

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**

**PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES**

**MODELO MULTI-ESCALA PARA ANÁLISE  
ESTRUTURAL DE COMPÓSITOS VISCOELÁSTICOS  
SUSCETÍVEIS AO DANO**

**Flávio Vasconcelos de Souza**

**Dissertação submetida ao Programa de  
Mestrado em Engenharia de Transportes  
da Universidade Federal do Ceará, como  
parte dos requisitos para a obtenção do  
título de Mestre em Ciências (M.Sc.) em  
Engenharia de Transportes**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Jorge Barbosa Soares**

**Fortaleza  
2005**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

SOUZA, FLÁVIO VASCONCELOS DE

Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Suscetíveis ao Dano. Fortaleza, 2005.

xxi, 189 fl., Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes) – Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.

- |                                  |                              |
|----------------------------------|------------------------------|
| 1. Transportes – Dissertação     | 2. Modelo Multi-Escala       |
| 3. Mecânica dos Materiais        | 4. Compósitos Viscoelásticos |
| 5. Método dos Elementos Finitos  | 6. Heterogeneidade           |
| 7. Propagação e Evolução do Dano |                              |

**CDD 388**

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

SOUZA, F. V. (2005) Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Suscetíveis ao Dano. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 189 fl.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Flávio Vasconcelos de Souza

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Suscetíveis ao Dano.

Mestre / 2005

É concedida à Universidade Federal do Ceará permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Flávio Vasconcelos de Souza

Rua Juvenal de Carvalho, 1068 – Bairro de Fátima

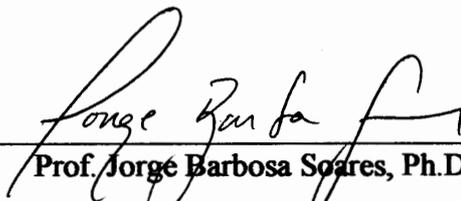
CEP: 60.050-220 – Fortaleza/CE – Brasil

MODELO MULTI-ESCALA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE COMPÓSITOS  
VISCOELÁSTICOS SUSCETÍVEIS AO DANO

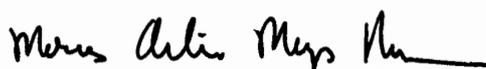
Flávio Vasconcelos de Souza

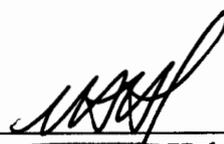
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
MESTRADO EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE  
TRANSPORTES.

Aprovada por:

  
Prof. Jorge Barbosa Soares, Ph.D.  
(Orientador)

  
Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, D.Sc.  
(Examinador Interno)

  
Prof. Marcos Aurélio Marques Noronha, Ph.D.  
(Examinador Externo)

  
Prof. Marco Aurélio Holanda de Castro, Ph.D.  
(Examinador Interno)

FORTALEZA, CE – BRASIL  
FEVEREIRO DE 2005

## DEDICATÓRIA

A Deus, por todas as graças concedidas.

Aos meus pais, Januário e Maria de Fátima, pelo amor e apoio incondicionais.

À minha noiva, Isabéla, pelo amor, companheirismo e dedicação.

Aos meus irmãos, Fábio e Januário Júnior, e irmã, Fabíola, pelo carinho e fraternidade.

Aos meus familiares e amigos.

DEDICO.

*“Não existem grandes homens. Existem apenas grandes desafios, que nós, pessoas comuns, somos forçadas a encontrar pelas circunstâncias da vida.”*

William F. Halsey

## AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho tornou-se possível graças às contribuições de diversas pessoas, a quem dedico meus sinceros agradecimentos. Na impossibilidade de citar os nomes de todos, gostaria de agradecer, em especial àqueles que participaram mais diretamente do processo de conclusão desta dissertação:

Aos professores Marco Aurélio Holanda de Castro e Jorge Barbosa Soares, meus orientadores de iniciação científica e de mestrado, respectivamente, pelos conselhos, orientação e oportunidades a mim concedidos.

Ao professor David H. Allen por acreditar no meu potencial e pelo incentivo e suporte científico nas áreas de Mecânica dos Materiais, Teoria da Viscoelasticidade, Mecânica da Fratura e Teorias de Homogeneização.

Ao professor Joaquim Bento Cavalcante Neto, pela orientação com relação à geração e manipulação das malhas de elementos finitos.

A todos os professores, alunos e funcionários do PETRAN e a toda a equipe do Laboratório de Mecânica dos Pavimentos (LMP/DET/UFC), por possibilitarem meu desenvolvimento acadêmico-científico e pelas experiências compartilhadas.

Aos Engenheiros Mecânicos Francisco Nélio Costa Freitas e José Éder de Mendonça Ribeiro pelo suporte durante a realização dos ensaios experimentais no Laboratório de Caracterização dos Materiais (LACAM/UFC) e ao Engenheiro Civil Marcelo Silva Medeiros Júnior por ceder as bases utilizadas nos ensaios de tração direta.

À Agência Nacional do Petróleo (ANP) pelo suporte financeiro.

E principalmente a Deus, por todas as graças concedidas, e a toda a minha família, pelo amor, apoio, confiança e formação ética e profissional, a quem dedico este trabalho e devo minha vida.

Resumo da Dissertação submetida ao PETRAN/UFC como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências (M.Sc.) em Engenharia de Transportes.

## MODELO MULTI-ESCALA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE COMPÓSITOS VISCOELÁSTICOS SUSCETÍVEIS AO DANO

Flávio Vasconcelos de Souza

Fevereiro/2005

Orientador: Jorge Barbosa Soares, Ph.D.

Observa-se, atualmente, uma tendência crescente de utilização de materiais compósitos nas mais diversas aplicações da engenharia. Isto se deve, em grande parte, à vantagem desses materiais de possibilitar o controle de seus constituintes individuais e suas respectivas distribuições espaciais de modo a otimizar o desempenho do material resultante. Exemplos de materiais compósitos muito usados na construção civil são o Concreto de Cimento Portland (CCP) e as misturas asfálticas. No entanto, os materiais compósitos apresentam peculiaridades com relação ao seu comportamento constitutivo global devido às diferenças de comportamento e de geometria dos seus constituintes. Assim sendo, para que se possa compreender e prever o comportamento dos materiais compósitos em serviço, torna-se importante considerar o comportamento individual de seus constituintes e suas respectivas interações. Neste trabalho, desenvolve-se um modelo computacional em duas escalas para a previsão do comportamento mecânico de misturas asfálticas do tipo Areia Asfalto Usinada a Quente (AAUQ), onde o comportamento da escala maior (macroescala ou escala global), considerada homogênea, é determinado a partir do comportamento da escala menor heterogênea (microescala ou escala local) formada por agregados pétreos elásticos distribuídos numa matriz viscoelástica aqui denominada de mastique (ligante asfáltico misturado com agregados finos). O dano observado na escala global do modelo é consequência da formação e propagação de trincas e do desenvolvimento de deformações permanentes na escala local. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é usado no cálculo de tensões, deformações e deslocamentos e na modelagem da formação e propagação de trincas.

Abstract of Thesis submitted to PETRAN/UFC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.) in Transportation Engineering.

MULTI-SCALE MODEL FOR STRUCTURAL ANALYSIS OF VISCOELASTIC  
COMPOSITES SUSCEPTIBLE TO DAMAGE

Flávio Vasconcelos de Souza

February/2005

Advisor: Jorge Barbosa Soares, Ph.D.

Composite materials are increasingly used in many engineering applications. The main advantage of composite materials lies on the possibility to control the individual components and their spatial distributions in order to optimize the performance of the resulting material. Concrete and the asphalt mixtures are some examples of composite materials commonly used in civil engineering. Composite materials commonly exhibit a particular global constitutive behavior due to the different geometries and constitutive behaviors of its individual constituents. Thus, in order to understand and predict the behavior of composite materials in service, it is important to consider the individual behavior of its constituents and their interactions. In this research work, a two scale computational model is developed to predict the mechanical behavior of sand asphalt mixtures, wherein the behavior of the assumed homogeneous larger scale (macroscale or global scale) is determined based on the behavior of the heterogeneous smaller scale (microscale or local scale). The microstructure (local scale) is formed by elastic granite aggregate randomly distributed in a viscoelastic asphalt matrix (asphalt binder mixed with fine aggregates). In the model developed herein, the global scale damage is a result of the formation and growth of cracks and the accumulation of permanent deformations in the local scale. The Finite Element Method is used in order to calculate stresses, strains and displacements and to model the formation and growth of cracks.

# SUMÁRIO

## CAPÍTULO 1

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 PROBLEMA DE PESQUISA .....	5
1.2 OBJETIVOS .....	6
1.2.1 Objetivo Geral.....	6
1.2.2 Objetivos Específicos .....	6
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	7

## CAPÍTULO 2

<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	9
2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) .....	9
2.2 TEORIA DA VISCOELASTICIDADE .....	14
2.2.1 Linearidade .....	16
2.2.2 Relações Constitutivas para Materiais Viscoelásticos Lineares .....	17
2.2.3 Princípios de Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV) .....	22
2.2.4 Modelos Mecânicos .....	25
2.2.5 Métodos de Regressão das Funções Viscoelásticas.....	29
2.2.6 Interconversão Entre as Propriedades Viscoelásticas .....	35
2.2.7 Método de Obtenção de $E(t)$ a partir de $D(t)$ .....	38
2.2.8 Termoviscoelasticidade .....	42
2.2.9 Incrementalização das Relações Constitutivas Viscoelásticas .....	47
2.3 MECÂNICA DA FRATURA.....	49
2.3.1 Modelo de Zona Coesiva Micromecânico Viscoelástico (MZC-MV) .....	54
2.4 TEORIAS DE HOMOGENEIZAÇÃO .....	58
2.4.1 Elemento de Volume Representativo (EVR).....	65

## CAPÍTULO 3

<b>CONSTRUÇÃO DO CÓDIGO MULTI-ESCALA</b> .....	67
3.1 ESTRUTURA DO PROGRAMA .....	67

**CAPÍTULO 4**

<b>MATERIAL E MÉTODOS</b> .....	73
4.1 MATERIAL .....	73
4.2 ENSAIOS MECÂNICOS .....	76
4.2.1 Ensaio de <i>Creep</i> .....	76
4.2.2 Ensaio de Tração Direta .....	77
4.2.3 Ensaio de Compressão Diametral .....	78
4.3 DIGITALIZAÇÃO DA AAUQ .....	79
4.4 GERAÇÃO DAS MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS .....	81
4.5 DETERMINAÇÃO DO EVR .....	84
4.6 DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO DO MASTIQUE ...	85
4.7 DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO DA AAUQ .....	85

**CAPÍTULO 5**

<b>RESULTADOS</b> .....	88
5.1 DETERMINAÇÃO DO EVR .....	88
5.2 PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS .....	90
5.2.1 Função Fluência do Mastique .....	90
5.2.2 Módulo de Relaxação do Mastique .....	92
5.2.3 Módulo de Relaxação da AAUQ .....	94
5.3 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS DE DANO .....	96
5.4 VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO MULTI-ESCALA .....	100
5.4.1 Simulação do Ensaio de Compressão Diametral .....	100
5.4.2 Simulação de Carregamento Cíclico de Flexão em Viga .....	110

**CAPÍTULO 6**

<b>CONCLUSÕES</b> .....	120
-------------------------	-----

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	124
---	-----

**APÊNDICE A**

<b>SOLICITAÇÕES HARMÔNICAS EM MATERIAIS VISCOELÁSTICOS</b> .....	136
A.1 PROPRIEDADES COMPLEXAS .....	139

A.2	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS COMPLEXAS.....	147
-----	---------------------------------------	-----

## **APÊNDICE B**

	<b>TRANSFORMADAS DE LAPLACE.....</b>	<b>154</b>
--	--------------------------------------	------------

## **APÊNDICE C**

	<b>MODELOS MECÂNICOS VISCOELÁSTICOS.....</b>	<b>159</b>
C.1	MODELO DE MAXWELL.....	160
C.2	MODELO DE VOIGT.....	166
C.3	SÓLIDO LINEAR PADRÃO.....	172
C.4	MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO .....	181
C.5	MODELO DE VOIGT GENERALIZADO .....	184
C.6	RELAÇÕES ENTRE OS MODELOS DE MAXWELL E DE VOIGT GENERALIZADOS .....	187

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Representação esquemática de uma análise multi-escala .....	2
Figura 1.2: Representação esquemática de uma análise global heterogênea .....	4
Figura 2.1: “Discretização” de um domínio retangular em elementos finitos .....	10
Figura 2.2: Representação de um elemento T3 .....	11
Figura 2.3: Solicitação qualquer e respectiva aproximação por funções degrau .....	19
Figura 2.4: Modelos mecânicos para materiais viscoelásticos.....	27
Figura 2.5: Comportamento de uma função exponencial simples .....	30
Figura 2.6: $E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^5 E_i \cdot e^{-\frac{t}{\rho_i}}$ e respectivos termos $E^i(t) = E_{\infty} + E_i \cdot e^{-\frac{t}{\rho_i}}$ , para $E_{\infty} = 10$ , $E_i = 5$ e $\rho_i = 10^{i-3}$ ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ).....	31
Figura 2.7: Forma de escada apresentada pela Equação 2.41 para $M = 5$ e $\rho_i$ espaçados por mais de uma ordem de grandeza .....	32
Figura 2.8: Representação esquemática da construção de uma curva mestra para o módulo de relaxação de um material termoreologicamente simples.....	45
Figura 2.9: Representação esquemática de um MZC.....	51
Figura 2.10: (a) Elemento de interface, (b) representação da zona coesiva e suas forças de superfície e (c) forças nodais equivalentes às forças de superfície.....	58
Figura 2.11: Representação esquemática do processo de homogeneização.....	59
Figura 2.12: Exemplo de microestrutura periódica .....	65
Figura 3.1: Fluxograma do algoritmo multi-escala em elementos finitos.....	69
Figura 4.1: Curva granulométrica da areia usada.....	74
Figura 4.2: Curva granulométrica dos agregados usados na fabricação do mastique ....	75
Figura 4.3: Ensaio de <i>creep</i> num corpo de prova de mastique.....	77
Figura 4.4: Aparato usado no ensaio de tração direta .....	78
Figura 4.5: Seção transversal de uma mistura em AAUQ e região usada na definição dos elementos de volume da escala local.....	80
Figura 4.6: Elementos de volume selecionados .....	80
Figura 4.7: Malha usada na simulação do ensaio de compressão diametral .....	81
Figura 4.8: Malha usada nas simulações em viga com elementos de interface .....	83
Figura 4.9: Malha de elementos finitos com elementos de interface para o EV-02.....	83

Figura 4.10: Malhas de elementos finitos usadas na determinação do EVR.....	84
Figura 4.11: Representação esquemática das condições iniciais e de contorno do EVR usadas na solução numérica da Equação 4.4 .....	87
Figura 5.1: Módulo de relaxação para os EV's selecionados.....	89
Figura 5.2: EVR determinado (a) sem elementos de interface e (b) com elementos de interface inseridos .....	90
Figura 5.3: Função fluência do mastique para 5°C, 25°C e 40°C, e respectiva curva mestra.....	91
Figura 5.4: Fatores de translação horizontal com relação à $T_R$ de 25°C.....	91
Figura 5.5: Determinação gráfica dos tempos de relaxação, $\rho_i$ .....	93
Figura 5.6: Módulo de relaxação e função fluência do mastique.....	94
Figura 5.7: Módulo de relaxação da AAUQ .....	95
Figura 5.8: Curvas tensão $\times$ deformação numéricas e experimentais .....	97
Figura 5.9: Configuração do EVR para a taxa de 0,0005/s em (a) $t = 11$ s e (b) $t = 40$ s .....	98
Figura 5.10: Configuração do EVR para a taxa de 0,001/s em (a) $t = 7,5$ s e (b) $t = 20$ s .....	98
Figura 5.11: Microtrincas observadas no pico de tensão para a taxa de 0,0005/s.....	99
Figura 5.12: Múltiplas trincas observadas no EVR para a taxa de 0,0005/s e $t = 40$ s	100
Figura 5.13: Resultados numéricos e experimentais para a taxa de 0,1mm/s .....	102
Figura 5.14: Resultados numéricos e experimentais para a taxa de 0,4mm/s .....	102
Figura 5.15: Distribuição das tensões horizontais, $\sigma_{xx}$ , (a) no pico da força de reação vertical e (b) ao final da simulação para a taxa de 0,1mm/s .....	103
Figura 5.16: Distribuição das tensões verticais, $\sigma_{yy}$ , (a) no pico da força de reação vertical e (b) ao final da simulação para a taxa de 0,1mm/s.....	103
Figura 5.17: Distribuição das tensões cisalhantes, $\tau_{xy}$ , (a) no pico da força de reação vertical e (b) ao final da simulação para a taxa de 0,1mm/s .....	104
Figura 5.18: Distribuição da diferença de tensões (a) horizontais de tração; (b) horizontais de compressão; (c) verticais e (d) de cisalhamento para a taxa de 0,1mm/s .....	105
Figura 5.19: Elementos escolhidos em três regiões de solicitações distintas.....	106

Figura 5.20: Estrutura local do elemento A para (a) $t = 7$ s; (b) $t = 8,5$ s e (c) $t = 10$ s para a taxa de 0,1mm/s.....	107
Figura 5.21: Estrutura local do elemento B para (a) $t = 7$ s; (b) $t = 15$ s e (c) $t = 25$ s para a taxa de 0,1mm/s .....	108
Figura 5.22: Estrutura local do elemento C para (a) $t = 7$ s; (b) $t = 15$ s e (c) $t = 25$ s para a taxa de 0,1mm/s .....	109
Figura 5.23: Malha usada para o caso multi-escala com trincas, com os elementos multi-escala em destaque .....	111
Figura 5.24: Elementos multi-escala escolhidos para a análise da estrutura local .....	111
Figura 5.25: Carregamento usado nas simulações em viga.....	112
Figura 5.26: Histórico da deflexão máxima no centro da viga.....	113
Figura 5.27: Configuração final da viga para o caso multi-escala sem trincas .....	114
Figura 5.28: Configuração da viga para o caso multi-escala com trincas em ambas as escalas em $t = 34,5$ s.....	115
Figura 5.29: Histórico da tensão horizontal observada no elemento global A.....	115
Figura 5.30: Estrutura local do elemento A para (a) $t = 14,5$ s; (b) $t = 22,5$ s; (c) $t = 30,5$ s e (d) $t = 70$ s.....	116
Figura 5.31: Estrutura local do elemento B para (a) $t = 14,5$ s; (b) $t = 22,5$ s; (c) $t = 30,5$ s e (d) $t = 70$ s.....	117
Figura 5.32: Estrutura local do elemento C para (a) $t = 14,5$ s; (b) $t = 22,5$ s; (c) $t = 30,5$ s e (d) $t = 70$ s.....	118
Figura A.1: Representação de $R_H^*$ no plano complexo.....	143
Figura C.1: Modelo de Maxwell .....	160
Figura C.2: (a) Função fluência e (b) Módulo de relaxação para o modelo de Maxwell .....	164
Figura C.3: Dependência das componentes das funções $E^*$ e $D^*$ com relação à frequência, $\omega$ , para o modelo de Maxwell.....	166
Figura C.4: Modelo de Voigt.....	167

Figura C.5: (a) Função fluência e (b) Módulo de relaxação para o modelo de Voigt..	170
Figura C.6: Dependência das componentes das funções $E^*$ e $D^*$ com relação à frequência, $\omega$ , para o modelo de Voigt .....	171
Figura C.7: Sólido linear padrão .....	172
Figura C.8: (a) Módulo de relaxação e (b) função fluência para o Sólido linear padrão.....	177
Figura C.9: Propriedades viscoelásticas complexas para o Sólido linear padrão.....	178
Figura C.10: Modelo de Voigt associado em série com uma mola.....	179
Figura C.11: Comparação do domínio de variação do módulo de relaxação do Sólido linear padrão e de dados experimentais hipotéticos .....	181
Figura C.12: Modelo de Maxwell generalizado (modelo de Wiechert).....	182
Figura C.13: Modelo de Voigt generalizado (modelo de Kelvin).....	185

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Coeficientes da série de Prony para a função fluência do mastique.....	92
Tabela 5.2: Coeficientes da série de Prony do módulo de relaxação do mastique.....	93
Tabela 5.3: Coeficientes da série de Prony para o módulo de relaxação da AAUQ .....	95
Tabela B.1: Pares de transformadas de Laplace e suas inversas para algumas funções .....	156

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

### SÍMBOLOS

$a_T$	fator de translação horizontal
$A^e$	área do elemento finito $e$
$A^{EVR}$	área da seção transversal do Elemento de Volume Representativo (EVR) do Modelo de Zona Coesiva Micromecânico Viscoelástico (MZC-MV)
$A^k(t)$	área da seção transversal da $k$ -ésima fibra do EVR do MZC-MV
$A$ e $m$	parâmetros de dano do MZC-MV
$D(t)$	função fluência
$D^*(i\omega)$	função fluência complexa
$D'(\omega)$	parte real da função fluência complexa
$D''(\omega)$	parte imaginária da função fluência complexa
$E(t)$	módulo de relaxação
$E^c(t)$	módulo de relaxação viscoelástico linear do material que constitui a zona coesiva danificada
$E^*(i\omega)$	módulo de relaxação complexo
$E'(\omega)$	parte real do módulo de relaxação complexo
$E''(\omega)$	parte imaginária do módulo de relaxação complexo
$E^R$	módulo de referência
$f(t)$	função qualquer dependente do tempo $t$
$\Delta F$	energia de ativação constante
$H(t)$	função degrau unitária
$i, j$ e $m$	letras usados como índices (letras indiciais)
$N_e$	número de elementos finitos
$R(t)$	resposta do material à solitação $S(t)$
$R_G$	constante universal dos gases

$R_H$	resposta unitária de um material
$R_{\varepsilon_{kl}}$	constante representando a taxa de variação de $\varepsilon_{kl}$
$R_{\delta_i}$	constante representando a taxa de variação de $\delta_i$
$s$	variável transformada de Laplace
$S(t)$	solicitação ao longo do tempo
$t$	tempo
$\Delta t$	incremento de tempo
$T$	temperatura
$T_R$	temperatura de referência
$T_g$	temperatura de transição vítrea
$u$	deslocamento horizontal
$v$	deslocamento vertical
$V$	volume
$\partial V$	superfície (contorno) do volume $V$
$\partial V_E$	superfície (contorno) externa de $V$
$\partial V_I$	contorno interno de $V$
$x$ e $y$	coordenadas espaciais

### Letras gregas

$\alpha(t)$	variável interna de estado que representa o dano da zona coesiva
$\delta(t)$	função delta de Dirac
$\varepsilon$	deformação
$\varepsilon^R$	pseudodeformações
$\eta$	viscosidade
$\lambda(t)$	norma Euclidiana dos deslocamentos de abertura da zona coesiva
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\Pi$	operador de montagem da matriz de rigidez global e do vetor de forças nodais global
$\theta$	diferença entre a temperatura atual e a temperatura de referência

$\rho_i$	tempo de relaxação
$\sigma$	tensão
$\tau$	variável de integração no tempo
$\tau_j$	tempo de retardação
$\omega$	freqüência
$\xi$	variável de tempo reduzido
$\psi_i^e$	funções de forma do elemento finito $e$

### Matrizes

$[B^e]$	matriz de relação deformações-deslocamentos nodais
$[C^e]$	matriz constitutiva, contendo as propriedades do material
$\{d\}^e$	vetor de deslocamentos nodais do elemento finito $e$
$\{\Delta d\}^e$	variação no vetor de $\{d\}^e$ durante o incremento de tempo
$\{D\}$	vetor de deslocamentos nodais global
$\{f\}^e$	vetor de forças nodais do elemento finito $e$
$\{f_1\}^e$	contribuição para o vetor de forças nodais devido a forças de superfície
$\{f_2\}^e$	contribuição para o vetor de forças nodais devido a tensões existentes no início do incremento de tempo
$\{f_3\}^e$	contribuição para o vetor de forças nodais devido à variação das tensões durante o incremento de tempo provocada pelo comportamento viscoelástico do material
$\{F\}$	vetor de forças nodais global.
$[k]^e$	matriz de rigidez do elemento finito $e$
$[K]$	matriz de rigidez da estrutura ou global
$[\psi^e]$	matriz das funções de forma do elemento

## Tensores e Vetores

$\alpha_{ij}$	componente do tensor de deformações médias no contorno interno, $\partial V_I$
$A_{ij}$	componente do tensor associado às expansões térmicas, o qual define as deformações térmicas na ausência de tensões impostas
$B_{ij}$	componente do tensor associado às expansões térmicas, o qual define as tensões térmicas num corpo completamente restrito de movimento no seu contorno;
$C_{ijkl}$	componente do tensor módulo de relaxação
$\delta_i(t)$	componente do vetor de deslocamento de abertura entre as faces da zona coesiva
$\delta_i^*$	componente do vetor parâmetro empírico de comprimento do material
$e_{ij}$	componente do tensor das deformações médias no contorno externo, $\partial V_E$
$\varepsilon_{kl}$	componente do tensor das deformações
$J_{ijkl}$	componente do tensor função fluência
$\Lambda_{ijkl}$	componente do tensor de localização de deformações
$n_k$	componente do vetor normal unitário na direção externa de $V$
$\sigma_{ij}$	componente do tensor de tensões
$\sigma_i^f$	componente do vetor nível de tensão necessário para iniciar-se a evolução do dano na zona coesiva
$T_i(t)$	componente do vetor força de superfície atuante no tempo $t$
$x_k$	componente do vetor das coordenadas espaciais

## NOMENCLATURA

$\dot{a}$	derivada de $a$ com relação ao tempo
$\hat{a}$	indica que $a$ é uma quantidade conhecida

$\bar{f}$	média volumétrica de $f$
$\bar{f}(s)$ ou $\mathcal{L}[f(t)]$	transformada de Laplace de $f(t)$
$\tilde{f}(s)$	transformada de Carson
$F(\omega)$	transformada de Fourier de $f(t)$
$F_c(\omega)$	transformada co-seno de Fourier de $f(t)$
$F_s(\omega)$	transformada seno de Fourier de $f(t)$
$\text{Im}[a]$	componente imaginária de $a$
$\text{Re}[a]$	componente real de $a$
$s_f$	desvio padrão de $f$

## ABREVIACÕES

AAUQ	Areia Asfalto Usinada a Quente
CAP	Cimento Asfáltico de Petróleo
CBUQ	Concreto Betuminoso Usinado a Quente
CCP	Concreto de Cimento Portland
DMT	Densidade Máxima Teórica
EV	Elemento de Volume
EVR	Elemento de Volume Representativo
LVDT	<i>Linear Variable Differential Transducer</i>
MDC	Mecânica do Dano Contínuo
MEF	Método dos Elementos Finitos
MZC	Modelo de Zona Coesiva
MZC-MV	Modelo de Zona Coesiva Micromecânico Viscoelástico
PCEV	Princípios de Correspondência Elástica-Viscoelástica
RBV	Relação Betume-Vazios
T.L	Transformada de Laplace
T3	Elemento Finito Triangular de Três Nós
VAM	Vazios no Agregado Mineral
VCB	Volumes Cheios com Betume
Vv	Volume de vazios

## CAPÍTULO 1

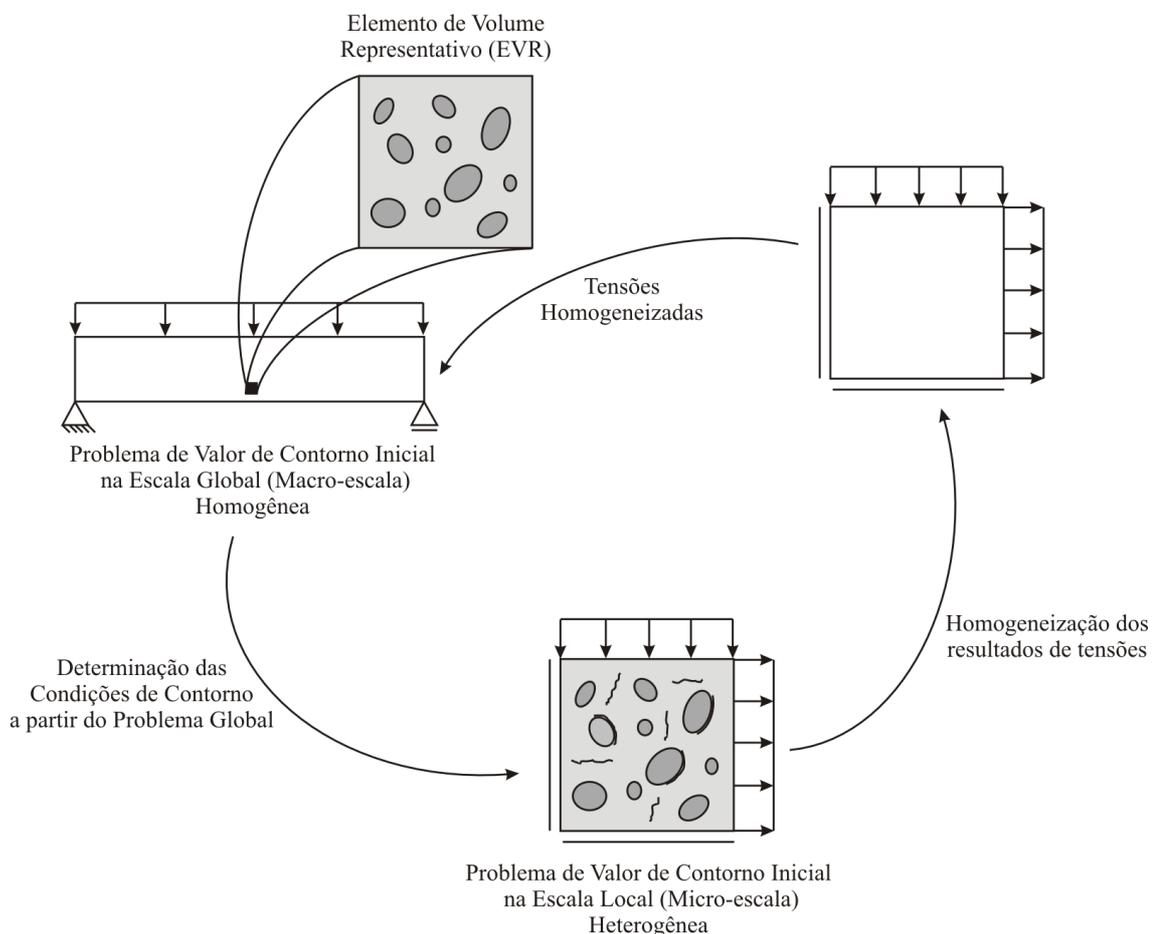
### INTRODUÇÃO

O uso de materiais compósitos, ou seja, materiais formados a partir da combinação de dois ou mais constituintes individuais, em aplicações estruturais tem crescido de forma significativa nos últimos anos, destacando-se as aplicações aeroespaciais e biomédicas. Este uso crescente deve-se ao fato de que os materiais compósitos podem oferecer características estruturais ótimas para determinadas aplicações que seus constituintes não podem oferecer individualmente. Além disso, observa-se uma preocupação crescente de minimizar o passivo ambiental provocado por certos materiais aparentemente inservíveis, os quais podem ser aproveitados como constituintes de materiais compósitos, como é o caso do asfalto-borracha. Outros exemplos de materiais compósitos aplicados na construção civil são o Concreto de Cimento Portland (CCP) e as misturas asfálticas, principalmente o Concreto Betuminoso Usinado a Quente (CBUQ) e a Areia Asfalto Usinada a Quente (AAUQ), freqüentemente usados em pavimentação.

No entanto, para se otimizar o desempenho dos materiais compósitos, é necessário o uso de metodologias capazes de determinar as frações e distribuições ótimas dos constituintes utilizados na fabricação do compósito. Essas metodologias devem reter o máximo de informações sobre a microestrutura do compósito de modo que o projetista tenha controle sobre um número máximo de variáveis. Uma metodologia que vem sendo bastante usada na comunidade científica é a chamada modelagem multi-escala (YI *et al.*, 1998; CAIAZZO e COSTANZO, 2001; HAJ-ALI e MULIANA, 2004; SEARCY, 2004).

Nos modelos multi-escala, e metodologias afins, as análises são realizadas nas escalas menores do corpo macroscópico em questão e, caso a condição de homogeneidade estatística seja satisfeita, o comportamento constitutivo das escalas maiores pode ser obtido através de Princípios de Homogeneização (ALLEN, 2001). Além disso, o dano na forma de trincas pode ser considerado através do uso de algum

tipo de Teoria da Mecânica da Fratura como o Modelo de Zona Coesiva (MZC), por exemplo. A Figura 1.1 mostra uma representação esquemática de uma análise em duas escala.



**Figura 1.1:** Representação esquemática de uma análise multi-escala

Após definição do problema global, deve-se determinar o Elemento de Volume Representativo (EVR), o qual pode ser definido como o menor volume capaz de representar de forma suficientemente precisa o comportamento global do material. Alguns métodos de determinação do EVR serão discutidos no CAPÍTULO 2.

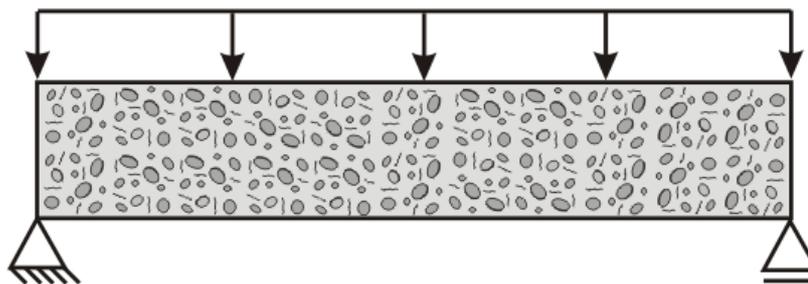
De posse do EVR, a análise multi-escala pode ser realizada da seguinte maneira: para cada ponto geométrico do problema global realiza-se uma análise local, sendo as condições de contorno locais determinadas de acordo com a solicitação gerada no problema global. Na análise local considera-se a heterogeneidade do material, a formação e propagação de microtrincas e os demais mecanismos de dissipação e/ou

ganho de energia. Realizada a análise local, seus resultados de tensão podem ser homogeneizados através de teoremas de média e retornados ao problema global. Vale ressaltar que o dano na escala global observado na forma de perda de rigidez do material homogeneizado é uma “tradução” dos mecanismos de dissipação de energia observados na escala local, como, por exemplo, a formação e propagação de microtrincas. Vale ressaltar que uma condição a ser obedecida para que as análises local e global possam ser realizadas separadamente é que a escala local deve ser muito menor do que a escala global.

A metodologia de análise multi-escala contrapõe-se à chamada Mecânica do Dano Contínuo (MDC) tradicional, a qual considera o corpo analisado como um material homogêneo, sendo o dano representado por parâmetros chamados de variáveis de estado cuja lei de evolução é determinada experimentalmente. A principal vantagem da MDC é a economia de tempo computacional, pois nenhuma análise na escala local é realizada e sua principal desvantagem é que o comportamento constitutivo do material é, na maioria das vezes, obtido fenomenologicamente ou semi fenomenologicamente.

A principal vantagem da análise multi-escala e demais modelos baseados na Micromecânica é que os fenômenos físicos contidos na escala menor são visualizados quando da solução do problema micromecânico, podendo-se, portanto, avaliar a influência destes no comportamento global. Uma outra vantagem é que, uma vez determinadas as propriedades constitutivas dos materiais constituintes, a propriedade efetiva (ou homogeneizada) do compósito resultante pode ser determinada computacionalmente para qualquer fração e/ou distribuição dos constituintes individuais sem a necessidade de realização de grandes quantidades de ensaios experimentais.

Uma terceira vantagem dos modelos multi-escala é a economia de tempo computacional em comparação com os modelos que tentam considerar todas as escalas de uma só vez. Neste último caso, a macroestrutura é modelada considerando-se as heterogeneidades pertinentes ao material, sendo sua resposta obtida através de uma única análise (análise global heterogênea), não havendo, portanto, análises locais (Figura 1.2).



**Figura 1.2:** Representação esquemática de uma análise global heterogênea

Com relação aos pavimentos asfálticos, as principais causas de falha ou ruptura são o trincamento, especialmente o provocado por fadiga, e o excesso de deformações permanentes. A situação mais dramática provocada pelo trincamento do pavimento ocorre quando essas trincas chegam à superfície e coalescem formando blocos que, posteriormente, podem formar as chamadas “panelas” (buracos na superfície do pavimento), gerando desconforto, aumento dos custos de manutenção dos veículos, e aumento o risco de acidentes para o usuário. A problemática das deformações permanentes, por sua vez, está mais relacionada à perda do conforto do usuário e ao aumento dos custos de manutenção dos veículos, provocados pela formação de ondulações na pista de rolamento.

Os fenômenos de trincamento e deformações permanentes que ocorrem na escala do pavimento estão intimamente relacionados a fenômenos inerentes às escalas menores. Por exemplo, o trincamento está relacionado aos fenômenos de microfissuração na mistura asfáltica e concentração de tensões na interface agregado-ligante, enquanto o desenvolvimento de deformações permanentes está associado à dissipação de energia provocada pelo comportamento viscoelástico do ligante, especialmente na interface agregado-ligante devido à diferença de rigidez dos dois materiais.

Assim sendo, a consideração dos fenômenos ocorrentes nas escalas menores através de um modelo multi-escala proporciona uma previsão mais confiável do comportamento global da mistura asfáltica em serviço, além de possibilitar ao projetista uma sensibilidade maior com relação à influência de determinadas características da mistura no comportamento global da mesma. Uma outra importante aplicação dos modelos multi-escala é o projeto de misturas asfálticas, onde a granulometria e frações

ótimas dos materiais utilizados (agregados pétreos, ligante asfáltico, filler, borracha e outros materiais alternativos) para cada tipo de aplicação poderiam ser determinadas computacionalmente, reduzindo, assim, a quantidade de ensaios necessários e otimizando o desempenho do material compósito.

## **1.1 PROBLEMA DE PESQUISA**

Os problemas mais freqüentemente observados nos pavimentos asfálticos são o trincamento e o excesso de deformações permanentes observados antes da vida útil projetada do pavimento, os quais estão relacionados à não consideração dos fenômenos observados nas escalas menores das misturas asfálticas, como a microfissuração, as interações ligante-agregado e o envelhecimento do ligante, de forma mais detalhada no projeto das misturas e no dimensionamento dos pavimentos.

É necessário, portanto, que se estude o efeito dos fenômenos ocorrentes nas escalas menores no comportamento global da mistura aplicada em campo (macroescala), de modo que, através de uma correta caracterização dos materiais constituintes das misturas asfálticas, se possa projetar pavimentos asfálticos mais duráveis utilizando-se agregados e ligantes característicos de cada região.

Desta forma, o presente trabalho de pesquisa propõe o desenvolvimento de um esquema de análise estrutural onde diversas escalas representativas e seus respectivos fenômenos inerentes são analisados de forma interdependente, ou seja, o comportamento de uma determinada escala é consequência do comportamento das escalas menores, de modo que se possa contribuir para um melhor entendimento do comportamento mecânico das misturas asfálticas e, conseqüentemente, contribuir para o projeto de misturas e o dimensionamento de pavimentos asfálticos mais duráveis.

## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 Objetivo Geral**

O objetivo geral deste trabalho de pesquisa é desenvolver um modelo multi-escala para análise do comportamento mecânico de misturas asfálticas capaz de considerar o comportamento viscoelástico dos materiais asfálticos, o desenvolvimento de deformações permanentes e a evolução do dano sob a forma de microtrincas.

Neste esforço, pretende-se fornecer subsídios para possibilitar projetos de misturas asfálticas mais duráveis e, conseqüentemente, contribuir para o desenvolvimento de novas metodologias de dimensionamento e execução de pavimentos asfálticos com maior vida útil, de forma a minimizar os custos com a recuperação dos mesmos.

### **1.2.2 Objetivos Específicos**

Este trabalho de pesquisa apresenta como objetivos específicos:

- a) determinar em laboratório as propriedades viscoelásticas do mastique (ligante misturado com finos) correspondente à mistura em AAUQ (Areia Asfalto Usinada à Quente) estudada;
- b) determinar os parâmetros de evolução de dano da mistura investigada usando um Modelo de Zona Coesiva Micromecânico Viscoelástico (MZC-MV) a partir de resultados experimentais;
- c) verificar e validar o modelo multi-escala através da simulação dos ensaios de compressão diametral e de flexão em viga e da comparação dos resultados numéricos com os obtidos experimentalmente para o ensaio de compressão diametral;
- d) mostrar a capacidade do esquema multi-escala desenvolvido em modelar os fenômenos de deformação permanente e de trincamento por fadiga; e

- e) contribuir para o desenvolvimento de novas metodologias de projeto de misturas asfálticas e de dimensionamento e execução de pavimentos asfálticos capazes de considerar de forma mais detalhada os fenômenos ocorrentes nas escalas menores e, conseqüentemente, capazes de prevenir o trincamento e o excesso de deformações permanentes durante o período de projeto.

### **1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO**

O conteúdo restante do presente trabalho está distribuído e organizado da seguinte forma:

No CAPÍTULO 2, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre os assuntos de maior importância para o prosseguimento do trabalho. Primeiramente, trata-se de forma sucinta sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF). Em seguida, discorre-se sobre os principais pontos da Teoria da Viscoelasticidade, da Mecânica da Fratura e das Teorias de Homogeneização a serem utilizados no presente trabalho.

O CAPÍTULO 3 descreve a construção e implementação do código multi-escala de acordo com a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) e com base nas teorias apresentadas no CAPÍTULO 2, mostrando as diferenças entre as análises global e local e suas interligações.

No CAPÍTULO 4, descreve-se o material e métodos usados no presente trabalho de pesquisa. São apresentados o processo de confecção dos corpos de prova, os ensaios experimentais utilizados, a metodologia de digitalização das seções dos corpos de prova, de determinação do EVR e de geração da malha de elementos finitos e o processo de determinação dos parâmetros de dano do MZC utilizado.

O CAPÍTULO 5 apresenta os resultados experimentais e numéricos obtidos no presente trabalho. Além disso, são apresentadas comparações entre os resultados experimentais e os resultados obtidos das simulações computacionais através do modelo multi-escala, com o objetivo de se verificar e validar o modelo.

Finalmente, o CAPÍTULO 6 constitui-se das conclusões do trabalho, onde são apresentados, de forma sucinta, os principais pontos do trabalho e as recomendações para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O presente capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre os principais assuntos abordados neste trabalho, fornecendo a fundamentação teórica necessária para o prosseguimento do trabalho. Este capítulo está subdividido em quatro seções cujos temas abordados são: *i*) Método dos Elementos Finitos (MEF), *ii*) Teoria da Viscoelasticidade, *iii*) Mecânica da Fratura e *iv*) Teorias de Homogeneização, respectivamente, como se segue.

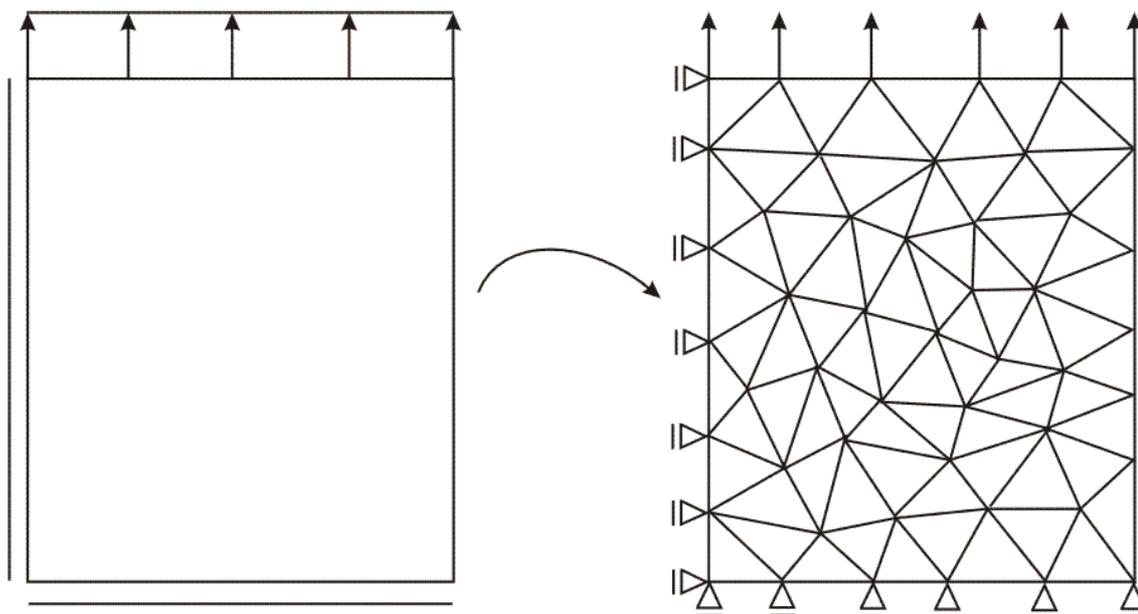
#### 2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

O MEF foi desenvolvido por volta da década de 1950 como uma resposta à crescente demanda por procedimentos de análise capazes de tratar estruturas complexas (ZIENKIEWICZ, 1971; ALLEN e HAISLER, 1985).

Conceitualmente, do ponto de vista da análise estrutural, o MEF pode ser definido como um processo matemático através do qual um domínio contínuo, o qual possui infinitos graus de liberdade (pois possui infinitos pontos geométricos), é substituído por um conjunto finito de subdomínios (elementos finitos) com um número finito de variáveis desconhecidas (graus de liberdade) (ZIENKIEWICZ, 1971). Assim sendo, cada elemento pode ser analisado separadamente e a solução para a estrutura completa é obtida através da imposição de compatibilidade de deslocamento e equilíbrio de forças ao longo do contorno dos elementos conectados entre si (ALLEN e HAISLER, 1985).

Além disso, deve-se adotar uma função solução (geralmente um polinômio de grau  $n - 1$ , onde  $n$  é o número de nós em cada aresta do elemento) para o elemento, de modo que o sistema de equações a ser resolvido para a estrutura completa transforme-se em um sistema linear onde as variáveis a serem determinadas são os graus de liberdade especificados nos nós dos elementos (REDDY, 1993). A Figura 2.1 apresenta um

domínio retangular “discretizado” em elementos finitos triangulares de 3 nós (elemento T3), o qual assume uma solução linear para os deslocamentos no interior do elemento. Note-se que, após a “discretização” do domínio, as forças e restrições de deslocamento passam a ser aplicadas aos nós correspondentes da malha.



**Figura 2.1:** “Discretização” de um domínio retangular em elementos finitos

Assim sendo, tem-se que para cada elemento  $e$ , a seguinte equação de equilíbrio é válida:

$$[k]^e \{d\}^e = \{f\}^e \quad (2.1)$$

onde,

$[k]^e$ : matriz de rigidez do elemento  $e$ ;

$\{d\}^e$ : vetor de deslocamentos nodais do elemento  $e$ ; e

$\{f\}^e$ : vetor de forças nodais do elemento  $e$ , contendo contribuições devido às forças induzidas pelas deformações, por forças concentradas nos nós, por forças distribuídas na superfície do elemento e por forças distribuídas no volume do elemento.

A matriz de rigidez dos elementos é obtida através da solução da seguinte integral sobre o volume do elemento:

$$[k]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [C^e] [B^e] \cdot dV^e \quad (2.2)$$

onde,

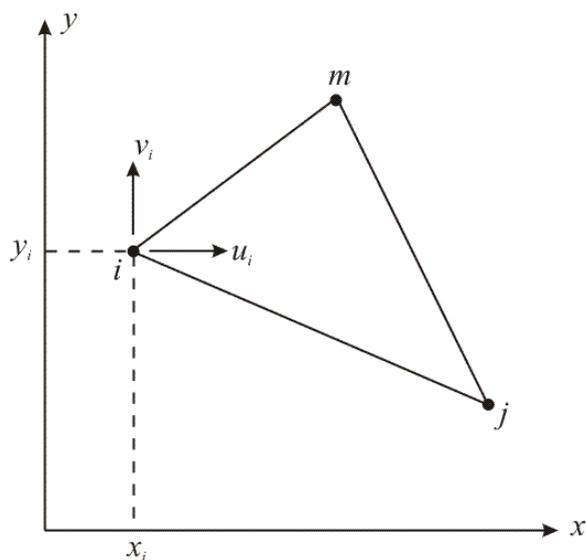
$V^e$ : volume do elemento;

$[C^e]$ : matriz constitutiva, contendo as propriedades do material;

$[B^e]$ : matriz de relação deformações-deslocamentos nodais.

A matriz constitutiva do elemento é determinada de acordo com o tipo do problema (estado plano de tensão, estado plano de deformação, axi-simétrico, entre outros) e com o tipo de material (elástico, plástico, viscoelástico, visco-plástico, etc). A matriz  $[B^e]$ , no entanto, é determinada com base nas funções de forma (ou funções de interpolação), as quais dependem do tipo do elemento.

Para o caso do elemento T3, considere a Figura 2.2, abaixo, onde os nós do elemento foram denominados de  $i$ ,  $j$  e  $m$  (no sentido anti-horário), são considerados dois graus de liberdade para cada nó, quais sejam, o deslocamento horizontal,  $u$ , e o deslocamento vertical,  $v$ .



**Figura 2.2:** Representação de um elemento T3

Neste caso, o polinômio adotado é uma equação linearmente depende de  $x$  e de  $y$ , sendo a função de forma relacionada ao nó  $i$  dada por:

$$\psi_i^e = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A^e \quad (2.3)$$

onde  $A^e$  é a área do elemento, e,

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m + x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

Assim sendo, os deslocamentos horizontais e verticais no interior do elemento podem ser obtidos através das seguintes equações, respectivamente:

$$\begin{aligned} u^e &= u_i \cdot \psi_i^e + u_j \cdot \psi_j^e + u_m \cdot \psi_m^e \\ v^e &= v_i \cdot \psi_i^e + v_j \cdot \psi_j^e + v_m \cdot \psi_m^e \end{aligned} \quad (2.5)$$

De posse das funções de forma, pode-se, então, determinar a matriz  $[B^e]$ :

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_m^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_m^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} & \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} & \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_m^e}{\partial y} & \frac{\partial \psi_m^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Logo,

$$[B^e] = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Para a estrutura completa, composta pelo conjunto de elementos, tem-se que:

$$[K] \cdot \{D\} = \{F\} \quad (2.8)$$

onde,

- $[K]$ : matriz de rigidez da estrutura ou global;  
 $\{D\}$ : vetor de deslocamentos nodais global; e  
 $\{F\}$ : vetor de forças nodais global.

Sendo que,

$$[K] = \prod_{e=1}^{Ne} [k]^e \quad (2.9)$$

$$\{F\} = \prod_{e=1}^{Ne} \{f\}^e \quad (2.10)$$

onde  $Ne$  é o número de elementos e  $\prod$  é o operador de montagem da matriz de rigidez global e do vetor de forças nodais global.

Vale ressaltar que as matrizes e os vetores correspondentes aos elementos são determinados com base numa numeração local dos nós ( $i, j, m$ , adotada no sentido anti-horário), enquanto que as matrizes e vetores globais são determinados a partir das respectivas matrizes e vetores locais, porém com base na numeração global dos nós, respeitando as condições de compatibilidade de deslocamento nos nós compartilhados.

Após obter-se a solução para os deslocamentos nodais a partir da Equação 2.8, pode-se, então, calcular as deformações,  $\varepsilon$ , e tensões,  $\sigma$ , no interior dos elementos usando as seguintes equações, respectivamente:

$$\{\varepsilon\}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}^e = [B^e] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}^e \quad (2.11)$$

$$\{\sigma\}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^e = [C^e] \cdot \{\varepsilon\}^e \quad (2.12)$$

Maiores detalhes sobre o MEF podem ser encontrados na vasta literatura sobre o assunto, como, por exemplo, em ZIENKIEWICZ (1971), COOK *et al.* (1989) e REDDY (1993), para citar apenas algumas referências.

Nas demais seções deste capítulo, quando se fizer necessário, como por exemplo, quando da incrementalização das equações constitutivas viscoelásticas, a formulação em elementos finitos será abordada novamente.

## 2.2 TEORIA DA VISCOELASTICIDADE

É comum, nas análises estruturais e principalmente nos procedimentos de dimensionamento de estruturas, considerar-se os materiais a serem utilizados dentro do regime elástico linear. Na engenharia civil, isso é verificado facilmente nas normas referentes ao aço e ao Concreto de Cimento Portland (CCP).

Embora seja comum considerar o comportamento de alguns materiais, como metais, vidro, CCP e materiais asfálticos, dentro do regime elástico linear, uma parcela do comportamento mecânico desses materiais, especialmente os materiais asfálticos, é dependente do tempo, muito embora a manifestação desse comportamento seja perceptível apenas após um longo período de tempo.

No caso do vidro, essa manifestação é notável nas vidraças de antigas construções onde se observa que a base da placa de vidro se apresenta com uma espessura maior, o que indica que houve escoamento do material devido ao seu próprio peso. Para o CCP, esse tipo de comportamento dependente do tempo pode ser observado principalmente em estruturas suspensas como lajes e vigas, onde ocorrem deformações que se desenvolvem ao longo do tempo, sendo chamadas pela literatura técnica de “deformações lentas” (SÜSSEKIND, 1984).

A maioria dos materiais usados na construção civil, quando apresentam comportamento dependente do tempo, este é pouco perceptível. Os materiais asfálticos, no entanto, fazem parte do grupo de materiais em que o comportamento dependente do tempo pode ser facilmente observado, pois estes materiais fluem com maior facilidade,

especialmente a altas temperaturas. Uma das principais conseqüências deste comportamento são as deformações permanentes observadas na camada de superfície dos pavimentos asfálticos.

Além dos materiais usados na construção civil, muitos outros materiais apresentam comportamento dependente do tempo. Por exemplo, no ramo das ciências biológicas, a maioria dos tecidos animais também apresenta comportamento dependente do tempo, muitas vezes devido à alta concentração de fluidos, principalmente de água, nas células. Uma estrutura biológica onde se observa esse tipo de comportamento é a pele, que sob atuação constante da força da gravidade se deforma lentamente, originando as rugas; vale ressaltar que as rugas são também conseqüência do processo de envelhecimento, fenômeno freqüentemente observado em diversos materiais cujo comportamento constitutivo é dependente do tempo. Um outro exemplo de estrutura biológica que apresenta esse tipo de comportamento são os vasos sanguíneos, que se deformam (se dilatam) devido à solicitação constante da pressão sanguínea, originando problemas como queda da pressão sanguínea.

Esses materiais que apresentam comportamento dependente do tempo são chamados de materiais viscoelásticos (viscoplásticos, viscoelastoplásticos, etc). Mais especificamente, o comportamento mecânico dos materiais viscoelásticos é dependente do tempo de aplicação da solicitação (carga ou deslocamento) e da taxa dessa solicitação. Assim sendo, a resposta dos materiais viscoelásticos não depende apenas da solicitação aplicada no instante considerado, mas de todo o histórico da solicitação (CHRISTENSEN, 1982).

A hipótese de comportamento elástico linear simplifica bastante a análise e o dimensionamento das estruturas, porém impossibilita a verificação e a previsão mais realista de alguns fatores determinantes na vida útil em serviço da estrutura, como deformações permanentes, micro e microfissuras, fadiga e outros fenômenos, caso o material utilizado apresente um outro tipo de comportamento constitutivo.

Nesta seção será abordada apenas a Teoria da Viscoelasticidade Linear, uma vez que a não linearidade considerada neste trabalho será conseqüência da formação e

propagação de microfissuras discretas no material, modeladas através de Modelos de Zona Coesiva (MZC).

Teorias da viscoelasticidade não-linear podem ser encontradas na literatura. Dentre essas teorias, destaca-se a teoria criada por SCHAPERLY (1984), o qual, através da definição das chamadas pseudovariáveis, desenvolveu equações constitutivas e métodos de análise de fratura aplicáveis a uma grande gama de materiais viscoelásticos lineares e não-lineares. Schapery e co-autores desenvolveram ainda um modelo contínuo para modelagem da evolução do dano em materiais viscoelásticos (SCHAPERLY, 1986; SCHAPERLY e SICKING, 1995; PARK e SCHAPERLY, 1997; HA e SCHAPERLY, 1998; SCHAPERLY, 1999), o qual tem sido aplicado inclusive a misturas asfálticas (PARK *et al.*, 1996; LEE e KIM, 1998a, 1998b).

