HIPERSUPERFÍCIES CONFORMEMENTE PLANAS

(17)

ABDÊNAGO ALVES DE BARROS

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

FORTALEZA - AGOSTO/1983

Esta Monografia foi submetida como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Mestre em Matemática, outorgada pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição dos interessados na Biblioteca Central da referida Universidade.

A citação de qualquer trecho desta Monografia é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

Abdênago Alves de Barros

MONOGRAFIA APROVADA EM AGOSTO DE 1983.

José de Anchieta Delgado
(Orientador)

João Lucas Marques Barbosa

Katsuei Kenmotsu

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho.

Fortaleza, Agosto de 1983.

A.A.Barros

Ofereço aos
meus pais

SUMÁRIO

0 - INTRODUÇÃO

Uma variedade Riemanniana M^n de dimensão n, é dita conformemente plana (localmente) se para cada ponto $p \varepsilon M$ existe uma vizinhança V_p de p é um difeomorfismo conforme ψ_p de V_p sobre um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ou equivalentemente,

$$g = e^{2\phi} g_o \quad ,$$

onde g é a métrica de M, ϕ é uma função real definida em V_p e g_o é a métrica usual do $\mathbb{R}^n$.

Assim sendo, toda superfície M^2 é conformemente plana, pois é bem conhecido que toda superfície admite uma métrica conformemente equivalente à metrica usual do $\mathbb{R}^2$, veja por exemplo, Spivak,M. [12].

Neste trabalho faremos um estudo sobre variedades conformemente planas de dimensão $n \geq 4$. As referências básicas são: [2] CARMO,M.do e DAJCZER,M. - General conformally flat hypersurfaces of $\mathbb{R}^{n+1}$ (preprint) e [6] KULKARNI,R.- Curvature structures and conformal transformations.J.Differential Geom., 1970, 4 : 425-51. A seguir enunciaremos os principais resultados desta monografia, com suas respectivas enumerações do texto.

Um resultado fundamental sobre variedades conformemente planas é o seguinte:

(2.1.2) Teorema. *Uma variedade Riemanniana M^n, $n \geq 4$, é con-*

formemente plana se e somente se $C \equiv 0$, onde

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{(n-2)}\{YRic(X,Z) - \langle Y,Z\rangle QX + \langle X,Z\rangle QY - XRic(Y,Z)\} + \frac{S}{(n-1)(n-2)}\{\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\}$$

R é o tensor curvatura Riemanniano de M; Ric o tensor de Ricci, S a curvatura escalar; Q é dada por

$$Ric(X,Y) = \langle QX,Y\rangle ,$$

e X,Y,Z são campos de vetores em M.

Em função das curvaturas seccionais de uma variedade Riemanniana, temos a seguinte classificação das variedades conformemente planas:

(2.1.18) Teorema. *Uma variedade Riemanniana M^n, $n \geq 4$, é conformemente plana se e somente se, $\forall\, p \in M$, e $\forall$ quadrúpla de vetores ortogonais $\{e_1,e_2,e_3,e_4\} \subseteq T_pM$,*

$$K_{12} + K_{34} = K_{13} + K_{24} ,$$

onde K_{ij} representa a curvatura seccional Riemanniana do plano gerado por $\{e_i,e_j\}$, $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,4$.

Uma imersão $X : M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+k}$ de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\bar{M}$ é dita *conformemente plana se a métrica induzida transforma M em uma variedade Riemanniana conformemente plana.*

Os teoremas (2.1.2) e (2.1.18) são fundamentais no estudo das imersões $X : M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+k}$ conformemente planas. Vamos restringir o estudo de tais imersões as hipersuperfícies, ou seja, quando a codimensão $k = 1$.

Suponhamos que $\bar{M}$ é uma variedade Riemanniana conformemente plana e seja $M^n \subset \bar{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície, onde M é uma variedade conexa diferenciável. Denotemos, por A_N a matriz associada à segunda forma fundamental com relação a um campo normal unitário N. A classificação das hipersuperfícies conformemente planas de uma variedade Riemanniana conformemente plana é dada em função dos auto-valores de A_N. De fato temos o seguinte teorema:

(3.1.2) Teorema. *$M^n \subset \bar{M}^{n+1}$ é conformemente plana se e somente se A_N possui um auto-valor de multiplicidade* $k \geq (n-1)$.

Um problema interessante das hipersuperfícies conformemente planas é considerarmos quando k, dado no teorema (3.1.2) for igual a $n-1$, e o auto-valor λ de multiplicidade k for diferente de zero. Faremos um estudo deste problema considerando $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, mas a observação (3.2.32) nos diz como proceder no caso em que $\bar{M}^{n+1} = Q_c^{n+1}$, isto é, quando M é uma hipersuperfície de um espaço de curvatura constante c. Tais hipersuperfícies são chamadas *hipersuperfícies conformemente planas em posição geral do* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Uma variedade Riemanniana M é dita *totalmente não-isotrópica se em nenhum ponto* p *de* M *todas as curvaturas seccionais Riemannianas são iguais.*

Com esta definição estamos em condições de enunciarmos o seguinte teorema que caracteriza as hipersuperfícies conformemente planas em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$, mais precisamente:

(3.2.6) Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para uma variedade Riemanniana* M, $n \geq 4$, *conformemente plana, totalmente não-isotrópica ser localmente imersa isometricamente como uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do* $\mathbb{R}^{n+1}$ *é que* M *seja localmente folheada por esferas geométricas de co-dimensão um.*

Exemplos explícitos, de hipersuperfícies conformemente planas em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$ podem ser obtidos como segue: Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, $c : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva imersa e $r : I \to \mathbb{R}^{+}$ uma função diferenciável tal que

$$|r'(t)| < \| c'(t) \| \quad \forall \ t \in I.$$

Sejam $A(t) = r(t)\, r'(t) / \|c'(t)\|^2$ e $R(t) = r(t) \left[1 - (r'(t))^2 / \| c'(t) \|^2\right]^{1/2}$. Para cada $t \in I$, seja H_t o hiperplano afim do $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal à $c'(t)$ e passando por

$$\alpha(t) = c(t) - A(t) \cdot c'(t).$$

Em H_t consideremos uma $(n-1)$-esfera Σ_t^{n-1} com raio $R(t)$ e centro $\alpha(t)$. Seja

$$y : I \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{dado por}$$

$$y(t,p) = \alpha(t) + R(t)\, \phi(t,p),$$

onde S^{n-1} é uma (n-1)-esfera unitária fixa no $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\phi : I \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é diferenciável, e para cada t fixo,

$$\phi_t : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

é uma imersão ortogonal à $c'(t)$. Admitamos que y é uma hipersuperfície imersa, então temos o seguinte teorema:

(3.2.35) Teorema. $y : I \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *é conformemente plana em posição geral do* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Reciprocamente, toda hipersuperfície conformemente plana em posição geral* $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, *é localmente da forma* y*; além disto se* M *for orientável* $X(M)$ *está contida na imagem de uma hipersuperfície da forma* y.

Utilizando o Teorema (3.2.35) obtemos um exemplo que não pertence a uma classificação das hipersuperfícies conformemente planas do $\mathbb{R}^{n+1}$ dada em [5] por Kulkarni, R. e independentemente por Maeda, Y. e Nishikawa, S. em [7].

Finalizamos nosso trabalho com um apêndice dedicado a um problema de integração de uma forma bilinear simétrica, utilizado na demonstração do teorema (2.1.2). Mais precisamente demonstramos:

(4.1.2) Lema. *Seja* B *uma forma bilinear simétrica e* W *um campo de vetores* C^∞ *em* M. *Então a equação*

$$\langle \nabla_X W, Y \rangle = B(X,Y)$$

admite solução se e somente se

$$(\nabla_X B)(Z,Y) - (\nabla_Z B)(X,Y) = \langle R(X,Z)W,Y\rangle ,$$

onde R é o tensor curvatura Riemanniano da variedade M e X, Y, Z são campos de vetores C^∞ em M.

1 - PRELIMINARES

(1.1) Estrutura de Curvatura

Sejam M uma variedade Riemanniana e g sua métrica. Vamos denotar por $<\ ,\ >$ o produto interno definido por g.

(1.1.1) Definição. Dizemos que um tensor T do tipo $(3,1)$ definido em M possui *estrutura de curvatura*, se para todos os campos de vetores X,Y,Z e W em M, T satisfaz as condições seguintes:

a) $T(X,Y) + T(Y,X) = 0$

b) $<T(X,Y)Z,W> = <T(Z,W)X,Y>$

c) $T(X,Y)Z + T(Y,Z)X + T(Z,X)Y = 0$

Seja $G_2(M)$ o fibrado Grassmanniano dos planos de TM, T um tensor do tipo $(3,1)$ com estrutura de curvatura em M.

(1.1.1) Lema. *Dado* $p \in M$, σ *um plano em* p *e* $\{X,Y\}$ *uma base de* σ, *então*

$$K_T : G_2(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde

$$K_T(\sigma) = \frac{<T(X,Y)X,Y>}{<X,Y>\ <Y,Y>\ <X,Y>^2} \qquad (1.1.3)$$

é bem definida.

Prova. Observemos que é possível obtermos qualquer base $\{\tilde{X},\tilde{Y}\}$ de σ, a partir da base $\{X,Y\}$ através das seguintes transformações elementares:

(i) $\{X,Y\} \longrightarrow \{Y,X\}$

(ii) $\{X,Y\} \longrightarrow \{\lambda X,Y\}$

(iii) $\{X,Y\} \longrightarrow \{X+\lambda Y,Y\}$

onde λ é um escalar.

Um cálculo direto nos dá que $K_T(\sigma)$ é invariante por estas transformações, logo $K_T(\sigma)$ é bem definida.

(1.1.4) Definição. Dados $p \in M$, σ um plano de T_pM, $\{X,Y\}$ uma base de σ e T um tensor do tipo $(3,1)$ com estrutura de curvatura em M, a função real $K_T(X,Y) = K_T(p,\sigma)$ definida em (1.1.3) é chamada *curvatura seccional de* σ *em* p *com relação ao tensor* T.

(1.1.5) Definição. Seja T um tensor do tipo $(3,1)$ com estrutura de curvatura em M. Dado $p \in M$ definimos o *Tensor de Ricci em* p *com relação à* T, denotado por Ric_T, a seguinte aplicação:

$$(1.1.6) \qquad Ric_T(X,Y) = tr : Z \longrightarrow T(X,Z)Y \quad ,$$

onde $X,Y \in T_pM$ e tr indica o operador traço.

Pela condição b) da definição (1.1.1) segue-se que Ric_T é simétrico, logo existe uma transformação linear simétrica Q_T de TM em TM tal que

(1.1.7) $$Ric_T(X,Y) = \langle Q_T X , Y\rangle .$$

(1.1.8) Definição. Seja T um tensor do tipo $(3,1)$ com estrutura de curvatura em M. Dado $p \in M$ definimos a *curvatura escalar em* p, denotada por S_T, como sendo o traço da aplicação Q_T dada em (1.1.7).

(1.1.9) Exemplos de tensores com estrutura de curvatura numa variedade riemanniana M.

a) Seja I o tensor em M definido por:

$$I(X,Y)Z = \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X$$

É claro que I possui estrutura de curvatura. I é chamado tensor curvatura trivial.

Observemos que $I(X,Y) = X \wedge Y$, onde $X \wedge Y$ denota a transformação linear anti-simétrica de TM definida por

$$(X \wedge Y)Z = \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X.$$

$\wedge$ é chamado produto wedge.

b) Seja R o tensor em M definido por:

$$R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X , \nabla_Y] ,$$

onde ∇ denota a conexão Riemanniana de M e $[\ ,\ ]$ o colchete de Lie.

É bem conhecido que R possui estrutura de curvatura. R é chamado tensor curvatura de Riemann.

c) Sejam $Ric(X,Y) = tr : Z \to R(X,Z)Y$, onde R é o tensor curvatura de Riemann de M, e Q a transformação linear de TM tal que $Ric(X,Y) = \langle QX,Y\rangle$.

