



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BACHARELADO EM FÍSICA

Barbara Sales Costa

O Mecanismo de Higgs e o Setor Eletrofraco do Modelo Padrão

Fortaleza - CE
2019

Barbara Sales Costa

O Mecanismo de Higgs e o Setor Eletrofraco do Modelo Padrão

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Área de Concentração: Física de Partículas.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

Universidade Federal do Ceará - Departamento de Física

Fortaleza - CE

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C87m Costa, Barbara Sales.
O Mecanismo de Higgs e o Setor Eletrofraco do Modelo Padrão / Barbara Sales Costa. – 2019.
83 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.
1. Física de Partículas. 2. Modelo Padrão. 3. Mecanismo de Higgs. 4. Geração de Massa. I. Título.
CDD 530
-

Barbara Sales Costa

O Mecanismo de Higgs e o Setor Eletrofraco do Modelo Padrão

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 04 de dezembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Pedro Accioly Nogueira Machado
Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab)

*Dedicado à minha família e
meu amor*

*“O importante é não parar de questionar.
A curiosidade tem sua própria razão de
existir.”*

(Albert Einstein)

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter iluminado os meus caminhos e cuidado de mim, mesmo que eu não merecesse. Por ter escrito certo pelas minhas linhas tortas.

Aos meus pais, Christiani e Fernando, pelo apoio, cuidado e amor inabaláveis, e aos meus irmãos, Debora e Alexandre pelo companheirismo, carinho e parceria.

Agradeço à minha família, como um todo, por ter sido meu porto-seguro.

Ao meu avô Gerardo, em memória, por sempre ter apoiado meus estudos e me desejado todo sucesso do mundo.

Ao meu amor, Thiago, pelo carinho, apoio, paciência e companheirismo, por ter me ajudado com tudo que estivesse ao seu alcance.

À minha eterna confraria: Adriel, Júnior, Mateus, Laura e Rute, pelos bons momentos vividos juntos, as boas risadas, e pela amizade firme que construímos.

Aos meus amigos e colegas de classe Cássio, Pedro e Jessé, guerreirinhos que trilharam esse caminho comigo do começo ao fim.

Aos meus amigos e colegas de curso Igor, Germano, Brehmer e Thais, pelas boas conversas e momentos compartilhados.

Ao meu amigo Lucas Miranda, por ter me apresentado o vasto mundo universitário e me ajudado sempre que possível, além de me apoiar em todas as etapas do curso.

À minha amiga Isabel, que foi minha “irmã” de IC e com quem dividi momentos preciosos.

Ao meu orientador prof. Dr. Roberto Maluf, por ter me instruído nesse maravilhoso caminho da física de partículas e ao prof. Dr. Carlos Alberto, por ter aberto meus olhos para a TQC, área que hoje é minha paixão.

A todos os meus colegas do Lassco, em especial Adaílton, Michelângelo e Victor, pelas boas discussões e pela paciência para tirar todas as minhas dúvidas.

A todos os professores do departamento, em especial os que me lecionaram durante a graduação e participaram ativamente da minha formação como bacharel. E, em especial, ao prof. Dr. Saulo, pelas boas conversas e conselhos.

A todos os outros amigos que me ajudaram a chegar aqui. E ao CNPq, pelo financiamento.

Resumo

A Física de Partículas é a área da ciência que visa estudar, compreender e fundamentar matematicamente as propriedades físicas das partículas elementares e de suas interações. Uma das maiores realizações dos físicos do século passado foi o desenvolvimento do chamado Modelo Padrão (MP). O MP descreve as propriedades físicas das partículas elementares (férmions) e suas interações fundamentais (bósons), sendo sua base teórica construída por meio da Teoria Quântica de Campos (TQC). Um dos ápices de sucesso dessa área foi o desenvolvimento do Mecanismo de Higgs durante a década de 60, no qual foi prevista a existência do bóson de Higgs que foi posteriormente detectado no "Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire"(CERN) no Large Hadron Collider (LHC) em 2012. Dessa forma, este trabalho de monografia tem foco no estudo do Modelo Padrão da Física de Partículas, especificamente no Mecanismo de Higgs e na unificação das teorias eletromagnética e fraca formando a interação eletrofraca. Apresentaremos essa unificação através do formalismo Lagrangiano e observaremos a quebra espontânea de simetria que acontece através do Mecanismo de Higgs.

Palavras-chave: 1. Física de Partículas, 2. Modelo Padrão, 3. Mecanismo de Higgs, 4. Geração de Massa.

Abstract

Particle Physics is the area of science that aims to study, understand and mathematically ground the physical properties of elementary particles and their interactions. One of the greatest achievements of physicists of the last century was the development of the so-called Standard Model (MP). The MP describes the physical properties of elementary particles (fermions) and their fundamental interactions (bosons), and their theoretical basis is built by the Quantum Field Theory (QFT). One of the successes of this area was the development of the Higgs Mechanism during the 1960s, which predicted the existence of the Higgs boson which was later detected at the "Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire"(CERN) at the Large Hadron Collider (LHC) in 2012. Thus, this monograph work focuses on the study of the Standard Model of Particle Physics, specifically the Higgs Mechanism and the unification of weak and electromagnetic theories forming the electroweak interaction. We will present this unification through the Lagrangian formalism and observe the spontaneous symmetry breaking that occurs through the Higgs Mechanism.

Keywords: 1. Particle Physics, 2. Standard Model, 3. Higgs Mechanism, 4. Mass Generation.

Sumário

Sumário	x
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xvi
1 Introdução: A física de partículas e o modelo padrão	1
1.1 A descoberta das partículas elementares	1
1.1.1 As primeiras partículas	2
1.1.2 O grande <i>boom</i> : de 1930 a 1960	5
1.2 O desenvolvimento do modelo padrão	11
1.3 Uma visão geral sobre o modelo padrão	17
2 Campos Clássicos	19
2.1 Formalismo Lagrangiano	19
2.1.1 O princípio de Hamilton	19
2.1.2 Dedução das equações de Euler-Lagrange	20
2.1.3 Formalismo lagrangiano para campos clássicos	22
2.2 Tipos de Campos	25
2.2.1 Campo escalar	25
2.2.2 Campo Vetorial	28
2.2.3 Campo Espinorial	30
3 As simetrias	33
3.1 O teorema de Noether e as simetrias	33
3.2 O grupo de Lorentz	37
3.2.1 Os geradores do grupo de Lorentz	40

3.2.2	Representação $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ - campo espinorial - spin $\frac{1}{2}$	42
3.2.3	Representação $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ - campo espinorial - spin $\frac{1}{2}$	42
3.2.4	Representação $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ - campo vetorial - spin 1	43
3.3	Simetrias CPT - carga, paridade e tempo	44
3.3.1	Conjugação de Carga	44
3.3.2	Paridade	44
3.3.3	Reversão de Tempo	44
3.4	Simetrias Contínuas: os grupos de Lie	45
3.4.1	$U(1)$	46
3.4.2	$SU(2)$	46
4	O Setor Eletrofraco do Modelo Padrão	48
4.1	Construindo a Lagrangiana	48
4.1.1	Quiralidade e a teoria de Yang-Mills	50
4.2	O setor de Higgs e o setor eletrofraco	54
5	Conclusão	63

Lista de Figuras

1.1	À esquerda, o cientista John Dalton e à direita, uma representação de seu modelo atômico, também conhecido como modelo da “bola de bilhar” . Nesse modelo, o átomo era a partícula mais fundamental da matéria, portanto indivisível, ou seja, sem estrutura interna. Fontes: [16][20].	2
1.2	À esquerda, o físico Joseph Thomson e à direita, uma representação de seu modelo atômico, também conhecido como modelo do “pudim de passas” . Nesse modelo, o átomo era uma esfera massiva e positiva, que continha elétrons “flutuando” em seu interior. Thomson ganhou o prêmio Nobel em 1906 ‘em reconhecimento aos grandes méritos de sua investigação teórica e experimental na condução de eletricidade por gases’. Fontes: [17][21].	3
1.3	Na foto superior esquerda vemos o físico Ernest Rutherford. Na foto superior direita, o físico Niels Bohr. E na imagem inferior o modelo atômico de Rutherford-Bohr, que se assemelha ao sistema solar. A imagem ilustra a passagem de um elétron de um nível de energia mais alto para um mais baixo, emitindo um fóton com energia equivalente a $E = h\nu$. Ao centro do átomo podemos ver o núcleo, mais pesado e formado por prótons (carga positiva), enquanto que nas órbitas circulares ao seu redor estão contidos os elétrons, região essa chama de eletrosfera. Bohr ganhou o prêmio Nobel de 1922 ‘por seus serviços na investigação da estrutura dos átomos e da radiação que emana deles’. Fontes: [10][23][6].	4
1.4	O físico James Chadwick, que ganhou o prêmio Nobel de 1935 ‘pela descoberta do nêutron’. Fonte: [15]	5

- 1.5 À direita, o físico Max Planck ganhador do prêmio Nobel de 1918 ‘em reconhecimento aos serviços prestados ao avanço da física por sua descoberta do quanta de energia’. Ao centro, o físico Albert Einstein ganhador do prêmio Nobel de 1921 ‘por seus serviços para a Física Teórica, e especialmente por sua descoberta da lei do efeito fotoelétrico’. À esquerda, o físico Arthur Compton ganhador do prêmio Nobel de 1927 ‘pela descoberta do efeito que recebeu o seu nome’. Fontes: [19] [1] [4] 6
- 1.6 À esquerda, o físico Paul Dirac, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1933 ‘pela descoberta de novas formas produtivas da teoria atômica’, e à direita, o físico Carl David Anderson, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1936 ‘pela descoberta do pósitron’. Fontes: [30][31] 7
- 1.7 À esquerda, o físico Richard Feynman, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1965 ‘por seu trabalho fundamental na eletrodinâmica quântica, com profundas consequências à física de partículas elementares’, e à direita, o físico Ernst Stückelberg, ganhador da medalha Max Planck de 1976 por seus estudos na física. Fontes: [35][11] 7
- 1.8 À esquerda, o físico Hideki Yukawa, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1949 ‘por sua previsão da existência de mésons baseado em seu trabalho teórico sobre forças nucleares’, e à direita, o físico Wolfgang Pauli, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1945 ‘pela descoberta do Princípio de Exclusão, também chamado de Princípio de Pauli’. Fontes: [33][32] 8
- 1.9 Na imagem, o físico Cecil Powell, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1950 ‘por seu desenvolvimento do método fotográfico de estudar processos nucleares e por suas descobertas sobre os mésons realizadas através desse método’. Fonte: [34] 9
- 1.10 Na imagem, o físico Frederick Reines, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1995 ‘pela detecção do neutrino’. Fonte: [38] 10
- 1.11 Na imagem, o físico Murray Gell-Mann, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1969 ‘por suas contribuições e descobertas relacionados à classificação das partículas elementares e suas interações’. Fonte: [36] 11
- 1.12 Na figura superior esquerda, está representado o octeto dos bárions mais leves, na figura superior direita está a representação do octeto dos mésons e na figura inferior, a representação do décuplo dos bárions mais pesados. Fonte: [14][páginas 33 e 34] 12

- 1.13 À esquerda, o físico Sheldon Lee Glashow, ao centro o físico Abdus Salam e à direita o físico Steven Weinberg, todos ganhadores do prêmio Nobel da física de 1979 ‘por suas contribuições à teoria da interação unificada fraca e eletromagnética entre as partículas elementares, incluindo, entre outros, a previsão da corrente neutra fraca’. Fonte: [37] 15
- 1.14 À esquerda, o físico Peter W. Higgs e à direita o físico François Englert, ambos ganhadores do prêmio Nobel da física de 2013 ‘pela descoberta teórica de um mecanismo que contribui para o nosso entendimento da origem da massa das partículas subatômicas, e que recentemente foi confirmado através da descoberta, pelos experimentos ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) e CMS (Compact Muon Solenoid) do Grande Colisor de Hádrõs do CERN, da partícula fundamental prevista’. Fonte: [40] 16
- 1.15 Representação das partículas descritas pelo modelo padrão. Fonte: [7] 18
- 4.1 Aqui podemos ver ilustrações bidimensionais do potencial de Higgs para diferentes valores de $\mu_{eff}^2 = \mu^2 + \delta\mu^2$, onde $\delta\mu^2$ é o termo referente às correções térmicas (com $\lambda > 0$ sempre). Acredita-se que essa mudança do potencial aconteceu quando o universo esfriou devido à sua expansão. Fonte: [28] . . . 56
- 4.2 Gráfico do potencial de Higgs em função de $\text{Re}(\Phi)$ e $\text{Im}(\Phi)$.Fonte: [9] . . . 56

Lista de Tabelas

1.1	Tabela com todas as combinações de bárions possíveis formados a partir das regras do modelo de quarks. Fonte: [14][página 38]	13
1.2	Tabela com todas as combinações de mésons possíveis formados a partir das regras do modelo de quarks. Fonte: [14][página 38]	13
3.1	Tabela com os conjuntos de transformações que podem ser formados a partir das propriedades dadas em (3.29) e (3.31). Fonte: [22][página 160]	39
4.1	Números quânticos de isospin fraco, hipercarga e carga elétrica de léptons. Fonte: [25]	52

Lista de Símbolos

Nesse trabalho assumimos as unidades gaussianas, onde $c = \hbar = 1$.

As letras gregas são dedicadas a índices relativísticos (0,1,2,3) enquanto que as letras latinas são dedicadas a índices espaciais (1,2,3)

$\eta_{\mu\nu}$ Métrica de Minkowski = $diag(1 - 1 - 1 - 1)$

L Lagrangiana do sistema.

\mathcal{L} Densidade Lagrangiana do sistema.

S Ação do sistema.

$\partial_\mu \vec{\phi}$ $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x^\mu}$.
 J^μ Corrente de Noether.

$g_{\mu\nu}$ Métrica do modelo.

$\bar{\delta}A$ Variação total de A

δA Variação funcional de A

γ_μ Matrizes de Dirac

σ_μ Matrizes de Pauli

Capítulo 1

Introdução: A física de partículas e o modelo padrão

Dentre os inúmeros mistérios que a humanidade tenta responder desde a era dos primeiros pensadores, um dos mais pertinentes na trajetória da ciência é: o que é matéria e como ela e a natureza ao nosso redor interagem? Foi nesse contexto que iniciou-se a busca pelas partículas elementares, componentes mínimos da matéria e indivisíveis, ou seja, sem estrutura interna, e pelas interações fundamentais, às quais se reduzem todas as mais diferentes interações existentes no universo.

Hoje, enfim, sabemos que o universo que conhecemos é formado por dois tipos de partículas elementares: os férmions, que constituem a matéria e possuem spin semi-inteiro, e os bósons, que são mediadores das interações fundamentais e possuem spin inteiro, mas todo esse trabalho teve um começo muito distante, talvez já na Grécia antiga, com a primeira ideia do que seria um átomo, tendo o *boom* inicial com a descoberta da primeira partícula elementar: o elétron.

1.1 A descoberta das partículas elementares

Já na Grécia antiga os filósofos tentavam descobrir do que era feita a matéria e foi assim que Leucipo e Demócrito, individualmente, formularam a primeira ideia do que seria um átomo e, conseqüentemente, uma partícula elementar, pois para eles um átomo seria o constituinte mínimo da matéria e indivisível. Porém, como para os gregos a filosofia e a lógica do pensamento eram mais relevantes, não se foi além do campo das ideias, de forma que essa discussão permaneceu um tanto quanto esquecida durante vários séculos até que John Dalton, no seu trabalho “Teoria Atômica” em 1808, reviveu a ideia do átomo e o reafirmou

como uma esfera que seria o componente mínimo e indivisível da matéria. Na figura [1.1] podemos ver Dalton e seu modelo atômico.

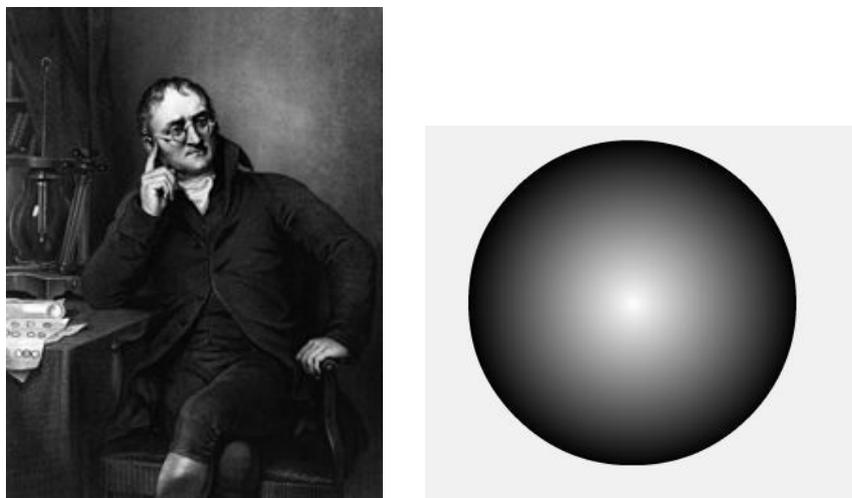


Fig. 1.1: À esquerda, o cientista John Dalton e à direita, uma representação de seu modelo atômico, também conhecido como modelo da “bola de bilhar” . Nesse modelo, o átomo era a partícula mais fundamental da matéria, portanto indivisível, ou seja, sem estrutura interna. Fontes: [16][20].