### 2.2.1 Linearidade

Para que o comportamento de um material, elástico ou viscoelástico, seja considerado linear, este deve obedecer a dois princípios: homogeneidade ou proporcionalidade (Equação 2.13) e superposição (Equação 2.14), sendo este último conhecido como princípio da superposição de Boltzmann (BOLTZMANN, 1876). No caso de uma das equações abaixo não ser satisfeita, o material é dito não-linear.

$$\varepsilon[c \cdot \sigma(t)] = c \cdot \varepsilon[\sigma(t)] \quad (2.13)$$

$$\varepsilon[\sigma_1(t-t_1) + \sigma_2(t-t_2)] = \varepsilon[\sigma_1(t-t_1)] + \varepsilon[\sigma_2(t-t_2)] \quad (2.14)$$

onde,

$\varepsilon$  : deformação;

$\sigma$  : tensão;

$t$  : tempo absoluto;

$t_1, t_2$  : tempo de início da aplicação das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente; e

$c$  : constante.

De acordo com SCHAPERLY (1974), o princípio de homogeneidade é automaticamente atendido para qualquer valor racional de  $c$  desde que o princípio de superposição seja satisfeito, no entanto, o contrário não é verdadeiro.

Desta feita, para se verificar a linearidade do comportamento viscoelástico de misturas asfálticas é necessária a realização de apenas um tipo de ensaio conhecido no Brasil como ensaio de *creep* estático com recuperação, ou ensaio de compressão uniaxial. Este ensaio consiste da aplicação de uma força uniaxial compressiva em corpos de prova cilíndricos, sendo a deformação do corpo de prova obtida ao longo do tempo de duração do ensaio. Maiores detalhes sobre a verificação do comportamento não-linear de misturas asfálticas podem ser encontrados em SOARES e SOUZA (2002).

### 2.2.2 Relações Constitutivas para Materiais Viscoelásticos Lineares

Considere uma função degrau unitária (*Heaviside unit step function*) definida como:

$$H(t - \tau) \equiv \begin{cases} 0, & \text{para } t < \tau \\ 1, & \text{para } t > \tau \end{cases} \quad (2.15)$$

E suas propriedades matemáticas (CHRISTENSEN, 1982):

$$\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt} \quad (2.16)$$

$$\delta(t - a) \equiv 0, \quad \text{para } t \neq a \quad (2.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1 \quad (2.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a) \quad (2.19)$$

onde,

$\delta(t)$ : função delta de Dirac;

$a$ : constante arbitrária (unidade de tempo); e

$f(t)$ : função qualquer dependente do tempo  $t$ .

É comum e conveniente utilizar a função degrau unitária como forma de representar matematicamente os carregamentos aplicados em problemas que envolvem materiais viscoelásticos como, por exemplo, na representação matemática de um carregamento constante ao longo do tempo (caso do ensaio de *creep* estático).

A resposta,  $R_H$ , de um material viscoelástico devido à aplicação de  $H$  é função do tempo atual,  $t$ , e do tempo em que  $H$  começou a atuar,  $\tau$ <sup>1</sup>:

$$R_H = R_H(t, \tau) \quad (2.20)$$

Em diversas situações práticas, no entanto, a resposta de muitos materiais viscoelásticos depende apenas do tempo de aplicação da solicitação:

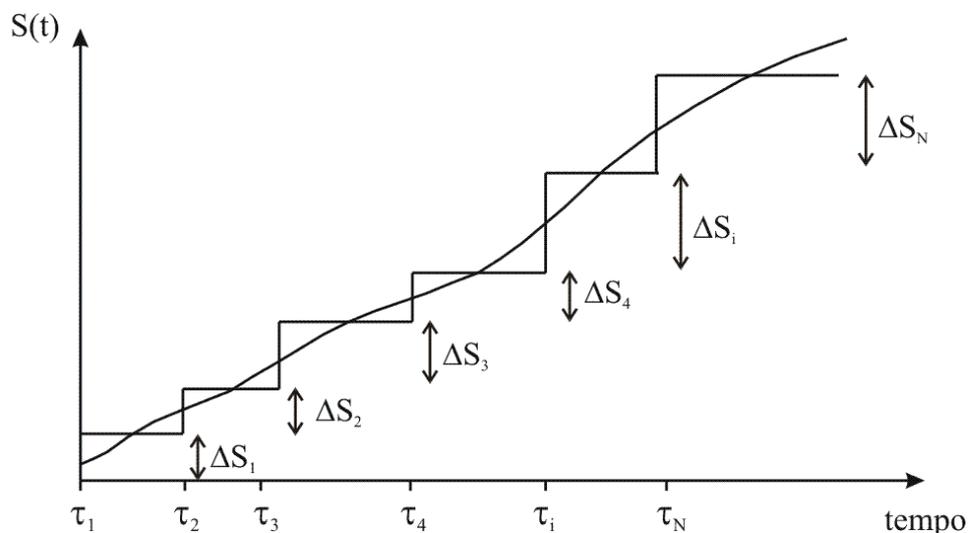
$$R_H = R_H(t - \tau) \quad (2.21)$$

Este tipo de comportamento é característico das situações em que o material não está sujeito ao envelhecimento e são ditos invariantes a translações na escala do tempo (*time translation invariant*). No presente trabalho, considera-se apenas a situação em que o fenômeno do envelhecimento pode ser desprezado.

Considere agora a situação em que uma solicitação  $S(t)$  assume uma forma qualquer. Essa solicitação pode, no entanto, ser representada aproximadamente por várias funções  $H$  (Equação 2.15), como mostra a Figura 2.3.

---

<sup>1</sup> A dedução das integrais de convolução para materiais viscoelásticos que se segue foi extraída das notas de aula do Prof. Richard A. Schapery



**Figura 2.3:** Solicitação qualquer e respectiva aproximação por funções degrau

Assumindo o comportamento linear, tem-se que a resposta à solicitação  $\Delta S_1$  é:

$$R_{\Delta S_1} = \frac{R_H(t - \tau_1)}{H(t - \tau_1)} \cdot \Delta S_1 \quad (2.22)$$

Mas  $H(t - \tau_1) = 1$ , para o intervalo onde  $R_H$  é definida. Logo:

$$R_{\Delta S_1} = R_H(t - \tau_1) \cdot \Delta S_1 \quad (2.23)$$

Fazendo uso do princípio da superposição, podemos expressar a resposta devido a  $S(t)$  como:

$$R(t) = R_H(t - \tau_1) \cdot \Delta S_1 + R_H(t - \tau_2) \cdot \Delta S_2 + \dots + R_H(t - \tau_i) \cdot \Delta S_i + \dots + R_H(t - \tau_N) \cdot \Delta S_N$$

$$\therefore R(t) = \sum_{i=1}^N R_H(t - \tau_i) \cdot \Delta S_i \quad (2.24)$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da Equação 2.24 por  $\Delta \tau_i$  e tomando-se o limite quando  $\Delta \tau_i$  tender a zero e  $N$  tender a infinito, de modo a convergir para a verdadeira função  $S(t)$ , vem:

$$R(t) = \lim_{\substack{\Delta \tau_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N R_H(t - \tau_i) \cdot \frac{\Delta S_i}{\Delta \tau_i} \cdot \Delta \tau_i$$

$$\therefore R(t) = \int_0^t R_H(t-\tau) \frac{\partial S}{\partial \tau} d\tau \quad (2.25)$$

A representação mostrada na Equação 2.25 é chamada de integral de convolução ou integral hereditária. Portanto, com base na Equação 2.25, as relações constitutivas viscoelásticas para o caso uniaxial, podem ser escritas como:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.26)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (2.27)$$

onde,

$E(t)$ : módulo de relaxação;

$D(t)$ : função fluência;

$t$ : tempo absoluto tomado a partir de um referencial qualquer (início do ensaio); e

$\tau$ : variável de integração (também pode ser interpretado como o tempo entre duas mudanças de sollicitação).

O módulo de relaxação pode ser obtido através do ensaio de relaxação onde uma deformação constante,  $\varepsilon_0$ , é aplicada e a tensão é obtida ao longo do tempo, sendo  $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$ . A função fluência, por sua vez, pode ser obtida através do ensaio de *creep* estático, onde uma tensão constante,  $\sigma_0$  é aplicada e a deformação é obtida ao longo do ensaio, sendo  $D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$ . Além desses ensaios, existem outras formas de se obter as propriedades viscoelásticas,  $E(t)$  e  $D(t)$ , como, por exemplo, através de ensaios dinâmicos (cargas harmônicas) (APÊNDICE A).

Considere agora a situação do ensaio de *creep* estático, onde uma tensão constante,  $\sigma_0$ , é aplicada. Tomando-se como referencial o início do ensaio, a deformação ao longo do ensaio será dada por:

$$\varepsilon(\tau) = D(\tau) \cdot \sigma_0 \quad (2.28)$$

Derivando-se a Equação 2.28 com relação a  $\tau$ , tem-se:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \sigma_0 \frac{dD(\tau)}{d\tau} \quad (2.29)$$

Substituindo a Equação 2.29 na Equação 2.26, segue que:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \int_0^t E(t-\tau) \cdot \sigma_0 \cdot \frac{dD(\tau)}{d\tau} d\tau \\ \therefore \int_0^t E(t-\tau) \frac{dD(\tau)}{d\tau} d\tau &= 1, \text{ para } t > 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Manipulando-se a integral acima, pode-se obter a seguinte relação (FERRY, 1980):

$$\int_0^t E(t-\tau) D(\tau) d\tau = t, \text{ para } t > 0 \quad (2.31)$$

A partir da Equação 2.30 (ou da Equação 2.31), nota-se que as funções  $E(t)$  (módulo de relaxação) e  $D(t)$  (função fluência), que representam as propriedades constitutivas viscoelásticas, não são recíprocas, como é o caso das propriedades dos materiais elásticos, mas sim relacionadas por uma integral de convolução (FERRY, 1980).

Embora não tenham sido abordadas nesta seção, as solicitações harmônicas, e suas respectivas relações constitutivas viscoelásticas, são de grande importância na Teoria da Viscoelasticidade, principalmente com relação aos métodos acelerados de obtenção das propriedades viscoelásticas (ALLEN *et al.*, 2001; BERTHELOT *et al.*, 2003), sendo, portanto, tratadas no APÊNDICE A.

### 2.2.3 Princípios de Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV)

Os problemas viscoelásticos, por envolverem equações diferenciais e integrais de convolução, podem ser considerados, muitas vezes, de difícil solução e às vezes de solução impossível, quando se trata de solução analítica. Existem, no entanto, ferramentas matemáticas que podem auxiliar na solução de tais problemas. Estas ferramentas podem ser divididas basicamente em: *i)* numéricas e *ii)* analíticas.

As soluções numéricas têm obtido destaque ultimamente, pela versatilidade, facilidade de uso dessas ferramentas e pela sua relativa rapidez. Porém, as soluções analíticas são sempre mais desejáveis, tendo em vista que estas podem ser consideradas irrefutáveis desde que as suas hipóteses sejam respeitadas.

Dentre as ferramentas matemáticas analíticas usadas na solução de equações diferenciais e integrais, as mais comumente usadas na solução de problemas viscoelásticos são a transformada de Laplace e a transformada de Fourier, sendo esta última mais aplicada a problemas que envolvem solicitações periódicas, especialmente para solicitações harmônicas, e por isso, é abordada no APÊNDICE A.

Os Princípios de Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV) se baseiam no fato de que soluções para problemas viscoelásticos quando levadas para outro domínio matemático transformado se assemelham a soluções elásticas. Assim, a solução de um problema viscoelástico pode ser obtida a partir da solução elástica do mesmo, através da substituição das constantes elásticas pelas funções viscoelásticas transformadas multiplicadas pela variável transformada,  $s$ , e efetuando-se o inverso da transformada considerada (CHRISTENSEN, 1982).

A principal restrição da utilização deste princípio é que os contornos do problema (geralmente superfícies) não podem depender da variável tempo, ou seja, o tipo da condição de contorno (deslocamento ou tensão) e a região sobre a qual esta condição atua não podem mudar ao longo do tempo (SCHAPERLY, 1974; CHRISTENSEN, 1982).

A transformada de Laplace (T.L) de uma função  $f(t)$  é definida como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2.32)$$

onde  $s$  é a variável transformada.

Note-se que os limites de integração acima são usados para enfatizar que a integral deve ser calculada para todo o domínio válido da função.

O APÊNDICE B exemplifica como se obter a T.L. de uma função, além de apresentar as T.L. e respectivas inversas, de algumas das funções mais encontradas quando da solução de problemas viscoelásticos.

Considere agora a relação constitutiva viscoelástica dada pela Equação 2.26. A partir das linhas 14 e 15 da Tabela 1 do APÊNDICE B, tem-se que a Equação 2.26 transformada no espaço de Laplace assume a seguinte forma:

$$\bar{\sigma} = \bar{E} \cdot s \cdot \bar{\varepsilon} \quad (2.33)$$

Fazendo-se  $\tilde{E} = s \cdot \bar{E}$ , e sabendo-se que  $\tilde{E}$  é a transformada de Carson do módulo de relaxação, a Equação 2.33 pode ser reescrita como:

$$\bar{\sigma} = \tilde{E} \cdot \bar{\varepsilon} \quad (2.34)$$

A partir da Equação 2.34, pode-se perceber a semelhança entre a relação constitutiva elástica e a relação constitutiva viscoelástica, quando esta última é transformada no espaço de Laplace.

Do mesmo modo, a relação entre as funções viscoelásticas (função fluência e módulo de relaxação) no espaço de Laplace pode ser obtida. No espaço de Laplace, a Equação 2.31 pode ser reescrita da seguinte forma (linhas 3 e 14 da Tabela 1 do APÊNDICE B).

$$\begin{aligned} \bar{E} \cdot \bar{D} &= \frac{1}{s^2} \Rightarrow s \cdot \bar{E} = \frac{1}{s \cdot \bar{D}} \\ \therefore \tilde{E} &= \frac{1}{\bar{D}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

A Equação 2.35 mostra que no espaço de Laplace, considerando-se a transformada de Carson, a inter-relação entre as propriedades viscoelásticas se assemelha à inter-relação existente entre as propriedades elásticas no espaço real.

Assim sendo, dada a semelhança entre a solução viscoelástica no espaço de Laplace e sua correspondente solução elástica, pode-se perceber que, dispondo-se da solução elástica de um problema, a solução viscoelástica do mesmo pode ser obtida substituindo-se, respectivamente, as variáveis  $\sigma$ ,  $E$  e  $\varepsilon$  da solução elástica pelas variáveis viscoelásticas transformadas  $\bar{\sigma}$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\bar{\varepsilon}$ , e efetuando-se, em seguida, o inverso da transformada de Laplace.

É importante salientar que para determinadas situações, onde se dispõe apenas de soluções elásticas numéricas ou ainda a inversão analítica da transformada de Laplace é muito complexa, torna-se mais viável utilizar processos aproximados de inversão de transformadas de Laplace, como o método da colocação e o método direto, ambos propostos por SCHAPERY (1962).

Um outro PCEV também bastante utilizado é o PCEV desenvolvido por SCHAPERY (1984). A principal vantagem deste PCEV é que este é aplicável tanto para materiais viscoelásticos lineares como não-lineares, podendo ser usado inclusive para solucionar problemas que envolvem trincas e contato entre dois materiais diferentes.

O PCEV de SCHAPERY (1984) se baseia na definição de pseudovariáveis, as quais possibilitam que o problema viscoelástico se assemelhe a um problema elástico correspondente. Essas variáveis não são necessariamente quantidades passíveis de interpretação física, mas estão relacionadas às suas respectivas quantidades físicas através de integrais hereditárias. Para o caso das deformações, assumindo que as mesmas são nulas para  $t < 0$ , considerando-se apenas o caso uniaxial e desprezando-se os efeitos do envelhecimento, define-se as pseudo-deformações como:

$$\varepsilon^R \equiv \frac{1}{E_R} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.36)$$

onde,

- $\varepsilon^R$ : pseudodeformações;  
 $\varepsilon$ : deformações (quantidade física);  
 $E(t)$ : módulo de relaxação; e  
 $E^R$ : módulo de referência, o qual é uma constante qualquer com dimensões iguais à do módulo de relaxação (geralmente, assume-se o valor inicial de  $E(t)$ , ou seja,  $E^R = E(t = 0)$ ).

A partir das Equações 2.26 e 2.36, pode-se chegar à seguinte relação constitutiva:

$$\sigma = E_R \cdot \varepsilon^R \quad (2.37)$$

Donde pode-se observar a semelhança com a relação constitutiva elástica.

#### 2.2.4 Modelos Mecânicos

Como visto anteriormente, as relações constitutivas viscoelásticas envolvem funções, e não constantes (como no caso elástico), que representam as propriedades do material, quais sejam, o módulo de relaxação,  $E(t)$ , e a função fluência,  $D(t)$ , as quais devem ser determinadas antes de qualquer análise.

Além disso, de modo a tornar possível a solução das equações constitutivas, essas funções devem ser representadas por funções matemáticas adequadas. Uma forma de representar as propriedades viscoelásticas matematicamente se dá através do uso das chamadas leis de potência (*power laws*). Por exemplo, considerando o caso da função fluência, uma lei de potência bastante usada e que é capaz de representar bem as funções viscoelásticas, chamada de “série de leis de potências” (*power-law series*), é dada pela Equação 2.38 (PARK e KIM, 2001).

$$D(t) = D_g + \sum_{i=1}^M \frac{\hat{D}_i}{\left(1 + \frac{\hat{\tau}_i}{t}\right)^n} \quad (2.38)$$

onde,  $D_g$ ,  $\hat{D}_1$ ,  $\hat{\tau}_i$  e  $n$  são constantes de regressão e  $M$  é o número de termos da série.

Para o caso do módulo de relaxação, pode-se usar a seguinte série de leis de potência:

$$E(t) = E_e + \sum_{i=1}^M \frac{\hat{E}_i}{\left(1 + \frac{t}{\hat{\rho}_i}\right)^n} \quad (2.39)$$

onde,  $E_e$ ,  $\hat{E}_i$ ,  $\hat{\rho}_i$  e  $n$  são constantes de regressão e  $M$  é o número de termos da série. Note-se que as constantes  $n$  e  $M$  da Equação 2.39 não são necessariamente iguais àquelas da Equação 2.38.

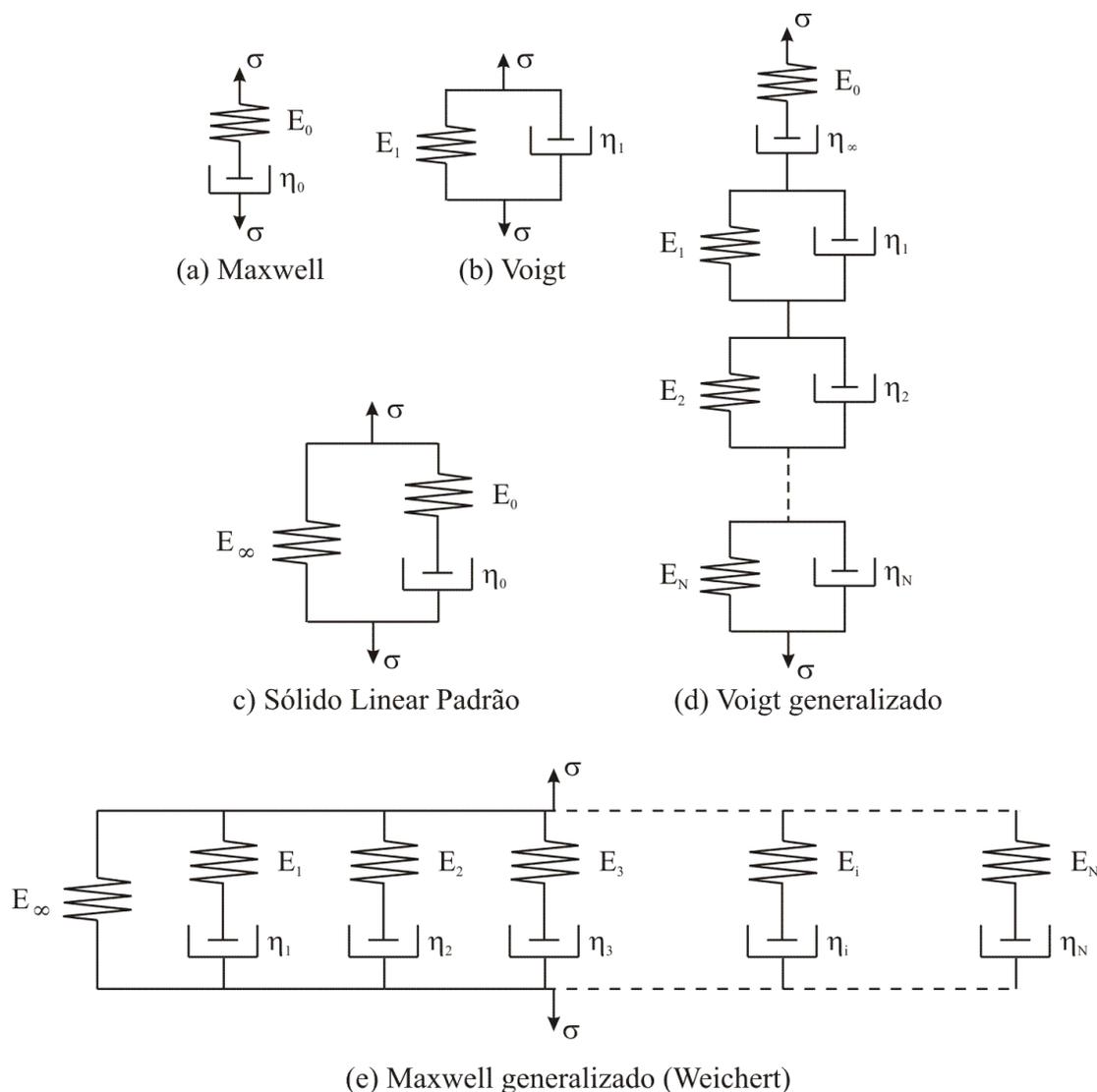
Além das leis de potência, existe uma outra forma de se representar as propriedades viscoelásticas, a qual se dá através da analogia com modelos mecânicos constituídos de associações entre molas e amortecedores (FERRY, 1980). A principal vantagem desta representação é que as constantes de regressão passam a ter um significado físico associado às constantes elásticas das molas e à viscosidade dos amortecedores. Além disso, outra vantagem é que essa representação matemática envolve principalmente funções exponenciais, as quais podem ser facilmente integradas.

Esses modelos mecânicos podem ser matematicamente representados por equações diferenciais relacionando tensões a deformações; no entanto, é possível converter essas equações diferenciais para uma forma integral na forma das Equações 2.26 e 2.27. As equações diferenciais produzidas por esses modelos possuem a seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^N a_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} + a_0 \sigma = \sum_{m=1}^N b_m \frac{d^m \varepsilon}{dt^m} + b_0 \varepsilon \quad (2.40)$$

onde, para cada modelo, as constantes  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_0$  e  $b_m$  terão um significado físico diferente.

A Figura 2.4 apresenta alguns modelos mecânicos comumente usados na representação de materiais viscoelásticos, cujas relações constitutivas são desenvolvidas no APÊNDICE C.



**Figura 2.4:** Modelos mecânicos para materiais viscoelásticos

As representações mais comumente usadas para o módulo de relaxação e para a função fluência são as fornecidas pelos modelos de Maxwell generalizado e de Voigt generalizado, respectivamente, pois podem representar as funções viscoelásticas para tempos bastante longos, bastando, para isso, acrescentar-se ao conjunto seus modelos base (modelo de Maxwell e de Voigt, respectivamente).

É importante salientar que os modelos de Maxwell generalizado e de Voigt generalizado são equivalentes (**vide** APÊNDICE C), mas as representações matemáticas do módulo de relaxação e da função fluência tornam-se mais simples quando se considera os modelos de Maxwell e de Voigt generalizados, respectivamente.

As representações resultantes dos modelos de Maxwell generalizado e de Voigt generalizado também são conhecidas como séries de Prony (ou séries de Dirichlet) e são dadas pelas Equações 2.41 e 2.42, respectivamente.

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^M E_i \cdot e^{-\frac{t}{\rho_i}} \quad (2.41)$$

$$D(t) = D_0 + \frac{t}{\eta_{\infty}} + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \quad (2.42)$$

onde,  $\rho_i$  é chamado de tempo de relaxação,  $\tau_j$  é chamado de tempo de retardação, e:

$$D_j = \frac{1}{E_j} \quad (2.43)$$

$$\rho_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad (2.44)$$

$$\tau_j = \eta_j \cdot D_j \quad (2.45)$$

Note-se que, para o caso de sólidos viscoelásticos,  $E_{\infty} > 0$  e  $\eta_{\infty} \rightarrow \infty$  (PARK e SCHAPERLY, 1999).

Uma outra importante vantagem da representação através das séries de Prony é que uma vez determinada a função viscoelástica para um material no domínio do tempo, suas funções correspondentes no domínio da frequência ( $\omega$ ) e no espaço de Laplace ( $s$ ) são obtidas diretamente em termos das constantes mostradas nas Equações 2.41 e 2.42, como apresentado nas Equações abaixo (PARK e SCHAPERLY, 1999). Vale ressaltar que as funções designadas com um apóstrofo (') e com dois apóstrofos (")

correspondem, respectivamente, às partes real e imaginária de suas respectivas funções complexas.

$$E'(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^M \frac{\omega^2 \rho_i^2 E_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (2.46)$$

$$E''(\omega) = \sum_{i=1}^M \frac{\omega \rho_i E_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (2.47)$$

$$D'(\omega) = D_0 + \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{\omega^2 \tau_j^2 + 1} \quad (2.48)$$

$$D''(\omega) = \frac{1}{\eta_\infty \omega} + \sum_{j=1}^N \frac{\omega \tau_j D_j}{\omega^2 \tau_j^2 + 1} \quad (2.49)$$

$$\tilde{E}(s) = E_\infty + \sum_{i=1}^M \frac{s \rho_i E_i}{s \rho_i + 1} \quad (2.50)$$

$$\tilde{D}(s) = D_0 + \frac{1}{\eta_\infty s} + \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{s \tau_j + 1} \quad (2.51)$$

### 2.2.5 Métodos de Regressão das Funções Viscoelásticas

Quando da análise de materiais viscoelásticos reais, as propriedades destes devem ser obtidas experimentalmente e representadas na forma de alguma função matemática de modo que as Equações 2.26 e 2.27 possam ser resolvidas. Escolhida a função matemática, deve-se, portanto, determinar os coeficientes desta que proporcionem o melhor ajuste aos dados experimentais. Esse processo estatístico de determinação dos coeficientes de uma função para propiciar a melhor representação dos dados observados no experimento é chamado de regressão.

Dada a forma exponencial de cada termo da série de Prony, caso se queira determinar ambos os coeficientes ( $E_i$  e  $\rho_i$ , para as funções módulo, ou,  $D_j$  e  $\tau_j$ , para as funções fluência), geralmente opta-se por algum método de regressão não-linear ou pelo método dos resíduos sucessivos (HUANG, 1993).

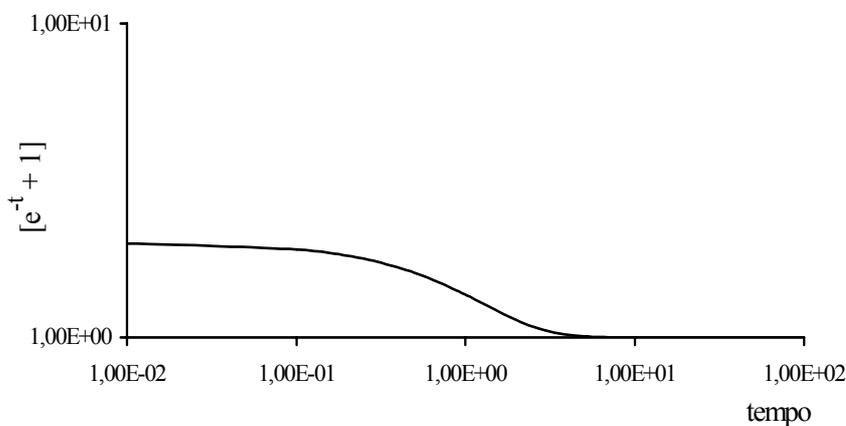
Porém, caso seja possível assumir-se valores pré-estabelecidos para os coeficientes  $\rho_i$  (ou  $\tau_j$ ), pode-se usar o método da colocação (SCHAPERLY, 1961). O

método da colocação se baseia no fato de que as séries de Prony são funções lineares com relação aos coeficientes  $E_i$  (ou  $D_j$ ), porém não-lineares com relação aos tempo de relaxação  $\rho_i$  (ou  $\tau_j$ ). Assim sendo, assumindo-se valores para os coeficientes  $\rho_i$  (ou  $\tau_j$ ), pode-se determinar os coeficientes  $E_i$  (ou  $D_j$ ) através da solução de um sistema de equações lineares, o que o torna um método bastante prático.

Dada a simplicidade deste último método e sua aplicabilidade à regressão de qualquer propriedade viscoelástica, seja esta transiente (dependente do tempo) ou complexa (dependente da frequência), este será o método utilizado neste trabalho para regredir os coeficientes das funções viscoelásticas.

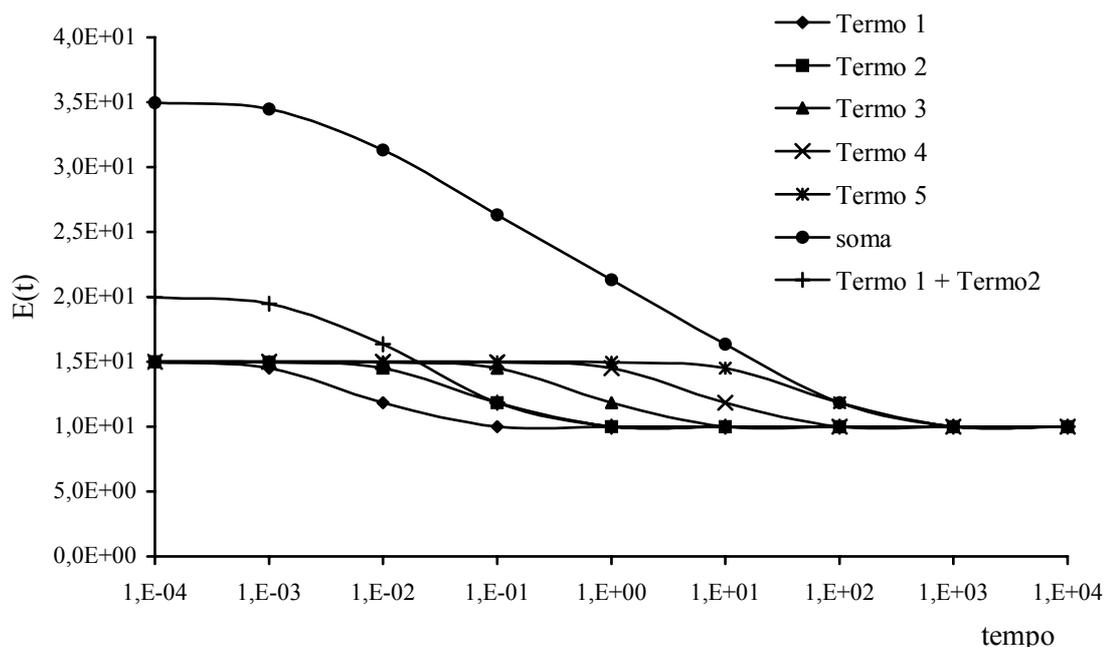
Considere, portanto, o módulo de relaxação dado pela Equação 2.41. Note-se que essa função é uma soma de funções exponenciais simples, o que permite concluir que a Equação 2.41 se comporta qualitativamente como uma função exponencial simples, porém com um domínio de variação maior que uma função exponencial simples.

A Figura 2.5 mostra o comportamento de um função exponencial simples  $f(t) = e^{-t} + b$ , onde a constante  $b$  é igualada a 1 para possibilitar uma melhor visualização do comportamento desta função em escala logarítmica. Observe-se que o domínio de variação da função exponencial simples é de aproximadamente duas ordens de grandeza.



**Figura 2.5:** Comportamento de uma função exponencial simples

A Figura 2.6 mostra o comportamento da função  $E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^5 E_i \cdot e^{-\frac{t}{\rho_i}}$ , para  $E_\infty = 10$ ,  $E_i = 5$  e  $\rho_i = 10^{i-3}$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) e o comportamento dos seus respectivos termos  $E^i(t) = E_\infty + E_i \cdot e^{-\frac{t}{\rho_i}}$ .

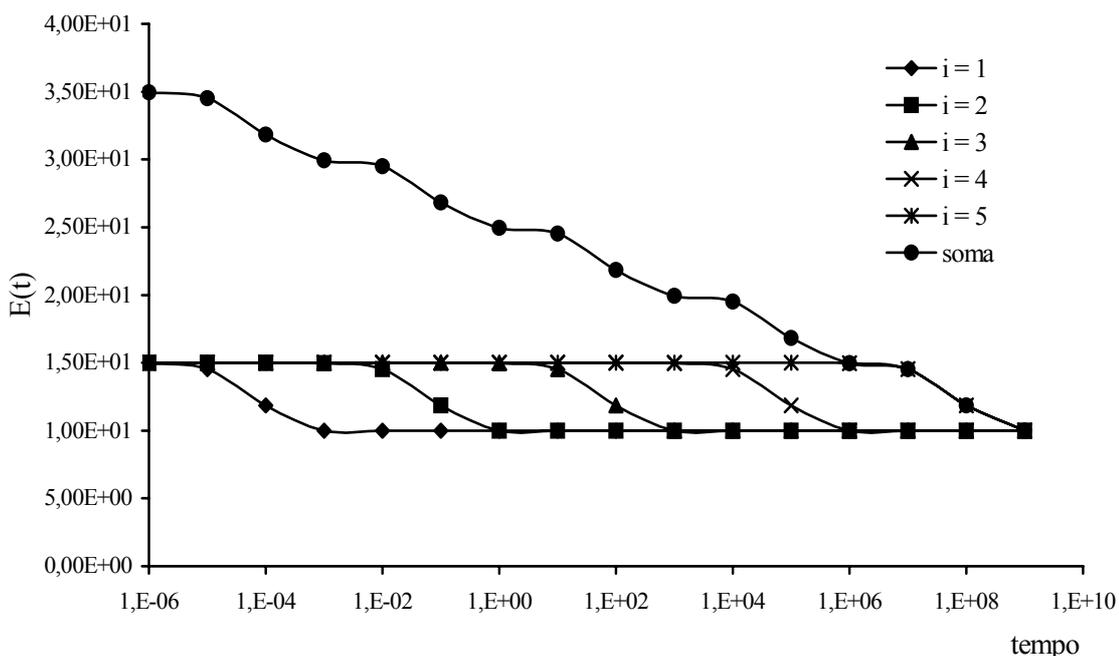


**Figura 2.6:**  $E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^5 E_i \cdot e^{-\frac{t}{\rho_i}}$  e respectivos termos  $E^i(t) = E_\infty + E_i \cdot e^{-\frac{t}{\rho_i}}$ , para  $E_\infty = 10$ ,  $E_i = 5$  e  $\rho_i = 10^{i-3}$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )

A partir da Figura 2.6, pode-se observar que  $E^i(t)$  tem seu domínio de variação centrado num valor próximo de  $\rho_i$  e varia, aproximadamente, da ordem de grandeza anterior a  $\rho_i$  até a ordem de grandeza posterior a  $\rho_i$ , ou seja, para  $\rho_i = 10^{-2}$ , por exemplo, a função  $E^1(t)$  varia aproximadamente de  $t = 10^{-3}$  a  $t = 10^{-1}$ . Além disso, cada termo consecutivo somado implica no aumento de, aproximadamente uma ordem de grandeza no domínio de variação, por exemplo,  $E^1 + E^2$  possui um domínio de variação de cerca de 3 ordens de grandeza, como mostra a Figura 2.6.

Como cada termo varia da ordem de grandeza anterior a  $\rho_i$  até a ordem de grandeza posterior a  $\rho_i$ , para regredir uma função suave a partir de dados experimentais obtidos em  $M$  ordens de grandeza de tempo (ou frequência), precisa-se de, no mínimo,  $M - 2$  coeficientes  $\rho_i$ . Por exemplo, para dados experimentais obtidos em 5 ordens de grandeza de tempo, quais sejam,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ ,  $10^0$ ,  $10^1$  e  $10^2$ , pode-se assumir  $\rho_1$  com ordem de grandeza igual a  $10^{-1}$ ,  $\rho_2$  com ordem de grandeza igual a  $10^0$  e  $\rho_3$  com ordem de grandeza igual a  $10^1$ .

É importante salientar que caso os coeficientes  $\rho_i$  escolhidos estejam separados por mais de uma ordem de grandeza, a curva resultante da Equação 2.41 (soma de exponenciais) não apresentará uma forma suave como a da Figura 2.6, mas apresentará a forma de uma escada como mostra a Figura 2.7.



**Figura 2.7:** Forma de escada apresentada pela Equação 2.41 para  $M = 5$  e  $\rho_i$  espaçados por mais de uma ordem de grandeza

Com relação à determinação dos valores de  $\rho_i$  a serem assumidos, como primeira tentativa, pode-se assumir valores para os coeficientes  $\rho_i$  de modo que exista um termo na série que atinge a metade do seu máximo valor em  $t = t_k$ , onde  $t_k$  são

valores de tempo onde houve observação experimental, devendo estar, na medida do possível, separados por uma ordem de grandeza (SCHAPERLY, 1961). Desta forma, estar-se-á tirando o máximo proveito do domínio de variação de cada termo da série.

Depois de escolhidos os valores para os coeficientes  $\rho_i$  e para os tempos  $t_k$ , os valores dos coeficientes  $E_i$  são obtidos através da solução de um sistema de equações lineares. Para o módulo de relaxação, por exemplo, a partir da Equação 2.41, pode-se escrever, para cada valor de  $t_k$ :

$$E(t_k) - E_\infty = \sum_{i=1}^M E_i \cdot e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \quad (2.52)$$

Reescrevendo a equação acima em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} e^{-\frac{t_1}{\rho_1}} & e^{-\frac{t_1}{\rho_2}} & e^{-\frac{t_1}{\rho_3}} & \dots & e^{-\frac{t_1}{\rho_M}} \\ e^{-\frac{t_2}{\rho_1}} & e^{-\frac{t_2}{\rho_2}} & e^{-\frac{t_2}{\rho_3}} & \dots & e^{-\frac{t_2}{\rho_M}} \\ e^{-\frac{t_3}{\rho_1}} & e^{-\frac{t_3}{\rho_2}} & e^{-\frac{t_3}{\rho_3}} & \dots & e^{-\frac{t_3}{\rho_M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-\frac{t_M}{\rho_1}} & e^{-\frac{t_M}{\rho_2}} & e^{-\frac{t_M}{\rho_3}} & \dots & e^{-\frac{t_M}{\rho_M}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E(t_1) - E_\infty \\ E(t_2) - E_\infty \\ E(t_3) - E_\infty \\ \vdots \\ E(t_M) - E_\infty \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

A solução do sistema de equações acima, seguindo-se as regras comentadas anteriormente, resultará na adequada determinação dos coeficientes  $E_i$ . Depois de determinados os coeficientes  $E_i$ , é importante que se compare a série obtida com os valores experimentais a fim de se verificar a existência de qualquer discrepância da série obtida com relação aos dados experimentais. Vale salientar ainda que essas discrepâncias são geralmente melhor visualizadas quando as curvas são grafadas em escala logarítmica.

Na determinação de  $E_\infty$  (ou de  $D_0$ ), pode-se adotar o menor valor experimental coletado ou um valor menor que o menor valor obtido experimentalmente, sendo bastante importante o uso do bom senso.

É importante salientar que, em geral, o método da colocação converge adequadamente para diversos valores de  $\rho_i$ , porém, embora a curva  $E(t)$  obtida seja indistinguível da curva experimental, muitas vezes o método produz valores negativos para os coeficientes  $E_i$ , o que é fisicamente irreal. Caso isto aconteça, deve-se assumir outros valores para  $\rho_i$  (ou  $\tau_j$ ) até que se obtenha valores positivos para os coeficientes  $E_i$  (ou  $D_j$ ). Dentre os métodos propostos para se evitar coeficientes negativos, destaca-se, pela sua simplicidade e aplicabilidade a dados experimentais que apresentam grandes dispersões, o desenvolvido por PARK e KIM (2001), o qual propõe a pré-suavização dos dados experimentais através da regressão de uma série de leis de potência e posterior regressão da série de Prony a partir dos dados pré-suavizados.

Para o caso da função fluência (para  $\eta_\infty \rightarrow \infty$ ), considerando-se a Equação 2.42, a Equação 2.53 assume a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_2}} & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_3}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_N}} \\ 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_2}} & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_3}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_N}} \\ 1 - e^{-\frac{t_3}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_3}{\tau_2}} & 1 - e^{-\frac{t_3}{\tau_3}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_3}{\tau_N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 - e^{-\frac{t_N}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_N}{\tau_2}} & 1 - e^{-\frac{t_N}{\tau_3}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_N}{\tau_N}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D(t_1) - D_0 \\ D(t_2) - D_0 \\ D(t_3) - D_0 \\ \vdots \\ D(t_N) - D_0 \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para qualquer série de Prony, inclusive para as funções complexas. Por exemplo, considerando-se a série de Prony para a parte real da função fluência complexa (Equação 2.48), a mesma pode ser reescrita em forma matricial, conforme a equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 \tau_1^2 + 1} & \frac{1}{\omega_1^2 \tau_2^2 + 1} & \dots & \frac{1}{\omega_1^2 \tau_N^2 + 1} \\ \frac{1}{\omega_2^2 \tau_1^2 + 1} & \frac{1}{\omega_2^2 \tau_2^2 + 1} & \dots & \frac{1}{\omega_2^2 \tau_N^2 + 1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_N^2 \tau_1^2 + 1} & \frac{1}{\omega_N^2 \tau_2^2 + 1} & \dots & \frac{1}{\omega_N^2 \tau_N^2 + 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D'(\omega_1) - D_0 \\ D'(\omega_2) - D_0 \\ \vdots \\ D'(\omega_N) - D_0 \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

É importante ressaltar que, como comentado anteriormente, uma vez determinados os coeficientes  $E_i$  e  $\rho_i$  para uma função módulo qualquer, as demais funções módulo são determinadas diretamente, bastando substituir os valores desses coeficientes nas suas respectivas representações matemáticas. Por exemplo, considere que os coeficientes  $E_i$  e  $\rho_i$  tenham sido determinados a partir de resultados experimentais do módulo de relaxação. Assim sendo, para se obter as funções módulo complexo, basta substituir os valores desses coeficientes nas Equações 2.46 e 2.47. O mesmo é válido para as funções fluência.

Além disso, as curvas geradas para as funções complexas, por exemplo, a partir da substituição dos coeficientes  $E_i$  e  $\rho_i$  podem ser comparadas com suas respectivas curvas experimentais, a fim de se verificar as hipóteses de linearidade e de inércia desprezível assumidas no desenvolvimento dos modelos mecânicos, ora representados pelas séries de Prony.

### **2.2.6 Interconversão Entre as Propriedades Viscoelásticas**

Na Seção 2.2.2, mostrou-se que existem duas relações constitutivas correspondentes para os materiais viscoelásticos (Equações 2.26 e 2.27) baseadas em propriedades distintas, as quais estão relacionadas por uma integral de convolução (Equação 2.30 ou Equação 2.31). Assim sendo, de acordo com as Equações 2.26 e 2.27, quando se deseja achar o histórico de tensões a partir do histórico de deformações aplicado, necessita-se do módulo de relaxação, e quando se deseja o contrário, necessita-se da função fluência.

Muitas vezes, porém, é possível se determinar experimentalmente a função fluência, mas impossível realizar experimentos para se determinar o módulo de relaxação, e vice-versa, especialmente quando não se dispõe dos equipamentos necessários ou quando estes não oferecem precisão e confiabilidade. Neste caso, portanto, é interessante que se obtenha o módulo de relaxação a partir da função fluência determinada experimentalmente, ou vice-versa.

É possível encontrar-se diversas relações entre as diversas propriedades viscoelásticas, dentre as quais se destacam as Equações 2.30, 2.31, 2.35 e as seguintes equações (FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982) (**vide** APÊNDICE A e APÊNDICE B):

$$E^* = \frac{1}{D^*} \quad (2.56)$$

$$E' = \frac{D'}{(D')^2 + (D'')^2} \quad (2.57)$$

$$E'' = \frac{D''}{(D')^2 + (D'')^2} \quad (2.58)$$

$$D' = \frac{E'}{(E')^2 + (E'')^2} \quad (2.59)$$

$$D'' = \frac{E''}{(E')^2 + (E'')^2} \quad (2.60)$$

$$E' = E_\infty + \omega \int_0^\infty [E(t) - E_\infty] \text{sen}(\omega t) dt \quad (2.61)$$

$$E'' = \omega \int_0^\infty [E(t) - E_\infty] \text{cos}(\omega t) dt \quad (2.62)$$

$$E(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty E'(\omega) \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (2.63)$$

$$E(t) = E_\infty + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty E''(\omega) \frac{\text{cos}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (2.64)$$

$$D' = D_\infty + \omega \int_0^\infty [D(t) - D_\infty] \text{sen}(\omega t) dt \quad (2.65)$$

$$D'' = -\omega \int_0^\infty [D(t) - D_\infty] \text{cos}(\omega t) dt \quad (2.66)$$

$$D(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D'(\omega) \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (2.67)$$

$$D(t) = D_\infty - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D''(\omega) \frac{\text{cos}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (2.68)$$

$$E^* = \tilde{E}(i\omega) \quad (2.69)$$

Note-se que as Equações 2.61 a 2.68 representam uma maneira de se determinar as funções transientes a partir das funções complexas, e vice-versa.

Além disso, pode-se mostrar que as Equações 2.30 e 2.31 podem ser reescritas como:

$$\therefore \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial E(\tau)}{\partial \tau} d\tau = 1, \text{ para } t > 0 \quad (2.70)$$

$$\int_0^t D(t-\tau) E(\tau) d\tau = t, \text{ para } t > 0 \quad (2.71)$$

Existem, ainda, alguns métodos aproximados de interconversão entre as propriedades viscoelásticas (DENBY, 1975; FERRY, 1980; CHRISTENSEN, 1982; PARK e KIM, 1999; SCHAPERY e PARK, 1999), os quais podem ser usados quando da impossibilidade do uso de alguma relação exata ou quando a solução desta for inviável no que diz respeito às necessidades práticas.

É importante ressaltar que, muitas vezes, as integrais de convolução das Equações 2.30, 2.31, 2.70 e 2.71 são de difícil solução analítica, sendo, nestes casos, viável a utilização de algum esquema de integração numérica destas equações (HOPKINS e HAMMING, 1957; KIM e LEE, 1995).

PARK e SCHAPERY (1999) desenvolveram ainda um outro método bastante interessante de interconversão entre as propriedades viscoelásticas baseado nas séries de Prony. No referido estudo, é mostrado que quando um conjunto de coeficientes da série de Prony,  $\{\rho_i, E_i (i = 1, \dots, M), \text{ e } E_\infty\}$  ou  $\{\tau_j, D_j (j = 1, \dots, N), D_0 \text{ e } \eta_\infty\}$  é conhecido e as constantes de tempo desconhecidas ( $\tau_j$  ou  $\rho_i$ ) são especificadas, o outro conjunto de coeficientes pode ser determinado através da solução de um sistema de equações lineares simples. Por sua simplicidade e por ser baseado nas séries de Prony, este será o método de interconversão usado no presente estudo.

No entanto, no estudo realizado PARK e SCHAPERY (1999), os autores desenvolveram apenas as equações necessárias para se determinar as funções fluência a partir das funções módulo.

### 2.2.7 Método de Obtenção de $E(t)$ a partir de $D(t)$

Seguindo-se o mesmo procedimento usado por PARK e SCHAPERY (1999), desenvolve-se, a seguir, as equações necessárias para se determinar o módulo de relaxação,  $E(t)$ , a partir da função fluência,  $D(t)$ , as quais serão usadas posteriormente para se determinar o módulo de relaxação do mastique estudado a partir da sua função fluência obtida em laboratório.

Portanto, considerando-se apenas o caso dos sólidos viscoelásticos ( $\eta_\infty \rightarrow \infty$ ) e as seguintes séries de Prony (**vide** Equações 2.41 e 2.42):

$$D(t - \tau) = D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left[ 1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_j}} \right] \quad (2.72)$$

$$E(\tau) = E_\infty + \sum_{i=1}^M E_i \cdot e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \quad (2.73)$$

$$\therefore \frac{\partial E(\tau)}{\partial \tau} = E(0)\delta(\tau) - \sum_{i=1}^M \frac{E_i}{\rho_i} \cdot e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \quad (2.74)$$

onde,  $\delta(\tau)$  é a função delta de Dirac e:

$$E(0) = E(\tau = 0) = E_\infty + \sum_{i=1}^M E_i \quad (2.75)$$

Substituindo-se as Equações 2.72, 2.74 e 2.75 na Equação 2.70, tem-se:

$$\int_0^t \left\{ \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \left[ \left( E_\infty + \sum_{i=1}^M E_i \right) \delta(\tau) - \sum_{i=1}^M \frac{E_i}{\rho_i} \cdot e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \right] \right\} d\tau = 1 \quad (2.76)$$

Sabendo que (**vide** Equação 2.19):

$$\int_0^t f(t-\tau) \cdot \delta(\tau-0) d\tau = f(\tau=0) = f(t) \quad (2.77)$$

Segue, da Equação 2.76, que:

$$\begin{aligned} & \left( E_\infty + \sum_{i=1}^M E_i \right) \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] - \sum_{i=1}^M \left[ \frac{E_i}{\rho_i} \cdot \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) \cdot \int_0^t e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} \cdot d\tau \right] + \\ & + \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{E_i}{\rho_i} \cdot \sum_{j=1}^N \left[ D_j \cdot \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_j} - \frac{\tau}{\rho_i}} \cdot d\tau \right] \right\} = 1 \end{aligned} \quad (2.78)$$

A primeira integral da equação acima vale:

$$\int_0^t e^{-\frac{\tau}{\rho_i}} d\tau = \rho_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) \quad (2.79)$$

Logo, segue da Equação 2.78:

$$\begin{aligned} \therefore & \left( E_\infty + \sum_{i=1}^M E_i \right) \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] - \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) \cdot \sum_{i=1}^M \left[ E_i \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{E_i}{\rho_i} \cdot \sum_{j=1}^N \left[ D_j \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}} \cdot \int_0^t e^{-\left( \frac{\tau}{\rho_i} - \frac{\tau}{\tau_j} \right)} \cdot d\tau \right] \right\} = 1 \end{aligned} \quad (2.80)$$

A integral da equação acima é avaliada da seguinte forma:

$$\int_0^t e^{-\left( \frac{\tau}{\rho_i} - \frac{\tau}{\tau_j} \right)} \cdot d\tau = \begin{cases} \frac{\rho_i \tau_j}{\tau_j - \rho_i} \cdot \left( 1 - e^{-\left( \frac{t}{\rho_i} - \frac{t}{\tau_j} \right)} \right), & \text{para } \rho_i \neq \tau_j \\ t, & \text{para } \rho_i = \tau_j \end{cases} \quad (2.81)$$

Assim sendo, para  $\rho_i = \tau_j$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \left( E_\infty + \sum_{i=1}^M E_i \right) \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] - \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) \cdot \sum_{i=1}^M \left[ E_i \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) \right] + \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left( \frac{t E_i D_j}{\rho_i} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) = 1 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Sabendo que (CHURCHILL, 1958):

$$E_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{E}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{D}(s)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} D(t)} = \frac{1}{D_0 + \sum_{j=1}^N D_j} \quad (2.83)$$

E reformulando a Equação 2.82 numa forma mais conveniente, tem-se:

$$\sum_{i=1}^M \left( D_0 e^{-\frac{t}{\rho_i}} + \sum_{j=1}^N \frac{t D_j}{\rho_i} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) E_i = 1 - \left\{ \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] / \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) \right\} \quad (2.84)$$

Para  $\rho_i \neq \tau_j$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \left( E_\infty + \sum_{i=1}^M E_i \right) \cdot \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] - \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) \cdot \sum_{i=1}^M \left[ E_i \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) \right] + \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{E_i D_j \tau_j}{\tau_j - \rho_i} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}} \cdot \left[ 1 - e^{-\left( \frac{t}{\rho_i} - \frac{t}{\tau_j} \right)} \right] \right\} = 1 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Reformulando-se a equação acima e substituindo-se a Equação 2.83, pode-se reescrever a equação acima numa forma mais conveniente como segue:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \left[ \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) e^{-\frac{t}{\rho_i}} - \sum_{j=1}^N D_j \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}} + \sum_{j=1}^N \frac{D_j \tau_j}{\rho_i - \tau_j} \left( e^{-\frac{t}{\rho_i}} - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] E_i = \\ = 1 - \left\{ \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] / \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.86)$$

As Equações 2.84 e 2.86 podem, ainda, ser escritas na seguinte forma matricial:

$$[A]\{E\} = \{B\} \quad (2.87)$$

ou,

$$A_{ki}E_i = B_k \quad (\text{soma em } j; i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, P) \quad (2.88)$$

onde,

$$A_{ki} = \begin{cases} \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} - \sum_{j=1}^N D_j \cdot e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} + \sum_{j=1}^N \frac{D_j \tau_j}{\rho_i - \tau_j} \left( e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right), & \text{para } \rho_i \neq \tau_j \\ \text{ou} \\ D_0 e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} + \sum_{j=1}^N \frac{t_k D_j}{\rho_i} \cdot e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} & , \text{ para } \rho_i = \tau_j \end{cases} \quad (2.89)$$

e

$$B_k = 1 - \left\{ \left[ D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \left( 1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) \right] / \left( D_0 + \sum_{j=1}^N D_j \right) \right\} \quad (2.90)$$

Caso o método da colocação seja usado, tem-se que  $P = M$ . Porém, caso o método dos mínimos quadrados seja usado,  $P > M$ . A seleção dos pontos de amostragem  $t_k$  ( $k = 1, \dots, P$ ) também depende do método de solução do sistema de equações. Caso o método da colocação seja adotado ( $P = M$ ), os pontos  $t_k$  podem ser convenientemente tomados como  $t_k = a\tau_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ), onde tipicamente assume-se  $a = 1$  ou  $a = 1/2$ . Caso o método dos mínimos quadrados seja adotado, pode-se assumir  $t_k$  ( $k = 1, \dots, P$ ) com intervalos equidistantes entre si (com relação ao eixo  $\log t$ ) os quais devem ser menores que os intervalos de  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ), de modo que  $P > M$ . Além disso,  $E_\infty$  pode ser obtido através da Equação 2.83.

Seguindo o procedimento proposto por PARK e SCHAPERY (1999), pode-se determinar os valores de  $\rho_i$ , quando  $\rho_i \neq \tau_j$ , grafando-se  $|\tilde{D}(s)| \times -1/s$  ( $s < 0$ ), sendo que a abscissa correspondente a cada máximo da função  $|\tilde{D}(s)|$  aproxima-se do valor de  $\tau_j$  (conhecido) e a abscissa correspondente a cada mínimo da função  $|\tilde{D}(s)|$  aproxima-se do valor de  $\rho_i$  procurado.

É importante salientar que, uma vez conhecidos os coeficientes  $E_\infty$ ,  $E_i$  e  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ), as funções  $E(t)$ ,  $E'(\omega)$ ,  $E''(\omega)$  e  $\tilde{E}(s)$  podem ser determinadas através das Equações 2.41, 2.46, 2.47 e 2.50, respectivamente. Além disso, equações similares às Equações 2.87 a 2.90 podem ser encontradas partindo-se da Equação 2.35 ou da Equação 2.56.

