



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

GEORGE BARBOSA DA SILVA

ANÁLISE DO VIÉS EM TOMOGRAFIA DO ESTADO QUÂNTICO DE MÁXIMA
VEROSSIMILHANÇA

FORTALEZA

2016

GEORGE BARBOSA DA SILVA

ANÁLISE DO VIÉS EM TOMOGRAFIA DO ESTADO QUÂNTICO DE MÁXIMA
VEROSSIMILHANÇA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Teleinformática do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Orientadora: Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de Vasconcelos

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S58a Silva, George Barbosa da.
Análise do viés em tomografia do estado quântico de máxima verossimilhança / George Barbosa da Silva. – 2016.
52 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de Vasconcelos.
1. Viés. 2. Máxima verossimilhança. 3. Tomografia de estados quânticos. 4. Estados comprimidos. 5. Estados gaussianos. I. Título.

CDD 621.38

GEORGE BARBOSA DA SILVA

ANÁLISE DO VIÉS EM TOMOGRAFIA DO ESTADO QUÂNTICO DE MÁXIMA
VEROSSIMILHANÇA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Teleinformática do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Aprovada em: 13 de julho de 2016

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de
Vasconcelos (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rubens Viana Ramos
Universidade Federal do Ceará - (UFC)

Prof. Dr. João Batista Rosa
Universidade Federal do Ceará - (UFC)

Prof. Dr. Daniel Felinto Pires Barbosa
Universidade Federal do Pernambuco (UFPE)

Aos meus filhos Enzo, Sofia e à minha esposa
Luana.

AGRADECIMENTOS

A Deus, o Grande Arquiteto do Universo, pois sem ele nada seria possível. A minha orientadora, Professora Dra. Hilma, por estar sempre disposta a ajudar a todo o momento, pela paciência e sabedoria nas orientações prestadas para execução deste trabalho.

Ao Dr. Scott C. Glancy, que apesar de estar distante, sempre foi muito dinâmico em me ajudar. Obrigado pelos valiosos conselhos e referências.

Aos professores Dr. Rubens Viana, Dr. João Batista e Dr. Jonas Soderholm, pelas dicas e pelos esclarecimentos sobre assuntos das mais diversas áreas.

Aos meus amigos do Grupo de Informação Quântica (GIQ) Aline, Aleksxandar Stojanovic, Antônio, Claudomir, Samyr Clever, Paulo Regis, Geovan, Glaucionor, Ranara Louise, Franklin, Natália e Thaim, pela união e força no transcorrer dos meus trabalhos.

Aos membros da secretaria, Renato Vasconcelos, Gil e Cindy, sempre dispostos a ajudar no que fosse necessário. Aos meu pais o Sr. Luis e Dona Socorro, parte fundamental de tudo isso.

À minha esposa Luana, pelo incentivo e pela paciência nos momentos mais difíceis.

Aos meus filhos, Sofia e Enzo, que me dão força todos os dias para lutar e dar o melhor que há em mim.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – (Brasil) CAPES – Código de Financiamento 001.

“E como a felicidade pode se transformar na insatisfação, assim o desespero pode sumir no despertar de uma nova primavera. Com cada dia, pode nascer um outro entendimento de nosso estado, nossos laços e objetivos.”

(Sun Tzu)

RESUMO

A tomografia de máxima verossimilhança de estados quânticos produz estimadores que são consistentes, desde que o modelo estatístico seja correto, mas os estimadores de máxima verossimilhança podem apresentar viés para qualquer conjunto finito de dados. O viés de um estimador é a diferença entre o valor esperado da estimativa e o valor real do parâmetro a ser estimado. Este trabalho investiga o viés na amplamente utilizada tomografia de estados quânticos de máxima verossimilhança. Nosso objetivo é compreender de que forma a quantidade de viés depende de fatores como: a pureza do estado verdadeiro, o número de medições realizadas, bem como os diferentes números de bases em que o sistema é medido. Para isso, realizamos experimentos numéricos que simulam a tomografia óptica homódina sob várias condições, realizamos tomografia e estimamos o viés na pureza do estado estimado. Encontramos que estimativas de estados altamente puros apresentam viés consideráveis, de tal forma que as estimativas têm purezas menores do que os estados verdadeiros.

Palavras-chave: Viés, Máxima verossimilhança, Tomografia de estados quânticos, Estados comprimidos, Estados gaussianos.

ABSTRACT

Maximum likelihood quantum state tomography yields estimators that are consistent, provided that the likelihood model is correct, but the maximum likelihood estimators may have bias for any finite data set. The bias of an estimator is the difference between the expected value of the estimate and the true value of the parameter being estimated. This paper investigates bias in the widely used maximum likelihood quantum state tomography. Our goal is to understand how the amount of bias depends on factors such as the purity of the true state, the number of measurements performed, and the number of different bases in which the system is measured. For that, we perform numerical experiments that simulate optical homodyne tomography under various conditions, perform tomography, and estimate the bias in the purity of the estimated state. We find that estimates of higher purity states exhibit considerable bias, such that the estimates have lower purity than the true states.

Keywords: Bias, Maximum likelihood, Quantum state tomography, Squeezed states, Gaussian states.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Representação no espaço de fase de um estado coerente	21
Figura 2	– Representação no espaço de fase de um estado comprimido	22
Figura 3	– Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e número quase máximo de fases. Números de medições: 40.000, 20.000, 10.000 e 1.000. Número máximo de fótons: 10.	32
Figura 4	– Mapa de cores do viés da pureza como função do número de medições e da pureza do estado verdadeiro. Temos um estado próximo do vácuo e número quase máximo de fases. Números de medições: 40.000, 20.000, 18.000, 16.000, 14.000, 12.000, 10.000, 8.000, 6.000, 4.000, 2.000 e 1.000. Número máximo de fótons: 10.	33
Figura 5	– Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e ângulos igualmente espaçados. Números de medições: 8.000, 4.000 e 1.000. Número máximo de fótons: 10	33
Figura 6	– Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e para dois métodos de escolha do número de fases: número quase máximo de fases e ângulos igualmente espaçados. Número de medições: 8.000. Número máximo de fótons: 10	34
Figura 7	– Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e número quase máximo de fases. Números de medições: 8.000. Número máximo de fótons: 10, 20, 30 e 40.	35
Figura 8	– Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e ângulos igualmente espaçados. Número de medições: 8.000. Número máximo de fótons: 10, 20, 30 e 40.	35
Figura 9	– Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um número quase máximo de fases e dois tipos de estados: próximo do vácuo e altamente comprimidos. Número de medições: 8.000 (linhas tracejadas) e 16.000 (linhas sólidas). Número máximo de fótons: 20	37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Para o caso de 40.000 medições.	42
Tabela 2 – Para o caso de 20.000 medições.	42
Tabela 3 – Para o caso de 10.000 medições.	43
Tabela 4 – Para o caso de 1.000 medições.	43
Tabela 5 – Para o caso de 8.000 medições.	44
Tabela 6 – Para o caso de 4.000 medições.	44
Tabela 7 – Para o caso de 1.000 medições.	45
Tabela 8 – Método do número quase máximo de fases.	46
Tabela 9 – Método dos ângulos igualmente espaçados.	46
Tabela 10 – Para o caso de 10 fótons.	47
Tabela 11 – Para o caso de 20 fótons.	47
Tabela 12 – Para o caso de 30 fótons.	48
Tabela 13 – Para o caso de 40 fótons.	48
Tabela 14 – Para o caso de 10 fótons.	49
Tabela 15 – Para o caso de 20 fótons.	49
Tabela 16 – Para o caso de 30 fótons.	50
Tabela 17 – Para o caso de 40 fótons.	50
Tabela 18 – Estados próximos do vácuo com 8.000 medições.	51
Tabela 19 – Estados altamente comprimidos com 8.000 medições.	51
Tabela 20 – Estados próximos do vácuo com 16.000 medições.	52
Tabela 21 – Estados altamente comprimidos com 16.000 medições.	52

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FERRAMENTAS DA MECÂNICA QUÂNTICA	14
2.1	Introdução	14
2.2	Postulados da Mecânica Quântica	14
2.3	Medidas Projetivas e POVM	15
2.4	Operador Densidade	16
3	ÓPTICA QUÂNTICA	18
3.1	Introdução	18
3.2	Propriedades Estatísticas da Luz	18
3.3	Estados de Número	19
3.4	Estados Coerentes	20
3.5	Estados Comprimidos	22
3.6	Estados Gaussianos	23
4	TOMOGRAFIA DO ESTADO QUÂNTICO	26
4.1	Introdução	26
4.2	Tomografia do Estado Quântico por Máxima Verossimilhança	26
4.3	Algoritmo de Otimização	28
4.4	Viés	28
5	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E RESULTADOS	29
5.1	Introdução	29
5.2	Experimentos Numéricos	29
5.3	Estados próximos do vácuo	31
5.4	Estados altamente comprimidos	36
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	38
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICES	42
	APÊNDICE A – Tabelas	42

1 INTRODUÇÃO

A tomografia de estados quânticos (TEQ) é a estimativa de um estado quântico desconhecido a partir de medições experimentais realizadas em uma coleção de sistemas quânticos, todos preparados no mesmo estado desconhecido. A TEQ é um procedimento muito importante para computação e informação quânticas (BANASZEK *et al.*, 2013). Os primeiros trabalhos sobre o assunto remontam a 1970 e desde então extensas pesquisas se iniciaram com a reconstrução de funções de Wigner e suas projeções em quadraturas. Hoje temos vários experimentos sendo realizados nos mais diversos sistemas, como por exemplo, sistemas para analisar as propriedades dos estados preparados e sistemas para validar portas quânticas.

Na TEQ, muitas cópias idênticas do sistema são preparadas e os resultados das medições são usados para estimar o estado quântico do sistema, ρ_{true} . Um método comumente usado para fazer esse processo é o de estimativa por máxima verossimilhança, em que se encontra o estado ρ_{ML} que maximiza a probabilidade de se obter os dados observados (HRADIL, 1997). A estimação é um problema de otimização e geralmente resolvido numericamente utilizando algoritmos iterativos, como o algoritmo *RpR* (ŘEHÁČEK *et al.*, 2007) e o Algoritmo de Gradiente Ascendente Regularizado (AGAR). A otimização deste problema torna-se mais difícil com o aumento das dimensões de ρ_{true} .

Ao longo de nossa dissertação, examinamos simulações numéricas de experimentos idealizados, sem erros experimentais sistemáticos, o que significa que eles estão corretamente descritos pelo modelo de verossimilhança.. Analisamos as propriedades do erro de medição aleatório e viés no estimador de máxima verossimilhança. Propriedades deste estimador também foram examinados em (SUGIYAMA *et al.*, 2012)–(HELSTROM, 1967). Viés, em inglês, *bias*, é a diferença entre o valor esperado estimado e o valor real do parâmetro a ser estimado.

Dado um modelo de probabilidade correto e um conjunto de operadores de medida informacionalmente completo (HRADIL, 1997), os estimadores de máxima verossimilhança são consistentes e assintóticos (SHAO, 1998), mas são normalmente enviesados para amostras pequenas. Esse viés é causado pela não linearidade do processo de estimação.