Apesar de a teoria de Dalton sobre o átomo ter sido rapidamente aceita pela comunidade científica, em breve se descobriria que ela estava incompleta. Embora os indicativos de que a carga elétrica existisse viessem desde a Grécia, como os experimentos de âmbar e lã, apenas nos experimentos com raios catódicos pode-se estudar melhor sobre suas propriedades e foi quando em 1897, Joseph John Thomson descobriu a primeira partícula subatômica da história: o elétron.

1.1.1 As primeiras partículas

Thomson utilizou o feixe de raios catódicos para realizar sua descoberta observando que o feixe defletia sob a influência de campos magnéticos, porém, diferentemente dos outros cientistas da época, ele enfim concluiu que o feixe não se tratava de ondas e sim de partículas que corretamente assumiu que fossem constituintes essenciais do átomo. Como sabia-se que os átomos eram eletricamente neutros e as novas partículas encontradas não só possuíam carga negativa, mas também eram muito leves, Thomson logo supôs que partículas pesadas e positivamente carregadas existiam e complementavam a composição dos átomos. Assim, criou a ideia do seu modelo atômico que ele mesmo intitulou como “Pudim de passas” , cuja representação pode ser vista na figura [1.2].

Pouco tempo depois, Ernest Rutherford (figura [1.3]), com seu experimento da folha de ouro, mostrou que existia um grande espaço entre a eletrosfera e o núcleo de um átomo e em 1914 Niels Bohr (figura [1.3]), baseado nos experimentos de Rutherford, propôs um novo modelo atômico (figura [1.3]) que se assemelhava a um sistema solar. Apesar de o modelo funcionar bem para o átomo de hidrogênio, ele não era estável para elementos com mais prótons e as massas previstas não correspondiam às encontradas experimentalmente. Abre-se então espaço para a existência de mais uma partícula elementar que viria a ser descoberta somente em 1932 por James Chadwick (figura [1.4]).

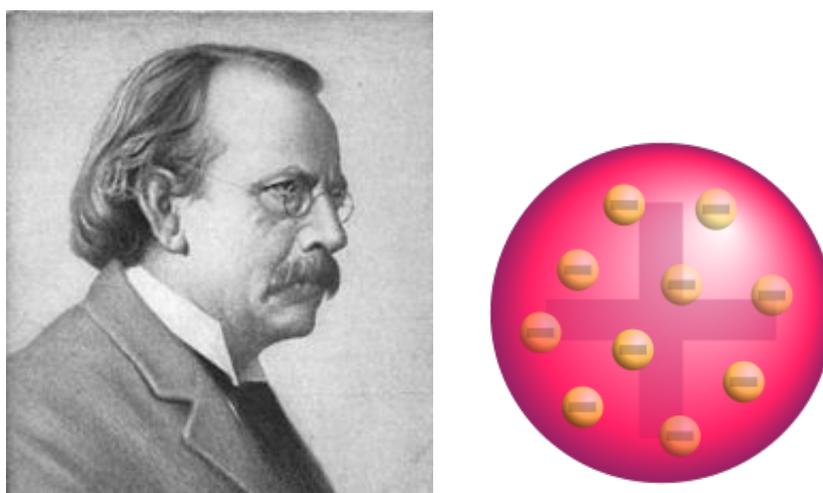


Fig. 1.2: À esquerda, o físico Joseph Thomson e à direita, uma representação de seu modelo atômico, também conhecido como modelo do “pudim de passas”. Nesse modelo, o átomo era uma esfera massiva e positiva, que continha elétrons “flutuando” em seu interior. Thomson ganhou o prêmio Nobel em 1906 ‘em reconhecimento aos grandes méritos de sua investigação teórica e experimental na condução de eletricidade por gases’. Fontes: [17][21].

Chadwick descobriu o nêutron, uma partícula neutra e com massa igual a do próton. Sua implementação no modelo atômico enfim resolvia os problemas de estabilidade e o problema das massas de átomos maiores. Os resultados experimentais agora correspondiam ao que era previsto em teoria e nunca na história, nem antes e nem depois, tivemos uma resposta tão simples para a pergunta “do que é constituída a matéria?” - elétrons, prótons e nêutrons.

Ao mesmo tempo em que grandes respostas eram encontradas acerca da matéria, a humanidade enfim começava a entender outra face do mesmo problema: as interações fundamentais. Com o desenvolvimento da Mecânica Quântica, a energia eletromagnética foi quantizada em pacotes mínimos, procedimento esse que foi feito pela primeira vez por Max Planck (figura [1.5]) em 1900, ao tentar resolver a famosa “catástrofe ultravioleta” do problema de irradiação de energia do corpo negro.

Ele acreditava que essa quantização acontecia por conta de alguma propriedade do processo de emissão de energia, mas em 1905 Albert Einstein (figura [1.5]) propôs que na realidade essa quantização era uma propriedade do próprio campo eletromagnético. Ele usou esse raciocínio para explicar o efeito fotoelétrico. A suposição de Einstein foi rapidamente aceita pela comunidade científica, embora trouxesse consigo a natureza corpuscular da radiação eletromagnética, ideia que já havia sido rejeitada anteriormente.

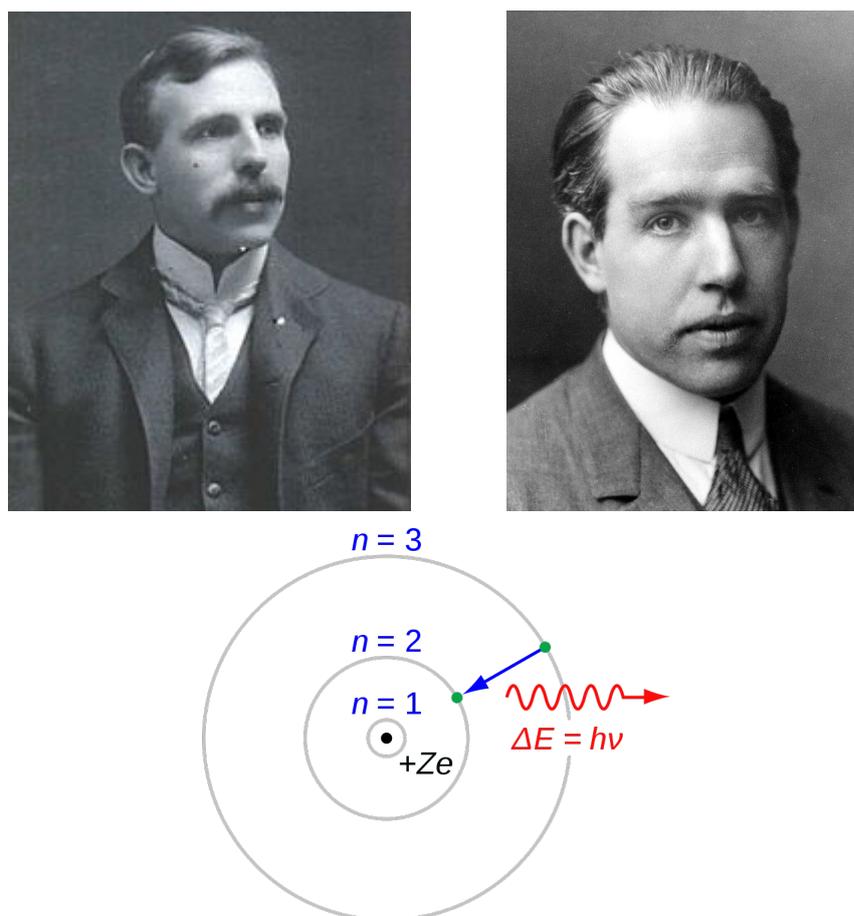


Fig. 1.3: Na foto superior esquerda vemos o físico Ernest Rutherford. Na foto superior direita, o físico Niels Bohr. E na imagem inferior o modelo atômico de Rutherford-Bohr, que se assemelha ao sistema solar. A imagem ilustra a passagem de um elétron de um nível de energia mais alto para um mais baixo, emitindo um fóton com energia equivalente a $E = h\nu$. Ao centro do átomo podemos ver o núcleo, mais pesado e formado por prótons (carga positiva), enquanto que nas órbitas circulares ao seu redor estão contidos os elétrons, região essa chama de eletrosfera. Bohr ganhou o prêmio Nobel de 1922 ‘por seus serviços na investigação da estrutura dos átomos e da radiação que emana deles’. Fontes: [10][23][6].

Ainda assim, quando em 1923 Arthur Holly Compton (figura [1.5]) realizou seus experimentos de espalhamento com a luz, percebeu-se que se a luz fosse tratada como uma partícula



Fig. 1.4: O físico James Chadwick, que ganhou o prêmio Nobel de 1935 ‘pela descoberta do nêutron’. Fonte: [15]

de massa zero e energia dada pela equação de Planck ($E = h\nu$) e fossem aplicadas as leis de conservação de energia e momento, obteria-se exatamente os resultados encontrados pelos espalhamentos de Compton. Ficava então provada a natureza corpuscular da luz, quantizada em pequenos pacotes de energia, e a esses pacotes ou, melhor dizendo, a essas partículas foi dado o nome de fóton.

Com isso, haviam sido descobertas as primeiras partículas elementares fermiônicas (elétron, próton e nêutron) e o primeiro bóson (fóton) e a física de partículas enfim dava seus primeiros passos. Problemas de instabilidade no núcleo atômico e alguns efeitos físicos inesperados instigavam os cientistas a buscarem por mais partículas elementares. A partir de 1930 podemos dizer que a física de partículas começou a andar a passos largos, tendo um grande *boom* na descoberta de novas partículas e formulações de novas teorias.

1.1.2 O grande *boom*: de 1930 a 1960

Em 1927, quando Paul Dirac (figura [1.6]) desenvolveu a equação que leva seu nome, a comunidade científica deu seus primeiros passos em direção a descoberta das antipartículas. Sua equação descrevia elétrons livres com energias relativísticas dadas por $E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4$, mas havia um problema: ela permitia soluções com energias negativas ($E = -\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$). Isso implicava em um grande problema filosófico para a época, pois as partículas tendem sempre a se manter nos estados de menor energia e isso significava que os elétrons então teriam energias infinitamente negativas, logo infinitamente grandes. Isso certamente não era o observado nos experimentos, que constatavam as energias como finitas e positivas. Que

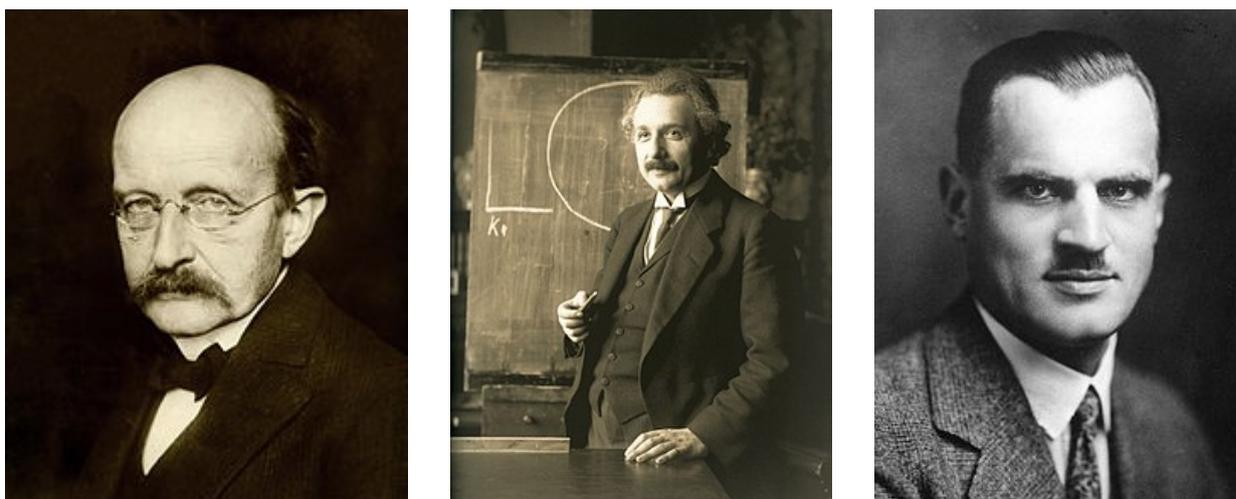


Fig. 1.5: À direita, o físico Max Planck ganhador do prêmio Nobel de 1918 ‘em reconhecimento aos serviços prestados ao avanço da física por sua descoberta do quanta de energia’. Ao centro, o físico Albert Einstein ganhador do prêmio Nobel de 1921 ‘por seus serviços para a Física Teórica, e especialmente por sua descoberta da lei do efeito fotoelétrico’. À esquerda, o físico Arthur Compton ganhador do prêmio Nobel de 1927 ‘pela descoberta do efeito que recebeu o seu nome’. Fontes: [19] [1] [4]

tipo de partículas ocupariam então esses estados de energias negativas?

Para essa pergunta Dirac elaborou uma resposta um tanto quanto poética: haveria um mar infinito de elétrons que estariam ocupando todos os estados de energias negativas. Esse mar seria perfeitamente uniforme e não exerceria qualquer força, tornando-se assim imperceptível para nós. O princípio da exclusão de Pauli era o que explicava porque então só observávamos elétrons com energias positivas, visto que os estados negativos estavam totalmente preenchidos pelo mar de elétrons.

O que aconteceria então se um elétron do mar ganhasse energia suficiente para chegar a um estado positivo? Teríamos então um buraco no mar de elétrons, que poderia ser interpretado também como uma carga positiva de energia também positiva e com massa igual a de um elétron. Nenhuma partícula observada até então possuía tais características e as ideias de Dirac foram tomadas como absurdas até que em 1931 Carl David Anderson (figura [1.6]) descobriu o pósitron, uma partícula com a mesma massa do elétron, porém com carga contrária, validando assim a equação de Dirac.

Para esses resultados, Richard Feynman e Ernst Stückelberg (figura [1.7]) desenvolveram uma explicação melhor e que a posteriori seria comprovada: na realidade os pósitrons eram as antipartículas dos elétrons e assim ocupavam os estados com energias contrárias às deles (energias negativas). Toda partícula observada teria sua antipartícula e assim o problema

das energias estava resolvido e em 1955 e 1956 os cientistas conseguiram encontrar experimentalmente o antipróton e o antinêutron. Dessa forma, o universo das antipartículas se tornava agora real.

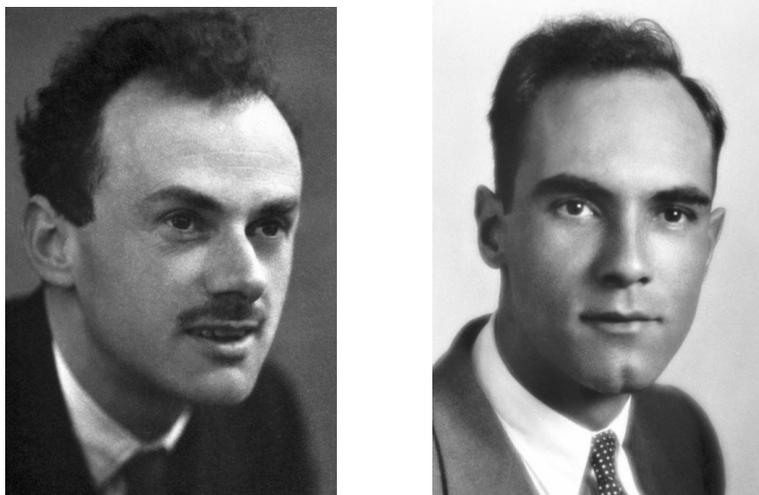


Fig. 1.6: À esquerda, o físico Paul Dirac, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1933 ‘pela descoberta de novas formas produtivas da teoria atômica’, e à direita, o físico Carl David Anderson, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1936 ‘pela descoberta do pósitron’. Fontes: [30][31]



Fig. 1.7: À esquerda, o físico Richard Feynman, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1965 ‘por seu trabalho fundamental na eletrodinâmica quântica, com profundas consequências à física de partículas elementares’, e à direita, o físico Ernst Stückelberg, ganhador da medalha Max Planck de 1976 por seus estudos na física. Fontes: [35][11]

Enquanto as antipartículas eram descobertas, outras perguntas permaneciam sem resposta: o que mantinha os prótons e os nêutrons juntos no núcleo? o que explicava a não

conservação da energia no decaimento beta? Em 1934 Hideki Yukawa (figura [1.8]) propôs a solução para o primeiro problema e em 1930 Wolfgang Pauli (figura [1.8]) sugeriu uma solução para o segundo.