### 2.2.8 Termoviscoelasticidade

Grande parte dos materiais viscoelásticos pode ser considerada termossuscetíveis, ou seja, suas propriedades dependem da temperatura à qual o material está submetido. Existem dois tipos de fenômenos relacionados ao efeito da temperatura nas propriedades dos materiais viscoelásticos: *i*) os reversíveis e *ii*) os irreversíveis.

As mudanças irreversíveis estão relacionadas a fenômenos também irreversíveis como a quebra das ligações atômicas, formação de novos constituintes e perda de massa. Estas mudanças podem ser modeladas semelhantemente ao fenômeno de envelhecimento (SCHAPERLY, 1974).

Quanto aos efeitos reversíveis da temperatura, os materiais viscoelásticos podem ser classificados em dois grupos: *i*) materiais termoreologicamente simples e *ii*) materiais termoreologicamente complexos.

A principal diferença entre esses dois grupos é que a resposta mecânica sob condições de temperatura transiente dos materiais ditos termoreologicamente simples pode ser prevista a partir da resposta sob condições isotérmicas (MORLAND e LEE, 1960).

Considerando-se, portanto, os materiais termoreologicamente simples, as equações constitutivas para condições não-isotérmicas se assemelham às equações para o caso isotérmico (Equações 2.26 e 2.27); porém, há uma mudança de variável. Portanto, para o caso uniaxial e desconsiderando-se os efeitos de expansão e contração térmica, as relações constitutivas para condições não-isotérmicas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma(t) = \int_0^{\xi} E(\xi - \xi') \frac{d\varepsilon}{d\xi'} d\xi' \quad (2.91)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^{\xi} D(\xi - \xi') \frac{d\sigma}{d\xi'} d\xi' \quad (2.92)$$

onde, a variável  $\xi$  é chamada de tempo reduzido, cuja definição é dada por:

$$\xi = \xi(t) \equiv \int_0^t \frac{1}{a_T} d\tau, \quad \xi' = \xi(t') \equiv \int_0^{t'} \frac{1}{a_T} d\tau \quad (2.93)$$

onde,

$$a_T = a_T[T(\tau)] \quad (2.94)$$

A função  $a_T$  é a única propriedade do material que depende da temperatura e é chamada de “fator de translação horizontal” (*horizontal shift factor*) (SCHAPERLY, 1974).

As representações matemáticas mais comumente usadas na representação do fator de translação horizontal são a relação de Arrhenius (Equação 2.95), geralmente válida para  $T < T_g$ , onde  $T_g$  é a chamada temperatura de transição vítrea (*glass transition temperature*), e a equação WLF (WILLIAMS *et al.*, 1955) (Equação 2.96), geralmente válida para  $T > T_g$  (FERRY, 1980).

$$\log a_T = \frac{\Delta F}{2,303 \cdot R_G} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_R} \right) \quad (2.95)$$

onde,

$\Delta F$ : energia de ativação constante (por mol);

$R_G$ : constante universal dos gases (= 1,987 cal/mol·K); e

$T_R$ : temperatura de referência.

$$\log a_T = \frac{-c_1(T - T_R)}{c_2 + T - T_R} \quad (2.96)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que dependem de  $T_R$ .

Considere, portanto, o caso do ensaio de *creep* (estático) que é um ensaio realizado sob condições isotérmicas. Pode-se mostrar que, neste caso, a Equação 2.92 toma a seguinte forma:

$$\varepsilon = D(\xi) \cdot \sigma_0 \quad (2.97)$$

Como o ensaio é realizado sob condições isotérmicas, o fator de translação horizontal mantém-se constante ao longo do ensaio e a Equação 2.93 pode ser reescrita como:

$$\xi = \frac{t}{a_T} \quad (2.98)$$

Aplicando-se o logaritmo à Equação 2.98, obtém-se:

$$\log \xi = \log t - \log a_T \quad (2.99)$$

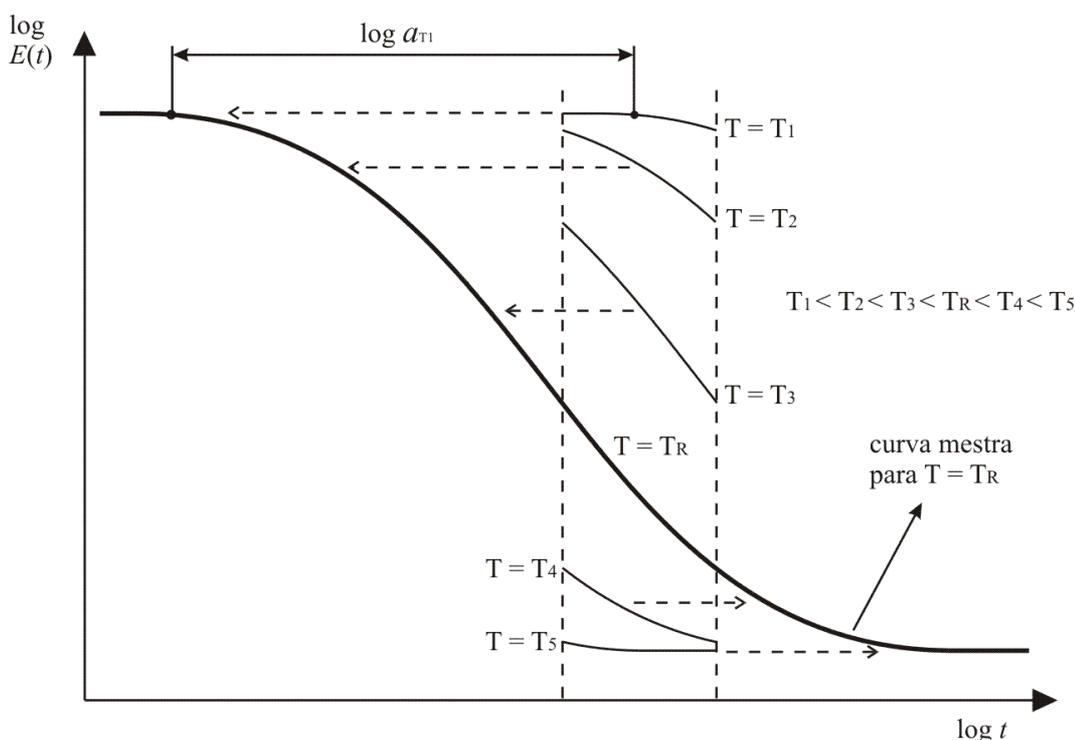
O mesmo procedimento pode ser seguido para o ensaio de relaxação, donde se chegará, da mesma forma, às Equações 2.98 e 2.99.

A Equação 2.99 é a base do chamado princípio de superposição tempo-temperatura, o qual estabelece que as propriedades viscoelásticas (função fluência ou módulo de relaxação) obtidas em ensaios isotérmicos, porém a diferentes temperaturas, podem ser transladadas horizontalmente ao eixo  $\log t$  a fim de se formar uma “curva mestra” capaz de representar a resposta do material desde intervalos muito curtos de tempo até intervalos mais longos.

Em outras palavras, o princípio de superposição tempo-temperatura basicamente estabelece que uma determinada propriedade obtida ao longo de um dado intervalo de tempo, porém a uma temperatura maior que uma temperatura de referência qualquer, pode ser correlacionada com esta propriedade à temperatura de referência, porém para intervalos de tempo mais longos. Do mesmo modo, os valores de uma propriedade obtida para uma temperatura menor que a temperatura de referência correspondem aos

valores da propriedade à temperatura de referência, porém para intervalos de tempo mais curtos.

Assim sendo, pode-se obter uma curva mais completa (chamada de curva mestra) para uma dada temperatura de referência que compreenda desde os intervalos de tempo mais curtos até os intervalos mais longos sem necessitar-se executar ensaios demorados e superando-se as limitações de aquisição de dados da maioria dos equipamentos para intervalos de tempo muito curtos. A Figura 2.8 apresenta uma representação esquemática da utilização do princípio de superposição tempo-temperatura na construção de uma curva mestra para o módulo de relaxação de um material viscoelástico termoreologicamente simples.



**Figura 2.8:** Representação esquemática da construção de uma curva mestra para o módulo de relaxação de um material termoreologicamente simples

Semelhantemente ao princípio de superposição tempo-temperatura, pode-se correlacionar frequência com tempo, sendo que frequências menores correspondem a intervalos de tempo mais longos, enquanto frequências maiores correspondem a intervalos de tempo mais curtos. O princípio de superposição tempo-frequência se baseia nas Equações 2.63, 2.64, 2.67 e 2.68, donde pode-se determinar as funções

transientes viscoelásticas (módulo de relaxação e função fluência) a partir de suas respectivas funções complexas. A principal vantagem deste princípio está no fato de que as propriedades complexas são geralmente obtidas através de ensaios de curta duração.

No caso de se desejar incluir o efeito da expansão/contração térmica na solução de problemas viscoelásticos sob condições não-isotérmicas, as equações constitutivas devem ser modificadas a fim de incluir as contribuições térmicas. Assim sendo, generalizando-se para o caso multiaxial, e considerando-se o caso dos materiais compósitos (para os quais as propriedades constitutivas variam no espaço), tem-se que (SCHAPERY, 1974; ZOCHER *et al.*, 1997):

$$\sigma_{ij}(x_k, \xi) = \int_0^{\xi} C_{ijkl}(x_k, \xi - \xi') \frac{\partial \varepsilon_{kl}(x_k, \xi')}{\partial \xi'} d\xi' - \int_0^{\xi} B_{ij}(x_k, \xi - \xi') \frac{\partial \theta(x_k, \xi')}{\partial \xi'} d\xi' \quad (2.100)$$

$$\varepsilon_{ij}(x_k, \xi) = \int_0^{\xi} J_{ijkl}(x_k, \xi - \xi') \frac{\partial \sigma_{kl}(x_k, \xi')}{\partial \xi'} d\xi' - \int_0^{\xi} A_{ij}(x_k, \xi - \xi') \frac{\partial \theta(x_k, \xi')}{\partial \xi'} d\xi' \quad (2.101)$$

onde,

- $x_k$ : conjunto de eixos de coordenadas;
- $\sigma_{ij}$ : componente do tensor das tensões;
- $\varepsilon_{kl}$ : componente do tensor das deformações;
- $\theta$ : diferença entre a temperatura atual e a temperatura de referência, para a qual as tensões são nulas;
- $C_{ijkl}$ : componente do tensor módulo de relaxação de quarta ordem;
- $J_{ijkl}$ : componente do tensor função fluência de quarta ordem;
- $B_{ij}$ : componente do tensor associado às expansões térmicas, o qual define as tensões térmicas num corpo completamente restrito de movimento no seu contorno; e
- $A_{ij}$ : componente do tensor associado às expansões térmicas, o qual define as deformações térmicas na ausência de tensões impostas.

### 2.2.9 Incrementalização das Relações Constitutivas Viscoelásticas

Embora seja preferível a solução analítica dos problemas viscoelásticos, muitas vezes esta é de natureza muito difícil e, às vezes, até impossível, especialmente para aqueles problemas de geometria complexa e que envolvem materiais multi-fásicos onde cada fase apresenta um comportamento constitutivo diferente.

Nestes casos, os métodos computacionais, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), tornam-se mais viáveis e práticos. Existem diversas técnicas disponíveis na literatura que possibilitam a análise computacional de problemas viscoelásticos (KING, 1965; HOPMAN, 1994; GHAZLAN *et al.*, 1995; ZOCHER, 1995; PARK e KIM, 1998), porém, as técnicas baseadas no MEF se destacam pela sua versatilidade e aplicabilidade na solução de diversos problemas.

As relações constitutivas viscoelásticas podem ser incorporadas à formulação do MEF através da incrementalização destas relações com relação ao tempo (GHAZLAN *et al.*, 1995; ZOCHER *et al.*, 1997; FERREIRA *et al.*, 2000). A técnica de incrementalização adotada no presente trabalho é aquela proposta por ZOCHER *et al.* (1997), a qual assume que a taxa de variação da deformação é constante durante o incremento de tempo e que cada membro do tensor módulo de relaxação,  $C_{ijkl}$ , pode ser representado pela série de Prony originada do modelo de Maxwell generalizado (ou modelo de Wiechert), conforme a equação abaixo.

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl}^{\infty} + \sum_{m=1}^{M_{ijkl}} C_{ijkl}^m e^{-\frac{t}{\rho_{ijkl}^m}}, \quad (\text{não há soma em } i, j, k, l) \quad (2.102)$$

onde,

$$\rho_{ijkl}^m = \frac{\eta_{ijkl}^m}{C_{ijkl}^m}, \quad (\text{não há soma em } i, j, k, l) \quad (2.103)$$

Desconsiderando-se os efeitos da temperatura, o algoritmo de incrementalização da relação constitutiva 2.100 proposto por ZOCHER *et al.* (1997) pode ser resumido nas seguintes equações:

$$\Delta\sigma_{ij} = C'_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} + \Delta\sigma_{ij}^R \quad (2.104)$$

onde,

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl}^\infty + \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=1}^{M_{ijkl}} \eta_{ijkl}^m \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_{ijkl}^m}} \right), \quad (\text{n\~{a}o h\~{a} soma em } i, j, k, l) \quad (2.105)$$

$$\Delta\varepsilon_{kl} \equiv R_{\varepsilon_{kl}} \Delta t \quad (2.106)$$

sendo que  $R_{\varepsilon_{kl}}$  é uma constante representando a taxa de variação de  $\varepsilon_{kl}$  durante o incremento de tempo, e,

$$\Delta\sigma_{ij}^R = -\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 A_{ijkl}, \quad (\text{n\~{a}o h\~{a} soma em } i, j) \quad (2.107)$$

onde,

$$A_{ijkl} = -\sum_{m=1}^{M_{ijkl}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_{ijkl}^m}} \right) S_{ijkl}^m(t), \quad (\text{n\~{a}o h\~{a} soma em } i, j, k, l) \quad (2.108)$$

$$S_{ijkl}^m(t) = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_{ijkl}^m}} S_{ijkl}^m(t - \Delta t) + \eta_{ijkl}^m R_{\varepsilon} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_{ijkl}^m}} \right), \quad (\text{n\~{a}o h\~{a} soma em } i, j, k, l) \quad (2.109)$$

É importante salientar que, caso  $\Delta t$  seja mantido constante, toda dependência no tempo relativa ao comportamento viscoelástico do material reside em  $\Delta\sigma_{ij}^R$ .

Incorporando-se, portanto, a relação constitutiva incrementalizada à formulação do MEF, segue que (ZOCHER *et al.*, 1997) (desprezando-se as forças de volume e efeitos de inércia):

$$[k]^e \{\Delta d\}^e = \{f_1\}^e + \{f_2\}^e + \{f_3\}^e \quad (2.110)$$

sendo,

$$[k]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [C'^e] [B^e] dV^e \quad (2.111)$$

$$\{f_1\}^e = \int_{\partial V^e} [\psi^e]^T [T(t + \Delta t)] dS \quad (2.112)$$

$$\{f_2\}^e = - \int_{V^e} [B^e]^T [\sigma(t)] dV \quad (2.113)$$

$$\{f_3\}^e = - \int_{V^e} [B^e]^T [\Delta \sigma^R] dV \quad (2.114)$$

onde,

$\{\Delta d\}^e$ : variação no vetor de deslocamentos nodais durante o incremento de tempo;

$\partial V^e$ : superfície do elemento onde forças distribuídas são aplicadas;

$[\psi^e]$ : matriz das funções de forma do elemento;

$T(t + \Delta t)$ : forças de superfície atuantes no tempo  $t + \Delta t$ ;

$\{f_1\}^e$ : contribuição para o vetor de forças nodais devido a forças de superfície;

$\{f_2\}^e$ : contribuição para o vetor de forças nodais devido a tensões existentes no início do incremento de tempo; e

$\{f_3\}^e$ : contribuição para o vetor de forças nodais devido à variação das tensões durante o incremento de tempo provocada pelo comportamento viscoelástico do material.

### 2.3 MECÂNICA DA FRATURA

Os materiais sólidos, quando usados em aplicações que visam resistir esforços, podem sofrer modificações ao longo do tempo que degradam seu desempenho estrutural, através do acúmulo de “dano”, o qual pode ser de diversas naturezas (trincas, deformações plásticas, etc). Dentre os diversos modos de dano que degradam o desempenho estrutural dos materiais, destacam-se aqueles provocados pela formação de microfissuras que “coalescem” e podem se propagar na forma de macrofissuras.

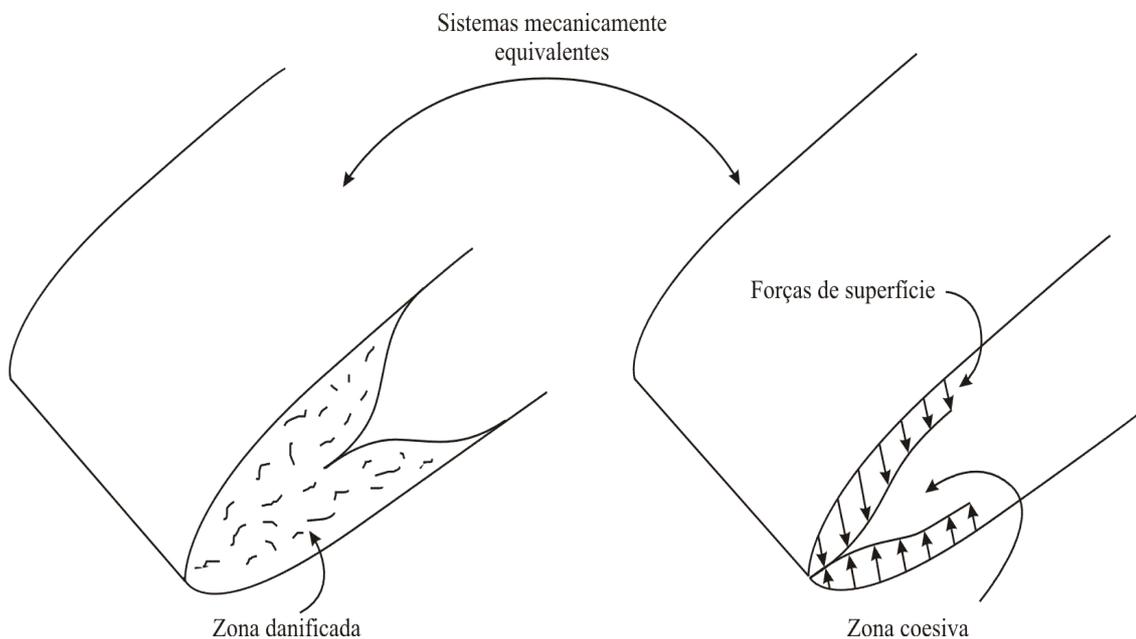
GRIFFITH, através do seu trabalho publicado em 1920 (GRIFFITH, 1920), deu início ao campo da Mecânica da Fratura, cujo objetivo principal é desenvolver teorias e técnicas de previsão da formação e propagação de trincas em meios sólidos. A teoria desenvolvida no referido trabalho assume a inexistência de deformações plásticas no material, ou essas deformações podem ser desprezadas, sendo, portanto, conhecida como Teoria da Mecânica da Fratura Clássica ou Mecânica da Fratura Linear Elástica. Uma outra hipótese dessa teoria é que a propagação da trinca ocorre quando a taxa de dissipação de energia exceder a taxa de dissipação de energia crítica, a qual é tida como uma propriedade do material.

Porém, muitos materiais de aplicação prática não seguem o comportamento de um material elástico ideal e exibem fenômenos como a propagação subcrítica de trincas (COSTANZO e ALLEN, 1993). Assim sendo, numa tentativa de se solucionar tal problema, teorias alternativas têm sido propostas, dentre as quais destacam-se os Modelos de Zona Coesiva (MZC), inicialmente desenvolvidos por DUGDALE (1960) e BARENBLATT (1962) para materiais elásticos, os quais são capazes de remover a singularidade de tensões na ponta da trinca e, simultaneamente, introduzir ductilidade na zona de processamento da trinca.

O modelo desenvolvido por DUGDALE (1960) consiste basicamente da aplicação de forças de superfície constantes, de valor igual à tensão de escoamento do material, na região anterior à ponta da trinca. BARENBLATT (1962), seguindo a mesma filosofia, modificou a distribuição das forças de superfície através do uso de relações não-lineares entre estas e o deslocamento de abertura da trinca. Em seguida, outros trabalhos, como os de NEEDLEMAN (1987) e TVERGAARD (1990), sofisticaram as relações constitutivas da zona coesiva através do uso de funções potenciais e de uma lei cúbica que relaciona as forças de superfície ao deslocamento entre as faces da trinca, respectivamente. Com relação ao uso de MZC em meios viscoelásticos, destacam-se os trabalhos pioneiros de KNAUSS (1974) e SCHAPERLY (1975a, 1975b, 1975c).

O MZC pode ser definido como a substituição matemática da zona danificada existente nas proximidades da ponta da trinca (ou zona de processamento da trinca) por

uma superfície mecanicamente equivalente submetida à ação de forças de superfície (Figura 2.9).



**Figura 2.9:** Representação esquemática de um MZC

Dentre as vantagens apresentadas pelo MZC, destacam-se as seguintes: *i*) o MZC permite a análise da propagação de trincas tanto a partir de trincas pré-existentes como em superfícies planas (sem trincas); e *ii*) a dependência com relação ao histórico do carregamento pode ser incorporada à taxa de dissipação de energia crítica, possibilitando a previsão de fenômenos como fadiga e propagação de trincas em meios viscoelásticos (COSTANZO e ALLEN, 1993).

Na grande maioria das aplicações, no entanto, inúmeras microfissuras se desenvolvem no material ao mesmo tempo, as quais podem “coalescer” e formar múltiplas macrofissuras. Neste caso, torna-se impraticável modelar cada microtrinca ou cada macrotrinca, especialmente quando modelos analíticos são utilizados. A zona danificada mostrada na Figura 2.9 é um exemplo onde múltiplas microfissuras se desenvolvem simultaneamente.

Basicamente, a modelagem deste tipo de problema pode ser classificada em: *i*) modelo de dano contínuo e *ii*) modelo discreto (*discrete fracture model*). A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) se baseia nas chamadas variáveis internas de estado, as quais

quantificam o dano no interior do material. De acordo com ALLEN e SEARCY (2001b), os modelos de dano contínuo podem ser formulados fenomenologicamente (ALLEN *et al.*, 1987; TALREJA, 1994), onde o corpo é assumido homogêneo, ou através da homogeneização de uma solução micromecânica (BOYD *et al.*, 1993; COSTANZO *et al.*, 1996; ALLEN e YOON, 1998). No caso da formulação fenomenológica, nenhum contorno interno (trincas discretas) é considerado ou previsto pelo modelo, mas as variáveis internas de estado podem representar a dissipação de energia devido à propagação de trincas.

O modelo fenomenológico de dano contínuo desenvolvido por SCHAPERY (1981, 1990a, 1990b) para materiais viscoelásticos tem sido amplamente aplicado na análise da evolução do dano em diversos materiais (PARK e SCHAPERY, 1997; HA e SCHAPERY, 1998), inclusive misturas asfálticas (PARK *et al.*, 1996; LEE e KIM, 1998a, 1998b; LEE *et al.*, 2000).

No caso da formulação micromecânica, realiza-se uma análise no Elemento de Volume Representativo (EVR), considerando-se as heterogeneidades do material, sendo a formação e a evolução dos contornos internos previstas através de alguma variação da Mecânica da Fratura, como os MZC. O efeito desses contornos internos é, então, considerado na relação constitutiva global do material por meio de variáveis internas de estado, as quais podem ser determinadas a partir de uma média volumétrica dos deslocamentos nos contornos internos (ALLEN e YOON, 1998). Além disso, a lei de evolução dessas variáveis internas de estado também é determinada através de análises micromecânicas.

Assim sendo, uma vez determinadas a relação constitutiva global, a propriedade constitutiva efetiva do material e as leis de evolução das variáveis internas de estado, nenhuma nova análise na microestrutura é necessária (COSTANZO *et al.*, 1996). Desta forma, uma vantagem da utilização dos modelos de dano contínuo é a economia do tempo computacional necessário na solução de problemas *a posteriori* à determinação da relação constitutiva e das leis de evolução das variáveis internas de estado, seja fenomenologicamente, seja através da micromecânica e homogeneização.

Note-se, porém, que os detalhes físicos são perdidos quando da utilização das variáveis internas de estado, pois estas geralmente fornecem detalhes insuficientes sobre a causa da evolução do dano (CAIAZZO e COSTANZO, 2001).

Existem, porém, situações em que o conhecimento das causas e do mecanismo de evolução do dano é de grande importância, como no projeto de materiais compósitos. Nestes casos, em que o entendimento de como os mecanismos de falha se manifestam a nível macroscópico é desejável, as microtrincas e outros tipos de dano devem ser modelados explicitamente para cada aplicação estudada do material (CAIAZZO e COSTANZO, 2000), o que pode ser feito através de modelos discretos.

Nos modelos discretos, a formação e propagação dos contornos internos são consideradas em todas as análises, pois, neste caso, não se utilizam variáveis internas. Neste tipo de modelo, pode-se considerar que as trincas podem se desenvolver simultaneamente em qualquer escala e região do objeto em análise. Entretanto, exceto para os problemas de geometria e materiais mais simples, a busca pela solução de problema através deste procedimento torna-se inviável tanto para os métodos analíticos como para os computacionais.

Uma alternativa é a utilização da chamada metodologia local-global (modelos multi-escala) (FEYEL, 1999; LEE *et al.*, 1999; FISH e SHEK, 2000). Nos modelos multi-escala, as estruturas macroscópicas são analisadas através de métodos convencionais, porém para cada ponto analisado do material, uma análise na microestrutura (EVR) é realizada com o objetivo de determinar o comportamento constitutivo do material, considerando-se inclusive o efeito dos diversos mecanismos de evolução do dano (CAIAZZO e COSTANZO, 2000). Mais uma vez, o dano provocado pela propagação de cada contorno interno é contabilizado através de alguma variação da Teoria da Mecânica da Fratura, como os MZC, e a resposta global do material na macroestrutura, influenciada pelo conjunto de contornos internos, pode ser obtida através de alguma técnica de homogeneização.

Note-se que um aspecto bastante importante dos modelos baseados na Micromecânica é a seleção do EVR, o qual deve representar satisfatoriamente o comportamento constitutivo global do material compósito.

Além das aplicações citadas anteriormente, a Micromecânica pode ainda ser usada no desenvolvimento de relações constitutivas para os MZC baseadas numa interpretação física da zona danificada localizada nas proximidades da ponta de um trinca qualquer. Desta forma, pode-se, convenientemente, obter uma relação constitutiva para a zona coesiva a qual contém uma variável interna de estado que representa o estado de dano (provocado pelas microfissuras) na zona danificada (ALLEN e SEARCY, 2001a).

### 2.3.1 Modelo de Zona Coesiva Micromecânico Viscoelástico (MZC-MV)

ALLEN e SEARCY (2001a) desenvolveram um Modelo de Zona Coesiva Micromecânico Viscoelástico (MZC-MV) baseados numa interpretação física da zona danificada. No referido trabalho, a zona danificada é representada por um EVR micromecânico idealizado como um conjunto de fibras viscoelásticas cilíndricas envolvidas por ar. Como mostrado em ALLEN e SEARCY (2001a), o processo de homogeneização do EVR idealizado produziu uma relação constitutiva não linear dependente do dano na zona coesiva, conforme a Equação 2.115:

$$T_i(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \frac{\delta_i(t)}{\delta_i^*} [1 - \alpha(t)] \cdot \left[ \sigma_i^f + \int_0^t E^c(t - \tau) \frac{\partial \lambda(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (2.115)$$

onde,

$i$ : direção relativa a um eixo de coordenadas local. Para o caso bidimensional,  $i = n$  ou  $t$ , onde  $n$  designa a direção normal em relação às faces da zona coesiva e  $t$  designa a direção tangencial;

$T_i(t)$ : forças de superfície homogeneizadas atuantes nas faces da zona coesiva;

$\delta_i(t)$ : deslocamento de abertura entre as faces da zona coesiva na direção  $i$ ;

$\delta_i^*$ : parâmetro empírico de comprimento do material (relacionado à direção  $i$ );

$\alpha(t)$ : variável interna de estado que representa o dano da zona coesiva;

$\sigma_i^f$ : nível de tensão necessário para iniciar-se a evolução do dano na zona coesiva (relacionado à direção  $i$ );

$E^c(t)$ : módulo de relaxação viscoelástico linear do material que constitui a zona danificada; e

$\lambda(t)$ : norma Euclidiana dos deslocamentos de abertura da zona coesiva, dada por (caso bidimensional):

$$\lambda(t) = \sqrt{\left(\frac{\delta_n(t)}{\delta_n^*}\right)^2 + \left(\frac{\delta_t(t)}{\delta_t^*}\right)^2} \quad (2.116)$$

Vale ressaltar que, YOON e ALLEN (1999), através da aplicação dos princípios da Termodinâmica à zona coesiva e ao material virgem adjacente, chegaram à mesma relação constitutiva viscoelástica desenvolvida por ALLEN e SEARCY (2001a) através da Micromecânica.

O parâmetro interno de dano,  $\alpha(t)$ , representa a fração da área da seção transversal do EVR ocupada pelos vazios existentes entre as fibras viscoelásticas e é dado por:

$$\alpha(t) = \frac{A^{EVR} - \sum_{k=1}^N A^k(t)}{A^{EVR}} \quad (2.117)$$

onde,

$A^{EVR}$ : área da seção transversal do EVR;

$A^k(t)$ : área da seção transversal da  $k$ -ésima fibra; e

$N$ : número total de fibras no EVR.

O parâmetro interno de dano pode ser determinado experimentalmente através do ensaio compacto de fratura a tensão (*compact tension fracture test*), sendo  $\alpha(t)$  determinado a partir da distribuição probabilística dos raios das fibras observados

durante o experimento (WILLIAMS, 2001). No presente trabalho, porém, dada a impossibilidade de realização deste ensaio, utiliza-se uma lei fenomenológica de evolução do dano capaz de expressar a decrescente fração volumétrica das fibras. A lei de evolução do dano adotada é a mesma lei utilizada por ALLEN e SEARCY (2001a), a qual reflete a dependência no tempo através da derivada de  $\alpha(t)$  com relação ao tempo:

$$\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha(t)}{dt} = \begin{cases} A[\lambda(t)]^m, & \text{para } \frac{d\lambda}{dt} > 0 \text{ e } \alpha(t) < 1 \\ 0, & \text{para } \frac{d\lambda}{dt} \leq 0 \text{ ou } \alpha(t) = 1 \end{cases} \quad (2.118)$$

onde,  $A$  e  $m$  são chamados de parâmetros de dano do material.

Objetivando simplificar a implementação deste MZC em um código em elementos finitos, SEIDEL (2002) propôs uma forma mais simples para a Equação 2.115, como segue:

$$T_i(t) = [1 - \alpha(t)] \cdot \left[ \sigma_i^f + \frac{1}{\delta_i^*} \int_0^t E^c(t - \tau) \frac{\partial \delta_i(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (2.119)$$

De maneira geral, a Equação 2.115 (e a Equação 2.119) não pode ser integrada analiticamente devido às não-linearidades introduzidas pela lei de evolução do dano (ALLEN e SEARCY, 2001a). Entretanto, a Equação 2.115 (e a Equação 2.119) pode ser incrementalizada de modo a permitir sua inclusão em um programa de elementos finitos. ALLEN e SEARCY (2000) apresentam uma breve discussão sobre esse processo de incrementalização, o qual é mais detalhadamente abordado em SEARCY (1998).

De acordo com SEIDEL *et al.* (2004), o algoritmo incremental proposto por SEIDEL (2002), baseando-se nos métodos propostos por SEARCY (1998) e ZOCHER *et al.* (1997), pode ser expresso, de forma resumida, pelas seguintes equações:

$$\Delta T_i = k_{ij} \Delta \delta_j + \Delta T_i^R \quad (2.120)$$

onde,

$$k_{ij} = \frac{[1 - \alpha(t + \Delta t)]}{\delta_i^*} [E'(\Delta t)] \quad (2.121)$$

$$E'(\Delta t) = E_\infty + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^P \eta_j \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_j}} \right) \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} \Delta T_i^R = & \frac{[1 - \alpha(t)]}{\delta_i^*} \left[ - \sum_{j=1}^P \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_j}} \right) \sigma_j(t) \right] - \\ & - \frac{\Delta \alpha}{\delta_i^*} \left[ E_\infty \delta_i(t) + \sum_{j=1}^P \sigma_j(t) - \sum_{j=1}^P \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_j}} \right) \sigma_j(t) \right] + (-\Delta \alpha) \sigma_i^f \end{aligned} \quad (2.123)$$

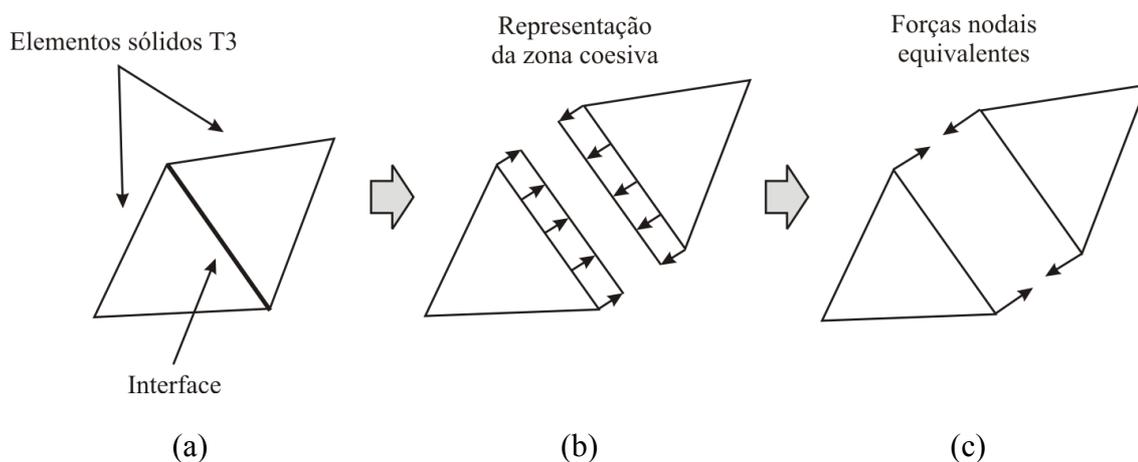
$$\sigma_j(t) = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_j}} \cdot \sigma_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta \delta_i}{\Delta t} \eta_j \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_j}} \right) \quad (2.124)$$

$$\Delta \delta_i = R_{\delta_i} \Delta t \quad (2.125)$$

sendo que  $R_{\delta_i}$  é uma constante representando a taxa de variação de  $\delta_i$  durante o incremento de tempo.

O MZC-MV apresentado tem sido bastante usado na previsão da evolução do dano em diversos materiais, como sólidos policristalinos inelásticos (HELMS *et al.*, 1999) e materiais compósitos (PHILLIPS *et al.*, 1999; SEIDEL *et al.*, 2004), incluindo misturas asfálticas (KIM, 2003; SOUZA *et al.*, 2004).

Com relação à implementação em elementos finitos, as zonas coesivas podem ser modeladas através de elementos de interface, os quais devem ser governados pela relação constitutiva do MZC adotado. Os elementos de interface devem ser locados nas posições desejadas entre os elementos sólidos, como mostra a Figura 2.10. Uma discussão mais detalhada sobre a formulação de MZC para aplicação em elementos finitos pode ser encontrada em FOULK *et al.* (2000).

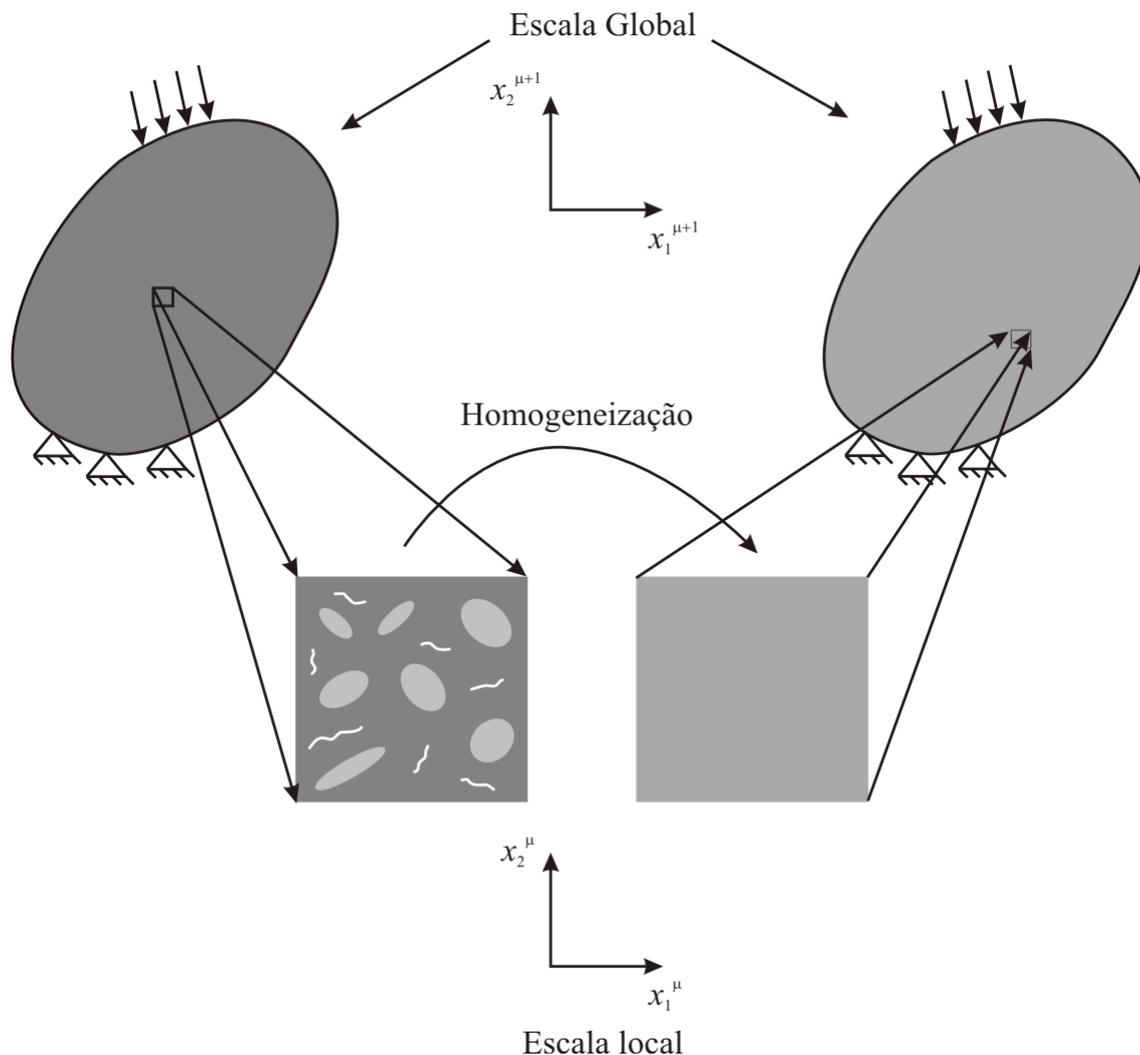


**Figura 2.10:** (a) Elemento de interface, (b) representação da zona coesiva e suas forças de superfície e (c) forças nodais equivalentes às forças de superfície

## 2.4 TEORIAS DE HOMOGENEIZAÇÃO

Os materiais atualmente utilizados em aplicações estruturais são em grande parte constituídos de múltiplos constituintes, sendo, portanto, denominados materiais compostos. De maneira geral, as escalas geométricas dos constituintes são pequenas comparadas à escala da peça estrutural produzida com o material, o que torna inviável a modelagem da peça como um meio totalmente heterogêneo.

Porém, frequentemente, os meios heterogêneos podem ser aproximados por um meio homogêneo desde que a escala geométrica das heterogeneidades possam ser consideradas pequenas com relação à escala da peça estrutural em análise (Figura 2.11). Esse processo é comumente chamado de homogeneização, talvez devido ao fato de que um meio homogêneo é usado para representar um meio heterogêneo (ALLEN e YOON, 1998).



**Figura 2.11:** Representação esquemática do processo de homogeneização

As Teorias de Homogeneização podem ser definidas como uma classe de modelos constitutivos cujo objetivo principal é prever o comportamento global de materiais heterogêneos com base do arranjo geométrico e no comportamento dos seus materiais constituintes (SEARCY, 2004). Esse comportamento global é encontrado através da solução de um problema micromecânico e posterior obtenção da média dos campos mecânicos (tensões, deformações e deslocamentos) através de técnicas de homogeneização (ALLEN, 2001).

Mais especificamente, as Teorias de Homogeneização podem ser classificadas conforme a filosofia de previsão do comportamento global do material em teoria de homogeneização clássica e modelos multi-escala. Na aqui denominada teoria de

homogeneização clássica, a relação constitutiva global e as propriedades efetivas, ou homogeneizadas, do material são obtidas *a priori*, a partir de alguma técnica de homogeneização, e usadas nas análises *a posteriori* das peças estruturais. Os esforços iniciais se concentraram na solução de problemas elásticos (ESHELBY, 1957; HILL, 1963; HASHIN, 1964; HILL, 1965a) e elastoplásticos (MANDEL, 1964; HILL, 1965b, 1967).

De acordo com ALLEN e YOON (1998) as teorias de homogeneização clássicas foram, posteriormente, estendidas para sólidos com microtrincas (VAKULENKO e KACHANOV, 1971; KACHANOV, 1972; COSTANZO *et al.*, 1996), sólidos termoviscoelásticos (HASHIN, 1966; SCHAPERLY, 1967) e sólidos termoviscoelásticos com microtrincas (SCHAPERLY, 1986; ZOCHER e ALLEN, 1997; ALLEN e YOON, 1998).

Vale salientar que, embora existam muitas soluções analíticas para o caso de compósitos que apresentam microestrutura periódica e geometrias internas simples, a busca por soluções torna-se impraticável quando o compósito apresenta constituintes inelásticos, de formas irregulares, distribuídos e orientados aleatoriamente, e quando se considera a formação e propagação de microtrincas (SEARCY, 2004). Nestes casos, portanto, a utilização de métodos numéricos, como o MEF, torna-se mais atrativa.

Nos modelos multi-escala, no entanto, não se procura determinar as propriedades homogeneizadas. Nesses modelos, a análise global (escala macro) é realizada através de métodos comuns, mas sempre que há necessidade de se obter informações com relação ao comportamento constitutivo do material, um problema de valor de contorno micromecânico deve ser resolvido explicitamente (CAIAZZO e COSTANZO, 2000). Para o caso de a análise macroscópica ser realizada através do MEF, por exemplo, uma análise micromecânica correspondente deve ser realizada para cada ponto de integração da malha de elementos finitos e a cada incremento de tempo ao longo da história do carregamento (CAIAZZO e COSTANZO, 2000; FEYEL e CHABOCHE, 2000).

Note-se, portanto, que a solução analítica de problemas usando modelos multi-escala torna-se, muitas vezes, impraticável, especialmente nos casos em que existe um

gradiente de deformações (ou tensões) no espaço. Porém, os modelos multi-escala podem ser facilmente aplicados quando se utilizam métodos numéricos na solução do problema, podendo-se, inclusive, utilizar o mesmo código de análise (com mínimas alterações) na solução dos problemas correspondentes a cada escala, sendo a ligação entre as escalas realizada através de técnicas de homogeneização (ALLEN *et al.*, 2003).

A principal limitação dos modelos multi-escala convencionais e das teorias de homogeneização clássica é que ambos assumem a hipótese simplificadora de que o tamanho da escala local,  $\ell_{\text{local}}$ , é muito menor que o tamanho da escala global,  $\ell_{\text{global}}$  ( $\ell_{\text{local}} \ll \ell_{\text{global}}$ ).

A interpretação física dessa hipótese é que a microestrutura local corresponderia apenas a um ponto na escala global. Assumindo-se essa hipótese como verdadeira, não é preciso, portanto, transmitir o gradiente de deformações da escala global para a escala local, visto que tal hipótese implica na uniformidade das deformações globais ao longo do Elemento de Volume Representativo (EVR).

A principal consequência dessa simplificação é que se impossibilita a modelagem do chamado “efeito de tamanho” (*size effect*) (BAZANT e PLANAS, 1998) e da localização de deformações (alto gradiente de deformações) na escala global (KOUZNETSOVA, 2002).

É importante ressaltar que embora necessitem de uma grande quantidade de memória computacional, devido à existência de um problema micromecânico para cada ponto de integração, os modelos multi-escala proporcionam uma economia de esforço e memória computacional se comparados ao modelo onde o material é considerado um meio totalmente heterogêneo (Figura 1.2). Além disso, é possível reduzir de forma drástica o tempo computacional gasto pelos códigos multi-escala através da incorporação de técnicas avançadas de solução de sistemas de equações, como a computação paralela.

Alguns trabalhos recentes têm apresentado métodos de construção de modelos multi-escala, principalmente usando o MEF como método de solução do problema

estrutural (LEE *et al.*, 1999; FISH e SHEK, 2000; RAGHAVAN *et al.*, 2001; YU e FISH, 2002; SEARCY, 2004). Alguns desses modelos têm sido chamados de modelos multi-escala  $EF^2$  (*multiscale FE<sup>2</sup> models*), devido ao fato de haver uma análise por elementos finitos (na escala local) dentro de uma outra análise por elementos finitos (na escala global) (FEYEL, 1999; FEYEL e CHABOCHE, 2000).

Embora a grande maioria desses modelos tenha sido desenvolvida com base na técnica de homogeneização assintótica, a qual assume que o EVR é repetitivo (periódico) dentro da microestrutura, alguns desses modelos ainda podem ser utilizados para microestruturas não periódicas, devendo-se, porém, substituir as condições de contorno periódicas do problema local por um tipo de condição de contorno mais adequado. Para o caso de se usar restrições de deslocamento como condição de contorno do problema local, pode-se optar por restrições lineares com relação às coordenadas locais.

As teorias de homogeneização, tanto os modelos clássicos como os multi-escala, utilizam alguma técnica de homogeneização para obter a solução do problema global a partir da microestrutura do material. No presente trabalho, uma técnica de homogeneização é definida como o processo matemático de determinação das quantidades médias atuantes na microestrutura e/ou da relação constitutiva global. Essas técnicas estão baseadas nos chamados teoremas de média. Considerando uma quantidade qualquer,  $f(x_i, t)$ , função da posição espacial,  $x_i$ , e do tempo,  $t$ , a média volumétrica desta quantidade é definida como:

$$\bar{f}(x_i^{\mu+1}, t) = f^{\mu+1}(x_i^{\mu+1}, t) \equiv \frac{1}{V^\mu} \int_{V^\mu} f^\mu(x_i^\mu, t) dV \quad (2.126)$$

onde,

- $\bar{f}$ : média volumétrica de  $f$ , equivalente à função  $f$  na escala  $\mu + 1$  (escala global),  $f^{\mu+1}$ ;
- $f^\mu$ : função  $f$  na escala  $\mu$  (escala local);
- $x_i^\mu$ : coordenadas espaciais na escala  $\mu$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ); e

$V^\mu$ : volume do EVR (volume analisado na escala  $\mu$ ).

Através do teorema da divergência, pode-se ainda transformar a integral volumétrica da Equação 2.126 em uma integral de superfície. Esta transformação é importante, pois, do ponto de vista de um observador que não pode ver o interior do EVR, a interpretação física das quantidades homogeneizadas é a de quantidades médias (homogeneizadas) de superfície (ou contorno) (*boundary averaged quantities*) (ALLEN e YOON, 1998; ALLEN, 2001).

Assim sendo, de acordo com ALLEN (2001), pode-se mostrar que, quando as condições de contorno aplicadas ao EVR são homogêneas (forças de superfície constantes no espaço ou restrições de deslocamento lineares com as coordenadas espaciais), as tensões homogeneizadas no contorno do EVR são dadas por (BOYD *et al.*, 1993; COSTANZO *et al.*, 1996; ALLEN e YOON, 1998):

$$\sigma_{ij}^{\mu+1} = \bar{\sigma}_{ij}^\mu = \frac{1}{V^\mu} \int_{\partial V^\mu} \sigma_{ik}^\mu n_k^\mu x_j^\mu dS \quad (2.127)$$

onde,

$\partial V^\mu$ : contorno (interno e externo) do volume  $V^\mu$ ; e

$n_k^\mu$ : vetor normal unitário na direção externa de  $V^\mu$ .

É importante ressaltar que o contorno de  $V^\mu$ ,  $\partial V^\mu$ , pode ser dependente do tempo caso se utilize alguma variação da Teoria da Mecânica da Fratura para modelar a propagação de trincas (contornos internos) (ALLEN, 2001).

Do mesmo modo, a partir da relação deformação-deslocamento:

$$\varepsilon_{ij}^\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^\mu}{\partial x_j^\mu} + \frac{\partial u_j^\mu}{\partial x_i^\mu} \right) \quad (2.128)$$

pode-se mostrar que:

$$\varepsilon_{ij}^{\mu+1} = e_{ij}^{\mu+1} + \alpha_{ij}^{\mu+1} \quad (2.129)$$

sendo que,

$$e_{ij}^{\mu+1} = \frac{1}{V^\mu} \int_{\partial V_E^\mu} \frac{1}{2} (u_i^\mu n_j^\mu + u_j^\mu n_i^\mu) dS \quad (2.130)$$

$$\alpha_{ij}^{\mu+1} = \frac{1}{V^\mu} \int_{\partial V_I^\mu} \frac{1}{2} (u_i^\mu n_j^\mu + u_j^\mu n_i^\mu) dS \quad (2.131)$$

onde,

$\varepsilon_{ij}^{\mu+1}$ : componente do tensor das deformações médias no volume,  $V^\mu$   
(*volume averaged strain tensor*);

$\partial V_E^\mu$ : contorno externo de  $V^\mu$ ;

$\partial V_I^\mu$ : contorno interno de  $V^\mu$ ;

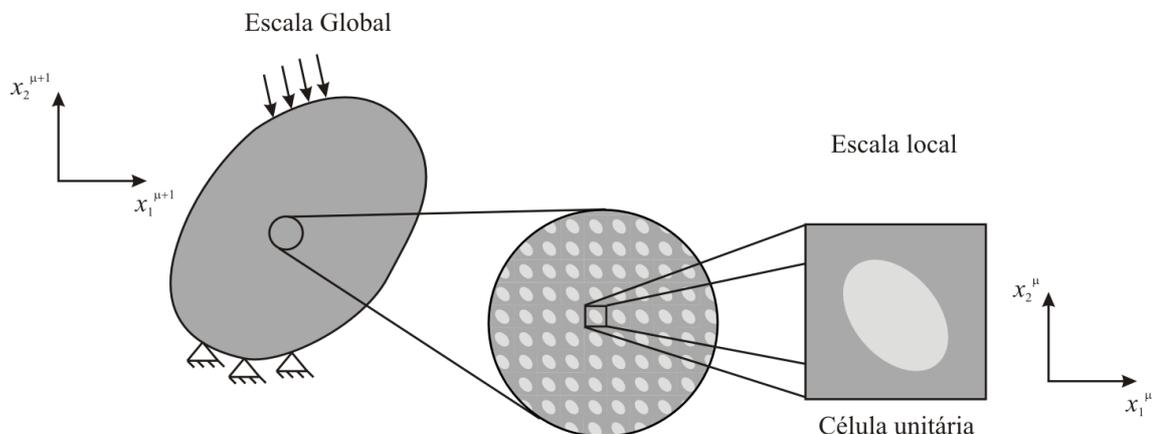
$e_{ij}^{\mu+1}$ : componente do tensor das deformações médias no contorno  
externo,  $\partial V_E^\mu$  (*external boundary averaged strain tensor*); e

$\alpha_{ij}^{\mu+1}$ : componente do tensor das deformações médias no contorno  
interno,  $\partial V_I^\mu$  (*internal boundary averaged strain tensor*).

A variável  $\alpha_{ij}^{\mu+1}$  é conhecida como “parâmetro de dano” porque resulta da formação de contornos internos (trincas) no EVR. De acordo com ALLEN e YOON (1998),  $\alpha_{ij}^{\mu+1}$  também é conhecido como o componente do tensor de Vakulenko-Kachanov (VAKULENKO e KACHANOV, 1971) e, aparentemente foi mencionada pela primeira vez por HILL (1963).

Para o caso especial dos materiais compósitos cuja microestrutura é periódica, pode-se usar a chamada técnica de homogeneização assintótica, ou homogeneização matemática, a qual tem se desenvolvido bastante devido aos esforços de muitos pesquisadores (BENSOUSSAN *et al.*, 1978; SANCHEZ-PALENCIA, 1980; SUQUET, 1985; FISH *et al.*, 1997; CHUNG *et al.*, 2000; MAGHOUS e CREUS, 2003; YI *et al.*, 1998; YU e FISH, 2002). A Figura 2.12 mostra um exemplo de microestrutura periódica. Vale ressaltar que esta técnica pode ser usada tanto na obtenção de relações

constitutivas globais e de propriedades efetivas através da teoria de homogeneização clássica como nos modelos multi-escala.



**Figura 2.12:** Exemplo de microestrutura periódica

#### 2.4.1 Elemento de Volume Representativo (EVR)

A determinação das características geométricas do EVR é de fundamental importância quando se utiliza alguma Teoria de Homogeneização para prever o comportamento estrutural de um material compósito.

Como comentado anteriormente, um EVR pode ser definido como o menor volume da microestrutura capaz de representar satisfatoriamente o comportamento constitutivo global do material compósito.

Segundo ALLEN (2001), um EVR pode ser determinado comparando-se o gráfico tensão  $\times$  deformação homogeneizado. Caso o comportamento tensão  $\times$  deformação homogeneizado, não dependa do tamanho do volume  $V^\mu$ , então, pode-se dizer que o EVR é grande o suficiente para capturar os detalhes da escala menor. Entretanto, o tamanho do EVR pode ser determinado estatisticamente, sendo o tamanho do EVR adequado caso a condição abaixo (conhecida como homogeneidade estatística) seja satisfeita para todas as quantidades analisadas:

$$s_f^{\mu+1} \ll f^{\mu+1} \quad (2.132)$$

onde,  $s_f^{\mu+1}$  é o desvio padrão dado por:

$$s_f^{\mu+1} = \left[ \frac{1}{V^\mu} \int_{V^\mu} (f^{\mu+1} - f^\mu)^2 dV \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.133)$$

Ainda de acordo com ALLEN (2001), em alguns casos, o tamanho do EVR pode ser determinado através da análise estatística das dimensões geométricas da escala local, como, por exemplo, as dimensões das partículas, sua orientação e distribuição no interior do EVR (HELMS *et al.*, 1999; HELMS, 2000; SEIDEL *et al.*, 2004).

ZEMAN e ŠEJNOHA (2003), com base nos estudos de POVIRK (1995) e ZEMAN e ŠEJNOHA (2001), apresentam uma metodologia de determinação do EVR com base em parâmetros estatísticos da microestrutura. Neste trabalho, a configuração original da microestrutura é caracterizada por parâmetros estatísticos próprios e, em seguida, substituída por uma célula unitária simplificada.

STROEVEN *et al.* (2004), desenvolveram um procedimento para determinação de EVR's para meios granulares aleatórios (como concreto de cimento portland, solos, misturas asfálticas e outros). Neste estudo, utilizou-se um programa computacional chamado SPACE (*Software Package for the Assessment of Compositional Evolution*) para gerar aleatoriamente a distribuição das partículas no interior do EVR. Em seguida, a microestrutura é “discretizada” numa malha de elementos finitos e análises não lineares são realizadas. Finalmente, uma análise estatística é feita com relação a alguma propriedade do material (como, por exemplo, a carga de pico, a energia dissipada e outras) para verificar se o tamanho da microestrutura considerado é menor ou maior do que o tamanho de um EVR satisfatório para aquela propriedade considerada.

No presente trabalho, o EVR foi determinado utilizando-se um procedimento semelhante ao desenvolvido por STROEVEN *et al.* (2004), porém, a microestrutura é determinada a partir de uma seção transversal de corpos de prova fabricados em laboratório e a propriedade do material considerada é o módulo de relaxação. Além disso, considerou-se também a análise estatística do tamanho (área geométrica) dos agregados na escala local como critério de determinação do EVR (ALLEN, 2001).