Em (SUGIYAMA *et al.*, 2012), o comportamento de erros de estimação na tomografia de estado de um qubit foi analisado numericamente usando distâncias entre a estimativa e o verdadeiro estado. Essa análise mostrou que para a tomografia de um qubit, a restrição na matriz densidade para que ela seja positiva e semi-definida cria viés que cresce quando o tamanho do vetor de Bloch, uma medida da distância do estado até o limiar do espaço de estados, se aproxima

de 1. Contudo, este viés pode ser reduzido se os operadores de medição estiverem alinhados com o vetor de Bloch. Em (SCHWEMMER *et al.*, 2015), simulações Monte Carlo foram usadas para estudar a tomografia de estado quântico de alguns poucos qubits medidos na base dos operadores de Pauli, mostrando que os esquemas de reconstrução baseados na máxima verossimilhança e quadrados mínimos são enviesados. A fidelidade foi sistematicamente subestimada enquanto o emaranhamento foi superestimado.

Aqui estamos interessados na tomografia de sistemas de variáveis contínuas, cujo viés não tem sido sistematicamente investigado. Em (SUGIYAMA *et al.*, 2012) mostrou-se uma relação entre o viés e o comprimento do vetor de Bloch de um qubit. Para estender esses resultados para sistemas de dimensões maiores, examinamos como o viés depende da pureza do estado, que é uma outra forma de medição da distância da matriz densidade ao limiar do espaço de estados.

Poderíamos ser tentados a evitar o problema do viés ao usar estimadores de inversão linear, que não são enviesados. Contudo, estimadores de inversão linear comuns não limitam as suas estimativas ao espaço dos estados físicos (SHANG *et al.*, 2014) e estimadores lineares geralmente têm maior erro quadrado médio do que os estimadores de máxima verossimilhança (SHAO, 1998).

Em nosso trabalho, simulações numéricas foram usadas para gerar dados de tomografia homódina óptica sob várias condições para estimar o viés na pureza dos estados estimados. Investigamos como a quantidade de viés depende de fatores como a pureza do estado verdadeiro, o número de medições realizadas, bem como o número de diferentes bases em que o sistema é medido.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentamos uma revisão de alguns conceitos básicos, porém fundamentais da mecânica quântica; no Capítulo 3, apresentamos alguns estados quânticos da radiação eletromagnética; no Capítulo 4, fazemos um estudo da tomografia do estado quântico de máxima verossimilhança; no Capítulo 5, discutiremos sobre os procedimentos de nossas simulações numéricas e resultados; no Capítulo 6, concluímos este trabalho, apresentando observações a respeito dos resultados obtidos.

2 FERRAMENTAS DA MECÂNICA QUÂNTICA

2.1 Introdução

No início do século XX, acreditava-se que tudo na física já havia sido explicado, usando para isso leis como as de Newton e Maxwell. Porém, em 1905, ficou evidente que as chamadas teorias clássicas enfrentavam problemas graves na tentativa de explicar os resultados observados em certos experimentos. Alguns fenômenos não eram explicados com a teoria vigente, dentre eles podemos destacar a catástrofe do ultravioleta e a radiação do corpo negro (PAIS, 1988). Com isso, alguns conceitos da matemática, como a álgebra linear, foram usados para ajudar a estruturar a física quântica (KAYE *et al.*, 2007). Assim, as teorias físicas que estudam a mecânica das partículas microscópicas e a radiação eletromagnética foram formuladas. Para aprender informação quântica é de fundamental importância conhecer e entender os postulados da mecânica quântica, que são a base da mecânica quântica. Por esse motivo vamos iniciar nossos estudos apresentando os postulados da mecânica quântica. Os postulados a seguir foram extraídos das páginas 80 a 88 do livro de Nielsen e Chuang (NIELSEN; CHUANG, 2010).

2.2 Postulados da Mecânica Quântica

A descrição quântica de sistemas físicos é baseada nos seguintes postulados:

Postulado 1 *A qualquer sistema físico isolado, existe associado a ele um espaço vetorial complexo com produto interno (ou seja, um espaço de Hilbert), conhecido como espaço de estados do sistema. Esse sistema é completamente descrito pelo seu vetor de estado, um vetor unitário no espaço de estados.*

Dirac denotou esse vetor por ket, que, para um estado ψ qualquer, deve ser escrito como $|\psi\rangle$. Seu transposto complexo conjugado é chamado de bra e escrito como $\langle\psi|$. Esse vetor contém toda informação a respeito do sistema físico e deve ser normalizado:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \tag{2.1}$$

Postulado 2 *A evolução de um sistema fechado é dada por uma transformação unitária U . Essas transformações preservam o módulo dos vetores.*

Postulado 3 A equação de Schrödinger descreve a evolução temporal do estado de um sistema quântico fechado e é dada por:

$$-i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle, \quad (2.2)$$

onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π e H é um operador Hermitiano conhecido como Hamiltoniano do sistema. A equação de Schrödinger fornece a forma do estado quântico $|\psi(t)\rangle$.

Assim como a segunda lei do movimento constitui a equação fundamental da mecânica newtoniana, a equação de Schrödinger constitui a equação fundamental da mecânica quântica.

Postulado 4 Os operadores de medição são responsáveis pelas medidas quânticas e atuam sobre o espaço de estados do sistema. Para um estado de um sistema quântico $|\psi\rangle$, antes da medição, a probabilidade dos possíveis resultados é dada por:

$$p = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (2.3)$$

onde M_m são os operadores de medição e m os possíveis resultados da medição. O resultado do sistema após a medição, é dado por:

$$|\psi\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (2.4)$$

Os operadores de medição satisfazem a relação de completudeza:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I}. \quad (2.5)$$

A relação de completudeza expressa o fato de que a soma de todas as probabilidades deve ser um.

2.3 Medidas Projetivas e POVM

Descrivemos uma medição projetiva por P que é um observável e também Hermitiano. P opera no espaço de estados do sistema que observamos. Além do que, P tem decomposição espectral, isto é, devemos obter seus autovalores e autovetores. Aqui, o autovalor é representado por m :

$$M = \sum m P_m. \quad (2.6)$$

Em (2.6), P_m representa o projetor atuante no auto-espço de M com autovalor m . A probabilidade de obter m quando realizamos medidas no estado $|\varphi\rangle$ é dada por:

$$p(m) = \langle \varphi | P_m | \varphi \rangle. \quad (2.7)$$

Depois que medimos m , o estado do sistema, $|\varphi^m\rangle$, logo depois da medição será:

$$|\varphi^m\rangle = \frac{P_m \varphi}{(\langle \varphi | P_m | \varphi \rangle)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.8)$$

Medições projetivas podem ser entendidas como um caso especial do Postulado 4. Vamos supor que os operadores de medição do postulado além de satisfazer a relação de completiza dada pela equação (2.5), também satisfazem a condição de que M_m são projetores ortogonais, ou seja, M_m são Hermitianos e $M_m M_{m'} = \delta_{mm'} M_m$. Com essas restrições, o Postulado 4 se reduz a uma medição projetiva.

Em alguns casos, para o conjunto de medições, podemos usar a ferramenta designada POVM (*Positive Operator-Valued Measure*). Se E_m for um operador positivo então podemos afirmar que

$$p(m) = \langle \varphi | E_m | \varphi \rangle \geq 0, \quad (2.9)$$

para qualquer que seja o estado $|\varphi\rangle$ e ainda

$$\sum_m E_m = \mathbb{I}. \quad (2.10)$$

Em alguns casos, especialmente em se tratando da teoria da informação quântica, não estamos realmente interessados nos resultados das medidas, mas sim nas probabilidades relacionadas aos diferentes resultados. Nesses casos, o uso da ferramenta POVM é o mais indicado.

2.4 Operador Densidade

Há duas formas de representação de um estado quântico: o vetor de estado e o operador densidade. Ambos caracterizam de forma aceitável a estatística de estados quânticos. No entanto, somente o operador densidade poderá representar os estados mistos. Um sistema puro é descrito por um estado que pode ser representado por uma superposição linear de estado de uma base:

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \quad (2.11)$$

com $\sum_n |C_n|^2 = 1$. Em certas situações, o sistema estudado é um *ensemble* para o qual não conseguimos escrever um autovetor como (2.11). Esses sistemas são descritos pelo que chamamos de estados mistos. A matriz densidade ou operador densidade é uma formulação alternativa e matematicamente equivalente a formulação de vetor estado. O operador densidade é um operador Hermitiano que possui as seguintes propriedades: (1) tem traço um, $\text{Tr}(\rho) = 1$; (2) é positivo, $\rho \geq 0$ e que para o estado puro $\rho^2 = \rho$, para estados mistos $\rho^2 \neq \rho$ e $\text{Tr}(\rho)^2 < 1$.

3 ÓPTICA QUÂNTICA

3.1 Introdução

Há para o campo eletromagnético um grande número de estados físicos e alguns deles são muito importantes para a óptica quântica. A partir de agora iremos discorrer sobre alguns desses estados, principalmente sobre as suas propriedades não clássicas.

3.2 Propriedades Estatísticas da Luz

Como determinar se o estado é perfeitamente clássico ou se apresenta alguma característica quântica? A resposta a essa pergunta está nas propriedades estatísticas da luz. E esse estudo pode ser feito por meio do parâmetro Q_n (MANDEL; WOLF, 1995), dado por

$$Q_n = \frac{\Delta n^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (3.1)$$

onde Δn^2 é a variância, dada por $\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$, e $\langle n \rangle$ é o número médio de fótons. Usando (3.1), podemos definir as seguintes relações:

- Para $Q_n = 0$, tem-se uma distribuição estatística Poissoniana, quando a variância é igual ao número médio de fótons [$\Delta n^2 = \langle n \rangle$].
- Para $Q_n > 0$, tem-se uma distribuição estatística Super-Poissoniana, quando a variância é maior que o número médio de fótons [$\Delta n^2 > \langle n \rangle$]. Nenhum efeito não clássico é apresentado por esse estado. Portanto, o estado é clássico.
- Para $Q_n < 0$, tem-se uma distribuição estatística Sub-Poissoniana, quando a variância é menor que o número médio de fótons [$\Delta n^2 < \langle n \rangle$]. Esses estados são conhecidos como não-clássicos e requerem um entendimento mais profundo da natureza da luz.

3.3 Estados de Número

Estados de número, ou estados de Fock, é o estado do campo eletromagnético que possui um número exato de n fótons, em contrapartida, pelo princípio da incerteza de Heisenberg, possui fase de campo completamente indefinida. Eles formam uma base para o estado de Hilbert de dimensão infinita. Qualquer estado físico da luz pode ser escrito na base de estados de número. O estado de zero fótons, por exemplo, é o vácuo e sua função de onda é Gaussiana.