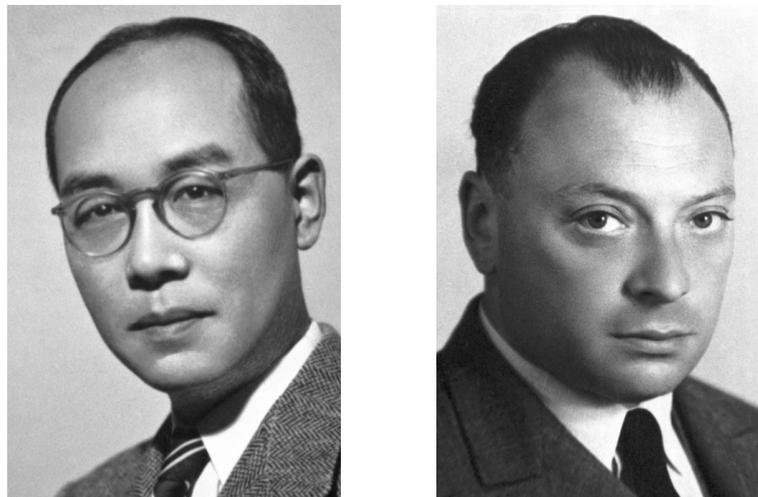


Fig. 1.8: À esquerda, o físico Hideki Yukawa, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1949 ‘por sua previsão da existência de mésons baseado em seu trabalho teórico sobre forças nucleares’, e à direita, o físico Wolfgang Pauli, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1945 ‘pela descoberta do Princípio de Exclusão, também chamado de Princípio de Pauli’. Fontes: [33][32]

Das ideias de Yukawa saiu a primeira teoria significativa da interação forte. Ele supôs que o que mantivesse os prótons e nêutrons juntos dentro do núcleo atômico fosse uma interação ainda mais forte que a repulsão eletromagnética entre os prótons, que ele nomeou de força forte. Yukawa se questionou qual seria o *quantum* desse campo, ou seja, qual seria o bóson mediador desse campo e a partir do alcance dessa interação ele calculou qual deveria ser a massa dessa partícula, que seria aproximadamente 300 vezes a massa do elétron ou um sexto da massa do próton. A essa partícula ele deu o nome de méson e Yukawa sabia que nenhuma partícula descoberta até então possuía tais propriedades, assumindo assim que sua teoria estaria errada.

Até que em 1937, em meio a estudos sobre os raios cósmicos, dois grupos separados identificaram partículas que condiziam com a teoria de Yukawa e parecia que enfim encontrava-se um candidato a bóson da interação forte, porém, conforme os estudos se aprofundaram, observou-se que não só as partículas não possuíam a massa e vida média determinadas na teoria de Yukawa como também diferentes medições não concordavam entre si. A confusão só foi esclarecida em 1947 quando Cecil Frank Powell (figura [1.9]) enfim identificou que as medições correspondiam a duas partículas diferentes, sendo uma delas o méson de Yukawa,

chamado píon (π), e a outra sendo o múon (μ), que na verdade era um lépton, assim como o elétron, e nascia assim a segunda família de léptons, hoje composta pelo múon, o neutrino do múon e suas respectivas antipartículas.



Fig. 1.9: Na imagem, o físico Cecil Powell, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1950 ‘por seu desenvolvimento do método fotográfico de estudar processos nucleares e por suas descobertas sobre os mésons realizadas através desse método’. Fonte: [34]

Enquanto isso, a comunidade científica mundial ainda buscava respostas para o decaimento beta. Pelo que se sabia na época, um átomo A decaía em um átomo B, de mesmo número de massa e com número atômico acrescido de uma unidade, emitindo um elétron no processo. Embora as cargas fossem conservadas, havia violação dos princípios de conservação de energia e momento e havia ainda outro problema: a energia com que o elétron era emitido era variante. Enquanto Bohr e alguns outros cientistas da época já começavam a considerar que o lei da conservação da energia estava errada, Pauli sugeriu que talvez houvesse alguma outra partícula sendo emitida, além do elétron, que carregava a parcela de energia e momento que estava faltando e que deveria ser eletricamente neutra, para manter a conservação de carga.

Em 1933 Fermi apresentou uma teoria que incorporava as ideias de Pauli para o decaimento beta e a partir das energias do elétrons emitidos calculou-se que a massa dessas novas partículas deveria ser extremamente pequena, quase nula. A essa nova partícula Fermi deu o nome de neutrino (nêutron pequeno, lembrando que o nêutron já havia sido descoberto em 1932) e apesar de em 1950 já existirem comprovações teóricas suficientes para a existência do neutrino, ainda não havia sido observada qualquer indício experimental, até que em 1956 Frederick Reines (figura [1.10]) conseguiu detectar experimentalmente o neutrino do elétron, comprovando assim a existência dessa partícula.

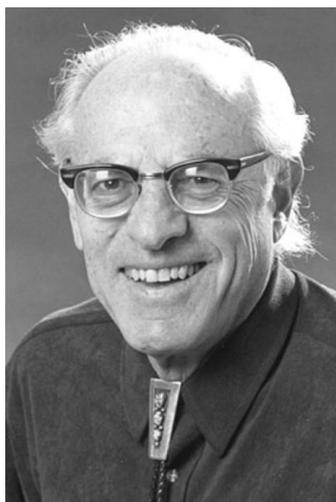


Fig. 1.10: Na imagem, o físico Frederick Reines, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1995 ‘pela detecção do neutrino’. Fonte: [38]

Além dessas, varias outras partículas foram descobertas a partir da década de 30. Mais especificamente a partir de 1947, inúmeros mésons e bárions foram descobertos, neutros e eletricamente carregados. A física de partículas passou por grandes avanços nesse período e os estudos relacionados à interação forte estavam em alta. Káons, partículas Λ e vários outros mésons e bárions foram descobertos, vários problemas foram criados e muitos continuavam sem resposta. Se outros bárions decaíam, por que o próton era estável? Quais decaimentos eram permitidos? Para tais problemas foi inventado o número bariônico, que deveria se conservar nas reações de decaimento.

Porém nenhuma relação semelhante foi encontrada para os mésons e ainda por cima, os bárions eram criados em laboratório com muita facilidade, mas decaíam muito lentamente, o que levava os cientistas a acreditarem que a interação que os criava não era a mesma que os fazia decair.

Posteriormente ficou-se sabendo que a primeira seria a interação forte, ao passo que a segunda seria a fraca, que é a mesma que atua no decaimento beta, por exemplo. Descobriu-se ainda que os bárions e alguns mésons e até mesmo o próton e o nêutron (tidos até então como elementares) possuíam estrutura interna, ou seja, eram constituídos de partículas ainda mais elementares, às quais se deu o nome de quarks. Enquanto um méson era formado apenas por um quark e um antiquark, o próton e o nêutron eram formados por 3 quarks e os outros bárions mais pesados poderiam ser formados por 3 ou mais quarks.

No início da década de 60, a física possuía um verdadeiro caos de partículas, sem haver uma teoria concreta que pudesse descrever todas elas. Da mesma forma que a química, a quase um século atrás, obtinha seu grande triunfo com a publicação em 1869 da periódica

por Mendeleev, a física agora esperava também a sua “tabela periódica”, que pudesse de alguma forma organizar as partículas semelhantes em grupos, e uma teoria consistente que pudesse descrever essas partículas e também as interações fundamentais (forte, fraca, eletromagnética e gravitacional), às quais já naquela época haviam-se reduzido todas as outras interações até então observadas. Com isso, alguns físicos durante a década de 60 desenvolveram o Modelo Padrão da física de partículas, que embora não contemplasse a interação gravitacional, descrevia com grande êxito todas as outras interações e partículas.

1.2 O desenvolvimento do modelo padrão

Conforme o número de partículas aumentava, cada vez mais tornava-se necessário um modelo que as organizasse e uma teoria que as explicasse.

O melhor modelo que reunia as partículas numa espécie de estrutura esquemática, classificando-as de acordo com suas características foi desenvolvido por Murray Gell-Mann (figura [1.11]) em 1962 (também desenvolvido simultaneamente por Yuval Ne’eman) e era chamado de *Eightfold Way*. Esse modelo organizava as partículas em diagramas, um para cada tipo de partícula conhecido até então (léptons, mésons e bárions), de tal forma que as classificava conforme sua carga e estranheza (propriedade da matéria denominada por Gell-Mann que seria conservada na interação forte), sendo um octeto para os bárions mais leves e os mésons e um décuplo para os bárions mais pesados (figura [1.12]).



Fig. 1.11: Na imagem, o físico Murray Gell-Mann, ganhador do prêmio Nobel da Física de 1969 ‘por suas contribuições e descobertas relacionados à classificação das partículas elementares e suas interações’. Fonte: [36]

O modelo de Gell-Mann obteve um grande êxito experimental, pois do décuplo para

bárion mais pesados, apenas nove das dez partículas já haviam sido detectadas. Gell-Mann, porém, não só previu que a décima partícula existia como também instruiu os experimentais sobre como produzi-la e detectá-la. Ainda por cima, ele calculou a massa e o tempo de vida-média dessa partícula de forma que em 1964, quando o Ω^- foi encontrado, tinha-se certeza absoluta que se tratava da partícula de Gell-Mann, exatamente da forma como ele havia previsto.

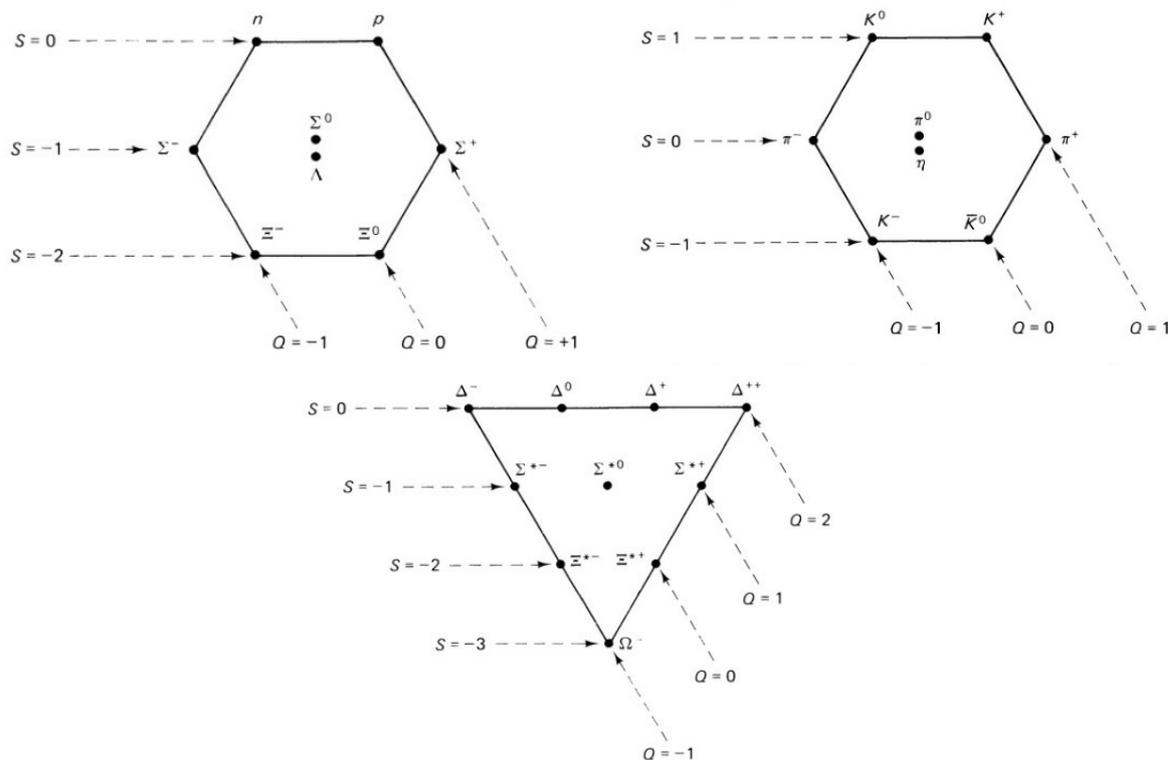


Fig. 1.12: Na figura superior esquerda, está representado o octeto dos bárions mais leves, na figura superior direita está a representação do octeto dos mésons e na figura inferior, a representação do décuplo dos bárions mais pesados. Fonte: [14][páginas 33 e 34]

Com isso, o *Eightfold Way* ganhou respaldo na comunidade científica e não haviam mais dúvidas de que ele estivesse correto. Além disso, durante os próximos 10 anos todos os novos mésons e bárions encontrados foram alocados nos diagramas de Gell-Mann, que foram adaptados para *supermultipletos* para comportar todas as novas partículas.

Apenas dois anos depois do seu primeiro modelo, Gell-Mann propôs (assim como George Zweig, independentemente) o modelo dos quarks, que dizia que os hádrons (mésons e bárions) não eram partículas elementares, mas sim compostos de constituintes ainda mais fundamentais, aos quais Gell-Mann deu o nome de quark. Os quarks poderiam ter, para aquela época, 3 sabores: up, down e strange e os antiquarks seriam as antipartículas do

quark, possuindo a mesma massa, porém carga e estranheza opostas. O modelo possuía duas imposições: os mésons seriam formados por um quark e um antiquark, enquanto que os bárions seriam formados por uma combinação de 3 quarks (assim como os antibárions seriam formados por 3 antiquarks).

Com essas duas regras de formação, poderíamos escrever todos os mésons e bárions possíveis de ser formados e classificá-los de acordo com sua carga e estranheza, conforme apresentado nas tabelas {1.1} e {1.2}.

O DÉCUPLO DE BÁRIONS

qqq	Q	S	Barion
uuu	2	0	Δ^{++}
uud	1	0	Δ^+
udd	0	0	Δ^0
ddd	-1	0	Δ^-
uus	1	-1	Σ^{*+}
uds	0	-1	Σ^{*0}
dds	-1	-1	Σ^{*-}
uss	0	-2	Θ^{*0}
dss	-1	-2	Θ^{*-}
sss	-1	-3	Ω^-

Tab. 1.1: Tabela com todas as combinações de bárions possíveis formados a partir das regras do modelo de quarks. Fonte: [14][página 38]

O NONETO DE MÉSONS

$q\bar{q}$	Q	S	Méson
$u\bar{u}$	0	0	π^0
$u\bar{d}$	1	0	π^+
$d\bar{u}$	-1	0	π^-
$d\bar{d}$	0	0	η
$u\bar{s}$	1	1	K^+
$d\bar{s}$	0	1	K^0
$s\bar{u}$	-1	-1	K^-
$s\bar{d}$	0	-1	\bar{K}^0
$s\bar{s}$	0	0	η'

Tab. 1.2: Tabela com todas as combinações de mésons possíveis formados a partir das regras do modelo de quarks. Fonte: [14][página 38]

Como pode-se observar todos as dez partículas do décuplo de bárions são previstas também no modelo de quarks, confirmando assim o que já havia sido afirmado pelo *Eightfold Way*. Para os mésons pode-se ver que há nove partículas previstas, formadas por um quark e um antiquark, mas apenas oito mésons eram conhecidos, conforme apresentado no óctuplo de Gell-Mann, o que foi corrigido pelo modelos dos quarks, visto que de fato os cientistas já haviam descoberto uma partícula exatamente com as características dadas pelo modelo dos quarks, porém havia sido classificada como um singleto. Dessa forma, o modelo dos quarks alcançava seu êxito, sendo coerente com o *Eightfold Way* que já era tido como correto pela comunidade científica e já possuía até comprovações experimentais.

Até então, porém, o modelo de quarks ainda enfrentava uma objeção: para a formação do bárion Δ^{++} (uuu), seria necessário que três quarks u ocupassem exatamente o mesmo estado, o que ia contra o princípio de exclusão de Pauli. Eis que em 1964 Oscar Greenberg dá uma explicação para esse problema, cada quark teria uma nova carga: a cor. Os quarks poderiam ter 3 cores, azul, vermelho e verde, e os antiquarks teriam as respectivas anticolors. Sendo assim, o princípio da exclusão de Pauli não seria quebrado, pois cada quark do bárion Δ^{++} teria uma cor diferente, logo estariam em estados diferentes. Com isso, uma nova regra foi criada: todas as partículas naturalmente observadas são incolores, ou seja ou possuíam a mesma quantidades de cargas vermelhas, azuis e verdes, ou a mesma quantidade de cor e anticor correspondentes, por exemplo, vermelho e antivermelho.