Seja Ric o tensor em M definido por:

$$Ric(X,Y) = QX \wedge Y + X \wedge QY ,$$

onde $\wedge$ representa o produto wedge.

É fácil ver que Ric possui estrutura de curvatura em M. Ric é chamado tensor de curvatura de Ricci.

d) Suponhamos que a dimensão de M é maior ou igual a 3, seja S a curvatura escalar com relação ao tensor curvatura de Riemann. É fácil ver que a soma de tensores que possui estrutura de curvatura é ainda um tensor que possui estrutura de curvatura. Assim sendo

$$C = R - \frac{1}{(n-2)} Ric + \frac{S}{(n-1)(n-2)} I ,$$

onde I, R e Ric são os tensores dos exemplos a) b) e c) respectivamente, possui estrutura de curvatura em M. C é chamado tensor curvatura conforme de Weyl.

(1.1.10) Lema. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$, e V^* o espaço dual de*

v. *Se* $w \in V^*$, *então* $\forall\ X \in V$, $\mathrm{tr}: Z \to w(Z)X = w(X)$.

Prova. Podemos supor que $X \neq 0$, seja $X_1, \ldots, X_n$ uma base ortonormal de V tal que $X_1 = \dfrac{X}{\|X\|}$.

Logo,

$$\mathrm{tr}: Z \to w(Z)X = \sum_{i=1}^{n} \langle w(X_i)X, X_i \rangle =$$

$$= \langle w(\frac{X}{\|X\|})X, \frac{X}{\|X\|} \rangle = w(X),$$

provando o que queríamos.

(1.1.11) Proposição. *Seja* M *uma variedade Riemanianna com tensor curvatura conforme de Weyl* C, *então*

$$\mathrm{Ric}_C \equiv 0.$$

<u>Prova</u>. Sejam $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$. Por definição

$$\mathrm{Ric}_C(X,Y) = \mathrm{tr}: Z \to C(X,Z)Y$$

$$= \mathrm{tr}: Z \to \left\{ R(X,Z)Y - \frac{1}{(n-2)} (QX \wedge Z + X \wedge QZ)Y + \right.$$

$$\left. + \frac{S}{(n-1)(n-2)} (X \wedge Z)Y \right\} =$$

$$= \mathrm{tr}: Z \to \left\{ R(X,Z)Y - \frac{1}{(n-2)} (\mathrm{Ric}(X,Y)Z - \langle Y,Z \rangle QX + \langle X,Y \rangle QZ - \right.$$

$$- \left. \mathrm{Ric}(Z,Y)X) + \frac{S}{(n-1)(n-2)} (<X,Y>Z - <Z,Y>X) \right\} > .$$

Usando o lema (1.1.10) obtemos

$$\mathrm{Ric}_C(X,Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{1}{(n-2)}((n-2)\mathrm{Ric}(X,Y) + S<X,Y>) +$$

$$+ \frac{S}{(n-2)} <X,Y> = 0,$$

provando o que queríamos.

(1.1.12) Corolário. $S_C \equiv 0$, *onde* S_C *é a curvatura escalar com relação ao tensor curvatura conforme de Weyl.*

(1.2) Mudança Conforme de uma Métrica

Seja M uma variedade Riemanniana com métrica g. Consideremos um difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ e seja $\bar{g} = f_*(g)$.

(1.2.1) Definição. Dizemos que $\bar{g}$ é conforme à g se existe uma função positiva $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\bar{g} = \rho g$.

Sejam g e $\bar{g}$ métricas conformes em M, tal que $\bar{g} = \rho g$, como ρ é positiva existe uma função $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

(1.2.2) $$\rho \doteq e^{2\phi}.$$

Denotemos por $<,>$ e $<<,>>$ os produtos internos com relação a g e $\bar{g}$ respectivamente. Então valem os seguintes resultados:

(1.2.3) Proposição. *Se* ∇ *e* $\bar{\nabla}$ *denotam as conexões Riemannia-*

nas nas métricas g *e* $\bar{g}$ *respectivamente, então*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle \mathrm{grad}\phi, X\rangle Y + \langle \mathrm{grad}\phi, Y\rangle X - \langle X,Y\rangle \mathrm{grad}\phi ,$$

onde X,Y são campos em M, ϕ é a função dada em (1.2.2) e grad é o gradiente na métrica g.

Prova. Pelo teorema de Levi-Cevita sabemos que

$$2\langle\langle \bar{\nabla}_X Y, Z\rangle\rangle = X\langle\langle Y,Z\rangle\rangle + Y\langle\langle X,Z\rangle\rangle - Z\langle\langle X,Y\rangle\rangle + \langle\langle [X,Y], Z\rangle\rangle -$$
$$- \langle\langle [Y,Z], X\rangle\rangle - \langle\langle [X,Z], Y\rangle\rangle ,$$

como $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle = e^{2\phi}\langle\ ,\ \rangle$ obtemos

$$2e^{2\phi}\langle \bar{\nabla}_X, Y, Z\rangle = 2e^{2\phi}(\langle \nabla_X Y + \langle \mathrm{grad}\phi, X\rangle Y + \langle \mathrm{grad}\phi, Y\rangle X -$$
$$- \langle X,Y\rangle\ \mathrm{grad}\phi, Z\rangle),$$

provando o que queríamos.

(1.2.4) Proposição. *Sejam* R *e* $\bar{R}$ *os tensores curvaturas de Riemann com relação à* g *e* $\bar{g}$ *respectivamente, então*

$$\bar{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \{\beta(Y,Z) + \langle Y,Z\rangle \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle\}X -$$
$$- \{\beta(X,Z) + \langle X,Z\rangle \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle\}Y + \langle Y,Z\rangle FX - \langle X,Z\rangle FY ,$$

onde β *é a transformação bilinear simétrica de* $TM \times TM$ *em* $\mathbb{R}$ *dada por*

$$(1.2.5) \qquad \beta(X,Y) = \mathrm{Hess}\phi(X,Y) - \langle \mathrm{grad}\phi, X\rangle \langle \mathrm{grad}\phi, Y\rangle ,$$

F *satisfaz* $\beta(X,Y) = \langle FX, Y\rangle$, $\mathrm{Hess}\phi$ *é o hessiano da função* ϕ

na métrica g *e* X,Y,Z *são campos em* M.

<u>Prova</u>. Por definição $\bar{R}(X,Y)Z = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z$, usando a proposição (1.2.3) obtemos

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z = {} & R(X,Y)Z + \{\beta(Y,Z) + \langle Y,Z\rangle \langle \operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\phi\rangle\}X - \\ & - \{\beta(X,Z) + \langle X,Z\rangle \langle \operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\phi\rangle\}Y + \langle Y,Z\rangle \{\nabla_X \operatorname{grad}\phi - \\ & - \langle \operatorname{grad}\phi, X\rangle \operatorname{grad}\phi\} - \langle X,Z\rangle\{\nabla_Y \operatorname{grad}\phi - \langle Y, \operatorname{grad}\phi\rangle \operatorname{grad}\phi\}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X \operatorname{grad}\phi - \langle \operatorname{grad}\phi, X\rangle \operatorname{grad}\phi, Y\rangle & = \langle \nabla_X \operatorname{grad}\phi, Y\rangle - \langle \operatorname{grad}\phi, X\rangle \langle \operatorname{grad}\phi, Y\rangle = \\ & = \operatorname{Hess}\phi(X,Y) - \langle \operatorname{grad}\phi, X\rangle \langle \operatorname{grad}\phi, Y\rangle = \\ & = \beta(X,Y) = \langle FX, Y\rangle ,\end{aligned}$$

isto é,

$$FX = \nabla_X \operatorname{grad}\phi - \langle \operatorname{grad}\phi, X\rangle \operatorname{grad}\phi ,$$

segue-se que

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z = {} & R(X,Y)Z + \{\beta(Y,Z) + \langle Y,Z\rangle \langle \operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\phi\}X - \\ & - \{\beta(X,Z) + \langle X,Z\rangle \langle \operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\phi\rangle\}Y + \\ & + \langle Y,Z\rangle FX - \langle X,Z\rangle FY ,\end{aligned}$$

que é o que queríamos.

(1.2.6) Proposição. *Sejam* Ric *e* $\bar{\text{Ric}}$ *os tensores de Ricci com relação aos tensores curvaturas de Riemann* R *e* $\bar{R}$ *respectivamente, então*

$$\bar{R}ic(X,Y) = Ric(X,Y) - \{(n-2)\beta(X,Y) + (n-1)\langle X,Y\rangle\langle grad\phi, grad\phi\rangle + $$
$$+ \langle X,Y\rangle \, trF\} ,$$

onde trF *é o traço da aplicação* F *e* X,Y *são campos em* M.

Prova. Relembrando que $\bar{R}ic(X,Y) = tr:Z \longrightarrow R(X,Z)Y$, e usando a proposição (1.2.4) temos que

$$\bar{R}ic(X,Y) = tr:Z \to \bar{R}(X,Z)Y = tr:Z \to \{R(X,Z)Y \quad +$$
$$+ \left[\beta(Z,Y) + \langle Z,Y\rangle \langle grad\phi, grad\phi\rangle\right]X \quad -$$
$$- \left[\beta(X,Y) + \langle X,Y\rangle \langle grad\phi, grad\phi\rangle\right]Z \quad +$$
$$+ \langle Z,Y\rangle FX - \langle X,Y\rangle FZ\}.$$

Pelo Lema (1.1.10) concluímos que

$$\bar{R}ic(X,Y) = Ric(X,Y) - \{(n-2)\beta(X,Y) + (n-1)\langle X,Y\rangle\langle grad\phi, grad\phi\rangle +$$
$$\langle X,Y\rangle \, trF\}.$$

(1.2.7) Proposição. *Sejam* Q *e* $\bar{Q}$ *as transformações lineares simétricas de* TM *tais que,* $Ric(X,Y) = \langle QX,Y\rangle$ *e* $\bar{R}ic(X,Y) = \langle\langle \bar{Q}X,Y\rangle\rangle$, *então valem os seguintes resultados*

(i) $e^{2\phi}\bar{Q}X = QX - (n-2)FX - \{(n-1)\langle grad\phi, grad\phi\rangle + trF\}X$,

(ii) $e^{2\phi}\bar{S} = S - \{n(n-1) \langle grad\phi, grad\phi\rangle + 2(n-1)trF\}$,

onde S *e* $\bar{S}$ *representam as curvaturas escalares com relação aos tensores curvaturas de Riemann* R *e* $\bar{R}$ *respectivamente e* X,Y *são campos em* M.

Prova. Como $\langle\langle , \rangle\rangle = e^{2\phi} \langle , \rangle$ a proposição (1.2.6) nos dá que

$$e^{2\phi}\langle \bar{Q}Z,Y\rangle = \langle\langle \bar{Q}X,Y\rangle\rangle = \bar{R}ic(X,Y) = Ric(X,Y) - \{(n-2)\beta(X,Y) + (n-1)\langle X,Y\rangle \langle grad\phi, grad\phi\rangle + \langle X,Y\rangle\, trF\} =$$

$$= \langle QX - (n-2)FX - [(n-1)\, grad\phi, grad\phi\rangle + trF]X, Y\rangle ,$$

ou seja,

$$e^{2\Phi}\bar{Q}X = QX - (n-2)FX - \{(n-1)\ \langle grad\Phi, grad\Phi\rangle + trF\}\, X \ ;$$

provando (i).

(ii) Obtém-se diretamente calculando o traço de ambos os membros da equação (i).

Provando o que queríamos.

