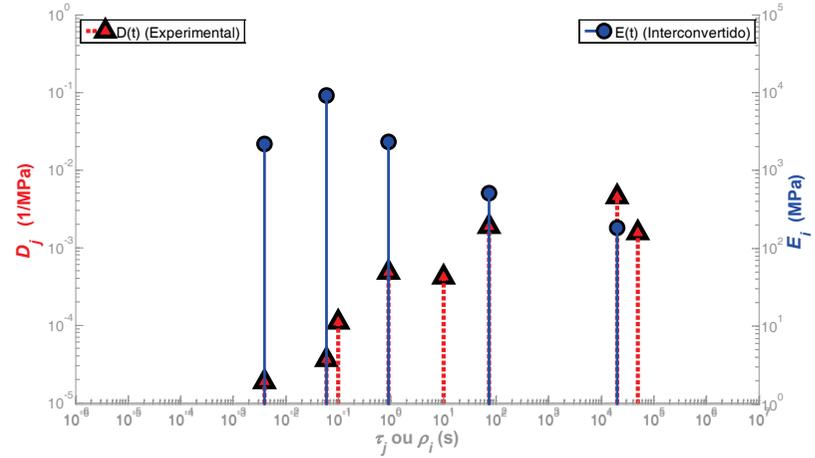
Por sua vez, a adoção de valores mais acurados para as constantes de tempo da função interconvertida pelo gráfico da Figura 5.25 resultou em termos todos positivos para a série de Prony do Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ .

**Tabela 5.9:** Função Fluência  $D(t)$  do CA obtida pelo método da colocação e Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ .

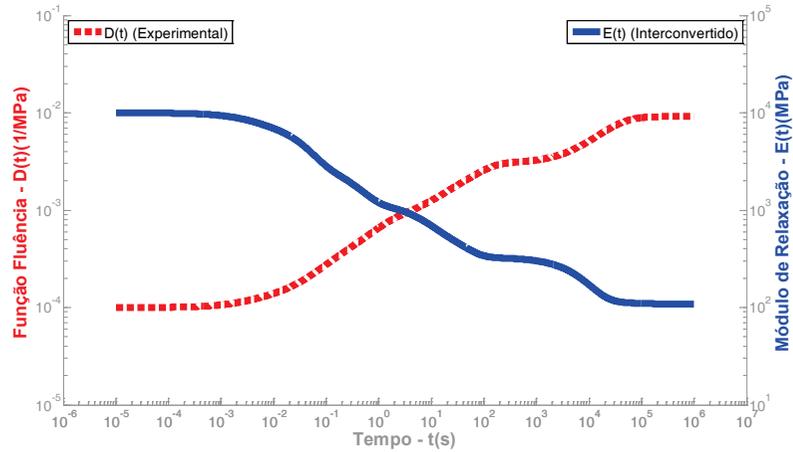
<i>Propriedade Medida: Função Fluência <math>D(t)</math></i>			<i>Propriedade Interconvertida: Módulo de Relaxação <math>E(t)</math> (<math>\rho_i = \tau_j</math>)</i>			<i>Propriedade Interconvertida: Módulo de Relaxação <math>E(t)</math> (<math>\rho_i &lt; \tau_j</math>)</i>		
$j$	$\tau_j$ (s)	$D_j$ (1/MPa)	$i$	$\rho_i$ (s)	$E_i$ (MPa)	$i$	$\rho_i$ (s)	$E_i$ (MPa)
1	4,0000E-3	1,8693E-5	1	4,0000E-3	2,2122E+3	1	3,3670E-3	1,8128E+3
2	6,0000E-2	3,5796E-5	2	6,0000E-2	9,1544E+3	2	3,3510E-2	4,7358E+3
3	1,0000E-1	1,0869E-4	3	1,0000E-1	-4,2910E+3	3	7,2080E-2	5,0108E+2
4	9,0000E-1	4,8532E-4	4	9,0000E-1	2,3363E+3	4	3,4140E-1	1,7528E+3
5	1,0000E+1	4,1592E-4	5	1,0000E+1	-1,5370E+2	5	6,2130E+0	4,9836E+2
6	7,4000E+1	1,8536E-3	6	7,4000E+1	5,0958E+2	6	3,1540E+1	3,7064E+2
7	2,0000E+4	4,5726E-3	7	2,0000E+4	1,8218E+2	7	7,5500E+3	2,0965E+2
8	5,0000E+4	1,5637E-3	8	5,0000E+4	-7,0140E+1	8	4,4080E+4	9,6732E+0
<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>ViscoTool</i> Método de Regressão: Colocação com mínimos quadrados linear Coeficiente de Determinação Ajustado: $R^2_{ajustado} = 0,9319$ Termo Independente: $D_0 = 1,0000E-4$ 1/MPa			<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>ViscoTool</i> Método de Interconversão: Integral de convolução com escolha simplificada das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i = \tau_j$ ) Termo Independente: $E_\infty = 1,0924E+2$ MPa			<u>Informações Adicionais:</u> Programa Utilizado: <i>Matlab</i> Método de Interconversão: Integral de convolução com escolha gráfica das constantes de tempo da função alvo ( $\rho_i < \tau_j$ ) Termo Independente: $E_\infty = 1,0924E+2$ MPa		



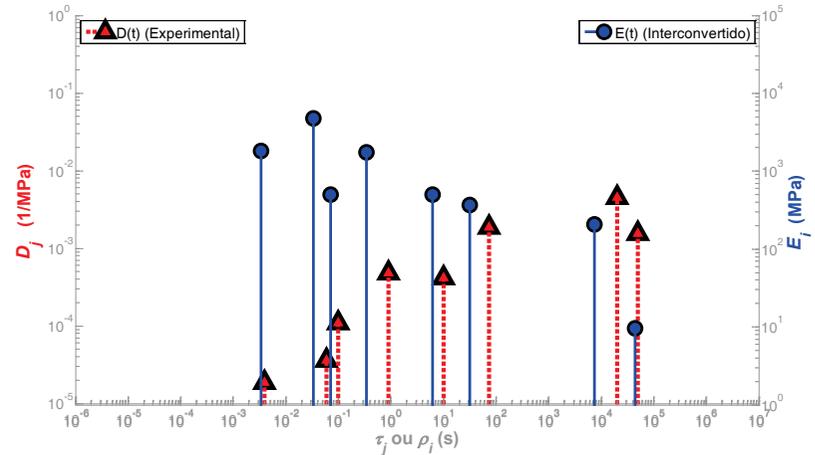
(a) séries de Prony – método simplificado



(c) espectros discretos – método simplificado

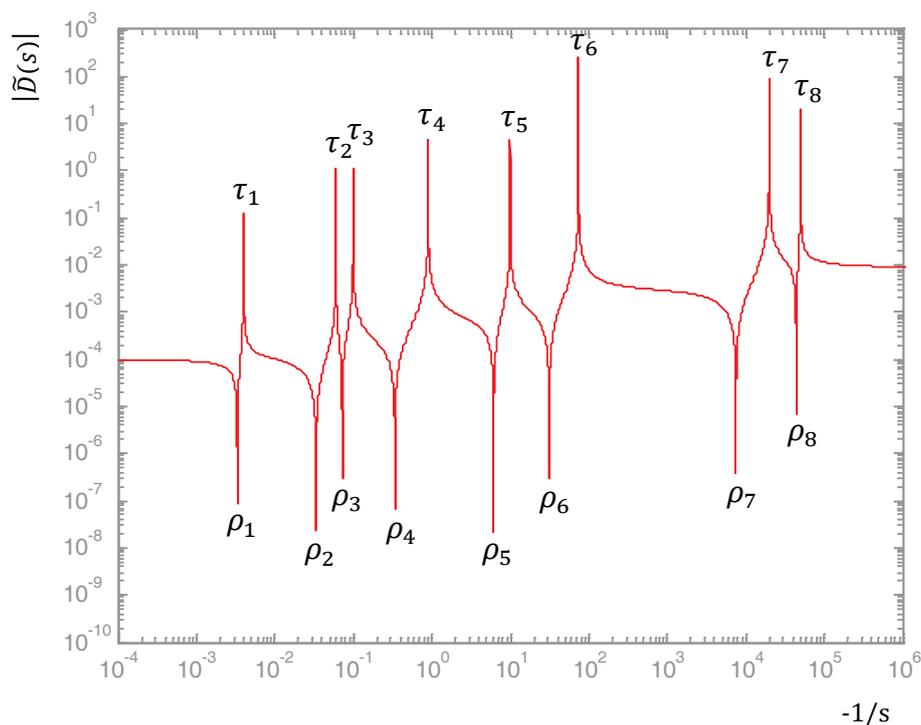


(b) séries de Prony – método gráfico



(d) espectros discretos – método gráfico

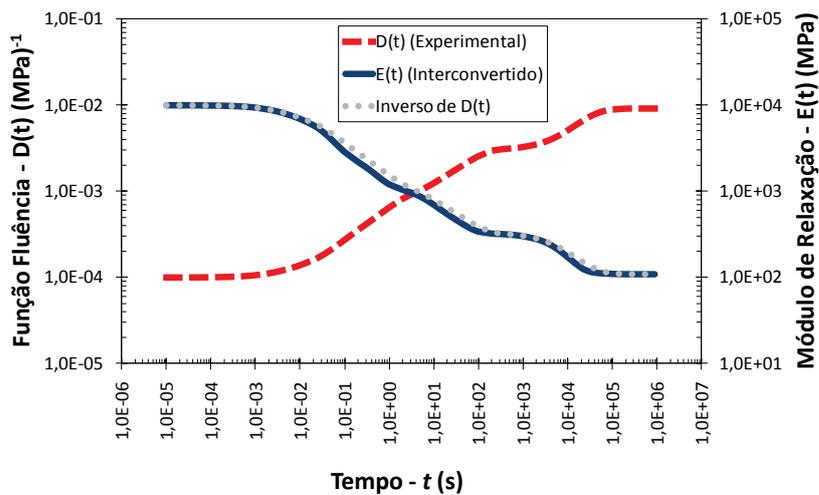
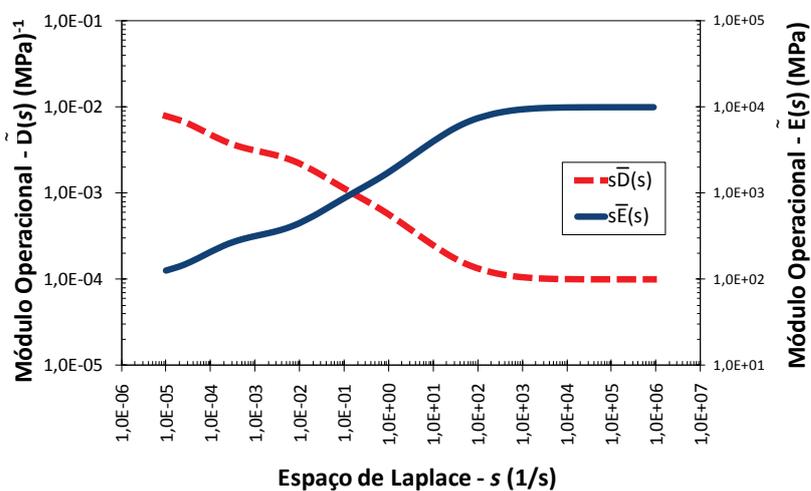
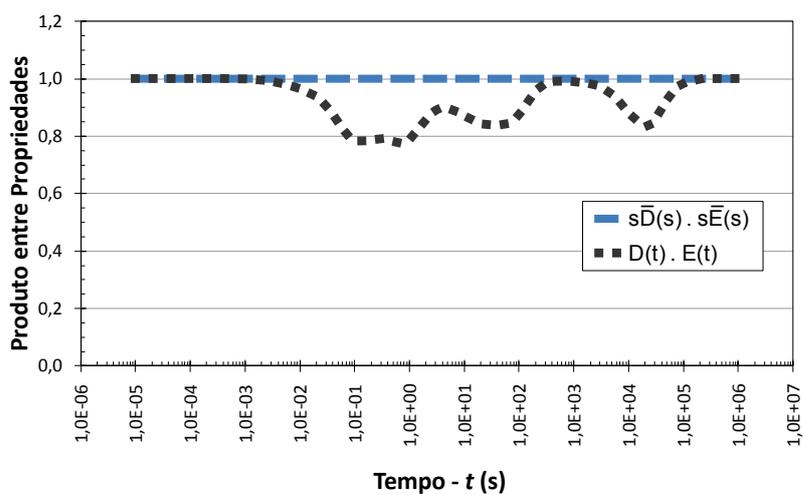
**Figura 5.24:** Função Fluência do CA  $D(t)$  obtida pelo ajuste manual de  $\tau_j$  e Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$ .