Os estados de Fock, $|n\rangle$, são os autoestados do operador número, $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, com autovalores n (SAKURAI, 1995):

$$\hat{n} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (3.2)$$

onde \hat{a} é chamado de operador de aniquilação e \hat{a}^\dagger de operador de criação. Eles obedecem a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.3)$$

Esses operadores atuam em $|n\rangle$ da seguinte forma:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{(n+1)} |n+1\rangle, \quad (3.4)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (3.5)$$

Os estados de número podem ser obtidos pela atuação do operador de criação no estado de vácuo repetidas vezes:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (3.6)$$

sendo o estado de vácuo definido por:

$$\hat{a} |0\rangle \equiv 0. \quad (3.7)$$

Esses estados formam uma base completa, pois o produto escalar entre dois estados de número resulta em um delta de Kronecker, $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$, o que satisfaz a relação de ortonormalidade

$$\sum |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}. \quad (3.8)$$

A distribuição do número médio de fótons do estado de número, $|n\rangle$, é dada por:

$$P_n = |\langle n|m\rangle|^2 = \delta_{n,m}. \quad (3.9)$$

Como $\langle n \rangle = n$, $[(\Delta(n))^2 = 0]$, ou seja, a incerteza no número de fótons é zero. Isso evidencia que o estado de número possui número de fótons muito bem definido. O estado de número é Sub-Poissoniano, pois $Q = -1$.

3.4 Estados Coerentes

Em 1963, o físico Roy J. Glauber apresentou uma teoria genérica de coerência, a teoria quântica da coerência óptica (GLAUBER, 1963). Este fato o consolidou como o introdutor do conceito de estado coerente, sendo considerado por muitos como o pai da óptica quântica. Em 2005, ele recebeu metade do prêmio Nobel de Física por isso.

Como visto em (LEONHARDT, 1997) os estados coerentes podem ser obtidos pela atuação do operador deslocamento, definido por

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}, \quad (3.10)$$

no estado do vácuo:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (3.11)$$

Os estados coerentes são os autoestados do operador de aniquilação:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.12)$$

Como \hat{a} não é Hermitiano, seus autovalores não precisam ser reais e podem ser complexos. Ou seja, $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, onde $|\alpha|$ indica a intensidade do deslocamento, com origem na origem dos espaços e θ indica a direção do deslocamento. Quando tomamos $\alpha = 0$, na equação (3.12), obtemos o estado de vácuo, de onde concluímos que o vácuo, além de ser um estado de número com zero fótons, é também um estado coerente com amplitude zero.

O valor esperado da energia de um estado coerente é dado por:

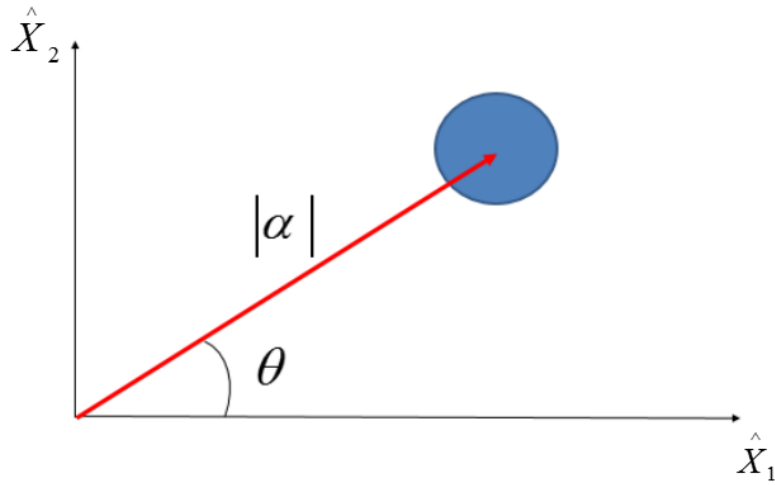
$$\langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle = \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (3.13)$$

Ou seja, a energia de um estado coerente é o número médio de fótons no estado:

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (3.14)$$

multiplicado pela energia de cada fóton, somado com a energia do vácuo, $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

Figura 1 – Representação no espaço de fase de um estado coerente



Fonte: (SCULLY; ZUBAIRY, 1997).

Os estados coerentes são representados no espaço de fase por um círculo posicionado a uma distância $|\alpha|$ da origem, como mostra a Figura 1.

Na base de estados de número, o estado coerente é escrito como:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.15)$$

O conjunto de estados coerentes geram um conjunto supercompleto, satisfazendo a relação de completeza:

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \mathbb{I}. \quad (3.16)$$

Se $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são dois estados coerentes diferentes, o produto interno entre eles é dado por:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{(-|\beta-\alpha|^2/2)} e^{(\alpha^*\beta-\alpha\beta^*)/2}. \quad (3.17)$$

Podemos obter a função de distribuição de probabilidade, $P(n)$, de se encontrar n fótons no estado coerente $|\alpha\rangle$, através de:

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}. \quad (3.18)$$

O número médio de fótons é dado por (3.14) e a variância por

$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |\alpha|^2, \quad (3.19)$$

onde $\langle n^2 \rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4$.

Para esses estados, $Q_n = 0$ e, com base em (3.18), o estado coerente possui distribuição Poissoniana.

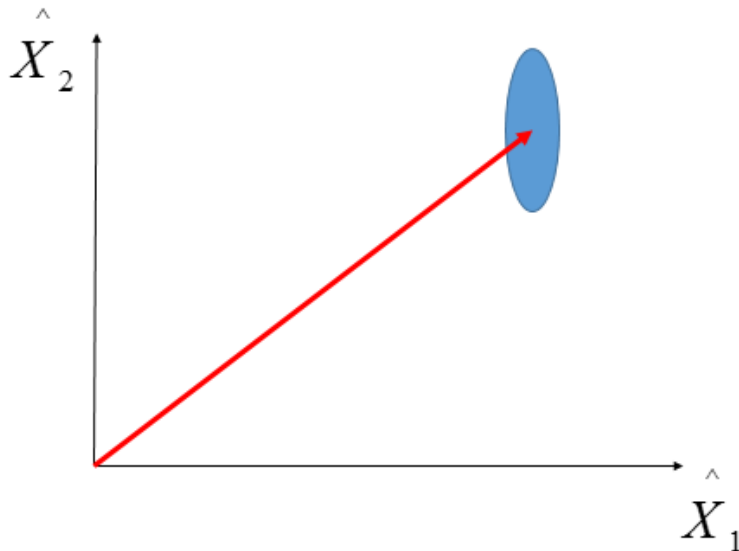
3.5 Estados Comprimidos

O princípio da incerteza de Heisenberg (HEISENBERG; PAULI, 1929) estabelece restrições no produto das incertezas de posição e momento, pois

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar/2. \quad (3.20)$$

Estados comprimidos são estados em que as flutuações em uma das quadraturas são menores que a igualdade, mas de tal forma que esses estados continuam satisfazendo a igualdade do princípio de incerteza de Heisenberg. Para que isso ocorra, as flutuações na outra quadratura são maiores que a igualdade.

Figura 2 – Representação no espaço de fase de um estado comprimido



Fonte: (SCULLY; ZUBAIRY, 1997).

Os operadores Hermitianos \hat{X}_1 e \hat{X}_2 são chamados de componentes de quadraturas do campo elétrico. Esses operadores são dados por:

$$\hat{X}_1 = \frac{(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}{2}, \quad (3.21)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{2i}, \quad (3.22)$$

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}. \quad (3.23)$$

Para esses operadores também temos que

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{16}, \quad (3.24)$$

onde

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2s} \quad \text{e} \quad \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2s}. \quad (3.25)$$

Nas expressões acima, s é o parâmetro de compressão.

Estados de mínima incerteza que por sua vez pode ter incerteza reduzida ao custo de um aumento de uma quadratura em detrimento a redução na incerteza da outra quadratura são conhecidos como estados comprimidos.

Os estados comprimidos podem ser gerados por meio do operador de compressão

$$\hat{S}(\varepsilon) = e^{\frac{1}{2}\varepsilon^*(\hat{a}^2) - \frac{1}{2}\varepsilon(\hat{a}^\dagger)^2}, \quad (3.26)$$

com $\varepsilon = r e^{2i\theta}$, onde $0 \leq s < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. O operador de compressão atende a

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon) = \hat{S}^{-1}(\varepsilon) = \hat{S}(-\varepsilon) \quad (3.27)$$

e possui as seguintes propriedades de transformação

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon) \hat{a} \hat{S}(\varepsilon) = \hat{a} \cosh(r) - \hat{a}^\dagger e^{-2i\theta} \sinh(r), \quad (3.28)$$

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\varepsilon) = \hat{a}^\dagger \cosh(r) - \hat{a} e^{-2i\theta} \sinh(r). \quad (3.29)$$

Por meio do operador de compressão, há atenuação de uma das componentes da amplitude complexa. Ele também é responsável pela amplificação da outra componente da amplitude, como podemos verificar na Figura 2. Para obtermos um estado comprimido $|\alpha, \varepsilon\rangle$, devemos primeiro comprimir o estado do vácuo, em seguida fazer o seu deslocamento:

$$|\alpha, \varepsilon\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\varepsilon) |0\rangle. \quad (3.30)$$

3.6 Estados Gaussianos

Um estado é dito gaussiano se sua função de Wigner, ou equivalentemente sua função característica, for Gaussiana. Esses estados são completamente caracterizados pelos

seus momentos de primeira e segunda ordens. A função de Wigner define uma distribuição de quasi-probabilidade, pois assume valores negativos, essa propriedade evidencia sua quanticidade.

A função de Wigner, foi introduzida por Eugene Paul Wigner em 1932 e se tornou uma ferramenta de comparação entre as mecânicas quânticas e clássicas. Essa função é uma abordagem alternativa para a mecânica quântica e é uma ferramenta capaz de identificar propriedades estatística de vários estados da luz. Foi usada pela primeira vez em (WIGNER, 1932), na equação do estado do gás.

Quando abordamos processamentos quânticos com variáveis contínuas, os estados gaussianos são os primeiros instrumentos a serem usados nesse tipo de análise.

Os estados Gaussianos multimodais do oscilador harmônico quântico são transformados quando eles passam por deslocadores de fase, por divisores de feixes, ou sofrem compressão e perdas. Os estados de nosso interesse têm funções de Wigner Gaussiana, como foi dito acima. Essas funções de Wigner têm todas as propriedades matemáticas das distribuições de probabilidades normais multivariadas. No entanto, não podemos medir a posição e o momento linear de um único modo (ou um único oscilador) simultaneamente. Além disso, as quadraturas devem obedecer ao princípio da incerteza de Heisenberg. Essas funções de Wigner Gaussianas são parametrizadas por um vetor μ que lista o valor esperado de cada medida da quadratura e uma matriz de covariância Σ que contém as variâncias e covariâncias para as medidas de quadratura.

Para um sistema de n modos, μ é um vetor coluna de $2n$ elementos e Σ é uma matriz $2n \times 2n$. Vamos escrever o vetor coluna das variáveis de quadratura como $z = (q_1, p_1, q_2, p_2, \dots)^T$, onde os índices rotulam o número do modo. Estamos interessados em operações “lineares” que afetam estes modos. Aqui “linear” significa que essas operações aplicam transformações afins em z . Em óptica quântica, estas operações lineares são: deslocamento, mudança de fase, divisão de feixe e compressão. (Observe que em um outro contexto, compressão pode ser considerada não linear porque ela pode aumentar o número de fótons em um modo.) Todas essas operações têm Hamiltonianos que são de primeira ou segunda ordem nos operadores de quadratura ou nos operadores de aniquilação e/ou criação. Cada uma das transformações evolui o vetor de quadraturas da forma $Mz + \gamma$. A matriz M e o vetor γ , que descrevem a transformação, são reais. Deslocamentos tem $M = 0$ e γ diferente de zero. Todas as outras operações têm $\gamma = 0$ e $M \neq 0$ (RAO, 1967). Vamos ignorar os deslocamentos (que não têm efeito sobre a matriz de covariância). As quadraturas do estado transformado terão matriz de covariância $M\Sigma M^T$ e médias $M\mu$.