(1.2.8) Proposição. *Se* $\bar{\bar{g}} = e^{2\phi}g$ *for uma métrica flat, então*

$$Hess\phi(X,Y) = \langle grad\phi, X\rangle \langle grad\phi, Y\rangle - \frac{1}{2}\langle grad\phi, grad\phi\rangle \langle X,Y\rangle + \bar{+}\, L(X,Y),$$

onde L *é o tensor dado por*

$$(1.2.9) \qquad L(X,Y) = \frac{1}{(n-2)}\left\{ Ric(X,Y) - \frac{S\,\langle X,Y\rangle}{2(n-1)} \right\} ,$$

e X,Y *são campos em* M.

Prova. Como $\bar{g}$ é flat, $\bar{R}ic = \bar{S} = 0$, portanto das proposições (1.2.5) e (1.2.6-ii) obtemos o seguinte sistema:

$$(1.2.10)\quad \begin{cases} Ric(X,Y) = (n-2)\beta(X,Y) + (n-1)\langle grad\phi, grad\phi\rangle \langle X,Y\rangle + trF \langle X,Y\rangle \\ S\langle X,Y\rangle = n(n-1)\langle grad\phi, grad\phi\rangle\langle X,Y\rangle + 2(n-1)\, trF \,\langle X,Y\rangle \end{cases}$$

Relembrando que $\beta(X,Y) = Hess\phi\,(X,Y) - \langle grad\phi, X\rangle \langle grad\phi, Y\rangle$, e eliminando trF em (1.2.10) concluímos que

$$Hess\phi(X,Y) = \langle grad\phi, X\rangle\langle grad\phi, Y\rangle - \frac{1}{2}\langle grad\phi, grad\phi\rangle\langle X,Y\rangle + $$
$$+ L(X,Y),$$

como queríamos.

(1.2.11) Proposição. *Seja* M *uma variedade Riemanniana de dimensão* $n \geq 3$. *Então o tensor curvatura conforme de Weyl é invariante por métricas conformes.*

Prova. Sejam g e $\bar{g}$ métricas conformes em $M, \bar{g} = e^{2\phi}g$, com tensores curvaturas conforme de Weyl C e $\bar{C}$ respectivamente, devemos provar que $C = \bar{C}$. Com efeito por definição

$$\langle \bar{C}(X,Y)Z,W\rangle = \langle \bar{R}(X,Y)Z,W\rangle - \frac{1}{(n-2)}\langle \bar{R}ic(X,Y)Z,W\rangle + $$
$$+ \frac{\bar{S}}{(n-1)(n-2)}\langle \bar{I}(X,Y)Z,W\rangle$$

onde $\bar{R}$, $\bar{R}ic$ e $\bar{I}$ denotam os tensores curvaturas de Riemann, Ricci e trivial respectivamente, e $\bar{S}$ a curvatura escalar com relação ao tensor $\bar{R}$. Usando o fato que

$$\langle \bar{I}(X,Y)Z,W\rangle = e^{2\phi}\langle I(X,Y)Z,W\rangle$$

e as proposições (1.2.4), (1.2.6) e (1.2.7-ii) obtemos que

$$\langle \bar{C}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle X,W\rangle \beta(Y,Z) - \langle Y,W\rangle \beta(X,Z) +$$

$$+ \langle Y,Z\rangle \beta(X,W) - \langle X,Z\rangle \beta(Y,W) - (\langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle -$$

$$- \langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle)|\mathrm{grad}\phi|^2 - \frac{1}{(n-2)} \{\langle Y,W\rangle \mathrm{Ric}(X,Z) -$$

$$- \langle Y,Z\rangle \mathrm{Ric}(X,W) + \langle X,Z\rangle \mathrm{Ric}(Y,W) - \langle X,W\rangle \mathrm{Ric}(Y,Z)$$

$$- (n-2)[\langle Y,W\rangle \beta(X,Z) - \langle Y,Z\rangle \beta(X,W) +$$

$$+ \langle X,Z\rangle \beta(Y,W) - \langle X,W\rangle \beta(Y,Z)] -$$

$$- 2(n-1)|\mathrm{grad}\phi|^2 [\langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle]$$

$$- 2 \,\mathrm{tr}F [\langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle]\}$$

$$+ \frac{1}{(n-1)(n-2)} \{S - n(n-1)|\mathrm{grad}\phi|^2 -$$

$$- 2(n-1)\mathrm{tr}\, F\} \langle I(X,Y)Z,W\rangle ,$$

ou equivalentemente

$$\langle \bar{C}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \frac{1}{(n-2)} \langle \mathrm{Ric}(X,Y)Z,W\rangle +$$

$$+ \frac{S}{(n-1)(n-2)} \langle I(X,Y)Z,W\rangle$$

$$+ \{\langle X,W\rangle \beta(Y,Z) - \langle Y,W\rangle \beta(X,Z) + \langle Y,Z\rangle \beta(X,W) -$$

$$- \langle X,Z\rangle \beta(Y,W)\} - \frac{1}{(n-2)}\{(n-2)[\langle X,W\rangle \beta(Y,Z) -$$

$$- \langle Y,W\rangle \beta(X,Z) + \langle Y,Z\rangle \beta(X,W) - \langle X,Z\rangle \beta(Y,W)]$$

$$- 2 \,\mathrm{tr}\, F \langle I(X,Y)Z,W\rangle - 2(n-1)|\mathrm{grad}\phi|^2 \langle I(X,Y)Z,W\rangle\}$$

$$- |\mathrm{grad}\phi|^2 \langle I(X,Y)Z,W\rangle - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \{n(n-1)|\mathrm{grad}\phi|^2 +$$

$$+ \quad 2(n-1)\mathrm{tr}F \} \quad \langle I(X,Y)Z,W\rangle \quad ,$$

donde concluímos que

$$\langle \bar{C}(X,Y)Z,W\rangle = \langle C(X,Y)Z,W\rangle \quad ,$$

ou seja, $\bar{C} = C$, como queríamos provar.

2 - VARIEDADES CONFORMEMENTE PLANAS

(2.1) Caracterização das Variedades Conformemente Planas.

(2.1.1) Definição. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica g. Dizemos que M é *conformemente plana* (localmente) se para cada ponto p de M existe uma vizinhança V_p de p e um difeomorfismo conforme ψ_p de V_p sobre um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ou equivalentemente, $g = e^{2\phi} g_o$, onde $\phi : V_p \subseteq M \to \mathbb{R}$ é uma função e g_o é a métrica usual do $\mathbb{R}^n$.

(2.1.2) Teorema. *Seja* M *uma variedade Riemanniana de dimensão* $n \geq 4$ *e* C *o seu tensor curvatura conforme de Weyl. Então* M *é conformemente plana se e somente se* $C = 0$.

Prova. Se M for conformemente plana, a proposição (1.2.11) nos diz que $C = 0$.

Para provarmos a recíproca precisamos do seguinte Lema:

(2.1.3) Lema. *Seja* M *uma variedade Riemanniana de dimensão* $n \geq 4$ *com métrica* g. *Seja* L *o tensor simétrico em* M *dado em* (1.2.9), *ou seja,*

$$L(X,Y) = \frac{1}{(n-2)} \left\{ Ric(X,Y) - \frac{S \langle X,Y\rangle}{2(n-1)} \right\}$$

Suponhamos que o tensor curvatura conforme de Weyl $C=0$, *então* *a equação*

$$(2.1.4) \qquad \langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y \rangle = B(X,Y) + L(X,Y)$$

possui solução, onde

$$B(X,Y) = \langle \mathrm{grad} f, X\rangle \langle \mathrm{grad} f, Y\rangle - \frac{1}{2} \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f\rangle \langle X,Y\rangle$$

e $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$.

Prova do Lema. Conforme o apêndice a equação (2.1.4) possui solução se

$$(2.1.5) \qquad \nabla_Z(B+L)(X,Y) - \nabla_X(B+L)(Z,Y) = \langle R(X,Z)\,\mathrm{grad} f, Y\rangle.$$

Como $C = 0$ temos que

$$(2.1.6) \qquad R(X,Y)Z = L(X,Z)Y - L(Y,Z)X + \langle X,Z\rangle \tilde{L}Y - \langle Y,Z\rangle \tilde{L}X,$$

onde $\tilde{L}$ é tal que

$$(2.1.7) \qquad \langle \tilde{L}X, Y\rangle = L(X,Y).$$

Aplicando a segunda identidade de Bianchi à (2.1.6), obtemos

$$(2.1.8) \qquad (\nabla_X L)(Z,Y) = (\nabla_Z L)(X,Y)$$

Derivando (2.1.4) obtemos

$$(2.1.9) \qquad \langle \nabla_Z \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle + \langle \nabla_X \mathrm{grad} f, \nabla_Z Y\rangle = (\nabla_Z B)(X,Y) +$$
$$+ (\nabla_Z L)(X,Y) + \{B(\nabla_Z X, Y) + L(\nabla_Z X, Y)\} +$$
$$+ \{B(X, \nabla_Z Y) + L(X, \nabla_Z Y)\}$$

Usando (2.1.4) nesta última expressão concluímos que

(2.1.10) $\langle \nabla_Z \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle - \langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, \nabla_Z X\rangle = (\nabla_Z B)(X,Y) + (\nabla_Z L)(X,Y)$

semelhantemente obtemos

(2.1.11) $\langle \nabla_X \nabla_Z \mathrm{grad} f, Y\rangle - \langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, \nabla_X Z\rangle = (\nabla_X B)(Z,Y) + (\nabla_X L)(Z,Y).$

Portanto de (2.1.8),(2.1.10) e (2.1.11) segue-se que

$$\langle \nabla_Z \nabla_X \mathrm{grad} f - \nabla_X \nabla_Z \mathrm{grad} f, Y\rangle + \langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, [X,Z]\rangle =$$
$$= (\nabla_Z B)(X,Y) - (\nabla_X B)(Z,Y).$$

Como $\langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, [X,Z]\rangle = \langle \nabla_{[X,Z]} \mathrm{grad} f, Y\rangle$ obtemos

$$\langle \nabla_Z \nabla_X \mathrm{grad} f - \nabla_X \nabla_Z \mathrm{grad} f + \nabla_{[X,Z]} \mathrm{grad} f, Y\rangle = (\nabla_Z B)(X,Y) -$$
$$- (\nabla_X B)(Z,Y),$$

isto é,

$$(\nabla_Z B)(X,Y) - (\nabla_X B)(Z,Y) = \langle R(X,Z)\mathrm{grad} f, Y\rangle ,$$

provando o Lema.

<u>Prova do Teorema</u>. Seja ϕ uma solução da equação (2.1.4), observemos que ϕ satisfaz o seguinte:

(2.1.12) $\mathrm{Hess}\phi(X,Y) - \langle \mathrm{grad}\phi, X\rangle \langle \mathrm{grad}\phi, Y\rangle + \frac{1}{2} \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle \langle X,Y\rangle =$
$$= L(X,Y).$$

Relembrando que β dada em (1.2.5) foi definida por

$$\beta(X,Y) = \mathrm{Hess}\phi(X,Y) - \langle \mathrm{grad}\phi, X\rangle \langle \mathrm{grad}\phi, Y\rangle \quad ,$$

temos que (2.1.12) é equivalente à

$$\beta(X,Y) + \frac{1}{2} \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle \langle X,Y\rangle = L(X,Y) \tag{2.1.13}$$

Consideremos agora a seguinte métrica em M

$$\bar{g} = e^{2\phi} g. \tag{2.1.14}$$

Afirmamos que $\bar{g}$ é flat em M. Com efeito, sejam R e $\bar{R}$ os tensores curvaturas de Riemann nas métricas g e $\bar{g}$ respectivamente. Pela proposição (1.2.4) sabemos que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle X,W\rangle \{\beta(Y,Z) + \\
&+ \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle \langle Y,Z\rangle\} - \langle Y,W\rangle\{\beta(X,Z) + \\
&+ \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle \langle X,Z\rangle\} + \langle Y,Z\rangle\, \beta(X,W) - \\
&- \langle X,Z\rangle\, \beta(Y,W) = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \\
&+ \langle X,W\rangle\{\beta(Y,Z) + \tfrac{1}{2} \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle\langle Y,Z\rangle\} - \\
&- \langle Y,W\rangle\{\beta(X,Z) + \tfrac{1}{2} \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle\langle X,Z\rangle\} + \\
&+ \langle Y,Z\rangle\{\beta(X,W) + \tfrac{1}{2} \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle\langle X,W\rangle\} - \\
&- \langle X,Z\rangle\{\beta(Y,W) + \tfrac{1}{2} \langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle\langle Y,W\rangle\}.
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Usando (2.1.13) em (2.1.15) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,Y)X,W\rangle &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle X,W\rangle\, L(Y,Z) - \\
&- \langle Y,W\rangle\, L(X,Z) + \langle Y,Z\rangle\, L(X,W) - \\
&- \langle X,Z\rangle\, L(Y,W)
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Mas de (2.1.6) segue-se que

$$\text{(2.1.17)}\qquad \langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle Y,W\rangle\, L(X,Z) - \langle X,W\rangle\, L(Y,Z) + $$
$$+ \langle X,Z\rangle\, L(Y,W) - \langle Y,Z\rangle\, L(X,W).$$

Portanto de (2.1.16) e (2.1.17) concluímos que $\bar{R} = 0$, isto é, $\bar{g}$ é flat como afirmamos, logo o teorema está provado.