**Figura 5.25:** Escolha gráfica das constantes de tempo do Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  do CA.

#### 5.3.4. Validação da Interconversão da Função Fluência $D(t)$ para o Módulo de Relaxação $E(t)$ – Concreto Asfáltico

A Figura 5.26 mostra a relação de reciprocidade entre Módulo de Relaxação interconvertido  $E(t)$  e Função Fluência  $D(t)$  obtida experimentalmente para o CA. De forma similar aos resultados encontrados para a AA, o gráfico da Figura 5.26c mostra que o produto  $D(t).E(t)$  pode chegar a valores da ordem de 0,8 na região central mais crítica. Este resultado comparado com aquele da AA – que indicou  $D(t).E(t)$  em torno de 0,6 – é uma forma alternativa de verificar o efeito menos pronunciado do ligante asfáltico no comportamento do Concreto Asfáltico, resultando em uma mistura com comportamento viscoelástico menos acentuado. A Figura 5.26c mostra que a relação de reciprocidade perfeita  $\tilde{E}(s).\tilde{D}(s) = 1$  foi respeitada novamente para todo o espaço de Laplace, reforçando a afirmação que o programa desenvolvido *ViscoTool* realiza a interconversão no domínio do tempo de forma correta.

(a)  $D(t)$ ,  $E(t)$  e  $D(t)^{-1}$ (b)  $\tilde{D}(s)$  e  $\tilde{E}(s)$ (c)  $D(t) \cdot E(t)$  e  $\tilde{D}(s) \cdot \tilde{E}(s)$ 

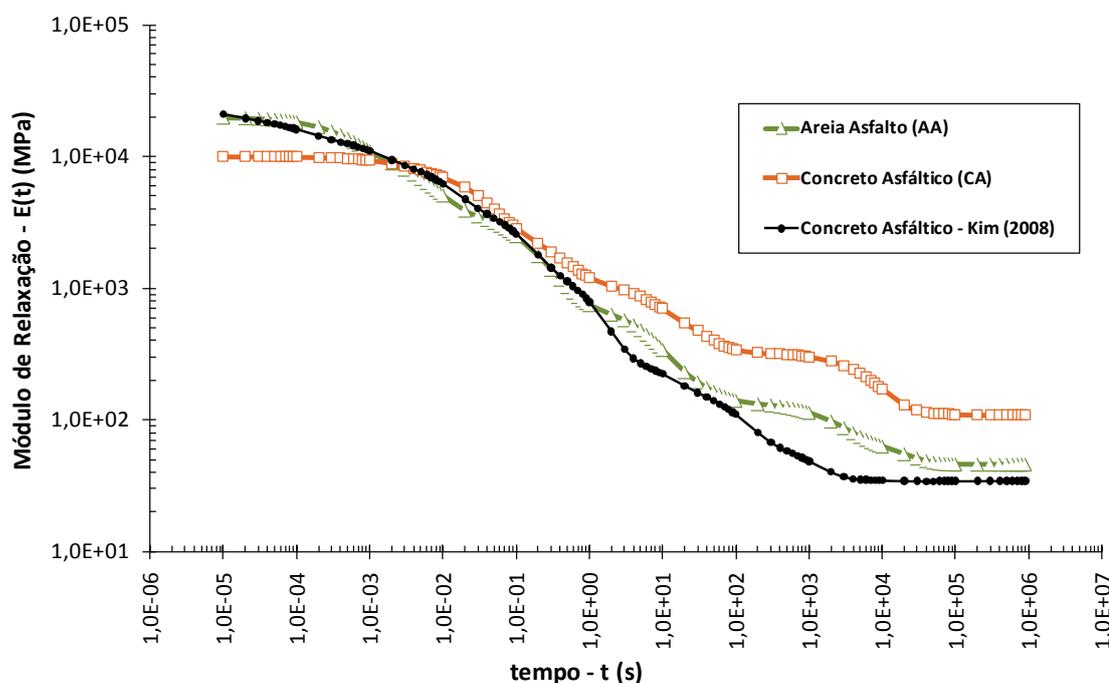
**Figura 5.26:** Avaliação da relação de reciprocidade entre propriedades viscoelásticas – CA.

#### 5.4. RESULTADOS DA ANÁLISE COMPUTACIONAL DE PAVIMENTO TÍPICO PELO MEF

Após a obtenção das séries de Prony das duas misturas em questão (AA e CA) foi realizada a análise computacional utilizando o MEF de acordo com o exposto no item 4.4.

As séries de Prony escolhidas para representar o Módulo de Relaxação  $E(t)$  da camada de revestimento foram aquelas descritas na última coluna principal da Tabela 5.6 (AA) e da Tabela 5.9 (CA). Para fins de comparação, também foi realizada a análise computacional utilizando a série de Prony do Módulo de Relaxação mostrado em KIM (2008) e descrito na Tabela 3.1.

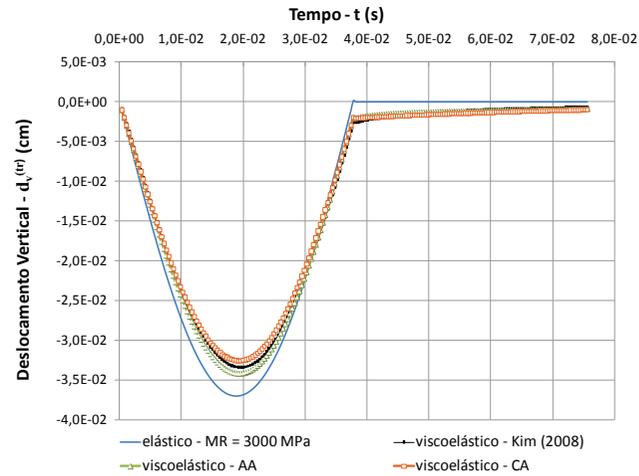
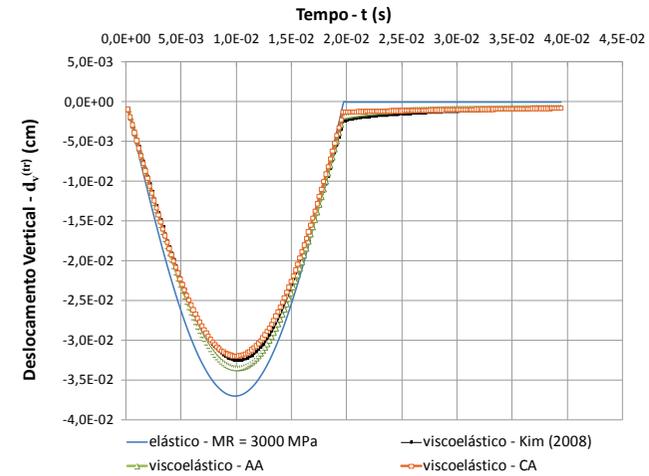
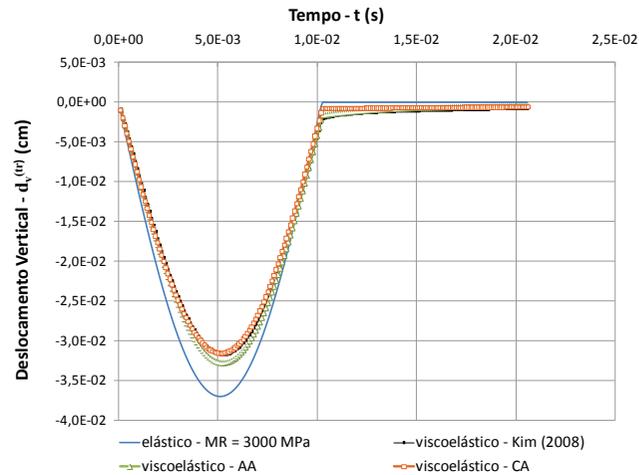
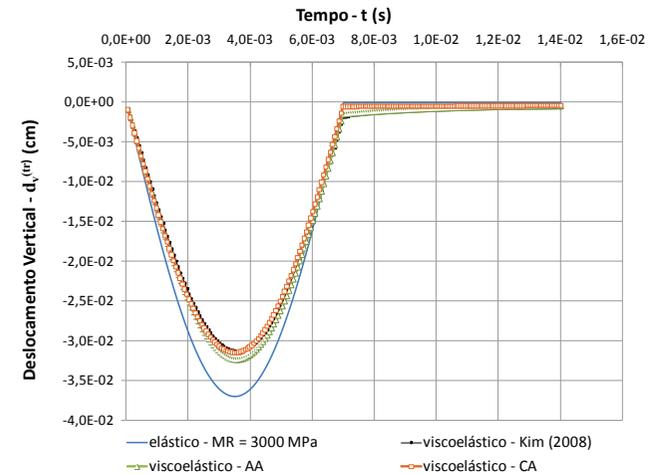
A representação gráfica das três séries de Prony descrita na Figura 5.27 mostra diferentes relaxações ao longo do tempo, que é função da composição de cada mistura asfáltica. Conforme já descrito no item 4.4, também foi considerado o modelo elástico linear com um Módulo de Resiliência de 3.000 MPa, de modo a avaliar a diferença entre o modelo viscoelástico linear e o elástico linear nos parâmetros estruturais do pavimento.

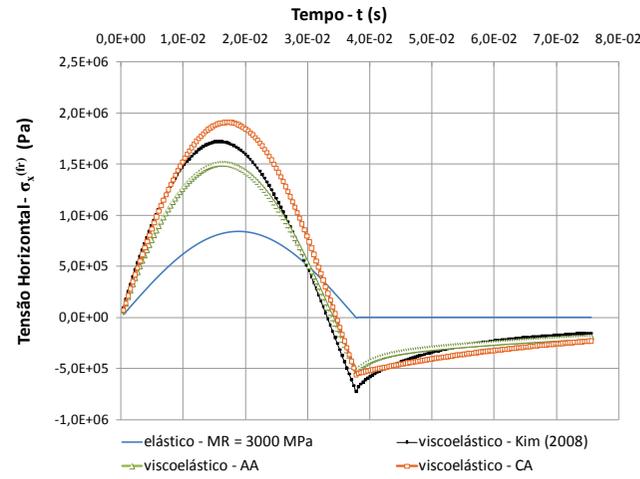


**Figura 5.27:** Séries de Prony do Módulo de Relaxação  $E(t)$  utilizadas para análise computacional pelo MEF.

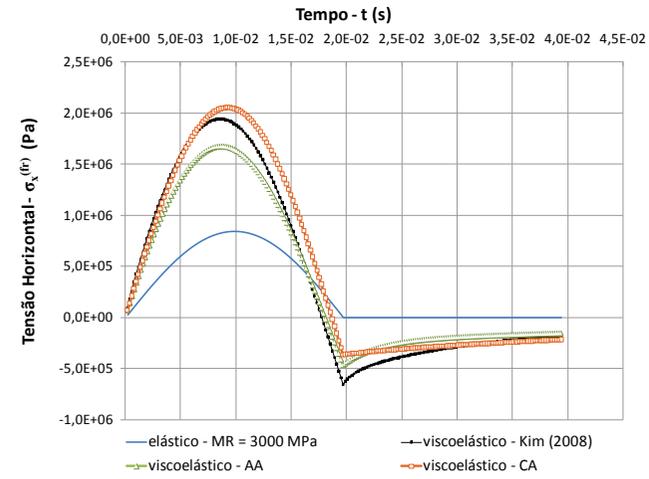
Ressalta-se que uma simplificação adotada para obtenção dos resultados gerados foi a desconsideração das forças inerciais induzidas pelo pulso de carga. Para detalhamento sobre resultados considerando os efeitos inerciais sugere-se a leitura de EVANGELISTA JR. (2006). Os parâmetros de projeto considerados na análise computacional foram: (a) deslocamento vertical no topo da camada de revestimento  $d_v^{(tr)}$ ; (b) tensão horizontal no fundo da camada de revestimento  $\sigma_x^{(fr)}$ ; e (c) tensão vertical no topo do subleito  $\sigma_y^{(ts)}$ . Os resultados obtidos para os parâmetros de projeto considerados, para as quatro velocidades contempladas, seguem nos gráficos da Figura 5.28, Figura 5.29 e Figura 5.30. Por fim, a Figura 5.31 explicita a variação destes parâmetros com relação à velocidade do carregamento. Ressalta-se que embora não seja possível validar os resultados por um modelo analítico, os resultados obtidos estão condizentes com os resultados descritos em EVANGELISTA JR. (2006).