Uma mudança de fase de ϕ é descrita por

$$P(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

que apenas rotaciona as quadraturas x e p .

A compressão de um modo por uma quantidade s é descrita por

$$S(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s}} & 0 \\ 0 & \sqrt{s} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Isso mudará a variância da quadratura x de $\Sigma_{1,1}$ para $\Sigma_{1,1}/s$.

Um divisor de feixe de transmissividade t é descrito por

$$B(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{t} & 0 & -\sqrt{1-t} & 0 \\ 0 & \sqrt{t} & 0 & -\sqrt{1-t} \\ \sqrt{1-t} & 0 & \sqrt{t} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-t} & 0 & \sqrt{t} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Podemos simular a perda de fótons ao enviar o modo por uma porta de um divisor de feixe que tem vácuo na outra porta. Em seguida, o modo adicional é apenas descartado. Este procedimento transforma Σ em

$$\Sigma = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2s} & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} + (1-t) \frac{\mathbb{I}}{2}, \quad (3.34)$$

Usando essas ferramentas, podemos calcular o estado quântico após qualquer operação linear que age em um estado Gaussiano. Para calcular a pureza de um estado quântico Gaussiano, usamos (PARIS *et al.*, 2003):

$$p = \frac{1}{2\sqrt{\text{Det}(\Sigma)}}. \quad (3.35)$$

4 TOMOGRAFIA DO ESTADO QUÂNTICO

4.1 Introdução

Na Física de Newton é possível, através de medições, reconstruir um sistema físico qualquer, sem conhecê-lo. Na Mecânica Quântica, por sua vez, não é possível reconstruir um estado quântico, pois pelo princípio da incerteza de Heisenberg não podemos medir um estado quântico desconhecido sem que ele seja alterado. A própria medição em si pode alterar esse estado. Para um conjunto de sistemas físicos previamente preparados de forma igual, podemos analisar as estatísticas dos acontecimentos e suas possibilidades para com isso termos um conjunto de probabilidades dos possíveis valores desses eventos. De forma inversa, com os possíveis valores dos eventos poderemos presumir o sistema físico. Esse processo inverso é o que chamamos de Tomografia de Estados Quânticos.

A origem da tomografia quântica se deu com o artigo de 1987, descrito em (BERTRAND; BERTRAND, 1987). Em 1989, Vogel e Risken mostraram que as distribuições de probabilidade obtidas na detecção homódina é a transformada de Radon da função de Wigner (VOGEL; RISKEN, 1989). Esse resultado foi usado para estimar experimentalmente os elementos do operador densidade de um estado óptico (BAUMGRATZ *et al.*, 2013).

Nos últimos anos, vários trabalhos experimentais e teóricos sobre esse assunto foram publicados (BAUMGRATZ *et al.*, 2013)—(ENK; BLUME-KOHOUT, 2013).

4.2 Tomografia do Estado Quântico por Máxima Verossimilhança

A reconstrução dos estados quânticos nunca é feita de forma perfeita, independente do método de remontagem que for usado, quer seja por inversão linear, variáveis contínuas, inferência Bayesiana ou máxima verossimilhança.

Dentre as várias formas de se fazer a estimação, o método de máxima verossimilhança se destaca ao fazer a dedução de estimadores em inferência estatística sem usar qualquer função de perda (CASELLA; BERGER, 1990). Foi desenvolvido por R. A. Fisher e demorou 10 anos para ser concluído. Esse método foi um dos mais importantes resultados da estatística do século passado (ALDRICH, 1997).

Vamos agora destacar algumas propriedades que explicam o porquê dessa técnica estatística ser tão usada para estimativa de parâmetros (GONCALVES, 2013):

1. **Consistência:** o estimador de máxima verossimilhança para o caso em que o número de amostras tende a infinito, também tende a ser não enviesado.
2. **Assintoticamente Normal e Eficiente:** à medida que o tamanho da amostra aumenta, a máxima verossimilhança fica mais eficaz.
3. **Comportamento para amostras finitas:** a máxima verossimilhança tem comportamento tão bom quanto os outros estimadores de amostras finitas.
4. **Propriedade de invariância:** esse princípio permite que possamos usar outras parametrizações de nosso interesse, além da parametrização mais adequada para estimar os parâmetros.

Sistemas de variáveis contínuas tem espaço de Hilbert de dimensão infinita. É simplesmente impossível estimar o número infinito de parâmetros necessários para representar estados em espaços de dimensão infinita. A abordagem padrão, neste caso, é limitar o número de parâmetros desconhecidos, truncando o espaço de Hilbert em um determinado número de fótons ou fônons n .

Vamos considerar N sistemas quânticos, cada um deles preparado em um estado descrito por uma matriz densidade ρ_{true} . Cada cópia i tem a quadratura medida com resultado x_i , para $i = 1, \dots, N$. Em cada medição, o observável é escolhido ao se estabelecer a fase θ_i de um oscilador local (um sistema de referência preparado em um estado coerente de alta amplitude). O resultado da i -ésima medida é descrito por um elemento POVM, $\Pi(x_i|\theta_i) = \Pi_i$. A probabilidade de uma matriz densidade candidata ρ , dado o conjunto de dados $\{(\theta_i, x_i) : i = 1, \dots, N\}$, é dada por:

$$\mathcal{L}(\rho) = \prod_{i=1}^N \text{Tr}(\Pi_i \rho), \quad (4.1)$$

onde $\text{Tr}(\rho \Pi_i)$ é a probabilidade, de acordo com ρ , se obter resultado x_i quando medimos com a fase θ_i .

O objetivo da TEQ por máxima verossimilhança é encontrar a matriz densidade ρ_{ML} que maximize a probabilidade (4.1). Na prática, usualmente maximizamos o logaritmo da probabilidade (chamado log-probabilidade):

$$L(\rho) = \ln \mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=1}^N \ln[\text{Tr}(\Pi_i \rho)]. \quad (4.2)$$

A função log-probabilidade é côncava, o que nos dá um problema de otimização bem comportado, de tal modo que a convergência para uma solução única será alcançada pela maioria dos métodos de otimização iterativos.

4.3 Algoritmo de Otimização

O nosso algoritmo para maximização da probabilidade começa com várias iterações do algoritmo $R\rho R$ seguido de iterações do Algoritmo de Gradiente Ascendente Regularizado (AGAR). Após um período inicial de rápida convergência, observamos uma desaceleração significativa do algoritmo $R\rho R$ após cerca de $(n+1)^2/4$ iterações. Para mitigar esse problema, depois de $(n+1)^2/4$ iterações do algoritmo $R\rho R$, trocamos para o AGAR. Seja $\rho^{(k)}$ a matriz densidade encontrada após k iterações e logo após a última iteração do $R\rho R$. No AGAR, $\rho^{(k+1)}$ é parametrizada como

$$\rho^{(k+1)} = \frac{\left(\sqrt{\rho^{(k)}} + A\right) \left(\sqrt{\rho^{(k)}} + A^\dagger\right)}{\text{tr} \left[\left(\sqrt{\rho^{(k)}} + A\right) \left(\sqrt{\rho^{(k)}} + A^\dagger\right) \right]}, \quad (4.3)$$

onde A pode ser qualquer matriz complexa com as mesmas dimensões de ρ . Esta construção assegura que $\rho^{(k+1)}$ é uma matriz densidade física para qualquer A . Para escolher A , uma aproximação quadrática do log-probabilidade é realizada. A maximiza a aproximação quadrática do log-probabilidade sujeito à restrição $\text{Tr}(AA^\dagger) \leq u$, onde u é um número positivo que o algoritmo ajusta para assegurar que o log-probabilidade aumenta com cada iteração.

Todas as iterações param quando o critério de paragem de (GLANCY *et al.*, 2012) sinaliza que $L(\rho_{\text{ML}}) - L(\rho^{(k)}) \leq 0,2$, onde $L(\rho_{\text{ML}})$ é o máximo do log-probabilidade. Ao delimitar o progresso do log-probabilidade que pode ser atingido com mais iterações, garantimos que a última iteração produz uma estimativa que “se aproxima” de ρ_{ML} , onde essa proximidade é estatisticamente relevante (GLANCY *et al.*, 2012).

4.4 Viés

Dentre os métodos de avaliação de estimadores, a função viés, ou viés (bias) de um estimador pontual τ de um parâmetro φ é a diferença entre o valor esperado da estimativa τ , que representaremos aqui por $E_\varphi(\tau)$, e o verdadeiro valor do parâmetro a ser estimado, que é φ . Logo, $\text{Vies} = E_\varphi(\tau) - \varphi$. Caso $E_\varphi(\tau) = \varphi$, então τ é dito não-enviesado (não-viciado) (CASELLA; BERGER, 1990).

Em nosso trabalho analisamos o comportamento do viés como função de alguns parâmetros do próprio estado estudado e do experimento numérico, como a pureza do estado, o número de medições e o número de bases utilizadas para reconstruir os estados.

5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E RESULTADOS

5.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma análise detalhada de nossos experimentos numéricos usando alguns dos estados mencionados no Capítulo 3, conforme (SILVA *et al.*, 2017).

5.2 Experimentos Numéricos

Nossos experimentos numéricos simulam medições homódinas de modo simples (LVOVSKY; RAYMER, 2009) de um estado criado quando enviamos um estado de vácuo comprimido, com quadraturas de variâncias $s/2$ e $1/(2s)$, através de um meio com perdas com transmissividade t . Esses estados são estados gaussianos com média zero, que podem ser parametrizados por suas matrizes de covariância. Como desejamos simular estados de diferentes purezas, vamos expressar a pureza como uma função da compressão e da transmissividade.

A matriz de covariância de estado após o meio com perdas é dado por:

$$\Sigma = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2s} & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} + (1-t) \frac{\mathbb{I}}{2}, \quad (5.1)$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade. A pureza, dada pela Eq. (3.35), será escrita como:

$$p(s,t) = \frac{1}{2\sqrt{\text{Det}(\Sigma)}} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4s} - \frac{s}{4}\right)(t^2 - t) + \frac{1}{4}}}. \quad (5.2)$$

Nossos experimentos numéricos começam com a escolha de uma pureza desejada para o estado verdadeiro. Usamos a Eq. (5.2) para obter um par (s,t) que produza a pureza desejada. A escolha de (s,t) não é única, por isso usamos duas estratégias, descritas abaixo, que nos dão estados próximos do vácuo e estados altamente comprimidos. Representamos, então, o estado comprimido puro com compressão s por ρ_{pure} , uma matriz densidade na base de número de fótons, truncado em n fótons. Em seguida, simulamos a passagem do estado comprimido puro através de um meio com transmissividade t por uma operação quântica que é equivalente à adicionar um modo auxiliar no estado de vácuo, agindo sobre os dois modos do divisor de feixe e retirar, através do traço, o modo auxiliar. Esta operação quântica é representada pelo conjunto de operadores de Kraus $\{E_i(t)|i = 1 \dots n\}$ e transforma ρ_{pure} em $\rho_{\text{true}} = \sum_{i=1}^n E_i(t)\rho_{\text{pure}}E_i(t)^\dagger$. Este procedimento nos dá a matriz densidade de um estado com a pureza desejada, representada numa base de n fótons.