## CAPÍTULO 3

### CONSTRUÇÃO DO CÓDIGO MULTI-ESCALA

Este capítulo descreve em linhas gerais a construção do código multi-escala com base nas teorias apresentadas no CAPÍTULO 2. É apresentada uma visão geral do código de análise, sua entrada de dados e suas etapas de cálculo.

#### 3.1 ESTRUTURA DO PROGRAMA

O código de análise multi-escala desenvolvido no presente trabalho baseia-se no MEF e foi implementado em FORTRAN usando a linguagem de programação estruturada. Grande parte das subrotinas usadas pelo presente código foram adaptadas a partir das subrotinas originais do código SADISTIC (*Structural Analysis of Damage Induced Stresses in ThermoInelastic Composites*) (ALLEN *et al.*, 1994), gentilmente cedido pelo professor David H. Allen.

A utilização da linguagem de programação estruturada em FORTRAN não proporcionou maiores dificuldades por dois motivos principais: *i*) a análise é realizada em apenas duas escalas, uma global e outra local; e *ii*) o programa desenvolvido não possui pré e pós-processadores gráficos de alto nível, os quais se baseiam na linguagem de programação orientada a objetos (POO).

As duas simplificações adotadas na construção do código se devem ao fato de que este é apenas um esforço inicial de desenvolvimento de um código multi-escala para análise de materiais viscoelásticos; no caso específico, de misturas asfálticas.

No entanto, no caso da análise de sistemas de geometria complexa e de grandes dimensões espaciais, um número muito grande de análises micromecânicas deve ser realizado, gerando, portanto, um enorme esforço computacional e consumindo um grande espaço de memória. Nestes casos, o uso de técnicas avançadas de solução de

sistemas de equações, como a computação paralela, torna-se imprescindível, podendo reduzir o tempo computacional de forma drástica.

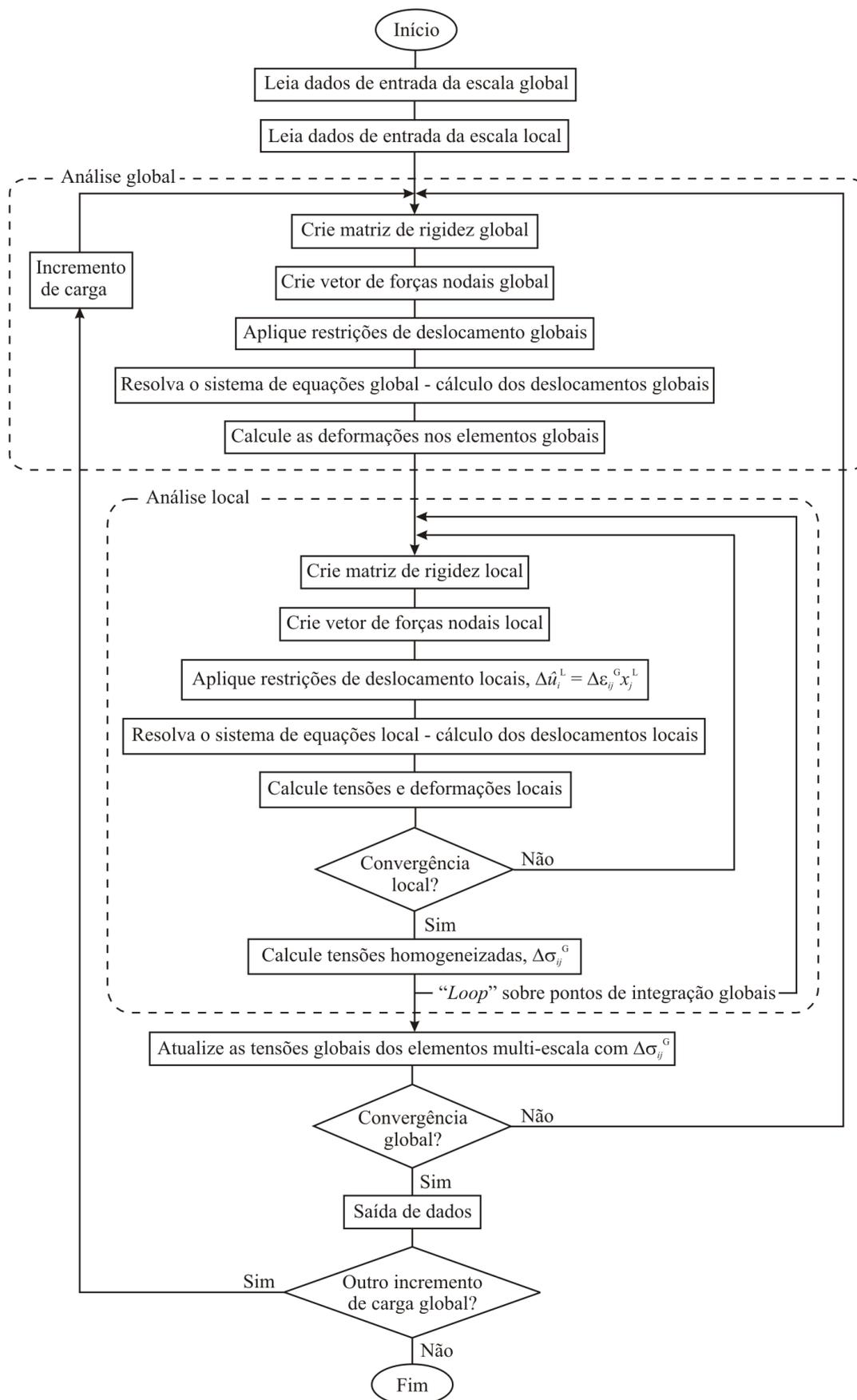
A computação paralela é uma tecnologia criada recentemente e se baseia na utilização de dois ou mais processadores por uma única máquina (computador). Deste modo, tarefas independentes entre si podem ser realizadas paralelamente por processadores diferentes. Algumas linguagens orientadas a objetos, como a C++, já dispõem de classes específicas para manipulação de dados e gerenciamento de processos próprios da computação paralela.

Vale ressaltar ainda que a utilização da POO torna-se essencial quando se pretende construir um programa de análise com interface amigável com o usuário através do uso de pré e pós-processadores de alto nível. Os trabalhos de FEYEL (1999) e FEYEL e CHABOCHE (2000) utilizam ambas as técnicas de computação paralela e POO na construção do modelo multi-escala computacional.

Com o objetivo de minimizar o consumo de memória computacional, o presente código permite que as análises multi-escala sejam realizadas apenas em elementos pré-selecionados da malha da escala global, o que aumenta a imprecisão do modelo. Essa perda pode ser minimizada caso os elementos mais solicitados e suscetíveis à evolução do dano sejam estabelecidos como elementos multi-escala.

No presente trabalho, consideram-se apenas análises bidimensionais, sendo os elementos triangulares de deformação constante (três nós) (elemento T3) e os elementos de interface (forças de superfície constantes ao longo do elemento) os únicos elementos implementados para ambas as escalas. Com relação às cargas aplicadas na escala global, é permitida a aplicação de restrições de deslocamentos e de forças concentradas e distribuídas nos nós da malha.

O código aqui desenvolvido está dividido, basicamente, em quatro partes: *i*) entrada de dados; *ii*) análise na escala global; *iii*) análise na escala local e *iv*) saída de dados. A Figura 3.1 mostra o fluxograma do algoritmo utilizado na construção do código multi-escala em elementos finitos.



**Figura 3.1:** Fluxograma do algoritmo multi-escala em elementos finitos

Com relação à entrada de dados, dois arquivos devem ser escritos: um para a escala global e outro para a escala local. As principais informações contidas no arquivo de entrada da escala global são: *i*) a malha de elementos finitos gerada *a priori* (elementos triangulares e de interface), especificando os elementos multi-escala; *ii*) as informações sobre a subdivisão da escala de tempo em incrementos (válidas também para a escala local); *iii*) as condições de carregamento (forças e restrições de deslocamento); e *iv*) as propriedades constitutivas associadas a cada elemento T3 e de interface.

Vale ressaltar que as propriedades constitutivas globais são necessárias para a determinação do incremento de deformações globais para cada incremento de tempo, especialmente para os elementos que não são multi-escala, para os quais, tais propriedades também são usadas no cálculo das tensões globais. No presente trabalho, as propriedades constitutivas globais utilizadas na entrada de dados global correspondem às propriedades lineares do material compósito obtidas através da homogeneização da solução numérica pelo MEF de um problema micromecânico (ALLEN e YOON, 1998), onde não se considerou a formação e propagação de trincas.

Com relação ao arquivo de entrada local, as principais informações são: *i*) a malha de elementos finitos do EVR; e *ii*) as propriedades constitutivas associadas a cada elemento T3 e de interface.

Os modelos constitutivos implementados para ambas as escalas são o elástico e o viscoelástico lineares, com base na incrementalização das relações constitutivas viscoelásticas mostrada na Seção 2.2.9. A formação e propagação de trincas pode ser considerada em ambas as escalas e é modelada através de elementos de interface cujo comportamento é regido pelo MZC-MV apresentado na Seção 2.3.1. A verificação da convergência em ambas as escalas, necessária devido à natureza não linear do problema, é feita através do método de iteração de Newton-Raphson (ZIENKIEWICZ, 1971).

Após a entrada de dados, procede-se à análise multi-escala. Inicialmente, resolve-se o problema global, determinando-se os deslocamentos nos nós e as deformações em cada elemento. Os sistemas de equações lineares são resolvidos através do método de eliminação de Gauss (ZIENKIEWICZ, 1971). Em seguida, inicia-se uma

série de análises locais, uma para cada ponto de integração dos elementos especificados como multi-escala.

Dada a não periodicidade do EVR na estrutura global, para cada análise local, restrições de deslocamentos lineares com relação às coordenadas locais são aplicadas ao contorno do EVR (BOYD *et al.*, 1993; COSTANZO *et al.*, 1996; ALLEN e YOON, 1998; ALLEN *et al.*, 2003; CLUNI e GUSELLA, 2004; SEARCY, 2004):

$$\Delta \hat{u}_i^L = \Delta \varepsilon_{ij}^G x_j^L \quad \text{em } \partial V_E^L \quad (3.1)$$

onde, os sobrescritos  $L$  e  $G$  denotam as escalas local e global, respectivamente, o símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  é usado para especificar uma condição de contorno conhecida e  $\partial V_E^L$  representa o contorno externo da geometria local (EVR).

Note-se que esses deslocamentos aplicados no contorno externo do EVR produzem deformações médias no contorno externo da escala local (EVR) equivalentes às deformações observadas no respectivo ponto de integração da malha de elementos finitos global (ALLEN *et al.*, 2003).

Uma vez resolvido o problema local, verifica-se a convergência local e procede-se ao cálculo das tensões homogeneizadas,  $\Delta \sigma_{ij}^G = \Delta \bar{\sigma}_{ij}^L$ , referente à análise local específica, para, em seguida, começar uma nova análise local, continuando o “loop” sobre os pontos de integração globais. As tensões homogeneizadas são obtidas a partir da média volumétrica das tensões na escala local, a qual corresponde à tensão no ponto correspondente da escala global (SEARCY, 2004). Para o caso do elemento T3, as tensões homogeneizadas podem ser obtidas a partir da seguinte equação:

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^L = \frac{1}{V^L} \sum_{n=1}^{Ne} [(\Delta \sigma_{ij}^L)_n v_n^L] \quad (3.2)$$

onde,

$V^L$ : volume do EVR;

$Ne$ : número de elementos que constituem a malha do EVR; e

$v_n^L$ : volume do elemento  $n$  da malha do EVR.

Concluídas todas as análises locais para um determinado incremento de tempo (incremento de carga), atualizam-se as tensões dos pontos de integração dos elementos globais multi-escala com as tensões locais homogeneizadas (SMIT *et al.*, 1998), e verifica-se a convergência global.

Caso a convergência global seja atingida, o programa procede à saída de dados, escrevendo em um arquivo todos os resultados da análise global e os resultados das análises locais pré-selecionadas. Em seguida, caso ainda haja incrementos de carga a serem aplicados, o programa inicia uma outra análise global para o próximo incremento de tempo. Caso contrário, a execução do programa é terminada.

É importante ressaltar que todas as análises locais começam com a mesma geometria (EVR), as mesmas propriedades constitutivas e mesmas condições iniciais. Porém, à medida que a análise procede, cada análise local torna-se única, uma vez que cada uma delas recebe condições de contorno únicas a partir das deformações globais (Equação 3.1). Esta é a principal razão do grande consumo de memória computacional, pois é preciso armazenar as informações tanto da análise global como de todas as análises locais.

Assim sendo, para os problemas em que não há gradiente de deformações na escala global, ou seja, as deformações (e taxas de deformação) nos diversos pontos de integração globais são iguais entre si, a análise multi-escala perde o sentido. Neste caso, é mais vantajoso resolver o problema micromecânico para o histórico de carregamento observado na escala global (comum a todos os pontos) e homogeneizar sua solução, obtendo-se assim a propriedade constitutiva efetiva a ser usada no problema global.

## CAPÍTULO 4

### MATERIAL E MÉTODOS

O presente capítulo apresenta os materiais utilizados na presente pesquisa, os ensaios realizados e as metodologias usadas na determinação das propriedades dos materiais, nos processos de criação dos modelos geométricos e geração das malhas de elementos finitos e na determinação do Elemento de Volume Representativo (EVR).

#### 4.1 MATERIAL

Os materiais usados no decorrer deste trabalho de pesquisa são: *i)* CAP (Cimento Asfáltico de Petróleo); *ii)* agregados; *iii)* AAUQ (Areia Asfalto Usinada a Quente); e *iv)* mastique (mistura do CAP com agregados finos).

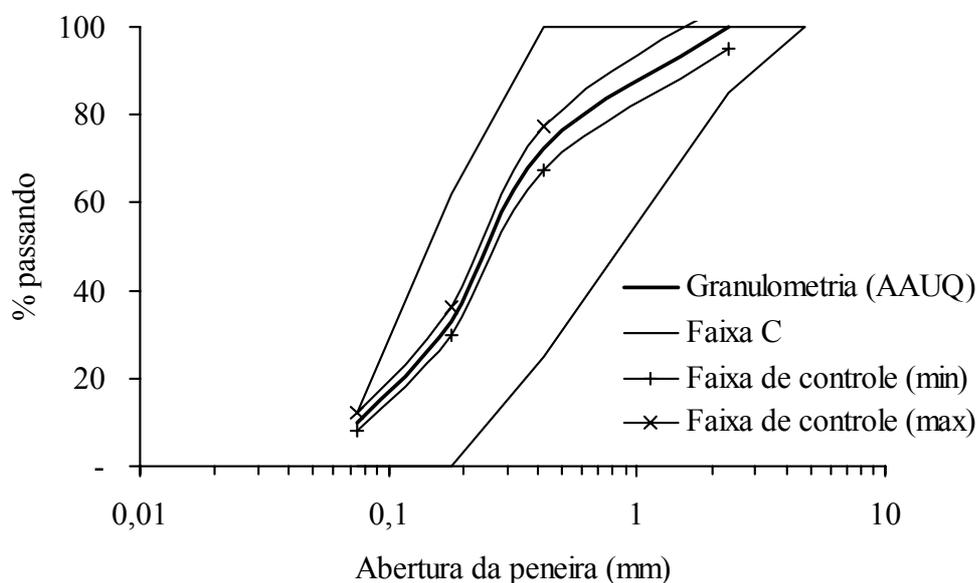
O CAP aqui utilizado é o CAP 50/60 fornecido pela Petrobras/Lubnor, o qual é oriundo do petróleo Fazenda Alegre do Espírito Santo. No decorrer deste trabalho, o CAP também é chamado de ligante asfáltico ou simplesmente ligante.

Os agregados usados podem ser classificados como areia de campo, constituindo-se de frações de granulometria média e fina, não havendo, portanto, agregados graúdos, como brita. A Figura 4.1 mostra a curva granulométrica da areia usada, a qual se enquadra na Faixa C do DNER (DNER, 1995).

A mistura asfáltica em AAUQ constitui-se da mistura do CAP com os agregados (areia), de modo a produzir um material com características intermediárias entre esses dois materiais. A mistura resultante é posteriormente compactada com o objetivo de dar mais consistência ao material, expulsando-se grande parte dos vazios contidos na mistura.

No presente trabalho, as misturas em AAUQ foram compactadas usando-se um compactador giratório Superpave, o qual se propõe a simular o processo de

compactação de campo. A mistura foi compactada com pressão de 600kPa e 120 giros com ângulo de giro de 1,25° sendo as dimensões médias dos corpos de provas de 150mm de altura por 100mm de diâmetro.



**Figura 4.1:** Curva granulométrica da areia usada

A densidade aparente média dos corpos de prova foi de 2,182 e o coeficiente de variação foi de 0,31%, para um total de nove corpos de prova a serem ensaiados. O teor de CAP usado nessas misturas foi de 9,0%, determinado pelo método de dosagem Marshall (DNER, 1995). O volume de vazios ( $V_v$ ) e a relação betume-vazios (RBV) do AAUQ foi de 5% e 80%, respectivamente. O VAM (vazios no agregado mineral) foi de 24% e o VCB (volumes cheios com betume) foi de 19%. A densidade máxima teórica (DMT) determinada foi de 2,29 (ASTM, 2000).

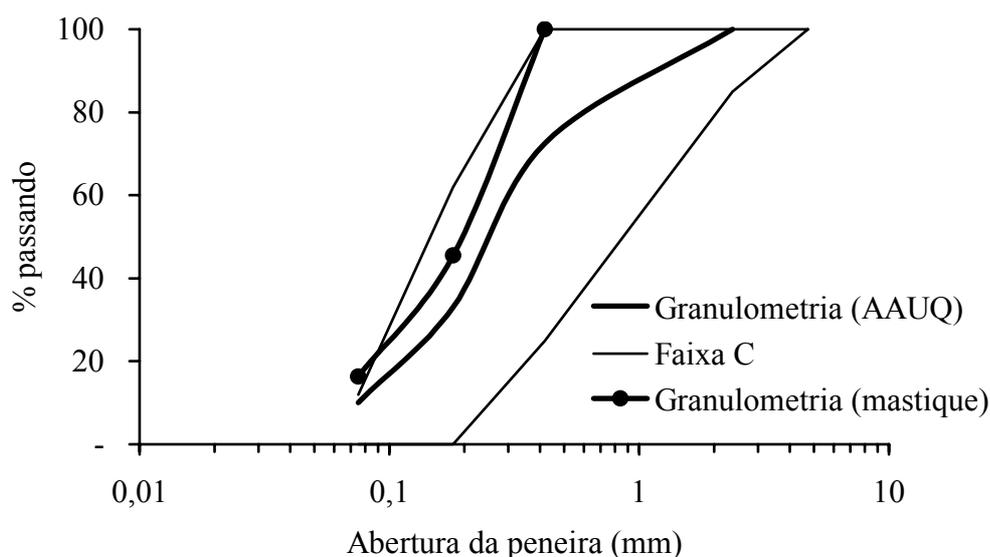
Dos nove corpos de prova fabricados, três deles foram serrados para produzir seis corpos de prova cilíndricos de dimensões 60mm de altura por 100mm de diâmetro a serem usados no ensaio de compressão diametral; e os seis restantes de dimensões 100mm de diâmetro por 150mm de altura foram usados no ensaio de tração direta.

Vale ressaltar que, embora se recomende respeitar a relação 2:1 entre a altura e o diâmetro, com o objetivo de minimizar os efeitos de borda no ensaio de tração direta, o estudo realizado por CHEHAB *et al.* (2000) mostra que corpos de prova de

100×150mm produzem resultados semelhantes aos resultados produzidos por corpos de prova de 75×150mm, sendo as diferenças observadas estatisticamente insignificantes.

O masticque constitui-se da mistura do CAP com uma fração fina dos agregados. No caso do presente estudo, esta fração fina foi determinada com base no processo de digitalização dos corpos de prova. A fração que constitui o masticque corresponde à fração mais fina dos agregados da mistura em AAUQ que não foi capturada durante o processo de digitalização. A menor dimensão das partículas capturadas foi de 0,40mm, de modo que as frações finas a partir da peneira N° 40 (abertura de 0,42mm) foram usadas na confecção dos corpos de prova de masticque.

Assim sendo, o percentual de cada fração foi determinado de modo que o material produzido corresponda ao masticque da mistura em AAUQ, bastando para isso desconsiderar-se o material retido na peneira N° 40. Desta forma, o teor de ligante usado na fabricação do masticque foi de 12,0%; e a curva granulométrica dos agregados usados é dada na Figura 4.2. Foram fabricados seis corpos de prova cilíndricos de masticque de dimensões 110mm de altura e 55mm de diâmetro, sendo estes compactados por impacto de modo a obter uma densidade aparente próxima à obtida nos corpos de prova de AAUQ.



**Figura 4.2:** Curva granulométrica dos agregados usados na fabricação do masticque

É importante salientar que é recomendável extrair o núcleo obtido da serragem de corpos de prova maiores a fim de produzir corpos de prova mais homogêneos, eliminando-se as regiões externas com maior concentração de vazios (DANIEL, 2001). Este procedimento, no entanto, não foi adotado no presente trabalho devido à falta dos equipamentos necessários.

## 4.2 ENSAIOS MECÂNICOS

No presente trabalho, foram realizados três tipos de ensaios mecânicos: *i*) ensaio de *creep* (*creep* estático) em corpos de prova de mastique; *ii*) ensaio de tração direta em corpos de prova de AAUQ; e *iii*) ensaio de compressão diametral (tração indireta) em corpos de prova de AAUQ.

### 4.2.1 Ensaio de *Creep*

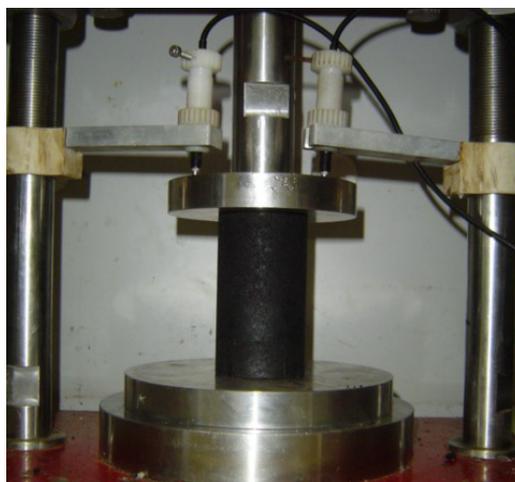
O ensaio de *creep* (*creep* estático) foi realizado nos corpos de prova de mastique com o objetivo de determinar experimentalmente a função fluência desse material. Esta função fluência será utilizada na determinação do módulo de relaxação do mastique, o qual constitui dado de entrada do problema micromecânico nas simulações numéricas.

O ensaio de *creep* consiste da aplicação de uma pressão uniaxial constante,  $\sigma_0$ , a um corpo de prova cilíndrico, sendo os deslocamentos uniaxiais observados no corpo de prova ao longo do ensaio medidos através de LVDT's (*Linear Variable Differential Transducers*). A Figura 4.3 mostra o aparato usado na realização do ensaio de *creep*.

Em seguida, obtém-se as deformações uniaxiais,  $\varepsilon(t)$ , dividindo-se os deslocamentos uniaxiais pela altura inicial do corpo de prova. De posse das deformações uniaxiais, pode-se obter a função fluência através da seguinte expressão:

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (4.1)$$

Finalmente, obtém-se, através do método da colocação (SCHAPERY, 1961), os coeficientes da série de Prony ( $D_j$  e  $\tau_j$ ) a partir da função fluência obtida experimentalmente.



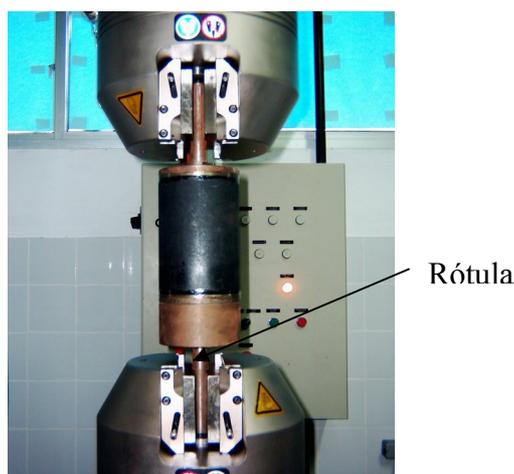
**Figura 4.3:** Ensaio de *creep* num corpo de prova de mastique

No presente trabalho, os ensaios de *creep* foram realizados a três temperaturas diferentes (5°C, 25°C e 40°C), totalizando seis ensaios (dois para cada temperatura), sendo que todos utilizaram uma pressão de compressão de 1,0kgf/cm<sup>2</sup>. Os ensaios foram realizados a temperaturas diferentes de modo a se obter uma curva mestra da função fluência através do princípio de superposição tempo-temperatura (SCHAPERY, 1974; ZHAO e KIM, 2003).

#### 4.2.2 Ensaio de Tração Direta

O ensaio de tração direta consiste da aplicação de deslocamentos uniaxiais a uma determinada taxa constante (carregamento monotônico) até a ruptura completa do corpo de prova. Como o ensaio aplica deslocamentos de tração, os corpos de prova foram colados às bases metálicas utilizando-se o adesivo epóxi Araldite® Professional.

Para minizar os efeitos da descentralização do corpo de prova e da falta de paralelismo entre as faces opostas do mesmo, utilizou-se um sistema de rótula fixado a uma das bases metálicas semelhante ao usado por PARK *et al.* (1996). Os ensaios de tração direta foram realizados numa máquina universal de ensaios (Figura 4.4).



**Figura 4.4:** Aparato usado no ensaio de tração direta

O objetivo deste ensaio é obter curvas de tensão  $\times$  deformação numa situação em que há evolução do dano. A partir destas curvas, portanto, pode-se calibrar os parâmetros de dano do MZC-MV ( $A$  e  $m$ ) através de simulações numéricas. As simulações numéricas constituem-se da aplicação das condições e carregamento deste ensaio ao EVR, sendo os parâmetros de dano calibrados de forma que as curvas tensão  $\times$  deformação obtidas numericamente sejam similares às obtidas experimentalmente.

Como a evolução do dano no MZC-MV aqui utilizado depende da taxa de aplicação da deformação, realizaram-se ensaios a duas taxas de deformação (0,0005/s e 0,001/s), sendo ensaiados três corpos de prova para cada taxa de deformação, totalizando seis corpos de prova. Todos os ensaios foram realizados à temperatura de 25°C. Os efeitos de inércia foram desprezados.

#### 4.2.3 Ensaio de Compressão Diametral

O ensaio de compressão diametral, internacionalmente conhecido como ensaio brasileiro (*brazilian test*) (CARNEIRO, 1943), consiste da aplicação de deslocamentos monotônicos (à taxa de aplicação constante) diametralmente a um corpo de prova cilíndrico, obtendo-se a força de reação do corpo de prova. Como resultado, podem-se obter as curvas força  $\times$  deslocamento e/ou força  $\times$  tempo. No caso de misturas

asfálticas, os deslocamentos são comumente aplicados através de frisos de carga dispostos diametralmente cuja largura vale 12,7mm.

No presente trabalho, realizaram-se ensaios de compressão diametral em corpos de prova de AAUQ a duas taxas diferentes (0,1mm/s e 0,4mm/s) e à temperatura de 25°C numa máquina universal de ensaios, sendo três corpos de prova para cada taxa. Os efeitos de inércia foram desprezados.

Os ensaios de compressão foram realizados com o objetivo de se obter resultados experimentais para verificação e validação do modelo computacional multi-escala, através da comparação dos resultados experimentais com os obtidos a partir de simulação numérica.

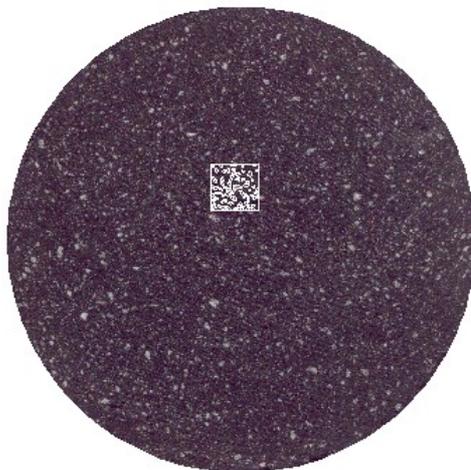
Em outras palavras, este ensaio foi simulado computacionalmente através do modelo multi-escala sendo as propriedades constitutivas do mastic e dos agregados obtidas do ensaio de *creep* e da literatura, respectivamente, e os parâmetros de dano calibrados a partir do ensaio de tração direta. Em seguida, os resultados computacionais foram comparados com os experimentais de modo a avaliar o desempenho do modelo.

### 4.3 DIGITALIZAÇÃO DA AAUQ

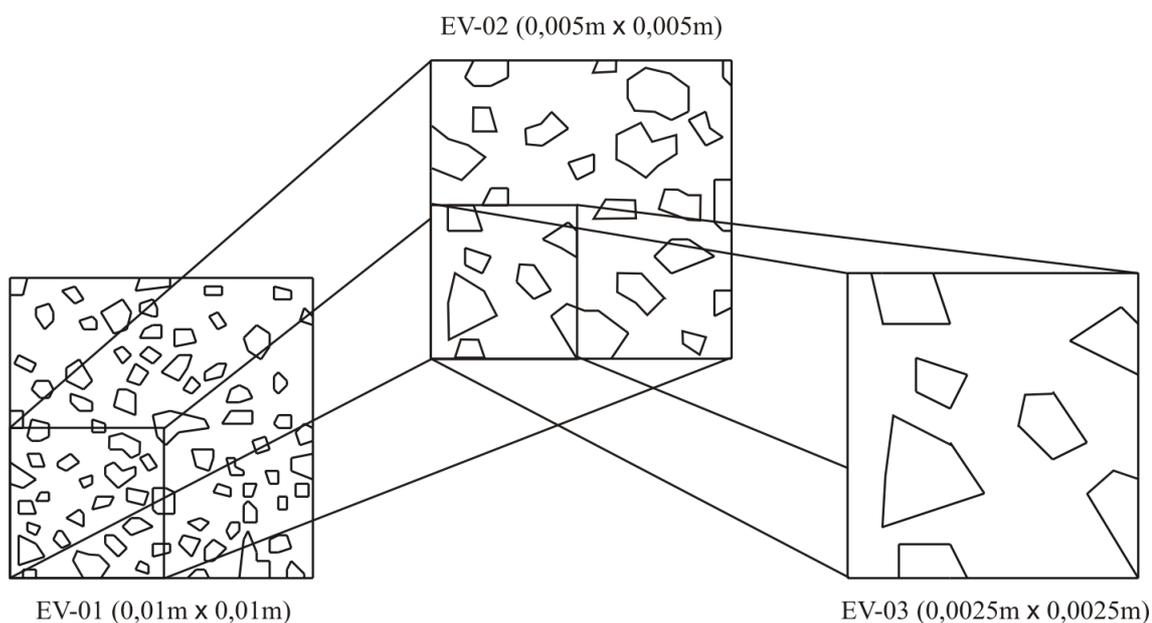
A estrutura da escala local (escala microscópica) foi determinada a partir de seções transversais de alguns dos corpos de prova serrados diametralmente. Essas seções foram, então, digitalizadas para permitir a criação do modelo geométrico representativo da escala local.

Primeiramente, algumas seções transversais foram “escaneadas”, selecionando-se uma para a definição da estrutura local, usando como critério de seleção a qualidade da imagem. Em seguida, escolheu-se uma região quadrangular de lado igual a 0,01m, próxima ao centro da seção transversal, onde os contornos dos agregados foram definidos manualmente (Figura 4.5). A partir dessa região, podem-se definir diversos elementos de volume (EV), dentre os quais um foi definido como o elemento de volume

representativo (EVR). Os elementos de volume selecionados correspondem a subdivisões da região mostrada na Figura 4.5, conforme mostra a Figura 4.6.



**Figura 4.5:** Seção transversal de uma mistura em AAUQ e região usada na definição dos elementos de volume da escala local



**Figura 4.6:** Elementos de volume selecionados

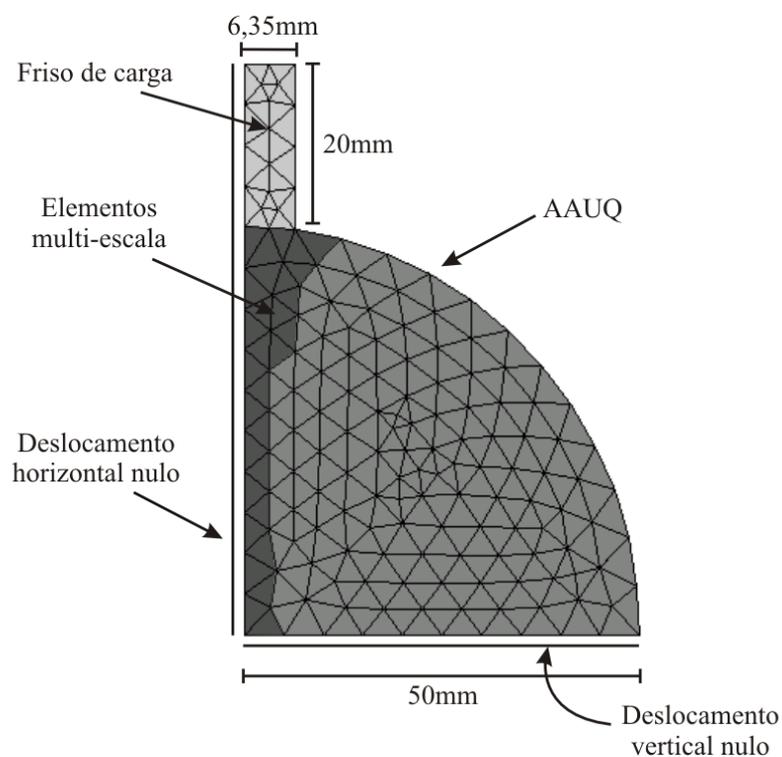
Note-se que a geometria da estrutura local também pode ser obtida através de metodologias numéricas. Uma alternativa é a geração do contorno dos agregados em posições aleatórias dentro de um contorno externo quadrangular, por exemplo, a partir da curva granulométrica. STROEVEN *et al.* (2004) apresentam uma metodologia de

determinação do EVR para materiais granulares onde a geometria aleatória da microestrutura é obtida através de um modelo computacional.

#### 4.4 GERAÇÃO DAS MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS

Para os casos em que não há elementos de interfaces, as malhas de elementos finitos foram geradas por triangulação, com elementos triangulares de três nós (T3) utilizando-se o programa Mtool (TECGRAF5, 1997). A malha usada nas simulações do ensaio de compressão diametral, por exemplo, não utiliza elementos de interface, mas a evolução do dano é considerada na escala local, sendo transmitido para a escala global na forma de perda de rigidez.

Note-se que, objetivando reduzir o esforço computacional, a análise multi-escala é realizada apenas nos elementos mais suscetíveis à evolução do dano. Também com o objetivo de reduzir o esforço computacional e dada a simetria do problema, apenas um quarto do corpo de prova do ensaio de compressão diametral foi modelado (Figura 4.7), cuja malha totalizou 276 elementos T3.



**Figura 4.7:** Malha usada na simulação do ensaio de compressão diametral

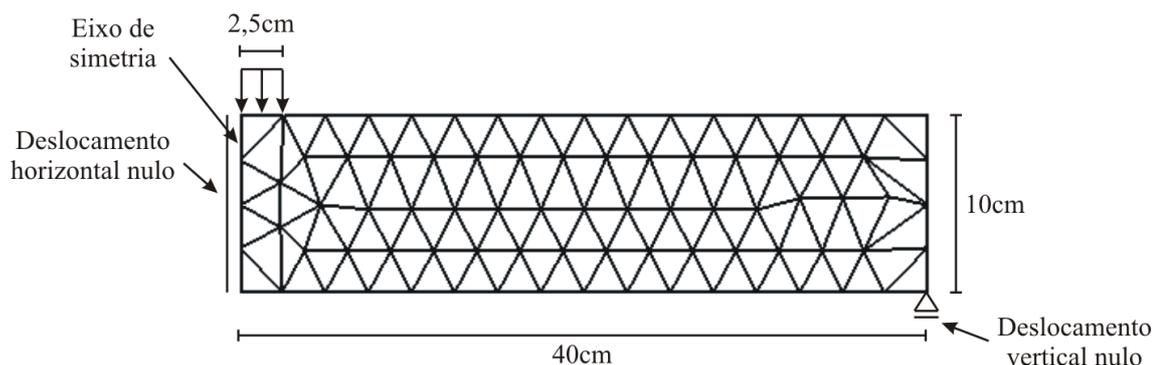
No caso da utilização de elementos de interface, as malhas foram inicialmente geradas pelo Mtool, semelhantemente à metodologia usada por FREITAS (2002), sendo que um novo algoritmo foi desenvolvido para inserir elementos de interface nas interfaces mastique-mastique e mastique-agregado.

Este algoritmo primeiramente detecta todas as interfaces entre os elementos T3 e as classifica em interface mastique-mastique, mastique-agregado e agregado-agregado. Em seguida, cria elementos de interface nas interfaces mastique-mastique e mastique-agregado, duplicando os nós da interface, atualizando a conectividade dos elementos T3 e criando a conectividade e as propriedades geométricas dos elementos de interface. A numeração dos novos nós duplicados segue a continuação da numeração inicial, o que aumenta significativamente a largura de banda da matriz de rigidez e, conseqüentemente, o esforço computacional.

Desta forma, após a geração da nova malha com elementos de interface, o algoritmo segue para uma rotina onde o algoritmo reverso de Cuthill-McKee (CUTHILL e MCKEE, 1969; GEORGE, 1971; LIU e SHERMAN, 1975), o qual reduz a largura de banda através da reordenação dos nós, foi implementado, de modo que a malha final com elementos de interface proporcione um menor esforço computacional.

Embora não tenham sido realizados ensaios experimentais de flexão em viga, este ensaio foi simulado computacionalmente com o objetivo de verificar a capacidade do modelo multi-escala de modelar os fenômenos de deformação permanente e de trincamento por fadiga.

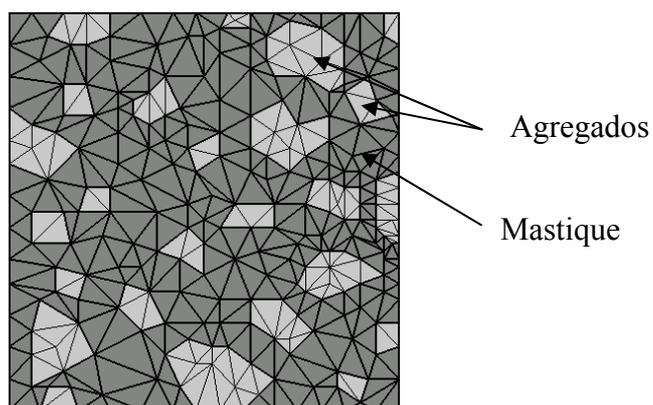
No caso das simulações em viga, apenas metade do corpo de prova foi modelada, devido à simetria do problema. Neste caso, utilizaram-se duas malhas, uma sem elementos de interface e outra com elementos de interface dispostos ao longo de toda a malha, mantendo-se em ambos os casos a mesma geometria e número de elementos T3. A Figura 4.8 mostra a geometria do problema e a malha usada, a qual possui 126 elementos T3 e 338 elementos de interface (em linhas mais espessas).



**Figura 4.8:** Malha usada nas simulações em viga com elementos de interface

Vale ressaltar que foram inseridos elementos de interface ao longo de toda a malha da viga (exceto no contorno da viga) para ilustrar a evolução simultânea do dano tanto na escala local como na escala global. Além disso, é importante salientar que as simulações em viga são apenas ilustrativas, uma vez que não foram realizados ensaios experimentais em viga, sendo o objetivo destas simulações mostrar a capacidade do modelo em simular os fenômenos de deformação permanente e de trincamento por fadiga.

No caso da escala local, foram inseridos elementos de interface em todas as interfaces entre os elementos da matriz viscoelástica (mastique) e nas interfaces entre o mastique e os agregados. A Figura 4.9 mostra uma malha para o EV-02, onde os elementos de interface estão destacados em linhas mais espessas.

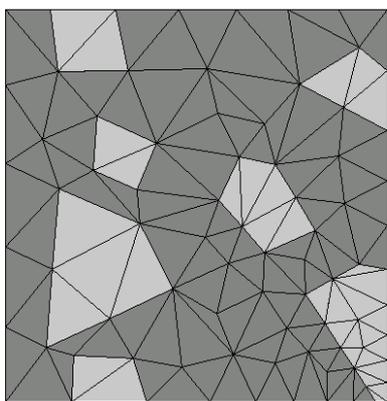


**Figura 4.9:** Malha de elementos finitos com elementos de interface para o EV-02

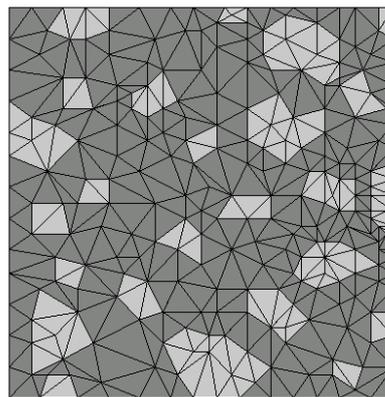
## 4.5 DETERMINAÇÃO DO EVR

O EVR foi determinado seguindo-se uma metodologia semelhante à usada por STROEVEN *et al.* (2004), onde uma propriedade do material é utilizada como critério de representatividade do elemento de volume. No caso do presente trabalho, a propriedade considerada foi o módulo de relaxação linear do EV, não sendo, portanto, utilizados os elementos interfaces.

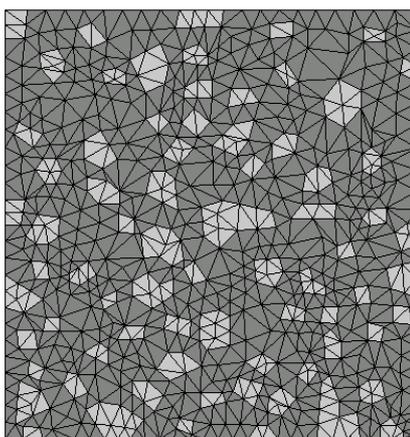
Além do critério da propriedade constitutiva do material, um critério geométrico, qual seja, a distribuição estatística do tamanho dos agregados, também foi considerado na determinação do EVR (ALLEN, 2001; SEIDEL *et al.*, 2004). As malhas de elementos finitos usadas para o EV-01, o EV-02 e o EV-03 são apresentadas na Figura 4.10, as quais possuem 129, 477 e 1.313 elementos T3, respectivamente.



(a) EV-01 (0,0025m × 0,0025m)



(b) EV-02 (0,005m × 0,005m)



(c) EV-03 (0,01m × 0,01m)

**Figura 4.10:** Malhas de elementos finitos usadas na determinação do EVR

#### 4.6 DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO DO MASTIQUE

O módulo de relaxação do mastique foi determinado com base na função fluência obtida experimentalmente. A Equação 2.87 para  $\rho_i \neq \tau_j$ , obtida da inter-relação entre as duas funções e da representação na forma de séries de Prony, foi usada no cálculo dos coeficientes da série de Prony para o módulo de relaxação. Os resultados obtidos são ainda verificados multiplicando-se a função  $\tilde{E}(s_k)$  por  $\tilde{D}(s_k)$ , representadas por séries de Prony, e comparando-se o resultado da multiplicação com a unidade (**vide** Equação 2.35). O erro é, então, avaliado pela seguinte expressão:

$$\text{erro} = \left| 1 - \tilde{E}(s_k) \cdot \tilde{D}(s_k) \right| \quad (4.2)$$

onde,  $s_k = 1/t_k$ .

O coeficiente de Poisson,  $\nu$ , do mastique foi assumido constante e determinado a partir das deformações radiais,  $\varepsilon_r$ , e longitudinais,  $\varepsilon_l$ , observadas no final do experimento, conforme a equação abaixo:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_l} \quad (4.3)$$

#### 4.7 DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO DA AAUQ

O módulo de relaxação da mistura em AAUQ foi determinado através da homogeneização da solução numérica de um problema micromecânico, onde se considera a heterogeneidade do material e a dissipação de energia devido ao comportamento viscoelástico do mastique. No entanto, como o objetivo é determinar o módulo de relaxação linear, a evolução do dano na forma de trincas não foi considerada neste caso.

Note-se que o módulo de relaxação homogeneizado da AAUQ é usado como a propriedade constitutiva dos elementos da escala global que não são considerados multi-escala. Além disso, é também usado no cálculo do incremento de deformações globais

iniciais dos elementos multi-escala para cada incremento de tempo, porém, à medida que o dano evolui na escala local, observa-se uma queda na rigidez do material global (e conseqüente comportamento não linear), uma vez que a rigidez passa a ser determinada pelo problema local.

ALLEN e YOON (1998), através de técnicas de homogeneização, desenvolveram uma equação para o cálculo do módulo de relaxação homogeneizado de materiais compósitos viscoelásticos, dada pela expressão abaixo:

$$E_{ijkl}^G(t) = \frac{1}{V} \int_V \left[ E_{ijmn}^L(t) \Lambda_{mnkl}^L(0) + \int_0^t E_{ijmn}^L(t-\tau) \frac{\partial \Lambda_{mnkl}^L(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] dV \quad (4.4)$$

onde,  $G$  e  $L$  denominam as escalas global e local, respectivamente, e:

$$\Lambda_{ijkl}^L(t) = \frac{\varepsilon_{ij}^L(t)}{e_{kl}^G(t)} \quad (4.5)$$

onde,

$\Lambda_{ijkl}^L$ : componente do tensor de localização de deformações (*strain localization tensor*);

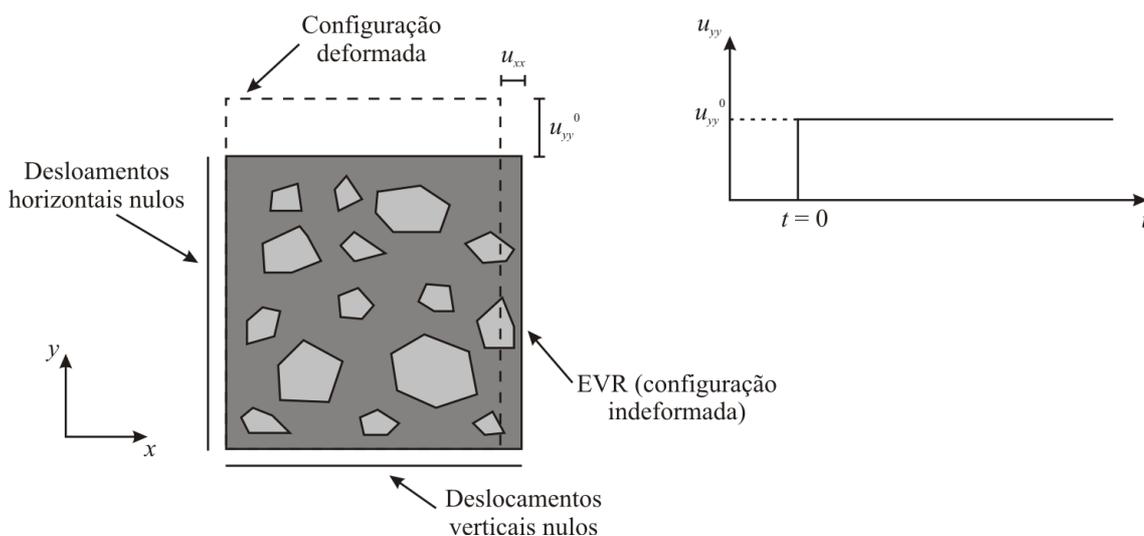
$\varepsilon_{ij}^L$ : componente do tensor das deformações na escala local (função das coordenadas locais); e

$e_{kl}^G$ : componente do tensor das deformações média no contorno externo do EVR (Equação 2.130).

Note-se que o primeiro termo da Equação 4.4 leva em consideração uma descontinuidade da função  $\Lambda_{mnkl}(t)$  no tempo  $t = 0$  (CHRISTENSEN, 1982). Além disso, esta equação também considera, por exemplo, as interações mastique-agregados e a dissipação de energia devido ao comportamento viscoelástico do mastique e devido à propagação de trincas. No entanto, a propagação de trincas não será considerada nesse caso, pois o objetivo é determinar o módulo de relaxação linear da AAUQ.

No presente trabalho, a Equação 4.4 foi resolvida numericamente para o EVR determinado (o qual deve representar o comportamento da mistura em AAUQ) pelo MEF usando as condições iniciais e de contorno do ensaio de relaxação (aplicação de deformação uniaxial constante), conforme mostra a Figura 4.11. Após a solução numérica da Equação 4.4, determinaram-se os coeficientes da série de Prony do módulo de relaxação da AAUQ pelo método da colocação.

Embora a Equação 4.4 considere o caso de anisotropia do material, por simplificação e dada a aleatoriedade da distribuição dos agregados na mistura, o módulo de relaxação determinado para uma direção do EVR é considerado constante para as demais direções, ou seja, o comportamento constitutivo do EVR é considerado isotrópico. No entanto, vale ressaltar que a anisotropia, especialmente a produzida pela propagação de trincas na escala local, é considerada no modelo multi-escala.



**Figura 4.11:** Representação esquemática das condições iniciais e de contorno do EVR usadas na solução numérica da Equação 4.4

O coeficiente de Poisson da AAUQ foi assumido constante e determinado a partir dos resultados numéricos obtidos na determinação do módulo de relaxação linear. Semelhantemente à Equação 4.3, o coeficiente de Poisson da AAUQ foi determinado a partir das deformações observadas no final da simulação, conforme a expressão:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}^0} \quad (4.6)$$

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS

O presente capítulo apresenta os resultados experimentais e numéricos obtidos neste trabalho. Inicialmente determinou-se o EVR. Em seguida, as propriedades viscoelásticas e os parâmetros de dano foram determinados, de modo a permitir a realização das análises numéricas. Finalmente, o modelo multi-escala foi verificado e validado através de simulações numéricas e da comparação dos resultados experimentais com os obtidos numericamente.

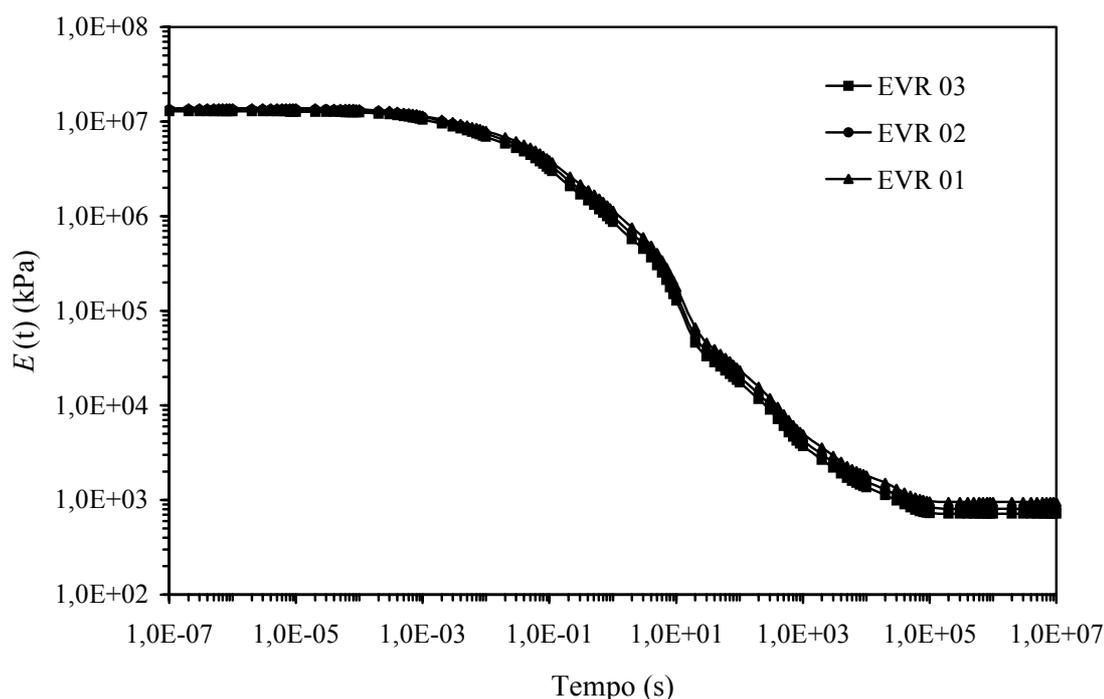
#### 5.1 DETERMINAÇÃO DO EVR

Como comentado no capítulo anterior, o EVR foi determinado com base em dois critérios: *i*) módulo de relaxação dos EV's e *ii*) coeficiente de variação do tamanho (área geométrica) dos agregados.

Vale ressaltar que, embora o EVR tenha sido aqui determinado sem considerar a evolução do dano na forma de trincas, por simplicidade, a homogeneidade estatística da distribuição do dano também pode ser usada como critério na determinação do EVR.

O módulo de relaxação dos EV's foi determinado através da solução da Equação 4.4 de acordo com a metodologia proposta na Seção 4.7. Neste caso, considerou-se apenas o módulo de relaxação no sentido vertical da Figura 4.10. Os resultados numéricos do módulo de relaxação para os três EV's são mostrados na Figura 5.1.

Os coeficientes de variação do tamanho dos agregados para os três EV's, usado como critério geomético e determinado pela razão entre o desvio padrão e a média da área geométrica dos agregados, foram de 0,59; 0,51 e 0,50 para os elementos de volume EV-01, EV-02 e EV-03, respectivamente.

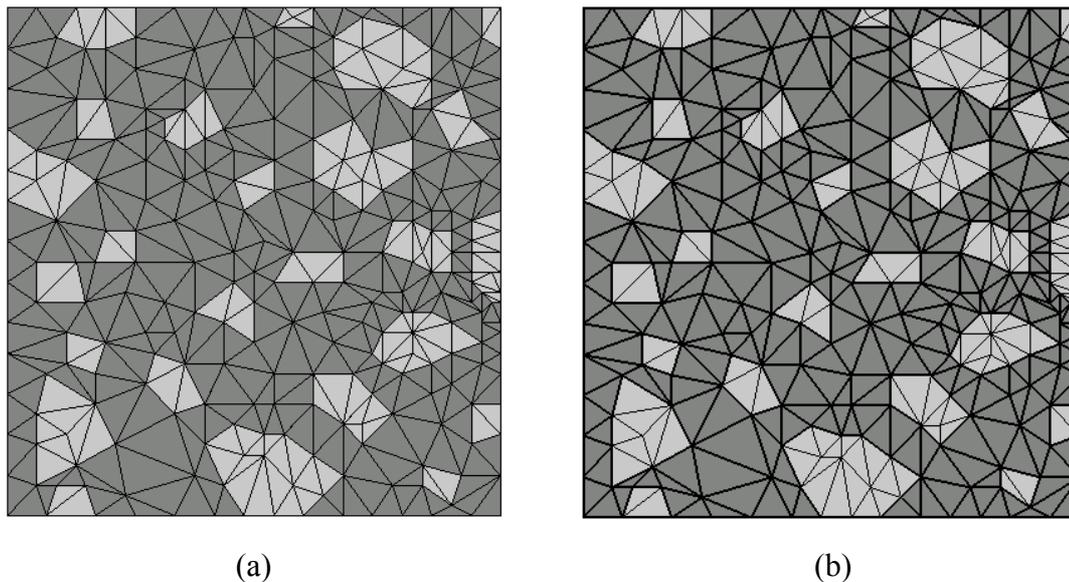


**Figura 5.1:** Módulo de relaxação para os EV's selecionados

Observa-se, portanto, uma convergência dos resultados à medida que o tamanho do EV aumenta. Assim sendo, dado que o EV-01 apresentou o maior CV e dada a semelhança entre os resultados do EV-02 e do EV-03, o EV escolhido como EVR foi o EV-02, devido à redução significativa de esforço computacional proporcionada pela menor malha do EV-02.