Analisando o gráfico indicado na Figura 5.28, verifica-se que a consideração do modelo viscoelástico para a camada de revestimento implica em uma redução no deslocamento vertical  $d_v^{(tr)}$  em relação ao modelo elástico comumente adotado nas análises de pavimentos asfálticos. Este resultado indica que a análise elástica clássica está a favor da segurança para este parâmetro. Assumindo os resultados médios da análise viscoelástica como referência, verifica-se que o pico de deslocamento é majorado por um fator em torno de 15% quando da consideração da análise elástica. Percebe-se pela Figura 5.28 e Figura 5.31 que não existe diferença significativa para o deslocamento vertical  $d_v^{(tr)}$  pela consideração de diferentes misturas asfálticas e nem pela consideração de velocidades de carregamento diferentes. Foi verificado apenas uma pequena tendência de redução no deslocamento vertical  $d_v^{(tr)}$  para um aumento de velocidade.

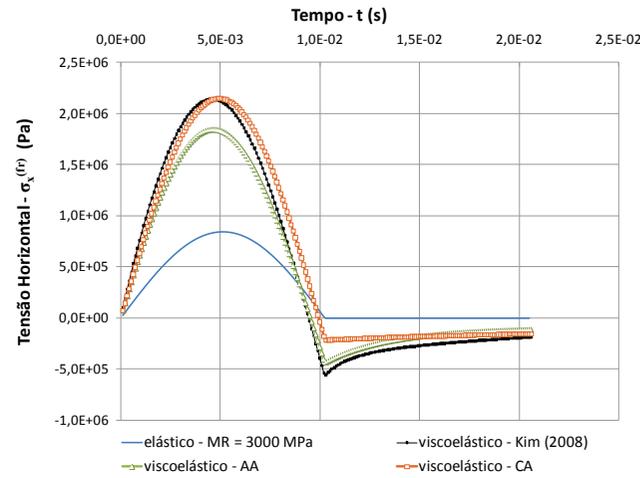
(a)  $v = 20$  km/h ( $t_p = 37,8 \cdot 10^{-3}$  s)(b)  $v = 40$  km/h ( $t_p = 19,7 \cdot 10^{-3}$  s)(c)  $v = 80$  km/h ( $t_p = 10,3 \cdot 10^{-3}$  s)(d)  $v = 120$  km/h ( $t_p = 7,0 \cdot 10^{-3}$  s)**Figura 5.28:** Deslocamento vertical no topo da camada de revestimento –  $d_v^{(tr)}$ .



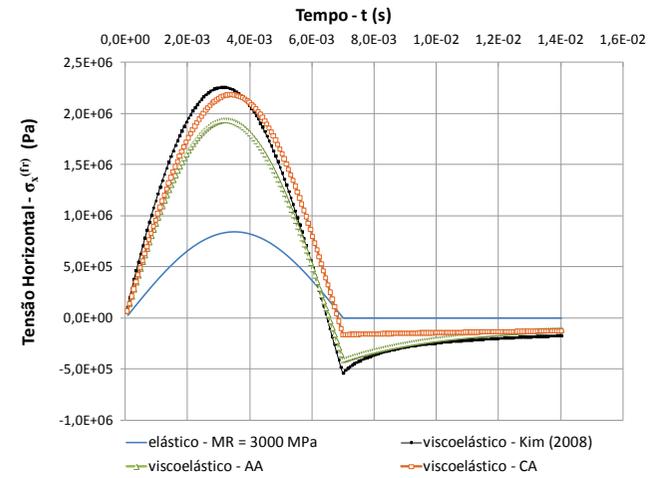
(a)  $v = 20 \text{ km/h}$  ( $t_p = 37,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ )



(b)  $v = 40 \text{ km/h}$  ( $t_p = 19,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ )

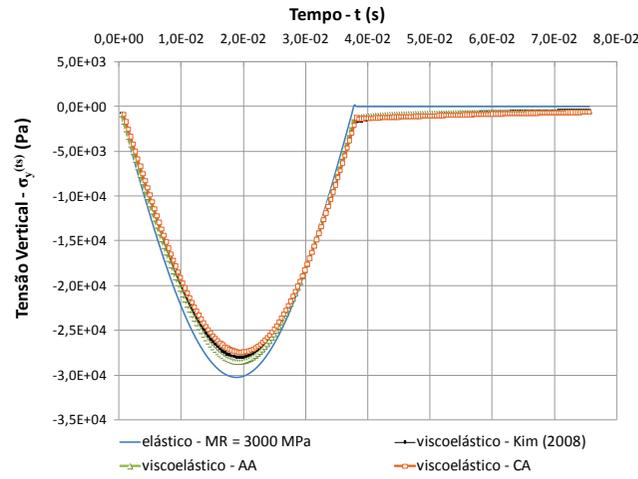


(c)  $v = 80 \text{ km/h}$  ( $t_p = 10,3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ )

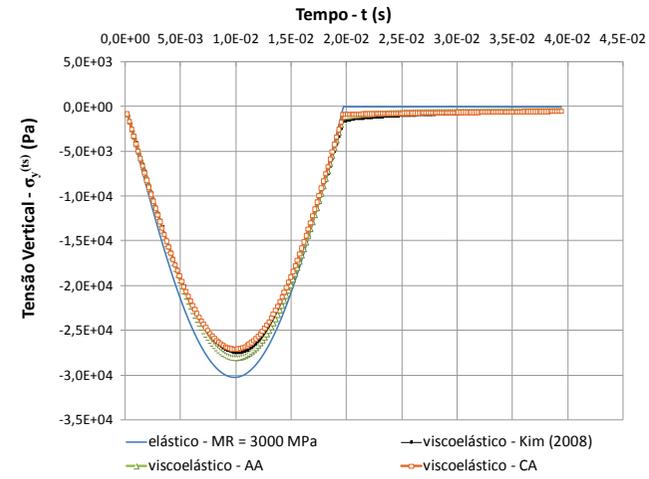


(d)  $v = 120 \text{ km/h}$  ( $t_p = 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ )

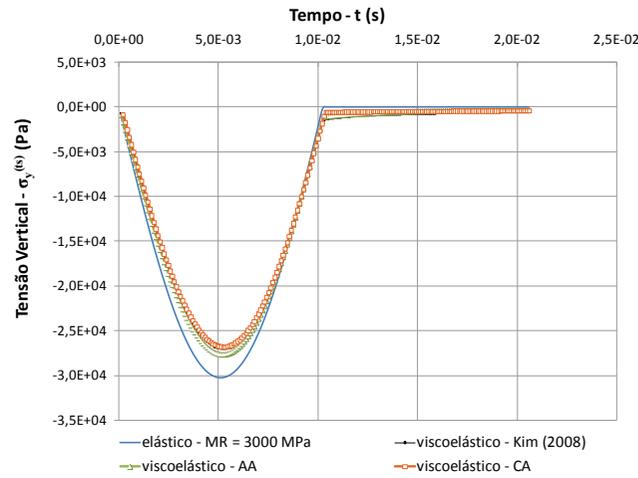
**Figura 5.29:** Tensão horizontal no fundo da camada de revestimento –  $\sigma_x^{(fr)}$ .



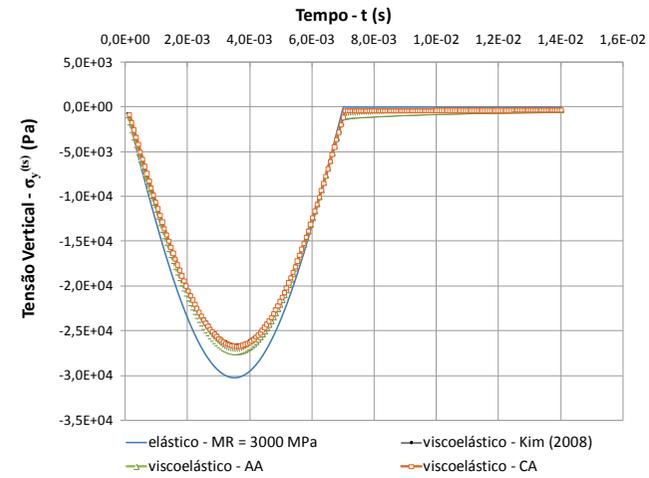
(a)  $v = 20 \text{ km/h}$  ( $t_p = 37,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ )



(b)  $v = 40 \text{ km/h}$  ( $t_p = 19,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ )



(c)  $v = 80 \text{ km/h}$  ( $t_p = 10,3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ )



(d)  $v = 120 \text{ km/h}$  ( $t_p = 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ )

**Figura 5.30:** Tensão vertical no topo do subleito -  $\sigma_y^{(ts)}$ .

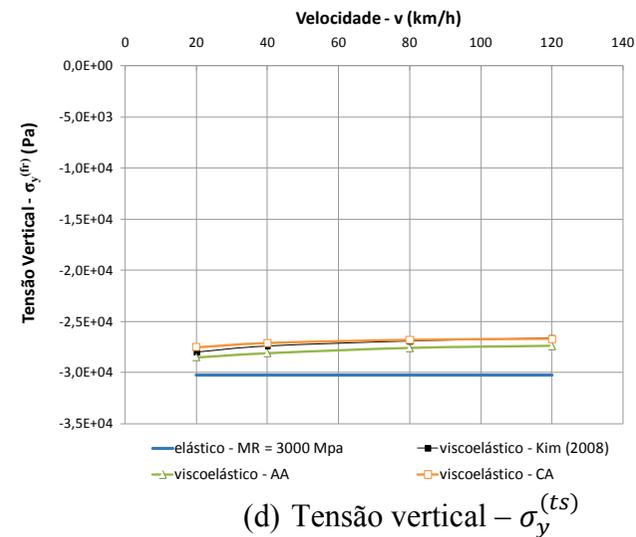
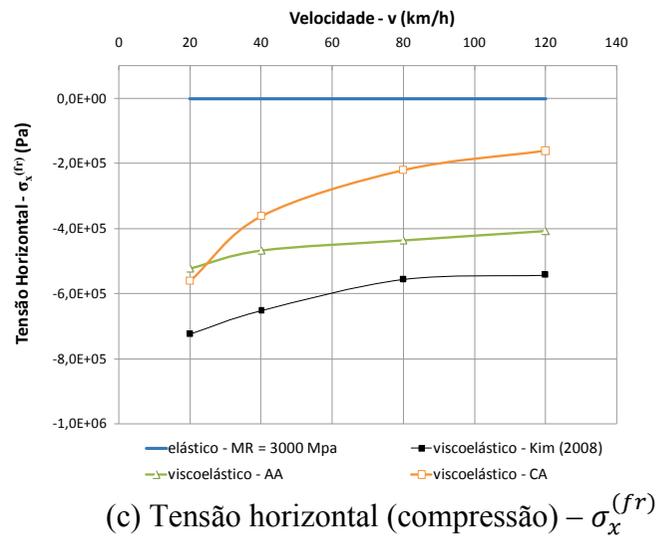
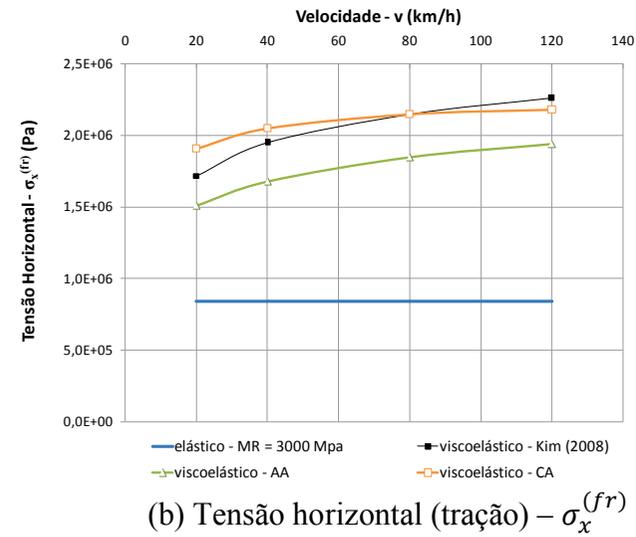
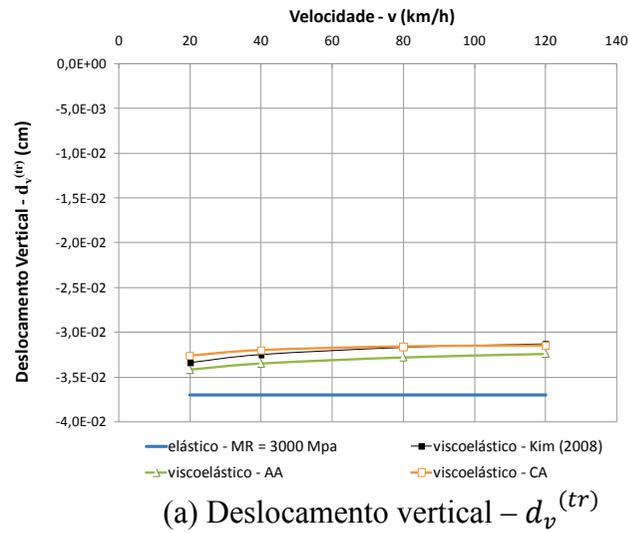