(2.1.18) Teorema. *Seja* M *uma variedade Riemanniana de dimensão* $n \geq 4$ *com métrica* g. *Então as seguintes condições são equivalentes.*

(a) (M,g) *é conformemente plana*

(b) $C = 0$, *onde* C *é o tensor curvatura conforme de Weyl*

(c) $K_C = 0$, *onde* K_C *é a curvatura seccional com relação ao tensor* C.

(d) $\forall\, p \in M$, $K_C|_{\pi^{-1}(p)}$ *é constante, onde* π *é a projeção canônica do fibrado Grassmanniano dos 2-planos em* M.

(e) $\forall\, p \in M$, *e* $\forall$ *subespaço 4-dimensional* $W \subseteq T_pM$, *existe uma constante* $c = c(W)$ *tal que para quaisquer duas secções planas* σ_1 *e* σ_2 *mutuamente perpendiculares gerando* W, *temos*

$$K(\sigma_1) + K(\sigma_2) = c \qquad \textit{onde}$$

$K(\sigma_i)$, $i = 1,2$, *é a curvatura seccional Riemanniana da secção* σ_i,

(f) $\forall\, p \in M$, *e* $\forall$ *quadrúpla de vetores ortogonal* $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$

$$K_{12} + K_{34} = K_{13} + K_{24} ,$$

onde K_{ij} *é a curvatura seccional Riemanniana do plano gerado por*

$\{e_i, e_j\}$.

Prova. $a \Longleftrightarrow b$ é o teorema (2.1.2). $b \Longrightarrow c$ e $c \Longrightarrow d$ são óbvias. Vamos provar que $d \Longrightarrow c$. Com efeito, suponhamos que em $p \in M$, $K_C = k$, onde k é uma constante, então a curvatura escalar com relação ao tensor C, S_C em p, é dada por $S_C(p) = kn(n-1)$. Pelo corolário (1.1.12) $S_C \equiv 0$, como $n(n-1) \neq 0$ concluímos que $k = 0$, provando que $d \Longrightarrow c$.

(a) $\Longrightarrow$ (e) suponhamos que (M,g) é conformemente plana, assim dado $p \in M$, existe uma vizinhança V_p de p tal que $g|_{V_p} = e^{2\phi} g_o$, onde g_o é a métrica usual do $\mathbb{R}^n$ e ϕ é uma função real definida em V_p. Se R_o e R denotam os tensores curvaturas de Riemann com relação a g_o e g respectivamente, então pela proposição (1.2.4) obtemos

$$R(X,Y)Z = \{\beta(Y,Z) + \langle Y,Z\rangle_o \langle \operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\phi\rangle_o\}X - \{\beta(X,Z) + \langle X,Z\rangle_o \langle \operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\phi\rangle_o\}Y + \langle Y,Z\rangle_o FX - \langle X,Z\rangle_o FY,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle_o$ é o produto interno definido por g_o. Consideremos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ vetores ortonormais gerando W tais que $\{e_1, e_2\}$ gera σ_1 e $\{e_3, e_4\}$ gera σ_2, então

$$K(\sigma_1) = \langle R(e_1,e_2)e_1, e_2\rangle = -\{\beta(e_1,e_1) + \beta(e_2,e_2) + \langle \operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\phi\rangle_o\}.$$

Semelhantemente obtemos

$$K(\sigma_2) = -\{\beta(e_3,e_3) + \beta(e_4,e_4) + \langle \operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\phi\rangle_o\}.$$

Portanto,

$$K(\sigma_1) + K(\sigma_2) = -\left\{\sum_{i=1}^{4} \beta(e_i,e_i) + 2\langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle_0\right\}$$

$$= -\left\{ \mathrm{tr}\beta\big|_W + 2\langle \mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\phi\rangle_0\right\}.$$

Como $\mathrm{tr}\beta\big|_W$ não depende dos vetores ortonormais escolhidos, concluímos que $K(\sigma_1) + K(\sigma_2)$ é uma constante que depende apenas de W, logo $a \Longrightarrow e$.

É fácil ver que $(e \Longrightarrow f)$, vamos concluir o teorema provando que $f \Longrightarrow d$. Consideremos $\{e_1,\ldots,e_n\}$ um referencial ortonormal arbitrário em um ponto $p \in M$. É suficiente provarmos que $K_C(e_1,e_2) = K_C(e_1,e_3)$, onde $K_C(e_i,e_j)$ representa a curvatura seccional com relação ao tensor C do plano gerado por $\{e_i,e_j\}$. Com efeito, um cálculo direto nos diz que

$$K_C(e_1,e_2) = K_{12} - \frac{1}{(n-2)}\left\{\sum_{i\neq 1}^{n} K_{1i} + \sum_{i\neq 2}^{n} K_{2i}\right\} + \frac{S}{(n-1)(n-2)},$$

e

$$K_C(e_1,e_3) = K_{13} - \frac{1}{(n-2)}\left\{\sum_{i\neq 1}^{n} K_{1i} + \sum_{i\neq 3}^{n} K_{3i}\right\} + \frac{S}{(n-1)(n-2)},$$

onde K_{ij} representa a curvatura seccional Riemanniana do plano gerado por $\{e_i,e_j\}$ e S a curvatura escalar Riemanniana. Portanto,

$$K_C(e_1,e_2) - K_C(e_1,e_3) = (K_{12}-K_{13}) - \frac{1}{(n-1)}\left\{(K_{12} - K_{13}) + \sum_{i=4}^{n} (K_{i2} - K_{i3})\right\}.$$

Por hipótese $K_{i2} + K_{13} = K_{12} + K_{i3}$, para $i \geq 4$, isto é

$$K_{12} - K_{13} = K_{i2} - K_{i3} \quad ,$$

para $i \geq 4$. Concluímos então que

$$K_C(e_1,e_2) = K_C(e_1,e_3) \quad ,$$

provando o nosso teorema.

Observe que a parte (f) do teorema (2.1.18) implica no seguinte corolário:

(2.1.19) Corolário. *Toda variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 4$ com curvatura constante é conformemente plana.*

3 - HIPERSUPERFÍCIES CONFORMEMENTE PLANAS EM UMA VARIEDADE CONFORMEMENTE PLANA

(3.1) Caracterização de Hipersuperfícies Conformemente Planas Através da Segunda Forma Fundamental

(3.1.1) Definição. Uma imersão $X:M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+k}$ de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\bar{M}$ é uma imersão *conformemente plana* se a métrica induzida torna M uma variedade Riemanniana conformemente plana. Quando a codimensão $k = 1$, dizemos que M é uma hipersuperfície conformemente plana de $\bar{M}^{n+1}$.

Seja $X:M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\bar{M}$. Consideremos $p \in M$ e U_p uma vizinhança de p, escolhamos em U_p um campo diferenciável normal unitário N ao longo da restrição de $X|U \subset M \rightarrow \bar{M}$. Seja $A_N = A$ a aplicação auto-adjunta do espaço tangente associada à segunda forma fundamental e $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ os auto-valores de A.

(3.1.2) Teorema. *Seja M uma hipersuperfície de uma variedade Riemanniana conformemente plana $\bar{M}$, (com dimensão de $M = n \geq 4$). Então M é conformemente plana (localmente) se e somente se a matriz associada à segunda forma fundamental A_N com relação ao campo normal N possui um autovalor com multiplicidade $k \geq n-1$.*

Prova. Suponhamos que M é conformemente plana, seja $p \in M$ e $\{e_1,\dots,e_n\}$ um referencial ortonormal de T_pM tal que

$$Ae_i = \lambda_i e_i \quad , \quad i = 1,\dots,n.$$

Seja K_{ij} a curvatura seccional Riemanniana de M do plano gerado por $\{e_i, e_j\}$, então a equação de Gauss nos dá

$$(3.1.3) \qquad K_{ij} = \bar{K}_{ij} + \lambda_i\lambda_j \quad ,$$

onde $\bar{K}_{ij}$ representa a curvatura seccional Riemanniana de $\bar{M}$. Como M é conformemente plana temos da parte (f) do teorema (2.1.3) que para i,j,k e ℓ distintos

$$(3.1.4) \qquad K_{ij} + K_{k\ell} = K_{ik} + K_{j\ell}.$$

De (3.1.3) e (3.1.4) segue-se que

$$(3.1.5) \qquad \bar{K}_{ij} + \bar{K}_{k\ell} + \lambda_i\lambda_j + \lambda_k\lambda_\ell = \bar{K}_{ik} + \bar{K}_{j\ell} + \lambda_i\lambda_k + \lambda_j\lambda_\ell.$$

Usando que $\bar{M}$ é conformemente plana em (3.1.5) obtemos

$$(3.1.6) \qquad \lambda_i = \lambda_\ell \quad \text{ou} \quad \lambda_j = \lambda_k.$$

Assumamos que $\lambda_i = \lambda_\ell$, usando (3.1.3) e (3.1.5) obtemos

$$(3.1.7) \qquad \lambda_i = \lambda_j = \lambda_\ell$$

Repetindo o argumento $(n!)/(4!(n-4)!)$ vezes concluímos que $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = \dots = \lambda_{n-1}(p)$, provando a primeira parte do teorema.

Reciprocamente, seja $p \in M$ e $\{v_1,\ldots,v_n\}$ um referencial ortonormal de T_pM tal que ocorra o seguinte:

$$(3.1.8)\qquad Av_i = \lambda v_i, \quad i=1,\ldots,n \quad \text{e} \quad Av_n = \mu v_n \quad ,$$

com λ não necessariamente igual a μ.

Consideremos quatro vetores ortonormais $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ em T_pM, pela parte (f) do teorema (2.1.3) é suficiente provarmos que

$$(3.1.9)\qquad K_{12} + K_{34} = K_{13} + K_{24} \quad ,$$

onde K_{ij} representa a curvatura seccional Riemanniana do plano gerado por $\{e_i,e_j\}$. Com efeito, escrevamos

$$(3.1.10)\qquad e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \quad , \quad i=1,\ldots,4.$$

Como $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$, $i=1,\ldots,4$ e $a_{i1}a_{k1}+\ldots+a_{in-1}a_{kn-1} = -a_{in}a_{kn}$, pela equação de Gauss obtemos

$$(3.1.11)\qquad \bar{K}_{ij} = K_{ij} + \lambda(\lambda-\mu)(a_{in}^2 + a_{jn}^2) - \lambda^2 \quad ,$$

onde $\bar{K}_{ij}$ é a curvatura seccional Riemanniana da $\bar{M}$. Mas $\bar{M}$ é conformemente plana, então vale o seguinte:

$$(3.1.12)\qquad \bar{K}_{12} + \bar{K}_{34} = \bar{K}_{13} + \bar{K}_{24}.$$

Finalmente, de (3.1.11) e (3.1.12), obtemos que

$$K_{12} + K_{34} = K_{13} + K_{24} \quad ,$$

provando o que queríamos.