Note-se que a redução do esforço computacional é maior ainda quando se consideram os elementos de interface, uma vez que a malha do EV-02 possui 477 elementos T3 e 1.112 elementos de interface, enquanto a malha do EV-03 possui 1.313 elementos T3 e 3.266 elementos de interface. A Figura 5.2 mostra, portanto, o EVR determinado com suas malhas em elementos finitos sem e com elementos de interface (os elementos de interface estão destacados em linhas mais espessas).

É importante ressaltar que a anisotropia provocada pela distribuição e orientação dos agregados e das trincas é considerada em todas as análises locais. Além disso, o comportamento não linear produzido pela propagação de trincas também é considerado nas análises da escala local.

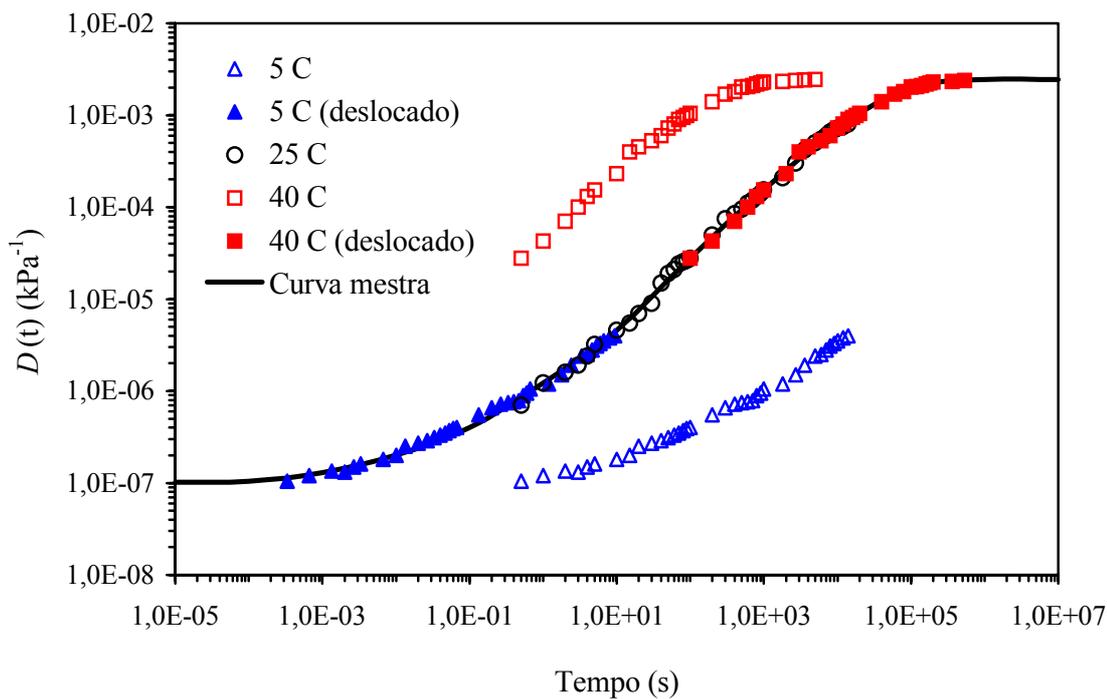


**Figura 5.2:** EVR determinado (a) sem elementos de interface e (b) com elementos de interface inseridos

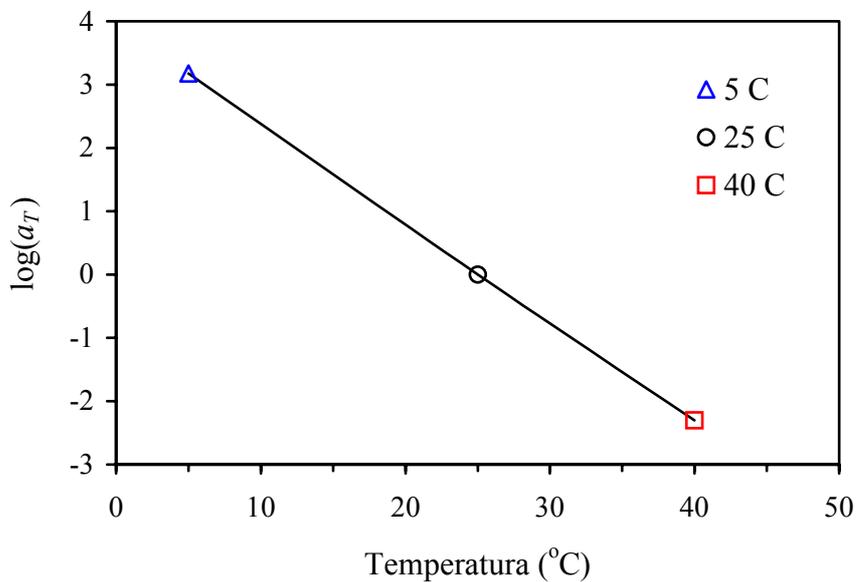
## 5.2 PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS

### 5.2.1 Função Fluência do Mastique

Com relação ao mastique, a função fluência e o coeficiente de Poisson foram obtidos experimentalmente, sendo o módulo de relaxação determinado a partir da representação na forma de série de Prony da função fluência, conforme descrito na Seção 4.6. O coeficiente de Poisson obtido foi de 0,4 e a Figura 5.3 mostra a função fluência do mastique obtida para as temperaturas de 5°C, 25°C e 40°C e a curva mestra para a temperatura de referência,  $T_R$ , de 25°C, obtida a partir da translação das curvas a 5°C e 40°C. Os fatores de translação horizontal,  $a_T$ , com relação à temperatura de referência de 25°C, são mostrados na Figura 5.4.



**Figura 5.3:** Função fluência do mastique para 5°C, 25°C e 40°C, e respectiva curva mestra



**Figura 5.4:** Fatores de translação horizontal com relação à  $T_R$  de 25°C

Os coeficientes da série de Prony para a função fluência do mastique determinados a partir da curva mestra da Figura 5.3 usando o método da colocação são

dados na Tabela 5.1, sendo que os tempos de retardação,  $\tau_j$ , foram escolhidos de modo a proporcionar o melhor ajuste da curva.

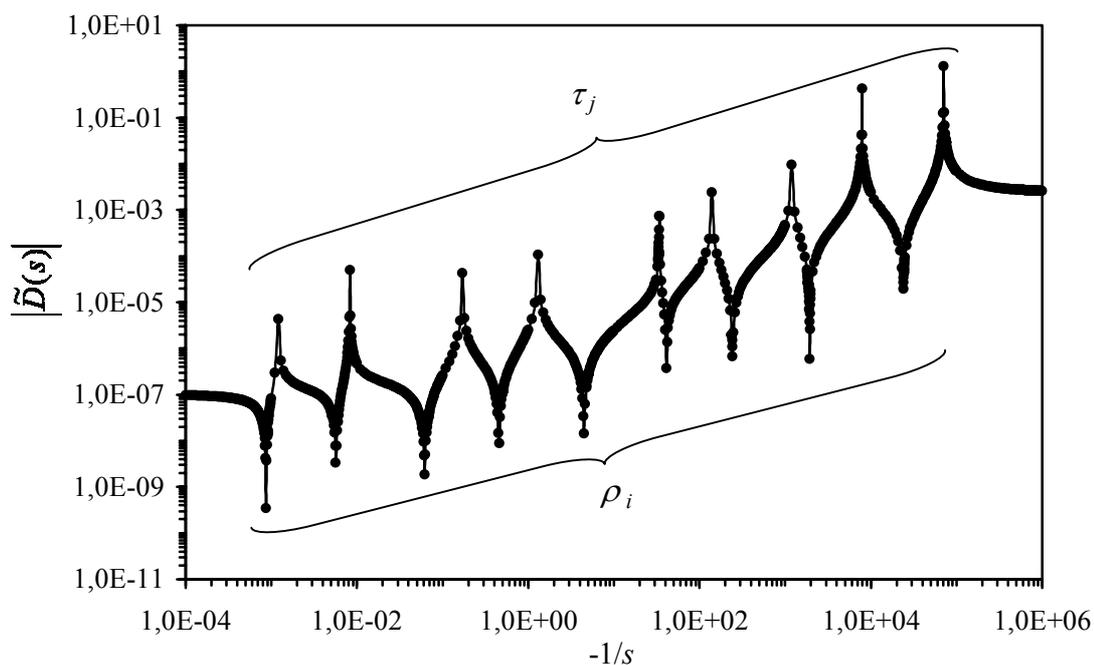
**Tabela 5.1:** Coeficientes da série de Prony para a função fluência do mastique

$j$	$D_j$ (kPa <sup>-1</sup> )	$\tau_j$ (s)
1	3,487E-08	1,20E-03
2	5,978E-08	8,30E-03
3	2,509E-07	1,70E-01
4	8,123E-07	1,30E+00
5	2,178E-06	3,40E+01
6	1,699E-05	1,40E+02
7	7,829E-05	1,20E+03
8	5,392E-04	7,90E+03
9	1,813E-03	7,10E+04
$D_0 = 1,014E-07$ kPa <sup>-1</sup>		

### 5.2.2 Módulo de Relaxação do Mastique

O módulo de relaxação do mastique foi determinado a partir dos coeficientes da série de prony da função fluência mostrados na Tabela 5.1 e da Equação 2.87 para  $\rho_i \neq \tau_j$ , conforme exposto na Seção 2.2.6.

De posse dos coeficientes  $D_0$ ,  $D_j$  e  $\tau_j$ , e seguindo o procedimento proposto por PARK e SCHAPERLY (1999), os valores de  $\rho_i$  foram determinados grafando-se  $|\tilde{D}(s)|$  versus  $-1/s$  ( $s < 0$ ). A abscissa correspondente a cada máximo da função  $|\tilde{D}(s)|$  aproxima-se do valor de  $\tau_j$  (conhecido) e a abscissa correspondente a cada mínimo da função  $|\tilde{D}(s)|$  aproxima-se do valor de  $\rho_i$  procurado, conforme mostra a Figura 5.5.

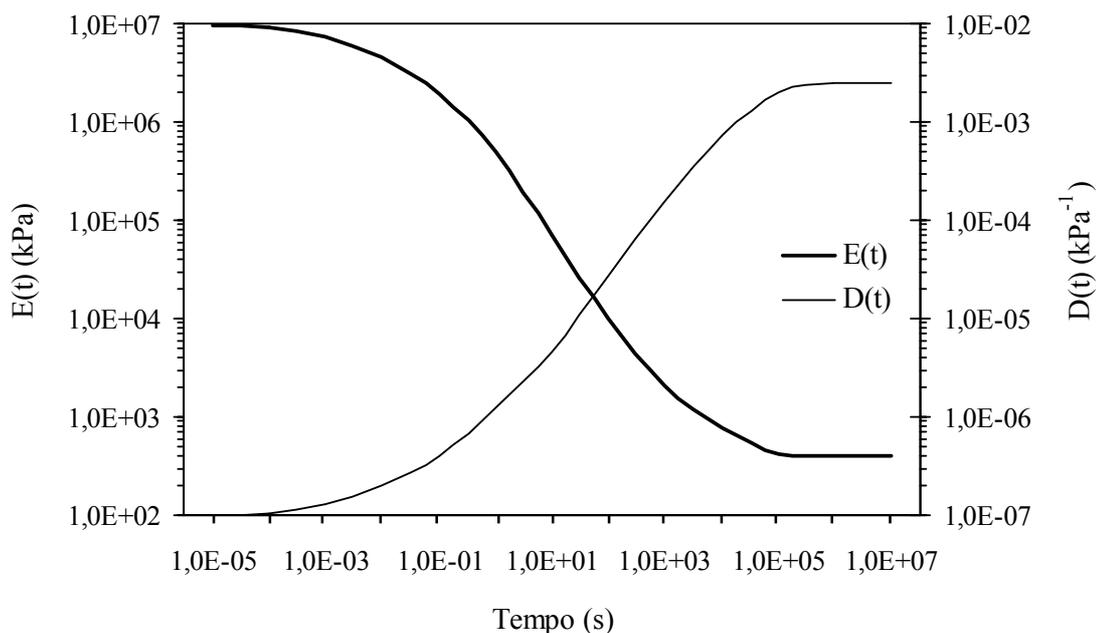


**Figura 5.5:** Determinação gráfica dos tempos de relaxação,  $\rho_i$

Em seguida, os coeficientes  $E_\infty$  e  $E_i$  foram determinados a partir das Equações 2.83 e 2.87, respectivamente. Os coeficientes da série de Prony do módulo de relaxação do mastique são mostrados na Tabela 5.2. A Figura 5.6 mostra o módulo de relaxação do mastique, juntamente com a função fluência a partir da qual o módulo de relaxação foi determinado.

**Tabela 5.2:** Coeficientes da série de Prony do módulo de relaxação do mastique

$i$	$E_i$ (kPa)	$\rho_i$ (s)
1	2,179E+06	8,70E-04
2	2,675E+06	5,70E-03
3	3,125E+06	6,20E-02
4	9,929E+05	4,60E-01
5	4,477E+05	4,50E+00
6	1,520E+04	4,10E+01
7	9,284E+03	2,40E+02
8	1,748E+03	1,90E+03
9	5,535E+02	2,40E+04
$E_\infty = 4,079E+02$ kPa		



**Figura 5.6:** Módulo de relaxação e função fluência do mastique

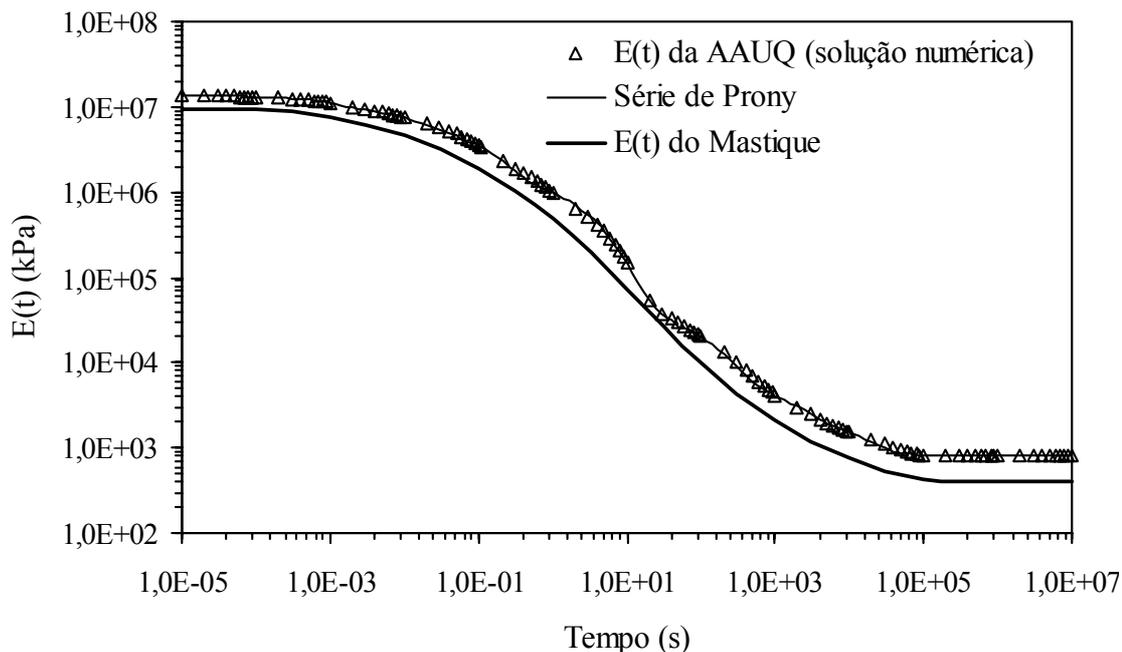
Os resultados obtidos foram verificados conforme procedimento apresentado na Seção 4.6. Assim sendo, o erro máximo encontrado calculado pela Equação 4.2 foi de 1,0%.

### 5.2.3 Módulo de Relaxação da AAUQ

Conforme mostrado na Seção 4.7, a Equação 4.4 foi resolvida através da simulação numérica do ensaio de relaxação considerando-se a geometria do EVR e o sentido vertical do mesmo. Vale ressaltar que o módulo de relaxação da AAUQ foi determinado sem considerar a evolução do dano na forma de trincas.

As propriedades elásticas dos agregados foram assumidas com base no estudo de MEHTA e MONTEIRO (1993), sendo o módulo de elasticidade igual a 40,5GPa e o coeficiente de Poisson igual a 0,15. O módulo de relaxação e o coeficiente de Poisson do mastique usados foram os determinados anteriormente.

Assim sendo, de posse dos resultados numéricos, determinou-se um coeficiente de Poisson de 0,4 e o módulo de relaxação mostrado na Figura 5.7. Os coeficientes da série de Prony para o módulo de relaxação da AAUQ são dados na Tabela 5.3.



**Figura 5.7:** Módulo de relaxação da AAUQ

**Tabela 5.3:** Coeficientes da série de Prony para o módulo de relaxação da AAUQ

$i$	$E_i$ (kPa)	$\rho_i$ (s)
1	5,844E+05	1,50E-04
2	3,303E+06	1,50E-03
3	4,201E+06	1,50E-02
4	4,223E+06	1,50E-01
5	5,361E+05	1,50E+00
6	7,833E+05	4,50E+00
7	5,234E+04	1,50E+01
8	2,723E+04	1,50E+02
9	3,947E+03	1,50E+03
10	1,377E+03	1,50E+04
11	2,965E+01	1,50E+05
$E_\infty = 8,069E+02$ kPa		

A Figura 5.7 mostra também uma comparação entre os módulos de relaxação da AAUQ e do mastique. Observa-se desta figura que a adição de agregados ao mastique aumenta a rigidez do material de forma não homogênea ao longo da escala de tempo. Isto se deve principalmente às interações entre o mastique e os agregados desenvolvidas durante o processo de relaxação do mastique.

Note-se ainda que são necessários mais termos na série de Prony da AAUQ (onze termos) para que esta represente adequadamente o módulo de relaxação deste material do que foram necessários na série do masticque (nove termos). Isto se deve ao chamado efeito memória (*memory effect*), o qual é induzido pelo processo de homogeneização de compósitos viscoelásticos (ALLEN e YOON, 1998; MAGHOUS e CREUS, 2003). O efeito de memória é fisicamente justificado pelas interações entre os diversos componentes do material compósito.

### 5.3 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS DE DANO

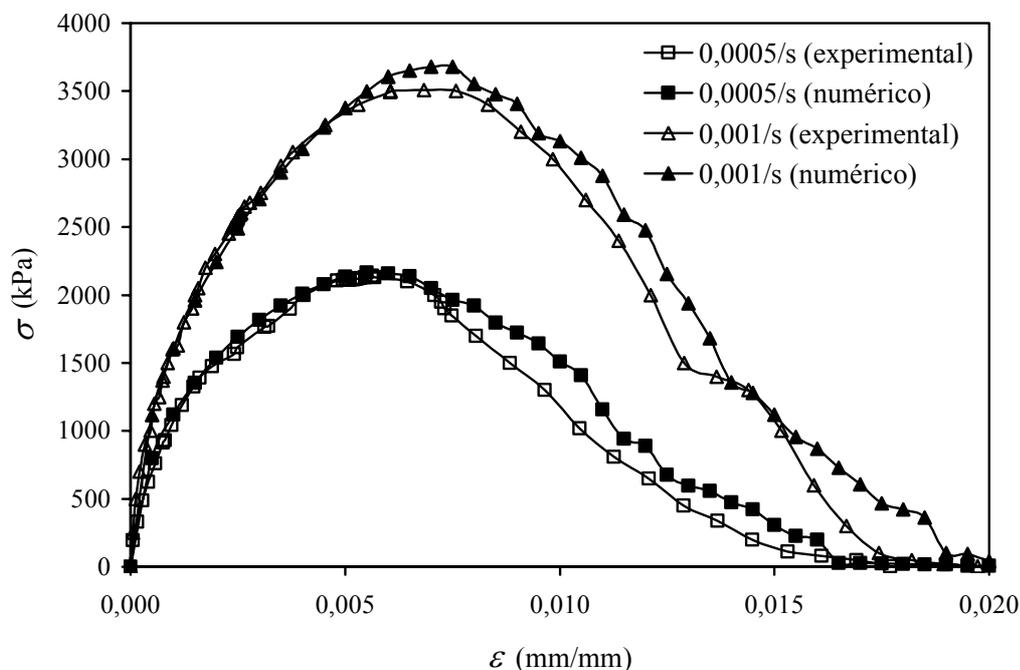
Os parâmetros de dano foram calibrados a partir da simulação numérica do ensaio de tração direta para o EVR e da comparação dos resultados numéricos com os obtidos experimentalmente. Dada a dependência da evolução do dano com relação à taxa de deformação, os parâmetros de dano foram calibrados para duas taxas de deformação distintas (0,0005/s e 0,001/s), de modo a permitir que os valores calibrados possam ser usados para diferentes taxas de deformação. Nas simulações numéricas do ensaio de tração direta, utilizou-se um incremento de tempo de 0,5s.

Assim sendo, os parâmetros de dano foram considerados adequados quando a curva tensão  $\times$  deformação obtida numericamente mostrou-se satisfatoriamente próxima à curva determinada experimentalmente.

O parâmetro empírico de comprimento do material,  $\delta^*$ , usado foi de 2,5E-05m para ambas as direções normal e tangencial. O nível de tensão necessário para iniciar-se a evolução do dano na zona coesiva,  $\sigma^f$ , foi considerado nulo para ambas as direções normal e tangencial. E os valores dos parâmetros de dano,  $A$  e  $m$ , que produziram melhores resultados foram de 1,0E+06 e 4,0, respectivamente. O módulo de relaxação linear das zonas coesivas foi assumido igual ao módulo de relaxação do masticque.

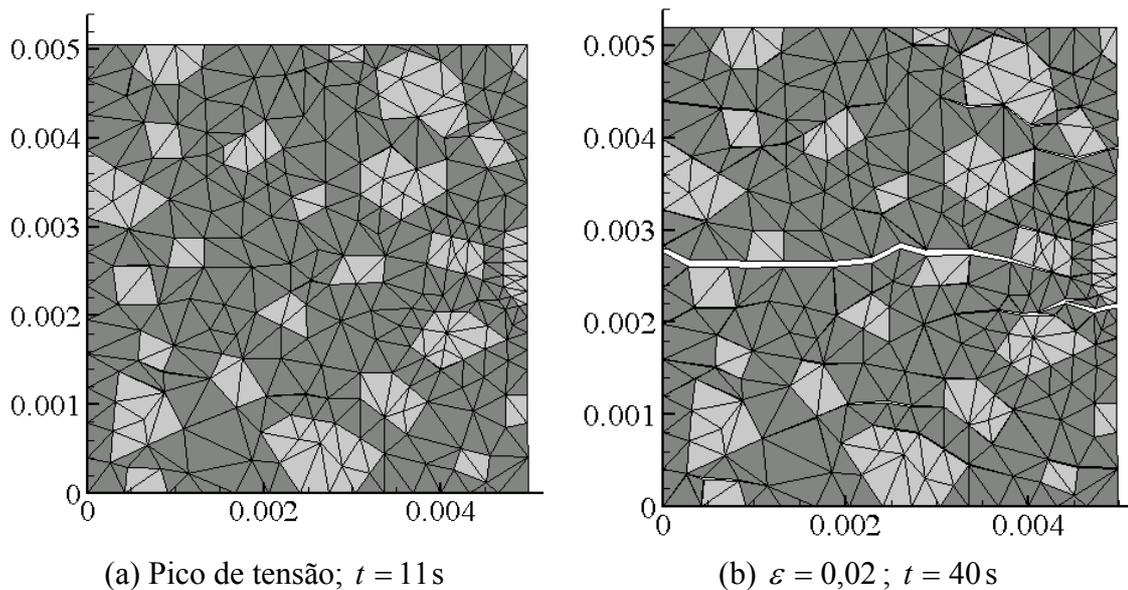
Vale ressaltar que, por simplicidade, esses valores foram usados para todos os elementos de interface, tanto nas interfaces masticque-masticque como nas interfaces masticque-agregados. A Figura 5.8 mostra as curvas tensão  $\times$  deformação experimentais (média de três corpos de prova) e obtidas com os valores de  $\delta^*$ ,  $\sigma^f$ ,  $A$  e  $m$  citados.

Note-se que, a partir das partes iniciais das curvas mostradas na Figura 5.8, pode-se concluir que as propriedades lineares viscoelásticas do mastique e elásticas dos agregados usadas foram adequadas dada a proximidade entre as curvas numéricas e experimentais.

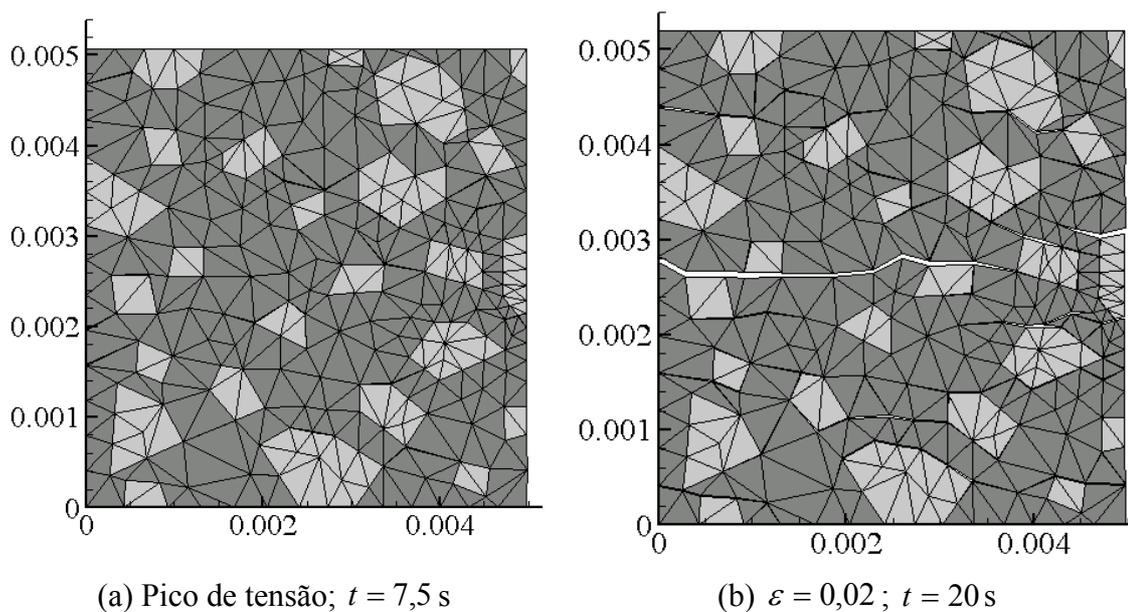


**Figura 5.8:** Curvas tensão × deformação numéricas e experimentais

As Figuras 5.9 e 5.10 mostram a configuração do EVR para o pico de tensão e à deformação de 0,02mm/mm para as taxas de deformação de 0,0005/s e 0,001/s, respectivamente. Observa-se destas figuras que a disposição e orientação das macrotrincas (Figura 5.9b e Figura 5.10b) são bastante semelhantes para ambas as taxas de deformação.

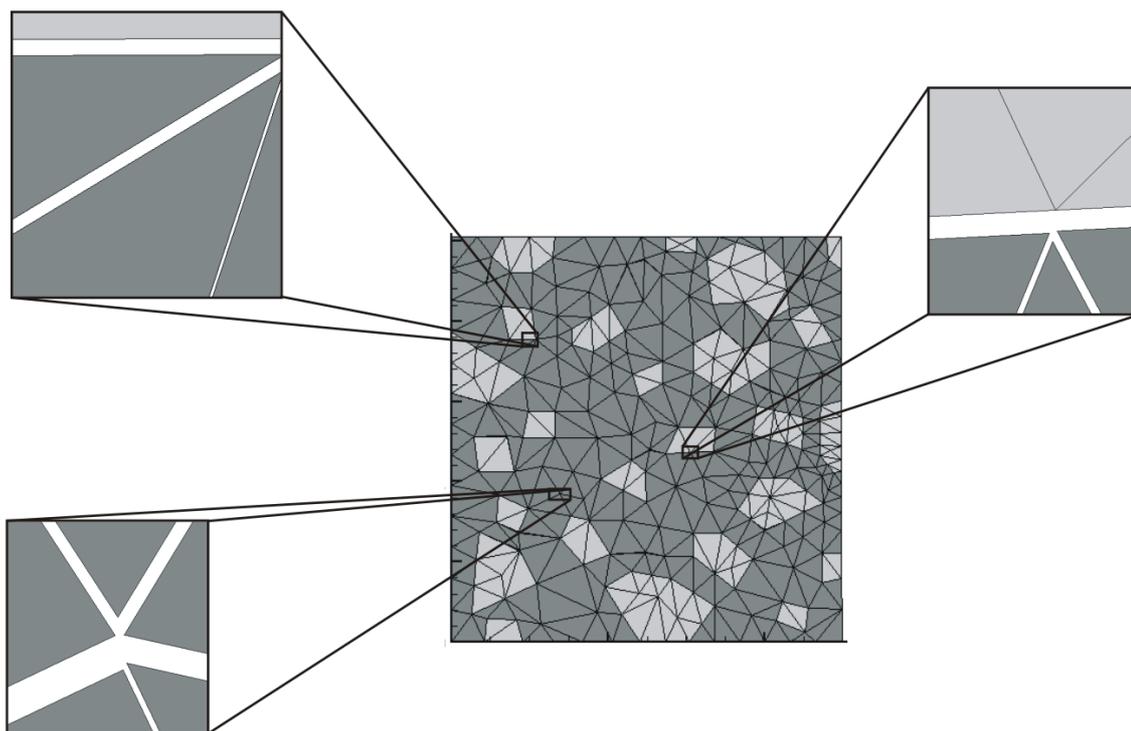


**Figura 5.9:** Configuração do EVR para a taxa de 0,0005/s em (a)  $t = 11$  s e (b)  $t = 40$  s



**Figura 5.10:** Configuração do EVR para a taxa de 0,001/s em (a)  $t = 7,5$  s e (b)  $t = 20$  s

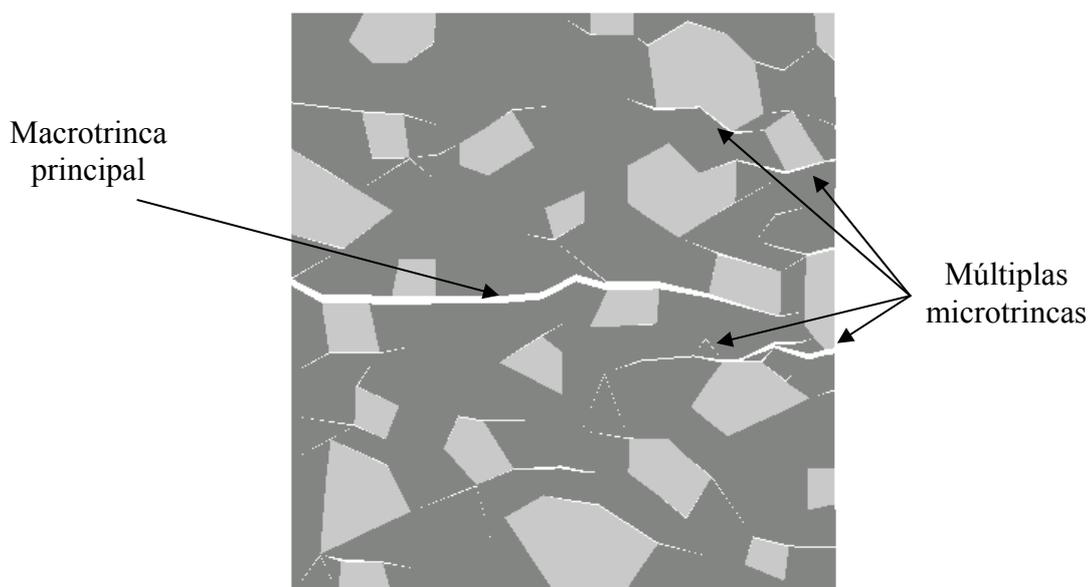
Vale ressaltar que, embora não se tenha observado o aparecimento de macrotrincas para os picos de tensão, pôde-se observar várias microtrincas, embora isto não esteja perceptível nas figuras acima. A Figura 5.11 mostra algumas microtrincas observadas no pico de tensão para a taxa de 0,0005/s.



**Figura 5.11:** Microtrincas observadas no pico de tensão para a taxa de 0,0005/s

Note-se ainda que, para ambas as taxas de deformação, observou-se a evolução simultânea de múltiplas trincas (micro e/ou macro) no interior do EVR, o que torna a análise mais realista. Isto se deve à inclusão de elementos de interface em todas as interfaces mastique-mastique e mastique-agregado. A Figura 5.12, a qual omite a malha de elementos finitos, evidencia a evolução simultânea de micro e macrotrincas no EVR para a taxa de 0,0005/s e  $t = 40$  s. Observa-se também na Figura 5.12 uma orientação preferencial das trincas no sentido horizontal, o que se deve ao fato de o carregamento ser no sentido vertical.

É importante salientar que a inclusão de elementos de interface no interior dos agregados pode tornar as análises ainda mais realistas, permitindo, assim, a formação e propagação de trincas no interior dos mesmos.



**Figura 5.12:** Múltiplas trincas observadas no EVR para a taxa de 0,0005/s e  $t = 40$  s

#### 5.4 VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO MULTI-ESCALA

Esta seção apresenta os resultados das simulações numéricas do ensaio de compressão diametral obtidos através do modelo multi-escala e os compara aos resultados obtidos experimentalmente, com o objetivo de verificar e validar o modelo multi-escala aqui desenvolvido para misturas asfálticas.

Em seguida, o ensaio de flexão em viga é simulado através do modelo multi-escala, objetivando mostrar a capacidade deste em simular os fenômenos de deformação permanente e trincamento por fadiga. Neste caso, considera-se um carregamento cíclico, sendo realizadas duas análises: uma onde não se considera a propagação de trincas para modelar o fenômeno de deformações permanentes provocado pela dissipação de energia devido ao comportamento viscoelástico do mastique e outra se considerando a propagação de trincas na escala local para modelar o fenômeno de trincamento por fadiga.

##### 5.4.1 Simulação do Ensaio de Compressão Diametral

A Figura 4.7 mostrou o modelo geométrico usado na simulação do ensaio de compressão diametral, destacando os elementos globais multi-escala e as condições de

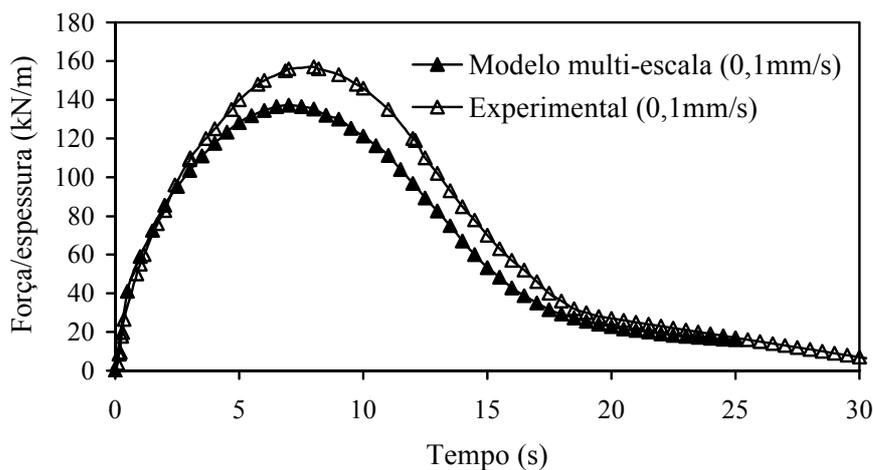
contorno. Portanto, considerou-se apenas um quarto da geometria de modo a reduzir o esforço computacional. Como a espessura dos corpos de prova cilíndricos é pequena, considerou-se o estado plano de tensão nas simulações deste ensaio (SHRP, 1993; ZHANG *et al.*, 1997).

As propriedades constitutivas do masticue, dos agregados e da AAUQ usadas foram dadas anteriormente. Vale, no entanto, salientar que os elementos multi-escala possuem comportamento constitutivo viscoelástico anisotrópico (produzido pela configuração dos agregados e das trincas na microestrutura) e não linear (devido à propagação de trincas), enquanto os demais elementos possuem, por simplificação, comportamento viscoelástico linear e isotrópico, cujo módulo de relaxação é o determinado para a AAUQ.

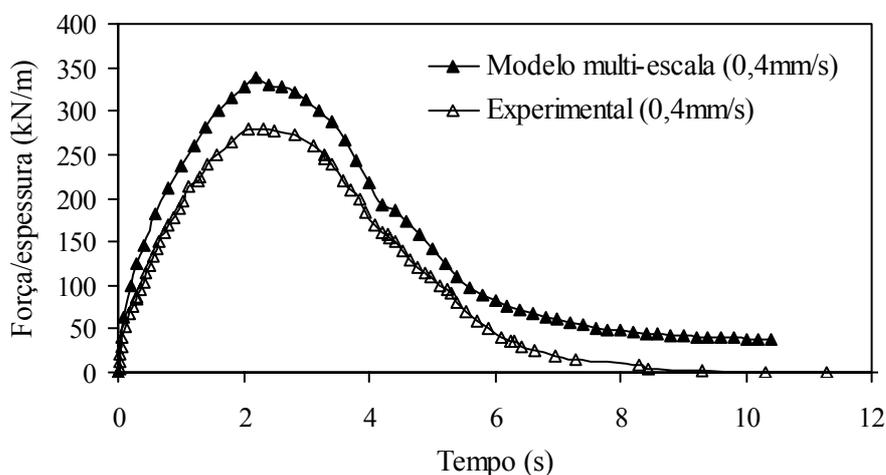
Com relação ao friso de carga em aço, usou-se um módulo de elasticidade de 200GPa e um coeficiente de Poisson de 0,3 (BEER e JOHNSTON, 1995). As taxas de deslocamento diametral usadas foram de 0,1mm/s e 0,4mm/s. Os incrementos de tempo usados nas simulações numéricas foram de 0,5s e 0,1s para as taxas de 0,1mm/s e 0,4mm/s, respectivamente. De modo a normalizar os resultados experimentais, a força atuante no friso foi dividida pela espessura dos corpos de prova.

As Figuras 5.13 e 5.14 mostram a evolução da força normalizada atuante no friso de carga com o tempo para as taxas de 0,1mm/s e 0,4mm/s, respectivamente. Os resultados experimentais correspondem à média de três corpos de prova.

A partir das Figuras 5.13 e 5.14, pode-se verificar que os resultados obtidos pelo modelo multi-escala estão coerentes com os resultados experimentais. As diferenças observadas entre o modelo multi-escala e os resultados experimentais podem ter sido provocadas por diversos fatores, dentre os quais se destacam: *i*) o uso de elementos finitos e de interface simples (T3 e interface nodal) e de malhas pouco “discretizadas” (limitação de tempo computacional); *ii*) a hipótese de que  $\ell_{\text{local}} \ll \ell_{\text{global}}$  (gradiente de deformações da escala global não é transmitido à escala local); *iii*) as limitações experimentais; e *iv*) o fato de que os parâmetros de dano do MZC-MV foram calibrados e não determinados experimentalmente.

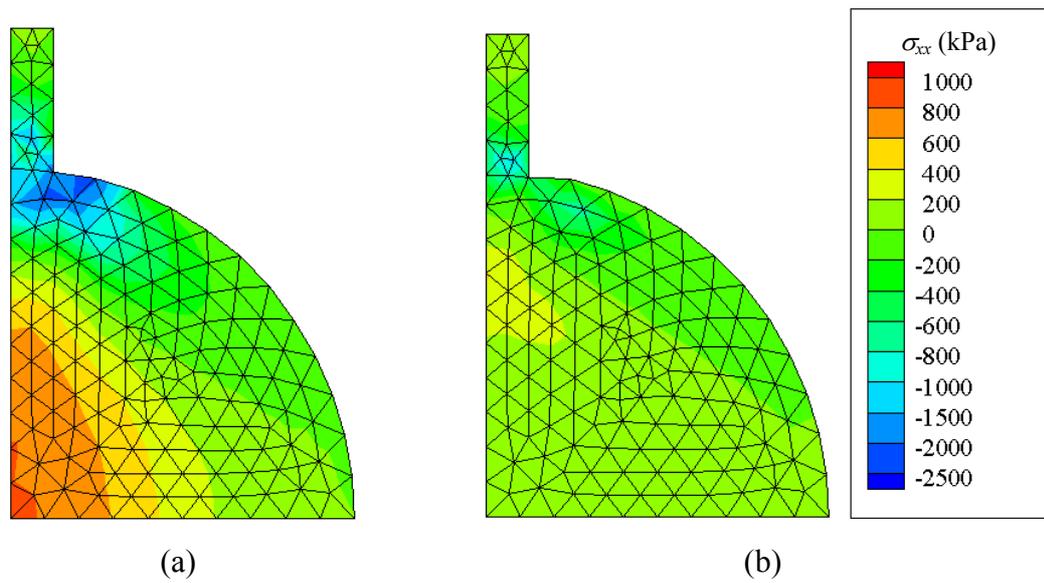


**Figura 5.13:** Resultados numéricos e experimentais para a taxa de 0,1mm/s

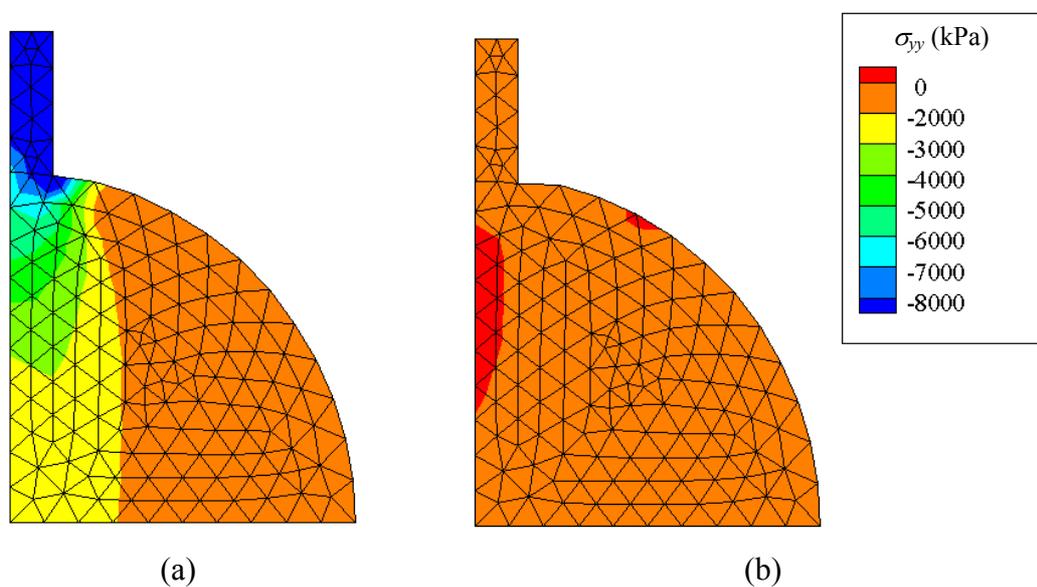


**Figura 5.14:** Resultados numéricos e experimentais para a taxa de 0,4mm/s

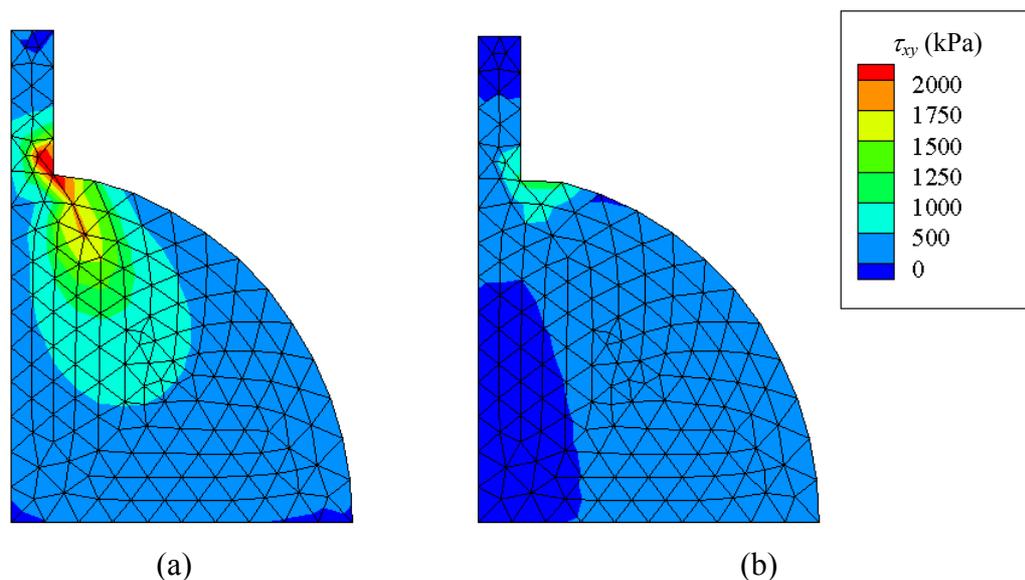
A distribuição das tensões horizontais, verticais e de cisalhamento, no pico da força de reação vertical e ao final da simulação, é mostrada nas Figuras 5.15, 5.16 e 5.17, respectivamente, para a taxa de deslocamento de 0,1mm/s. As tensões para a taxa de 0,4mm/s apresentaram distribuição semelhante. A convenção de sinal adotada estabelece que tensões de tração são positivas e as de compressão são negativas.



**Figura 5.15:** Distribuição das tensões horizontais,  $\sigma_{xx}$ , (a) no pico da força de reação vertical e (b) ao final da simulação para a taxa de 0,1mm/s



**Figura 5.16:** Distribuição das tensões verticais,  $\sigma_{yy}$ , (a) no pico da força de reação vertical e (b) ao final da simulação para a taxa de 0,1mm/s



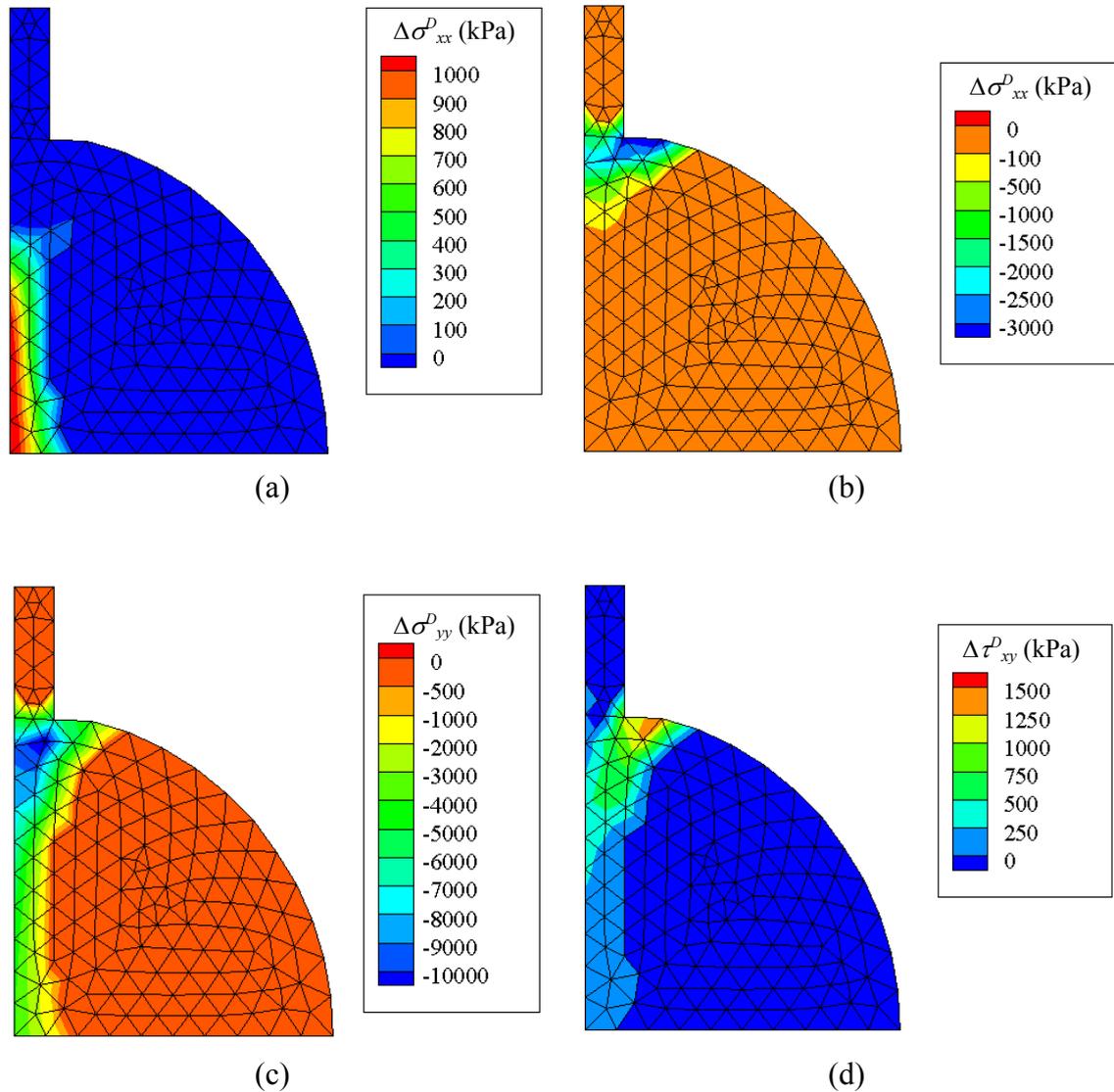
**Figura 5.17:** Distribuição das tensões cisalhantes,  $\tau_{xy}$ , (a) no pico da força de reação vertical e (b) ao final da simulação para a taxa de 0,1mm/s

A partir das Figuras 5.15a, 5.16a e 5.17a pode-se observar que a região próxima ao friso de carga é a região mais solicitada em termos de magnitude das tensões. Além disso, observou-se que as tensões de compressão, verticais e horizontais, e as tensões de cisalhamento máximas (nas proximidades do friso de carga) são maiores em magnitude do que a tensão horizontal de tração máxima (no centro do corpo de prova).

Note-se que as distribuições das tensões aqui obtidas numericamente estão de acordo com os resultados mostrados no estudo de ZHANG *et al.* (1997), o qual se baseia nas equações analíticas de HONDROS (1959).

Com o objetivo de se determinar, de forma qualitativa, a distribuição do dano (redução das tensões no corpo de prova) devido à dissipação de energia na escala local, simulou-se o ensaio de compressão diametral (taxa de 0,1mm/s) considerando-se apenas a escala global, ou seja, nenhum elemento global foi considerado multi-escala. Em seguida, calculou-se a diferença entre as tensões nos elementos para as duas situações (sem e com elementos multi-escala) no tempo  $t = 25$  s (final da simulação), de modo a obter-se a distribuição da diferença de tensões,  $\Delta\sigma_{ij}^D$ , no corpo de prova, como mostra a Figura 5.18. Note-se que na Figura 5.18, uma redução de tensões de tração produz um

valor positivo, enquanto uma redução de tensões de compressão produz um valor negativo.



**Figura 5.18:** Distribuição da diferença de tensões (a) horizontais de tração; (b) horizontais de compressão; (c) verticais e (d) de cisalhamento para a taxa de 0,1mm/s

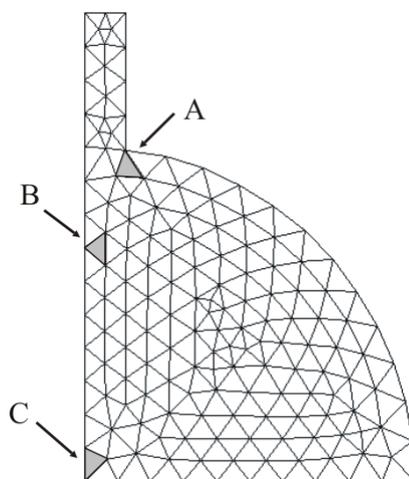
A Figura 5.18 mostra que as maiores diferenças de tensões, em magnitude, estão localizadas nas proximidades do friso de carga, o que era esperado, visto que tal região é a mais solicitada. Além disso, a redução de tensões compressivas é maior que a redução de tensões de tração.

É importante salientar que a diferença de tensões,  $\Delta\sigma_{ij}^D$ , mostrada anteriormente não corresponde ao valor exato da redução de tensões devido à evolução do dano, pois, à medida que o dano evolui, a distribuição das tensões se modifica em relação ao caso linear (sem dano), modificando, portanto, o histórico de carregamento (tensões e deformações) nos elementos.

Assim sendo, como o histórico de deformações para o caso não-linear (com dano) difere do histórico de deformações para o caso linear (sem dano), a diferença entre as tensões dos dois casos não corresponde ao valor exato da perda de tensões provocada pela propagação de trincas na escala local. No entanto, esta diferença pode expressar, de forma qualitativa, as regiões mais danificadas.

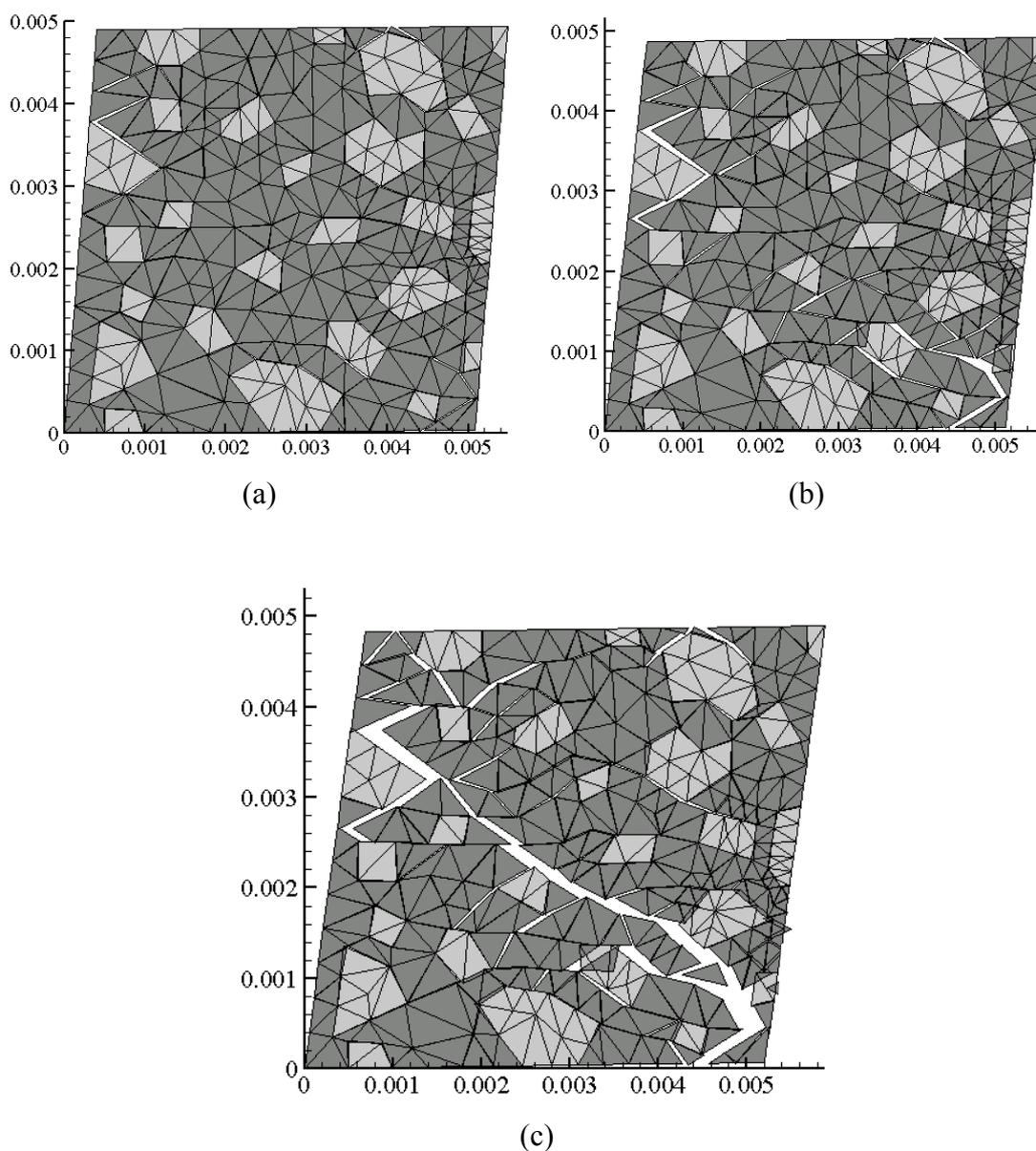
Vale ainda ressaltar que o valor exato do dano, ou seja, da redução de tensão provocada pela propagação de trincas, pode ser calculado através de expressões que resultam diretamente do processo de homogeneização no contorno interno do EVR (SEARCY, 2004), ou, equivalente, usando-se a Equação 2.131 (ALLEN e YOON, 1998).