Para calcular a probabilidade $P(x|\theta) = \text{Tr}(\rho_{\text{true}}\Pi(x|\theta))$ de obter um resultado de medida homódina x em uma fase θ do estado ρ_{true} , derivamos uma representação de $\Pi(x|\theta)$ também na base de fótons n . Seja $|x\rangle$ o autoestado da quadratura x , com autovalor x , expresso na base de número de fótons, e seja $U(\theta)$ o operador unitário de evolução da fase. Para uma medição homódina ideal, calcularíamos a probabilidade como

$$\text{Tr}[\rho_{\text{true}}U(\theta)^\dagger|x\rangle\langle x|U(\theta)]. \quad (5.3)$$

No entanto, detectores homódinos reais sofrem perdas de fótons. Como esta perda é parte do dispositivo de medição, nós a incluímos nos elementos POVM ao escrever (LVOVSKY; RAYMER, 2009)

$$\Pi(x|\theta) = \sum_{i=1}^n E_i(\eta)^\dagger U(\theta)^\dagger|x\rangle\langle x|U(\theta)E_i(\eta). \quad (5.4)$$

Ao incluir a perda associada ao dispositivo de medição nos elementos POVM, podemos estimar o estado do sistema antes da perda. Para todos nossos experimentos numéricos, usamos $\eta = 0,9$, que é um valor típico de detectores homódinos de estado da arte. Para produzir amostras aleatórias de resultados da medição homódina, usamos amostragem por rejeição (KENNEDY W. J. ; GENTLE, 1980) da distribuição dada por $P(x|\theta)$.

Usamos dois métodos diferentes para escolher as fases nas quais as medidas homódinas são realizadas:

Método 1 : *Número quase máximo de fases - para cada medição da quadratura, uma fase aleatória é escolhida, de tal forma que medimos um número quase máximo de fases.*

Método 2 : *Ângulos igualmente espaçados - para um total de N medições, medidas em m fases diferentes, dividimos o semicírculo superior uniformemente entre m fases, entre 0 e π , e medimos N/m vezes a cada fase.*

Consideramos $m = 6$. Medir a quadratura apenas uma vez para cada uma das muitas fases é natural para sistemas experimentais que lentamente percorre a fase enquanto faz amostragem das quadraturas. Para outros sistemas, é mais conveniente fixar a fase e medir repetidamente a quadratura antes de mudar a fase. Esperamos que essas duas estratégias se comportem diferentemente por três razões:

1. Quando medimos em $m = 6$ fases obtemos um histograma de medições da quadratura que nos permite reconstruir diretamente a distribuição de probabilidade da quadratura em cada

- uma das poucas fases, mas quando medimos um número quase máximo de fases, nosso conhecimento da distribuição de probabilidade da quadratura em cada fase é bem pobre, mas obtemos amostras em muitas mais fases. As estatísticas dessas duas estratégias são bem diferentes e esperamos que as estimativas que elas produzem tenham viés diferentes.
2. Em (SUGIYAMA *et al.*, 2012) mostrou-se que o viés é reduzido quando medimos um qubit na direção de seu vector de Bloch. Aumentando do número de fases nas quais medimos o modo óptico, aumentamos a probabilidade de medir em um direção que aponta para a fronteira do espaço de estado, o que pode reduzir o viés.
 3. Para se obter um único máximo da função de probabilidade precisamos de um conjunto de operadores de medida informacionalmente completo. Se o número de fases é muito pequeno comparado ao número máximo de fótons n no espaço de Hilbert, não temos um conjunto de operadores de medida informacionalmente completo e haverá uma família de matrizes densidade que maximiza a probabilidade. O algoritmo de maximização da probabilidade identifica uma dessas matrizes e um erro sistemático poderá ser introduzido no processo.

Para calcular a pureza média, reconstruímos cada estado 50 vezes, obtendo a cada vez a pureza do estado reconstruído. Calculamos, então, a média aritmética das 50 purezas para obter a “pureza reconstruída média”. Estimamos o viés da pureza através da diferença entre a pureza reconstruída média e a pureza do estado verdadeiro. A incerteza em cada estimativa do viés, que são mostradas como barras de erro nas figuras, é o desvio padrão da média da pureza reconstruída. O tamanho relativo da magnitude do viés ($\text{abs}(\text{vies})$) e o desvio padrão das 50 purezas ($\text{std}(\text{pureza})$) são interessantes e por isso são mencionados nas discussões abaixo. As tabelas com os valores da pureza do estado verdadeiro, do viés da pureza e do desvio padrão das estimativas se encontram no apêndice A.

5.3 Estados próximos do vácuo

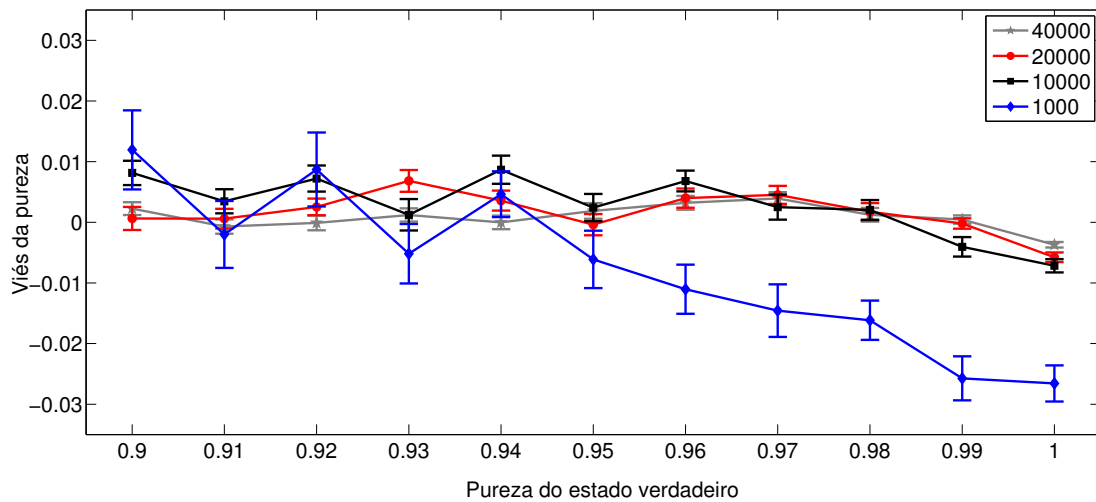
Vamos começar com a tomografia de um estado próximo do vácuo e com número quase máximo de fases. Um estado de dada pureza com compressão fraca é alcançado quando $t = 1/2$. Para encontrar o grau de compressão, calculamos s usando a equação (5.2).

A Figura 3 mostra o viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para diferentes números de medições. Analisando os gráficos, vemos que quando são realizadas um número menor de medições, a pureza reconstruída média dos estados de purezas mais altas é

significativamente menor do que a pureza do estado verdadeiro. Isso é uma evidência clara de viés no algoritmo de tomografia. Vemos também que quando aumentamos o número de medições, a variância e o viés da pureza estimada diminuem, se tornando assintoticamente não-enviesado, como esperado.

Nos casos em que temos 40.000, 20.000 e 10.000 medições, o viés é consideravelmente menor do que $\text{std}(\text{pureza})$, exceto quando $\text{pureza} = 1$, onde eles são aproximadamente iguais. No caso em que temos 1.000 medições, $\text{abs}(\text{vies})$ e $\text{std}(\text{pureza})$ são aproximadamente iguais para $\text{pureza} = 0,99$ e $\text{abs}(\text{vies})$ é maior do que $\text{std}(\text{pureza})$ para $\text{pureza} = 1$.

Figura 3 – Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e número quase máximo de fases. Números de medições: 40.000, 20.000, 10.000 e 1.000. Número máximo de fótons: 10.



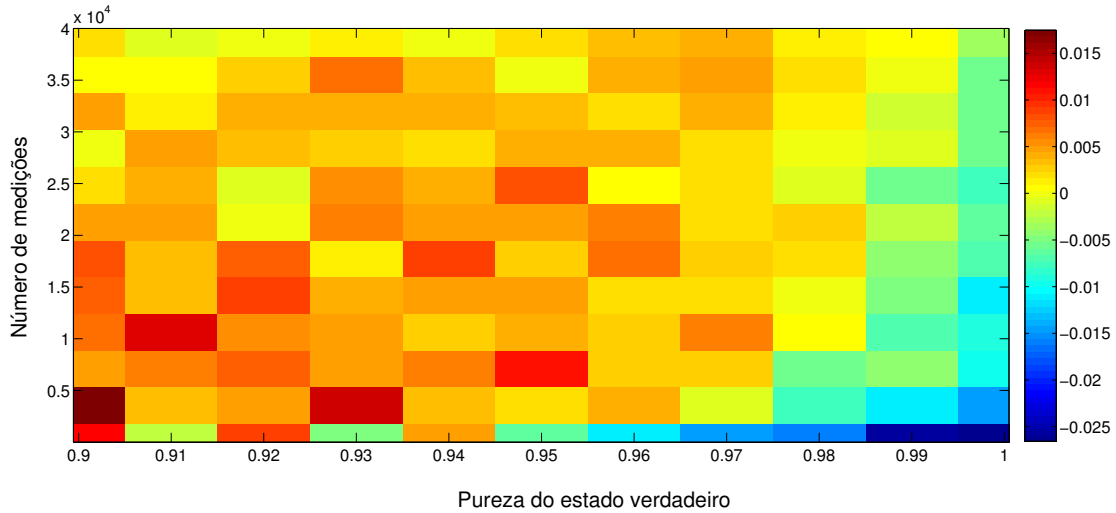
Fonte: próprio autor.

A Figura 4 é um mapa de cores do viés da pureza como função do número de medições e da pureza do estado verdadeiro. Esta figura nos dá uma descrição qualitativa do viés da pureza para um número maior de medições.

Na Figura 5, ainda temos um estado próximo do vácuo, mas as fases agora foram escolhidas utilizando o segundo método, ou seja, ângulos igualmente espaçados, para seis fases diferentes. Podemos ver na figura que o viés é consideravelmente maior do que quando as fases são escolhidas aleatoriamente para cada medida. Para todos os casos, $\text{std}(\text{pureza}) \approx 0,01$ para todos os valores de pureza, que é sempre consideravelmente menor do que $\text{abs}(\text{vies})$.