Aproximadamente dez anos depois, em 1974 um novo quark foi detectado, o quark c (charm), abrindo novas possibilidades de formação de mésons e bárions. Em 1975 foi detectado um novo lépton, o tau, que pressupostamente possuía também seu neutrino (observado apenas em 2000), assim como o elétron e o muon. Com essa descoberta, esperava-se que mais dois quarks fossem detectados para preservar a simetria entre léptons e quarks, assim, apenas dois anos depois, em 1977, foi detectado mais um novo quarks, o b (bottom) e apenas em 1995 o quark t (top) foi detectado, apesar de já ter sido previsto muito anteriormente.

Apesar disso, ainda haviam problemas na interação fraca. Não se tinha encontrado até então sua partícula mediadora e apesar de os cientistas preverem corretamente que deveria ser uma partícula bosônica vetorial, ainda encontrava-se grandes dificuldades para prever a massa dessa partícula. Esses problemas só foram resolvidos durante a década de 60, quando Sheldon Lee Glashow, Abdus Salam, Steven Weinberg (figura [1.13]) desenvolveram uma teoria para a interação fraca, na qual previa-se que essa interação possuía não um, mas três bósons mediadores, um neutro (Z) e dois carregados eletricamente (W^{\pm}) cujas massas foram previstas com exatidão e durante o ano de 1983, quando foram encontrados os três bósons da força fraca, foram medidas e confirmadas como sendo coerentes com o resultado previsto

na teoria de Glashow, Salam e Weinberg. Além disso, esses três cientistas também foram responsáveis (ainda durante a década de 60) pela unificação das interações eletromagnética e fraca.

Dessa forma, a teoria da unificação eletrofraca não só previu com exatidão a massa dos bósons mediadores da interação fraca, como também unificou essa interação com a eletromagnética em um só formalismo matemático, com grandes impactos físicos, pois assim poderia-se dizer que em um domínio de alta energia essas duas interações se comportaria de forma análoga e até seriam oriundas de uma interação ainda mais fundamental.



Fig. 1.13: À esquerda, o físico Sheldon Lee Glashow, ao centro o físico Abdus Salam e à direita o físico Steven Weinberg, todos ganhadores do prêmio Nobel da física de 1979 ‘por suas contribuições à teoria da interação unificada fraca e eletromagnética entre as partículas elementares, incluindo, entre outros, a previsão da corrente neutra fraca’. Fonte: [37]

Mas algumas peças ainda estavam faltando no quebra-cabeça da física de partículas. Como poderiam bósons massivos (interação fraca) serem unificados com um bóson sem massa (fóton, da interação eletromagnética) no domínio de alta energia? Que espécie de mecanismo explicaria a geração de massa dos bósons da força fraca? E, mais profundamente, que tipo de mecanismo explicaria a geração de massa de todas as outras partículas constituintes da matéria e mediadoras das interações? Foi nesse contexto que em 1964 Peter Higgs (figura [1.14]), simultaneamente com François Englert (figura [1.14]), individualmente publicaram trabalhos com uma teoria que explicava o mecanismo de geração de massa das partículas, também chamado de mecanismo de Higgs-Englert¹, ou simplesmente mecanismo de Higgs.

Nesse mecanismo, um campo escalar bosônico é o responsável por interagir com as partículas e lhes conceder massa. Esse campo teria um alcance infinito e permearia todo o

¹Vale ressaltar que na realidade vários cientistas participaram do desenvolvimento desse mecanismo, mas aqui citamos apenas os laureados pelo Nobel de 2013.

universo. Essa teoria permaneceu descreditada por quase 50 anos quando enfim no ano de 2012, em um experimento realizado no CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire), foi detectado o bóson de Higgs. Foi então que a teoria de Higgs-Englert-Brout alcançou seu triunfo experimental e, mais do que confirmar essa teoria, a detecção do bóson de Higgs confirmava também a teoria da unificação eletrofraca. Esse pode ser considerado um dos maiores triunfos da física de partículas.



Fig. 1.14: À esquerda, o físico Peter W. Higgs e à direita o físico François Englert, ambos ganhadores do prêmio Nobel da física de 2013 ‘pela descoberta teórica de um mecanismo que contribui para o nosso entendimento da origem da massa das partículas subatômicas, e que recentemente foi confirmado através da descoberta, pelos experimentos ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) e CMS (Compact Muon Solenoid) do Grande Colisor de Hádrons do CERN, da partícula fundamental prevista’. Fonte: [40]

O conjunto de todas essas teorias é o que chamamos de modelo padrão da física de partículas (MP). Elas descrevem as interações entre as partículas, a geração de massa delas e a formação de partículas compostas (os chamados hádrons). O MP é, atualmente, a melhor teoria para descrever as partículas e interações fundamentais e uma das teorias da física com maior confirmação experimental.

1.3 Uma visão geral sobre o modelo padrão

Assim, sabemos que todas as forças ao nosso redor se resumem em quatro interações fundamentais: eletromagnética, fraca, forte e gravitacional. Dessas, apenas a gravitacional não é descrita pelo modelo padrão. As forças fraca e forte atuam num domínio nuclear e a força eletromagnética é a mais comum no nosso mundo macroscópico. Cada interação fundamental possui sua(s) partícula(s) mediadora(s), os chamados bósons e toda a matéria do nosso universo é formada pelos férmions, que podem ser divididos em léptons e quarks. Sabe-se que enquanto os léptons são encontrados livres naturalmente, os quarks sempre aparecem confinados em partículas compostas, conhecidas como hádrons, que podem ser divididas entre mésons e bárions.

O MP então possui 61 partículas conhecidas até então, sendo 48 férmions, divididos em doze léptons e 36 quarks (seus respectivos antiléptons e antiquarks), doze bósons mediadores, um para a interação eletromagnética (fóton), três para a fraca (Z^0 e W^\pm e oito para a forte (glúons), que só foram detectados pela primeira vez no fim da década de 70, além do bóson de Higgs (figura [1.15]). Essa contagem considera carga, cor e sabor. É possível haver outras contagens com mais ou menos partículas que considerem características diferentes.

O formalismo matemático do MP é todo construído dentro da área da física da teoria quântica de campos e é fundamentado no formalismo lagrangiano para campos e na teoria de grupos de calibre. Assim, cada interação possui um grupo de simetria correspondente, sendo o $U(1)$ para o eletromagnetismo, $SU(2)$ para a interação fraca e $SU(3)$ para a forte.

Dessa forma, nesse trabalho daremos foco ao setor eletrofraco do MP com o objetivo de aplicar o mecanismo de Higgs na interação eletrofraca e observar a geração das massas (ou não!) das partículas desse setor. Após essa introdução histórica realizada nesse capítulo, abordaremos o formalismo lagrangiano adaptado para campos no capítulo 2, além de apresentar algumas equações de movimento famosas para a física de partículas e que serão necessárias posteriormente. No terceiro capítulo faremos uma breve revisão de teoria de grupos e simetrias, com foco nos grupos de gauge, em específico no $U(1)$ e no $SU(2)$ e nas simetrias de paridade e quiralidade, que são os conteúdos necessários para o desenvolvimento do setor eletrofraco do MP. No quarto capítulo, construiremos a Lagrangiana do setor em estudo do MP, analisando-se suas simetrias de forma que e enfim, concluiremos (no capítulo 5) quebrando a simetria $SU(2)$ dessa Lagrangiana através do mecanismo de Higgs e observaremos como se dá a geração de massa das partículas do setor eletrofraco.

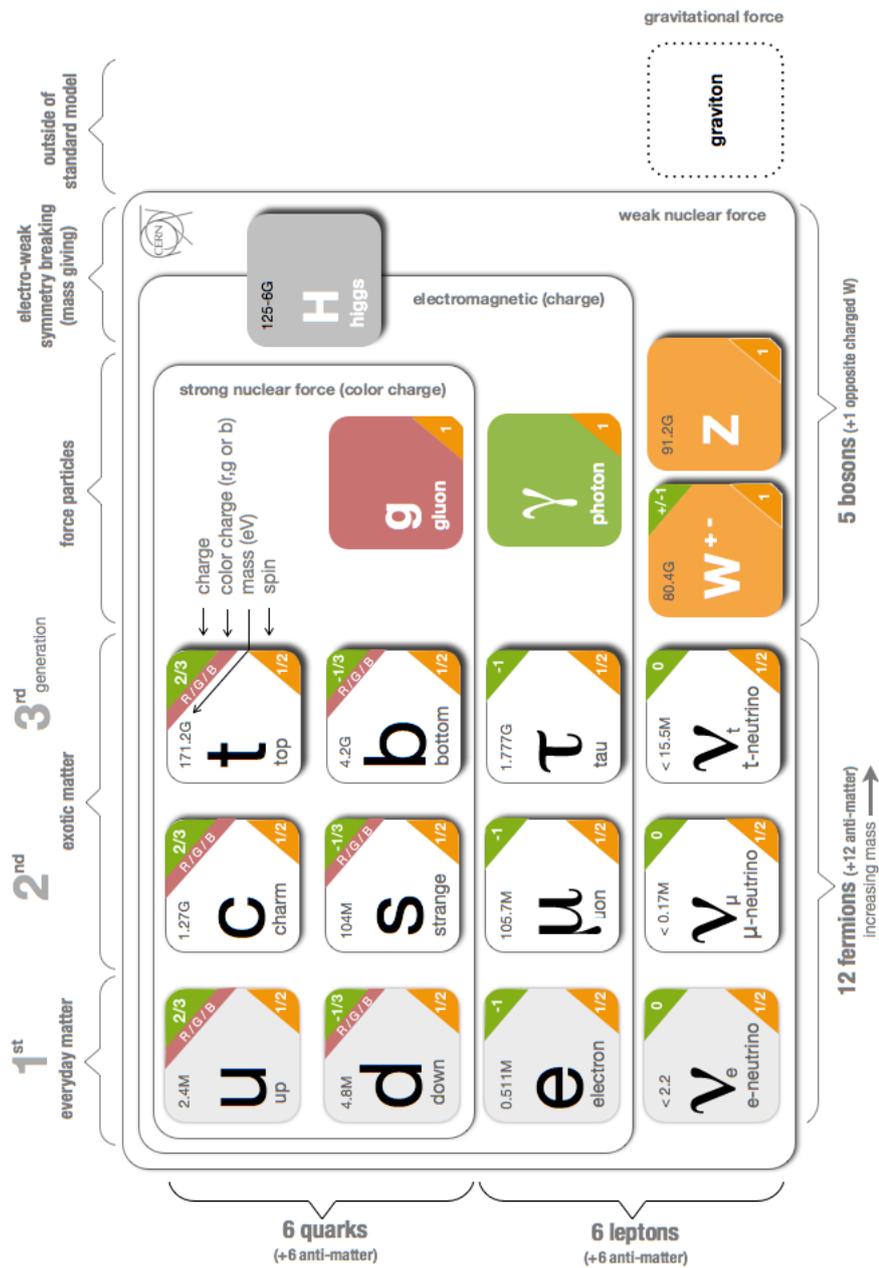


Fig. 1.15: Representação das partículas descritas pelo modelo padrão. Fonte: [7]

Capítulo 2

Campos Clássicos

2.1 Formalismo Lagrangiano

O formalismo Lagrangiano é uma das linguagens matemáticas usadas para descrever a dinâmica do sistema a partir do princípio de mínima ação, também conhecido como princípio de Hamilton. Diferentemente da mecânica de Newton, que faz uso de grandezas vetoriais, a mecânica Lagrangiana faz uso de grandezas escalares. A Lagrangiana, funcional principal desse formalismo, pode ser definida como

$$L = T - V, \tag{2.1}$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema, logo a Lagrangiana possui unidade de medida de energia, podendo ser observado seu caráter escalar.

Esse formalismo é muito utilizado em Teoria Quântica de Campos, pois ele pode ser facilmente adaptado do domínio clássico para o relativístico de campos. Além disso, esse *framework* revela as quantidades conservadas e, conseqüentemente, as simetrias do sistema, como veremos a seguir.

2.1.1 O princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton, assim como toda a teoria que vamos desenvolver nesse trabalho, tem como fundamento principal a ação. A ação é um funcional integral que depende apenas das coordenadas do sistema ($q_i(t)$ ou $\phi_i(\vec{x}, t)$) e tem um caráter global, visto que carrega toda a informação acerca da dinâmica do sistema. Matematicamente, podemos definir a ação

como

$$S[\phi] = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) d^4x, \quad (2.2)$$

onde L é a grandeza chamada de Lagrangiana e \mathcal{L} é a chamada densidade Lagrangiana³. Nosso trabalho terá foco maior na densidade Lagrangiana, contudo, o verdadeiro significado físico está na ação e toda invariância e simetria do sistema deve deixar a ação invariante. Muitas das vezes, porém, tal simetria é estendida a densidade Lagrangiana.

Podemos então postular o princípio da mínima ação de Hamilton: seja a ação do sistema dada por (2.2), o caminho real que o sistema percorre entre um tempo t_1 e t_2 é tal que a ação seja estacionária ao longo desse caminho. Ou seja, tomando-se uma variação infinitesimal da Ação:

$$S \rightarrow S' = S + \delta S. \quad (2.3)$$

Para que ela seja estacionária, temos que $\delta S = 0$. Na natureza observamos que de fato esse ponto representa um mínimo, ou seja, a natureza se comporta de tal forma que a ação de um sistema seja mínima. Esse é o princípio da mínima ação de Hamilton, que será usado nas seções seguintes para a demonstração das equações de Euler-Lagrange.

2.1.2 Dedução das equações de Euler-Lagrange

Na física, a ação é uma grandeza com unidade de medida de energia vezes tempo e que é dada pela equação abaixo:

$$S[q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)] = \int L dt = \int \mathcal{L} d^n x dt, \quad (2.4)$$

onde L é um escalar de Lorentz e uma grandeza escalar denominada de Lagrangiana, \mathcal{L} seria a densidade Lagrangiana em um volume de n dimensões e $q_i(t)$ é a i -ésima posição da partícula em questão em função do tempo, dada em coordenadas generalizadas. A Lagrangiana, por definição, é dada por (2.1), onde T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema.

Assim, o princípio da mínima ação de Hamilton diz que, para qualquer processo físico, o caminho percorrido deve ser tal que a ação seja minimizada. Na realidade, o princípio é um pouco mais amplo e exige apenas que a ação esteja em um ponto de equilíbrio, seja ele estável ou não. Como S é uma função que tem como argumento outras funções ($q_i(t)$), precisamos usar o cálculo variacional para encontrar esse ponto de estabilidade. Dessa forma, o princípio

¹Aqui definimos a ação já em função dos campos, visto que esse é o foco do nosso trabalho, mas o mesmo vale fazendo a equivalência $\phi \rightarrow q$, onde q representa o conjunto de coordenadas generalizadas do sistema.

²Vale lembrar que $d^4x = dx dy dz dt$.

³Note que $L = \int \mathcal{L} d^3x$.

é dado por:

$$\delta S = \delta \int L dt = \int \delta L dt = 0, \quad (2.5)$$

onde δS é a variação funcional de S e δL é a variação funcional de L . Pela definição dada na equação (2.4), S é função de $q_i(t)$, logo L pode depender da posição da partícula e de sua velocidade ($\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$). Dessa forma, nosso problema se resume a encontrar as funções $q_i(t)$ que satisfazem a condição de que S esteja num ponto de equilíbrio ($\delta S = 0$). Assim, do cálculo funcional podemos escrever:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i, \quad \text{onde } \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_i = \delta \dot{q}_i, \quad (2.6)$$

e substituindo (2.6) em (2.5), temos:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = 0. \quad (2.7)$$

Pela regra da derivada de um produto de funções, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.7), obtemos a seguinte equação:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \right] dt = 0. \quad (2.9)$$

A integral do termo central do lado direito é nula, pois $\delta q_{i1} = \delta q_{i2} = 0$, visto que o estado inicial e final do sistema são pré-determinados (condições iniciais fixas), logo não há variação de q_{i1} e q_{i2} . Daí, resta apenas:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0 \quad (2.10)$$

e para que essa integral seja nula para valores arbitrários de δq_i , é necessário que o termo entre colchetes seja nulo, logo:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (2.11)$$

As equações acima são chamadas de equações de Euler-Lagrange e é através delas que

podemos encontrar as equações de movimento do sistema. Essas equações carregam toda a informação sobre a dinâmica do sistema e a partir delas obteremos equações diferenciais em q_i , de forma que ao resolvê-las, conhecendo as condições iniciais, fixaremos completamente o estado do sistema.

2.1.3 Formalismo lagrangiano para campos clássicos

Na seção anterior vimos o desenvolvimento do formalismo lagrangiano para uma partícula ou sistema com N graus finitos de liberdade. Porém, para explicar as interações fundamentais, mediadas por bósons e que possuem infinitos graus de liberdade, o modelo padrão da física de partículas faz uso do formalismo Lagrangiano aplicado à campos clássicos. Os campos são representações de sistemas com infinitos graus contínuos de liberdade.