(3.2) Hipersuperfícies Conformemente Planas em Posição Geral do $\mathbb{R}^{n+1}$

(3.2.1) Definição. Seja M^n uma variedade diferenciável conexa de dimensão n e $X: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que X é uma *hipersuperfície conformemente plana em posição geral* do $\mathbb{R}^{n+1}$ se em cada ponto $p \in M$, os autovalores da segunda forma fundamental A_N, relativa ao campo normal unitário N escolhido numa vizinhança U_p de p, satisfazem

$$\lambda_1(p) = \lambda_1(p) = \ldots = \lambda_{n-1}(p) \equiv \lambda_{(p)} \neq 0 \qquad \text{e}$$

$$\lambda_n(p) \equiv \mu(p) \neq \lambda(p)$$

(3.2.2) Definição. Uma subvariedade umbílica Σ de uma variedade Riemanniana M é dita uma *esfera extrínsica* se possui vetor curvatura média paralelo na conexão normal.

(3.2.3) Obs: Segue-se da proposição 7.3-pg-128- [10], que quando M possui curvatura constante, toda subvariedade umbílica V de M é uma esfera extrínsica.

(3.2.4) Definição. Uma variedade Riemanniana M é dita *totalmente não-isotrópica* se em nenhum ponto $p \in M$ todas as curvaturas seccionais Riemannianas são iguais.

É claro que a métrica induzida de uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$ é totalmente não-isotrópica.

(3.2.5) Definição. Uma esfera extrínsica Σ de uma variedade Riemanniana M é dita uma *esfera geométrica* se as curvaturas seccionais Riemannianas de M ao longo de $T\Sigma$ são constantes positivas em Σ.

(3.2.6) Teorema. *Seja* $n \geq 4$. *Uma condição necessária e suficiente para uma variedade Riemanniana* M^n *conformemente plana, totalmente não-isotrópica, ser localmente imersa isometricamente como uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e que* M *seja localmente folheada por esferas geométricas de codimensão um.*

Prova. Provaremos primeiro que a condição é necessária. Com efeito, seja $X: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$, escolhamos em cada ponto $p \in M$ uma vizinhança U_p e uma orientação local N. Seja A_N a aplicação de T_pM associada à segunda forma fundamental. Sejam D_λ e D_μ as distribuições locais associadas aos autovalores λ e μ respectivamente, ou seja,

$$D_\lambda = \{v \in T_pM : A_N(v) = \lambda v\} \quad ,$$

e

$$D_\mu = \{w \in T_pM : A_N(w) = \mu w\}.$$

Como D_λ e D_μ não dependem da orientação local N, elas estão definidas em toda M. Pela proposição 2.3-pg-372 - [11] D_λ e D_μ são diferenciáveis e involutivas, e além disto, o autovalor λ é constante ao longo de cada folha F_λ de D_λ.

Assim podemos escolher coordenadas locais $(u_1, u_2, u_3, u_4, \dots u_{n-1}, t)$ numa vizinhança de cada ponto $p \in M$ tais que os vetores coordenados $V_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$ e $T = \frac{\partial}{\partial t}$ satisfazendo o seguinte:

$$(3.2.7) \qquad \begin{cases} A_N(V_i) = \lambda V_i = - \bar{\nabla}_{V_i} N \\ A_N(T) = \mu T = - \bar{\nabla}_T N \end{cases} \qquad \text{e}$$

onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão canônica do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Se R representa o tensor curvatura de Riemann do $\mathbb{R}^{n+1}$ sabemos que

$$(3.2.8) \qquad R(T,V_i)N = \bar{\nabla}_{V_i} \bar{\nabla}_T N - \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_{V_i} N = 0.$$

Como $\lambda \neq \mu$ usando (3.2.7) em (3.2.8), obtemos

$$(3.2.9) \qquad \bar{\nabla}_T V_i = - \frac{\lambda'}{\lambda - \mu} V_i + \frac{V_i(\mu)}{\lambda - \mu} T ,$$

onde $\lambda' = T(\lambda)$.

Consideremos a folha $F_\lambda \subset M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sejam ∇ sua conexão induzida e $\bar{A}_\xi$ a matriz associada à segunda forma fundamental relativa ao campo normal ξ de F_λ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja α tal que $||T|| = \alpha^{-1}$.

De (3.2.7),(3.2.8) e da fórmula de Weingarten, obtemos

$$(3.2.10)\quad \begin{cases} \bar{\nabla}_{V_i} N = - A_N(V_i) = - \lambda V_i \\ \bar{\bar{\nabla}}_{V_i} N = - \bar{A}_N(V_i) + \nabla^{\perp}_{V_i} N \\ \bar{\nabla}_{V_i}(\alpha T) = - \dfrac{\alpha\lambda'}{\lambda-\mu} V_i + \left(\dfrac{\alpha V_i(\mu)}{\lambda - \mu} + V_i(\alpha) \right) T \\ \bar{\bar{\nabla}}_{V_i}(\alpha T) = - \bar{A}_{\alpha T} V_i + \nabla^{\perp}_{V_i} (\alpha T) \quad , \end{cases}$$

donde concluímos que

$$(3.2.11)\qquad \bar{A}_N(V_i) = \lambda V_i \quad e \quad \bar{A}_{\alpha T}(V_i) = \frac{\alpha\lambda'}{\lambda-\mu} V_i \quad ,$$

ou seja, F_λ é uma subvariedade umbílica do $\mathbb{R}^{n+1}$, o teorema 8.6-pg-146- [10] , nos diz que F_λ é parte de uma (n-1)-esfera com curvatura β^2, contida em um hiperplano do $\mathbb{R}^{n+1}$. Logo, podemos determinar vetores ortonormais ξ e $\xi^{\perp}$ no plano gerado por $\{T,N\}$ tais que a matriz $\bar{A}$ associada a segunda forma fundamental de F_λ no $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfaça:

$$(3.2.12) \text{ -- } \quad \bar{A}_\xi V_i = \beta V_i \quad e \quad A_{\xi^{\perp}} V_i = 0 \quad , \quad i= 1,\ldots,n-1.$$

Escrevendo $\xi = a(\alpha T) + bN$ e $\xi^{\perp} = b(\alpha T) - aN$, obtemos

$$(3.2.13)\quad \begin{cases} \xi = ((\lambda'\alpha)/\beta(\lambda-\mu))\alpha T + (\lambda|\beta)N \\ \xi^{\perp} = (\lambda|\beta)\alpha T - ((\lambda'\alpha)/\beta(\lambda-\mu))N \\ \beta = ((\lambda'^2 \alpha^2)/(\lambda-\mu)^2 + \lambda^2)^{1/2} \quad . \end{cases} \quad e$$

Como λ e β são constantes ao longo de F_λ segue-se de (3.2.13) que $(\lambda'\alpha)/(\lambda-\mu)$ o é. De (3.2.11) obtemos que o módulo do vetor curvatura média H de F_λ em M é dado por

$$\|H\| = |(\lambda'\alpha)/(\lambda-\mu)| \qquad (3.2.14)$$

,

que é constante em F_λ, como F_λ é uma subvariedade umbílica de M a definição (3.2.2) nos diz que F_λ é uma esfera extrínsica. Por outro lado da equação de Gauss sabemos que

$$K_{ij} = \tilde{K}_{ij} + (\alpha\lambda')^2/(\lambda-\mu)^2 \qquad (3.2.15)$$

onde K_{ij} representa a curvatura seccional de F_λ, como $K_{ij} = \beta^2$ de (3.2.13) e (3.2.15) concluímos que curvatura seccional de M ao longo de F_λ é $\lambda^2 > 0$, que é uma constante positiva, logo F_λ é uma esfera geométrica. Provando que a condição do teorema é necessária. Se M for completa o teorema (1-v)-pg-08-[09] diz que cada folha também é completa.

Provaremos, agora que a condição é suficiente. Uma maneira natural é exibir uma matriz A para a segunda forma fundamental, e verificar que A satisfaz as condições do teorema fundamental para hipersuperfícies, veja por exemplo o teorema 7.1-pg-47-[08] - IIv.

Por hipótese, M é localmente folheada por esferas geométricas de codimensão um, escolhamos um referencial ortonormal adaptado $e_1,\ldots,e_{n-1},e_n$ em um aberto U de M. Consideremos $i,j,k,\ell \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ e K_{ij} a curvatura seccional Riemanniana de M, ao longo do plano gerado por $\{e_i,e_j\}$. Denotemos por $\bar{A}_{e_n}$ a matriz associada à segunda forma fundamental da folha com relação ao campo normal unitário e_n. Como as folhas são esferas extrínsicas

$$\bar{A}_{e_n} = \gamma I \quad , \tag{3.2.16}$$

onde γ é uma constante ao longo de cada fôlha e I é a (n-1)-matriz identidade. Além disto, K_{ij} é uma constante positiva ao longo de cada folha, digamos $K_{ij} = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$.

Portanto, um candidato natural para a matriz A associada à segunda forma fundamental no referencial $e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n$ será a seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \mu \end{pmatrix} \tag{3.2.17}$$

onde $\lambda = \sqrt{K_{ij}}$ e μ será determinado.

(3.2.18) Lema. *Seja* K_{in} *a curvatura seccional Riemanniana da* M *ao longo do plano gerado por* $\{e_i, e_n\}$ *Então,* K_{in} *não depende de* i.

Prova do Lema. Sejam i,j,k e n índice distintos. Como M é conformemente plana pela parte (f) do teorema (2.1.3), obtemos

$$K_{kj} + K_{in} = K_{kn} + K_{ji} = K_{ik} + K_{jn}$$

ou equivalentemente,

$$K_{in} - K_{ij} = K_{kn} - K_{jk} \ , \quad K_{jn} - K_{kn} = K_{ij} - K_{ik}$$

e $$K_{in} - K_{ik} = K_{jn} - K_{jk} \quad ,$$

isto é, $K_{in} - K_{ij}$, $K_{ij} - K_{ik}$ e $K_{in} - K_{ik}$ não dependem de (i), consequentemente K_{in} não depende de (i), provando o Lema.

Sejam μ dado por $K_{in} = \lambda\mu$ e A a matriz dada por (3.2.17).

(3.2.19) Lema. *A satisfaz as equações de Gauss e Codazzi.*

Prova. Primeiro verificaremos a equação de Gauss, a saber:

$$K_{ij} = \langle Ae_i, e_i\rangle \langle Ae_j, e_j\rangle - \langle Ae_i, e_j\rangle^2 \tag{3.2.20}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ determina o produto interno definido pela métrica g de M. Pela escolha da matriz A no referencial $e_1, \ldots, e_n$ e pela definição de μ esta equação é trivialmente satisfeita. Portanto, resta-nos provarmos as equações de Codazzi, ou seja,

$$\begin{cases} (\nabla_{e_j} A)e_i = (\nabla_{e_i} A)e_j \\ (\nabla_{e_j} A)e_n = (\nabla_{e_n} A)e_j \end{cases} \tag{3.2.21}$$

onde ∇ representa a conexão Riemanniana da M.