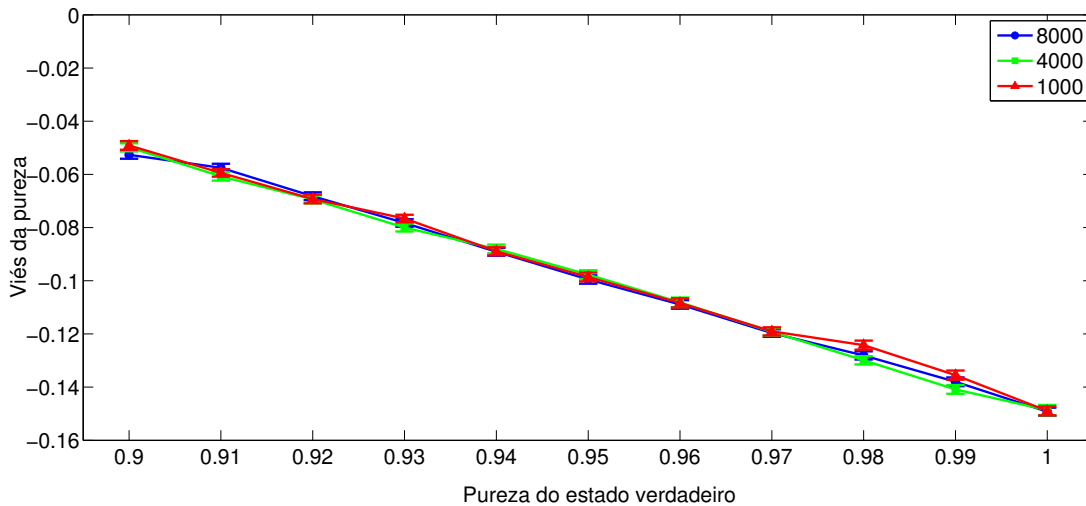
Na Figura 6, temos os gráficos para 8.000 medições para a tomografia de um estado próximo do vácuo usando cada um dos dois métodos de escolha do número de fases. Como podemos ver nessa figura, assim como nas figuras 3 e 5, aumentar o número de fases

Figura 4 – Mapa de cores do viés da pureza como função do número de medições e da pureza do estado verdadeiro. Temos um estado próximo do vácuo e número quase máximo de fases. Números de medições: 40.000, 20.000, 18.000, 16.000, 14.000, 12.000, 10.000, 8.000, 6.000, 4.000, 2.000 e 1.000. Número máximo de fótons: 10.



Fonte: próprio autor

Figura 5 – Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e ângulos igualmente espaçados. Números de medições: 8.000, 4.000 e 1.000. Número máximo de fótons: 10

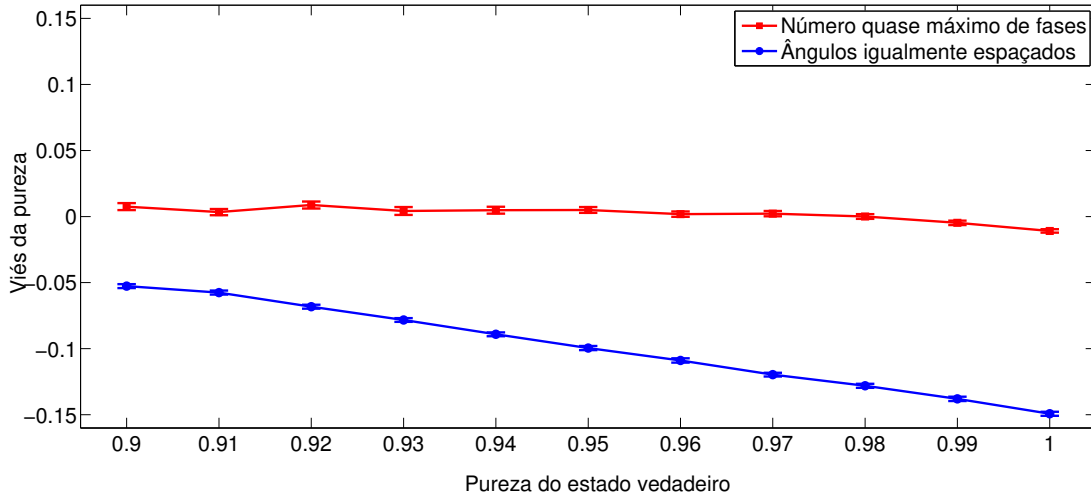


Fonte: próprio autor

melhora a reconstrução e reduz o viés. Vemos na Figura 5 que quando usamos seis ângulos igualmente espaçados temos $\text{abs}(\text{vies})$ consideravelmente maior do que $\text{std}(\text{pureza})$, enquanto que ao usarmos um número quase máximo de fases, temos $\text{abs}(\text{vies})$ maior do que $\text{std}(\text{pureza})$ apenas quando $\text{pureza} = 1$.

Apresentamos, até agora, resultados de matrizes densidades reconstruídas em um espaço de Hilbert de 10 fótons. Argumentamos a seguir que 10 fótons são suficientes para

Figura 6 – Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e para dois métodos de escolha do número de fases: número quase máximo de fases e ângulos igualmente espaçados. Número de medições: 8.000. Número máximo de fótons: 10



Fonte: próprio autor

representar o estado próximo do vácuo que temos analisado. Um estado estará bem representado em um espaço de Hilbert truncado em n fótons, evitando erros na tomografia, quando a soma das probabilidades de ter n fótons nesse estado está próxima de um, isto é,

$$\sum_{n=0}^n P(n) \simeq 1, \quad (5.5)$$

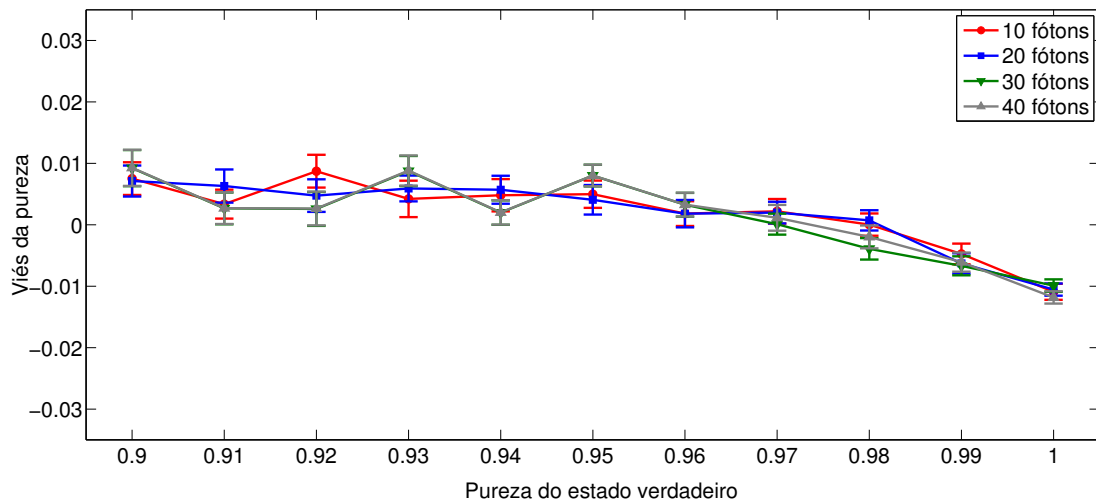
onde $P_n = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle$. Para um estado próximo do vácuo, o número de fótons no estado aumenta quando diminuimos a pureza. O estado próximo do vácuo com pureza de 0,9 (a menor que trabalhamos) tem uma probabilidade de $1,15 \times 10^{-5}$ de conter mais de 10 fótons. Ou seja, um espaço de Hilbert de 10 fótons deve representar fielmente todos os estados próximos do vácuo que consideramos.

Na Figura 7 mostramos o viés da pureza de matrizes densidade reconstruídas em espaços de Hilbert de 10-40 fótons. Vemos que o uso de um espaço de Hilbert maior não tem efeito no viés da pureza. A Figura 7 também mostra que quando escolhemos aleatoriamente uma fase para cada uma das 8.000 medições, ganhamos informações da fase mais do que suficientes para estimar o estado, mesmo em um espaço de Hilbert com 40 fótons. Em todos os casos mostrado nessa figura, $\text{abs}(\text{vies})$ é maior do que $\text{std}(\text{pureza})$ apenas quando a pureza do estado verdadeiro é igual a um.

Exploramos o efeito das medições com número insuficiente de fases na Figura 8, onde usamos somente seis fases igualmente espaçadas para medir o estado próximo do vácuo.

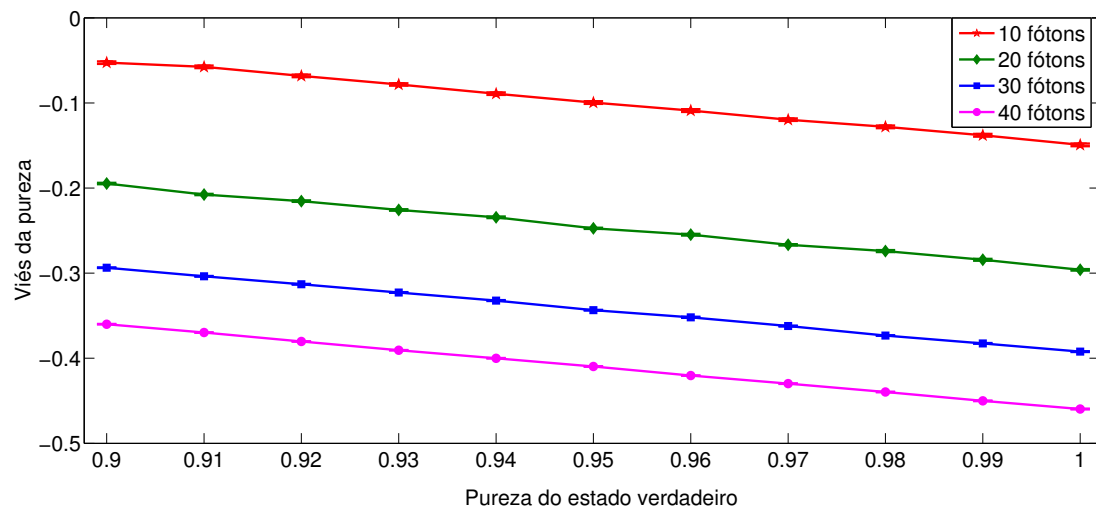
Reconstruímos a matriz densidade em espaços de Hilbert de 10, 20, 30 e 40 fótons. Apenas seis fases não fornecem um conjunto de medições informacionalmente completo (LEONHARDT, 1997) e com isso tivemos uma introdução de erro sistemático significativa na reconstrução, refletido no viés negativo que é mais severo para espaços de Hilbert maiores.

Figura 7 – Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e número quase máximo de fases. Número de medições: 8.000. Número máximo de fótons: 10, 20, 30 e 40.



Fonte: próprio autor

Figura 8 – Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um estado próximo do vácuo e ângulos igualmente espaçados. Número de medições: 8.000. Número máximo de fótons: 10, 20, 30 e 40.