Analisando-se agora o que ocorreu na escala local, pode-se verificar a evolução do dano na forma de microtrincas nas diversas regiões do corpo de prova. Para tanto, escolheu-se três elementos em regiões de solicitações distintas do corpo de prova, como mostra a Figura 5.19.

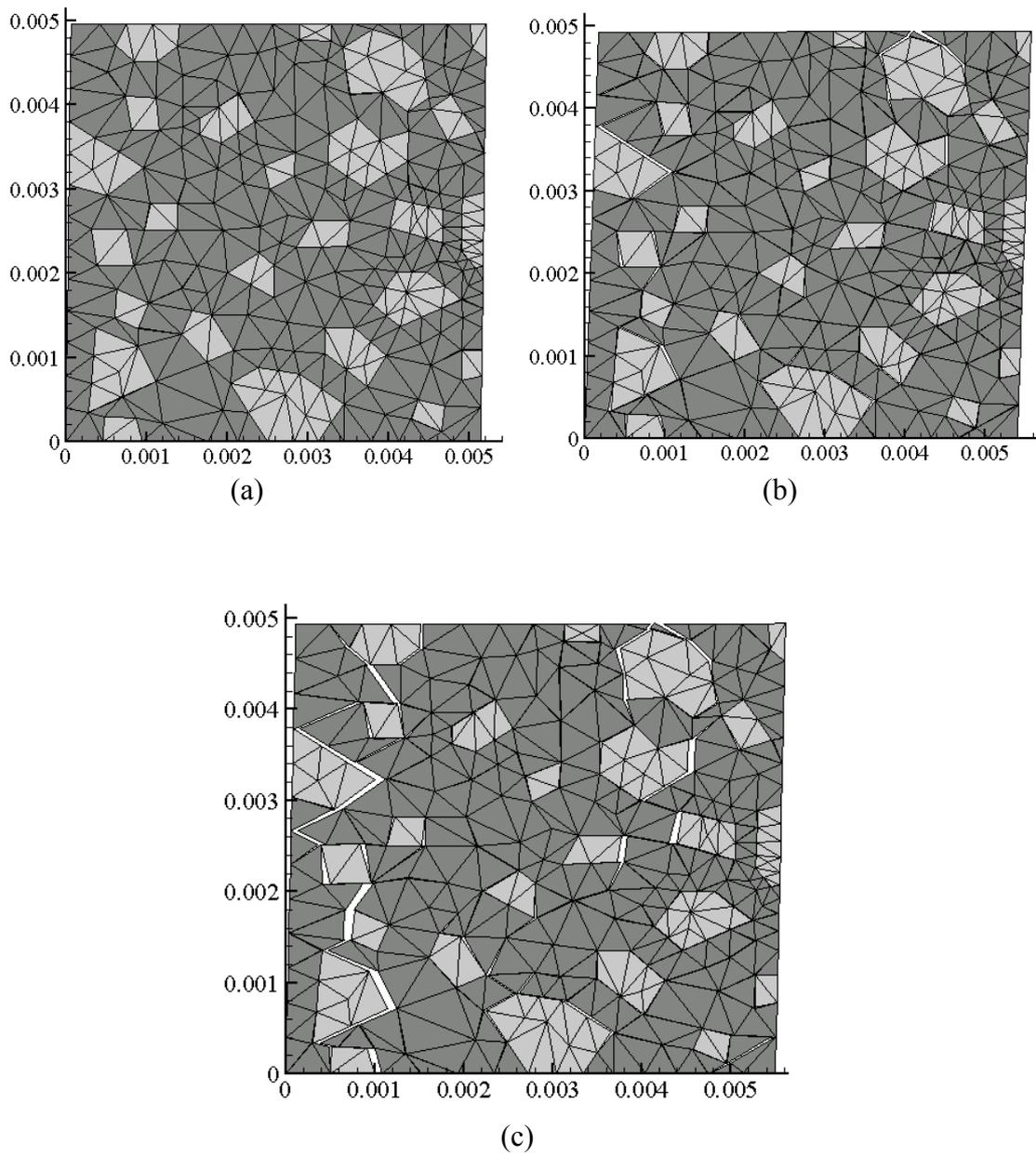


**Figura 5.19:** Elementos escolhidos em três regiões de solicitações distintas

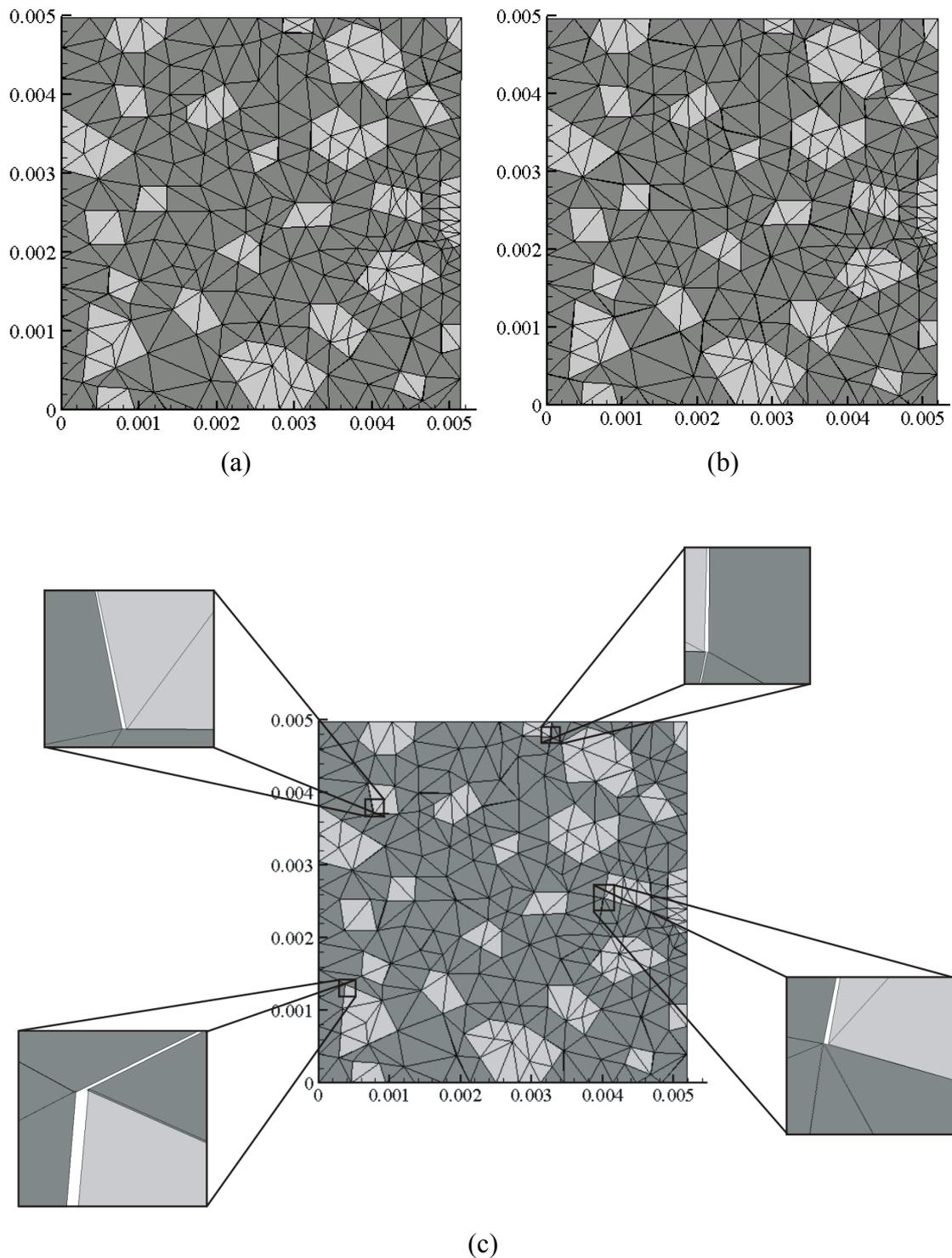
As estruturas locais, para a taxa de 0,1mm/s, nos elementos A, B, e C (Figura 5.19) são mostradas nas Figuras 5.20, 5.21 e 5.22, respectivamente, para determinados tempos. Os instantes de tempo escolhidos correspondem a 7s, ao pico da tensão horizontal média no EVR e ao final da simulação (ou instante em que se obtém rigidez nula na escala local). Note-se que os deslocamentos horizontais dos nós foram magnificados em dez vezes para permitir uma melhor visualização. As estruturas locais para a taxa de 0,4mm/s apresentaram configuração semelhante.



**Figura 5.20:** Estrutura local do elemento A para (a)  $t = 7$  s; (b)  $t = 8,5$  s e (c)  $t = 10$  s para a taxa de 0,1mm/s



**Figura 5.21:** Estrutura local do elemento B para (a)  $t = 7$  s; (b)  $t = 15$  s e (c)  $t = 25$  s para a taxa de  $0,1$  mm/s



**Figura 5.22:** Estrutura local do elemento C para (a)  $t = 7$  s; (b)  $t = 15$  s e (c)  $t = 25$  s para a taxa de  $0,1$  mm/s

As Figuras 5.20, 5.21 e 5.22 mostram que a região próxima ao friso de carga é a região que primeiro apresentou trincas visíveis na escala local provocadas

principalmente pela combinação de tensões compressivas e de cisalhamento. De acordo com a simulação, com a redistribuição das tensões ao longo do corpo de prova provocada pela falência estrutural da região próxima ao friso de carga (Figura 5.20), o dano passa a se propagar mais intensamente nas regiões centrais do corpo de prova, onde atuam principalmente tensões verticais de compressão e horizontais de tração (Figuras 5.21 e 5.22).

É importante ressaltar que, embora não se tenha observado, aparentemente, ruptura por compressão, as tensões de compressão, tanto horizontais como verticais, desempenham papel importante no processo de evolução do dano.

Além disso, a perda de rigidez na direção vertical devido à propagação de microtrincas por tração na direção horizontal e por cisalhamento produz perdas de tensão de compressão vertical, resultando, portanto, na queda da força de reação do corpo de prova observada durante o ensaio.

Note-se ainda que embora não tenham sido observadas macrotrincas na escala local do elemento C, este apresentou uma rigidez na direção horizontal quase nula devido à existência de inúmeras microtrincas, especialmente no contorno dos agregados (Figura 5.22).

Vale salientar que os resultados numéricos aqui apresentados podem ser ainda melhorados caso todos os elementos globais sejam considerados multi-escala e caso os parâmetros de dano sejam determinados experimentalmente (WILLIAMS, 2001), em vez de calibrados. Além disso, caso se considere elementos de interface na escala global, a forma da propagação das trincas na escala global pode ser obtida numericamente e comparada com a configuração das trincas observada experimentalmente.

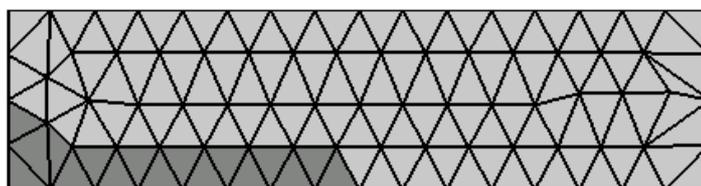
#### **5.4.2 Simulação de Carregamento Cíclico de Flexão em Viga**

Como comentado anteriormente, o objetivo das simulações em viga é ilustrar a capacidade do modelo multi-escala em simular os fenômenos de deformação permanente e de trincamento por fadiga, os quais constituem os principais tipos de falha

observados nos pavimentos asfálticos. O modelo geométrico (com as condições de contorno) e a malha de elementos finitos foram mostrados na Figura 4.8. Para todas as simulações em viga, considerou-se o estado plano de tensão.

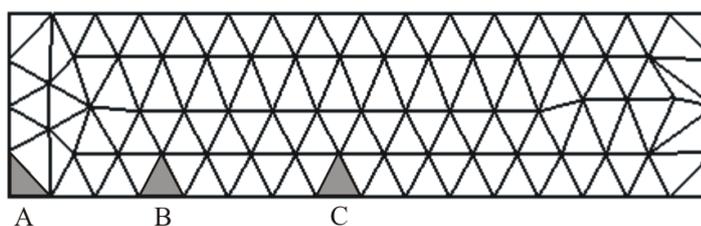
Duas situações distintas foram consideradas. Na primeira não se considerou a evolução do dano na forma de trincas em ambas as escalas global e local, mas todos os elementos T3 que constituem a viga foram considerados multi-escala. O intuito da primeira análise é avaliar a deformação permanente produzida pelo comportamento viscoelástico do masticque, especialmente nas interfaces masticque-agregados, onde há concentração de tensões.

Na segunda análise, considerou-se a evolução do dano na forma de trincas em ambas as escalas através de elementos de interface dispostos ao longo das malhas de elementos finitos, de modo a permitir a visualização da propagação simultânea de trincas em ambas as escalas. Neste caso, apenas os elementos mais solicitados foram considerados multi-escala, conforme mostra a Figura 5.23.



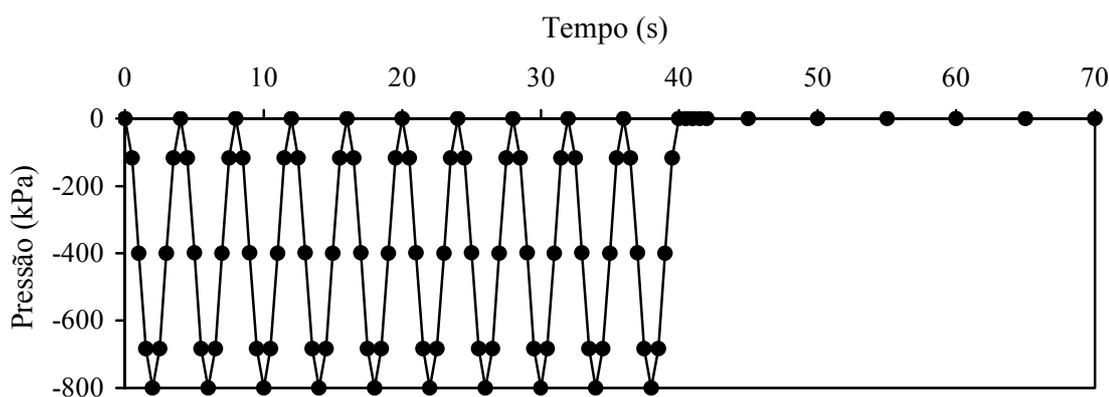
**Figura 5.23:** Malha usada para o caso multi-escala com trincas, com os elementos multi-escala em destaque

Dentre os elementos multi-escala mostrados na Figura 5.23, escolheram-se três elementos em regiões solicitadas distintamente para analisar-se suas respectivas estruturas locais, conforme mostra a Figura 5.24.



**Figura 5.24:** Elementos multi-escala escolhidos para a análise da estrutura local

Como o objetivo é mostrar o acúmulo de deformações permanentes e o trincamento por fadiga, considerou-se um carregamento cíclico semi-senoidal constituído de dez ciclos com pico de 800kPa e período de 4s seguidos de um intervalo de repouso de 30s, conforme mostra a Figura 5.25. O incremento de tempo usado nas simulações numéricas foi de 0,5s.



**Figura 5.25:** Carregamento usado nas simulações em viga

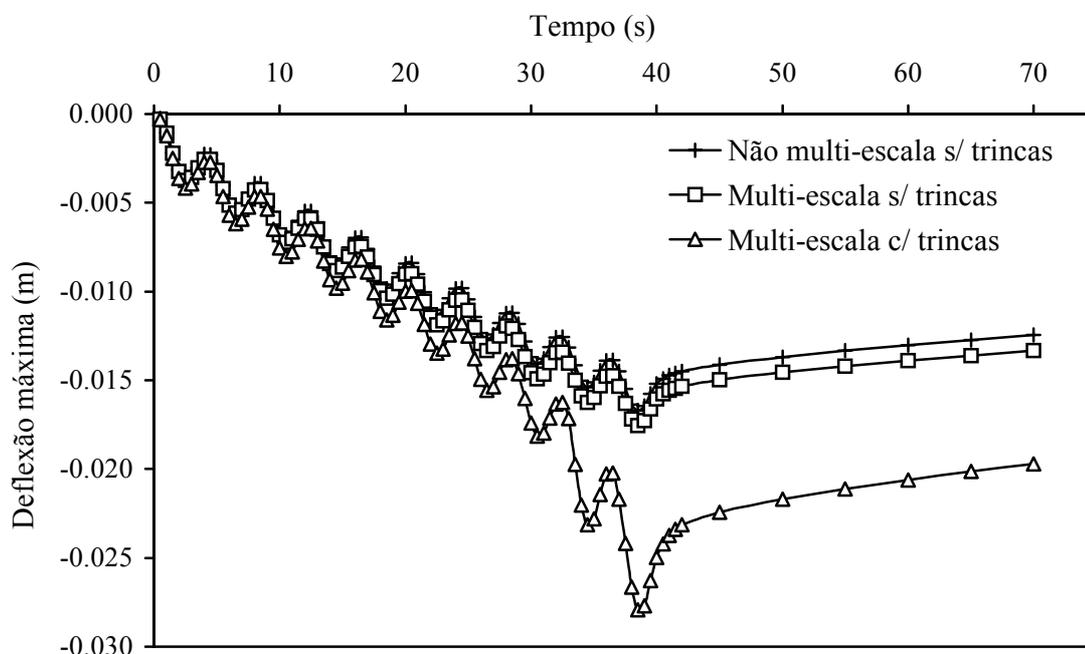
As propriedades constitutivas do masticue, dos agregados e da AAUQ usadas foram dadas anteriormente. No entanto, vale salientar que os elementos multi-escala possuem comportamento constitutivo viscoelástico anisotrópico (produzido pela configuração dos agregados e das trincas na microestrutura) e não linear (devido à propagação de trincas), enquanto os demais elementos possuem, por simplificação, comportamento viscoelástico linear e isotrópico, cujo módulo de relaxação é o determinado para a AAUQ.

Os parâmetros de dano usados na escala local foram os mesmos usados nas análises anteriores. No caso da escala global, o parâmetro empírico de comprimento do material,  $\delta^*$ , usado foi de 1,25E-03m para ambas as direções normal e tangencial. O nível de tensão necessário para iniciar-se a evolução do dano na zona coesiva,  $\sigma^f$ , foi considerado nulo para ambas as direções normal e tangencial. E os valores dos parâmetros de dano,  $A$  e  $m$ , usados foram de 1,5E+07 e 4,0, respectivamente. O módulo de relaxação linear das zonas coesivas na escala global foi assumido igual ao módulo de relaxação da AAUQ.

Vale ressaltar que os parâmetros de dano da escala global foram assumidos com base nos parâmetros de dano da escala global, porém o valor de  $A$  foi aumentado para permitir a visualização de trincas na escala global durante a simulação dos dez ciclos de carga.

A Figura 5.26 apresenta o histórico da deflexão máxima observada abaixo do carregamento e no centro da viga para os casos analisados. Note-se que a Figura 5.26 também mostra a deflexão máxima para o caso onde nenhum elemento é considerado multi-escala, sendo o comportamento constitutivo destes regido pelo módulo de relaxação determinado numericamente para a AAUQ através da Equação 4.4 desenvolvida por ALLEN e YOON (1998).

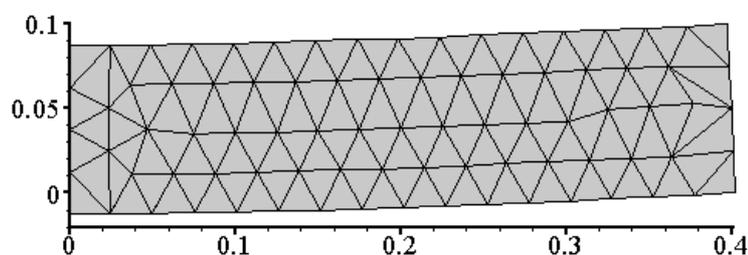
É importante ressaltar que, teoricamente, os resultados obtidos com o módulo homogeneizado da AAUQ deveriam coincidir com os resultados da simulação multi-escala sem trincas. Porém, observa-se uma pequena diferença entre esses resultados, a qual se deve principalmente aos erros introduzidos pelo processo de regressão da série de Prony do módulo homogeneizado da AAUQ.



**Figura 5.26:** Histórico da deflexão máxima no centro da viga

Note-se ainda que, devido ao comportamento viscoelástico do mastique e, conseqüentemente, da AAUQ, existe uma defasagem no tempo das deflexões com relação ao carregamento aplicado. No caso desta simulação, os picos da deflexão máxima ocorreram 0,5s após os picos do carregamento aplicado.

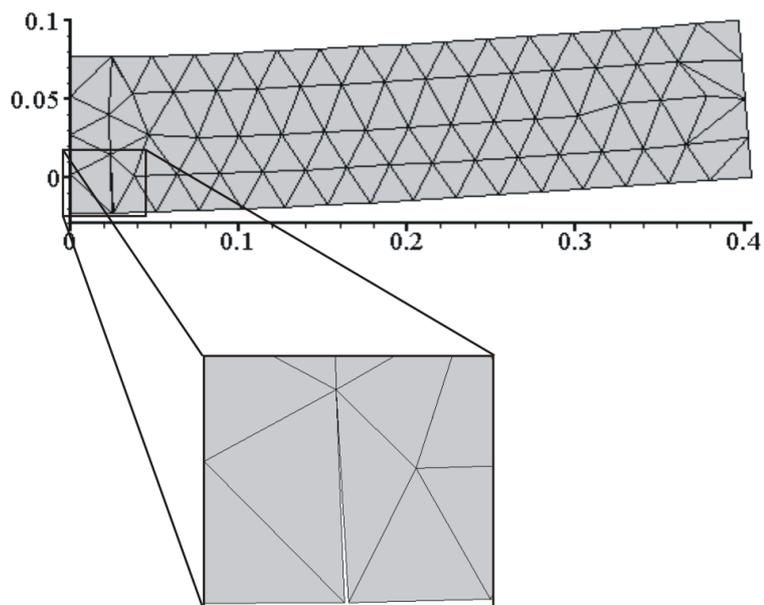
A partir da análise multi-escala sem a consideração da propagação de trincas, pode-se perceber o acúmulo de deformações permanentes provocado pelo comportamento viscoelástico do mastique. Note-se que, embora se acumulem deformações permanentes, a amplitude da deflexão se mantém constante para todos os ciclos. A Figura 5.27 mostra a configuração da viga para  $t = 70$  s.



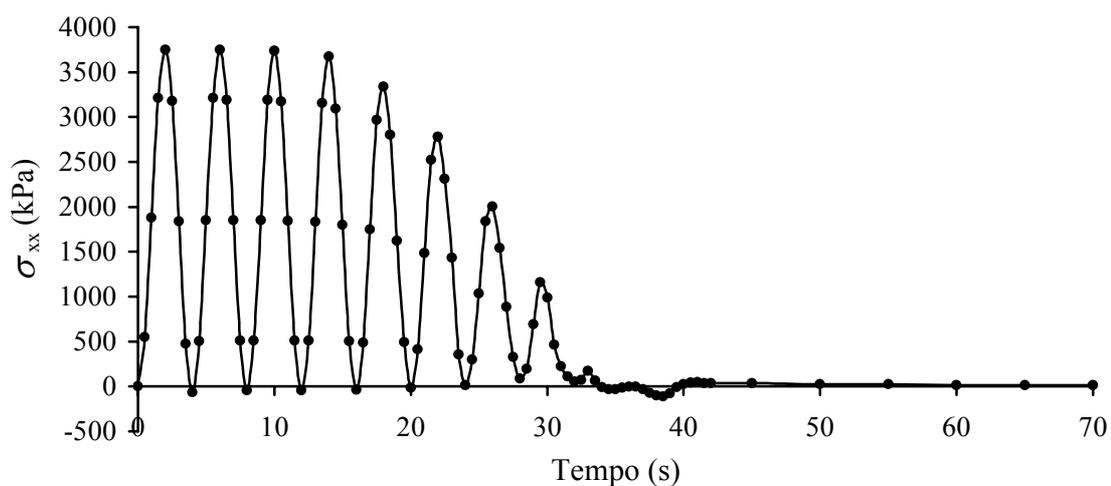
**Figura 5.27:** Configuração final da viga para o caso multi-escala sem trincas

Para o caso com trincas em ambas as escalas, observam-se deflexões maiores, conforme a Figura 5.26, provocadas inicialmente pela redução da rigidez na escala local (microtrincas) e, posteriormente, pela redução da rigidez na escala global (macrotrincas). Note-se, a partir da Figura 5.26, que há um aumento brusco na amplitude das deflexões no nono ciclo, o qual é produzido pela propagação de uma trinca na escala global, conforme mostra a Figura 5.28.

A propagação de trincas na escala local, embora não produza um aumento brusco na deflexão global, produz uma redução na rigidez do material na escala global, o que provoca um aumento gradativo na deflexão da escala global (Figura 5.26). Além disso, essa redução de rigidez produz uma queda também gradativa na tensão horizontal máxima resistida pelo material na escala global, como mostra a Figura 5.29.



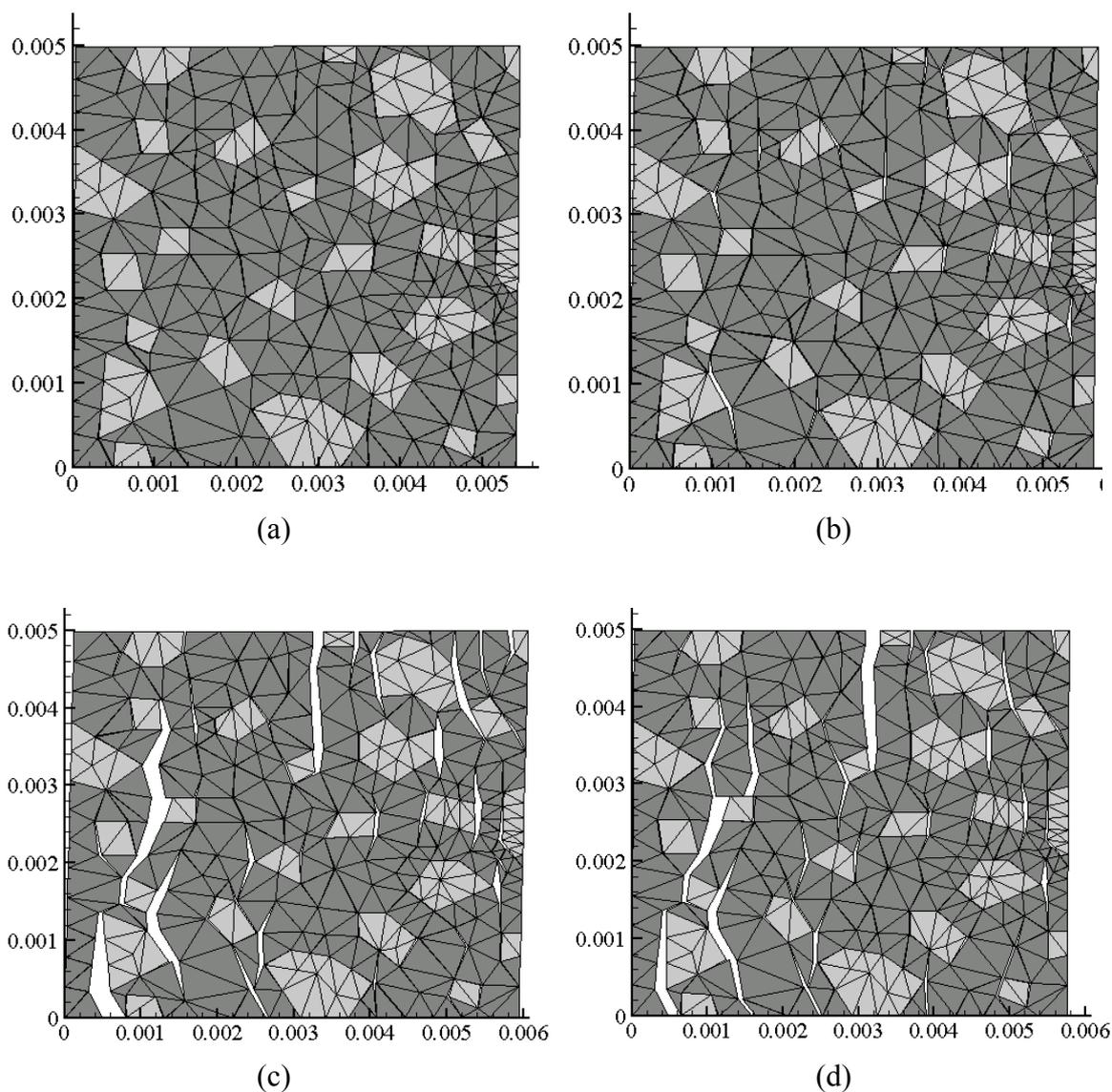
**Figura 5.28:** Configuração da viga para o caso multi-escala com trincas em ambas as escalas em  $t = 34,5$  s



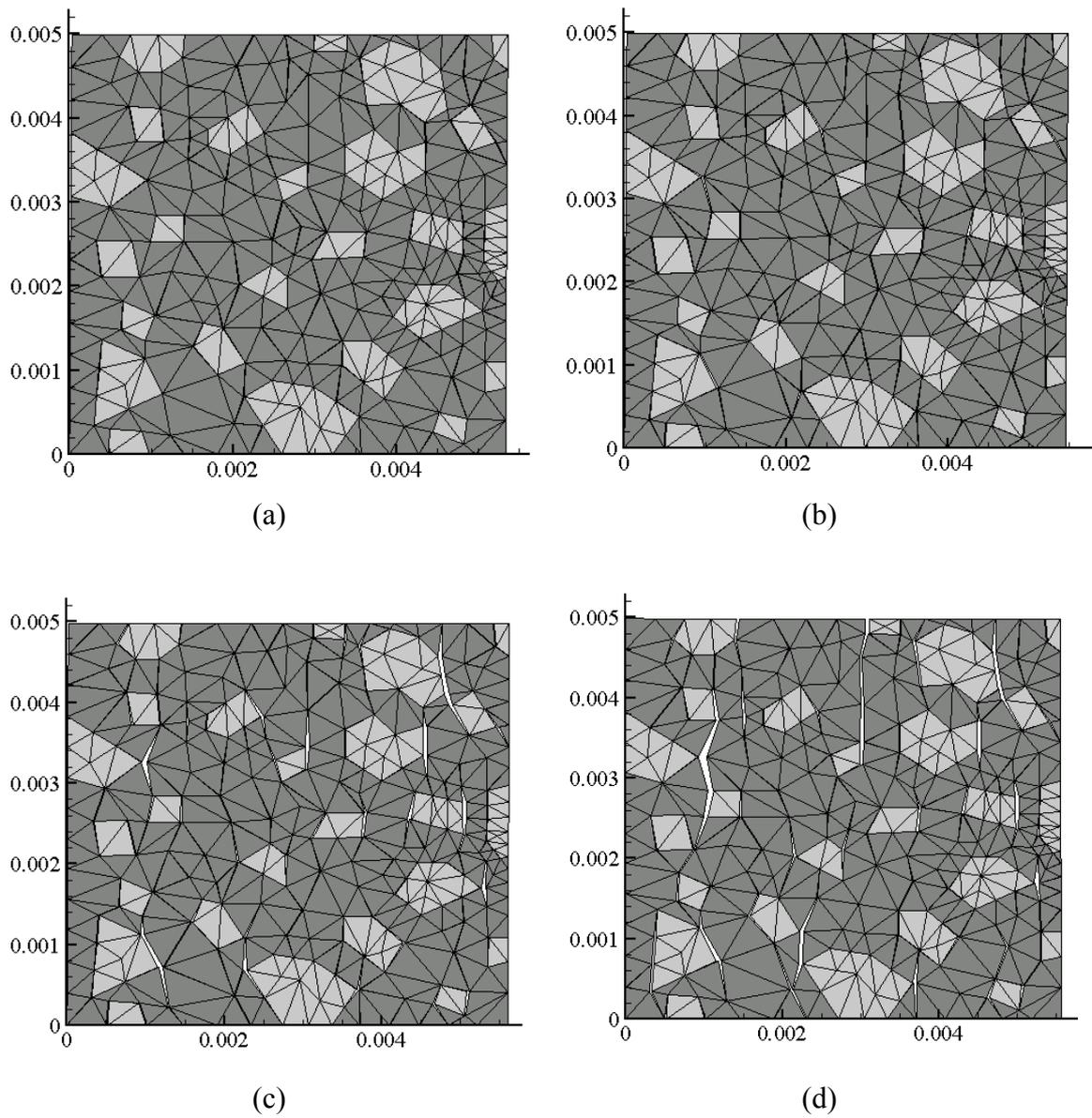
**Figura 5.29:** Histórico da tensão horizontal observada no elemento global A

A partir das Figuras 5.26 e 5.29, as quais mostram o acúmulo de deformações permanentes e a perda da resistência do material, respectivamente, ao longo dos ciclos de carga, pode-se verificar a capacidade do modelo em simular os fenômenos de trincamento por fadiga e de acúmulo de deformação permanente (tanto devido ao comportamento viscoelástico do mastique como devido à formação e propagação de microtrincas).

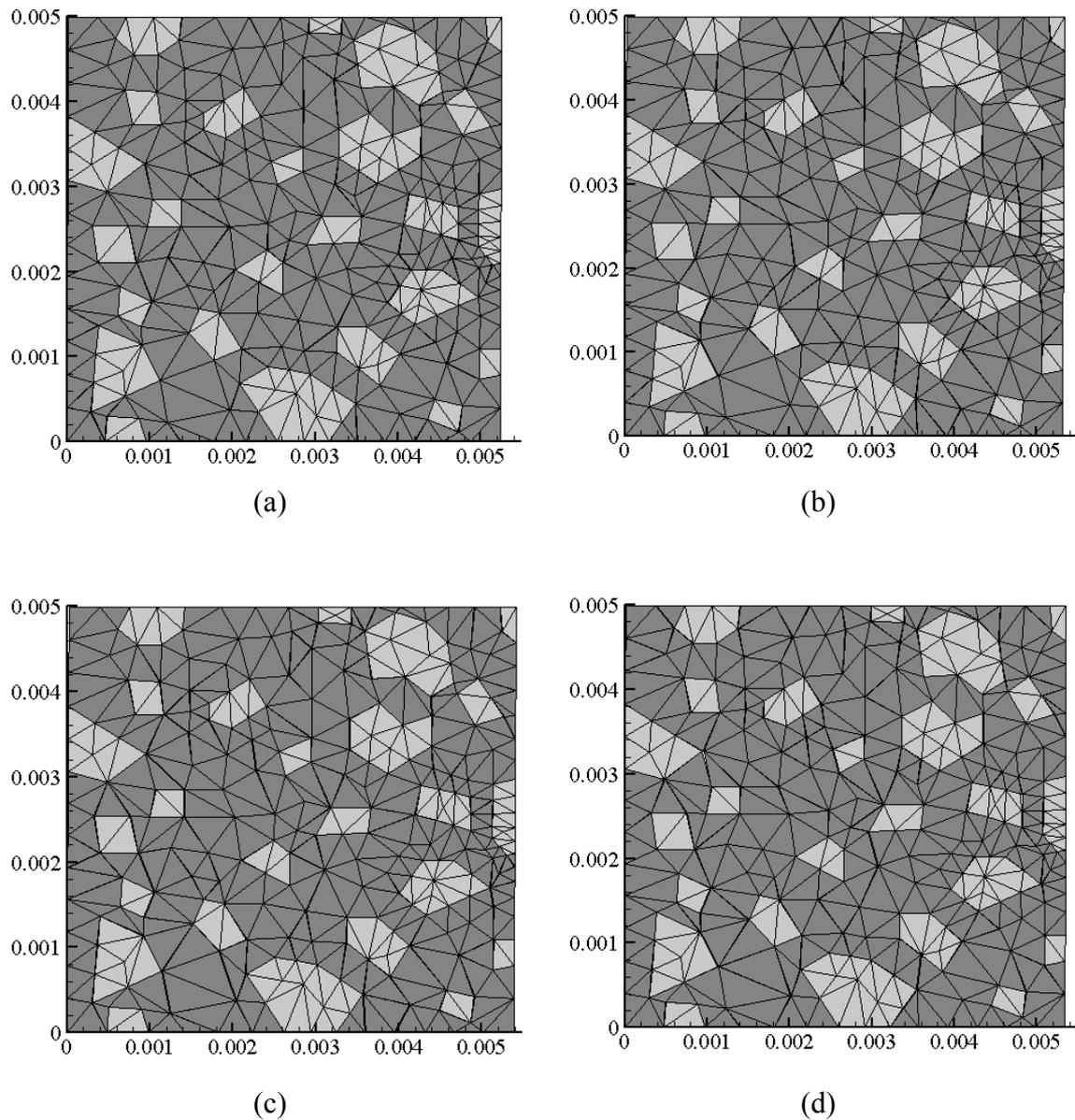
As Figuras 5.30, 5.31 e 5.32 apresentam as estruturas locais em tempos distintos para os elementos A, B e C da Figura 5.24, respectivamente. Os tempos escolhidos correspondem aos picos de deflexão do quarto, sexto e oitavo ciclos, e ao final da simulação, respectivamente. Os deslocamentos horizontais mostrados nessas figuras foram ampliados em dez vezes para permitir uma melhor visualização.



**Figura 5.30:** Estrutura local do elemento A para (a)  $t = 14,5\text{ s}$ ; (b)  $t = 22,5\text{ s}$ ; (c)  $t = 30,5\text{ s}$  e (d)  $t = 70\text{ s}$



**Figura 5.31:** Estrutura local do elemento B para (a)  $t = 14,5$  s; (b)  $t = 22,5$  s; (c)  $t = 30,5$  s e (d)  $t = 70$  s



**Figura 5.32:** Estrutura local do elemento C para (a)  $t = 14,5$  s; (b)  $t = 22,5$  s; (c)  $t = 30,5$  s e (d)  $t = 70$  s

A partir das Figuras 5.30, 5.31 e 5.32, pode-se perceber que a estrutura local da região mais solicitada (Figura 5.30) se apresentou mais danificada que as demais. Note-se que é justamente para este tipo de problema, onde há um gradiente de tensões ao longo da geometria do problema, que os modelos multi-escala se mostram mais eficazes, uma vez que a evolução do dano também depende do histórico do carregamento.

Os resultados mostrados neste capítulo ilustram a capacidade do modelo computacional multi-escala desenvolvido neste trabalho em modelar os principais fatores de deterioração de misturas asfálticas, quais sejam, o acúmulo de deformação permanente, a perda de rigidez do material por fadiga na escala local e o trincamento por fadiga na escala global.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

No presente trabalho, desenvolveu-se um modelo computacional multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos, o qual foi aplicado à modelagem de misturas asfálticas do tipo Areia Asfalto usinada à Quente (AAUQ).

O programa multi-escala desenvolvido se baseia no Método dos Elementos Finitos, o que o torna bastante versátil e de fácil aplicação na solução de problemas com diversas geometrias. Basicamente, o programa realiza a análise em duas escalas distintas (global e local). Inicialmente, o programa resolve o problema global e determina as deformações de cada elemento global. Em seguida, para cada ponto de integração dos elementos multi-escala, um problema local é resolvido, onde as deformações globais são aplicadas ao Elemento de Volume Representativo. Finalmente, as tensões dos elementos multi-escala são atualizadas com as tensões homogeneizadas no Elemento de Volume Representativo.

Vale ressaltar que, além da heterogeneidade do material, as análises locais podem considerar a formação e propagação de trincas ao longo do masticado e nas interfaces masticado-agregados. Assim sendo, o modelo é capaz de considerar a anisotropia na microestrutura produzida pela distribuição interna e orientação dos agregados e das trincas formadas. A formação e propagação de trincas foram modeladas através de um Modelo de Zona Coesiva viscoelástico implementado na forma de elementos de interface.

Uma das principais vantagens dos modelos multi-escala é a visualização, por parte do analista, das interações entre os constituintes do compósito, o que permite um melhor entendimento do comportamento do material e dos fenômenos de deterioração que ocorrem nas escalas menores e que determinam o comportamento da estrutura na escala maior. A partir deste entendimento mais esclarecido, pode-se, então, projetar materiais mais adequados para cada tipo de aplicação estrutural de modo a possibilitar

maior segurança, confiabilidade e economia aos projetos estruturais e permitir um melhor aproveitamento dos materiais.

No caso das misturas asfálticas, por exemplo, é possível se desenvolver um método de projeto de misturas baseado em análises micromecânicas, o qual possa tirar o máximo proveito dos agregados e ligantes asfálticos disponíveis em cada região. Do mesmo modo, pavimentos asfálticos duráveis podem ser dimensionados levando-se em conta as peculiaridades dos materiais disponíveis.

Os resultados aqui obtidos mostram a capacidade do modelo multi-escala desenvolvido em simular o comportamento de misturas asfálticas sob diferentes condições de carregamento (aplicação de deslocamentos monotônicos em compressão diametral e cargas cíclicas de flexão aplicadas em viga bi-apoiada). Além disso, o modelo mostrou-se capaz de simular os principais fatores de deterioração das misturas asfálticas, quais sejam, o acúmulo de deformação permanente, a perda de rigidez do material por fadiga na escala local e o trincamento por fadiga na escala global.

Dentre as limitações do modelo computacional aqui desenvolvido, destacam-se as seguintes:

- i)* os elementos finitos (triangular de deformação constante) e de interface (força de superfície constante) são elementos muito simples e podem não obter resultados precisos; e
- ii)* a Teoria de Homogeneização usada assume a hipótese simplificadora de que o tamanho da escala local é muito menor que o tamanho da escala global,  $\ell_{\text{local}} \ll \ell_{\text{global}}$ . Esta simplificação impede a modelagem do chamado efeito de tamanho e da localização de deformações (alto gradiente de deformações) na escala global (visto que o gradiente de deformações da escala global não é transmitido à escala local).

No que diz respeito à metodologia utilizada, métodos mais eficazes de determinação do Elemento de Volume Representativo para os diversos tipos de misturas asfálticas precisam ser desenvolvidos. Além disso, métodos experimentais

micromecânicos para determinação dos parâmetros de dano do Modelo de Zona Coesiva devem ser usados de modo a obter valores mais confiáveis e propiciar um melhor entendimento do mecanismo de evolução do dano nos materiais asfálticos.

Como futuros esforços de pesquisa podem-se destacar os seguintes:

- i)* implementar o modelo computacional em linguagem orientada a objetos, com o objetivo de tornar o algoritmo mais versátil, reutilizável e fácil de ser ampliado, além de facilitar o desenvolvimento de pré e pós-processadores compatíveis;
- ii)* paralelizar o código multi-escala, de modo a tornar o processo de solução dos sistemas de equações lineares mais ágil e, conseqüentemente, possibilitar a modelagem multi-escala detalhada de grandes estruturas em escala real, como, por exemplo, de pavimentos asfálticos;
- iii)* implementar elementos finitos e de interface mais robustos; ampliar o modelo para três dimensões e para três ou mais escalas;
- iv)* desenvolver metodologias para a determinação do Elemento de Volume Representativo (EVR) de misturas asfálticas e outros materiais. Neste sentido, podem-se destacar o uso de métodos computacionais para a geração automática e aleatória da posição e orientação dos agregados no interior do EVR com base na curva granulométrica e a aplicação de técnicas de processamento de imagem;
- v)* estudar a influência das malhas de elementos finitos local e global nos resultados do modelo multi-escala;
- vi)* formular e implementar modelos multi-escala com base em outros métodos numéricos, especialmente o Método dos Elementos de Contorno;

- vii)* aplicar a metodologia multi-escala na avaliação do desempenho dos diversas misturas asfálticas, especialmente aquelas que possuem apelo ambiental, como o asfalto-borracha e as misturas com resíduo de construção civil (entulho) incorporado, e aquelas que visam aproveitar os materiais característicos de cada região, como as misturas com agregados sintéticos de argila (argila calcinada);
  
- viii)* desenvolver aparatos experimentais que possibilitem e/ou facilitem a obtenção das propriedades e parâmetros utilizados no modelo multi-escala;
  
- ix)* viabilizar a utilização do modelo multi-escala no projeto de misturas asfálticas e de pavimentos flexíveis; e
  
- x)* desenvolver e implementar uma metodologia de auxílio ao processo de desenvolvimento de novos materiais compósitos baseada em esquemas multi-escala.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEN, D. H. (2001) Homogenization Principles and their Application to Continuum Damage Mechanics. *Composites Science and Technology*, v. 61, p. 2223-2230.
- ALLEN, D. H.; C. E. HARRIS e S. E. GROVES (1987) A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with Distributed Damage; Part I: Theoretical Development. *International Journal of Solids and Structures*, v. 23, n. 9, p. 1301-1318.
- ALLEN, D. H. e C. R. SEARCY (2000) Numerical Aspects of a Micromechanical Model of a Cohesive Zone. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v. 19, n. 3, p. 240-248.
- ALLEN, D. H. e C. R. SEARCY (2001a) A Micromechanical Model for a Viscoelastic Cohesive Zone. *International Journal of Fracture*, v. 107, p. 159-176.
- ALLEN, D. H. e C. R. SEARCY (2001b) A Micromechanically-Based Model for Predicting Dynamic Damage Evolution in Ductile Polymers. *Mechanics of Materials*, v. 33, p. 177-184.
- ALLEN, D. H.; C. R. SEARCY, e C. F. BERTHELOT (2001) A Micromechanical Model for the Accelerated Characterization of Viscoelastic Constitutive Behavior of Asphaltic Concrete. *TEES Report No. CMC-2001-1*.
- ALLEN, D. H.; C. R. SEARCY e J. B. SOARES (2003) Multiscaling Techniques for Modeling Damage Evolution in Asphaltic Pavements. *Proceedings of the International Conference on Computational and Experimental Engineering and Sciences*, CD-ROM, Corfu, Grécia.
- ALLEN, D. H. e C. YOON (1998) Homogenization Techniques for Thermoviscoelastic Solids Containing Cracks. *International Journal of Solids and Structures*, v. 35, p. 4035-4054.
- ALLEN, D. H.; R. H. JONES e J. G. BOYD (1994) Micromechanical analysis of a continuous fiber metal matrix composite including the effects of matrix viscoplasticity and evolving damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 42, n. 3, p. 505-529.
- ALLEN, D. H. e W. E. HAISLER (1985) *Introduction to Aerospace Structural Analysis*. Ed. John Wiley & Sons, EUA.

- ASTM (2000) *ASTM D 2041: Standard test method for theoretical maximum specific gravity and density of bituminous paving mixtures*. American Society for Testing and Materials
- BARENBLATT, G. I. (1962) The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. *Advances in Applied Mechanics*, v. 7, p. 55-129.
- BAZANT, Z. P. e J. PLANAS (1998) *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, EUA.
- BEER, F. P. e E. R. JOHNSTON JR. (1995) *Resistência dos Materiais*. 3<sup>a</sup> ed. Tradução Celso Pinto Morais Pereira. Ed. Makron Books, São Paulo.
- BENSOUSSAN, A.; J. L. LIONS e G. PAPANICOLAOU (1978) *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Studies in Mathematics and its Applications 5, North-Holland, Amsterdam.
- BERTHELOT, C. F.; D. H. ALLEN e C. R. SEARCY (2003) Method for Performing Accelerated Characterization of Viscoelastic Constitutive Behavior of Asphaltic Concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 15, n. 5, p. 496-505.
- BOLTZMANN, L. (1876) Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Pogg. Ann. Physik*, v. 7, p. 624.
- BOYD, J. G.; F. COSTANZO e D. H. ALLEN (1993) A Micromechanics Approach for Constructing Locally Averaged Damage Dependent Constitutive Equations in Inelastic Composites. *International Journal of Damage Mechanics*, v. 2, p. 209-228.
- CAIAZZO, A. A. e F. COSTANZO (2000) On the Constitutive Relations of Materials with Evolving Microstructure due to Microcracking. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, p. 3375-3398.
- CAIAZZO, A. A. e F. COSTANZO (2001) Modeling the Constitutive Behavior of Layered Composites with Evolving Cracks. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 3469-3485.
- CARNEIRO, F. L. (1943) Um Novo Método para Determinação da Resistência à Tração dos Concretos. *Comunicação da 5<sup>a</sup> Reunião da Associação Brasileira de Normas Técnicas*, Publicação do Instituto Nacional de Tecnologia, Rio de Janeiro.
- CHEHAB, G. R.; E. O'QUINN e R. Y. KIM (2000) Specimen Geometry Study for Direct Tension Test Based on Mechanical Tests and Air Void Variation in Asphalt Concrete Specimens Compacted by Superpave Gyratory Compactor. *Transportation Research Record*, n. 1723, Transportation Research Board, National Research Council, p. 125-132, EUA.

- CHRISTENSEN, R. M. (1982) *Theory of Viscoelasticity, An Introduction*. Ed. Academic Press, Reino Unido.
- CHUNG, P. W.; K. K. TAMMA e R. R. NAMBURU (2000) A Finite Element Thermo-Viscoelastic Creep Approach for Heterogeneous Structures with Dissipative Correctors. *Finite Element in Analysis and Design*, v. 36, p. 279-313.
- CHURCHILL, R. V. (1958) *Operational Mathematics*. Ed. McGraw-Hill, EUA.
- CLUNI, F. e V. GUSELLA (2004) Homogenization of Non-periodic Masonry Structures. *International Journal of Solids and Structures*, v. 41, p. 1911-1923.
- COOK, R. D.; D. S. MALKUS e M. E. PLESHA (1989) *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Ed. John Wiley and Sons, EUA.
- COSTANZO, F. e D. H. ALLEN (1993) A Continuum Mechanics Approach to some Problems in Subcritical Crack Propagation. *International Journal of Fracture*, v. 63, p. 27-57.
- COSTANZO, F.; J. G. BOYD e D. H. ALLEN (1996) Micromechanics and Homogenization of Inelastic Composite Materials with Growing Cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 44, n. 3, p. 333-370.
- CUTHILL, E. e J. MCKEE (1969) Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. *Proceedings of the 24th National Conference of the ACM*.
- DANIEL, J. S. (2001) *Development of a Simplified Fatigue Test and Analysis Procedure Using a Viscoelastic Continuum Damage Model and its Implementation to WesTrack Mixtures*. Ph.D. Dissertation, North Caroline State University, Raleigh, EUA.
- DENBY, E. F. (1975) A Note on the Interconversion of Creep, Relaxation and Recovery. *Rheologica Acta*, v. 14, p. 591-593.
- DNER (1995) *DNER ME 043/95: Método de Ensaio - Misturas Betuminosas a Quente. Ensaio Marshall para Misturas Betuminosas*. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem. Ministério dos Transportes, Brasil.
- DUGDALE, D. S. (1960) Yielding of Steel Sheets Containing Slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 8, p. 100-104.
- ESHELBY, J. D. (1957) The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society*, v. A421, p. 376-396.

- FERREIRA, P. S.; A. C. FREIRE; A. L. BATISTA; L. QUARESMA e J. R. ALMEIDA (2000) Avaliação das Deformações Permanentes em Pavimentos Rodoviários Considerando o Comportamento Viscoelástico dos Materiais. *Anais do VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional*, Aveiro, Portugal.
- FERRY, J. D. (1980) *Viscoelastic Properties of Polymers*. Ed. Wiley, Nova York, EUA.
- FEYEL, F. (1999) Multiscale FE<sup>2</sup> Elastoviscoplastic Analysis of Composite Structures. *Computational Materials Science*, v. 16, p. 344-354.
- FEYEL, F. e J-L. CHABOCHE (2000) FE<sup>2</sup> Multiscale Approach for Modelling the Elastoviscoplastic Behavior of Long Fibre SiC/Ti Composite Materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 183, p. 309-330.
- FISH, J. e K. SHEK (2000) Multiscale Analysis of Composite Materials and Structures. *Composites Science and Technology*, v. 60, p. 2547-2556.
- FISH, J.; K. SHEK; M. PANDHEERADI e M. S. SHEPHARD (1997) Computational Plasticity for Composite Structures Based on mathematical Homogenization: Theory and Practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 148, p. 53-73.
- FOULK, J. W.; D. H. ALLEN e K. L. E. HELMS (2000) Formulation of a Three-Dimensional Cohesive Zone Model for Application to a Finite Element Algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 183, p. 51-66.
- FREITAS, F. A. C. (2002) *Modelagem da Formação e Propagação de Trincas em Misturas Betuminosas Através do Método dos Elementos Finitos*. Tese de Mestrado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- GEORGE, A. (1971) Computer implementation of the finite element method. *Technical Report STAN-CS-208*, Stanford University.
- GHAZLAN, G.; S. CAPERAA e C. PETIT (1995) An incremental Formulation for the Linear Analysis of Thin Viscoelastic Structures Using Generalized Variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, p. 3315-3333.
- GRIFFITH, A. A. (1920) The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. A221, p. 163-197.
- HA, K. e R. A. SCHAPERLY (1998) A Three-Dimensional Viscoelastic Constitutive Model for Particulate Composites with Growing Damage and its Experimental

- Validation. *International Journal of Solids and Structures*, v. 35, n. 26/27, p. 3497-3517.
- HAJ-ALI, R. M. e A. H. MULIANA (2004) A Multi-scale Constitutive Formulation for the Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Materials and Structures. *International Journal of Solids and Structures*, v. 41, p. 3461-3490.
- HASHIN, Z. (1964) Theory of Mechanical Behavior of heterogeneous Media. *Applied Mechanics Review*, v. 17, p. 1-9.
- HASHIN, Z. (1966) Viscoelastic Fiber Reinforced Materials. *AIAA Journal*, v. 4, p. 1411-1417.
- HELMS, K. L. E.; D. H. ALLEN e L. D. HURTADO (1999) A Model for Predicting Grain Boundary Cracking in Polycrystalline Viscoplastic Materials including Scale Effects. *International Journal of Fracture*, v. 95, p. 175-194.
- HELMS, K. L. E. (2000) *Modeling of Damage Evolution at Grain Boundaries in Polycrystalline Solids*. Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, College Station, EUA.
- HILL, R. (1963) Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 11, p. 347-372.
- HILL, R. (1965a) A Self-consistent Mechanics of Composite Materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 12, p. 213-222.
- HILL, R. (1965b) Micromechanics of Elastoplastic Materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 13, p. 89-101.
- HILL, R. (1967) The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 15, p. 79-95.
- HONDROS, G. (1959) The Evaluation of Poisson's Ratio and the Modulus of Materials of a Low Tensile Resistance by the Brazilian (Indirect Tensile) Test with Particular Reference to Concrete. *Australian Journal of Applied Sciences*, v. 10, n. 3, p. 243-268.
- HOPKINS, I. L. e R. W. HAMMING (1957) On Creep and Relaxation. *Journal of Applied Physics*, v. 28, n. 8, p. 906-909.
- HOPMAN, P. C. (1994) *VEROAD: A Linear Visco-Elastic Multilayer Program for the Calculation of Stresses, Strains and Displacements in Asphaltic Road Constructions: A Visco-Elastic Multilayer System*. Delft University of Technology, Holanda.