Figura 5.31: Variação dos valores máximos dos parâmetros mecânicos de projeto em função da velocidade do carregamento.

Com relação ao parâmetro tensão horizontal  $\sigma_x^{(fr)}$  os gráficos da Figura 5.29 e Figura 5.31 mostram que, para este parâmetro de projeto, existe uma diferença significativa entre o modelo elástico linear e o modelo viscoelástico linear para representar o comportamento constitutivo da mistura asfáltica. Os gráficos da Figura 5.29 mostram que a consideração do comportamento viscoelástico da mistura resulta em pico de tensão horizontal de tração ( $\sigma_x^{(fr)} > 0$ ) muito superior àquele resultante da análise elástica clássica. Tomando como referência o valor médio do pico de tensão horizontal de tração das três análises viscoelásticas, verifica-se que ao realizar uma análise elástica clássica estar-se-á minorando a tensão horizontal de tração por um fator de aproximadamente 50% para velocidade de 20 km/h (redução de 1,7 MPa para 0,84 MPa) e 60% para velocidade de 120 km/h (redução de 2,1 MPa para 0,84 MPa). Resultados dessa natureza justificam o esforço adicional de caracterização experimental e modelagem constitutiva ao longo do tempo de misturas asfálticas.

A Figura 5.31b mostra ainda que cada mistura asfáltica apresenta uma evolução diferente para o pico (valor máximo) de tensão de tração em função da velocidade. Este resultado mostra a importância de se realizar estudos constitutivos específicos para cada tipo de mistura, uma vez que cada mistura apresentará uma resposta diferente com relação à tensão horizontal de tração no fundo da camada de revestimento ( $\sigma_x^{(fr)} > 0$ ). Também foi possível verificar picos de tensão horizontal maiores para mistura asfáltica tipo CA, dada sua menor relaxação (maior rigidez).

Outro ponto importante nos resultados descritos na Figura 5.29 é que a consideração viscoelástica da mistura induz uma tensão horizontal de compressão ( $\sigma_x^{(fr)} < 0$ ) imediatamente após a passagem do pulso de carga. Nesta figura observa-se que a análise elástica não é capaz de prever a existência de uma tensão horizontal de compressão. Ressalta-se que a consideração do modelo viscoelástico induz tensões horizontais de compressão (**ver** Figura 5.31c) da mesma ordem de grandeza que as tensões horizontais de tração do modelo elástico linear (**ver** Figura 5.31b). Lembrando que pulsos de carga ocorrerão inúmeras vezes ao longo da vida útil do pavimento, o efeito cíclico de tensões horizontais de tração e compressão no fundo da camada de revestimento predito pela análise viscoelástica sugere o surgimento de trincas por fadiga de uma forma mais acelerada que quando da consideração do modelo elástico linear

clássico. De maneira inversa aos resultados da tensão horizontal de tração (ver Figura 5.31b), a Figura 5.31c mostra picos de tensão de compressão menores para misturas mais rígidas, do tipo CA. Em outras palavras, tensões de compressão maiores (em módulo) quanto maior a relaxação da mistura asfáltica. Além disso, a evolução da tensão horizontal de compressão é bastante diferente para cada mistura, reforçando a necessidade de investigação constitutiva específica para cada mistura asfáltica.

Por fim, os resultados do último parâmetro de projeto investigado (tensão vertical no topo do subleito,  $\sigma_y^{(ts)}$ ) estão descritos nos gráficos da Figura 5.30 e Figura 5.31. Os resultados indicam que não há diferença significativa entre o modelo elástico linear e o viscoelástico linear para a camada de revestimento. Assim como no caso do deslocamento vertical no topo do revestimento, a consideração do modelo viscoelástico resultou apenas em uma pequena redução da tensão vertical no topo do subleito. Quantitativamente, verificou-se que, em média, o pico da tensão vertical  $\sigma_y^{(ts)}$  é majorado por um fator em torno de 10% quando da consideração da análise elástica. Este parâmetro, conforme já esperado, apresentou menor sensibilidade à análise viscoelástica, uma vez que o efeito no subleito é atenuado pela presença das camadas superiores de sub-base, base e revestimento.

## **CAPÍTULO 6**

### **CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES**

Neste capítulo são evidenciadas as principais conclusões relativas ao desenvolvimento do presente trabalho. Ao final, são sugeridos tópicos de pesquisa que possam contribuir para o avanço na modelagem mecânico-constitutiva de misturas asfálticas.

#### **6.1. CONCLUSÕES**

Nas últimas décadas tem havido uma tendência mundial de simulação numérica de pavimentos asfálticos pelo MEF, que permite uma predição mais realista dos parâmetros de tensão e deformação de projetos de pavimentos. A demanda crescente por simulações numéricas mais próximas da realidade para o caso de pavimentos asfálticos vem forçando estudos constitutivos mais detalhados sobre os diferentes materiais que compõem o pavimento. Para o caso de misturas asfálticas, o modelo constitutivo viscoelástico linear revela-se como uma alternativa viável para consideração do fator tempo nas análises numéricas.

No entanto, a inexistência de ferramentas operacionais que facilitem o uso da teoria da viscoelasticidade na caracterização de materiais dificulta o seu uso na caracterização constitutiva viscoelástica de materiais asfálticos. O presente trabalho visou facilitar o uso da teoria da viscoelasticidade linear para caracterização constitutiva de misturas asfálticas por meio do desenvolvimento e uso de um programa computacional específico, cumprindo, portanto, o objetivo geral estabelecido no CAPÍTULO 1.

As principais conclusões obtidas pelo desenvolvimento deste trabalho são relacionadas às técnicas de ajuste de curva investigadas e método de interconversão analítico baseado nas séries de Prony, uma vez que se acredita que os resultados e a discussão relativos aos tópicos citados apresentam uma contribuição pioneira,

certamente em nível nacional. Eis as conclusões principais obtidas para os dois tópicos centrais do trabalho.

Com relação às técnicas de ajuste de curva mais recomendada para obtenção dos coeficientes da série de Prony das propriedades viscoelásticas no domínio do tempo – Função Fluência  $D(t)$  e Módulo de Relaxação  $E(t)$ , – foi possível verificar que o método da colocação por MQL é numericamente mais robusto que o método da colocação clássico sugerido por SCHAPERLY (1961). Conclui-se, portanto, que o método dos MQL deve ser a técnica padrão utilizada caso o analista decida utilizar o método da colocação para ajuste de séries de Prony.

Com relação à técnica de ajuste de séries de Prony pelo método dos MQNL foi possível constatar que o problema de mínimos locais, inerente de algoritmos recursivos baseados em MQNL, pode interferir nos resultados obtidos para os valores ótimos dos coeficientes da série de Prony ( $D_j$  e  $\tau_j$ , ou  $E_i$  e  $\rho_i$ ). Além disso, verificou-se que a não definição de restrições para os graus de liberdade (coeficientes) da série de Prony revela-se como uma técnica não adequada para ajuste de curva aos dados experimentais, resultando em valores negativos para alguns termos dependentes da série de Prony ( $D_j$  ou  $E_i$ ). Por outro lado, a definição de restrições apenas nos termos dependentes é suficiente para garantir bons resultados do ajuste de curva pelo método dos MQNL. Os resultados mostrados indicaram ainda que as constantes de tempo iniciais para cálculo iterativo por MQNL ( $\tau_j^{(k)}$  ou  $\rho_i^{(k)}$ ) espaçadas de aproximadamente uma década logarítmica de tempo são uma boa estimativa para início do algoritmo recursivo por MQNL.

No tocante à interconversão analítica no domínio do tempo baseada em séries de Prony, foi possível verificar que a adoção de valores para as constantes de tempo da função alvo ( $\tau_j$  ou  $\rho_i$ ) idênticos àqueles da função fonte ( $\rho_i$  ou  $\tau_j$ ) pode resultar em termos dependentes negativos da série de Prony interconvertida ( $D_j$  ou  $E_i$ ), prejudicando a interpretação física dos coeficientes ajustados por meio de análogos mecânicos. Portanto, recomenda-se uma escolha mais precisa das constantes de tempo da função alvo pela avaliação gráfica (em escala log-log) da transformada de Carson. Foi possível verificar ainda a importância da análise visual do espectro discreto da

função fonte em um gráfico tipo log-log, pois quanto mais suavizado for este espectro, melhores serão os resultados da série de Prony da função alvo interconvertida.

Além das conclusões principais citadas, o presente trabalho permitiu extrair ainda conclusões de caráter secundário. Estas conclusões são classificadas dessa maneira por já existirem trabalhos relativos aos tópicos em questão que contribuem para o entendimento dos mesmos. Eis as principais conclusões secundárias obtidas.

Quanto aos resultados experimentais obtidos para a Função Fluência  $D(t)$  da AA e do CA, apesar de não ter sido possível testar o limite de viscoelasticidade linear, foi possível obter resultados experimentais condizentes com a literatura (KIM, 2008). O CA apresentou ainda o resultado esperado de menor fluência que a AA, dado seu o menor teor de ligante quando comparado a essa segunda mistura sem agregado graúdo. Já com relação à construção da curva mestra, foi possível verificar que o uso combinado das equações de Arrhenius e WLF permite a obtenção de curvas mestras mais bem ajustadas aos dados experimentais.

Com relação aos resultados referentes à modelagem pelo MEF, verificou-se que o esforço adicional para o entendimento, caracterização e interconversão entre propriedades viscoelásticas da mistura são justificáveis pela diferença marcante nas tensões horizontais no fundo da camada asfáltica de revestimento ( $\sigma_x^{(fr)}$ ). Para esta variável de projeto, foi possível verificar que o comportamento constitutivo viscoelástico da camada asfáltica influencia consideravelmente nos valores da tensão horizontal, tanto em velocidades mais elevadas (120 km/h, por exemplo) típicas de vias não urbanas quanto em velocidades mais reduzidas características de vias urbanas (20 km/h, por exemplo). Para este parâmetro, quando realizada uma análise elástica clássica, evidencia-se que a tensão horizontal de tração está sendo minorada significativamente (por um fator da ordem de dois) e que uma tensão de compressão existente após a passagem do carregamento não é registrada. Estes ciclos de tensão de tração e compressão impactam o processo de trincamento por fadiga, justificando, portanto, a importância de serem melhor avaliados pelo uso da teoria da viscoelasticidade.