Para provarmos (3.2.21) precisaremos do Lema seguinte

(3.2.22) Lema. *Seja L o tensor em M dado por*

$$L(X,Y) = \frac{1}{(n-2)} \left\{ Ric(X,Y) - \frac{S\langle X,Y\rangle}{2(n-1)} \right\} \quad ,$$

onde Ric e S representam o tensor de Ricci e a curvatura escalar com relação ao tensor curvatura de Riemann. Então L satisfaz:

(a) $L(e_i,e_j) = 0$ se $i \neq j$

(b) $L(e_i,e_n) = 0$

(c) $L(e_i,e_i) = \lambda^2/2$

(d) $L(e_n,e_n) = \lambda\mu - \lambda^2/2$

<u>Prova</u>. (a) Por hipótese M é conformemente plana, então o teorema (2.1.2) nos dá que

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = L(X,Z)\langle Y,W\rangle - L(Y,Z)\langle X,W\rangle + L(Y,W)\langle X,Z\rangle - L(X,W)\langle Y,Z\rangle. \tag{3.2.23}$$

Como M é folheada por esferas geométricas, pela proposição 3.4-pg-84- [01] e da equação de Gauss, obtemos que

$$\langle R(e_i,e_k)e_j,e_k\rangle = 0 \quad , \tag{3.2.24}$$

para $i \neq j$ e $k = 1,\dots,n-1$.

Assim das equações (3.2.23) e (3.2.24), obtemos

$$\mathrm{Ric}(e_i,e_j) = \sum_{s=1}^{n} \langle R(e_i,e_s)e_j,e_s\rangle = \langle R(e_i,e_n)e_j,e_n\rangle =$$

$$= L(e_i,e_j) = \frac{1}{(n-2)}\mathrm{Ric}(e_i,e_j) \quad ,$$

se $i \neq j$, como $n \geq 4$ concluímos que $\mathrm{Ric}(e_i,e_j) = 0$, e consequentemente $L(e_i,e_j) = 0$, que é a parte (a) do Lema.

(b) Como $\bar{A}_{e_n} e_j = -\nabla_{e_j} e_n = \gamma e_j$, onde γ é constante ao longo de cada folha, obtemos que

$$R(e_i,e_k)e_n = \nabla_{e_k}\nabla_{e_i} e_n - \nabla_{e_i}\nabla_{e_k} e_n + \nabla_{[e_i,e_k]} e_n$$

$$= \gamma[e_i,e_k] - \bar{A}_{e_n}[e_i,e_k] = 0 \quad ,$$

Logo,

$$Ric(e_i,e_n) = \sum_{s=1}^{n-1} \langle R(e_i,e_s)e_n,e_s\rangle = 0 \quad ,$$

provando a parte (b) do Lema.

(c) Para a parte (c) precisamos calcular a curvatura escalar, um cálculo utilizando a definição nos dá que:

$$Ric(e_i,e_i) = (n-2)\lambda^2 + \lambda\mu$$

e

$$Ric(e_n,e_n) = (n-1)\lambda\mu \quad ,$$

Portanto a curvatura escalar S será dada por

$$S = \sum_{s=1}^{n} Ric(e_s,e_s) = \sum_{i=1}^{n-1} Ric(e_i,e_i) + Ric(e_n,e_n)$$

$$= (n-1)\{(n-2)\lambda^2 + 2\lambda\mu\}.$$

Pela definição de L obtemos

$$L(e_i,e_i) = \frac{1}{(n-2)} \left\{ Ric(e_i,e_i) - \frac{S\langle e_i,e_i\rangle}{2(n-1)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n-2)}\left\{(n-2)\lambda^2 + \lambda\mu - \frac{(n-1)\left[(n-2)\lambda^2 + 2\lambda\mu\right]}{2(n-1)}\right\}$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} .$$

A parte (d) segue-se semelhantemente, logo o Lema está provado.

Provaremos agora, as equações de Codazzi, sejam v e w definidos por:

$$v = (\nabla_{e_j} A)e_i - (\nabla_{e_i} A)e_j \quad ,$$

$$w = (\nabla_{e_j} A)e_n - (\nabla_{e_n} A)e_j \quad .$$

Observemos que é suficiente provarmos que $v = 0$ e $w = 0$. Com efeito, como $\bar{A}_{e_n} e_j = \gamma e_j = -\nabla_{e_j} e_n$, obtemos que

$$<\nabla_{e_j} e_i, e_n> = <e_i, -\nabla_{e_j} e_n> = \gamma<e_i, e_j> \quad ,$$

assim a e_S- componente de v será dada por

$$<v, e_S> = <A\left[e_i, e_j\right] - \lambda\left[e_i, e_j\right], e_S> =$$

$$= <\left[e_i, e_j\right], Ae_S> - \lambda<\left[e_i, e_j\right], e_S> \quad ,$$

pois $Ae_i = \lambda e_i$ e $e_i(\lambda) = 0$.

Logo $<v, e_S> = 0$ para $S = 1, \ldots, n$, isto é, $v = 0$. Resta-nos provarmos que $w = 0$, observemos que a e_S-componente de w será dada por

$$<w,e_S> = <\mu \nabla_{e_j} e_n + e_j(\mu)e_n - \lambda \nabla_{e_n} e_j - e_n(\lambda)e_j +$$

$$+ A(\nabla_{e_n} e_j - \nabla_{e_j} e_n), e_S>.$$

Por outro lado, sabemos que:

$$< \nabla_{e_j} e_n, e_n> = <\nabla_{e_n} e_j, e_j> = 0 ,$$

$$< \nabla_{e_j} e_n , e_n> = \mu<\nabla_{e_j} e_n, e_n> ,$$

$$<\nabla_{e_j} e_n, e_k> = -<\nabla_{e_j} e_k, e_n> = \gamma<e_j, e_k> ,$$

portanto as e_k-componente e e_n-componente de w serão respectivamente

(3.2.25) $$<w,e_k> = (\gamma(\lambda-\mu) - e_n(\lambda))\delta_{jk}$$

(3.2.26) $$<w,e_n> = e_j(\mu) - (\lambda-\mu) <\nabla_{e_n} e_j, e_n> .$$

De (2.1.8) sabemos que o tensor L do Lema (3.2.22) satisfaz a seguinte equação:

(3.2.27) $$(\nabla_X L)(Y,Z) = (\nabla_Y L)(X,Z).$$

Na equação (3.2.27) façamos $X = e_n$, $Y = Z = e_i$ e obtemos que

(3.2.28) $$e_n(L(e_i, e_i)) = 2L(\nabla_{e_n} e_i, e_i) - L(\nabla_{e_i} e_i, e_n) -$$

$$- L(\nabla_{e_i} e_n, e_i).$$

Uma simples computação utilizando (3.2.23) nos dá

(3.2.29) $$2L(\nabla_{e_n} e_i,e_i) - L(\nabla_{e_i} e_i,e_n) - L(\nabla_{e_i} e_n,e_i) =$$

$$= <\nabla_{e_i} e_n,e_i> (L(e_n,e_n) - L(e_i,e_i)),$$

logo, do Lema (3.2.22) e da equação (3.2.28) segue-se que

$$\lambda(e_n(\lambda) - \gamma(\lambda-\mu)) = 0 \quad ,$$

como $\lambda \neq 0$ temos que $e_n(\lambda) - \gamma(\lambda-\mu) = 0$, isto é, a e_k-componente de w é zero.

Semelhantemente, na equação (3.2.27) façamos $X=Z=e_n$ e $Y=e_i$ para obtermos

(3.2.30) $$e_i(L(e_n,e_n)) = <\nabla_{e_n} e_i,e_n>(L(e_i,e_i) - L(e_n,e_n)),$$

como $e_j(\lambda) = 0$ e $\lambda \neq 0$, o Lema (3.2.22) aplicado a esta equação nos dá que $e_j(\mu) - (\lambda-\mu)<\nabla_{e_n} e_j,e_n> = 0$, ou seja, a e_n-componente de w é zero, portanto $w = 0$, provando o teorema.

(3.2.31) Obs: Se uma variedade Riemanniana M for folheada por esferas geométricas e satisfaz o Lema (3.2.18), a parte (f) do teorema (2.1.18) implica que M é conformemente plana.

(3.2.32) Obs: No teorema (3.2.6), se $K_{ij} > c$, $c \in \mathbb{R}$, e fixarmos a outra condição, então fazendo

$$\lambda = \sqrt{K_{ij} - c} \qquad e \qquad \mu = (K_{in} - c)/\lambda$$

na matriz A, obtemos que M pode ser localmente imersa isometricamente em $M^{n+1}(c)$.

No que se segue daremos uma descrição completa de uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, veremos que ela descreve um invólucro de uma família a um-parâmetro de esferas.

(3.2.33) Sejam I um intervalo real, $c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva imersa no $\mathbb{R}^{n+1}$ e $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real diferenciável e positiva tal que

$$|r'(t)| < \|c'(t)\| \quad , \quad \forall \quad t \in I.$$

Sejam $A, R : I \to \mathbb{R}$ dados por

$$A(t) = r(t)\, r'(t)/\, \|c'(t)\|$$

$$R(t) = r(t)\, (1 - r'(t)^2/\, \|c'(t)\|)^{1/2} .$$

Para cada $t \in I$, consideremos o hiperplano afim H_t do $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal a $c'(t)$ e passando por $\alpha(t) = c(t) - A(t)\, c'(t)$. Em H_t tomemos uma $(n-1)$-esfera Σ_t^{n-1} com raio $R(t)$ e centro $\alpha(t)$. Quando t percorre todo o intervalo I, Σ_t^{n-1} descreve um conjunto que é o conjunto imagem da aplicação $y : I \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\text{(3.2.34)} \qquad y(t,p) = \alpha(t) + R(t)\phi(t,p) = c(t) - A(t)c'(t) + R(t)\phi(t,p) ,$$

$t \in I$, $p \in S^{n-1}$,

onde S^{n-1} é uma (n-1)-esfera unitária fixa no $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\phi : I \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é qualquer aplicação diferenciável, tal que, para cada t fixo, ϕ_t é uma imersão de S^{n-1} em $\mathbb{R}^{n+1}$ que satisfaz

$$<\phi_t \, , \, c'(t)> = 0 \qquad \text{e} \qquad \| \phi_t \| = 1.$$

Observemos que qualquer ϕ satisfazendo as condições anteriores, a imagem de y permanecerá a mesma. Além disto, é fácil ver que se mudarmos o parâmetro t para $s = s(t)$ (com $ds/dt \neq 0$), então a condição $|r'| < \| c' \|$ e o conjunto imagem de y não serão modificados.

(3.2.35) Teorema. *Suponhamos que y dada por (3.2.34) é uma hipersuperfície imersa. Então y é uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$. Reciprocamente, toda hipersuperfície conformemente plana em posição geral $X : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, é localmente da forma y, além disto, se M é orientável, $X(M)$ está contida na imagem de uma hipersuperfície da forma y.*

<u>Prova</u>. Vamos provar que y dada em (3.2.34) é uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$. Com efeito, como $<\phi \, , c'> = 0$, obtemos que

$$<y - c, \; y - c> \; = \; r^2. \tag{3.2.36}$$

Escolhamos coordenadas ortogonais $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ para S^{n-1} e derivemos (3.2.36) em relação à t e u_i, $i = 1, \ldots, n-1$ para obtermos

(3.2.37) $$< \frac{\partial y}{\partial t} - c' \quad , \quad y - c > \; = \; rr'$$ e

(3.2.38) $$< \frac{\partial y}{\partial u_i} \quad , \quad y - c > \; = 0.$$

Como $<y - c, c'> = - rr'$, (3.2.37) implica que

(3.2.39) $$< \frac{\partial y}{\partial t} \; , \; y - c > \; = \; 0.$$

Portanto de (3.2.38) e (3.2.39) obtemos que o vetor unitário N dado por

(3.2.40) $$y - c = r N \quad ,$$

é normal à y.

Seja $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n, e_{n+1}$ um referencial ortonormal dado por

$$e_i = \frac{\partial}{\partial u_i} \left\| \frac{\partial}{\partial u_i} \right\|^{-1} \quad , \quad i = 1, \ldots, n-1, \; e_n, \; e_{n+1} = N \; ,$$

onde u_i são coordenadas ortogonais da esfera unitária S^{n-1}.