Veremos abaixo o desenvolvimento e obtenção das equações de Euler-Lagrange para campos clássicos na sua forma covariante. Antes disso, porém, veremos alguns pré-requisitos que nossa densidade Lagrangiana deve obedecer para que seja compatível com a teoria que desenvolveremos em seguida. Por isso a próxima subseção se dedica a observar esses pré-requisitos e a seguir obteremos as equações de Euler-Lagrange covariantes.

Propriedades da densidade Lagrangiana

Para que nossa teoria corresponda adequadamente ao observado na natureza, é necessário que ela atenda a alguns requisitos que iremos descrever agora.

Primeiramente, para garantir a covariância das equações de Euler-Lagrange, o que é necessário para garantir a isotropia e homogeneidade do espaço, precisamos que a nossa densidade Lagrangiana (e por consequência a própria Lagrangiana e logo também a ação do sistema) seja invariante sob transformações do grupo de Poincaré ⁴, o que implica em invariância sob translações e transformações de Lorentz. A invariância sob transformações de Lorentz garante que a nossa densidade Lagrangiana obedece os requisitos da relatividade especial.

Além disso, queremos que o estado do sistema seja totalmente descrito pelos campos e suas derivadas de primeira ordem, o que nos permite ter equações de movimento contendo derivadas dos campos de até segunda ordem. Assim, a nossa densidade Lagrangiana (que passaremos a partir de agora a chamar de, simplesmente, Lagrangiana) seja uma função

⁴ As transformações do grupo de Poincaré são, por definição, as transformações contínuas sob as quais o intervalo entre dois eventos, ou pontos do espaço de Minkowski, é invariante. As transformações de Poincaré são de dois tipos, cada um deles constituindo um subgrupo: translações e transformações de Lorentz” [2](pg 56).

invariante dos campos e suas derivadas primeiras. Vale ressaltar que a Lagrangiana não pode depender diretamente do tempo ou das coordenadas espaciais, pois estes agora são apenas parâmetros.

Outro requisito que nosso sistema deve obedecer é que sua Lagrangiana deve ser real, pois tomando a definição apresentada na equação (2.1), a Lagrangiana é definida a partir das energias cinética e potencial e sabemos que por definição energias são reais.

Ademais, temos que a Lagrangiana do nosso sistema deve seguir os outros requisitos citados acima, porém sendo escrita da forma mais simples possível, ou seja, dentre as diversas funções que poderíamos escolher para representar o nosso sistema, devemos usar a que possua os termos mais simples possíveis. Essa condição geralmente nos leva a funções polinomiais dos campos e suas derivadas, embora funções de outros tipos também sejam permitidas.

Por fim, é preciso que nossa Lagrangiana, e por conseguinte a nossa teoria como um todo, seja local, isto é, *“a Lagrangiana deve depender, em cada ponto do espaço tempo, apenas dos valores do campo e de suas derivadas em uma vizinhança infinitesimal desse ponto”*[2](pg.91).

Seguindo todos esses requisitos podemos corretamente construir nossa Lagrangiana segundo a teoria clássica de campos. Veremos na próxima seção a demonstração das equações de Euler-Lagrange para o formalismo de campos clássicos.

Equações de Euler-Lagrange para campos

Para encontrar as equações de Euler-Lagrange covariantes equivalentes para campos clássicos, realizaremos um procedimento análogo ao realizado na seção anterior, porém agora as coordenadas generalizadas $q_i(t)$ serão substituídas pelos campos $\phi_i(\vec{x}, t)$. Nessa formulação o tempo e o espaço são igualmente tratados como coordenadas do sistema (assim como na relatividade especial, aqui também teremos o espaço-tempo) e a ação do sistema agora será uma função de $\phi_i(\vec{x}, t)$:

$$S[\phi_i(\vec{x}, t)] = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (2.12)$$

em que \mathcal{L} agora é uma função de $\phi_i(\vec{x}, t)$ e $\partial_\mu \phi_i(\vec{x}, t)$, sendo o índice i usado para representar os diferentes campos presentes no modelo.

Pelo princípio da mínima ação de Hamilton, teremos então:

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} d^4x = \int \delta \mathcal{L} d^4x = 0. \quad (2.13)$$

Assim, nosso problema agora se resume em encontrar as funções $\phi(\vec{x}, t)$ que satisfazem a condição de que S esteja num ponto de equilíbrio ($\delta S = 0$). De forma análoga ao procedi-

mento da seção anterior, do cálculo funcional podemos escrever:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i), \quad \text{onde } \delta(\partial_\mu\phi_i) = \partial_\mu(\delta\phi_i),$$

e da mesma forma, substituindo (2.1.3) em (2.13), obtemos:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu(\delta\phi_i) \right] dx^4 = 0. \quad (2.14)$$

Novamente, a partir da regra da derivada do produto de funções, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i \right] &= \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i) &= \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta\phi_i, \end{aligned} \quad (2.15)$$

e substituindo-a na equação (2.14), encontramos a seguinte relação:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta\phi_i \right] dx^4 = 0, \quad (2.16)$$

onde, novamente, a integral do termo central entre os colchetes é nula, porque o estado final e inicial dos campos é fixo, logo não há variação de ϕ_{i1} e ϕ_{i2} . Assim, resta na integral apenas:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta\phi_i dx^4 = 0. \quad (2.17)$$

Para que essa integral seja nula e o princípio da mínima ação seja garantido para qualquer valor arbitrário de $\delta\phi_i$, é necessário que o termo entre colchetes seja nulo. Daí obtemos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} = 0, \quad (2.18)$$

e essas são as equações de Euler-Lagrange para campos clássicos na formulação covariante. Elas carregam toda a informação sobre a dinâmica do sistema e sobre a evolução espaço-temporal dos campos ϕ_i .

2.2 Tipos de Campos

Os campos clássicos são representações de sistemas contínuos com infinitos graus de liberdade.

Diferentes tipos de campos são usados para representar a natureza física das partículas e suas interações. A distinção entre eles é devido ao *spin* que as partículas carregam, e está relacionada segundo a forma como os mesmo se transformam sob o grupo de Lorentz. Os bósons possuem *spin* inteiro e os férmions tem *spin* semi-inteiro. Tais regras de transformação serão vistas com mais detalhes no próximo capítulo.

As partículas bosônicas podem ser representadas por campos escalares e vetoriais, enquanto que as partículas fermiônicas são representadas por campos espinoriais. Veremos a seguir os principais campos usados no Modelo Padrão, assim como as diferenças entre esses campos e suas respectivas Lagrangianas e equações de movimento, considerando que esses campos estão livres, ou seja, sua Lagrangiana não possui termos de interação.

Apesar de serem valiosas para o estudo de métodos e noções do formalismo, as Lagrangianas de campos livres não possuem muito significado físico, visto que na realidade identificamos os campos a partir de sua interação com algum sistema (seja uma carga de prova ou algum outro campo). As características do campo sob estudo são então obtidas a partir da forma como o campo responde a influências externas. A Lagrangiana principal do nosso trabalho, por exemplo, é a soma das Lagrangianas de campos livres com as Lagrangianas de termos de interação, tentando assim descrever a interação entre campos. O exemplo mais simples de uma teoria com interação é a chamada teoria $\lambda\phi^4$, cuja Lagrangiana contém um termo do tipo $\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$.

Ainda assim, por conta da praticidade das Lagrangianas livres, iniciaremos nosso estudo por elas.

2.2.1 Campo escalar

Os campos escalares são aqueles que sob uma transformação do grupo de Lorentz se transformam como um escalar, ou seja, sendo ϕ o campo em questão, ele se transforma da seguinte forma:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi. \quad (2.19)$$

Esses campos obedecem à equação de Klein-Gordon, que discutiremos na subseção a seguir.

A Equação de Klein-Gordon

Primeiramente vamos identificar que tipo de Lagrangiana os campos escalares reais satisfazem. Partindo da restrição única de que a Lagrangiana deve ter termos apenas de ordem 0, 1 e 2 do campo, podemos montá-la da forma mais geral possível

$$\mathcal{L} = A\phi^0 + B\phi + C\phi^2 + D\partial_\mu\phi + E\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + F\phi\partial_\mu\phi, \quad (2.20)$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes. Agora, sabendo que nossa Lagrangiana deve obedecer os requisitos apresentados na seção 2.1.3, observaremos quais dos termos acima são realmente permitidos na nossa teoria.

Inicialmente observemos que a invariância de Lorentz⁵ exige que a Lagrangiana seja um escalar, logo os termos com índices devem estar devidamente contraídos, o que significa que os termos com um número ímpar de índices não são permitidos na nossa teoria. Assim, nos resta apenas:

$$\mathcal{L} = A\phi^0 + B\phi + C\phi^2 + E\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi. \quad (2.21)$$

Em seguida, podemos descartar o termo de A , pois ele é constante e podemos estabelecer sem qualquer perda de significado físico que $A = 0$. Além disso, o termo linear no campo também pode ser descartado, pois quando as equações de Euler-Lagrange são aplicadas, obtemos a partir dele uma constante arbitrária e podemos redefinir o campo de forma que ela pode ser estabelecida em zero também, sem qualquer perda de significado físico, logo fazemos $B = 0$. Daí, ainda temos:

$$\mathcal{L} = C\phi^2 + E\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi. \quad (2.22)$$

É convencional estabelecer $C = -m^2 \cdot 1/2$ e $E = 1/2$, de tal forma que nossa Lagrangiana seja escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2). \quad (2.23)$$

Aplicando então as equações de Euler-Lagrange (2.18) obtemos a equação de movimento

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (2.24)$$

onde m é o termo de massa do campo e \square é o operador d'alembertiano⁶. Essa equação

⁵O grupo de Lorentz é um sub grupo de Poincaré

⁶O operador d'alembertiano, considerando a métrica de Minkowski dada no início deste trabalho é escrito como: $\square = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \partial^\alpha\partial_\alpha = \partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2 - \partial_3\partial_3 = \partial_\mu\partial^\mu$.

é chamada de **equação de Klein-Gordon** e é a equação correta para descrever campos escalares livres de *spin* zero.

Essa equação, como mencionado anteriormente, descreve o campo sem a presença de fontes externa e interações. Ela é uma das primeiras e mais simples adaptações relativísticas da equação de Schrödinger ⁷ e possui derivada de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço. Na realidade todos os campos relativísticos satisfazem a equação de Klein-Gordon. Apesar disso, ela é conhecida como equação do campo escalar e isso se dá porque essa é a única equação que o campo escalar satisfaz, enquanto que os outros campos relativísticos obedecem outras equações que implicam na de Klein-Gordon ou equações derivadas dela.

Campos Escalares Complexos

Um campo escalar complexo é equivalente a dois campos escalares reais e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i\phi_2(x)], \quad (2.25)$$

e dentro da teoria podemos trabalhar tanto diretamente com os campos ϕ_1 e ϕ_2 quanto com ϕ e ϕ^* , obtendo os mesmos resultados físicos. Nessa seção trabalharemos com o par ϕ e ϕ^* .

Teremos então duas equações de Klein-Gordon, uma pra ϕ e outra para ϕ^* , que podem ser obtidas aplicando-se as equações de Euler-Lagrange na Lagrangiana abaixo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \quad (2.26)$$

logo encontraríamos as equações de Klein-Gordon para os dois campos, que seriam:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad e \quad (\square + m^2)\phi^*(x) = 0. \quad (2.27)$$

É fácil observar que a Lagrangiana dada na equação (2.26) é a soma das Lagrangianas para ϕ_1 e ϕ_2 , substituindo a definição dada na equação (2.25) na (2.26):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\ &= (\partial_\mu \phi_1 - i\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_1 + i\partial^\mu \phi_2) - m^2(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) \\ &= (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1) + (\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2) \\ &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

⁷A equação de Schrödinger dependente do tempo é dada por: $\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$

Assim, ela pode ser interpretada como sendo equivalente à Lagrangiana de dois campos escalares de mesma massa.

É curioso reparar que a Lagrangiana para um campo escalar complexo é invariante sob transformações globais do grupo $U(1)$ ⁸, ou seja, é invariante sob uma rotação global no plano complexo. Fazendo:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \\ &e \\ \phi^*(x) &\rightarrow \phi'^*(x) = e^{-i\alpha}\phi^*(x),\end{aligned}\tag{2.29}$$

e substituindo na Lagrangiana dada em (2.26) é fácil ver que ela permanece inalterada. Essa transformação é chamada de transformação de gauge e é uma simetria interna da Lagrangiana de Klein-Gordon para campos complexos.

Podemos associar o campo ϕ às antipartículas e o campo ϕ^* às partículas. Ou seja, campos reais, para os quais $\phi = \phi^*$, descrevem partículas sem carga e que são sua própria antipartícula e ambos os campos real e complexo descrevem partículas de spin nulo.

Dessa forma, o campo escalar complexo se torna muito importante, pois o bóson de Higgs (do mecanismo que leva o mesmo nome) é um campo desse tipo e será descrito pela equação de Klein-Gordon para campos complexos.

2.2.2 Campo Vetorial

Da mesma forma que os campos escalares, os campos vetoriais serão aqueles que sob uma transformação de Poincaré se transformam como vetores de Lorentz, ou seja, sendo A_μ um campo vetorial qualquer:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \Lambda_\nu^\mu A_\nu,\tag{2.30}$$

logo esse campo deve ser um objeto de 4 componentes, dado da forma:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \phi^0(x) \\ \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \phi^3(x) \end{pmatrix}$$

onde cada componente do campo pode ser real ou complexa, o que definirá se o campo em si é real ou complexo.

⁸Estudaremos acerca do grupo $U(1)$ e suas transformações no próximo capítulo.

De fato, na natureza todas as interações forte, fraca e eletromagnética são mediadas por bósons vetoriais, reais ou complexos, massivos ou não. Um exemplo de campo vetorial real não massivo é o fóton, enquanto que o bóson Z^0 da interação fraca é real e massivo. Já os outros dois bósons da interação fraca, os W^\pm são representados por campos vetoriais complexos e massivos.

A equação de Proca é a que descreve corretamente esses campos e veremos abaixo como obtê-la

A equação de Proca

A Lagrangiana mais simples e natural que pode ser montada obtendo termos de ordem 0,1 e 2 no campo, que seja escalar e invariante de Lorentz, para um campo vetorial qualquer A_μ é dada por:

$$\mathcal{L} = C_1 \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + C_2 \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + C_3 A^\mu A_\mu + C_4 \partial^\mu A_\mu. \quad (2.31)$$

Ao aplicarmos as equações de Euler-Lagrange nessa Lagrangiana, o termo de C_4 nos fornece apenas sua constante, de forma que (como já discutimos na seção anterior) podemos estabelecer $C_4 = 0$, sem perda de significado físico. A Lagrangiana pode ser escrita então da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = C_1 \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + C_2 \partial^\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu + C_3 A^\mu A_\mu. \quad (2.32)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana da (2.32), encontramos a seguinte equação de movimento:

$$2C_3 A^\rho = 2C_1 \partial_\sigma \partial^\sigma A^\rho + 2C_2 \partial^\rho (\partial_\sigma A^\sigma), \quad (2.33)$$

a partir da qual obtemos, ao colocar as constantes convencionais, as **equações de Proca**⁹:

$$m^2 A^\rho = -\partial_\sigma (\partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma), \quad (2.34)$$

que são as equações que descrevem partículas massivas de spin 1, onde m seria a massa referente ao campo. Assim, podemos também reescrever a Lagrangiana dada em 2.32 com as constantes convencionais, obtendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A_\nu \partial^\nu A_\mu) + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu, \quad (2.35)$$

⁹Perceba que aqui o plural é utilizado porque temos uma equação para cada índice ρ , onde $\rho = 0, 1, 2, 3$.

da qual, como podemos observar, obteríamos exatamente as equações de Proca dadas em (2.34).

Quando o campo não é massivo, ou seja, $m = 0$, obtemos as equações

$$0 = \frac{1}{2} \partial_\sigma (\partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma) \quad (2.36)$$

que são chamadas de equações inhomogêneas de Maxwell, na ausência de correntes elétricas.

É razoável definirmos o tensor eletromagnético como

$$F^{\sigma\rho} := \partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma \quad (2.37)$$

e a partir da equação (2.36) vemos que

$$\partial_\rho F^{\sigma\rho} = 0. \quad (2.38)$$

A partir dessa equação e de sua equação dual¹⁰, podemos escrever todas as quatro equações de Maxwell. Com essa nova definição do tensor eletromagnético, podemos então reescrever a Lagrangiana de um campo sem massa e com spin 1 da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = \frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + \partial^\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Intitulamos essa equação como Lagrangiana de Maxwell, pois ela é exatamente a Lagrangiana livre do eletromagnetismo, da qual podemos gerar as quatro equações de Maxwell, como dito anteriormente.