Fonte: próprio autor

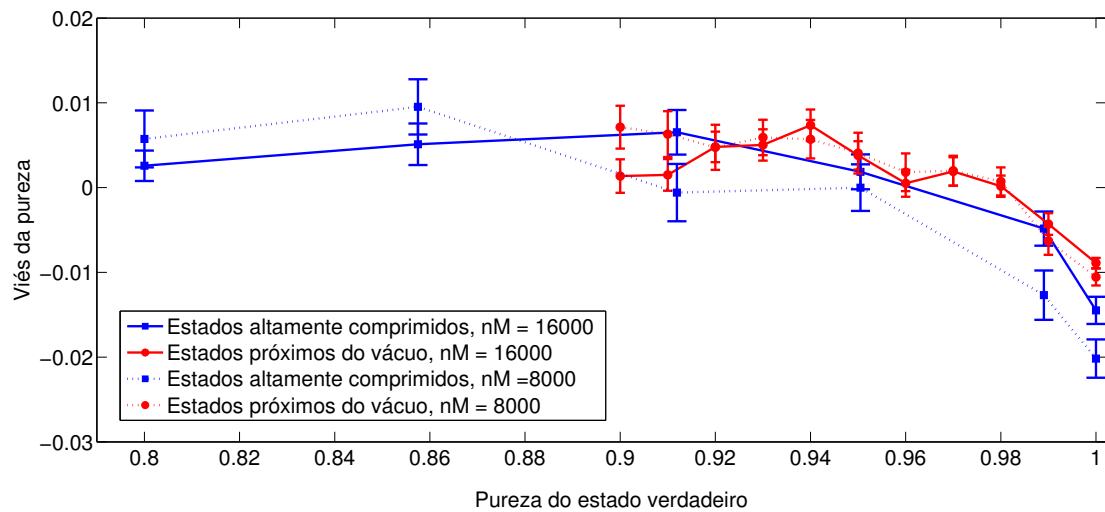
5.4 Estados altamente comprimidos

Para testar a robustez de algumas das nossas afirmações, mudamos os estados medidos de estados próximos do vácuo para estados altamente comprimidos. Cada estado é criado através do envio do estado de vácuo comprimido, cuja variância da quadratura comprimida é $1/4$ da variância do vácuo, através de um meio com perdas com uma das seguintes transmissividades: $t = [0,5; 0,8; 0,9; 0,95; 0,99; 1]$. Para cada par (s, t) , a pureza é calculada usando a equação (5.2). Estados altamente comprimidos contém mais fótons, então truncamos o espaço de Hilbert em 20 fótons. O estado altamente comprimido com mais fótons tem pureza igual a 1 (e $t = 1$). A probabilidade que esse estado tenha mais do que 20 fótons é $2,7 \times 10^{-6}$. Os resultados do viés para estados altamente comprimidos são semelhantes aos resultados para estados próximos do vácuo.

Na Fig. 9, comparamos as purezas estimadas quando medimos estados próximos do vácuo e estados altamente comprimidos. Encontramos um comportamento semelhante nos dois casos. Parece que o viés é ligeiramente mais elevado para os estados altamente comprimidos. Na reconstrução de estados próximos do vácuo, tanto com 8.000 quanto com 16.000 medições, $\text{abs}(\text{viés})$ é maior do que $\text{std}(\text{pureza})$, exceto quando $\text{pureza} = 1$. Isso também acontece quando reconstruímos estados altamente comprimidos com 8.000 medições. Na reconstrução de estados altamente comprimidos, com 16.000 medições, $\text{abs}(\text{viés})$ é maior do que $\text{std}(\text{pureza})$ para todos os casos mostrado, exceto quando $\text{pureza} = 0,95$, em que eles são aproximadamente iguais.

Claramente o viés não é função apenas da pureza do estado verdadeiro, mas depende de outras características do estado verdadeiro. Esta dependência não é bem compreendida. O aumento nas medições diminui o viés e diminui a diferença entre o viés para os estados altamente comprimidos e o viés para os estados próximos do vácuo.

Figura 9 – Viés da pureza em função da pureza do estado verdadeiro para um número quase máximo de fases e dois tipos de estados: próximo do vácuo e altamente comprimidos. Número de medições: 8.000 (linhas tracejadas) e 16.000 (linhas sólidas). Número máximo de fótons: 20



Fonte: próprio autor

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, apresentamos um resumo das principais contribuições do nosso trabalho no estudo da tomografia do estado quântico. Usamos experimentos numéricos para gerar dados simulados sob várias condições, realizar tomografia e estimar o viés nos resultados. As purezas reconstruídas médias dos estados de maiores purezas são significativamente menores do que as purezas dos estados verdadeiros correspondentes. Esse resultado mostra clara evidência de viés no algoritmo de tomografia, mesmo quando o modelo de probabilidade está correto. Também mostramos que medir a quadratura em poucas fases aumenta significativamente tanto o viés quanto o erro quadrado médio na pureza do estado estimado. Quanto maior o número de ângulos considerados, menor é o viés. O valor absoluto do viés parece ser um pouco maior para a tomografia realizada em estados altamente comprimidos do que em estados próximos do vácuo.

Neste trabalho, focamos na influência da pureza do estado verdadeiro no viés da pureza estimada, encontrando que os estados verdadeiros mais puros sofrem mais viés, o que está de acordo com os resultados de (SCHWEMMER *et al.*, 2015). No entanto, se esta é uma propriedade geral para todos os estados é uma questão em aberto. Mais experimentos numéricos com uma maior diversidade de estados e usando esquemas de medição diferentes nos dariam mais informações, como também a exploração do viés em função de outros parâmetros.

Em muitos de nossos experimentos numéricos, encontramos que o viés na pureza é significativo quando comparado com o desvio padrão das estimativas da pureza. Isto é particularmente problemático se ferramentas de reamostragem, como o *bootstrap*, são usadas para atribuir incertezas na tomografia de estados quânticos. Se um *bootstrap* não-paramétrico é usado, cada estimativa que ele faz será similarmente enviesada. Se um *bootstrap* paramétrico é usado, a estimativa original é enviesada uma vez e as estimativas do *bootstrap* serão enviesadas uma segunda vez. Existem métodos de correção de viés para *bootstrap* paramétrico, mas eles exigem que o viés seja consistente para diferentes estados (EFRON; TIBSHIRANI, 1994). Esta poderia ser uma aproximação razoável, mas vimos que isso não é rigorosamente verdade. Devido aos problemas causados pelo viés, talvez seja útil usar intervalos de confiança como os descritos em (BLUME-KOHOUT, 2012; CHRISTANDL; RENNER, 2012; FAIST; RENNER, 2016) para designar incertezas para os parâmetros estimados. Infelizmente, esses métodos produzem regiões de confiança que são significativamente maiores e mais conservadoras do que as produzidas por métodos *bootstrap* comumente usados em tomografia de estados quânticos.

REFERÊNCIAS

- ALDRICH, J. R. a. fisher and the making of maximum likelihood 1912-1922. **Statistical science**, Institute of Mathematical Statistics, v. 12, n. 3, p. 162–176, 1997.
- BANASZEK, K.; CRAMER, M.; GROSS, D. Focus on quantum tomography. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 12, p. 125020, 2013.
- BAUMGRATZ, T.; NÜSSELER, A.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. A scalable maximum likelihood method for quantum state tomography. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 12, p. 125004, 2013.
- BERTRAND, J.; BERTRAND, P. A tomographic approach to wigner’s function. **Foundations of Physics**, Springer, v. 17, n. 4, p. 397–405, 1987.
- BLUME-KOHOUT, R. Robust error bars for quantum tomography. **arXiv:1202.5270**, 2012.
- BRAUNSTEIN, S. L.; CAVES, C. M. Statistical distance and the geometry of quantum states. **Physical Review Letters**, APS, v. 72, n. 22, p. 3439, 1994.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical inference**. [S.l.]: Duxbury Press, 1990.
- CASTRO, R. Rey-de; CABRERA, R.; BONDAR, D. I.; RABITZ, H. Time-resolved quantum process tomography using hamiltonian-encoding and observable-decoding. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 2, p. 025032, 2013.
- CHRISTANDL, M.; RENNER, R. Reliable quantum state tomography. **Physical Review Letters**, APS, v. 109, n. 12, p. 120403, 2012.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An introduction to the bootstrap**. [S.l.]: CRC Press, 1994.
- ENK, S. J. van; BLUME-KOHOUT, R. When quantum tomography goes wrong: drift of quantum sources and other errors. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 2, p. 025024, 2013.
- FAIST, P.; RENNER, R. Practical and reliable error bars in quantum tomography. **Physical Review Letters**, APS, v. 117, n. 1, p. 010404, 2016.
- GLANCY, S.; KNILL, E.; GIRARD, M. Gradient-based stopping rules for maximum-likelihood quantum-state tomography. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 14, n. 9, p. 095017, 2012.
- GLAUBER, R. J. The quantum theory of optical coherence. **Physical Review**, APS, v. 130, n. 6, p. 2529, 1963.
- GONCALVES, D. S. **Métodos matemáticos em tomografia de estados quânticos**. Tese (Doutorado) — Unicamp, 2013.
- HEISENBERG, W.; PAULI, W. Zur quantendynamik der wellenfelder. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 56, n. 1-2, p. 1–61, 1929.
- HELSTROM, C. W. Minimum mean-squared error of estimates in quantum statistics. **Physics letters A**, Elsevier, v. 25, n. 2, p. 101–102, 1967.

- HRADIL, Z. Quantum-state estimation. **Physical Review A**, APS, v. 55, n. 3, p. R1561, 1997.
- KAYE, P.; LAFLAMME, R.; MOSCA, M. **An introduction to quantum computing**. [S.l.]: Oxford University Press, 2007.
- KENNEDY W. J. ; GENTLE, J. E. **Statistical computing**. [S.l.]: Marcel Dekker Ltd, 1980.
- LANGFORD, N. K. Errors in quantum tomography: diagnosing systematic versus statistical errors. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 3, p. 035003, 2013.
- LEONHARDT, U. **Measuring the quantum state of light**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- LVOVSKY, A. I.; RAYMER, M. G. Continuous-variable optical quantum-state tomography. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 81, n. 1, p. 299, 2009.
- MANDEL, L.; WOLF, E. **Optical coherence and quantum optics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.
- MOGILEVTSEV, D.; IGNATENKO, A.; MALOSHTAN, A.; STOKLASA, B.; REHACEK, J.; HRADIL, Z. Data pattern tomography: reconstruction with an unknown apparatus. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 2, p. 025038, 2013.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- PAIS, A. **Inward bound: of matter and forces in the physical world**. [S.l.]: Oxford University Press, 1988.
- PARIS, M. G. A.; ILLUMINATI, F.; SERAFINI, A.; SIENA, S. D. Purity of gaussian states: Measurement schemes and time-evolution in noisy channels. **Physical Review A**, APS, v. 68, n. 1, p. 012314, 2003.
- RAO, C. R. Linear statistical inference and its applications. **The Annals of Mathematical Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 38, n. 1, p. 281–284, 1967.
- ŘEHÁČEK, J.; HRADIL, Z.; KNILL, E.; LVOVSKY, A. Diluted maximum-likelihood algorithm for quantum tomography. **Physical Review A**, APS, v. 75, n. 4, p. 042108, 2007.
- SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics, revised edition**. [S.l.]: AAPT, 1995.
- SCHWEMMER, C.; KNIPS, L.; RICHART, D.; WEINFURTER, H.; MORODER, T.; KLEINMANN, M.; GÜHNE, O. Systematic errors in current quantum state tomography tools. **Physical Review Letters**, APS, v. 114, n. 8, p. 080403, 2015.
- SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. **Quantum optics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- SHANG, J.; NG, H. K.; ENGLERT, B.-G. Quantum state tomography: Mean squared error matters, bias does not. **arXiv:1405.5350**, 2014.
- SHAO, J. **Mathematical Statistics**. [S.l.]: Springer, 1998.
- SILVA, G. B.; GLANCY, S.; VASCONCELOS, H. M. Investigating bias in maximum-likelihood quantum-state tomography. **Physical Review A**, APS, v. 95, n. 2, p. 022107, 2017.