Seja A_N a matriz associada à segunda forma fundamental com relação ao campo normal unitário N. Como $\frac{\partial y}{\partial u_i} = r \frac{\partial N}{\partial u_i}$ segue-se que

$$A_N(e_i) = \frac{1}{r} e_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n-1 \; ,$$

logo pelo teorema (3.1.2) y é uma hipersuperfície conformemente plana com $\lambda = - r^{-1} \neq 0$ como autovalor de A_N e multiplicidade $k \geq (n-1)$. Por hipótese $\|c'\| > |r'|$, então a equação (3.2.43) mostra que o autovalor μ dado por $A_N(e_n) = \mu e_n$ satisfaz $\lambda \neq \mu$, portanto y é uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$, provando a primeira parte do teorema.

Reciprocamente, seja $X : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conformemente plana em posição geral do $\mathbb{R}^{n+1}$. Dado $p \in M$ escolhamos uma vizinhança U_p de p, tal que o sistema de coordenadas considerado na demonstração do teorema (3.2.6) esteja definido em U_p. Escolhamos também uma orientação N em U_p tal que $\lambda < 0$. Seja c definida em U_p por

$$c(u_1, \ldots, u_{n-1}, t) = X + \lambda^{-1} N. \tag{3.2.41}$$

Como $\bar{\nabla}_{V_i} c = \bar{\nabla}_{V_i} X + \lambda^{-1} \bar{\nabla}_{V_i} N = V_i - V_i = 0$ em U_p, temos que $c = c(t)$ apenas. Seja $r(t) = -\lambda^{-1}$, mas $V_i(\lambda) = 0$, assim r é uma função positiva de t. Por outro lado, de (3.2.41) obtemos

$$c' = \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\lambda'}{\lambda^2} N + \frac{1}{\lambda} \bar{\nabla}_T N = \frac{\lambda(\lambda-\mu)T - \lambda' N}{\lambda^2} \tag{3.2.42}$$

pois $\dfrac{\partial X}{\partial t} = T$ e $\nabla_T N = \mu T$.

Como $\|T\| = \alpha^{-1}$ segue-se que

$$\|c'\|^2 = (\lambda-\mu)^2 \alpha^{-2} \lambda^{-2} + |r'|^2 , \tag{3.2.43}$$

portanto $\|c'\| > |r'|$ se e somente se $\lambda \neq \mu$. Assim a curva c e a função r satisfazem as condições impostas em (3.2.33).

Por outro lado, o vetor $\xi = \dfrac{\lambda\alpha}{\beta(\eta-\mu)}\alpha T + \dfrac{\lambda}{\beta}N$ dado em (3.2.13) é ortogonal a c', isto é,

$$< c' , \xi > = 0.$$

Como o raio da esfera que contém F_λ é dado por

$$(3.2.44) \qquad \frac{1}{\beta} = \left[\frac{\lambda'^2 \alpha}{(\lambda-\mu)^2} + \lambda^2 \right]^{1/2} = r \left[1 - \frac{(r')^2}{\|c'\|^2} \right]^{1/2},$$

onde F_λ é a folha da folheação dada no teorema (3.2.5). De (3.2.44) a distância de $c(t)$ ao centro da esfera que contém F_λ é $|rr'|/\|c'\|$, assim a restrição de X à U é obtida de $c(t)$ e $r(t)$ precisamente como em (3.2.33), pois a distância de $c(t)$ à $\alpha(t)$ em (3.2.33) é igual a $(|rr'|)/\|c'\|$. Portanto X é localmente da forma (3.2.34).

Agora se X for orientável (3.2.41) implica que a curva $c(t)$ e a função $r(t)$ estão definidas em toda M. Como as condições $c'(t) \neq 0$ e $\|c'(t)\| > |r'(t)|$ não dependem do parâmetro t, podemos considerar c parametrizada pelo comprimento de arco, obtemos uma superfície y, tal que, localmente a imagem de X está contida na imagem de y. O mesmo raciocínio vale globalmente;portanto concluímos a prova do teorema.

Consideremos agora $(t,p) \in I \times S^{n-1}$, escolhamos $(u_1, u_2,\ldots,u_{n-1})$ coordenadas ortogonais numa vizinhança V_p de $p \in S^{n-1}$. De (3.2.38) e (3.2.39) sabemos que

$$< \frac{\partial y}{\partial u_i}, y-c > = 0 \quad , \quad < \frac{\partial y}{\partial t}, y-c > = 0 \quad \text{e} \quad y-c \neq 0.$$

Então $(t,p) \in I \times S^{n-1}$ é um ponto singular para y se e somente se $y' = 0$. Consequentemente temos a seguinte proposição:

(3.2.45) Proposição. *Seja* y *dada em* (3.2.34). *Um ponto* $(t,p) \in I \times S^{n-1}$ *é singular para* y *se e somente se as condições seguintes são satisfeitas:*

(a) $$1 - A' = \frac{1}{\|c'\|}\{R<\phi, c'> + A<c', c''>\}$$

(b) $$R' = A<c'', \phi>.$$

É fácil ver que a condição (a) *implica* (b), *e se* $A \neq 0$ (i.é., se $r' \neq 0$) *elas são equivalentes. Além disto* (a) *pode ser escrita como*

$$(3.2.46) \qquad \|c'\|^2 - r'^2 - rr' + A<c', c''> = R<\phi, c''>.$$

<u>Prova</u>. Seja $(u_1, \ldots, u_{n-1}, t)$ um sistema de coordenadas tal que $<\frac{\partial y}{\partial u_i}, y'> = 0$. Como

$$y = c - Ac' + R\phi$$

obtemos que

$$(3.2.47) \qquad \begin{cases} y' = (1 - A')c' - Ac'' + R\phi' + R'\phi \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u_i} = R\dfrac{\partial \phi}{\partial u_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Derivando com relação a u_i, $<\phi,\phi> = 1$ e $<\phi,c'> = 0$, obtemos

(3.2.48) $$<\frac{\partial\phi}{\partial u_i}, \phi> = 0 \quad e \quad <\frac{\partial\phi}{\partial u_i}, c'> = 0,$$

pois c depende apenas de t. Como $<\frac{\partial y}{\partial u_i}, y'> = 0$ de (3.2.47) e (3.2.48) obtemos que

(3.2.49) $$<R\phi' - Ac'', \frac{\partial\phi}{\partial u_i}> = 0 , \quad i= 1,\dots,n-1,$$

então $R\phi' - Ac''$ é ortogonal a $\frac{\partial\phi}{\partial u_i}$ $\forall i$, logo

$$R\phi' - Ac'' = a_1\phi + a_2c' ,$$

onde a_1 e a_2 são escalares. Uma simples computação nos dá que

$$a_1 = - A <\phi , c''> \quad e \quad a_2 = < -R\phi - Ac',c'' > \cdot \frac{1}{\|c'\|^2} .$$

Portanto concluímos que

(3.2.50) $$y' = \left(1 - A' - \frac{R<\phi,c''>}{\|c'\|^2} - \frac{A<c',c''>}{\|c'\|^2} \right)c' +$$

$$+ (R' - A <c'',\phi>)\phi ,$$

logo, $y' = 0$ se e somente se

$$(1 - A') = \frac{1}{\|c'\|^2} \{R<\phi,c''> + A <c',c''>\}$$

e

$$R' = A <c'' , \phi > .$$

isto é, ocorrem (a) e (b).

Calculando as derivadas de R e A obtemos respectivamente

(3.2.51) $$RR' = A(\|c'\|^2 - (r')^2 - rr'' + A\langle c', c''\rangle) \quad \text{e}$$

(3.2.52) $$(1 - A')\|c'\|^2 = \|c'\|^2 - (r')^2 - rr' + 2A\langle c', c''\rangle .$$

Donde obtemos que

$$RR' = A\{(1 - A')\|c'\|^2 - A\langle c', c''\rangle\} ,$$

portanto, se ocorre (a), ou seja, $(1-A')\|c'\|^2 = R\langle \phi, c''\rangle + A\langle c', c''\rangle$, concluímos que

$$RR' = AR\langle \phi, c''\rangle ,$$

isto é, ocorre (b). Suponhamos agora que $A \neq 0$ e $R' = A\langle \phi, c''\rangle$, assim de (3.2.51) temos que

$$\|c'\| - (r')^2 - rr'' + A\langle c', c''\rangle = R\langle \phi, c''\rangle ,$$

e de (3.2.52) concluímos que

$$(1 - A')\|c'\|^2 = R\langle \phi, c''\rangle + A\langle c', c''\rangle ,$$

Provando que ocorre (a).

Como $(1 - A')\|c'\|^2 = \|c'\|^2 - (r')^2 - rr'' + 2A\langle c', c''\rangle$, segue-se facilmente que (a) pode ser escrita da seguinte maneira:

(3.2.53) $$\|c'\|^2 - (r')^2 - rr'' + A\langle c',c''\rangle = R\langle\phi,c''\rangle .$$

Resta-nos provarmos que as condições (a) e (b) não dependem do parâmetro t. Provaremos (a); (b) seguir-se-á semelhantemente. Com efeito, seja $s = s(t)$ (com $ds/dt \neq 0$), $c(t) = \tilde{c}(s(t))$ e $r(t) = \tilde{r}(s(t))$. Observemos que $R(t) = \tilde{R}(s(t))$ e $A(t)\cdot\frac{ds}{dt} = \tilde{A}(s(t))$. Como

$$(1 - A') = \frac{1}{\|c'\|^2}\{R\langle\phi,c''\rangle + A\langle c',c''\rangle\} ,$$

obtemos que

$$1 - \tilde{A}'(s) + \frac{\tilde{A}(s)}{(\frac{ds}{dt})^2}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{\|\tilde{c}'\|^2}\cdot\frac{1}{(\frac{ds}{dt})^2}\left\{\tilde{R}\langle\tilde{\phi},\tilde{c}''\cdot(\frac{ds}{dt})^2 + \tilde{c}'\frac{d^2s}{dt^2}\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{A}}{(\frac{ds}{dt})}\langle\tilde{c}'\frac{ds}{dt} , \tilde{c}''(\frac{ds}{dt})^2 + \tilde{c}'\frac{d^2s}{dt^2}\rangle\right\} ,$$

donde, concluímos que

$$(1 - \tilde{A}') = \frac{1}{\|\tilde{c}'\|^2}\{\tilde{R}\langle\tilde{\phi},\tilde{c}\rangle + \tilde{A}\langle\tilde{c}',\tilde{c}''\rangle\} ,$$

ou seja, (a) não depende das parametrizações de c e r, logo a proposição está provada.

(3.2.54) Obs: A primeira parte do teorema (3.2.35) com a proposição (3.2.45) podem ser usàdas para construirmos exemplos de hipersuperfície conformemente plana. Por exemplo, se c é uma reta, a curva $\alpha(t) = c - Ac'$ também o é, obtemos uma hipersuperfície de rotação. Se r é uma constante pequena obtemos um tubo ao longo de c.

Existe uma classificação para hipersuperfície conformemente plana no $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, dada por Kulkarni,R. em [5] e independentemente por Nishikawa, S. e Maeda,Y. em [7]. Esta classificação nos diz que localmente uma hipersuperfície conformemente plana do $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, é ou um tubo, ou uma hipersuperfície de rotação ou uma hipersuperfície plana. A seguir daremos um contra exemplo para tal classificação.

(3.2.55) Contra-Exemplo. Seja $(x_1,\ldots,x_n)$ coordenadas cartesianas no $\mathbb{R}^n$. No plano x_1x_2, escolhamos um círculo $c(s)$ centrado na origem e com raio $L > 1$. Suponhamos que $\|c'(s)\|=1$ e seja $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r(s) = \beta^{-1} \operatorname{sen}(s/L) + 1 ,$$

onde β é um real maior do que 1. É claro que $\| c' \| > | r' |$. Afirmamos que se L é suficientemente grande, a hipersuperfície y dada em (3.2.34) é uma hipersuperfície compacta conformemente plana mergulhada, que não é um tubo nem uma hipersuperfície de rotação.