## 6.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como parte central do tema abordado nesta dissertação de mestrado uma primeira recomendação é a continuação do desenvolvimento e aplicação do programa de ajuste de curva e interconversão especificamente desenvolvido. Para tornar o seu uso ainda mais prático, facilitando cada vez mais o uso da teoria da viscoelasticidade linear, recomenda-se aprimorar sua interface gráfica e suas técnicas numéricas. Eis as recomendações.

No tocante à interface gráfica são:

- a) plotar gráfico dos espectros discretos das séries de Prony das funções fonte e alvo, facilitando a avaliação da qualidade do ajuste de curva e interconversão realizada;
- b) permitir ao usuário editar todos os atributos da área de plotagem, inclusive os dados lidos experimentalmente para pré-tratamento dentro do programa *ViscoTool*.
- c) desenvolver a interface gráfica da aba “Interconversion” que permitirá manipulação de interconversão sem necessariamente ter de avaliar um ajuste de curva de dados experimentais;
- d) permitir adição de eixo secundário nas abscissas (eixo do tempo ou frequência) e ordenadas (eixo da propriedade viscoelástica) para visualização da função fonte e função alvo em um único gráfico;
- e) criação de legenda externa à área de plotagem para facilitar identificação das curvas;

Já com relação aos métodos numéricos, sugere-se:

- a) disponibilizar técnica de ajuste de curva pelo uso dos MQNL, que tornará mais eficiente o ajuste dos coeficientes da série de Prony;

- b) desenvolver a caracterização constitutiva utilizando ensaios no domínio da frequência que permitirá uma caracterização experimental mais rápida;
- c) disponibilizar técnicas mais recentes de ajuste de curva, tais como regressão por algoritmos genéticos, consideração de outros critérios de ajuste (mínimos absolutos e mínimos relativos, por exemplo) e possibilidade de ponderação das observações experimentais durante regressão;
- d) permitir a correção do efeito da temperatura nas conexões poliméricas de rede (*coupling entanglement effect*) para obtenção de uma curva mestra mais concordante ao longo de todo seu domínio;
- e) disponibilizar um procedimento automático de avaliação do teste de fluência e recuperação (*creep and recovery test*) para verificação do limite de viscoelasticidade linear.

Sugestões relacionadas ainda com dificuldades encontradas nos procedimentos experimentais e entendimento do comportamento constitutivo viscoelástico linear das misturas asfálticas podem ser investigadas em trabalhos futuros. Recomenda-se, portanto, o desenvolvimento de um aparato experimental mais apropriado para avaliação das propriedades mecânicas no terço médio do corpo de prova (dificuldade encontrada para ensaios em temperaturas mais elevadas).

Outra questão pertinente é a avaliação experimental do limite de viscoelasticidade linear para as misturas investigadas de AA e CA, que permitirá, inclusive, verificar a real influência do efeito da temperatura na definição de fatores de translação vertical devido às conexões poliméricas de rede.

Chama-se a atenção de que a modelagem mecânico-computacional aliada com modelos constitutivos mais adequados devem ser encorajados, uma vez que permite a obtenção de parâmetros de projetos mais realistas, contribuindo para o aperfeiçoamento dos projetos de pavimentos asfálticos. Para tanto, sugere-se para trabalhos futuros avaliar experimentalmente modelos constitutivos pouco investigados em misturas

asfálticas, principalmente em âmbito nacional, tais como aqueles baseados na teoria da viscoelasticidade não linear, na teoria da plasticidade/viscoplasticidade, na teoria do dano contínuo e na teoria da mecânica da fratura. Aliado com os programas experimentais citados, sugere-se que versões futuras do programa desenvolvido, assim como no caso da teoria da viscoelasticidade linear exemplificada ao longo deste trabalho, facilitem a caracterização de misturas asfálticas pelo uso de modelos mais abrangentes e significativos ao longo dos diferentes estágios da vida útil da mistura asfáltica em campo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AASHTO (2005) *AASHTO TP 62-03 Standard Method of Test for Determining Dynamic Modulus of Hot-Mix Asphalt Concrete Mixtures*, American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington, D.C.
- ANTHEMION (2008) *Dialog Blocks 2006*. Versão 4.32. Reino Unido: Anthemion Software Ltd.
- ARAÚJO JR., P. C.; J. B. SOARES; A. S. HOLANDA, E. PARENTE JR. e F. EVANGELISTA JR. (2009) Dynamic Viscoelastic Analysis of Asphalt Pavements Using a Finite Element Formulation. A ser publicado no periódico *Road Materials and Pavement Design*.
- ARCHER, G. C.; G. FENVES e C. THEWALT (1999) A New Object-Oriented Finite Element Analysis Program Architecture. *Computers and Structures*, v. 70, n. 1, p. 63–75.
- ASTM (1979) *ASTM D 3497 Standard Test Method for Dynamic Modulus of Asphalt Mixtures*, American Society for Testing and Materials.
- BATHE, K. J. (1996) *Finite Element Procedures*. Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, EUA.
- BERNUCCI, L. B.; MOTTA, L. M. G.; CERATTI, J. A. P. e SOARES, J. B. (2007) *Pavimentação Asfáltica: Formação Básica para Engenheiros*. Editora PETROBRAS: ABEDA, Rio de Janeiro.
- BUTTLAR, W. G.; R. ROQUE e B. REID (1998) Automated Procedure for Generation of Creep Compliance Master Curve for Asphalt Mixtures. *Transportation Research Record*, n. 1630, p. 28–36.
- CHRISTENSEN, R. M. (1982) *Theory of Viscoelasticity, an Introduction*, Ed. Academic Press, Reino Unido.
- CHRISTENSEN JR., D. W. e D. A. ANDERSON (1992) Interpretation of Dynamic Mechanical Test Data for Paving Grade Asphalt Cements. *Asphalt Paving Technology*, v. 61, p. 67–116.
- CASTELO BRANCO, V. T. F. (2008) A Unified Method for the Analysis of Nonlinear Viscoelasticity and Fatigue Cracking of Asphalt Mixtures Using the Dynamic Mechanical, PhD. Thesis, Texas A&M University, College Station, TX, EUA.
- CNT (2007) *Pesquisa Rodoviária CNT 2007*, Confederação Nacional do Transporte. Disponível em: <[www.cnt.org.br](http://www.cnt.org.br)>, Acessado em: setembro de 2009.
- CNT (2009) *Boletim Estatístico CNT mar/09*, Confederação Nacional do Transporte. Disponível em: <[www.cnt.org.br](http://www.cnt.org.br)>, Acessado em: setembro de 2009.

- COOK, R. D.; D. S. MALKUS; M. E. PLESHA e R. J. WITT (2002) *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Ed. John Wiley & Sons, EUA.
- DESSOUKY, S. H. (2005) Multiscale Approach for Modeling Hot Mix Asphalt. Tese de Doutorado, Texas A&M University, College Station, TX, EUA.
- DUNCAN, J. M.; C. L. MONISMITH e E. L. WILSON (1968) Finite Element Analysis of Pavements. *Highway Research Record*, v. 228, p. 18–33.
- ELSEIFI, M. A.; I. L. AL-QADI e P. J. YOO (2006) Viscoelastic Modeling and Field Validation of Flexible Pavements. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 132, n. 2, p. 172–178.
- EVANGELISTA JR., F. (2006) Análise Quasi-Estática e Dinâmica de Pavimentos Asfálticos, Dissertação de mestrado, Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil.
- FANG, H.; A. J. HAND; J. E. HADDOCK e T. D. WHITE (2007) An Object-Oriented Framework for Finite Element Pavement Analysis, *Advances in Engineering Software*, v. 38, n. 11–12, p. 763–771.
- FERRY, J. D. (1980) *Viscoelastic Properties of Polymers*, 3a ed. Editora John Wiley & Sons, Nova York.
- FINDLEY, W. N.; J. S. LAI e K. ONARAN (1989) *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Ed. Dover Publications, Nova York, EUA.
- FINEP/PETROBRAS (2008) Relatório Final – Projeto Transversal: Caracterização Química e Reológica de Cimento Asfáltico à Base de Petróleo Brasileiro. UFC, UFS, UFRN.
- GIBSON, N. H.; C. W. SCHWARTZ; R. A. SCHAPERY e M. W. WITCZAK (2003) Viscoelastic, Viscoplastic, and Damage Modeling of Asphalt Concrete in Unconfined Compression. Transportation Research Board (TRB) Annual Meeting, 2003.
- HOLANDA, A. S.; E. PARENTE JR.; T. D. P. ARAÚJO; L. T. B. MELO; F. EVANGELISTA JR. e J. B. SOARES (2006) An Object Oriented System for Finite Element Analysis of Pavements. *Proceedings of III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Lisboa, Portugal.
- HOLANDA, A. S.; E. PARENTE JR.; L. T. B. MELO; H. N. SILVA; S. C. SOUZA (2007) Utilização de Modelos Resilientes na Análise de Pavimentos Asfálticos. XXI ANPET – Congresso de Ensino e Pesquisa em Transportes, Rio de Janeiro.
- HUANG, Y. H. (2004) *Pavement Analysis and Design*. Ed. Pearson Education, Upper Saddle River, Nova Jersey, EUA.
- JACOBS, M. M. J. (1995) Crack Growth in Asphaltic Mixes. PhD. Thesis, Delft University of Technology, Holanda.

- KARR, C. L.; B. WECK; D. L. MASSART e P. VANKEERBERGHEN (1995) Least Median Squares Curve Fitting Using a Genetic Algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 8, n. 2, p. 177–189.
- KIM, Y. R. e D. N. LITTLE (2004) Linear Viscoelastic Analysis of Asphalt Mastics. *Journal of Materials in Civil Engineering – ASCE*, v. 16, n. 2, p.??.
- KIM, Y. R. (2006) *Inelastic Behavior of Construction Materials*. Notas de aula não publicadas.
- KIM, Y. R. (2008) *Modeling of Asphalt Concrete*. 1a edição. Editora McGraw Hill–ASCE, Reston, Virgínia, EUA.
- KIM, Y. R. (2009) Viscoelastoplastic Continuum Damage (VEPCD) Model. Minicurso do IV Simpósio Internacional de Avaliação de Pavimentos e Projetos de Reforço – Comemoração dos 50 anos da ABPv.
- KIUSALAAS, J. (2005) *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*. Ed. Cambridge University Press, Nova York, EUA.
- LAKES, R. S. (1998) *Viscoelastic Solids*. Ed. CRC Press LLC, EUA.
- LEE, H. e Y. R. KIM (1998) Viscoelastic Constitutive Model for Asphalt Concrete under Cyclic Loading. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers – ASCE, v. 124, n. 1, p. 32–40.
- LYTTON, R. L.; J. UZAN, E. M. FERNANDO; R. ROQUE; D. HILTUNEN e S. M. STOFFELS (1993) Development and Validation of Performance Prediction Models and Specifications for Asphalt Binders and Paving Mixes. *SHRP Report A-357*, SHRP/NRC, Washington D.C., EUA.
- MARTHA, L. F. e E. PARENTE JR. (2002) An Object-Oriented Framework for Finite Element Programming, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics*, Viena, Austria.
- MATHWORKS (2008) *MATLAB R2008a The Language of Technical Computing*. Versão 7.6. EUA: The MathWorks, Inc.
- MEDANI, T. O. e M. HUURMAN (2003) Constructing the Stiffness Master Curves for Asphaltic Mixes. Report 7-01-127-3 ISSN 0169-9288 Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and GeoSciences, Road and Railroad Research Laboratory & Steel and Timber Structures.
- MEDEIROS JR., M. S. (2006) Estudo de Interconversão entre o Módulo Complexo e a *Creep Compliance* na Caracterização de Misturas Asfálticas, Dissertação de mestrado, Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil.
- MICROSOFT (2008) *Visual C++2008 Express Edition*. Version 9.0. [S.l.]: Microsoft Corporation.