Com isso, podemos então reescrever nossa Lagrangiana de Proca, dada em (2.35) em termos do tensor eletromagnético

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu, \quad (2.40)$$

que seria então a Lagrangiana que descreve campos vetoriais massivos de spin 1.

2.2.3 Campo Espinorial

Os campos espinoriais são aqueles que se transformam como um espinor sob uma transformação de Lorentz, ou seja, sendo Ψ um campo espinorial qualquer, ele se transforma

¹⁰A equação dual de Maxwell é dada por $\partial_\rho \tilde{F}^{\sigma\rho} = 0$, onde $\tilde{F}^{\sigma\rho} = \frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\rho\mu\nu} F_{\mu\nu}$.

como

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi' = S(\Lambda)\Psi(x) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}\Psi(x), \quad (2.41)$$

onde $S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}$, $\omega^{\mu\nu}$ é um parâmetro da transformação do grupo de Lorentz e $\sigma_{\mu\nu}$ é um gerador da representação bispinorial do grupo de Lorentz ¹¹.

Um espinor de Dirac é um objeto de duas entradas que combina um espinor de quiralidade direita e outro de esquerda em um só, sendo definido da forma

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix},$$

onde χ_L é o campo de quiralidade esquerda e ξ_R é o de direita.

Na natureza, os campos de Dirac são aqueles que representam partículas massivas de spin $\frac{1}{2}$, os chamados férmions, que são divididos em léptons e quarks. No setor eletrofraco do modelo padrão, trabalharemos com os léptons.

A equação de Dirac

A Lagrangiana mais simples que podemos construir que obedece os requisitos necessários discutidos na seção 2.1.3, ou seja, que seja real, invariante de Lorentz e que dependa apenas do campo e de sua derivada primeira, com termos de no máximo ordem dois, é

$$\mathcal{L} = A\Psi^\dagger\gamma_0\Psi + B\Psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu\Psi, \quad (2.42)$$

a partir da qual, colocando as constantes convencionais $A = -m$ e $B = i$, obtemos a Lagrangiana de Dirac¹²

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -m\bar{\Psi}\Psi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi, \quad (2.43)$$

onde $\bar{\Psi} = (\Psi)^\dagger\gamma_0$, m é a massa do campo e γ^μ são as matrizes de Dirac, que são matrizes de dimensão 4x4 dadas por

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I_{2x2} & 0 \\ 0 & -I_{2x2} \end{pmatrix} \\ \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.44)$$

¹¹ $\sigma_{\mu\nu}$ é definido mais a frente, quando falamos sobre o grupo de Lorentz e seus geradores. Para uma definição direta de $\sigma_{\mu\nu}$ ver equação (3.37), onde $\sigma \rightarrow M$

¹²Observe que aqui o campo Ψ é complexo, logo Ψ e $\bar{\Psi}$ são campos diferentes.

e onde σ^i , por sua vez, são as matrizes de Pauli, geradoras do grupo $SU(2)$, como veremos no próximo capítulo

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Observe que por Ψ ser complexo ele pode então ser escrito em função de dois campos reais

$$\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2, \quad (2.46)$$

Voltando nossa atenção para a Lagrangiana dada em (2.43), se aplicarmos nela as equações de Euler-Lagrange dadas em (2.18) encontramos as seguintes equações de movimento, uma para cada campo

$$\begin{aligned} (i\gamma_\mu \partial^\mu + m)\bar{\Psi} &= 0; \\ (i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\Psi &= 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

sendo a equação de movimento de Ψ conhecida como **equação de Dirac**. Essa equação, como já dito antes, descreve partículas massivas de spin $\frac{1}{2}$, que seriam os férmions do Modelo Padrão.

No capítulo seguinte estudaremos o teorema de Noether e as simetrias internas e externas do Modelo Padrão e, conseqüentemente, os grupos de transformação de Lorentz, $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$.

Capítulo 3

As simetrias

Quando um sistema é invariante sob um grupo de transformações, dizemos que ele possui uma simetria relacionada àquele grupo, ou seja, se submetermos o sistema a uma transformação sob a qual ele possui uma simetria, ele deve permanecer inalterado, exatamente o mesmo.

A homogeneidade e isotropia do espaço são um exemplo de simetria, visto que qualquer experimento físico realizado no Brasil, se realizado sob as mesmas condições, deve ter os mesmos resultados em qualquer outro lugar do mundo e do universo, resultados esses que também devem ser independentes da orientação do sistema do experimento e da hora em que ele está sendo realizado. Assim, podemos afirmar que a física é invariante sob translações e rotações espaço-temporais.

Logo, as simetrias estão estritamente ligadas com a invariância da dinâmica do sistema e com a preservação das medidas físicas. Esse conceito é a base do Modelo Padrão, pois à cada simetria do sistema está ligada uma densidade de corrente e uma carga conservada, como mostra o teorema de Noether.

No modelo padrão, cada interação fundamental obedece a um grupo de simetria e isso determina quantos bósons mediadores essa interação terá e a carga associada a essa simetria se revela ser a carga associada à interação fundamental na natureza. Assim, se torna essencial o estudo dos grupos de simetria, visto que o modelo padrão é escrito e interpretados em termos de simetrias.

3.1 O teorema de Noether e as simetrias

O teorema de Noether é de fundamental importância na física de partículas e campos por ele mostra de forma geral a relação intrínseca que existe entre as leis de conservação, as

quantidades conservadas e as simetrias do sistema. Como já discutido anteriormente, uma transformação de simetria é tal que aplicada a um sistema físico, esse permanece invariante sob a transformação, ou seja, a configuração final do sistema é exatamente igual à inicial.

Para trabalharmos de forma geral no contexto de campos, assumiremos que a transformação de simetria atua tanto na mudança de coordenadas quanto na mudança do valor do campo em cada ponto do espaço-tempo. Assim, as coordenadas e os campos se transformarão de tal forma que

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu; \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x'). \end{cases} \quad (3.1)$$

Consideraremos uma transformação de simetria infinitesimal e a partir das equações acima podemos escrever

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu + \bar{\delta}x^\mu; \\ \bar{\delta}\phi = \phi'(x') - \phi(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\bar{\delta}x^\mu$ ¹ e $\bar{\delta}\phi$ são muito pequenos.

Definiremos então uma relação entre a variação total e a variação funcional de ϕ , onde

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)^2 \quad (3.3)$$

e assim, encontramos

$$\bar{\delta}\phi(x) = \delta\phi(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (3.4)$$

Aplicando a transformação dada em (3.1) a um sistema físico descrito por uma ação qualquer $S[\phi]$, encontraremos a nova ação dada por

$$S'[\phi'] = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) \quad (3.5)$$

e a diferença variação total da diferença entre essa nova ação e a original é escrita como

$$\bar{\delta}S[\phi] = \int_{\Omega} d^4x \left[\mathcal{J} \left(\frac{x'^\mu}{x^\nu} \right) \mathcal{L}(\phi'(x), \partial'_\mu \phi'(x')) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right], \quad (3.6)$$

onde

$$\mathcal{J} = \frac{x'^\mu}{x^\nu} \quad (3.7)$$

¹Observe que $\bar{\delta}x^\mu = \delta x^\mu$, onde δx^μ é a variação funcional de x^μ

²Note a sutil diferença entre $\bar{\delta}\phi(x)$ e $\delta\phi(x)$. O primeiro considera também a transformação da coordenada, enquanto o segundo não.

é o Jacobiano da transformação de coordenadas de $x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu}$.

Como nossa transformação é infinitesimal, nos cálculos que se seguem consideraremos apenas os termos de primeira ordem de δx^{μ} e $\bar{\delta}\phi$, pois os termos de segunda ordem em diante são muito pequenos e se tornam desprezíveis para nossos cálculos. Assim, o Jacobiano em primeira ordem é aproximado para $\mathcal{J} \approx 1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu}$ e substituindo essa aproximação na equação (3.6), obtemos

$$\bar{\delta}S[\phi] = \int_{\Omega} d^4x [\bar{\delta}\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) + \partial_{\mu}\delta x^{\mu}\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi)], \quad (3.8)$$

onde podemos escrever

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) + L_{\phi}(x)\delta\phi + \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_{\mu}\phi]}\delta\phi\right), \quad (3.9)$$

sendo L_{ϕ} as equações de Euler-Lagrange para campos.

Podemos substituir a equação (3.9) na (3.8) e obter

$$\bar{\delta}S = \int_{\Omega} d^4x \left[L_{\phi}\delta\phi + \partial_{\mu}\left(\delta\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_{\mu}\phi]} + \delta x^{\mu}\mathcal{L}\right) \right] \quad (3.10)$$

e reescrevendo $\delta\phi$ em função de $\bar{\delta}\phi$ através da equação (3.4) e substituindo em (3.10)

$$\bar{\delta}S = \int_{\Omega} d^4x \{ L_{\phi}\delta\phi - \partial^{\mu}J_{\mu} \} \quad (3.11)$$

onde

$$J^{\mu} = -\delta x^{\nu}\left(\delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) - \partial_{\nu}\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_{\mu}\phi]}\right) - \bar{\delta}\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_{\mu}\phi]} \quad (3.12)$$

Enfim voltaremos nossa atenção para o fato de que essa é uma transformação de simetria do sistema. Sendo uma transformação de simetria, sabemos que $\bar{\delta}S[\phi] = 0$. Logo, a expressão entre chaves da equação (3.11) deve ser nulo, o que nos leva a

$$L_{\phi}\delta\phi - \partial_{\mu}J^{\mu} = 0. \quad (3.13)$$

Como o campo ϕ é uma solução das equações de Euler-Lagrange, temos que o primeiro termo dessa equação é nulo o que nos deixa

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0. \quad (3.14)$$

sendo J^{μ} a corrente conservada referente a essa simetria.

Esse cálculo pode ser facilmente expandido para mostrar um dos mais importantes do teorema de Noether: “a cada gerador de um grupo de simetria da teoria considerada, existe uma corrente conservada associada.” [13][página 36]

Voltando a nossa atenção para a equação (3.14), podemos dividir J^μ em duas partes

$$\begin{cases} \rho(\vec{x}, t) = J^0(\vec{x}, t) \\ j^i(\vec{x}, t) = J^i(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (3.15)$$

e de (3.14) obtemos

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.16)$$

que, como podemos ver, é uma equação de continuidade. Integrando os dois membros dessa equação num volume qualquer V , chegamos à equação

$$- \oint_{\partial V} d^3 x \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{\sigma} = \frac{d}{dt} \int_V d^3 x \rho(\vec{x}, t) \quad (3.17)$$

e fazendo $Q(t) = \frac{d}{dt} \int_V d^3 x \rho(\vec{x}, t)$ como uma grandeza contida em V , da qual ρ é a densidade, obtemos

$$\frac{d}{dt} Q(t) = - \oint_{\partial V} d^3 x \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{\sigma}, \quad (3.18)$$

onde o lado direito desta equação representa o fluxo de Q através das fronteiras do volume V .

Supondo que V corresponde a todo o espaço e aplicando a condição de contorno de que \vec{j} tende a zero no limite do infinito, o termo da direita da equação anterior tende a zero e temos

$$\frac{d}{dt} Q(t) = 0 \quad (3.19)$$

ou seja, a grandeza $Q(t)$ é conservada no tempo, apesar de sua definição partir de uma integral explicitamente dependente do tempo. Dizemos então que $Q(t)$ é a carga associada a simetria em questão e é uma grandeza conservada.

Simetria de Translação

A seguir veremos como uma simetria de translação espaço-temporal nos leva a conservação de energia e momento. Como a física é a mesma em qualquer lugar do espaço tempo, o que nos remete à ideia de isotropia e homogeneidade do universo, toda teoria física precisa

necessariamente ser simétrica em relação a transformações de translação.

Supondo uma transformação de translação do tipo

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu \quad (3.20)$$

e considerando um campo escalar, em que temos $\bar{\delta}\phi = 0$, temos

$$\begin{cases} \delta x^\mu = \delta_v^\mu \varepsilon^v \\ \bar{\delta}\phi = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

e a partir dessas equações podemos construir a corrente de Noether referente a essa simetria que pode ser escrita como

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.22)$$

sendo $T^{\mu\nu}$ o tensor de energia-momento. E, ainda seguindo o teorema de Noether, teremos uma carga relacionada a essa simetria tal que a componente $T^{0\nu}$ seja a sua densidade

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} \quad (3.23)$$

onde P^ν são os momentos lineares, sendo P^0 referente a energia e P^i o momento tridimensional. Assim, como vimos anteriormente, essa é a corrente conservada relativa à simetria de translação, o que garante a conservação da energia e do momento linear tridimensional. Vale observar que T^{00} é uma grandeza que deve ser estritamente positiva, por ela é equivalente à densidade de energia, que sabemos que é sempre positiva.

3.2 O grupo de Lorentz

No espaço de Minkowski, no qual está formulada a relatividade especial, o espaço e o tempo são coordenadas que possuem o mesmo *status* e que juntas, com o mesmo nível de importância e dependência, formam o chamado espaço-tempo de Minkowski. Nesse contexto, podemos definir um objeto, ou uma quantidade, que seja invariante sob transformações de Lorentz e que chamaremos de produto interno do espaço de Minkowski. Assim,

$$ds' = ds = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^\mu x_\mu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad (3.24)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo de Minkowski dada por $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1 - 1 - 1 - 1)$.

O grupo de Lorentz é formado pelo grupo de transformações que preservam o produto interno do espaço de Minkowski dado por (3.24). Dessa forma, podemos definir as transformações de Lorentz³ como sendo

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} + b^{\mu}, \quad (3.25)$$

onde b^{μ} representa uma transformação de translação e Λ_{ν}^{μ} representa um *boost*, como veremos melhor adiante.

Assim, trabalhando inicialmente com as transformações de *boost*, sendo Λ uma transformação de Lorentz qualquer e ds o produto interno ds , podemos escrever

$$\begin{aligned} ds' &= ds \\ x'^{\sigma} \eta_{\sigma\rho} x'^{\rho} &= x^{\mu} \eta_{\mu\nu} x^{\nu} \\ (x^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\sigma}) \eta_{\sigma\rho} (\Lambda_{\nu}^{\rho} x^{\nu}) &= x^{\mu} \eta_{\mu\nu} x^{\nu}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

logo as transformações de Lorentz são definidas tais que

$$\Lambda_{\mu}^{\sigma} \eta_{\sigma\rho} \Lambda_{\nu}^{\rho} = \eta_{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

ou, na forma matricial,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (3.28)$$

Podemos agora analisar algumas propriedades da matriz de transformação Λ . Tomando-se o determinante de ambos os lados da equação (3.28), obtemos

$$\det^2 \Lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1. \quad (3.29)$$

Além disso, tomando $\mu = \nu = 0$ na equação (3.27), obtemos

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} \Lambda_0^{\rho} \Lambda_0^{\sigma} &= (\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2 = \eta_{00} = 1 \Rightarrow \\ \Lambda_0^0 &= \pm \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda_0^i)^2} \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\text{logo} \quad |\Lambda_0^0| \geq 1. \quad (3.31)$$

A partir das propriedades dadas em (3.29) e (3.31), podemos montar então quatro conjuntos de transformações, apresentados na tabela abaixo:

³Chamaremos as transformações relativas ao grupo de Lorentz de transformações de Lorentz.

	L_+^\uparrow	L_-^\uparrow	L_-^\downarrow	L_+^\downarrow
$\det \Lambda$	+1	-1	-1	+1
Λ_0^0	$\geq +1$	$\geq +1$	≤ -1	≤ -1

Tab. 3.1: Tabela com os conjuntos de transformações que podem ser formados a partir das propriedades dadas em (3.29) e (3.31). Fonte: [22][página 160]

Para que a orientação dextrogira do nosso sistema de referência seja preservada, devemos escolher as transformações tal que $\det(\Lambda) = 1$ e para preservar a direção do tempo, é necessário que $\Lambda_0^0 \geq 0$. Logo, apenas o conjunto representado por L_+^\uparrow forma um grupo de transformações e é a ele que chamamos de grupo de Lorentz e é dele que faremos uso no decorrer deste trabalho, ou seja, quando falarmos sobre invariância de Lorentz será a este grupo que estaremos nos referindo.

Apesar disso, podemos definir transformações que conectem um conjunto ao outro: as transformações de paridade (Λ_P) e as de inversão temporal (Λ_T), dadas por:

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Essas transformações também estão relacionadas à simetrias, sendo elas a simetria de paridade e a simetria temporal, como estudaremos em mais detalhes na próxima seção.