Pela proposição (3.2.45) é suficiente provarmos que

$$1 -(r')^2 - rr'' \neq R\langle \phi , c'' \rangle ,$$

$\forall$ s, onde $R = r(1 - (r')^2)^{1/2}$.

Seja $h(s) = 1 - (r'(s))^2 - r(s)r''(s)$, um cálculo simples nos dá que

$$h(s) = 1 - \beta^{-2} \; L^{-2} \cos(2s/L) + \beta^{-1} \; L^{-2} \; \mathrm{sen}(s/L),$$

e além disto $h(s)$ pertence ao intervalo I dado por

$$I = \left[1 - \beta^{-2} \; L^{-2} - \frac{3}{16} \; L^{-2}, \quad 1 + \beta^{-2} \; L^{-2}(\beta + 1) \right]$$

Calculando o valor máximo de R no intervalo $[0, 2\pi L]$, vemos que ocorre em $s = \pi L/2$, cujo valor é dado por $(\beta + 1)/\beta^{-1}$. Por outro lado,

$$|\langle \phi, c'' \rangle| \leq \| \phi \| \; \| c'' \| \leq L^{-1} \quad ,$$

logo, o valor de $R\langle \phi , c'' \rangle$ pertencerá ao intervalo J dado por

$$J = \left[- \beta^{-1} \; L^{-1}(\beta + 1) \; , \; \beta^{-1} \; L^{-1}(\beta + 1) \right] .$$

Finalmente obtemos que se L é suficientemente grande, os intervalos I e J não se interceptam, ou seja, não ocorre singularidades para y, provando nossa afirmação.

4 - APÊNDICE

(4.1) Condições de Integrabilidade para uma Forma Bilinear Simétrica

O objetivo deste apêndice é estudarmos condições necessárias e suficientes, sobre uma forma bilinear B, que possam nos garantir a existência de uma função f tal que

$$\mathrm{Hess} f = B \quad ,$$

onde Hessf indica o hessiano da função f. Mais precisamente pretendemos solucionar

$$(4.1.1) \qquad \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle = B(X,Y) \quad ,$$

onde B é uma forma simétrica sobre M e X,Y são campos tangentes à M.

O Lema a seguir nos dá condição necessária e suficiente para a solução de (4.1.1).

(4.1.2) Lema. *Seja* $B : TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma forma bilinear simétrica. Então*

$$B(X,Y) = \langle \nabla_X Z, Y \rangle$$

se e somente se

(4.1.3) $$(\nabla_W B)(X,Y) - (\nabla_X B)(W,Y) = \langle R(X,W)Z, Y \rangle \;,$$

onde R é o tensor curvatura Riemanniano de M e X, Y, Z, W são campos de vetores tangentes à M.

<u>Prova</u>. A condição é necessária. Com efeito, assumamos que

(4.1.4) $$B(X,Y) = \langle \nabla_X Z, Y \rangle \;.$$

Derivando (4.1.4) obtemos

(4.1.5) $$WB(X,Y) = \langle \nabla_W \nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_W Y \rangle \;,$$

mas

$$\begin{aligned} WB(X,Y) &= (\nabla_W B)(X,Y) + B(\nabla_W X, Y) + B(X, \nabla_W Y) = \\ &= (\nabla_W B)(X,Y) + \langle \nabla_Y Z, \nabla_W X \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_W Y \rangle \;, \end{aligned}$$

logo obtemos em (4.1.5) que

(4.1.6) $$\langle \nabla_W \nabla_X Z, Y \rangle = (\nabla_W B)(X,Y) + \langle \nabla_Y Z, \nabla_W X \rangle .$$

Semelhantemente obtemos

(4.1.7) $$\langle \nabla_X \nabla_W Z, Y \rangle = (\nabla_X B)(W,Y) + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle \;.$$

Subtraindo (4.1.7) de (4.1.6) vem que

(4.1.8) $$\langle \nabla_W \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_W Z, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z, [X, W] \rangle = (\nabla_W B)(X,Y) - (\nabla_X B)(W,Y).$$

Como B é simétrica

$$B(Y, [X, W]) = B([X,W], Y) \quad ,$$

isto é,

$$<\nabla_Y Z, [X,W]> = <Y, \nabla_{[X,W]} Z> \quad , \tag{4.1.9}$$

portanto de (4.1.9) em (4.1.8) concluímos que

$$<R(X,W)Z,Y> = (\nabla_W B)(X,Y) - (\nabla_X B)(W,Y).$$

Reciprocamente, assumamos que ocorre (4.1.3). Seja A o operador simétrico tal que

$$<AX,Y> = B(X,Y). \tag{4.1.10}$$

Consideremos um sistema de coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ definido numa vizinhança U_p de um ponto $p \in M$ e sejam $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,\ldots,n$.

Seja

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i .$$

Então

$$AX = \nabla_X Z. \tag{4.1.11}$$

Assim obtemos

(4.1.12) $$AX_j = \nabla_{X_j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} X_k \,.$$

Desenvolvendo (4.1.12) obtemos

(4.1.13) $$\sum_{k=1}^{n} \left(X_j(a_k)X_k + a_k \nabla_{X_j} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} X_k \,,$$

ou equivalentemente

$$\sum_{k=1}^{n} \left(X_j(a_k)X_k + a_k \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_{jk}^{\ell} X_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} X_k .$$

A última expressão implica que

$$\sum_{\ell=1}^{n} \left(X_j(a_\ell) + \sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma_{jk}^{\ell}\right) X_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} A_{j\ell} X_\ell \,,$$

isto é,

(4.1.14) $$X_j(a_\ell) + \sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma_{jk}^{\ell} = A_{j\ell} \,,$$

Por outro lado

$$(\nabla_{X_\ell} A)(X_j) - (\nabla_{X_j} A)(X_\ell) = \nabla_{X_\ell} AX_j - \nabla_{X_j} AX_\ell + A[X_j, X_\ell] \,,$$

Como $[X_j, X_\ell] = 0$ segue-se que

(4.1.15) $$\nabla_{X_\ell} AX_j - \nabla_{X_j} AX_\ell = (\nabla_{X_\ell} A)(X_j) - (\nabla_{X_j} A)(X_\ell) \,,$$

mas

$$\nabla_{X_\ell} AX_j - \nabla_{X_j} AX_\ell = \nabla_{X_\ell} \left(\sum_{s=1}^{n} A_{js} X_s \right) - \nabla_{X_j} \left(\sum_{s=1}^{n} A_{\ell s} X_s \right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \{ (X_\ell(A_{js}) - X_j(A_{\ell s}))X_s \quad +$$

$$+ \quad (A_{js} \nabla_{X_\ell} X_s - A_{\ell s} \nabla_{X_j} X_s) \} \quad ,$$

logo, (4.1.15) nos dá que

(4.1.16) $$(\nabla_{X_j} A)(X_\ell) - (\nabla_{X_\ell} A)(X_j) = \sum_{s=1}^{n} \{ (X_\ell(A_{js}) -$$

$$- X_j(A_{\ell s}))X_s + (A_{js} \nabla_{X_\ell} X_s - A_{\ell s} \nabla_{X_j} X_s) \}$$

usando (4.1.14) em (4.1.16) obtemos

(4.1.17) $$(\nabla_{X_j} A)(X_\ell) - (\nabla_{X_\ell} A)(X_j) = R(X_j, X_\ell)Z \quad +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} (X_j X_\ell(a_s) - X_\ell X_j(a_s))X_s \ .$$

Usando as hipóteses em (4.1.17) vem que

(4.1.18) $$X_j X_\ell(a_s) - X_\ell X_j(a_s) = 0 \qquad \forall \quad s = 1, \ldots, n.$$

Assim sendo existe um campo Z tal que

$$\langle \nabla_X Z, Y \rangle = B(X,Y) \ ,$$

o que conclui a prova do lema.

A existência de uma função f, tal que, Hessf = B, segue-se do lema (4.1.19).

(4.1.19) Lema. *Seja* Z *um campo tangente à* M *tal que*

$$<\nabla_X Z\ ,Y> \quad = \quad <\nabla_Y Z,X>$$

para quaisquer que sejam X,Y *tangentes à* M. *Então existe uma função* f *tal que (localmente),*

$$\mathit{grad} f \quad = \quad Z$$

onde grad indica o gradiente de f *na métrica* g *da* M.

<u>Prova</u>. Seja $p \in M$ e $(x_1,\ldots,x_n)$ um sistema de coordenadas tal que $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$ é um referencial ortogonal em T_pM. Façamos $X_i = \partial/\partial x_i$, i= 1,...,n. Sejam $a_1,\ldots,a_n$ as coordenadas de Z no referencial $\{X_1,\ldots,X_n\}$, isto é,

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i\ X_i$$

Usando as hipóteses obtemos

$$<\sum_{i=1}^{n} (X(a_i)X_i + a_i\nabla_X X_i),Y> \quad = \quad <\sum_{i=1}^{n} (Y(a_i)X_i + a_i\nabla_Y X_i),X>.$$

Fazendo $X = X_j$ e $Y = X_k$ nesta última igualdade obtemos

(4.1.20) $$<\sum_{i=1}^{n} X_j(a_i)X_i,X_k> + \sum_{i=1}^{n} a_i<\nabla_{X_j} X_i,X_k> =$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} X_k(a_i)X_i, X_j\rangle + \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \nabla_{X_k} X_i, X_j\rangle$$

como $X_1, \ldots, X_n$ são ortogonais segue-se que

$$(4.1.21) \qquad \begin{cases} \langle \nabla_{X_k} X_i, X_j\rangle + \langle X_i, \nabla_{X_k} X_j\rangle = 0 \\ \\ \langle \nabla_{X_j} X_i, X_k\rangle + \langle X_i, \nabla_{X_j} X_k\rangle = 0 \end{cases}$$

De (4.1.21) concluimos que

$$\langle \nabla_{X_k} X_i, X_j\rangle - \langle \nabla_{X_j} X_i, X_k\rangle = \langle X_i, [X_j, X_k]\rangle = 0$$

Logo (4.1.20) implica que

$$X_j(a_k) = X_k(a_j) \quad ,$$

ou seja, Z é campo gradiente, como queríamos provar.

5 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CARMO, M.P. do. *Geometria riemanniana*. Rio de Janeiro, Impa, 1979. 378p (Projeto Euclides).

[2] ——— & DAJCZER, M. *General conformally flat hypersurfaces of* $\mathbb{R}^{n+1}$. Preprint, Impa, 1982. 19p.

[3] ———, ——— & MERCURI, F. *Compact conformally flat hipersurfaces*, Preprint, Impa, 1983. 26p.

[4] EISENHART, L.P. *Riemannian geometry*. Princeton, University Press, 1964. 306p.

[5] KULKARNI, R.S. Conformally flat manifolds. *Proc. Math. Acad. Sci*, 1972, 69 : 2675-6.

[6] ———. Curvature structure and conformal transformations. *J. Differential Geom.*, 1970, 4 : 425-51.

[7] NISHIKAWA, S. & MAEDA, Y. Conformally flat hypersurfaces in a conformally flat riemannian manifolds. *Tôhoku Math. J.*, 1974, 26 : 159-68.

[8] NOMIZU, K. & KOBAYASHI, S. *Foundations of differential geometry*. New York, Interscience, 1969. 2v,

[9] RECKZIEGEK, H. Completeness of curvatures surfaces of an isometric immersions. *J. Differential Geom.*, 1979, 14 : 7-20.

[10] RODRIGUES, L. *Geometria das subvariedades*. Rio de Janeiro, Impa, 1976. 169p.

[11] RYAN, P. Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces. *Tôhoku Math.J.* 1974, 26 : 159-68.

[12] SPIVAK, M. *A Comprehensive introduction to differential geometry*. Berkeley, Publish or Perish, 1970. v.4.