- MOMM, L. (2001) Comportamento Viscoelástico do Concreto Asfáltico. *Anais da 33ª reunião anual de pavimentação*, ABPV, Florianópolis, Santa Catarina, p. 223–231.
- NOCEDAL, J e S. J. WRIGHT (1999) *Numerical Optimization – Springer Series in Operations Research (Second Edition)*. Ed. Springer–Verlag, Nova York, EUA.
- OMG (1997) *Introduction to OMG's Unified Modeling Language (UML)*. Object Management Group, EUA.
- PARK, S. W. e R. A. SCHAPERY (1999) Methods of Interconversion between Linear Viscoelastic Material Functions. Part I – A Numerical Method based on Prony Series. *International Journal of Solids and Structures*, v. 36, n. 11, p. 1653–1675.
- PARK, S. W. (2001) Analytical Modeling of Viscoelastic Dampers for Structural and Vibration Control. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, n. 44–45, p. 8065–8092.
- PARK, S. W. e Y. R. KIM (2001) Fitting Prony-Series Viscoelastic Models with Power Law Presmoothing. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 13, n. 1, p. 26–32.
- PITANGUEIRA, R. L. S. e PARENTE JR., E. (1997) *Nlpos – Programa para visualização de resultados de análises não lineares de modelos bidimensionais de elementos finitos*. Versão 1.00, Rio de Janeiro: DEC/PUC–Rio.
- PRATA, S. (2005) *C++ Primer Plus*. 5a ed. Editora Sams, Indiana, EUA.
- PRESS, W. H.; S. A. TEUKOLSKY; W. T. VETTERLING e B. P. FLANNERY (2007) *Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing (Third Edition)*. Ed. Cambridge University Press, Nova York, EUA.
- ROBERTS, F. L.; P. S. KANDHAL; E. R. BROWN; D. Y. LEE e T. W. KENNEDY (1996) *Hot Mix Asphalt Materials, Mixture Design, and Construction*. Ed. NAPA Education Foundation. Lanham, Maryland, EUA.
- SAYEGH, G. (1967) Viscoelastic Properties of Bituminous Mixtures. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements*, Ann Arbor, MI, EUA.
- SCHALIG, D. e D. RONDINI (2003) *wxMathPlot* Framework for plotting in wxWindows. Disponível em: <<http://wxmathplot.sourceforge.net/>>. Acessado em: 10/01/2008.
- SCHAPERY, R. A. (1961) A Simple Collocation Method for Fitting Viscoelastic Models to Experimental Data. Rep. GALCIT SM 61-23A, California Institute of Technology, Pasadena, EUA.

- SCHAPERLY, R. A. (1975) A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media I. Theoretical Development. *International Journal of Fracture*, v. 11, p. 141–159.
- SCHAPERLY, R. A. (1982) *Theory of Viscoelasticity*, Notas de aula não publicadas.
- SCHAPERLY, R. A. (2000) Nonlinear Viscoelastic Solids. *International Journal of Solids and Structures*, v. 3, p. 359–366.
- SILVA, H. N.; J. B. SOARES; E. PARENTE JR. e P. C. SOUSA (2008a) Implementation of a Viscoelastic Constitutive Model Using the Object-Oriented Programming Approach. *Proceedings of International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, 2008*, ICCES, Honolulu, Havaí, EUA.
- SILVA, H. N.; P. C. SOUSA; A. S. HOLANDA e J. B. SOARES (2008b) A Computer Program for Linear Viscoelastic Characterization Using Prony Series. *Proceedings of XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – Abstract Book*, CILAMCE, Maceió.
- SILVA, H. N.; P. C. SOUSA; P. C. ARAÚJO JR.; J. B. SOARES e A. S. HOLANDA (2008c) Metodologia Simplificada de Análise Numérica Dinâmica Viscoelástica de Pavimentos Asfálticos, *39ª Reunião Anual de Pavimentação*, Recife, 39a. RAPV/13 ENACOR.
- SIMO, J. C. e T. J. R. HUGHES (1997) *Computational Inelasticity*, Ed. Springer-Verlag, Nova York, EUA.
- SMART, J.; K. HOCK e S. CSOMOR (2006) *Cross-Platform GUI Programming with wxWidgets*, Ed. Prentice Hall, EUA.
- SMART, J.; R. ROEBLING; V. ZEITLIN e R. DUNN (2007) *wxWidgets 2.8.9: A portable C++ and Python GUI toolkit*. Disponível em: <<http://www.wxwidgets.org/>>. Acessado em: 10/01/2008.
- SOARES, J. B.; L. M. G. MOTTA e S. A. S. BENEVIDES (2000) Dimensionamento Mecânico de Reforço Considerando Alternativa de Base com Revestimento Fresado Incorporado. *Simpósio Internacional de Manutenção e Restauração de Pavimentos e Controle Tecnológico*, São Paulo, SP, Brasil.
- SOARES, J. B. e F. V. SOUZA (2002) Verificação do Comportamento Viscoelástico Linear em Misturas Asfálticas. *Anais do 16º Encontro de Asfalto, Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis – IBP*, Rio de Janeiro.
- SOARES, J. B.; A. MATEOS e L. M. G. MOTTA (2009) Aspectos Gerais de Métodos de Dimensionamento de Pavimentos Asfálticos de Vários Países e a Relação com um Novo Método Brasileiro. *Revista TRANSPORTES*, v. 17, n. 2, p. ??.
- SOUSA, P. C. e J. B. SOARES (2007) Método da Colocação para Obtenção de Séries de Prony Usadas na Caracterização Viscoelástica de Materiais Asfálticos, *Anais*

do XXI Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes, ANPET, Rio de Janeiro.

- SOUSA, P. C.; H. N. SILVA e J. B. SOARES (2008) Prony Series Study for Viscoelastic Characterization of Asphalt Mixtures. *Anais do 19º Encontro de Asfalto*, Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis – IBP, Rio de Janeiro.
- SOUZA, F. V. (2005) Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Suscetíveis ao Dano. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- SOUZA, F. V. e J. B. SOARES (2003) Previsão do Comportamento Mecânico de Misturas Asfálticas a partir dos Resultados do Ensaio de *Creep* Estático. *CNT/ANPET (org.) / LGE (ed.) Transporte em Transformação VII – Trabalhos vencedores do prêmio CNT Produção Acadêmica 2002*, Brasília.
- STROUSTRUP, B. (1997) *The C++ Programming Language, Third edition*, Ed. Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, USA.
- TAIRA, C. e G. T. P. FABBRI (2001) Modelação Viscoelástica de Ensaio de Fluência Estática e Dinâmica de Misturas Asfálticas com Asfaltos Convencional e Modificado por Polímero SBS, *Anais da 33ª Reunião Anual de Pavimentação, ABPV, Florianópolis*, p, 250–265.
- TASHMAN, L. (2003) Microstructure Viscoplastic Continuum Model for Permanent Deformation in Asphalt Pavements, Tese de Doutorado, Texas A&M University, College Station, TX, EUA.
- TAYLOR, R. L.; K. S. PISTER e G. L. GOUDREAU (1970) Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, n. 1, p. 45–59.
- TECGRAF (1997) *Mtool: Bidimensional Mesh Tool*, versão 3.0. Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica, PUC–Rio.
- TEIXEIRA, V. F.; F. V. SOUSA e J. B. SOARES (2007) Modelagem de vida de fadiga e do acúmulo de deformações permanentes em pavimentos asfálticos por meio de um modelo de dano contínuo. *Revista TRANSPORTES*, v. 15, n. 2, p. 17–25.
- THEISEN, K. M. (2006) Aplicação do Princípio da Correspondência Elasto-viscoelástica para Previsão de Deformabilidade de Misturas Asfálticas. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- TIMOSHENKO, S. P. e GOODIER, J. N. (1980) *Teoria da Elasticidade*. 3ª edição. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois.

- VANDERNOOT, T. J.; I. ABRAHAMS (1997) The Use of Genetic Algorithms in the Non-Linear Regression of Immitance Data. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, v. 448, p. 17–23.
- VANKEERBERGHEN, P.; J. SMEYERS-VERBEKE; R. LEARDI; C. L. KARR e D. L. MASSART (1995) Robust Regression and Outlier Detection for Non-Linear Models Using Genetic Algorithms. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, v. 28, p. 73– 87.
- VILLAÇA, S. F. e GARCIA, L. F. T. (1998) *Introdução à Teoria da Elasticidade*. 3ª edição. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ.
- WILLIAMS, M. L.; R. F. LANDEL e J. D. FERRY (1955) The Temperature Dependence of Relaxation Mechanism in Amorphous Polymers and other Glass Forming Liquids. *Journal of American Chemical Society*, v. 77, p. 3701–3707.
- ZIENKIEWICZ, O. C. e R. L. TAYLOR (2000) *The Finite Element Method, Solid Mechanics, Fifth edition, Vol. 2*. Ed. Butterworth–Heinemann, Reino Unido.
- ZIMMERMANN, T.; P. BOMME; D. EYHERAMENDY; L. VERNIER e S. COMMEND (1998) Aspects of an Object-Oriented Finite Element Environment. *Computers and Structures*, v. 68, n. 1, p. 1–16.
- ZOCHER, M. A. (1995) A Thermoviscoelastic Finite Element Formulation for the Analysis of Composites, PhD. Thesis, Aerospace Engineering Department/Texas A&M University, College Station, TX, EUA.

**APÊNDICE: DEDUÇÃO DA INTERCONVERSÃO  
ANALÍTICA ENTRE PROPRIEDADES  
VISCOELÁSTICAS NO DOMÍNIO DO TEMPO <sup>1</sup>**

---

<sup>1</sup> As deduções mostradas neste apêndice foram baseadas no trabalho de PARK, S. W. e SCHAPERY, R. A. (1999) Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I – a numerical method based on Prony series. *International Journal of Solids and Structures*, v. 36, p. 1653–1675.

### A.1. OBTENÇÃO DA FUNÇÃO FLUÊNCIA $D(t)$ A PARTIR DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO $E(t)$

Para obtenção da Função Fluência  $D(t)$  (função alvo) a partir do Módulo de Relaxação  $E(t)$  (função fonte) utiliza-se a integral de convolução descrita pela Equação (A.1).

$$\int_0^t E(t - \tau) \frac{dD(\tau)}{d\tau} d\tau = 1 \quad (t > 0, \tau \geq 0) \quad (\text{A.1})$$

Considerando a representação por série de Prony do Módulo de Relaxação  $E(t)$  descrita pela Equação (A.2),

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-t}{\rho_i}} \quad (t > 0) \quad (\text{A.2})$$

e a Função Fluência  $D(t)$  descrita por sua série de Prony dada pela Equação (A.3), pode-se encontrar uma relação analítica bem definida e, portanto, facilmente implementada em uma rotina numérico-computacional.

$$D(t) = D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}} \right) \quad (t > 0) \quad (\text{A.3})$$

No entanto, como precisamos na Equação (A.1) da derivada da Função Fluência  $dD(\tau)/d\tau$  quando a variável de integração assumir o valor  $\tau = 0$ , a Equação (A.3) pode ocultar alguns detalhes da resolução da integral de convolução (A.1). Para evitar problemas na dedução, faz-se necessário representar a Função Fluência  $D(t)$  em uma expressão matemática mais formal utilizando a função degrau unitária  $H(t)$  definida na Equação (A.4).

$$H(t - t_0) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_0 \\ 1, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A Função Fluência passa a ser descrita então pela Equação (A.5). Dessa forma, é possível tratar formalmente a descontinuidade da derivada  $dD(\tau)/d\tau$  para o caso de  $\tau = 0$ .

$$D(t) = H(t) \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] \quad \text{para qualquer } t \quad (\text{A.5})$$