Podemos analisar agora qual a interpretação física das transformações de Lorentz e para isso vamos representá-las por matrizes. Seja S_1 e S_2 dois referenciais e \vec{v} a velocidade constante entre eles e Λ a transformação de Lorentz que conecta os dois referenciais, podemos decompor a transformação em três termos:

$$\Lambda = \Lambda_{R_2} \Lambda_\beta \Lambda_{R_1}, \quad (3.33)$$

onde $\Lambda_{R_i 2 \times 2} = \text{diag}(1 \ R_i)$, sendo R_i uma matriz geral de rotação, e

$$\Lambda_{\beta_{x_0 x_1}} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 & 0 \\ \sinh\beta & \cosh\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

que representa uma transformação de Lorentz usual ao longo do eixo x_1 ⁴. Assim, é fácil ver que a transformação Λ pode ser interpretada em três partes:

- uma rotação que posiciona o eixo x_1 de S_1 na mesma direção de \vec{v} ;
- um *boost* de Lorentz ao longo de x_1 de S_1 na direção de \vec{v} ;
- e por fim, uma rotação que alinha o eixo x_1 de S_1 após o *boost* na direção de x_2 de S_2 .

Essa é então a interpretação física das transformações de Lorentz.

3.2.1 Os geradores do grupo de Lorentz

Para encontramos os geradores do grupo de Lorentz, consideremos uma transformação infinitesimal dada por:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \delta\lambda_{\nu}^{\mu}, \quad (3.36)$$

onde $|\delta\lambda_{\nu}^{\mu}| \ll 1$. Substituindo (3.36) em (3.27), podemos observar que $\delta\lambda_{\mu\nu} = -\delta\lambda_{\nu\mu}$, logo, $\delta\lambda_{\mu\nu}$ é antissimétrico e por tanto, como $\delta\lambda_{\mu\mu} = 0$, só possui seis componentes independentes, o que nos dará seis geradores da álgebra de Lie do grupo de Lorentz, como veremos a seguir.

Para encontrarmos os geradores utilizaremos a representação matricial, de forma que as outras representações serão discutidas adiante. Dessa forma, teremos seis matrizes antissimétricas, representadas por $M_{\alpha\beta}$, onde $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, que serão dadas por

$$(M_{\alpha\beta})_{\nu}^{\mu} = \frac{i}{2} \left(\eta_{\alpha\nu} \delta_{\beta}^{\mu} - \eta_{\beta\nu} \delta_{\alpha}^{\mu} \right) \quad (3.37)$$

e substituindo essa definição na relação de comutação⁵, podemos encontrar a álgebra de Lie do grupo de Lorentz

$$\left[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta} \right] = i \left(\eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} - \eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} \right). \quad (3.38)$$

Podemos dividir $M^{\alpha\beta}$ em componentes espaciais e temporais, tais que:

$$J_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} \quad ; \quad K_i = M_{i0}, \quad (3.39)$$

⁴As transformações ao longo dos eixos x_2 e x_3 são, respectivamente:

$$\Lambda_{\beta x_0 x_2} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\beta & 0 & \cosh\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_{\beta x_0 x_3} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\beta & 0 & 0 & \cosh\beta \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

⁵Por definição, $[A, B] = AB - BA$

a partir dos quais obtemos as seguintes relações de comutação

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \ ; \ [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \ ; \ [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (3.40)$$

em que podemos observar que os geradores J_i obedecem à álgebra do momento angular, estudado na mecânica quântica, e portanto correspondem às rotações espaciais, enquanto que os geradores K_i , por exclusão, correspondem aos *boosts* na direção dos eixos coordenados espaciais. Além disso, podemos observar que $J_i^\dagger = J_i$ e $K_i^\dagger = -K_i$. Os geradores J_i e K_i são, portanto, os geradores do grupo de Lorentz. Podemos, então, reescrever a transformação de Lorentz Λ na sua forma exponencial, em função de J e K

$$\Lambda = e^{i(\omega_i J_i + v_i K_i)} \quad (3.41)$$

Vamos agora encontrar todas as representações irredutíveis possíveis para o grupo de Lorentz. Definiremos as matrizes N_i e L_i como combinações lineares de J_i e K_i da seguinte forma:

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{2} (J_i + iK_i) \\ L_i = \frac{1}{2} (J_i - iK_i) \end{cases} \quad (3.42)$$

e, a partir das (3.43), podemos obter suas relações de comutação

$$[N_i, L_j] = 0 \ ; \ [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k \ ; \ [L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad (3.43)$$

ou seja, N e L obedecem, individualmente, duas álgebras de $SU(2)$ ⁶. Assim, conhecendo N e L podemos voltar à equação (4.9) e obter as matrizes J e K , que são os reais geradores do grupo de Lorentz.

A forma das matrizes N e L dependerá da representação que estaremos utilizando (escalar, vetorial, espinorial...) e indicaremos a representação através do par de índices (j, j') . Vale comentar que o spin da partícula descrita por alguma representação⁷ é dado por $s = j + j'$, sendo (j, j') , obviamente, os índices referentes àquela representação. Estudaremos agora as representações mais relevantes para a teoria desenvolvida nesse trabalho e como um campo ϕ_A se transforma sob esse campo, sendo a transformação mais geral $\phi_A(x) \rightarrow \phi_{A'}(x')$.

⁶Estudaremos o $SU(2)$ adiante.

⁷Quando dizemos que uma partícula é descrita por tal representação, queremos dizer que ela se transforma sob Lorentz segundo essa representação e, exatamente por isso, as equações que descrevem essa partícula também são escritas nessa representação.

Representação $(0,0)$ - campo escalar - spin 0

Nessa representação, o espaço possui como base um único vetor ($|0\rangle \times |0\rangle$), logo N e L serão matrizes nulas e, conseqüentemente, $[J] = [K] = 0$. Assim, pela equação (3.41), $\Lambda = 1$ e portanto essa representação descreve campos invariantes sob transformações de Lorentz e, exatamente por isso, esses campos são chamados de escalares e como visto no capítulo passado, são descritos pela equação de Klein-Gordon. Assim, podemos escrever

$$\phi_A(x) \rightarrow \phi'_A(x') = \phi_A(x). \quad (3.44)$$

3.2.2 Representação $(\frac{1}{2}, 0)$ - campo espinorial - spin $\frac{1}{2}$

Nessa representação, a base do espaço possui dois vetores $|+\rangle \otimes |0\rangle, |-\rangle \otimes |0\rangle$ ⁸. Logo, temos uma base bi-dimensional e as matrizes N e L serão dadas por:

$$N_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad ; \quad L_i = 0_{2 \times 2} \quad (3.45)$$

e assim, as matrizes J e K serão

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad ; \quad K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i \quad (3.46)$$

e as transformações dadas por (3.41) serão escritas como $\Lambda_L = e^{\frac{i}{2}\sigma(\omega_i - iv_i)}$ e podemos então escrever a transformação do campo $\psi_L(x)$ como

$$\psi_L(x) \rightarrow \psi'_L(x') = \Lambda_L \psi_L(x). \quad (3.47)$$

Os campos dessa representação são chamados de campos espinoriais de “mão esquerda”, ou do inglês *left-handed*, por isso o índice L na equação. A razão dessa denominação ficará mais claro nas seções seguintes quando estudarmos paridade.

3.2.3 Representação $(0, \frac{1}{2})$ - campo espinorial - spin $\frac{1}{2}$

Assim como a representação anterior, a base do espaço dessa representação também tem dois vetores $|0\rangle \otimes |+\rangle, |0\rangle \otimes |-\rangle$ e portanto essa representação também é bi-dimensional e também descreve campos espinoriais. Nessa representação, as matrizes N e L serão dadas

⁸Para mais detalhes, consulte a referência [13].

por

$$N_i = 0_{2 \times 2} \quad ; \quad L_i = \frac{1}{2} \sigma_i, \quad (3.48)$$

a partir das quais podemos encontrar J e K

$$J_i = \frac{1}{2} \sigma_i \quad ; \quad K_i = \frac{i}{2} \sigma_i \quad (3.49)$$

e podemos escrever a transformação de Lorentz de (3.41) como $\Lambda_R = e^{\frac{i}{2} \sigma(\omega_i + i v_i)}$ e assim, a transformação do campo ψ_R será

$$\psi_R(x) \rightarrow \psi'_R(x') = \Lambda_R \psi_R(x). \quad (3.50)$$

Complementando os campos da representação anterior, os campos dessa representação são chamados de campos espinoriais de “mão direita”, ou do inglês *right-handed*, por isso o índice R na equação. Da mesma forma, a razão dessa denominação ficará mais claro nas seções seguintes quando estudarmos paridade.

Apesar de as duas representações descreverem partículas de spin $\frac{1}{2}$, elas não são equivalentes sob transformação de Lorentz e isso se dá por conta da diferença de paridade das duas representações, como estudaremos nas seções seguintes.

3.2.4 Representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ - campo vetorial - spin 1

Essa é a representação vetorial do grupo de Lorentz que, obviamente, descreve campos vetoriais descritos pela equação de Proca, discutida no capítulo passado. Um exemplo de campo dessa representação é o potencial de Maxwell. Essa representação tem a álgebra escrita em forma de matrizes 4×4 e age em tetra-vetores. Foi ela que utilizamos para encontrar os resultados discutidos no início da seção 3.2.

Podemos escrever a transformação desse campo como

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \quad (3.51)$$

Portanto essa é a lei de transformação de tetra-vetores em geral. Como vimos através da equação de Proca, é fácil generalizar essa representação para tensores e assim temos todas as representações necessárias para desenvolvermos nossa teoria.

3.3 Simetrias CPT - carga, paridade e tempo

Aqui abordaremos rapidamente as simetrias de conjugação de carga, paridade e reversão temporal. Essas simetrias fazem parte do Modelo padrão e algumas delas serão abordadas no desenvolvimento do capítulo 4.

3.3.1 Conjugação de Carga

A transformação de conjugação de carga é a responsável por levar partículas em antipartículas e inverter o spin. É através da simetria de conjugação de carga que uma teoria define como partículas com spins diferentes vão interagir. A transformação de conjugação de carga pode ser escrita por

$$C = i\gamma_2 \quad (3.52)$$

na representação de um espaço espinorial.

Essa transformação só atua, obviamente, em teorias que possuem spin e carga. Portanto, o fóton seria uma partícula invariante sob essa transformação.

3.3.2 Paridade

A transformação de paridade é aquela que atuando em um estado (t, \vec{x}) o leva para o estado $(t, -\vec{x})$, ou seja, essa transformação inverte a coordenada espacial do estado. A representação matricial dessa transformação foi apresentada na seção passada e é dada por

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Na representação espinorial, Λ_P pode ser escrita como

$$\Lambda_P = \gamma_0 \quad (3.54)$$

3.3.3 Reversão de Tempo

A simetria de reversão de tempo é tal que atuando num estado ela o transforma segundo

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi^*(-t, \vec{x}). \quad (3.55)$$

Analisando essa simetria fisicamente, ela é tal que se gravássemos um vídeo de algum evento e ou assistíssemos ao contrário, não saberíamos dizer se o vídeo estaria ao contrário ou não. Essa transformação mantém a direção do tempo, mas inverte todos os momentos das partículas, inclusive o spin.

Apesar de também inverter o spin das partículas, mas diferentemente da de conjugação de carga, não transforma partículas em antipartículas.

A junção das três transformações citadas é forma o operador CTP que age em espinores de Dirac, por exemplo, segundo

$$CTP\psi(x) \rightarrow -i\gamma_2\gamma_0\gamma_3\psi^*(-x) = -\gamma_5\psi^*(-x). \quad (3.56)$$

3.4 Simetrias Contínuas: os grupos de Lie

“Matematicamente, um grupo \mathcal{G} é um conjunto de elementos em que está definida uma operação que chamaremos de produto, que satisfaz os seguintes axiomas,

- se $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, então $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in \mathcal{G}$ (propriedade de fechamento);
- existe um elemento identidade $I \in \mathcal{G}$ tal que, para qualquer $g \in \mathcal{G}$, vale que $I \cdot g = g \cdot I = g$ (existência da unidade);
- para qualquer $g \in \mathcal{G}$, existe $g^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = I$ (existência da inversa);
- para quaisquer $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$, vale que $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ (associatividade)” [13].

Um grupo é dito contínuo se se cada elemento do grupo estiver associado a um ponto na variedade de grupo. Se essa variedade for suficientemente suave, então dizemos que esse é um grupo de Lie. Os geradores do grupo podem ser facilmente encontrados a partir da equação abaixo, sendo G o gerador do grupo e g um elemento dele

$$G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(\alpha_i = \varepsilon) - I}{i\varepsilon}. \quad (3.57)$$

Além disso, os geradores G desse grupo devem satisfazer a uma relação de comutação chamada de álgebra de Lie do grupo

$$[G_i, G_j] = c_{ij}^k G_k, \quad (3.58)$$

assim como a identidade de Jacobi

$$[G_i, [G_j, G_k]] + [G_j, [G_k, G_i]] + [G_k, [G_i, G_j]] = 0 \quad (3.59)$$

A vantagem de se trabalhar com grupos de Lie é que todas as propriedades do grupo podem ser estudadas a partir de sua álgebra, que possui um número finito de geradores G_i .

A partir dessa definição de grupos podemos estudar os grupos de simetria importantes para o MP. É fácil verificar que as transformações de simetria seguem as características descritas acima e portanto o formalismo de grupos se torna ideal para o estudo das simetrias. Os grupos essenciais para o Modelo Padrão são o $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$, mas para o desenvolvimento do modelo eletrofraco apenas os dois primeiros são necessários e por isso faremos uma breve revisão deles a seguir.

3.4.1 $U(1)$

O grupo $U(1)$ é o grupo das rotações complexas. Podemos usar como exemplo uma transformação $T(\theta) = e^{i\theta}$ para observar as seguintes propriedades

$$T(\theta)T(\theta') = T(\theta + \theta'); \quad [T(\theta)]^{-1} = T(-\theta); \quad T(\theta = 0) = 1. \quad (3.60)$$

Esse é um grupo contínuo, cuja variedade é dada pelo intervalo $[0, 2\pi]$. O gerador pode ser calculado através de (3.57), de forma que $G = 1$. Por fim, podemos notar que esse grupo é unitário, visto que $T(\theta)T^\dagger(\theta) = 1$.

Logo, podemos identificar esse grupo como o de rotações complexas cujas transformações são unitárias. Quando dizemos que um sistema é simétrico sob transformações de $U(1)$, queremos dizer que ele é invariante sob essas transformações. Se θ é constante, dizemos que a simetria é global, se $\theta = \theta(x)$, dizemos que a simetria é local.

3.4.2 $SU(2)$

O grupo $SU(2)$ possui uma álgebra de Lie formada por três geradores, J_1, J_2 e J_3 , que satisfazem a seguinte relação de comutação

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (3.61)$$

É fácil reconhecer que essa é a mesma álgebra do momento angular, estudada em cursos de Mecânica Quântica. De forma análoga ao procedimento realizado nesses cursos, podemos aqui também definir os geradores J^\pm e J^2 , dados por

$$J^\pm = J_1 \pm iJ_2 \quad ; \quad J^2 = (J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2, \quad (3.62)$$

de tal forma que pode-se mostrar que $[J^2, J_i] = 0$. O espaço em que esse grupo atua será composto por vetores da forma $|j; m\rangle$, onde para que os geradores permaneçam finitos é necessário ter $j = 0, 1/2, 1, \dots$ e para cada j a álgebra será representada por matrizes de dimensão $2j + 1$. Podemos analisar algumas representações desse grupo para diferentes j .

$$j = 0$$

É a representação mais trivial em que temos $J_i = [0]$ e portanto nessa representação o subgrupo referente a ela possui apenas o elemento identidade I .

$$j = \frac{1}{2}$$

Nessa representação os geradores serão dados por $J_i = \frac{\sigma_i}{2}$, onde σ_i são as matrizes de Pauli 2x2, matrizes essas associadas ao spin.

$$j = 1$$

Nessa representação, as matrizes J_i são dadas por:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

e podemos facilmente observar que a partir desses geradores podemos construir as rotações espaciais tridimensionais em torno dos eixos coordenados. Para J_1 , por exemplo,

$$e^{i\theta J_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

que corresponde a matriz de rotação em torno do eixo x^1 . As outras matrizes de rotação podem ser construídas de forma análoga.

Capítulo 4

O Setor Eletrofraco do Modelo Padrão

Neste capítulo apresentaremos o Modelo Eletrofraco de Glashow-Salam-Weinberg, que atualmente é a melhor teoria existente para descrever a unificação da interação eletromagnética com a fraca, resultando na interação eletrofraca. Embora essa interação atue sobre todos os férmions, nesse trabalho nos limitaremos a trabalhar com os léptons.

A interação eletromagnética é a responsável por boa parte das forças do mundo macroscópico. É através dela que os átomos e moléculas são formados e as estruturas macroscópicas da matéria.