- HUANG, Y. H. (1993) *Pavement Analysis and Design*. Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, EUA.
- KACHANOV, M. (1972) Continuum Theory of Media with Cracks. *Izv. Acad. Nauk SSR, Mech. Tver. Tela*, v. 7, p. 54-59.
- KIM, Y-R. (2003) *Mechanistic Fatigue Characterization and Damage Modeling of Asphalt Mixtures*. Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, College Station, EUA.
- KIM, Y. R. e Y-C. LEE (1995) Interrelationships among Stiffnesses of Asphalt-Aggregate Mixtures. *Journal of Association of Asphalt Paving Technologists*, v. 64, p. 575-609.
- KING, I. P. (1965) *On the Finite Element Analysis of Two-Dimensional Problems with Time Dependent Properties*. Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, EUA.
- KNAUSS, W. G. (1974) On the Steady Propagation of a Crack in a Viscoelastic Sheet: Experiments and Analysis. In: Kausch, H. H.; J. A. Hassell e R. I. Jaffee (eds.) *Deformation and Fracture of High Polymers*. Ed. Plenum Press, p. 501-541.
- KOUZNETSOVA, V. G. (2002) *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. Ph.D. Dissertation, TU-Eindhoven, Eindhoven, Holanda.
- KREYSZIG, E. (1993) *Advanced Engineering Mathematics*. Ed. John Wiley & Sons, EUA, 7ª edição.
- LEE, H-J; J. S. DANIEL e Y. R. KIM (2000) Continuum Damage Mechanics-Based Fatigue Model of Asphalt Concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 12, n. 2, p. 105-112.
- LEE, H-J. e Y. R. KIM (1998a) Viscoelastic Constitutive Model for Asphalt Concrete under Cyclic Loading. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 124, n. 1. p. 32-40.
- LEE, H-J. e Y. R. KIM (1998b) Viscoelastic Continuum Damage Model of Asphalt Concrete with Healing. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 124, n. 11. p. 1224-1232.
- LEE, K.; S. MOORTHY e S. GHOSH (1999) Multiple Scale Computational Model for Damage in Composite Materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 172, p. 175-201.
- LEITHOLD, L. (1994) *O Cálculo com Geometria Analítica*. Ed. Harbra, Brasil, 3ª edição.

- LIU, J. e A. SHERMAN (1975) Comparative analysis of the Cuthill-McKee and the reverse Cuthill-McKee ordering algorithms for sparse matrices. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 13, p. 198-213.
- MAGHOUS, S. e G. J. CREUS (2003) Periodic Homogenization in Thermoviscoelasticity: Case of Multilayered Media with Ageing. *International Journal of Solids and Structures*, v. 40, p. 851-870.
- MANDEL, J. (1964) Contribution Théorique à l'Étude de l'Écrouissage et des Lois de l'Écoulement Plastique. *Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics*, Munich, p. 502-509.
- MEHTA, P. K. e P. J. M. MONTEIRO (1993) *Concrete, Structure, Properties and Materials*. Prentice Hall, New Jersey, EUA.
- MORLAND, L. W. e E. H. LEE (1960) Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials with Temperature Variation. *Transactions of the Society of Rheology*, v. 4, p. 233.
- NEEDLEMAN, A. (1987) A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding. *Journal of Applied Mechanics*, v. 54, p. 525-531.
- PARK, S. W. e R. A. SCHAPERY (1997) A Viscoelastic Constitutive Model for Particulate Composites with Growing Damage. *International Journal of Solids and Structures*, v. 34, n. 8, p. 931-947.
- PARK, S. W. e R. A. SCHAPERY (1999) Methods of Interconversion between Linear Viscoelastic Material Functions. Part I – A Numerical Method Based on Prony Series. *International Journal of Solids and Structures*, v. 36, p. 1653-1675.
- PARK, S. W. e Y. R. KIM (1998) Analysis of Layered Viscoelastic System with Transient Temperatures. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 124, n. 2, p. 223-231.
- PARK, S. W. e Y. R. KIM (1999) Interconversion between Relaxation Modulus and Creep Compliance for Viscoelastic Solids. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 11, n. 1, p. 76-81.
- PARK, S. W. e Y. R. KIM (2001) Fitting Prony-Series Viscoelastic Models with Power-Law Presmoothing. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 13, n. 1, p. 26-32
- PARK, S. W.; Y. R. KIM e R. A. SCHAPERY (1996) A Viscoelastic Continuum Damage Model and its Application to Uniaxial Behavior of Asphalt Concrete. *Mechanics of Materials*, v. 24, n. 4, p. 241-255.

- PHILLIPS, M. L.; C. YOON e D. H. ALLEN (1999) A Computational Model for Predicting Damage Evolution in Laminated Composite Plates. *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 121, p. 436-444.
- POVIRK, G. L. (1995) Incorporation of Microstructural Information into Models of Two-Phase Materials. *Acta Metallurgica et Materialia*, v. 43, n. 8, p. 3199-3206.
- RAGHAVAN, P.; S. MOORTHY; S. GHOSH e N. J. PAGANO (2001) Revisiting the Composite Laminate Problem with an Adaptive Multi-level Computational Model. *Composites Science and Technology*, v. 61, p.1017-1040.
- REDDY, J. N. (1993) *An Introduction to the Finite Element Method*. Ed. McGraw-Hill, Singapura.
- SANCHEZ-PALENCIA, E. (1980) *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin.
- SCHAPERY, R. A. (1961) A simple collocation method for fitting viscoelastic models to experimental data. *GALCIT SM 61-23A*, California Institute of Technology, EUA.
- SCHAPERY, R. A. (1962) Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis. *GALCIT SM 62-2*, California Institute of Technology, EUA.
- SCHAPERY, R. A. (1967) Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials. *Journal of Composite Materials*, v. 1, p. 228-267.
- SCHAPERY, R. A. (1974) Viscoelastic Behavior and Analysis of Composite Materials. *In: Sendeckyj, G. P. (ed.) Mechanics of Composite Materials*. New York, USA.
- SCHAPERY, R. A. (1975a) A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media; Part I: Theoretical Development. *International Journal of Fracture*, v. 11, n. 1, p. 141-159.
- SCHAPERY, R. A. (1975b) A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media; Part II: Approximate Methods of Analysis. *International Journal of Fracture*, v. 11, n. 3, p. 369-387.
- SCHAPERY, R. A. (1975c) A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media; Part III: Analysis of Continuous Growth. *International Journal of Fracture*, v. 11, n. 4, p. 549-562.
- SCHAPERY, R. A. (1981) On Viscoelastic Deformation and Failure Behavior of Composites Materials with Distributed Flaws. *Advances in Aerospace Structures and Materials – AD-01*, ASME, Nova York, p. 5-20

- SCHAPERY, R. A. (1984) Correspondence Principles and a Generalized J Integral for Large Deformation and Fracture Analysis of Viscoelastic Media. *International Journal of Fracture*, v. 25, p. 195-223.
- SCHAPERY, R. A. (1986) A Micromechanical Model for Non-Linear Viscoelastic Behavior of Particle-Reinforced Rubber with Distributed Damage. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 25, n. 5/6, p. 845-867.
- SCHAPERY, R. A. (1990a) A Theory of Mechanical Behavior of Elastic Media with Growing Damage and other Changes in Structure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 38, p. 215-253.
- SCHAPERY, R. A. (1990b) Simplifications in the Behavior of Viscoelastic Composites with Growing Damage. *Proceedings of the IUTAM Symposium in Inelastic Deformation of Composite Materials*, Troy, Nova York, p. 193-214.
- SCHAPERY, R. A. (1999) Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations with Growing Damage. *International Journal of Fracture*, v. 97, p. 33-66.
- SCHAPERY, R. A. e D. L. SICKING (1995) On Nonlinear Constitutive Equations for Elastic and Viscoelastic Composites with Growing Damage. *In: Bakker, A. (ed.) Mechanical Behavior of Materials*. Delft University Press, Delft, p. 45-76.
- SCHAPERY, R. A. e S. W. PARK (1999) Methods of Interconversion between Linear Viscoelastic Material Functions. Part II – An Approximate Analytical Method. *International Journal of Solids and Structures*, v. 36, p. 1677-1699.
- SEARCY, C. R. (1998) *A Micromechanical Model for a Viscoelastic Cohesive Zone*. Master's Thesis, Texas A&M University, College Station, EUA.
- SEARCY, C. R. (2004) *A Multi-scale model for Predicting Damage Evolution in Heterogeneous Viscoelastic Media*. Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, College Station, EUA.
- SEIDEL, G. D. (2002) *A Model for Predicting the Evolution of Damage in the Plastic Bonded Explosive LX17*. Master's Thesis, Texas A&M University, College Station, EUA.
- SEIDEL, G. D.; D. H. ALLEN; K. L. E. HELMS e S. E. GROVES (2004) A Model for Predicting the Evolution of Damage in Viscoelastic Particle-Reinforced Composites. A ser publicado em *Mechanics of Materials*.
- SHRP – Strategic Highway Research Program (1993) Resilient Modulus for Asphalt Concrete. *SHRP Test Designation: AC07, Protocol: P07*.

- SMIT, R. J. M.; W. A. M. BREKELMANS e H. E. H. MEIJER (1998) Prediction of the Mechanical Behavior of Nonlinear Heterogeneous Systems by Multi-level Finite Element Modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 155, p. 181-192.
- SOARES, J. B. e SOUZA, F. V. (2002) Verificação do Comportamento Viscoelástico Linear em Misturas Asfálticas. *Anais do 16º Encontro de Asfalto*, CD-ROM, IBP, Rio de Janeiro.
- SOUZA, F. V. e J. B. SOARES (2003) Previsão do Comportamento Mecânico de Misturas Asfálticas a partir dos Resultados do Ensaio de *Creep* Estático. In: CNT/ANPET (org.) / LGE (ed.) *Transporte em Transformação VII – Trabalhos Vencedores do Prêmio CNT Produção Acadêmica 2002*, Brasília, Brasil.
- SOUZA, F. V.; J. B. SOARES; D. H. ALLEN e F. EVANGELISTA JR. (2004) Model for Predicting Damage Evolution in Heterogeneous Viscoelastic Asphaltic Mixtures. A ser publicado em *Transportation Research Record*, Transportation Research Board, National Research Council, EUA.
- STROEVEN, M.; H. ASKES e L. J. SLUYS (2004) Numerical Determination of Representative Volumes for Granular Materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3221-3238.
- SUQUET, P. M. (1985) Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics. In: Sanchez-Palencia, E. e A. Zaoui (eds.) *Homogenization Techniques for Composite Media*, Lecture Notes in Physics 272, Springer, Berlim, p. 193-278.
- SÜSSEKIND, J. C. (1984) *Curso de Concreto – Concreto Armado*. v. 1. Ed. Globo, Rio de Janeiro.
- TALREJA, R. (1994) Damage Characterization by Internal Variables. In: Talreja, R. (ed.) *Damage Mechanics of Composite Materials*. Ed. Elsevier, Berlim, p. 53-78.
- TECGRAF5 (1997) *Mtool: Bidimensional Mesh Tool*, versão 3.0. Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica, PUC-Rio.
- TVERGAARD, V. (1990) Effect of Fiber Debonding in a Whisker-Reinforced Metal. *Materials Science and Engineering A: Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing*, v. A125, n. 2, p. 203-213.
- VAKULENKO, A. A. e M. L. KACHANOV (1971) Continuum Model of Medium with Cracks. *Mekh. Tver. Tela*, v. 4, p. 159-166.
- WILLIAMS, J. J. (2001) *Two Experiments for Measuring Specific Viscoelastic Cohesive Zone Parameters*. Master's Thesis, Texas A&M University, College Station, EUA.

- WILLIAMS, M. L.; R. F. LANDEL e J. D. FERRY (1955) The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of American Chemical Society*, v. 77, p. 3701-3707.
- YI, Y-M.; S-H. PARK e S-K. YOUN (1998) Asymptotic Homogenization of Viscoelastic Composites with Periodic Microstructures. *International Journal of Solids and Structures*, v. 35, n. 17, p. 2039-2055.
- YOON, C. e D. H. ALLEN (1999) Damage Dependent Constitutive Behavior and Energy Release Rate for a Cohesive Zone in a Thermoviscoelastic Solid. *International Journal of Fracture*, v. 96, p. 55-74.
- YU, Q. e J. FISH (2002) Multiscale Asymptotic Homogenization for Multiphysics Problems with Multiple Spatial and Temporal Scales: A Coupled Thermo-Viscoelastic Example Problem. *International journal of Solids and Structures*, v. 39, p. 6429-6452.
- ZEMAN, J. e M. ŠEJNOHA (2001) Numerical Evaluation of Effective Properties of Graphite Fiber Tow Impregnated by polymer Matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 49, n. 1, p. 69-90.
- ZEMAN, J. e M. ŠEJNOHA (2003) Statistically Optimized Periodic Unit Cells as Representative of Random Microstructures. *Proceedings of the International Conference on Computational and Experimental Engineering and Sciences*, CD-ROM, Corfu, Grécia.
- ZHANG, W.; A. DRESCHER e D. E. NEWCOMB (1997) Viscoelastic Analysis of Diametral Compression of Asphalt Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 123, n. 6, p. 596-603.
- ZHAO, Y. e Y. R. KIM (2003) The Time-Temperature Superposition for Asphalt Mixtures with Growing Damage and Permanent Deformation in Compression. *TRB 2003 Annual Meeting CD-ROM*, Transportation Research Board.
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1971) *The Finite Element Method in Engineering Science*. Ed. Mc-Graw-Hill, Londres, Reino Unido.
- ZOCHER, M. A. (1995) *A Thermoviscoelastic Finite Element Formulation for the Analysis of Composites*. Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, College Station, EUA.
- ZOCHER, M. A. e D. H. ALLEN (1997) Stress Analysis of Matrix-Cracked Viscoelastic Laminate. *International Journal of Solids and Structures*, v. 34, p. 3235-3257.

ZOCHER, M. A.; S. E. GROVES e D. H. ALLEN (1997) Three-Dimensional Finite Element Formulation for Thermoviscoelastic Orthotropic Media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 2267-2288.

**APÊNDICE A**

**SOLICITAÇÕES HARMÔNICAS EM MATERIAIS  
VISCOELÁSTICOS**

As solicitações harmônicas são de grande importância para a caracterização acelerada de materiais asfálticos através da utilização do princípio de superposição tempo-freqüência e/ou do princípio de superposição tempo-temperatura.

Este tipo de solicitação é comumente representado por uma função exponencial complexa do tipo  $e^{i\omega t}$ . A utilização deste tipo de representação é justificada pelo fato de que a função exponencial complexa  $e^{i\omega t}$  é capaz de representar tanto uma função senoidal como uma co-senoidal, senão vejamos:

Considere um número complexo dado por  $e^{i\theta}$ . Nosso objetivo é encontrar o número complexo  $z$  de modo que:

$$z = x + i \cdot y = e^{i\theta} \quad (\text{A.1})$$

onde,  $x$  e  $y$  devem ser funções de  $\theta$ .

De acordo com KREYSZIG (1993), a forma polar de um número complexo,  $z$ , é dada por:

$$z = r(\cos \phi + i \cdot \text{sen} \phi), \quad \text{onde } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \tan \phi = \frac{y}{x} \quad (\text{A.2})$$

No entanto,  $\tan \phi = \frac{\text{sen} \phi}{\cos \phi} = \frac{y}{x}$ . Fazendo, porém,  $x = \cos \theta$  e  $y = \text{sen} \theta$ , a fim de satisfazer a condição de que  $x$  e  $y$  devem ser funções de  $\theta$ , tem-se que  $r = \sqrt{\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta} = 1$  e  $\phi = \theta$ . Logo, substituindo  $r$  e  $\theta$  na Equação A.2, segue que  $z = \cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta$ .

Portanto, da Equação A.1, tem-se:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta \quad (\text{A.3})$$

Fazendo, então,  $\theta = \omega t$  na Equação A.3, vem:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (\text{A.4})$$

A Equação A.4 mostra que tanto a função co-senoidal,  $\cos(\omega t)$ , como a função senoidal,  $\sin(\omega t)$ , podem ser representadas de forma generalizada pela função exponencial complexa  $e^{i\omega t}$ , sendo que sua parte real representa a função co-senoidal e sua parte imaginária representa a função senoidal.

Exemplificando a utilização da Equação A.4, considere a equação diferencial para o modelo de Voigt (mola e amortecedor associados em paralelo) governado pela equação abaixo:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon + \eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{A.5})$$

Nosso objetivo é encontrar a resposta do modelo com relação à deformação quando submetido à solitação:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t) \quad (\text{A.6})$$

Reescrevendo a equação acima na sua forma complexa, vem:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (\text{A.7})$$

Assumindo a solução  $\varepsilon = K \cdot e^{i\omega t}$  e substituindo-a juntamente com 3.24 em 2.30, vem:

$$E_1 K \cdot e^{i\omega t} + \eta_1 K \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t} = \sigma_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{A.8})$$

Cancelando o termo  $e^{i\omega t}$ , utilizando a definição de tempo de retardação e separando-se a variável  $K$ , tem-se:

$$E_1(1 + i\omega\tau_1)K = \sigma_0 \Rightarrow K = \frac{\sigma_0}{E_1(1 + i\omega\tau_1)} \quad (\text{A.9})$$

Desta forma, a solução complexa para a deformação é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1(1 + i\omega\tau_1)} e^{i\omega t} \quad (\text{A.10})$$

ou, substituindo a Equação A.4 na Equação A.10:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1(1+i\omega\tau_1)} [\cos(\omega t) + i \cdot \text{sen}(\omega t)] \quad (\text{A.11})$$

No entanto, como comentado anteriormente, a solução para a solitação  $\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t)$  (a qual envolve uma função co-seno) corresponde à parte real da solução complexa, Equação A.11. Logo:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1(1+i\omega\tau_1)} \cos(\omega t) \quad (\text{A.12})$$

Portanto, pode-se perceber que uma resposta na forma de uma função complexa, como a representada pela Equação A.11, contém a resposta para duas solitações físicas distintas. Neste caso, a parte real corresponde à resposta a uma solitação co-senoidal, enquanto a parte imaginária corresponde à resposta a uma solitação senoidal.

## A.1 PROPRIEDADES COMPLEXAS

As propriedades dos materiais viscoelásticos também podem ser representadas através de funções complexas, o que simplifica a solução de problemas dinâmicos (problemas em que há aplicação de solitações harmônicas).

No APÊNDICE C são abordadas as propriedades complexas para os casos particulares de alguns modelos mecânicos. Neste Apêndice, no entanto, considera-se o caso geral de um material viscoelástico submetido a uma solitação harmônica, senoidal ou co-senoidal, representada na sua forma complexa dada abaixo:

$$S = \begin{cases} 0, & \text{para } t < \tau_0 \\ S_0 e^{i\omega t}, & \text{para } t > \tau_0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

A qual pode ser rescrita na seguinte forma usando a função degrau unitária:

$$S = H(t - \tau_0) S_0 e^{i\omega t} \quad (\text{A.14})$$

onde,

$S_0$ : amplitude da solitação; e  
 $H(\tau - \tau_0)$ : função degrau unitária.

Considere que a resposta,  $R_H$ , do material a uma solitação unitária possa ser dividida em duas partes, sendo uma delas independente do tempo, conforme segue:

$$R_H(t) \equiv R_H(t = \infty) + \Delta R_H(t) \quad (\text{A.15})$$

Substituindo as Equações A.14 e A.15 na equação constitutiva reescrita abaixo,

$$R(t) = \int_0^t R_H(t - \tau) \frac{\partial S}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{A.16})$$

Tem-se:

$$R(t) = \int_0^t [R_H(\infty) + \Delta R_H(t - \tau)] \frac{dS}{d\tau} d\tau \quad (\text{A.17})$$

$$\therefore R(t) = R_H(\infty)S(t) + \int_0^t \Delta R_H(t - \tau) \frac{dS}{d\tau} d\tau \quad (\text{A.18})$$

Considerando apenas o domínio  $t \geq \tau_0$ , pois para  $t < \tau_0$ ,  $R(t) = 0$ , e sabendo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a) \quad (\text{A.19})$$

Vem:

$$R(t) = R_H(\infty)S_0 e^{i\omega t} + \Delta R_H(t - \tau_0)S_0 e^{i\omega \tau_0} + i\omega S_0 \int_{\tau_0}^t \Delta R_H(t - \tau) e^{i\omega \tau} d\tau \quad (\text{A.20})$$

Rearranjando a equação acima, tem-se:

$$R(t) = S_0 e^{i\omega t} \left[ R_H(\infty) + \Delta R_H(t - \tau_0) \frac{e^{i\omega \tau_0}}{e^{i\omega t}} + i\omega \int_{\tau_0}^t \Delta R_H(t - \tau) \frac{e^{i\omega \tau}}{e^{i\omega t}} d\tau \right] \quad (\text{A.21})$$

Substituindo  $(t - \tau)$  por  $u$ , segue:

$$u = t - \tau \Rightarrow du = -d\tau$$

$$\text{limites de integração: } \tau \Big|_{\tau_0}^t \Rightarrow u \Big|_{t-\tau_0}^{t-t} \Rightarrow u \Big|_{t-\tau_0}^0$$

$$R(t) = S_0 e^{i\omega t} \left[ R_H(\infty) + \Delta R_H(t - \tau_0) e^{i\omega(\tau_0 - t)} + i\omega \int_{t-\tau_0}^0 \Delta R_H(u) e^{-i\omega u} (-du) \right] \quad (\text{A.22})$$

Invertendo os limites de integração da integral acima e usando a Equação A.14, vem:

$$R(t) = S(t) \left[ R_H(\infty) + \Delta R_H(t - \tau_0) e^{i\omega(\tau_0 - t)} + i\omega \int_0^{t-\tau_0} \Delta R_H(u) e^{-i\omega u} du \right] \quad (\text{A.23})$$

Sabe-se que, quando submetidos a solicitações cíclicas, os sistemas lineares produzem uma resposta, também cíclica, com o mesmo período da solicitação, possivelmente com exceção dos tempos iniciais de aplicação da solicitação, quando pode haver oscilações transientes no período e na amplitude da resposta (SOUZA e SOARES, 2003). A Equação A.23 corresponde, no entanto, à resposta do material durante todo o período de tempo em que há aplicação de solicitação harmônica, inclusive durante os instantes iniciais da aplicação da solicitação.

Para que se obtenha a resposta para o estado constante de vibração, basta fazer  $\tau_0$  tender a  $-\infty$  na Equação 3.34. Isto significa dizer que a solicitação iniciou-se num instante de tempo infinitamente anterior ao tempo atual,  $t$ , garantindo que o sistema já atingiu o estado constante de vibração. Assim, fazendo  $\tau_0 \rightarrow -\infty$  na Equação A.23, tem-se:

$$R(t) = S(t) \left[ R_H(\infty) + \Delta R_H(\infty) e^{i\omega(-\infty)} + i\omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) e^{-i\omega u} du \right] \quad (\text{A.24})$$

Donde obtém-se a seguinte expressão para o estado constante de vibração:

$$R(t) = \left[ R_H(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) e^{-i\omega u} du \right] S(t) \quad (\text{A.25})$$

Definindo-se, então, a resposta unitária complexa como:

$$R_H^* \equiv R_H(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) e^{-i\omega u} du \quad (\text{A.26})$$

Segue que a resposta, no estado constante de vibração, para uma dada solicitação harmônica pode ser escrita da seguinte forma:

$$R(t) = R_H^* \cdot S(t) \quad (\text{A.27})$$

A partir da Equação A.4, pode-se mostrar que:

$$e^{-i\omega u} = \cos(\omega \cdot u) - i \cdot \text{sen}(\omega \cdot u) \quad (\text{A.28})$$

Substituindo a equação acima na Equação A.26, vem:

$$R_H^* \equiv R_H(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) \cos(\omega \cdot u) du + i\omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) [-i \cdot \text{sen}(\omega \cdot u)] du \quad (\text{A.29})$$

Lembrando que  $i^2 = -1$ , e reorganizando a equação acima, segue:

$$R_H^* \equiv R_H(\infty) + \omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) \text{sen}(\omega \cdot u) du + i\omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) \cos(\omega \cdot u) du \quad (\text{A.30})$$

Mas,

$$R_H^* = R_H' + i \cdot R_H'' \quad (\text{A.31})$$

Comparando-se as Equações A.30 e A.31, obtém-se as partes real e imaginária de  $R_H^*$ :

$$R_H' \equiv R_H(\infty) + \omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) \text{sen}(\omega \cdot u) du \quad (\text{A.32})$$

$$R_H'' \equiv \omega \int_0^{\infty} \Delta R_H(u) \cos(\omega \cdot u) du \quad (\text{A.33})$$

Note-se que  $R_H^*$ ,  $R_H'$  e  $R_H''$  são funções dependentes da frequência e não do tempo e que  $u$  é uma variável de integração.

Em determinadas situações, porém, a solução do problema pode ser simplificada utilizando-se a forma polar de  $R_H^*$ . Reescrevendo, portanto,  $R_H^*$  na forma polar, tem-se:

$$R_H^* = |R_H^*| \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta) \quad (\text{A.34})$$

ou,

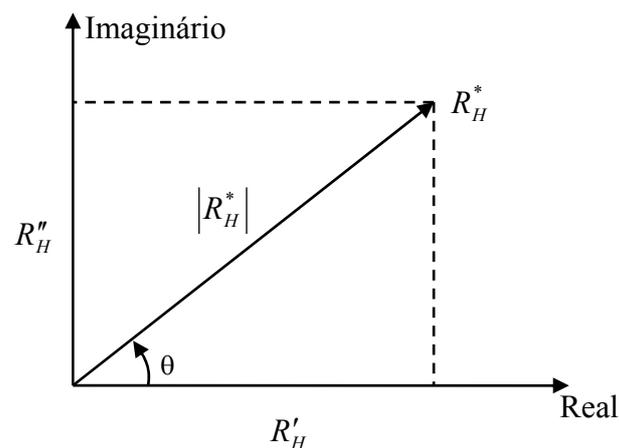
$$R_H^* = |R_H^*| \cdot e^{i\theta} \quad (\text{A.35})$$

onde:

$$|R_H^*| = \sqrt{R_H'^2 + R_H''^2} = \text{amplitude} \quad (\text{A.36})$$

$$\theta = \arctan \frac{R_H''}{R_H'} = \text{ângulo de fase} \quad (\text{A.37})$$

Conforme ilustra a Figura A.1, abaixo:



**Figura A.1:** Representação de  $R_H^*$  no plano complexo

Para exemplificar a utilização das Equações A.34 a A.37, considere uma solicitação senoidal dada por:

$$S(t) = H(t - \tau_0) \cdot S_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (\text{A.38})$$

A resposta do sistema, no seu estado constante (ou estado permanente), a essa solicitação é a parte imaginária da resposta complexa,  $R$ :

$$R = R_H^* \cdot S_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{A.39})$$

$$\therefore R = (R_H' + i \cdot R_H'') [S_0 (\cos(\omega t) + i \cdot \text{sen}(\omega t))] \quad (\text{A.40})$$

$$\therefore R = S_0 \{ [R_H' \cos(\omega t) - R_H'' \text{sen}(\omega t)] + i \cdot [R_H' \text{sen}(\omega t) + R_H'' \cos(\omega t)] \} \quad (\text{A.41})$$

Adotando a seguinte notação:

$\text{Im}[R]$ : componente imaginária de  $R$ ; e

$\text{Re}[R]$ : componente real de  $R$ .

Tem-se que a resposta à solicitação senoidal é:

$$R^{\text{sen}} = \text{Im}[R] = S_0 [R_H' \text{sen}(\omega t) + R_H'' \cos(\omega t)] \quad (\text{A.42})$$

Equivalentemente, utilizando-se a forma polar de  $R_H^*$ , tem-se:

$$R = \left| R_H^* \right| e^{i\theta} \cdot S_0 e^{i\omega t} \quad (\text{A.43})$$

$$\Rightarrow R = S_0 \left| R_H^* \right| e^{i(\omega t + \theta)} \quad (\text{A.44})$$

A partir da Equação A.44, pode-se determinar a resposta à solicitação senoidal (Equação A.38), como segue:

$$R^{\text{sen}} = \text{Im}[R] = S_0 \left| R_H^* \right| \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (\text{A.45})$$

Do mesmo modo, pode-se determinar a resposta do sistema, no seu estado permanente, à solicitação co-senoidal  $S(t) = H(t - \tau_0) \cdot S_0 \cdot \cos(\omega t)$ . A partir das Equações A.41 e A.44, obtém-se, respectivamente:

$$R^{\cos} = \text{Re}[R] = S_0[R'_H \cos(\omega t) - R''_H \text{sen}(\omega t)] \quad (\text{A.46})$$

$$R^{\cos} = \text{Re}[R] = S_0 \left| R_H^* \right| \cos(\omega t + \theta) \quad (\text{A.47})$$

Mostrou-se anteriormente que, a partir das Equações A.32 e A.33, pode-se calcular as propriedades complexas (dependentes da frequência) a partir da propriedade dependente do tempo  $R_H(t)$  (Equação A.15). Em algumas situações práticas, no entanto, como na caracterização de ligantes asfálticos, é importante que se possa determinar a função (propriedade)  $R_H(t)$  a partir das propriedades complexas  $R'_H$  e  $R''_H$ .

Uma maneira de se obter  $R_H(t)$  em função de  $R'_H$  e  $R''_H$  seria através da utilização da transformada de Fourier. A transformada de Fourier de  $f(t)$ ,  $F(\omega)$ , é definida como (KREYSZIG, 1993):

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (\text{A.48})$$

Sendo o inverso da transformada de Fourier dado por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.49})$$

A partir da substituição da Equação A.4 nas Equações A.48 e A.49, e após algumas manipulações matemáticas, pode-se chegar à definição da transformada cosseno de Fourier,  $F_C(\omega)$  e da transformada seno de Fourier,  $F_S(\omega)$ , dadas abaixo com seus respectivos inversos.

$$F_C(\omega) \equiv 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad (\text{A.50})$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_C(\omega) \cdot \cos(\omega t) d\omega \quad (\text{A.51})$$

$$F_S(\omega) \equiv 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \text{sen}(\omega t) dt \quad (\text{A.52})$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_S(\omega) \cdot \text{sen}(\omega t) d\omega \quad (\text{A.53})$$

Comparando-se, portanto, a Equação A.32 com a Equação A.52 e a Equação A.33 com a Equação A.50, pode-se perceber as seguintes relações :

$$f(t) = \Delta R_H \quad (\text{A.54})$$

$$F_S = \frac{2[R'_H - R_H(\infty)]}{\omega} \quad (\text{A.55})$$

$$F_C = \frac{2R''_H}{\omega} \quad (\text{A.56})$$

Desta forma, aplicando-se a Equação A.53, juntamente com as Equações A.15, A.54 e A.55, obtém-se:

$$R_H(t) = R_H(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [R'_H(\omega) - R_H(\infty)] \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (\text{A.57})$$

Desenvolvendo a integral acima, vem:

$$R_H(t) = R_H(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R'_H(\omega) \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega - \frac{2}{\pi} R_H(\infty) \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (\text{A.58})$$

De acordo com KREYSZIG (1993):

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(u)}{u} du = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.59})$$

Fazendo  $u = \omega \cdot t$  ( $du = t \cdot d\omega$ ) na segunda integral da Equação A.58, tem-se:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(u)}{\left(\frac{u}{t}\right)} \cdot \frac{du}{t} = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(u)}{u} du = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.60})$$

Substituindo a Equação A.60 na Equação A.58, obtém-se:

$$R_H(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R'_H(\omega) \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (\text{A.61})$$

Aplicando-se, agora, a Equação A.51 juntamente com as Equações A.15, A.54 e A.56, obtém-se:

$$R_H(t) = R_H(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_H''(\omega) \frac{\cos(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (\text{A.62})$$

Desta forma, pode-se obter a resposta unitária (propriedade do material) dependente do tempo (ou transiente),  $R_H(t)$ , assim como  $R_H(\infty)$  e  $\Delta R_H(t)$ , a partir das propriedades complexas  $R_H'(\omega)$  e  $R_H''(\omega)$ , utilizando-se as Equações A.61 e A.62.

## A.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS COMPLEXAS

Com base no que foi exposto anteriormente, esta seção busca desenvolver as relações constitutivas viscoelásticas complexas para as condições de estado permanente (ou estado constante).

Considere, primeiramente, o caso em que há uma sollicitação de deformação e uma conseqüente resposta de tensão. Assim sendo, define-se:

$$S \equiv \varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (\text{A.63})$$

$$R \equiv \sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (\text{A.64})$$

$$R_H(t) \equiv E(t) \quad (\text{A.65})$$

$$R_H(\infty) \equiv E(\infty) = E_{\infty} \quad (\text{A.66})$$

$$\Delta R_H(t) \equiv E(t) - E_{\infty} \quad (\text{A.67})$$

$$R_H^* \equiv E^* \quad (\text{A.68})$$

onde,

$\varepsilon_0$ : amplitude de deformação;

$\sigma_0$ : amplitude de tensão;

$E(t)$ : módulo de relaxação; e

$E^*$ : módulo de relaxação complexo.

Portanto, a partir da Equação A.27, pode-se escrever:

$$\sigma = E^* \cdot \varepsilon \quad (\text{A.69})$$

sendo:

$$E^* = E' + iE'' \quad (\text{A.70})$$

Para o caso em que há uma tensão solicitante e uma conseqüente resposta de deformação, tem-se:

$$S \equiv \sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (\text{A.71})$$

$$R \equiv \varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (\text{A.72})$$

$$R_H(t) \equiv D(t) \quad (\text{A.73})$$

$$R_H(\infty) \equiv D(\infty) = D_\infty \quad (\text{A.74})$$

$$\Delta R_H(t) \equiv D(t) - D_\infty \quad (\text{A.75})$$

$$R_H^* \equiv D^* \quad (\text{A.76})$$

onde,

$D(t)$ : função fluência; e

$D^*$ : função fluência complexa.

Do mesmo modo, pode-se escrever:

$$\varepsilon = D^* \cdot \sigma \quad (\text{A.77})$$

sendo:

$$D^* = D' - iD'' \quad (\text{A.78})$$

Note-se que o sinal negativo na Equação A.78 é utilizado para que a parte imaginária,  $D''$ , torne-se uma função não-negativa da freqüência, conforme observações experimentais.

A partir das Equações A.69 e A.77, pode-se concluir que o módulo de relaxação complexo e a função fluência complexa são funções recíprocas, ou seja:

$$E^* = \frac{1}{D^*} \quad (\text{A.79})$$

Substituindo-se as Equações A.70 e A.78 na Equação A.79, vem:

$$E' + iE'' = \frac{1}{D' - iD''} \quad (\text{A.80})$$

Multiplicado-se e dividindo-se a equação acima pelo conjugado de  $D^*$ ,  $D' + iD''$ , tem-se:

$$E' + iE'' = \frac{1}{D' - iD''} \cdot \frac{D' + iD''}{D' + iD''} = \frac{D'}{(D')^2 + (D'')^2} + i \frac{D''}{(D')^2 + (D'')^2} \quad (\text{A.81})$$

Igualando-se, portanto, as partes real e imaginária da equação acima, segue que:

$$E' = \frac{D'}{(D')^2 + (D'')^2} \quad (\text{A.82})$$

$$E'' = \frac{D''}{(D')^2 + (D'')^2} \quad (\text{A.83})$$

Do mesmo modo, partindo de  $D^* = \frac{1}{E^*}$ , pode-se mostrar que:

$$D' = \frac{E'}{(E')^2 + (E'')^2} \quad (\text{A.84})$$

$$D'' = \frac{E''}{(E')^2 + (E'')^2} \quad (\text{A.85})$$

Considere agora o módulo de relaxação complexo e a função fluência complexa escritos nas suas respectivas formas polares:

$$E^* = |E^*| \cdot e^{i\phi} \quad (\text{A.86})$$

onde,

$$|E^*| = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} \quad (\text{A.87})$$

$$\phi = \arctan \frac{E''}{E'} \quad (\text{A.88})$$

e,

$$D^* = |D^*| \cdot e^{-i\phi} \quad (\text{A.89})$$

onde,

$$|D^*| = \sqrt{(D')^2 + (D'')^2} \quad (\text{A.90})$$

$$\phi = \arctan \frac{D''}{D'} \quad (\text{A.91})$$

Substituindo-se, portanto, as Equações A.86 e A.89 na Equação A.79, tem-se:

$$|E^*| \cdot e^{i\phi} = \frac{1}{|D^*| \cdot e^{-i\phi}} \Rightarrow \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} \cdot e^{i\phi} = \frac{1}{\sqrt{(D')^2 + (D'')^2} \cdot e^{-i\phi}} \quad (\text{A.92})$$

Porém, de A.82 e A.84, pode-se mostrar que:

$$\sqrt{(E')^2 + (E'')^2} = \frac{1}{\sqrt{(D')^2 + (D'')^2}} \quad (\text{A.93})$$

Logo, substituindo-se a Equação A.93 na Equação A.92, segue que:

$$e^{i\phi} = \frac{1}{e^{-i\phi}} \Rightarrow \phi = \phi \quad (\text{A.94})$$

A Equação A.94, acima, mostra que o ângulo de fase,  $\phi$ , é o mesmo tanto para o módulo de relaxação complexo (Equação A.86) como para a função fluência complexa (Equação A.89).

Assim sendo, das Equações A.88 e A.91, tem-se que:

$$\frac{E'}{E''} = \frac{D'}{D''} \quad (\text{A.95})$$

E, da relação recíproca A.79 e das Equações A.86 e A.89, vem:

$$|E^*| = \frac{1}{|D^*|} \quad (\text{A.96})$$

Além disso, expandindo-se a Equação A.86, tem-se que:

$$E^* = |E^*| \cdot e^{i\phi} \Rightarrow E' + iE'' = |E^*| \cdot (\cos\phi + i \cdot \text{sen}\phi) \quad (\text{A.97})$$

Logo,

$$E' = |E^*| \cdot \cos\phi \quad (\text{A.98})$$

$$E'' = |E^*| \cdot \text{sen}\phi \quad (\text{A.99})$$

Do mesmo modo, pode-se escrever:

$$D' = |D^*| \cdot \cos\phi \quad (\text{A.100})$$

$$D'' = |D^*| \cdot \text{sen}\phi \quad (\text{A.101})$$

Relembrando as Equações A.32, A.33, A.61 e A.62, e fazendo  $R_H \equiv E$ ,  $R_H(\infty) \equiv E(\infty) = E_\infty$  e  $\Delta R_H(t) \equiv E(t) - E_\infty$  naquelas equações, pode-se escrever:

$$E' = E_\infty + \omega \int_0^\infty [E(t) - E_\infty] \text{sen}(\omega t) dt \quad (\text{A.102})$$

$$E'' = \omega \int_0^\infty [E(t) - E_\infty] \cos(\omega t) dt \quad (\text{A.103})$$

$$E(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty E'(\omega) \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (\text{A.104})$$

$$E(t) = E_\infty + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty E''(\omega) \frac{\cos(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (\text{A.105})$$

Da mesma forma, fazendo  $R_H \equiv D$ ,  $R_H(\infty) \equiv D(\infty) = D_\infty$ ,  $\Delta R_H(t) \equiv D(t) - D_\infty$  e lembrando que  $D^*$  é escrito da seguinte forma:  $D^* = D' - iD''$  (note-se o sinal negativo), pode-se escrever:

$$D' = D_\infty + \omega \int_0^\infty [D(t) - D_\infty] \text{sen}(\omega t) dt \quad (\text{A.106})$$

$$D'' = -\omega \int_0^\infty [D(t) - D_\infty] \text{cos}(\omega t) dt \quad (\text{A.107})$$

$$D(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D'(\omega) \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (\text{A.108})$$

$$D(t) = D_\infty - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D''(\omega) \frac{\text{cos}(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (\text{A.109})$$

Considere agora as relações constitutivas complexas, Equações A.69 e A.77. O objetivo é expandir essas relações constitutivas nas suas partes real e imaginária. Para tanto, substituindo-se as Equações A.63 e A.86 na Equação A.69 e, da mesma maneira, substituindo-se as Equações A.71 e A.89 na Equação A.77, tem-se, respectivamente:

$$\sigma = |E^*| e^{i\phi} \cdot \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 |E^*| e^{i(\omega t + \phi)} \quad (\text{A.110})$$

$$\therefore \sigma = \varepsilon_0 \cdot |E^*| \cdot [\text{cos}(\omega t + \phi) + i \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)] \quad (\text{A.111})$$

$$\varepsilon = |D^*| e^{-i\phi} \cdot \sigma_0 e^{i\omega t} = \sigma_0 |D^*| e^{i(\omega t - \phi)} \quad (\text{A.112})$$

$$\therefore \varepsilon = \sigma_0 \cdot |D^*| \cdot [\text{cos}(\omega t - \phi) + i \cdot \text{sen}(\omega t - \phi)] \quad (\text{A.113})$$

Assim, para uma solicitação de deformação dada por  $\varepsilon = \varepsilon_0 \text{cos}(\omega t)$ , a resposta de tensão será dada pela parte real da Equação A.111, ou seja,  $\sigma = \varepsilon_0 |E^*| \text{cos}(\omega t + \phi)$ . Do mesmo modo, para uma solicitação de tensão dada por  $\sigma = \sigma_0 \text{cos}(\omega t)$ , a resposta de deformação será dada pela parte real da Equação A.113, ou seja,  $\varepsilon = \sigma_0 |D^*| \text{cos}(\omega t - \phi)$ .

Vale salientar ainda, que as respostas para as solicitações senoidais dadas por  $\varepsilon = \varepsilon_0 \text{sen}(\omega t)$  e  $\sigma = \sigma_0 \text{sen}(\omega t)$  são, respectivamente, dadas pelas partes imaginárias das Equações A.111 e A.113.

Na literatura, é possível encontrar a seguinte terminologia: “módulo de perda” (*loss modulus*) para  $E''$ , “módulo de armazenamento” (*storage modulus*) para  $E'$ ,

“função fluência de perda” (*loss compliance*) para  $D''$  e “função fluência de armazenamento” (*storage compliance*) para  $D'$ . Isto se deve ao fato de que a potência dissipada em um ciclo de carregamento harmônico é diretamente proporcional a  $E''$  e  $D''$ , conforme as equações abaixo:

$$P = \frac{\omega}{2} \varepsilon_0^2 E'' \quad (\text{A.114})$$

$$P = \frac{\omega}{2} \sigma_0^2 D'' \quad (\text{A.115})$$

## **APÊNDICE B**

### **TRANSFORMADAS DE LAPLACE**

Como comentado anteriormente, a transformada de Laplace (T.L) de uma função  $f(t)$  é definida como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (\text{B.1})$$

onde  $s$  é a variável transformada.

Como exemplo, considere uma função  $\dot{f}(t)$  definida como a primeira derivada de uma função  $f(t)$  qualquer. A T.L de  $\dot{f}(t)$  é dada por:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} dt \quad (\text{B.2})$$

Através de integração por partes, onde  $u = e^{-st}$ ,  $du = -s \cdot e^{-st} dt$  e  $dv = \frac{df}{dt} dt$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] &= e^{-st} \cdot f \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot (-s) \cdot e^{-st} dt \\ \therefore \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] &= e^{-s \cdot \infty} \cdot f(\infty) - e^{s \cdot \infty} \cdot f(-\infty) + s \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot e^{-st} dt \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Sabendo-se que  $e^{-s \cdot \infty} = 0$  e que a função  $f$  desaparece quando  $t$  tende a  $-\infty$ , e notando-se que a integral da Equação B.3 é a própria definição da T.L, obtém-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s \cdot \bar{f} \quad (\text{B.4})$$

Do mesmo modo, pode-se provar que:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n \cdot \bar{f} \quad (\text{B.5})$$

Note-se, a partir da Equação B.5, que no espaço de Laplace não existem equações diferenciais, pois a T.L transforma a equação diferencial em uma equação algébrica, e este é o motivo central pelo qual as T.L são usadas na solução de equações diferenciais.

O mesmo procedimento acima pode ser feito para inúmeras funções a fim de se determinar a T.L destas funções. A Tabela B.1 mostra a transformada de Laplace para determinadas funções comumente encontradas na análise de problemas viscoelásticos.

**Tabela B.1:** Pares de transformadas de Laplace e suas inversas para algumas funções

	$f(t)$	$\bar{f}(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$H(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^2$	$\frac{2}{s^3}$
5	$t^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$t^n \quad (\forall n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
7	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
8	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
9	$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
10	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
11	$e^{-at} \text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
12	$e^{-at} t^n \quad (\forall n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(s+a)^{n+1}}$
13	$f(t-t_0) \cdot H(t-t_0)$	$e^{-st_0} \cdot \bar{f}$
14	$\int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau$	$\bar{f} \cdot \bar{g}$
15	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n \cdot \bar{f}$

Fonte: Notas de aula do Prof. Richard A. Schapery

onde,

- $\delta(t)$ : função delta de Dirac (*Dirac delta function*);  
 $H(t)$ : função degrau unitária (*unit step function*);  
 $\Gamma(m)$ : função gama (*gamma function*);  
 $a, b, n$  e  $t_0$ : constantes.

Considere agora o caso de uma constante qualquer,  $A$ , que seja definida no intervalo  $0 \leq t < \infty$ , por exemplo:

$$A|_0^\infty = A \cdot H(t) \quad (\text{B.6})$$

De acordo com a linha 2 da Tabela B.1, tem-se:

$$\mathcal{L}[A|_0^\infty] = \mathcal{L}[A \cdot H(t)] = \frac{A}{s} \quad (\text{B.7})$$

Logo, segue que a T. L de uma constante qualquer é dada por esta constante dividida pela variável transformada “ $s$ ”:

Dadas as definições de T.L e de módulo complexo,  $E^*$ , pode-se, então, provar a existência da seguinte relação entre o módulo de relaxação complexo e a transformada de Carson do módulo de relaxação:

$$E^* = \tilde{E}(i\omega) \quad (\text{B.8})$$

Considerando-se, inicialmente, a transformada de Carson do módulo de relaxação e assumindo-se, por simplicidade, que todas as funções são definidas no intervalo  $0 \leq t < \infty$ , tem-se:

$$\tilde{E}(s) = s \cdot \bar{E} = s \int_0^\infty e^{-st} E(t) dt \quad (\text{B.9})$$

Efetuada a mudança de variável  $s \rightarrow i\omega$ , vem:

$$\tilde{E}(i\omega) = i\omega \int_0^\infty e^{-i\omega t} E(t) dt \quad (\text{B.10})$$

A partir da Equação A.26, fazendo  $R_H = E$ , tem-se:

$$E^* = E_\infty + i\omega \int_0^\infty \Delta E(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.11})$$

Relembrando que  $\Delta E(t) = E(t) - E_\infty$  (Equação A.15), obtém-se, a partir da Equação B.11, a seguinte equação:

$$E^* = E_\infty + i\omega \int_0^\infty [E(t) - E_\infty] e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.12})$$

Desenvolvendo a integral acima, vem:

$$E^* = E_\infty + i\omega \int_0^\infty E(t) \cdot e^{-i\omega t} dt - i\omega \int_0^\infty E_\infty \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.13})$$

Fazendo-se  $u = -i\omega t \Rightarrow du = -i\omega \cdot dt$ , onde  $-\infty \leq u \leq 0$ ,  $u|_0^{-\infty}$ , e resolvendo-se a segunda integral da Equação B.13, tem-se:

$$\begin{aligned} i\omega \int_0^\infty E_\infty \cdot e^{-i\omega t} dt &= i\omega \cdot E_\infty \int_0^{-\infty} e^u \frac{-du}{i\omega} = -E_\infty \int_0^{-\infty} e^u du = -E_\infty \cdot e^u \Big|_0^{-\infty} \\ \therefore i\omega \int_0^\infty E_\infty \cdot e^{-i\omega t} dt &= -\frac{E_\infty}{e^\infty} - (-E_\infty) = E_\infty \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Note-se que a segunda integral da Equação B.13 é equivalente à transformada de Carson. Desta forma, a Equação B.14 permite afirmar que a transformada de Carson de uma constante, no caso,  $E_\infty$ , é a própria constante.

Substituindo, portanto, o resultado da Equação B.14 na Equação B.13, tem-se:

$$E^* = i\omega \int_0^\infty E(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.15})$$

Finalmente, comparando-se as Equações B.15 e B.10, conclui-se que  $E^* = \tilde{E}(i\omega)$ .

## **APÊNDICE C**

# **MODELOS MECÂNICOS VISCOELÁSTICOS**

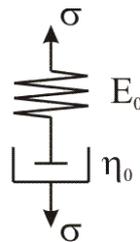
Os modelos mecânicos podem ser matematicamente representados por equações diferenciais relacionando tensões a deformações na seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^N a_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} + a_0 \sigma = \sum_{m=1}^N b_m \frac{d^m \varepsilon}{dt^m} + b_0 \varepsilon \quad (\text{C.1})$$

onde, para cada modelo, as constantes  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_0$  e  $b_m$  terão um significado físico diferente.

### C.1 MODELO DE MAXWELL

O modelo de Maxwell, mostrado na Figura C.1, se constitui da associação em série de uma mola e um amortecedor.



**Figura C.1:** Modelo de Maxwell

Por simplificação, será adotado o subscrito  $m$  para representar a mola e o subscrito  $a$  para representar o amortecedor. Na obtenção das relações tensão-deformação de cada modelo serão utilizadas três tipos de equações: *i*) equações constitutivas, *ii*) cinética (leis de conservação) e *iii*) cinemática (descrição do movimento). Para o caso do modelo de Maxwell, tem-se:

*i*) Equações constitutivas:

$$\text{mola:} \quad \sigma_m = E_0 \cdot \varepsilon_m$$

$$\text{amortecedor:} \quad \sigma_a = \eta_0 \frac{d\varepsilon_a}{dt}$$

*ii*) Cinética (leis de conservação):  $\sigma = \sigma_m = \sigma_a$

iii) Cinemática (movimento):  $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_a$

Derivando a expressão acima com relação ao tempo e substituindo as relações constitutivas, vem:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_m}{dt} + \frac{d\varepsilon_a}{dt} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_0} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta_0} \quad (\text{C.2})$$

Note que a Equação C.2 tem a mesma forma que a Equação C.1 para  $a_0 = \eta_0^{-1}$ ,  $a_1 = E_0^{-1}$ ,  $b_0 = 0$  e  $b_1 = 1$ .

Sob as condições do ensaio de creep estático,  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ , onde  $\sigma_0$  é uma constante e  $H(t)$  é a função degrau unitária.

$$H(t) \equiv \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ 1, & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Sabendo-se que a derivada de  $H(t)$  com relação ao tempo é dada pela função delta de Dirac, definida abaixo, juntamente com algumas de suas propriedades:

$$\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt} \quad (\text{C.4})$$

$$\delta(t-a) \equiv 0, \quad \text{para } t \neq a \quad (\text{C.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) dt = 1 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a) \quad (\text{C.7})$$

Das Equações C.2, C.4 e C.6, tem-se que:

$$\varepsilon = \int_0^t \left( \frac{1}{E_0} \sigma_0 \frac{dH(t)}{dt} + \frac{\sigma_0 H(t)}{\eta_0} \right) dt = \frac{\sigma_0}{E_0} \int_0^t \delta(t) dt + \frac{\sigma_0}{\eta_0} \int_0^t H(t) dt \quad (\text{C.8})$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{\eta_0} \cdot t \quad (\text{C.9})$$

Assim, pode-se obter a função fluência para o modelo de Maxwell:

$$D(t) = \frac{\varepsilon}{\sigma_0} = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_0} \quad (\text{C.10})$$

Sob as condições do ensaio de relaxação,  $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$ , onde  $\varepsilon_0$  é uma constante, a Equação C.2 produz:

$$\varepsilon_0 \delta(t) = \frac{1}{E_0} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta_0} \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_0 \varepsilon_0 \delta(t) - \frac{E_0}{\eta_0} \sigma \quad (\text{C.12})$$

$$\therefore \sigma = \int_0^t \left[ E_0 \varepsilon_0 \delta(t) - \frac{E_0}{\eta_0} \sigma \right] dt \quad (\text{C.13})$$

$$\therefore \sigma = E_0 \varepsilon_0 \int_0^t \delta(t) dt - \frac{E_0}{\eta_0} \int_0^t \sigma dt \quad (\text{C.14})$$

Fazendo  $E_0 \varepsilon_0 = \sigma_0$ , e lembrando que equações do tipo da Equação C.14, onde a variável procurada (no caso,  $\sigma$ ) aparece dentro e fora da integral, apresentam geralmente soluções do tipo exponencial (KREYSZIG, 1993; LEITHOLD, 1994), assume-se a solução genérica  $\sigma = b \cdot e^{-at} + c$ , donde:

$$b \cdot e^{-at} + c = \sigma_0 - \frac{E_0}{\eta_0} b \int_0^t e^{-at} dt - \frac{E_0}{\eta_0} \int_0^t c dt \quad (\text{C.15})$$

Fazendo  $u = -at \Rightarrow du = -a \cdot dt$ , vem:

$$\begin{aligned} b \cdot e^{-at} + c &= \sigma_0 - \frac{E_0}{\eta_0} b \int_0^{-at} \frac{e^u}{-a} du - \frac{E_0}{\eta_0} c \cdot t = \sigma_0 + \frac{E_0}{\eta_0} \cdot \frac{b}{a} \cdot e^u \Big|_0^{-at} - \frac{E_0}{\eta_0} c \cdot t = \\ &= \sigma_0 + \frac{E_0}{\eta_0} \cdot \frac{b}{a} \cdot (e^{-at} - e^0) - \frac{E_0}{\eta_0} c \cdot t \end{aligned}$$

$$\therefore b \cdot e^{-at} + c = \sigma_0 + \frac{E_0}{\eta_0} \cdot \frac{b}{a} \cdot e^{-at} - \frac{E_0}{\eta_0} \cdot \frac{b}{a} - \frac{E_0}{\eta_0} c \cdot t$$

$$\therefore b \cdot e^{-at} + c - \frac{E_0}{\eta_0} \cdot \frac{b}{a} \cdot e^{-at} - \sigma_0 + \frac{E_0}{\eta_0} \cdot \frac{b}{a} + \frac{E_0}{\eta_0} c \cdot t = 0 \quad (\text{C.16})$$

Para que a equação acima seja verdadeira, tem-se que:

$$\frac{E_0}{\eta_0} c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (\text{C.17})$$

$$b = \frac{E_0}{\eta_0} \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{E_0}{\eta_0} = \frac{1}{\rho_0} \quad (\text{C.18})$$

$$\sigma_0 = \frac{E_0}{\eta_0} \cdot \frac{\eta_0}{E_0} \cdot b + c \Rightarrow b = \sigma_0 \quad (\text{C.19})$$

onde,

$$\rho_0 = \frac{\eta_0}{E_0}: \text{ tempo de relaxação.}$$

Segue, portanto, que a resposta de tensão do modelo de Maxwell para as condições do ensaio de relaxação é dada por:

$$\sigma = \sigma_0 e^{\frac{-t}{\rho_0}} \quad (\text{C.20})$$

Donde pode-se obter o módulo de relaxação para o modelo de Maxwell:

$$E(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_0 e^{\frac{-t}{\rho_0}} \quad (\text{C.21})$$

Uma outra maneira de se resolver a Equação C.12 é através da utilização da transformada de Laplace (T.L) (APÊNDICE B). Aplicando a T.L na Equação C.12 e notando que  $E_0 \varepsilon_0 = \sigma_0$ , temos:

$$s \bar{\sigma} = E_0 \varepsilon_0 - \frac{E_0}{\eta_0} \bar{\sigma} = \sigma_0 - \frac{E_0}{\eta_0} \bar{\sigma} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{s + \frac{E_0}{\eta_0}} \quad (\text{C.22})$$

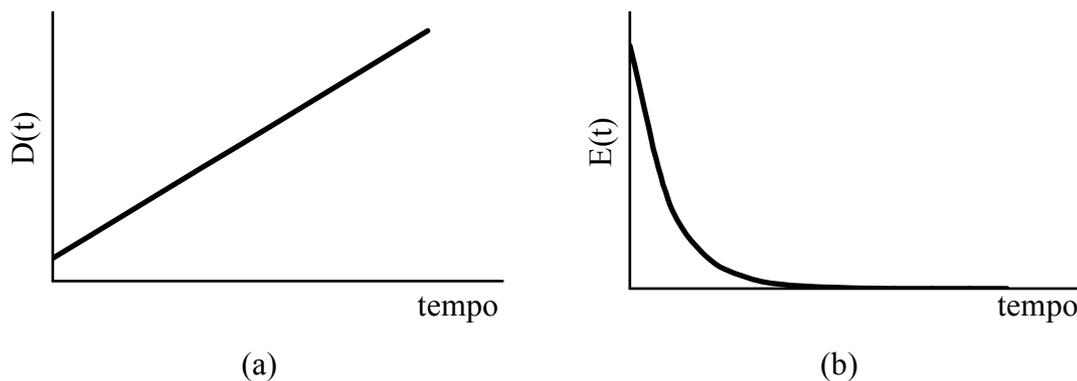
Aplicando-se, agora, o inverso da transformada de Laplace (I.T.L) à equação acima, temos que:

$$\sigma = \sigma_0 e^{\frac{-t}{\rho_0}} \quad (\text{C.23})$$

Desta forma segue, portanto, que o módulo de relaxação proposto pelo modelo de Maxwell é dado por, como mostrado anteriormente (Equação C.21):

$$E(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_0 e^{\frac{-t}{\rho_0}} \quad (\text{C.21})$$

A Figura C.2 mostra esquematicamente o comportamento da função fluência e do módulo de relaxação para o modelo de Maxwell.