Neste caso, pela regra da cadeia de derivação, a derivada  $dD(\tau)/d\tau$  da Equação (A.5) com relação à variável de integração  $\tau$  é então descrita pela Equação (A.6).

$$\begin{aligned} \frac{dD(\tau)}{d\tau} = & \delta(\tau) \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right) \right] \\ & + H(\tau) \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right] \quad \text{para qualquer } t \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Aplicando as Equações (A.2) e (A.6) na integral de convolução (A.1), resulta na Equação (A.7) a seguir.

$$\int_0^t \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{(t-\tau)}{\rho_i}} \right] \left\{ \delta(\tau) \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right) \right] + H(\tau) \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right] \right\} d\tau \quad (\text{A.7})$$

$= 1 \quad (t > 0, \tau \geq 0)$

Expandindo o produto do integrando da Equação (A.7) resulta:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{(t-\tau)}{\rho_i}} \right] \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \delta(\tau) d\tau \\ & + \int_0^t \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{(t-\tau)}{\rho_i}} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right] \cdot H(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$= 1 \quad (t > 0, \tau \geq 0)$

Para a primeira integral da Equação (A.8) pode-se utilizar a propriedade descrita pela Equação (A.9), denominada *sifting property*. Considerando  $a = 0$  na Equação (A.9), e aplicando na primeira integral da Equação (A.8), resulta na Equação (A.10).

$$\int_{a-L'}^{a+L} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \quad L \text{ e } L' > 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} & \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-(t-0)}{\rho_i}} \right] \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{\frac{-0}{\tau_j}} \right) \right] \\ & + \int_0^t \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-(t-\tau)}{\rho_i}} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{\frac{-\tau}{\tau_j}} \right] \cdot H(\tau) d\tau \\ & = 1 \quad (t > 0, \tau \geq 0) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Lembrando que  $e^0 = 1$ , a Equação (A.10) pode ser expressa em um modo mais simplificado pela Equação (A.11) abaixo.

$$\begin{aligned} & \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right] \cdot D_0 + \int_0^t \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-(t-\tau)}{\rho_i}} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{\frac{-\tau}{\tau_j}} \right] \cdot H(\tau) d\tau \\ & = 1 \quad (t > 0, \tau \geq 0) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Uma vez tratada a descontinuidade na derivada  $dD(\tau)/d\tau$  para  $\tau = 0$  da Equação (A.11), pode-se agora considerar a função degrau unitária  $H(\tau) = 1$ , uma vez que a integração a ser realizada na Equação (A.11) será apenas no intervalo positivo não nulo, ou seja, somente para o caso de  $\tau > 0$ . Então, a Equação (A.11) expressa em uma forma mais simplificada se torna na Equação (A.12).

$$\begin{aligned} & \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right] \cdot D_0 + \int_0^t \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-(t-\tau)}{\rho_i}} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{\frac{-\tau}{\tau_j}} \right] d\tau \\ & = 1 \quad (t > 0, \tau > 0) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Também pode ser notado que o termo independente  $D_0$  da série de Prony da função alvo (Função Fluência) é facilmente obtido como sendo o recíproco do somatório  $E_{\infty} + \sum_{i=1}^m E_i$ . Esta afirmação é fundamentada nos teoremas do valor inicial e do valor final da transformada de Laplace (ou transformada de Carson, para ser mais rigoroso), cujo resumo segue na Equação (A.13) a seguir.

$$D_0 \equiv \lim_{t \rightarrow 0} D(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{D}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{E}(s)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} E(t)} = \frac{1}{E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i} \quad (\text{A.13})$$

$$\therefore D_0 = \frac{1}{E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i}$$

A partir do resultado da Equação (A.13), nota-se que o primeiro termo do lado esquerdo da Equação (A.12) não é função dos coeficientes da função alvo ( $D_j$  e  $\tau_j$ ) e, portanto, pode-se passá-lo para o lado direito da Equação (A.12). Fazendo esta operação e aplicando a Equação (A.13), resulta na Equação (A.14) a seguir.

$$\int_0^t \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{(t-\tau)}{\rho_i}} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right] d\tau$$

$$= 1 - \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] / \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \right] \quad (\text{A.14})$$

$(t > 0, \tau > 0)$

Agora, expandindo o integrando da Equação (A.14) resulta na Equação (A.15).

$$\int_0^t E_\infty \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right] d\tau + \int_0^t \left[ \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{(t-\tau)}{\rho_i}} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right] d\tau$$

$$= 1 - \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] / \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \right] \quad (\text{A.15})$$

$(t > 0, \tau > 0)$

Colocando para fora da integral os termos que não são função da variável de integração  $\tau$  resulta na Equação (A.16).

$$E_\infty \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\tau_j} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} d\tau + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{E_i D_j}{\tau_j} e^{-\frac{t}{\rho_i}} \int_0^t e^{-\left(\frac{\tau}{\rho_i} - \frac{\tau}{\tau_j}\right)} d\tau$$

$$= 1 - \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] / \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i \right] \quad (\text{A.16})$$

$(t > 0, \tau > 0)$

As integrais da Equação (A.16), por sua vez, são de fácil solução analítica. O resultado de cada uma destas integrais é dado pelas Equações (A.17) e (A.18):

$$\int_0^t e^{\frac{-\tau}{\tau_j}} d\tau = \tau_j \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}}\right) \quad (\text{A.17})$$

$$\int_0^t e^{\left(\frac{\tau}{\rho_i} - \frac{\tau}{\tau_j}\right)} d\tau = \begin{cases} t & \text{se } \tau_j = \rho_i \\ \frac{\rho_i \tau_j}{\rho_i - \tau_j} \left(1 - e^{\left(\frac{t}{\rho_i} - \frac{t}{\tau_j}\right)}\right) & \text{se } \tau_j \neq \rho_i \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo as Equações (A.17) e (A.18) na Equação (A.16), e permutando o duplo somatório, resulta então na Equação (A.19) a seguir.

$$\begin{aligned} E_\infty \sum_{j=1}^N D_j \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}}\right) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{E_i D_j}{\tau_j} e^{\frac{-t}{\rho_i}} \begin{cases} t & \text{se } \tau_j = \rho_i \\ \frac{\rho_i \tau_j}{\rho_i - \tau_j} \left(1 - e^{\left(\frac{t}{\rho_i} - \frac{t}{\tau_j}\right)}\right) & \text{se } \tau_j \neq \rho_i \end{cases} \\ = 1 - \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right] / \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

( $t > 0$ )

Um método simplificado para resolver a Equação (A.19) é arbitrar os valores das constantes de tempo  $\tau_j$  da função alvo – Função Fluência  $D(t)$ . Dessa forma, poderemos isolar os coeficientes  $D_j$  da série de Prony alvo, resultando em um sistema de equações lineares descrito pela Equação (A.20).

$$\begin{aligned}
\text{se } \tau_j = \rho_i & \quad \sum_{j=1}^N \left[ E_\infty \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{E_i t}{\tau_j} e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] \cdot D_j \\
& = 1 - \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] / \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \right] \\
\text{se } \tau_j \neq \rho_i & \quad \sum_{j=1}^N \left[ E_\infty \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i E_i}{\rho_i - \tau_j} \left( e^{-\frac{t}{\rho_i}} - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] \cdot D_j \\
& = 1 - \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] / \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \right]
\end{aligned} \tag{A.20}$$

( $t > 0$ )

Embora não seja correto do ponto de vista formal, uma primeira aproximação para a escolha das constantes de tempo  $\tau_j$  da função alvo – Função Fluência – seria simplesmente impor  $\tau_j$  iguais as constantes de tempo  $\rho_i$  da função fonte – Módulo de Relaxação. Ou seja,  $\tau_j = \rho_i$  (onde  $j = 1, \dots, N$  e  $i = 1, \dots, N$ ). Para maiores detalhes sobre uma escolha mais criteriosa das constantes de tempo  $\tau_j$  da função alvo – Função Fluência, no caso – o leitor é referenciado ao item 2.5.2 do corpo principal deste trabalho.

Ao final, resta apenas definir o subespaço de observação ao longo do tempo  $t_k$ . Em uma abordagem similar ao método da colocação simplificado, pode-se utilizar um subespaço reduzido ao longo dos tempos observados  $t_k$ , ou seja, emprega-se para o subespaço ao longo do tempo  $t_k$  a mesma quantidade de termos da série de Prony da função fonte, isto é,  $k = 1, \dots, N$ . Nesta abordagem, recomenda-se adotar  $t_k = c \rho_i$  ( $i = k = 1, \dots, N$ ). A experiência do autor do presente trabalho recomenda valores para  $c$  entre 0,5 e 2, pois fora deste intervalo provavelmente haverá problemas de instabilidade numérica resultando em termos negativos da série de Prony interconvertida – Função Fluência, no caso.

Em notação indicial, a equação final que realiza a interconversão analítica para obtenção da Função Fluência  $D(t)$  a partir do Módulo de Relaxação  $E(t)$  é descrita pela Equação (A.21) a seguir.

$$A_{kj}D_j = B_k \quad (\text{soma em } j; j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N)$$

, onde:

$$A_{kj} = E_\infty \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{E_i t_k}{\tau_j} e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \quad \text{se } \tau_j = \rho_i$$

$$A_{kj} = E_\infty \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i E_i}{\rho_i - \tau_j} \left( e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) \quad \text{se } \tau_j \neq \rho_i \quad (\text{A.21})$$

e

$$B_k = 1 - \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right] / \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \right]$$

Utilizando a notação matricial, a Equação (A.21) pode ser condensada por pela Equação (A.22) a seguir.

$$[\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{B}\} \quad (\text{A.22})$$

A notação matricial é conveniente quando se escolhe para o subespaço de observação ao longo do tempo  $t_k$  uma quantidade de pontos maior que o número de termos da série de Prony. Caso opte-se por essa abordagem, teremos  $t_k$  ( $k = 1, \dots, \bar{M}$ ; sendo  $\bar{M} > N$ ). Neste caso, deve-se tomar o intervalo total de variação no tempo da função viscoelástica fonte – Módulo de Relaxação, neste caso – e dividi-lo em intervalos equidistantes em escala logarítmica de forma que  $\bar{M} > N$ . Valores típicos para  $\bar{M}$  são entre 30 e 100.

A vantagem desta abordagem é a eliminação da dependência do parâmetro  $c$  descrito na página anterior para o sucesso do método. Esta abordagem pode ser encarada como uma interconversão analítica por mínimos quadrados uma vez que a Equação (A.22) é substituída pela Equação (A.23) dada na página seguinte, sendo esta última oriunda da minimização do erro quadrático  $\|\{\mathbf{B}\} - [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{D}\}\|^2$  com respeito a  $D_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). É importante destacar que mesmo utilizando o método dos mínimos quadrados discutido neste parágrafo, o produto matricial  $[\mathbf{A}]^T [\mathbf{A}]$  resulta em uma matriz

quadrada de ordem  $N$  e o produto matricial  $[A]^T\{B\}$  resulta em um vetor de dimensões  $N \times 1$  e, portanto, a técnica de interconversão por mínimos quadrados não aumenta a ordem do sistema de equações lineares com relação aos termos procurados para este caso,  $D_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ).

$$[A]^T[A]\{D\}=[A]^T\{B\} \quad (A.23)$$

## A.2. OBTENÇÃO DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO $E(t)$ A PARTIR DA FUNÇÃO FLUÊNCIA $D(t)$

Para obtenção do Módulo de Relaxação  $E(t)$  (função alvo) a partir da Função Fluência  $D(t)$  (função fonte), utiliza-se a integral de convolução descrita pela Equação (A.24) a seguir.

$$\int_0^t D(t-\tau) \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau = 1 \quad (t > 0, \tau \geq 0) \quad (A.24)$$

Considerando a representação por série de Prony da Função Fluência  $D(t)$  descrita pela Equação (A.2) – repetida na Equação (A.25) por conveniência,

$$D(t) = D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \quad (t > 0) \quad (A.25)$$

e o Módulo de Relaxação  $E(t)$  descrito por sua série de Prony dada pela Equação (A.2) – repetida na Equação (A.26), pode-se encontrar uma relação analítica de interconversão para posterior implementação computacional.