SUGIYAMA, T.; TURNER, P. S.; MURAO, M. Effect of non-negativity on estimation errors in one-qubit state tomography with finite data. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 14, n. 8, p. 085005, 2012.

VOGEL, K.; RISKEN, H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. **Physical Review A**, APS, v. 40, n. 5, p. 2847, 1989.

WIGNER, E. Über das überschreiten von potentialschwellen bei chemischen reaktionen. **Zeitschrift für Physikalische Chemie**, De Gruyter Oldenbourg, v. 19, n. 1, p. 203–216, 1932.

APÊNDICE A – TABELAS

As tabelas abaixo contém os valores da pureza do estado verdadeiro, do viés da pureza e do desvio padrão das estimativas para todos os casos estudados nesse trabalho.

As tabelas 1-4, contém os dados da Figura 3, onde temos um estado próximo do vácuo com número quase máximo de fases e número máximo de 10 fótons.

Tabela 1 – Para o caso de 40.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0022	0,0075
0,91	-0,0007	0,0084
0,92	-0,0001	0,0085
0,93	0,0012	0,0078
0,94	0,0000	0,0079
0,95	-0,0019	0,0091
0,96	0,0032	0,0080
0,97	0,0039	0,0074
0,98	0,0012	0,0080
0,99	0,0005	0,0048
1,00	-0,0037	0,0032

Tabela 2 – Para o caso de 20.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0006	0,0134
0,91	0,0006	0,0115
0,92	0,0025	0,0097
0,93	0,0068	0,0127
0,94	0,0036	0,0117
0,95	-0,0004	0,0124
0,96	0,0040	0,0112
0,97	0,0045	0,0105
0,98	0,0017	0,0101
0,99	-0,0002	0,0060
1,00	-0,0058	0,0056

Tabela 3 – Para o caso de 10.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0081	0,0142
0,91	0,0035	0,0141
0,92	0,0072	0,0152
0,93	0,0012	0,0183
0,94	0,0087	0,0164
0,95	0,0024	0,0159
0,96	0,0068	0,0121
0,97	0,0025	0,0147
0,98	0,0020	0,0115
0,99	-0,0041	0,0113
1,00	-0,0072	0,0077

Tabela 4 – Para o caso de 1.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0119	0,0460
0,91	-0,0020	0,0390
0,92	0,0087	0,0431
0,93	-0,0052	0,0347
0,94	0,0046	0,0266
0,95	-0,0061	0,0334
0,96	-0,0110	0,0286
0,97	-0,0146	0,0306
0,98	-0,0162	0,0229
0,99	-0,0257	0,0257
1,00	-0,0266	0,0210

As tabelas 5-7, contém os dados da Figura 5, e são para um estado próximo do vácuo com ângulos igualmente espaçados e número máximo de 10 fótons.

Tabela 5 – Para o caso de 8.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	-0,0526	0,0104
0,91	-0,0575	0,0107
0,92	-0,0682	0,0104
0,93	-0,0783	0,0102
0,94	-0,0891	0,0103
0,95	-0,0995	0,0111
0,96	-0,1089	0,0114
0,97	-0,1197	0,0099
0,98	-0,1281	0,0109
0,99	-0,1380	0,0116
1,00	-0,1493	0,0109

Tabela 6 – Para o caso de 4.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	-0,0498	0,0107
0,91	-0,0607	0,0112
0,92	-0,0694	0,0107
0,93	-0,0800	0,0106
0,94	-0,0880	0,0116
0,95	-0,0977	0,0114
0,96	-0,1081	0,0129
0,97	-0,1192	0,0101
0,98	-0,1299	0,0110
0,99	-0,1409	0,0117
1,00	-0,1487	0,0141

Tabela 7 – Para o caso de 1.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	-0,0491	0,0114
0,91	-0,0594	0,0101
0,92	-0,0693	0,0116
0,93	-0,0766	0,0102
0,94	-0,0889	0,0108
0,95	-0,0986	0,0116
0,96	-0,1084	0,0122
0,97	-0,1190	0,0108
0,98	-0,1242	0,0121
0,99	-0,1355	0,0122
1,00	-0,1490	0,0118

As tabelas 8 e 9, contém os dados da Figura 6, e são para 8.000 medições e número máximo de 10 fótons.

Tabela 8 – Método do número quase máximo de fases.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0075	0,0188
0,91	0,0034	0,0167
0,92	0,0087	0,0189
0,93	0,0042	0,0210
0,94	0,0048	0,0186
0,95	0,0050	0,0157
0,96	0,0018	0,0142
0,97	0,0022	0,0142
0,98	0,0000	0,0128
0,99	-0,0047	0,0119
1,00	-0,0109	0,0092

Tabela 9 – Método dos ângulos igualmente espaçados.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	-0,0526	0,0104
0,91	-0,0575	0,0107
0,92	-0,0682	0,0104
0,93	-0,0783	0,0102
0,94	-0,0891	0,0103
0,95	-0,0995	0,0111
0,96	-0,1089	0,0114
0,97	-0,1197	0,0099
0,98	-0,1281	0,0109
0,99	-0,1380	0,0116
1,00	-0,1493	0,0109

As tabelas 10-13, contém os dados da Figura 7, e são para um estado próximo do vácuo, número máximo de fases e 8.000 medições.

Tabela 10 – Para o caso de 10 fótons.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0075	0,0188
0,91	0,0034	0,0167
0,92	0,0087	0,0189
0,93	0,0042	0,0210
0,94	0,0048	0,0186
0,95	0,0050	0,0157
0,96	0,0018	0,0142
0,97	0,0022	0,0142
0,98	0,0000	0,0128
0,99	-0,0047	0,0119
1,00	-0,0109	0,0092

Tabela 11 – Para o caso de 20 fótons.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0071	0,0178
0,91	0,0063	0,0191
0,92	0,0048	0,0188
0,93	0,0059	0,0148
0,94	0,0057	0,0161
0,95	0,0041	0,0170
0,96	0,0018	0,0157
0,97	0,0020	0,0125
0,98	0,0007	0,0117
0,99	-0,0063	0,0117
1,00	-0,0105	0,0071

Tabela 12 – Para o caso de 30 fótons.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0092	0,0208
0,91	0,0027	0,0183
0,92	0,0026	0,0195
0,93	0,0087	0,0173
0,94	0,0020	0,0141
0,95	0,0080	0,0125
0,96	0,0033	0,0137
0,97	0,0001	0,0121
0,98	-0,0039	0,0123
0,99	-0,0067	0,0109
1,00	-0,0099	0,0072

Tabela 13 – Para o caso de 40 fótons.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0093	0,0208
0,91	0,0027	0,0183
0,92	0,0026	0,0194
0,93	0,0088	0,0174
0,94	0,0020	0,0140
0,95	0,0080	0,0125
0,96	0,0033	0,0137
0,97	0,0011	0,0149
0,98	-0,0020	0,0131
0,99	-0,0061	0,0110
1,00	-0,0118	0,0071

As tabelas 14-17, contém os dados da Figura 8, e são para um estado próximo do vácuo e ângulos igualmente espaçados.

Tabela 14 – Para o caso de 10 fótons.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	-0,0526	0,0104
0,91	-0,0575	0,0107
0,92	-0,0682	0,0104
0,93	-0,0783	0,0102
0,94	-0,0891	0,0103
0,95	-0,0995	0,0111
0,96	-0,1089	0,0114
0,97	-0,1197	0,0099
0,98	-0,1281	0,0109
0,99	-0,1380	0,0116
1,00	-0,1493	0,0109

Tabela 15 – Para o caso de 20 fótons.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	-0,1947	0,0055
0,91	-0,2076	0,0056
0,92	-0,2153	0,0064
0,93	-0,2257	0,0063
0,94	-0,2343	0,0067
0,95	-0,2474	0,0049
0,96	-0,2548	0,0068
0,97	-0,2667	0,0054
0,98	-0,2740	0,0081
0,99	-0,2843	0,0075
1,00	-0,2961	0,0065

Tabela 16 – Para o caso de 30 fótons.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	-0,2936	0,0027
0,91	-0,3037	0,0031
0,92	-0,3131	0,0033
0,93	-0,3227	0,0032
0,94	-0,3322	0,0038
0,95	-0,3435	0,0029
0,96	-0,3519	0,0046
0,97	-0,3622	0,0038
0,98	-0,3733	0,0024
0,99	-0,3826	0,0031
1,00	-0,3922	0,0033

Tabela 17 – Para o caso de 40 fótons.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	-0,3600	0,0021
0,91	-0,3698	0,0021
0,92	-0,3803	0,0016
0,93	-0,3906	0,0014
0,94	-0,4000	0,0021
0,95	-0,4097	0,0027
0,96	-0,4204	0,0013
0,97	-0,4298	0,0026
0,98	-0,4396	0,0023
0,99	-0,4501	0,0022
1,00	-0,4596	0,0031

As tabelas 18-21, contém os dados da Figura 9, e são para número máximo de 20 fótons.

Tabela 18 – Estados próximos do vácuo com 8.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0071	0,0178
0,91	0,0063	0,0191
0,92	0,0048	0,0188
0,93	0,0059	0,0148
0,94	0,0057	0,0161
0,95	0,0041	0,0170
0,96	0,0018	0,0157
0,97	0,0020	0,0125
0,98	0,0007	0,0117
0,99	-0,0063	0,0117
1,00	-0,0105	0,0071

Tabela 19 – Estados altamente comprimidos com 8.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,8000	0,0057	0,0237
0,8577	0,0095	0,0230
0,9119	-0,0006	0,0239
0,9505	-0,0000	0,0194
0,9890	-0,0127	0,0206
1,0000	-0,0202	0,0160

Tabela 20 – Estados próximos do vácuo com 16.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,90	0,0014	0,0140
0,91	0,0015	0,0132
0,92	0,0048	0,0127
0,93	0,0050	0,0130
0,94	0,0074	0,0118
0,95	0,0038	0,0113
0,96	0,0005	0,0118
0,97	0,0019	0,0089
0,98	0,0002	0,0090
0,99	-0,0043	0,0043
1,00	-0,0089	0,0071

Tabela 21 – Estados altamente comprimidos com 16.000 medições.

Pureza do estado verdadeiro	Viés da pureza	Desvio padrão das estimativas
0,8000	0,0026	0,0018
0,8577	0,0051	0,0025
0,9119	-0,0065	0,0026
0,9505	-0,0019	0,0021
0,9890	-0,0048	0,0020
1,0000	-0,0145	0,0016