**Figura C.2:** (a) Função fluência e (b) Módulo de relaxação para o modelo de Maxwell

Considere agora o modelo de Maxwell submetido a condições harmônicas quaisquer:

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (\text{C.24})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (\text{C.25})$$

Sabendo que as relações constitutivas para condições harmônicas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma = E * \varepsilon \quad (\text{C.26})$$

$$\varepsilon = D * \sigma \quad (\text{C.27})$$

onde,

$E^* = E' + i \cdot E''$ : módulo complexo (*complex modulus*); e

$D^* = D' - i \cdot D''$ : função fluência complexa (*complex compliance*).

E que,

$$E^* = \frac{1}{D^*} \quad (\text{C.28})$$

Assim, substituindo-se as Equações C.24 e C.25 na Equação C.2, tem-se:

$$i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{E_0} i\omega\sigma_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{\eta_0} \sigma_0 e^{i\omega t} \Rightarrow i\omega\varepsilon = i\omega \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_0} \quad (\text{C.29})$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} \left( 1 + \frac{1}{i\omega\rho_0} \right) \quad (\text{C.30})$$

Reescrevendo a equação acima na forma  $\varepsilon = D^* \sigma$ , vem:

$$D^* = \frac{1}{E_0} \left( 1 + \frac{1}{i\omega\rho_0} \right) \Rightarrow D^* = \frac{1}{E_0} \left( 1 - \frac{i}{\omega\rho_0} \right) \quad (\text{C.31})$$

Donde segue que as partes real e imaginária da função fluência complexa, para o modelo de Maxwell, são dadas por:

$$D' = \frac{1}{E_0} \quad (\text{C.32})$$

$$D'' = \frac{1}{\omega\rho_0 E_0} \quad (\text{C.33})$$

Da Equação C.28 pode-se, portanto, obter  $E^*$ :

$$E^* = \frac{1}{D^*} = \frac{E_0}{1 - \frac{i}{\omega\rho_0}} = \frac{E_0}{1 - \frac{i}{\omega\rho_0}} \times \frac{1 + \frac{i}{\omega\rho_0}}{1 + \frac{i}{\omega\rho_0}} = \frac{E_0}{1 + \frac{1}{\omega^2\rho_0^2}} \left( 1 + \frac{i}{\omega\rho_0} \right)$$

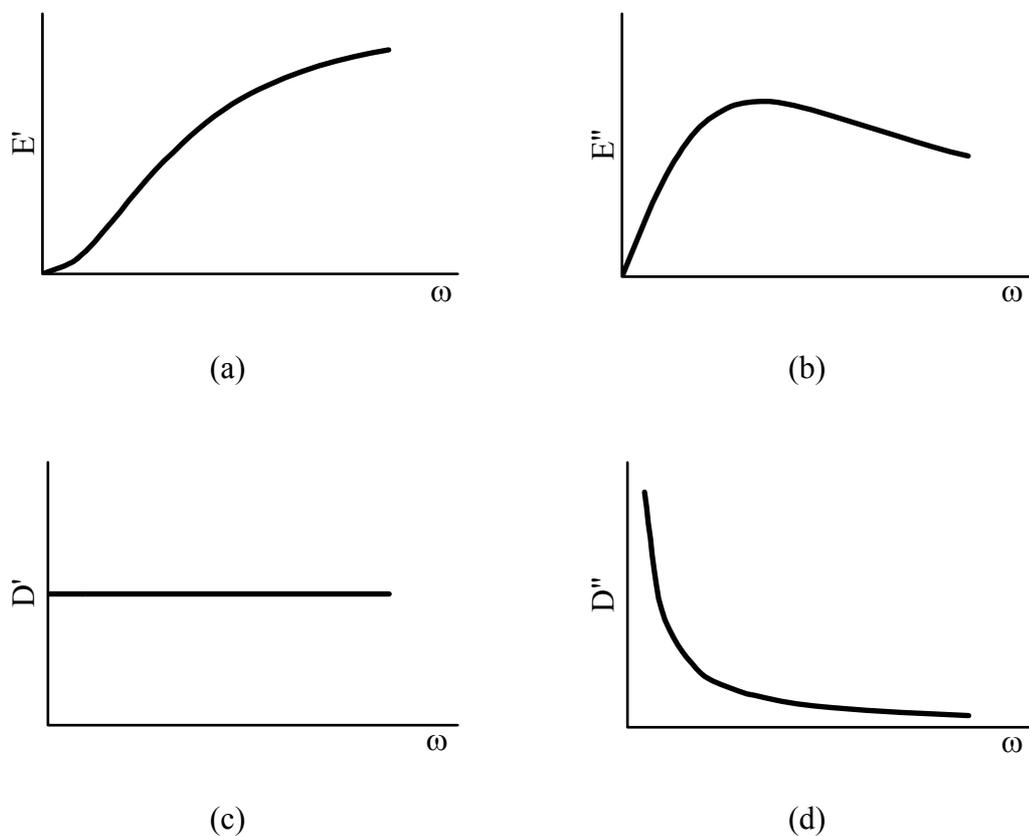
$$\therefore E^* = E_0 \frac{\omega^2\rho_0^2}{1 + \omega^2\rho_0^2} \left( 1 + \frac{i}{\omega\rho_0} \right) \quad (\text{C.34})$$

Donde segue que:

$$E' = E_0 \frac{\omega^2 \rho_0^2}{1 + \omega^2 \rho_0^2} \quad (\text{C.35})$$

$$E'' = E_0 \frac{\omega \rho_0}{1 + \omega^2 \rho_0^2} \quad (\text{C.36})$$

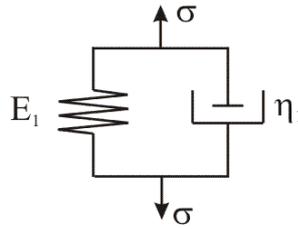
A Figura C.3 mostra a dependência das funções  $E'$ ,  $E''$ ,  $D'$  e  $D''$  com relação à frequência  $\omega$ , para o modelo de Maxwell.



**Figura C.3:** Dependência das componentes das funções  $E^*$  e  $D^*$  com relação à frequência,  $\omega$ , para o modelo de Maxwell

## C.2 MODELO DE VOIGT

O modelo de Voigt, mostrado na Figura C.4, se constitui da associação em paralelo de uma mola e um amortecedor.



**Figura C.4:** Modelo de Voigt

Considere novamente as três equações seguintes:

i) Equações constitutivas:

mola:  $\sigma_m = E_1 \cdot \varepsilon_m$

amortecedor:  $\sigma_a = \eta_1 \frac{d\varepsilon_a}{dt}$

ii) Cinética (leis de conservação):  $\sigma = \sigma_m + \sigma_a$

iii) Cinemática (movimento):  $\varepsilon = \varepsilon_m = \varepsilon_a$

Das equações acima, segue que:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_m + \eta_1 \frac{d\varepsilon_a}{dt} \quad (\text{C.37})$$

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{C.38})$$

Note que a Equação C.38 segue a forma geral da Equação C.1, para  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_0 = E_1$  e  $b_1 = \eta_1$ .

Para o ensaio de creep estático, a Equação C.38 produz:

$$\sigma_0 H(t) = E_1 \varepsilon + \eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{C.39})$$

Integrando a equação acima com relação ao tempo, vem:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta_1} \int_0^t H(t) dt - \frac{E_1}{\eta_1} \int_0^t \varepsilon dt \quad (\text{C.40})$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta_1} t - \frac{1}{\tau_1} \int_0^t \varepsilon dt \quad (\text{C.41})$$

onde,

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1} : \text{ tempo de retarda\c{c}o.}$$

Assumindo, portanto, a solu\c{c}o  $\varepsilon = b \cdot e^{-at} + c$ , temos:

$$b \cdot e^{-at} + c = \frac{\sigma_0}{\eta_1} t - \frac{1}{\tau_1} \int_0^t b \cdot e^{-at} dt - \frac{1}{\tau_1} \int_0^t c dt \quad (\text{C.42})$$

Fazendo  $u = -at \Rightarrow du = -a \cdot dt$ , vem:

$$\begin{aligned} b \cdot e^{-at} + c &= \frac{\sigma_0}{\eta_1} t - \frac{1}{\tau_1} \int_0^{-at} \frac{b}{-a} \cdot e^u du - \frac{1}{\tau_1} c \cdot t = \\ &= \frac{\sigma_0}{\eta_1} t + \frac{b}{\tau_1 \cdot a} e^u \Big|_0^{-at} - \frac{1}{\tau_1} c \cdot t \\ \therefore b \cdot e^{-at} + c &= \frac{\sigma_0}{\eta_1} t + \frac{b}{\tau_1 \cdot a} e^{-at} - \frac{b}{\tau_1 \cdot a} - \frac{1}{\tau_1} c \cdot t \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Para que a equa\c{c}o acima seja satisfeita, devemos ter as seguintes igualdades:

$$\frac{\sigma_0}{\eta_1} = \frac{c}{\tau_1} \Rightarrow c = \frac{\sigma_0}{E_1} \quad (\text{C.44})$$

$$b = \frac{b}{\tau_1 \cdot a} \Rightarrow a = \frac{1}{\tau_1} \quad (\text{C.45})$$

$$c = -\frac{b}{\tau_1 \cdot a} \Rightarrow b = -\frac{\sigma_0}{E_1} \quad (\text{C.46})$$

Donde segue que:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (\text{C.47})$$

Donde podemos obter a função fluência para o modelo de Voigt:

$$D(t) = \frac{1}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (\text{C.48})$$

Resolvendo-se agora a Equação C.39 através da T.L, tem-se:

$$\frac{\sigma_0}{s} = E_1 \bar{\varepsilon} + \eta_1 s \bar{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{s(E_1 + \eta_1 s)} \quad (\text{C.49})$$

$$\therefore \bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta_1 \cdot s \left( \frac{E_1}{\eta_1} + s \right)} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta_1 \cdot s \left( s + \frac{1}{\tau_1} \right)} \quad (\text{C.50})$$

Aplicando-se o I.T.L, segue que:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \Rightarrow D(t) = \frac{1}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (\text{C.51})$$

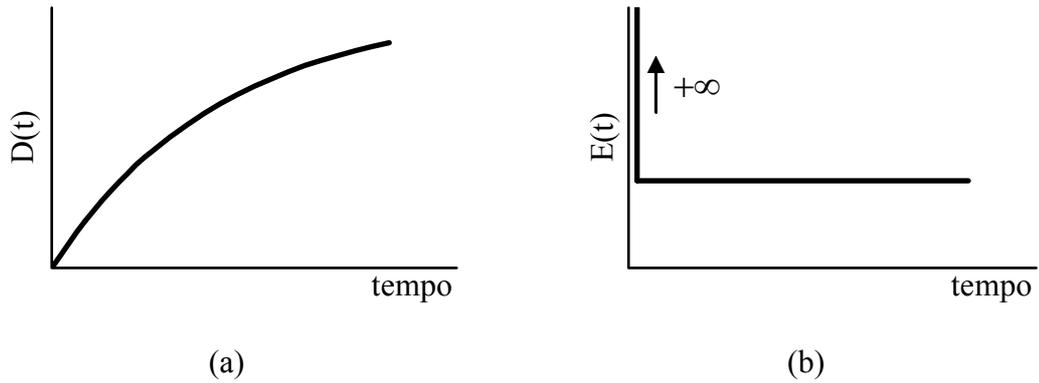
Para as condições do ensaio de relaxação ( $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$ ), tem-se, a partir da Equação C.38, que:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_0 H(t) + \eta_1 \varepsilon_0 \delta(t) \quad (\text{C.52})$$

Donde segue que módulo de relaxação para o modelo de Voigt é dado por:

$$E(t) = E_1 [H(t) + \tau_1 \delta(t)] \quad (\text{C.53})$$

É importante salientar que o termo da equação acima que multiplica a função delta de Dirac,  $\delta(t)$ , representa o comportamento instantâneo ( $t = 0$ ) da função, enquanto que o termo multiplicado pela função degrau unitária,  $H(t)$ , representa o comportamento da função no restante do domínio da mesma. A Figura C.5 apresenta a função fluência e o módulo de relaxação para o modelo de Voigt.



**Figura C.5:** (a) Função fluência e (b) Módulo de relaxação para o modelo de Voigt

Para se obter as propriedades complexas (harmônicas) do modelo de Voigt, substitui-se as Equações C.24 e C.25 na Equação C.38. Após algumas manipulações matemáticas, chega-se a seguinte expressão:

$$\sigma = E_1(1 + i\omega\tau_1)\varepsilon \quad (\text{C.54})$$

Comparando-se a Equação C.54 à Equação C.26, nota-se que:

$$E^* = E_1(1 + i\omega\tau_1) \quad (\text{C.55})$$

$$E' = E_1 \quad (\text{C.56})$$

$$E'' = E_1\omega\tau_1 \quad (\text{C.57})$$

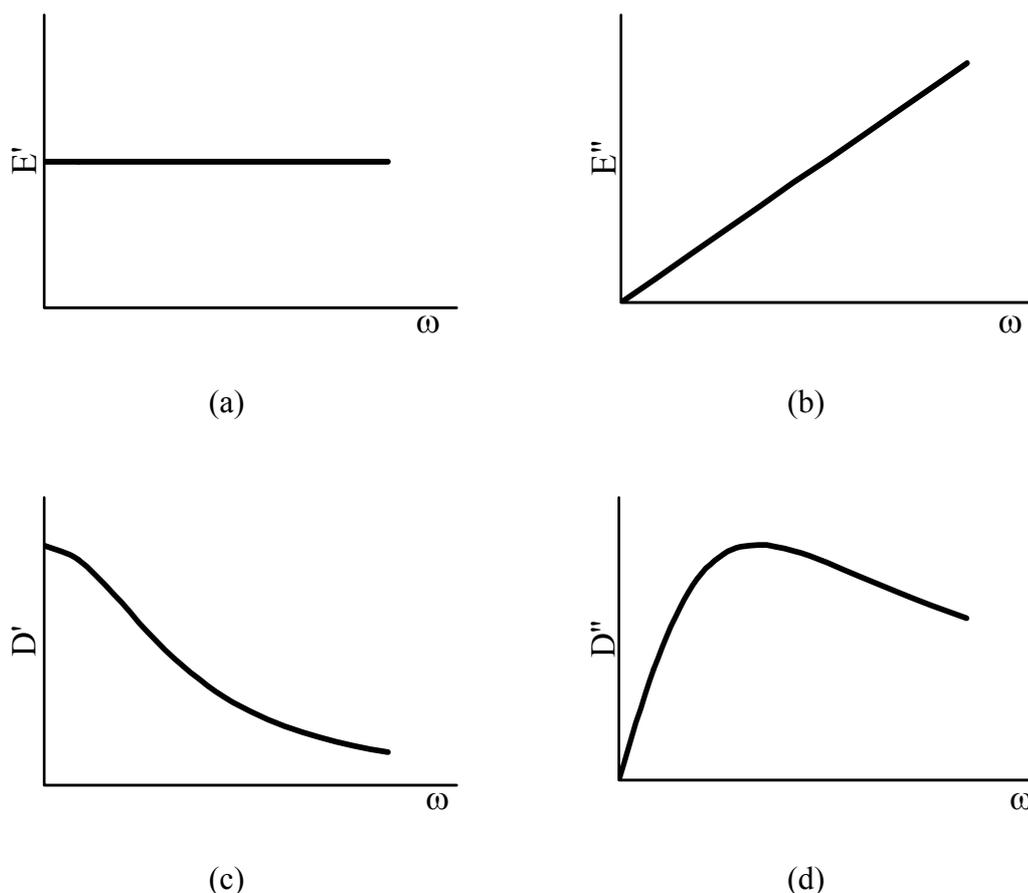
A partir da Equação C.55 e da Equação C.28, obtém-se:

$$D^* = \frac{1}{E_1(1 + i\omega\tau_1)} = \frac{1}{E_1(1 + i\omega\tau_1)} \cdot \frac{1 - i\omega\tau_1}{1 - i\omega\tau_1} \Rightarrow D^* = \frac{1 - i\omega\tau_1}{E_1(1 + \omega^2\tau_1^2)} \quad (\text{C.58})$$

$$D' = \frac{1}{E_1(1 + \omega^2\tau_1^2)} \quad (\text{C.59})$$

$$D'' = \frac{\omega\tau_1}{E_1(1 + \omega^2\tau_1^2)} \quad (\text{C.60})$$

A Figura C.6 apresenta a dependência das funções  $E'$ ,  $E''$ ,  $D'$  e  $D''$  com relação à frequência,  $\omega$ , para o modelo de Voigt.



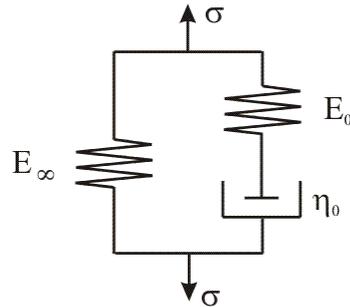
**Figura C.6:** Dependência das componentes das funções  $E^*$  e  $D^*$  com relação à frequência,  $\omega$ , para o modelo de Voigt

A partir da Figura C.2 e da Figura C.5, respectivamente, pode-se observar que o módulo de relaxação obtido do modelo de Maxwell e a função fluência obtida do modelo de Voigt são capazes de representar qualitativamente o módulo de relaxação e a função fluência, respectivamente, observados em muitos polímeros e compostos asfálticos, por exemplo. No entanto, tanto a função fluência obtida do modelo de Maxwell como o módulo de relaxação obtido do modelo de Voigt não são capazes de representar qualitativamente o comportamento observado na maioria dos materiais viscoelásticos.

Um modelo capaz de representar ambas as propriedades viscoelásticas dos materiais, quais sejam,  $E(t)$  e  $D(t)$ , é o chamado Sólido linear padrão (*Standard linear solid*), o qual será abordado na seção seguinte.

### C.3 SÓLIDO LINEAR PADRÃO

O Sólido linear padrão é um modelo capaz de representar adequadamente de forma qualitativa ambas as funções  $D(t)$  e  $E(t)$  observadas na maioria dos sólidos viscoelásticos. O Sólido linear padrão se constitui da associação em paralelo do modelo de Maxwell e uma mola, como mostra a Figura C.7.



**Figura C.7:** Sólido linear padrão

Para o modelo acima representado, temos:

*i)* Equações constitutivas:

$$\text{Maxwell: } \frac{d\varepsilon_M}{dt} = \frac{1}{E_0} \frac{d\sigma_M}{dt} + \frac{\sigma_M}{\eta_0} \quad (\text{Equação C.2})$$

$$\text{mola: } \sigma_m = E_\infty \varepsilon_m$$

onde  $\sigma_M$  é a tensão no corpo de Maxwell.

*ii)* Cinética (leis de conservação):  $\sigma = \sigma_M + \sigma_m$

*iii)* Cinemática (movimento):  $\varepsilon = \varepsilon_M = \varepsilon_m$

Derivando-se a equação da cinética com relação ao tempo, vem:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_M}{dt} + \frac{d\sigma_m}{dt} \quad (\text{C.61})$$

Substituindo as equações constitutivas na equação acima e fazendo uso da equação da cinemática, vem:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_0 \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{E_0}{\eta_0} \sigma_M + E_\infty \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{C.62})$$

Substituindo  $\sigma_M$  dado pela equação da cinética, tem-se:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_0 \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{\rho_0} \sigma + \frac{E_\infty}{\rho_0} \varepsilon + E_\infty \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{C.63})$$

$$\therefore \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \right) \sigma = \left[ (E_0 + E_\infty) \frac{d}{dt} + \frac{E_\infty}{\rho_0} \right] \varepsilon \quad (\text{C.64})$$

Para o ensaio de creep estático,  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ , a equação acima toma a seguinte forma:

$$\sigma_0 \delta(t) + \frac{\sigma_0 H(t)}{\rho_0} = E_{0+\infty} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_\infty}{\rho_0} \varepsilon \quad (\text{C.65})$$

onde  $E_{0+\infty} \equiv E_0 + E_\infty$ . Manipulando-se a equação acima, vem:

$$\varepsilon = \frac{1}{E_{0+\infty}} \int_0^t \left[ \sigma_0 \delta(t) + \frac{\sigma_0 H(t)}{\rho_0} - \frac{E_\infty}{\rho_0} \varepsilon \right] dt \quad (\text{C.66})$$

Assumindo a solução  $\varepsilon = b \cdot e^{at} + c$ , e resolvendo a integral acima, vem:

$$b \cdot e^{at} + c = \frac{\sigma_0}{E_{0+\infty}} + \frac{\sigma_0}{E_{0+\infty} \rho_0} t - \frac{E_\infty \cdot c}{E_{0+\infty} \rho_0} t - \frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} \cdot \frac{b}{a} \cdot e^{at} + \frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} \cdot \frac{b}{a} \quad (\text{C.67})$$

Para que a equação acima seja satisfeita, devemos ter:

$$\frac{\sigma_0}{E_{0+\infty} \rho_0} - \frac{E_\infty \cdot c}{E_{0+\infty} \rho_0} = 0 \Rightarrow c = \frac{\sigma_0}{E_\infty} \quad (\text{C.68})$$

$$b = \frac{-E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow a = -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} \quad (\text{C.69})$$

$$c = \frac{\sigma_0}{E_{0+\infty}} + \frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\sigma_0}{E_\infty} = \frac{\sigma_0}{E_{0+\infty}} + \frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} \cdot b \cdot \frac{-E_{0+\infty} \rho_0}{E_\infty}$$

$$\therefore b = \sigma_0 \left( \frac{1}{E_{0+\infty}} - \frac{1}{E_\infty} \right) \quad (\text{C.70})$$

Donde obtém-se:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_\infty} - \sigma_0 \left( \frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_{0+\infty}} \right) \cdot e^{\left( -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty}\rho_0} t \right)} \quad (\text{C.71})$$

$$D(t) = \frac{\varepsilon}{\sigma_0} = \frac{1}{E_\infty} - \left( \frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_{0+\infty}} \right) \cdot e^{\left( -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty}\rho_0} t \right)} \quad (\text{C.72})$$

$$\therefore D(t) = \frac{1}{E_{0+\infty}} + \left( \frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_{0+\infty}} \right) \left[ 1 - e^{\left( -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty}\rho_0} t \right)} \right] \quad (\text{C.73})$$

As transformadas de Laplace também podem ser usadas para derivar-se as funções viscoelásticas do Sólido linear padrão. Assim, no espaço de Laplace, as equações constitutivas e a lei de conservação tomam a seguinte forma:

$$s\bar{\varepsilon} = s\frac{\bar{\sigma}_M}{E_0} + \frac{\bar{\sigma}_M}{\eta_0} = \frac{\bar{\sigma}_M}{E_0} \left( s + \frac{1}{\rho_0} \right) \Rightarrow \bar{\sigma}_M = \frac{sE_0}{\left( s + \frac{1}{\rho_0} \right)} \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.74})$$

$$\bar{\sigma}_m = E_\infty \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.75})$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_M + \bar{\sigma}_m \quad (\text{C.76})$$

Substituindo as equações C.74 e C.75 em C.76, segue que:

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{sE_0}{\left( s + \frac{1}{\rho_0} \right)} + E_\infty \right] \bar{\varepsilon} \Rightarrow \left( s + \frac{1}{\rho_0} \right) \bar{\sigma} = \left[ s(E_0 + E_\infty) + \frac{E_\infty}{\rho_0} \right] \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.77})$$

Aplicando-se o I.T.L, vem:

$$\left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \right) \sigma = \left[ (E_0 + E_\infty) \frac{d}{dt} + \frac{E_\infty}{\rho_0} \right] \varepsilon \quad (\text{C.78})$$

$$\therefore \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \right) \sigma = \left[ (E_{0+\infty}) \frac{d}{dt} + \frac{E_\infty}{\rho_0} \right] \varepsilon \quad (\text{C.79})$$

onde  $E_{0+\infty} \equiv E_0 + E_\infty$ .

Note-se que a Equação C.79 é idêntica à Equação C. 64. Para o ensaio de creep estático  $\left( \bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{s} \right)$ , tem-se, a partir da Equação C.77, que:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\left( s + \frac{1}{\rho_0} \right) \sigma_0}{s \left( s E_{0+\infty} + \frac{E_\infty}{\rho_0} \right)} = \frac{\frac{\sigma_0}{E_{0+\infty}}}{\left( s + \frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} \right)} + \frac{\frac{\sigma_0}{E_{0+\infty} \rho_0}}{s \left( s + \frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} \right)} \quad (\text{C.80})$$

Operando-se o I.T.L na equação acima, vem:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_{0+\infty}} e^{\left( -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} t \right)} + \frac{\sigma_0}{E_{0+\infty} \rho_0} \cdot \frac{E_{0+\infty} \rho_0}{E_\infty} \cdot \left[ 1 - e^{\left( -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} t \right)} \right] \quad (\text{C.81})$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_\infty} - \left( \frac{\sigma_0}{E_\infty} - \frac{\sigma_0}{E_{0+\infty}} \right) \cdot e^{\left( -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} t \right)} \quad (\text{C.82})$$

Donde obtém-se:

$$D(t) = \frac{\varepsilon}{\sigma_0} = \frac{1}{E_\infty} - \left( \frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_{0+\infty}} \right) \cdot e^{\left( -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} t \right)} \quad (\text{C.83})$$

$$\therefore D(t) = \frac{1}{E_{0+\infty}} + \left( \frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_{0+\infty}} \right) \left[ 1 - e^{\left( -\frac{E_\infty}{E_{0+\infty} \rho_0} t \right)} \right] \quad (\text{C.84})$$

Note-se que a Equação C.84 é idêntica à Equação C.73.

Para o ensaio de relaxação,  $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{s}$ . Assim, tem-se que a Equação C.77 assume a seguinte forma:

$$\bar{\sigma} = \left[ E_{\infty} + \frac{E_0 s}{\left( s + \frac{1}{\rho_0} \right)} \right] \bar{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\sigma} = \left[ E_{\infty} + \frac{E_0 s}{\left( s + \frac{1}{\rho_0} \right)} \right] \frac{\varepsilon_0}{s} \quad (\text{C.85})$$

Aplicando o I.T.L na equação acima, segue que:

$$\sigma = E_{\infty} \varepsilon_0 H(t) + E_0 \varepsilon_0 \cdot e^{-\frac{t}{\rho_0}} \quad (\text{C.86})$$

$$\therefore E(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_{\infty} + E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\rho_0}} \quad (\text{C.87})$$

Para se obter as propriedades complexas (harmônicas) do Sólido linear padrão, substitui-se as Equações C.24 e C.25, repetidas abaixo, na equação diferencial do modelo (Equação C. 64).

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (\text{C.24})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (\text{C.25})$$

Após algumas manipulações matemáticas, chega-se a seguinte expressão:

$$(i\omega\rho_0 + 1)\sigma = [(E_0 + E_{\infty})i\omega\rho_0 + E_{\infty}]\varepsilon \quad (\text{C.88})$$

$$(i\omega\rho_0 + 1)\sigma = [(1 + i\omega\rho_0)E_{\infty} + i\omega\rho_0 E_0]\varepsilon \quad (\text{C.89})$$

Donde segue que:

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E_{\infty} + \frac{i\omega\rho_0 E_0}{i\omega\rho_0 + 1} \quad (\text{C.90})$$

Da Equação C.28, temos que:

$$D^* = \frac{1}{E^*} = \frac{i\omega\rho_0 + 1}{(E_0 + E_{\infty})i\omega\rho_0 + E_{\infty}} \quad (\text{C.91})$$

A partir das Equações C.90 e C.91, Pode-se mostrar que:

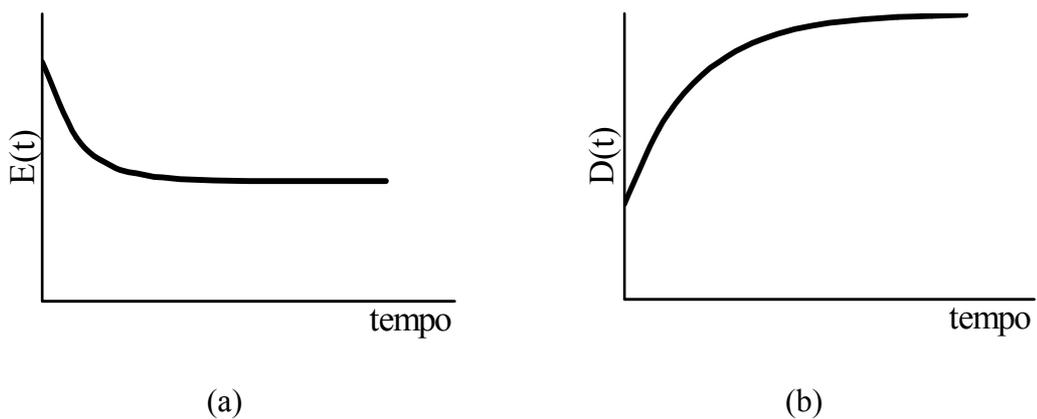
$$E' = E_{\infty} + \frac{\omega^2 \rho_0^2 E_0}{\omega^2 \rho_0^2 + 1} \quad (\text{C.92})$$

$$E'' = \frac{\omega \rho_0 E_0}{\omega^2 \rho_0^2 + 1} \quad (\text{C.93})$$

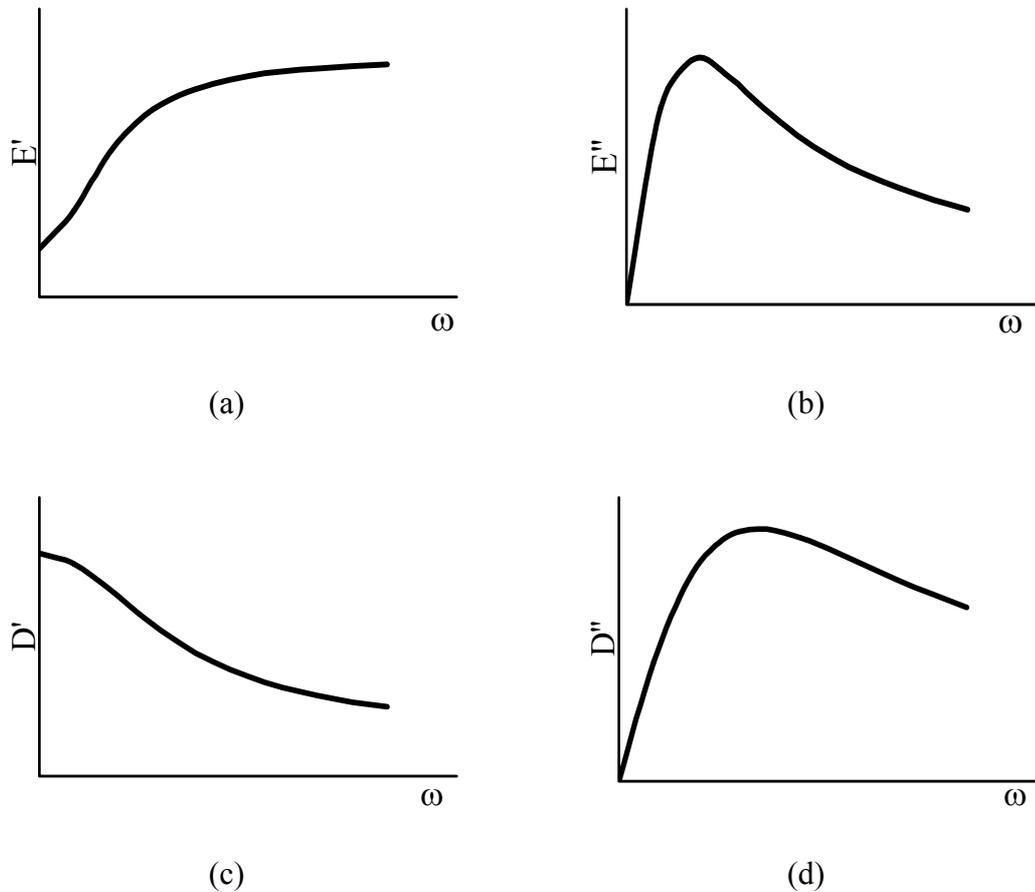
$$D' = \frac{1}{E_{0+\infty}} + \frac{\frac{1}{E_{\infty}} - \frac{1}{E_{0+\infty}}}{\omega^2 \left( \frac{E_{0+\infty}}{E_{\infty}} \rho_0 \right)^2 + 1} \quad (\text{C.94})$$

$$D'' = \frac{\omega \frac{E_{0+\infty}}{E_{\infty}} \rho_0 \left( \frac{1}{E_{\infty}} - \frac{1}{E_{0+\infty}} \right)}{\omega^2 \left( \frac{E_{0+\infty}}{E_{\infty}} \rho_0 \right)^2 + 1} \quad (\text{C.95})$$

A Figura C.8 mostra as propriedades  $E(t)$  e  $D(t)$ , enquanto a Figura C.9 apresenta as funções  $E'$ ,  $E''$ ,  $D'$  e  $D''$  para o Sólido linear padrão. A partir dessas figuras, pode-se observar que o Sólido linear padrão é capaz de representar qualitativamente as propriedades de grande parte dos materiais viscoelásticos, tanto o módulo de relaxação de relaxação, como suas respectivas funções complexas.

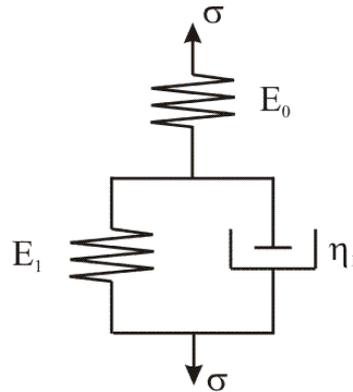


**Figura C.8:** (a) Módulo de relaxação e (b) função fluência para o Sólido linear padrão



**Figura C.9:** Propriedades viscoelásticas complexas para o Sólido linear padrão

Vale salientar que a Equação diferencial C. 64 pode ser representada por diferentes modelos mecânicos (dois ou mais modelos), além daquele mostrado na Figura C.7. Considere, portanto, um sólido viscoelástico representado por um modelo de Voigt associado em série a uma mola (Figura C.10). O objetivo é mostrar que a equação diferencial para o modelo proposto na Figura C.10 possui a mesma forma da Equação C. 64.



**Figura C.10:** Modelo de Voigt associado em série com uma mola

Para o modelo acima representado, tem-se:

i) Equações constitutivas:

$$\text{Voigt: } \sigma_V = E_1 \varepsilon_V + \eta_1 \frac{d\varepsilon_V}{dt} \quad (\text{Equação C.38})$$

$$\text{mola: } \sigma_m = E_0 \varepsilon_m$$

onde  $\sigma_V$  é a tensão no corpo de Voigt.

ii) Cinética (leis de conservação):  $\sigma = \sigma_V = \sigma_m$

iii) Cinemática (movimento):  $\varepsilon = \varepsilon_V + \varepsilon_m$

Das equações acima, usando-se as T. L, segue:

$$\bar{\sigma}_V = E_1 \bar{\varepsilon}_V + \eta_1 s \bar{\varepsilon}_V \Rightarrow \bar{\varepsilon}_V = \frac{\bar{\sigma}}{E_1 + \eta_1 s} \quad (\text{C.96})$$

$$\bar{\sigma}_m = E_0 \bar{\varepsilon}_m \Rightarrow \bar{\varepsilon}_m = \frac{\bar{\sigma}}{E_0} \quad (\text{C.97})$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_m + \bar{\varepsilon}_V \quad (\text{C.98})$$

Substituindo as Equações C.96 e C.97 na Equação C.98, tem-se:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\sigma} \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + \eta_1 s} \right) = \left[ \frac{E_1 + \eta_1 s + E_0}{E_0(E_1 + \eta_1 s)} \right] \bar{\sigma} \quad (\text{C.99})$$

$$\therefore \left[ \frac{E_1 + \eta_1 s + E_0}{\eta_1 E_0 \left( s + \frac{1}{\tau_1} \right)} \right] \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} \Rightarrow \left[ \frac{\frac{1}{\tau_1} + s + \frac{E_0}{\eta_1}}{E_0 \left( s + \frac{1}{\tau_1} \right)} \right] \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.100})$$

$$\therefore \left[ s + \frac{1}{\tau_1} \left( 1 + \frac{E_0}{E_1} \right) \right] \bar{\sigma} = \left[ E_0 \left( s + \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.101})$$

Efetuando o I.T.L na equação acima, vem:

$$\left[ \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_1} \left( 1 + \frac{E_0}{E_1} \right) \right] \sigma = \left[ E_0 \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \varepsilon \quad (\text{C.102})$$

Note-se que a Equação C.102 torna-se idêntica à Equação C. 64 quando:

$$E_0 = E_{0+\infty} \quad (\text{C.103})$$

$$\tau_1 = \frac{E_{0+\infty}}{E_\infty} \rho_0 \quad (\text{C.104})$$

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_{0+\infty}} \quad (\text{C.105})$$

Substituindo-se os valores acima nas Equações C.87 e C.73, obtêm-se as seguintes expressões, respectivamente:

$$E(t) = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} + \left( E_0 - \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \right) \cdot e^{\left( -\frac{E_0 + E_1}{E_1 \tau_1} t \right)} \quad (\text{C.106})$$

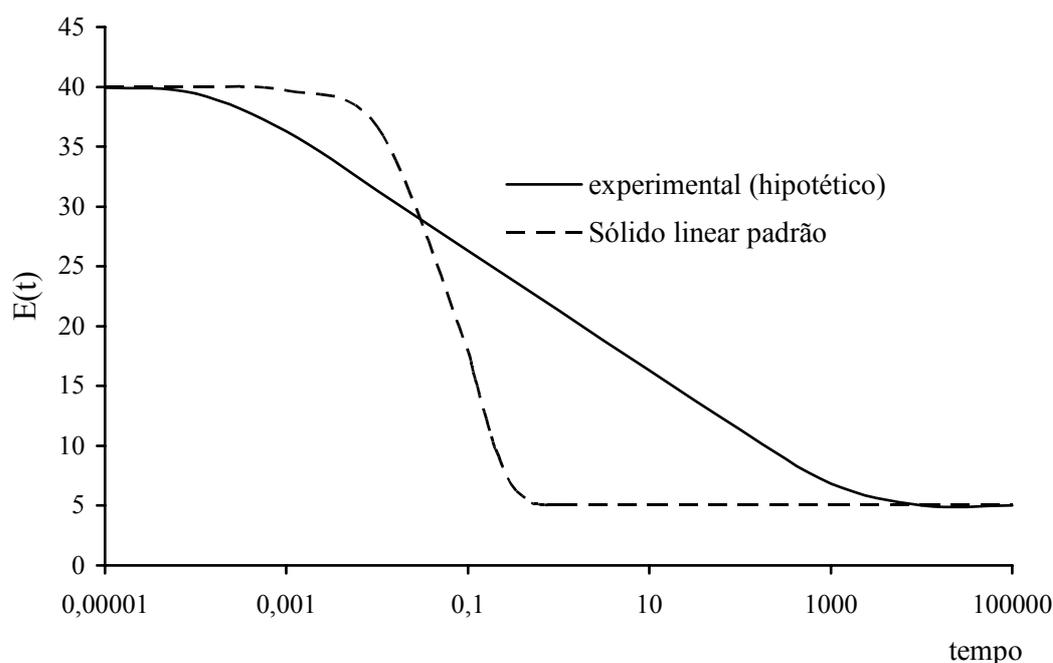
$$D(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (\text{C.107})$$

Note-se que a expressão do módulo de relaxação para o Sólido linear padrão (Figura C.7) (Equação C.87) é mais simples que a Equação C.106. Porém, a expressão para a função fluência dada pela Equação C.107 é mais simples do que aquela obtida para o modelo da Figura C.7 (Equação C.73). Desta forma, é aconselhável se utilizar

expressões do tipo da Equação C.87 e do tipo da Equação C.107 para representar o módulo de relaxação e a função fluência, respectivamente, de sólidos viscoelásticos em geral.

No entanto, as equações C.87 e C.107 apresentam um domínio de variação de poucas ordens de grandeza (na escala de tempo ou de frequência), enquanto os sólidos viscoelásticos reais geralmente apresentam um domínio de variação maior, como ilustra a Figura C.11. Note-se que o eixo do tempo da Figura C.11 está em escala logarítmica.

Desta forma, torna-se necessário que se generalize as Equações C.87 e C.107 de modo que estas possam representar adequadamente as funções  $E(t)$  e  $D(t)$ , respectivamente, comumente observadas nos sólidos viscoelásticos reais.

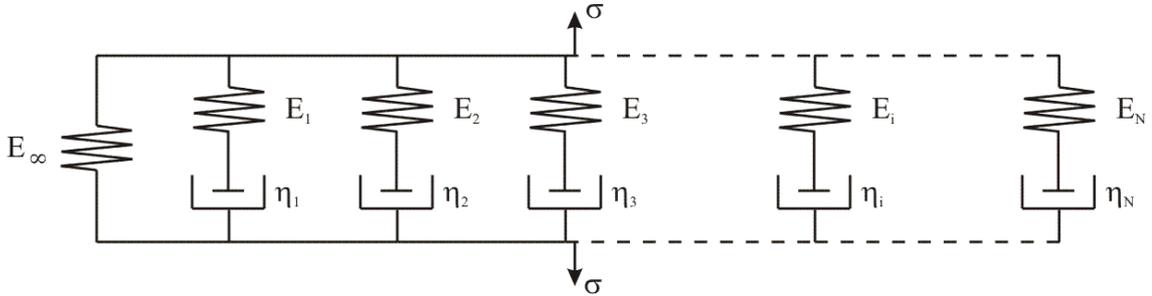


**Figura C.11:** Comparação do domínio de variação do módulo de relaxação do Sólido linear padrão e de dados experimentais hipotéticos

#### C.4 MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO

O modelo de Maxwell generalizado (modelo de Wiechert) é o modelo comumente usado para representar o módulo de relaxação de materiais viscoelásticos

reais. Este modelo se constitui de uma mola associada em paralelo com  $N$  modelos de Maxwell também associados em paralelo, como mostra a Figura C.12.



**Figura C.12:** Modelo de Maxwell generalizado (modelo de Wiechert)

Para o modelo acima representado, temos:

i) Equações constitutivas:

$$\text{Maxwell: } \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \frac{1}{E_i} \frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{\sigma_i}{\eta_i} \quad (\text{Equação C.2})$$

$$\text{mola: } \sigma_m = E_0 \varepsilon_m$$

onde,  $\sigma_i$  é a tensão no  $i$ -ésimo corpo de Maxwell

$$ii) \text{ Cinética (leis de conservação): } \sigma = \sigma_m + \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

$$iii) \text{ Cinemática (movimento): } \varepsilon = \varepsilon_m = \varepsilon_i$$

Transformando as equações constitutivas e da cinética para o espaço de Laplace, e fazendo uso da equação da cinemática, vem:

$$s\bar{\varepsilon} = \frac{s}{E_i} \bar{\sigma}_i + \frac{\bar{\sigma}_i}{\eta_i} \Rightarrow \bar{\sigma}_i = \frac{sE_i}{\left(s + \frac{1}{\rho_i}\right)} \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.108})$$

$$\bar{\sigma}_m = E_\infty \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.109})$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_m + \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}_i \quad (\text{C.110})$$

Substituindo as Equações C.108 e C.109 na Equação C.110, obtém-se:

$$\bar{\sigma} = \left[ E_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{sE_i}{\left( s + \frac{1}{\rho_i} \right)} \right] \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.111})$$

Sabendo-se que a Equação C.111 pode ser reescrita como (**vide** Seção 2.2.3):

$$\bar{\sigma} = \tilde{E} \bar{\varepsilon} \quad (\text{C.112})$$

onde  $\tilde{E}$  é a transformada de Carson do módulo de relaxação e é definido como:

$$\tilde{E} = s\bar{E} \quad (\text{C.113})$$

Assim sendo, o módulo de relaxação do modelo de Maxwell generalizado pode ser obtido a partir da Equação C.111, fazendo:

$$\tilde{E} = s\bar{E} = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{sE_i}{\left( s + \frac{1}{\rho_i} \right)} \Rightarrow \bar{E} = \frac{E_{\infty}}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{\left( s + \frac{1}{\rho_i} \right)} \quad (\text{C.114})$$

Aplicando o I.T. L na equação acima obtém-se:

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i \cdot e^{-\frac{t}{\rho_i}} \quad (\text{C.115})$$

Com relação ao módulo complexo, sabendo que (**vide** APÊNDICE B):

$$E^* = \tilde{E}(i\omega) \quad (\text{C.116})$$

tem-se:

$$E^* = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{i\omega\rho_i E_i}{i\omega\rho_i + 1} \quad (\text{C.117})$$

Donde, portanto:

$$E' = E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{\omega^2 \rho_i^2 E_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (\text{C.118})$$

$$E'' = \sum_{i=1}^N \frac{\omega \rho_i E_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (\text{C.119})$$

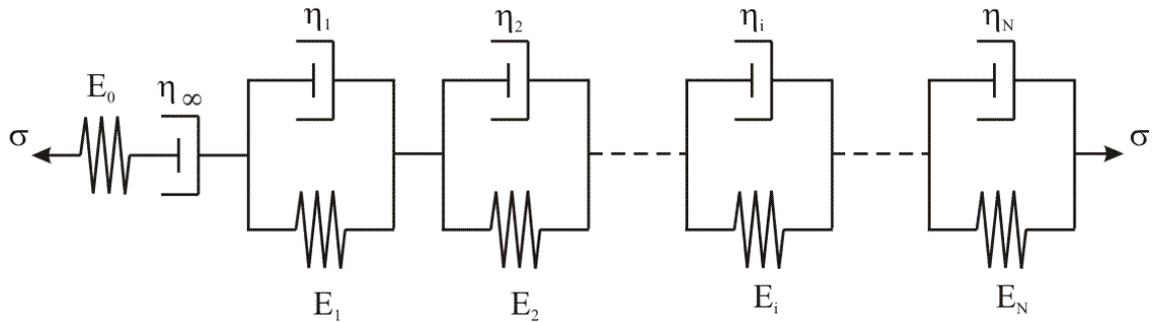
As Equações C.115, e C.117 a C.119 são as expressões comumente usadas em regressões de dados experimentais das funções módulo  $E(t)$ ,  $E^*(i\omega)$ ,  $E'(\omega)$  e  $E''(\omega)$ , respectivamente. As Equações C.115 e C.117 a C.119 são comumente conhecidas como séries de Prony (ou de Dirichlet) para as funções módulo.

Embora o Sólido linear padrão não seja capaz de representar quantitativamente grande parte dos materiais viscoelásticos reais, a representação qualitativa das Equações C.115, C.118 e C.119, as quais podem representar quantitativamente esses materiais, segue a mesma forma da Figura C.8 e da Figura C.9, respectivamente, para o Sólido linear padrão.

## C.5 MODELO DE VOIGT GENERALIZADO

Na seção anterior, foram obtidas expressões para as funções módulo  $E(t)$ ,  $E^*(i\omega)$ ,  $E'(\omega)$  e  $E''(\omega)$  do modelo de Maxwell generalizado, porém nada se comentou a respeito das funções fluência  $D(t)$ ,  $D^*(i\omega)$ ,  $D'(\omega)$  e  $D''(\omega)$ . Isto se deve à impossibilidade de se obter  $D(t)$  explicitamente em função das constantes do modelo para um número  $N$  qualquer de corpos de Maxwell.

Uma forma mais simples de se obter expressões gerais para representar as funções fluência de materiais viscoelásticos reais é através do modelo de Voigt generalizado (modelo de Kelvin). Este modelo consiste de um modelo de Maxwell associado em série com  $N$  corpos de Voigt também associados em série, como mostrado na Figura C.13. Note-se que a representação da Figura C.13 produz fluxo viscoso ilimitado associado ao amortecedor do modelo de Maxwell e, portanto, representa o comportamento de fluidos viscoelásticos. No entanto, para que o modelo seja capaz de representar o comportamento de sólidos viscoelásticos, basta fazer  $\eta_\infty \rightarrow \infty$ .



**Figura C.13:** Modelo de Voigt generalizado (modelo de Kelvin)

Para o modelo de Voigt generalizado, tem-se:

*i)* Equações constitutivas:

$$\text{Voigt:} \quad \sigma_i = E_i \varepsilon_i + \eta_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} \quad (\text{Equação C.38})$$

$$\text{mola:} \quad \sigma_m = E_0 \varepsilon_m$$

$$\text{amortecedor:} \quad \sigma_a = \eta_\infty \frac{d\varepsilon_a}{dt}$$

onde  $\sigma_i$  é a tensão no  $i$ -ésimo corpo de Voigt

$$\text{ii) Cinética (leis de conservação):} \quad \sigma = \sigma_i = \sigma_m = \sigma_a$$

$$\text{iii) Cinemática (movimento):} \quad \varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_a + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$$

Transformando as equações constitutivas e da cinemática para o espaço de Laplace, e fazendo uso da equação da cinética, vem:

$$\bar{\sigma} = E_i \bar{\varepsilon}_i + \eta_i s \bar{\varepsilon}_i \Rightarrow \bar{\varepsilon}_i = \frac{\bar{\sigma}}{\eta_i \left( s + \frac{1}{\tau_i} \right)} \quad (\text{C.120})$$

$$\bar{\sigma} = E_0 \bar{\varepsilon}_m \Rightarrow \bar{\varepsilon}_m = \frac{\bar{\sigma}}{E_0} \quad (\text{C.121})$$

$$\bar{\sigma} = \eta_\infty s \bar{\varepsilon}_a \Rightarrow \bar{\varepsilon}_a = \frac{\bar{\sigma}}{s \eta_\infty} \quad (\text{C.122})$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_m + \bar{\varepsilon}_a + \sum_{i=1}^N \bar{\varepsilon}_i \quad (\text{C.123})$$

Substituindo as Equações C.120, C.121 e C.122 na Equação C.123, obtém-se:

$$\bar{\varepsilon} = \left[ \frac{1}{E_0} + \frac{1}{s\eta_\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\eta_i \left( s + \frac{1}{\tau_i} \right)} \right] \bar{\sigma} \quad (\text{C.124})$$

A partir da Equação C.112, tem-se que:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\tilde{E}} \bar{\sigma} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \tilde{D} \bar{\sigma} \quad (\text{C.125})$$

onde  $\tilde{D}$  é a transformada de Carson da função fluência e é definida como:

$$\tilde{D} = s\bar{D} \quad (\text{C.126})$$

Assim sendo, a função fluência do modelo de Voigt generalizado pode ser obtido a partir da Equação C.124, fazendo:

$$\begin{aligned} \tilde{D} = s\bar{D} &= \frac{1}{E_0} + \frac{1}{s\eta_\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\eta_i \left( s + \frac{1}{\tau_i} \right)} \\ \therefore \bar{D} &= \frac{1}{sE_0} + \frac{1}{\eta_\infty s^2} + \sum_{i=1}^N \frac{1/\eta_i}{s \left( s + \frac{1}{\tau_i} \right)} \end{aligned} \quad (\text{C.127})$$

Aplicando o I.T.L na equação acima obtém-se:

$$D(t) = D_0 + \frac{t}{\eta_\infty} + \sum_{i=1}^N D_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (\text{C.128})$$

onde,  $D_i = \frac{1}{E_i}$

Para sólidos viscoelásticos ( $\eta_\infty \rightarrow \infty$ ), a Equação C.128 assume a seguinte forma:

$$D(t) = D_0 + \sum_{i=1}^N D_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (\text{C.129})$$

Analogamente à Equação C.116:

$$D^* = \tilde{D}(i\omega) \quad (\text{C.130})$$

$$\therefore D^* = D_0 + \frac{1}{\eta_\infty i\omega} + \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{i\omega\tau_i + 1} \quad (\text{C.131})$$

Donde, portanto:

$$D' = D_0 + \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{\omega^2 \tau_i^2 + 1} \quad (\text{C.132})$$

$$D'' = \frac{1}{\eta_\infty \omega} + \sum_{i=1}^N \frac{\omega \tau_i D_i}{\omega^2 \tau_i^2 + 1} \quad (\text{C.133})$$

As Equações C.128, e C.131 a C.133 são as expressões comumente usadas em regressões de dados experimentais das funções fluência  $D(t)$ ,  $D^*(i\omega)$ ,  $D'(\omega)$  e  $D''(\omega)$ , respectivamente. A representação qualitativa das funções  $D(t)$ ,  $D'(\omega)$  e  $D''(\omega)$  segue a mesma forma da Figura C.8 e da Figura C.9, respectivamente, para o Sólido linear padrão. As Equações C.129 e C.131 a C.133 são comumente conhecidas como séries de Prony (ou de Dirichlet) para as funções fluência.

## C.6 RELAÇÕES ENTRE OS MODELOS DE MAXWELL E DE VOIGT GENERALIZADOS

Foi mostrado anteriormente que o Sólido linear padrão (Figura C.7) é equivalente ao modelo da Figura C.10 (modelo de Voigt associado em série com uma mola), pois existem relações entre as constantes dos modelos para as quais as respectivas equações diferenciais tornam-se idênticas. Notando-se que o modelo de Maxwell generalizado e o modelo de Voigt generalizado são, respectivamente,

generalizações do Sólido linear padrão e do modelo da Figura C.10, pode-se concluir que os modelos generalizados também devem ser equivalentes, e de fato são.

Algumas relações entre os coeficientes desses modelos podem ser encontradas a partir da seguinte Equação (**vide** Equações C.112 e C.125):

$$\tilde{D} = \frac{1}{\tilde{E}} \Rightarrow D_0 + \frac{1}{\eta_\infty s} + \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{s\tau_i + 1} = \frac{1}{E_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{E_j s}{s + \frac{1}{\rho_j}}} ; \quad \forall s \quad (\text{C.134})$$

Considerando-se os sólidos viscoelásticos ( $E_\infty > 0$  e  $\eta_\infty \rightarrow \infty$ ), tem-se:

Para  $s \rightarrow 0$ :

$$D_0 + \sum_{i=1}^N D_i = \frac{1}{E_\infty} = D(t \rightarrow \infty) = D_\infty \quad (\text{C.135})$$

ou seja, o inverso do módulo para  $t \rightarrow \infty$  é igual à função fluência para  $t \rightarrow \infty$ .

Para  $s \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{D_0} = E_\infty + \sum_{j=1}^M E_j = E(t=0) = E_0 \quad (\text{C.136})$$

ou seja, o inverso do módulo para  $t=0$  é igual à função fluência para  $t=0$ .

Substituindo-se a Equação C.135 em C.129, obtém-se:

$$D(t) = D_\infty - \sum_{i=1}^N D_i \cdot e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (\text{C.137})$$

Note-se que a equação acima apresenta a forma da Equação C.115 para  $E(t)$ , e também pode ser usada em regressões da função fluência de materiais viscoelásticos reais.

Considerando-se os fluidos viscoelásticos ( $E_\infty = 0$ ), tem-se:

Para  $s \rightarrow 0$ :

$$sD_0 + \frac{1}{\eta_\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{sD_i}{s\tau_i + 1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^M \frac{E_j}{s + \frac{1}{\rho_j}}} \Rightarrow \eta_\infty = \sum_{j=1}^M \rho_j E_j = \sum_{j=1}^M \eta_j \quad (\text{C.138})$$

Para  $s \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{D_0} = \sum_{j=1}^M E_j = E(t=0) = E_0 \quad (\text{C.139})$$