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \quad (t > 0) \quad (A.26)$$

No entanto, como precisamos da derivada do Módulo de Relaxação  $dE(\tau)/d\tau$  quando a variável de integração for  $\tau = 0$ , a Equação (A.25) pode ocultar alguns detalhes da resolução da integral de convolução descrita pela Equação (A.24). Para

evitar problemas na dedução, faz-se necessário representar o Módulo de Relaxação em uma expressão matemática mais formal, utilizando a função degrau unitária  $H(t)$  conforme descrito na Equação (A.4).

O Módulo de Relaxação passa a ser descrito então pela Equação (A.27) abaixo. Dessa forma, é possível tratar formalmente a descontinuidade da derivada  $dE(\tau)/d\tau$  para  $\tau = 0$ .

$$E(t) = H(t) \cdot \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right] \quad \text{para qualquer } t \quad (\text{A.27})$$

A derivada da Equação (A.27), com relação à variável de integração  $\tau$ ,  $dD(\tau)/d\tau$ , é então descrita pela Equação (A.28) seguinte.

$$\frac{dE(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau) \cdot \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-\tau}{\rho_i}} \right] + H(\tau) \cdot \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{\frac{-\tau}{\rho_i}} \right] \quad (\text{A.28})$$

para qualquer  $\tau$

Aplicando as Equações (A.25) e (A.28) na integral de convolução dada pela Equação (A.24), resulta na Equação (A.29) a seguir.

$$\int_0^t \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{\frac{-(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left\{ \delta(\tau) \cdot \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-\tau}{\rho_i}} \right] + H(\tau) \cdot \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{\frac{-\tau}{\rho_i}} \right] \right\} d\tau = 1 \quad (t > 0, \tau \geq 0) \quad (\text{A.29})$$

Expandindo o produto do integrando da Equação (A.29), resulta na Equação (A.30) a seguir.

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] \cdot \delta(\tau) d\tau \\
& + \int_0^t \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] \cdot H(\tau) d\tau \\
& = 1 \quad (t > 0, \tau \geq 0)
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Para a primeira integral da Equação (A.30), pode-se utilizar a propriedade denominada *sifting property*, descrita pela Equação (A.9), considerando  $a = 0$  e resultando, então, na Equação (A.31).

$$\begin{aligned}
& \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{(t-0)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{0}{\rho_i}} \right] \\
& + \int_0^t \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] \cdot H(\tau) d\tau \\
& = 1 \quad (t > 0, \tau > 0)
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Lembrando que  $e^0 = 1$ , a Equação (A.31) pode ser expressa em um modo mais simplificado pela Equação (A.32) dada a seguir.

$$\begin{aligned}
& \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \right] \\
& + \int_0^t \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] \cdot H(\tau) d\tau \\
& = 1 \quad (t > 0, \tau > 0)
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Uma vez tratada a descontinuidade na derivada  $dE(\tau)/d\tau$  para  $\tau = 0$ , pode-se agora considerar a função degrau unitária  $H(\tau) = 1$  uma vez que a integração a ser realizada na Equação (A.32) será apenas no intervalo positivo não nulo, ou seja, para o intervalo  $\tau > 0$ . Então, a Equação (A.32) se torna a Equação (A.33) a seguir.

$$\begin{aligned}
& \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \right] \\
& + \int_0^t \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{-(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] d\tau \\
& = 1 \quad (t > 0, \tau > 0)
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Também pode ser notado que o termo  $E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i$  no lado direito da Equação (A.33) é o recíproco do termo inicial da série de Prony da função fonte – Função Fluência  $D_0$ , no caso. Esta afirmação é fundamentada nos teoremas do valor inicial e do valor final da transformada de Laplace, cujo resumo está descrito na Equação (A.13).

Nota-se que o primeiro termo do lado direito da Equação (A.33) não é função dos coeficientes da função alvo ( $E_i, \rho_i$ ) e, portanto, pode-se passá-lo para o lado direito da Equação (A.33), resultando na Equação (A.34) a seguir.

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{-(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] d\tau \\
& = 1 - \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] / D_0 \quad (t > 0, \tau > 0)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Agora, expandindo o integrando da Equação (A.34) resulta na Equação (A.35) a seguir.

$$\begin{aligned}
& \int_0^t D_0 \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] d\tau + \int_0^t \left[ \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{-(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] d\tau \\
& = 1 - \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] / D_0 \quad (t > 0, \tau > 0)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Colocando para fora da integral da Equação (A.35) os termos que não são função da variável de integração  $\tau$ , resulta na Equação (A.36) seguinte.

$$\begin{aligned}
D_0 \sum_{i=1}^N -\frac{E_i}{\rho_i} \int_0^t e^{\frac{-\tau}{\rho_i}} d\tau + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N -\frac{D_j E_i}{\rho_i} \int_0^t \left(1 - e^{\frac{-(t-\tau)}{\tau_j}}\right) e^{\frac{-\tau}{\rho_i}} d\tau \\
= 1 - \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}}\right) \right] / D_0 \quad (t > 0, \tau > 0)
\end{aligned} \tag{A.36}$$

As integrais da Equação (A.36), por sua vez, são de fácil solução analítica. O resultado de cada uma destas integrais é dado pelas Equações (A.37) e (A.38) a seguir.

$$\int_0^t e^{\frac{-\tau}{\rho_i}} d\tau = \rho_i \left(1 - e^{\frac{-t}{\rho_i}}\right) \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left(1 - e^{\frac{-(t-\tau)}{\tau_j}}\right) e^{\frac{-\tau}{\rho_i}} d\tau \\
= \rho_i \left(1 - e^{\frac{-t}{\rho_i}}\right) - e^{\frac{-t}{\tau_j}} \cdot \begin{cases} t & \text{se } \rho_i = \tau_j \\ \frac{\tau_j \rho_i}{\tau_j - \rho_i} \left(1 - e^{\left(\frac{t}{\tau_j} - \frac{t}{\rho_i}\right)}\right) & \text{se } \rho_i \neq \tau_j \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Substituindo as Equações (A.37) e (A.38) na Equação (A.36), e permutando o duplo somatório, resulta então na Equação (A.39).

$$\begin{aligned}
D_0 \sum_{i=1}^N -E_i \left(1 - e^{\frac{-t}{\rho_i}}\right) \\
+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N -\frac{D_j E_i}{\rho_i} \left[ \rho_i \left(1 - e^{\frac{-t}{\rho_i}}\right) - e^{\frac{-t}{\tau_j}} \cdot \begin{cases} t & \text{se } \rho_i = \tau_j \\ \frac{\tau_j \rho_i}{\tau_j - \rho_i} \left(1 - e^{\left(\frac{t}{\tau_j} - \frac{t}{\rho_i}\right)}\right) & \text{se } \rho_i \neq \tau_j \end{cases} \right] \\
= 1 - \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}}\right) \right] / D_0 \quad (t > 0)
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Um método simplificado para resolver a Equação (A.39) é arbitrar os valores das constantes de tempo  $\rho_i$  da função alvo – Módulo de Relaxação  $E(t)$ , no caso. Dessa forma, poderemos isolar os coeficientes  $E_i$  da série de Prony alvo, resultando em um sistema de equações lineares descrito em pela Equação (A.40).

$$\begin{aligned}
 \text{se } \rho_i = \tau_j & \quad \sum_{i=1}^N \left[ -D_0 \left( 1 - e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^N -D_j \left( 1 - e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{D_j t}{\rho_i} e^{\frac{-t}{\tau_j}} \right] \cdot E_i \\
 & = 1 - \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}} \right) \right] / D_0 \quad (t > 0) \\
 \text{se } \rho_i \neq \tau_j & \quad \sum_{i=1}^N \left[ -D_0 \left( 1 - e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^N -D_j \left( 1 - e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=1}^N \frac{D_j \tau_j}{\tau_j - \rho_i} \left( e^{\frac{-t}{\tau_j}} - e^{\frac{-t}{\rho_i}} \right) \right] \cdot E_i \\
 & = 1 - \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{\frac{-t}{\tau_j}} \right) \right] / D_0 \quad (t > 0)
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

Embora não seja correto do ponto de vista formal, uma primeira aproximação para a escolha das constantes de tempo  $\rho_i$  da função alvo – Módulo de Relaxação, no caso – seria simplesmente impor  $\rho_i$  iguais as constantes de tempo  $\tau_j$  da função fonte – Função Fluência, no caso. Ou seja,  $\rho_i = \tau_j$  (onde  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, N$ ). Para maiores detalhes sobre uma escolha mais criteriosa das constantes de tempo  $\rho_i$  da função alvo Módulo de Relaxação o leitor é referenciado ao item 2.5.2 do corpo principal do presente trabalho.

Ao final, resta apenas definir o subespaço de observação ao longo do tempo  $t_k$ . Em uma abordagem similar ao método da colocação simplificado, pode-se utilizar um subespaço reduzido ao longo do tempo  $t_k$ , ou seja, emprega-se para o subespaço ao longo do tempo  $t_k$  a mesma quantidade de termos da série de Prony, isto é,  $k = 1, \dots, N$ . Nesta abordagem recomenda-se adotar  $t_k = c \tau_j$  ( $j = k = 1, \dots, n$ ). A experiência do autor do presente trabalho recomenda valores para  $c$  entre 2 e 5, para este caso, pois fora

deste intervalo provavelmente haverá problemas de instabilidade numérica resultando em termos negativos da série de Prony interconvertida  $E(t)$ .

Em notação indicial, a equação final que realiza a interconversão analítica para a obtenção do Módulo de Relaxação  $E(t)$  a partir da Função Fluência  $D(t)$  é descrita pela Equação (A.41) a seguir.

$$A_{ki}E_i = B_k \quad (\text{soma em } i; i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N)$$

onde:

$$A_{ki} = -D_0 \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^N -D_j \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{D_j t_k}{\rho_i} e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \quad \text{se } \rho_i = \tau_j$$

$$A_{ki} = -D_0 \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^N -D_j \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{\tau_j D_j}{\tau_j - \rho_i} \left( e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} - e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right) \quad \text{se } \rho_i \neq \tau_j \quad (\text{A.41})$$

e

$$B_k = 1 - \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) \right] / D_0$$

Em notação matricial, a Equação (A.41) pode ser condensada na Equação (A.42) seguinte.

$$[\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{E}\} = \{\mathbf{B}\} \quad (\text{A.42})$$

A notação matricial é conveniente quando se escolhe como subespaço de observação ao longo do tempo  $t_k$  uma quantidade de pontos maior que o número de termos da série de Prony. Caso opte-se por essa abordagem, teremos  $t_k$  ( $k = 1, \dots, \bar{M}$ ; sendo  $\bar{M} > N$ ). Neste caso, é comum tomar o intervalo total de variação no tempo da função viscoelástica fonte – Função Fluência, neste caso – e dividi-lo em intervalos equidistantes em escala logarítmica em 30, 50 ou 100 intervalos, resultando  $\bar{M} > N$ . A

vantagem desta abordagem é a eliminação da dependência do parâmetro  $c$  descrito na página anterior para o sucesso do método. Esta abordagem pode ser encarada como uma interconversão analítica por mínimos quadrados uma vez que a Equação (A.42) é substituída pela Equação (A.43) logo abaixo, oriunda da minimização do erro quadrático de  $\|{\mathbf{B}} - [\mathbf{A}].{\mathbf{E}}\|^2$  com respeito a  $E_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). É importante destacar que mesmo utilizando o método dos mínimos quadrados discutido neste parágrafo, o produto  $[\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}]$  resulta em uma matriz quadrada de ordem  $N$  e  $[\mathbf{A}]^T{\mathbf{B}}$  resulta em um vetor de dimensões  $N \times 1$  e, portanto, o método de interconversão utilizando mínimos quadrados não aumenta a ordem do sistema de equações lineares com relação aos termos procurados,  $E_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

$$[\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}].{\mathbf{E}}=[\mathbf{A}]^T{\mathbf{B}} \quad (\text{A.43})$$