Já a interação fraca em si não forma estados ligados, mas é responsável por alguns decaimentos de partículas. Além disso, ela é a única interação capaz de mudar o sabor das partículas quando atua, por exemplo, no decaimento de um nêutron em um elétron e um próton um quark d decai em um quark u . É válido dizer ainda que essa é a única interação que viola a simetria de paridade (P) e a simetria de conjugação de carga e paridade (CP).

4.1 Construindo a Lagrangiana

A primeira tentativa de se descrever a interação fraca aconteceu em 1933 quando Fermi propôs uma Lagrangiana para explicar o decaimento beta escrita da forma

$$\mathcal{L}_{Fermi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_{\nu_e}) \quad (4.1)$$

onde G_F é a constante de Fermi e $\psi_p, \psi_n, \psi_e, \psi_{\nu_e}$ são os espinores de Dirac que descrevem o próton, o nêutron, o elétron e o neutrino do elétron, respectivamente, sendo todos considerados estando no mesmo ponto do espaço-tempo.

Porém, a Lagrangiana proposta por Fermi possuía apenas termos vetoriais e em 1936 Ga-

mow e Teller propuseram uma generalização para essa equação que continha termos escalares, pseudo-escalares, vetoriais, axiais e tensoriais dada por ¹

$$\mathcal{L}_{\text{Gamow-Teller}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i \left(\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n \right) \left(\bar{\psi}_e \Gamma^i \psi_{\nu_e} \right), \quad (4.2)$$

onde $i = S, P, V, A, T$ denotando respectivamente os termos escalares, pseudo-escalares, vetoriais, axiais e tensoriais, dados abaixo

$$\Gamma^S = 1, \quad \Gamma^P = \gamma_5, \quad \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_5 \gamma_\mu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

onde $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Em 1957, no entanto, obteve-se a primeira evidência da violação de paridade em decaimentos fracos. Assim, era necessário que a corrente da interação fraca possuísse um termo dependente de γ_5 , logo a Lagrangiana também precisaria ser alterada e ela foi reescrita como:

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i \left(\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n \right) \left[\bar{\psi}_e \Gamma^i (1 \pm \gamma_5) \psi_{\nu_e} \right] \quad (4.4)$$

de forma que para cada valor de Γ^i , os dois últimos termos dessa Lagrangiana apresentam paridades opostas, quebrando a invariância sob paridade da Lagrangiana.

Tempos depois, novos experimentos com o decaimento β indicaram que a interação fraca possuía natureza vetorial e axial. Assim, em 1958, Feynman e Gell-Mann apresentaram um novo formalismo lagrangiano para essa interação, conhecido como formalismo $V - A$ e que possuía a seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(J^{(l)\mu} J_\mu^{(l)\dagger} + h.c \right), \quad (4.5)$$

onde $h.c$ indica o conjugado hermitiano do primeiro termo da Lagrangiana e a corrente $J^{(l)\mu}$ é dada por

$$J^{(l)\mu} = \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l. \quad (4.6)$$

Apesar de ser extremamente eficiente para descrever processos com uma quantidade pequena de momento transferida, esse modelo ainda tinha muitas falhas. O primeiro problema é que essa teoria não incorpora correntes neutras², que (como veremos muito em breve) estão

¹Essa classificação é segundo a forma como cada termo se transforma sob o grupo de Lorentz.

²“Correntes neutras recebem essa denominação por exibirem carga elétrica resultante nula, como um exemplo desse tipo de corrente, podemos citar a corrente eletromagnética $J_{em}^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ”. Fonte [25][pág.27]

presentes no MP. Além disso, essa teoria possuía inconsistências quanto ao uso de propagadores, pois essa estrutura levava à divergências para contribuições de ordens superiores que ocorriam em alguns outros processos. Essas inconsistências dessa teoria foram resolvidas pelo modelo de Glashow-Salam-Weinberg que, além de incorporar as correntes fracas neutras sem problema para a simetria, ainda descreve a interação fraca como sendo intermediada pelos bósons carregados W^\pm e pelo bóson neutro Z^0 .

4.1.1 Quiralidade e a teoria de Yang-Mills

É válido comentarmos sobre a teoria de Yang-Mills, pois ela foi o passo inicial da teoria de Glashow-Salam-Weinberg. O primeiro passo da criação dessa teoria foi dado quando Salam se questionou se não haveria um mecanismo possível que justificasse a massa nula dos neutrinos, assim como acontecia com o fóton na teoria eletromagnética.

Primeiramente, vamos falar um pouco sobre simetria quiral. Essa simetria é inerente a qualquer sistema de partículas, em que cada partícula apresenta uma só componente quiral (quiralidade) ou helicidade, ou seja, ou a partícula possui uma helicidade de direita ($\vec{S} \cdot \hat{p} > 0$), ou de esquerda ($\vec{S} \cdot \hat{p} < 0$), com \vec{S} e \hat{p} sendo o spin e o momento unitário da partícula, respectivamente. Essa simetria é característica de partículas com massa de repouso nula (como o fóton, por exemplo), nas quais a helicidade se torna um invariante relativístico.

A transformação de quiralidade pode ser escrita na forma:

$$\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \quad (4.7)$$

onde α é o parâmetro e γ_5 atua como gerador associado da transformação. Essa transformação pode ser escrita em termos de seno e cosseno de α de forma que chegamos a

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\gamma_5}\gamma_5 &= \gamma_5 e^{i\alpha\gamma_5} \\ e^{i\alpha\gamma_5}\gamma^\mu &= \gamma^\mu e^{i\alpha\gamma_5} \end{aligned}$$

e analisando como essas transformações atuam sobre termos vetoriais, escalares e pseudo-escalares

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = (\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma^0)\gamma^\mu(e^{i\alpha\gamma_5}\psi) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (4.8)$$

$$\bar{\psi}'\phi\psi' = (\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^0}\gamma^0)\phi(e^{i\alpha\gamma_5}\psi)(e^{i\alpha\gamma_5}\psi) = \bar{\psi}(e^{2i\alpha\gamma_5})\phi\psi \neq \bar{\psi}\phi\psi \quad (4.9)$$

$$\bar{\psi}'\phi\gamma_5\psi' = (\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma^0)\phi\gamma_5(e^{i\alpha\gamma_5}\psi) = \bar{\psi}\phi\gamma_5 e^{2i\alpha\gamma_5}\psi \neq \bar{\psi}\phi\gamma_5\psi \quad (4.10)$$

podemos ver que um vetor é invariante, enquanto que o escalar e o pseudo-escalar não é. Essa invariância vetorial nos permitirá descrever os léptons num cenário quiral, enquanto

que a variância escalar é o que nos dará a possibilidade de gerar massa para os léptons.

A violação de paridade é o que explica o fato de os neutrinos obterem apenas helicidade esquerda, enquanto que os outros léptons possuem ambas as helicidades. Salam acreditava que no começo o universo seria simétrico em relação à quiralidade até que algum mecanismo tornou os léptons massivos, porém não os neutrinos. Esse mecanismo, como veremos em breve, é o mecanismo de Higgs.

Salam então fez uso da teoria de gauge não-abeliana³ desenvolvida por Yang-Mills(YM).

Partiremos, assim como Salam, de uma teoria de YM que seja invariante sob $SU(2)_L \times U(1)_Y$ de forma que ao grupo $SU(2)_L$ está associada um número quântico de isospin J e ao grupo $U(1)_Y$ está associada a hipercarga Y . Iniciaremos então com a seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{quiral} = \sum_l \bar{L}_l \gamma^\mu i D_\mu L_l + \sum_l \bar{R}_l \gamma^\mu D_\mu R_l - \frac{1}{4} (W_{\mu\nu})^i (W^{\mu\nu})_i - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (4.11)$$

onde o índice l é o índice leptônico, que varia entre $l = e, \tau, \mu$, correspondendo ao elétron, múon e tau, respectivamente. Para garantir a invariância da Lagrangiana sob os grupos indicados anteriormente, a derivada covariante será definida como

$$D_\mu = \partial_\mu - ig(J^i(W_\mu)_i) - i\frac{g'}{2}YB_\mu, \quad (4.12)$$

onde $J_i = (\sigma_i/2)$ e σ_i representam as matrizes de Pauli, que como vimos anteriormente são geradores do $SU(2)_L$ e Y é o gerador do $U(1)_Y$. Os campos não-abelianos de gauge associados ao $SU(2)$ serão os $(W_{\mu\nu})_i$, enquanto que B_μ é o campo de gauge associado ao grupo $U(1)_Y$. Por fim, g e g' são constantes de acoplamento dos campos.

Os léptons de helicidade esquerda são descritos pelos dubletos de $SU(2)_L$, onde cada dubleto possui um neutrino e seu respectivo lépton correspondente

$$L_l = \begin{bmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{bmatrix}_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{bmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

e esse dubleto se transforma como

$$L'_l = \exp \left[i\Lambda^i J_i \right] L_l. \quad (4.14)$$

Enquanto isso os léptons de helicidade de direita serão escritos como singletos de $SU(2)_L$,

³Uma teoria não-abeliana é aquela desenvolvida sob um grupo no qual a ordem do produto de seus componentes influencia no resultado final. Obviamente a teoria abeliana é aquela em que os componentes do grupo comutam entre si.

já que não existem neutrinos de helicidade direita, que serão dados por

$$R_l = (\psi_l)_R = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi_l \quad (4.15)$$

se transformando da seguinte forma

$$(\psi_l)'_R = \exp [i\Lambda(x)Y_R] (\psi_l)_R. \quad (4.16)$$

e vale ressaltar que os léptons de esquerda também se transformam conforme

$$(\psi_l)'_L = \exp [i\Lambda(x)Y_L] (\psi_l)_L, \quad (4.17)$$

onde Y_R é a hipercarga associada aos léptons de direita e Y_L a hipercarga associada aos de esquerda. Os geradores J_i e Y seguem as seguintes relações de comutação:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad ; \quad [J_i, Y] = 0. \quad (4.18)$$

O isospin e a hipercarga obedecem a relação de Gell-Mann-Nishijima, dada por

$$eQ = e \left(J_3 + \frac{Y}{2} \right), \quad (4.19)$$

onde Q é a carga elétrica do lépton em questão. É através dessa equação que recuperamos a simetria eletromagnética $U(1)$ após a quebra espontânea de simetria do $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$. A partir dessa relação podemos montar a tabela abaixo com os valores de cargas dos léptons:

Férmion	J	J_3	Y	Q
ν_e, ν_μ, ν_τ	1/2	1/2	-1	0
e_L, μ_L, τ_L	1/2	-1/2	-1	-1
e_R, μ_R, τ_R	0	0	-2	-1

Tab. 4.1: Números quânticos de isospin fraco, hipercarga e carga elétrica de léptons. Fonte: [25]

Voltando nossa atenção para a densidade Lagrangiana, substituindo a definição de deri-

vada covariante dada em (4.12) na nossa Lagrangiana dada em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{quiral} = & \sum_l i\bar{L}_l \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu L_l + \sum_l i\bar{R}_l \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu R_l + \sum_l \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} - \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l] \frac{W_{3\mu}}{\sqrt{2}} \\
& + \sum_l \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} W_\mu^- + \sum_l \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l W_\mu^+ \\
& - \sum_l \left[\frac{g'}{4} \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} + \frac{g'}{4} \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l + \frac{g'}{2} \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_l \right] B_\mu \\
& - \frac{1}{4} (W_{\mu\nu})_i (W^{\mu\nu})^i - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde utilizamos

$$W_\mu^\pm = \frac{(W_{1\mu} \mp iW_{2\mu})}{\sqrt{2}}. \tag{4.21}$$

Podemos observar que o nosso modelo eletrofraco de Glashow-Salam-Weinberg (GSW) possui 4 bósons mediadores ($B_\mu, W_{3\mu}, W_\mu^+, W_\mu^-$), pois os geradores estão todos na representação adjunta⁴.

Dessa teoria podemos obter quatro correntes, duas carregadas, dadas por

$$J_-^{(l)\mu} = \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}, \quad J_+^{(l)\mu} = \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l \tag{4.22}$$

e duas neutras

$$K^{0\mu} = \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}, \quad I^{0\mu} = \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l \tag{4.23}$$

onde o índice 0 é referente à carga.

Essas correntes nos permitem analisar algumas propriedades interessantes da nossa teoria. Aos espinores ψ_l e $\bar{\psi}_l$ associaremos, respectivamente, as cargas $-e$ e $+e$, enquanto que aos espinores ψ_{ν_l} e $\bar{\psi}_{\nu_l}$ não teremos carga associada, pois eles representam os neutrinos e eles possuem carga nula. Por conta disso, as correntes carregadas possuem combinações dos pares $(\psi_{\nu_l}, \bar{\psi}_l)$ e $(\bar{\psi}_{\nu_l}, \psi_l)$, enquanto que as correntes neutras possuem combinações dos pares $(\psi_l, \bar{\psi}_l)$ e $(\psi_{\nu_l}, \bar{\psi}_{\nu_l})$, para que a carga total seja nula.

Além disso, a partir dessas correntes podemos identificar dois dos quatro bósons mediadores do nosso modelo, pois a corrente J_+ que possui carga $-e$ deve estar acoplada ao campo W^+ , que possui carga $+e$, enquanto que a corrente J_- que possui carga $+e$ deve estar acoplada ao campo W^- , possuindo carga $-e$, para que assim seja mantida a conservação de carga no vértice do nosso sistema. Logo, os bósons W^\pm, W_3 são mediadores do nosso modelo

⁴Representação em que, no caso de notação matricial, a dimensão da matriz equivale a dimensão do grupo.

e são os campos de gauge associados ao $SU(2)_L$. Na seção seguinte identificaremos os outros dois bósons mediadores e as massas de todos os quatro campos.

4.2 O setor de Higgs e o setor eletrofraco

Embora a teoria apresentada na seção passada descreva bem a interação eletrofraca, ela tem um grave defeito: os léptons e os bósons não possuem massa, e nós sabemos que na natureza os léptons e bósons são massivos, exceto pelos neutrinos⁵. Precisamos então implementar um mecanismo que gere massa para essas partículas ao mesmo tempo que seja compatível com as simetrias da nossa teoria. A solução para esse problema surgiu em 1964 quando alguns físicos desenvolveram o mecanismo que conhecemos como Mecanismo de Higgs. Essa nova teoria precisaria ser invariante por uma simetria local, que seria espontaneamente quebrada.

Quando uma simetria é exata, não só a Lagrangiana e a ação são invariantes, mas o estado de vácuo também o é. Simetrias desse tipo geram degenerescência, podemos citar, por exemplo, o grupo $SU(3)$ que descreve a interação forte que possui uma simetria exata e que por isso possui três quarks com massas idênticas e oito glúons com massas igualmente nulas. No caso da nossa teoria, não temos uma simetria exata e quando a Lagrangiana é invariante, mas o seu estado de vácuo não, dizemos que ocorre uma quebra espontânea de simetria. Por conta disso, a degenerescência é perdida e por tanto temos inicialmente dubletos de neutrinos e léptons de esquerda e singletos de direita, ambos não massivos, assim como os quatro bósons da nossa teoria, enquanto que após a quebra espontânea de simetria os neutrinos permanecem com massa nula, mas com os outros léptons agora massivos e com os quatro bósons com massas diferentes.

O mecanismo de Higgs consiste então em introduzir na nossa teoria um campo escalar cujos estados de vácuo violam espontaneamente a simetria da nossa Lagrangiana ($SU(2)_L \times U(1)_Y$). Através da interação dessas partículas com o campo de Higgs, termos de massa serão criados, como veremos em breve.

Aplicando a transformação de quiralidade $\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi$ na equação de Dirac, que por conveniência apresentaremos novamente aqui

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}m\psi, \quad (4.24)$$

podemos observar que o termo de massa $\bar{\psi}'m\psi' \neq \bar{\psi}m\psi$, como esperado, viola a simetria

⁵Na realidade, foi descoberto que os neutrinos são sim massivos, porém com massas muito pequenas. Essa descoberta, através das oscilações dos neutrinos, rendeu o Nobel de 2015 a Takaaki Kajita e Arthur B. McDonald. Fonte:[3]

de quiralidade. Assim, introduziremos um campos escalar para forneces massa e podemos escrever o termo de interação entre esse campo escalar e os léptons como

$$\sqrt{2}y_l\bar{L}_l\Phi R_l \quad (4.25)$$

onde y_l é uma constante de acoplamento. Desse termo de interação, podemos obter a massa dos léptons que seria $m_l = y_l\nu$, onde ν é o valor do estado de vácuo do campo de higgs Φ .

A interação se dá da seguinte forma: inicialmente temos todos os léptons não massivos que podem ter helicidade esquerda ou direita. Quando o campo de Higgs surge, ele interage com o par esquerda-direita dos léptons e fornece massa a eles igual a $m_l = y_l\nu$. Como os neutrinos só possuem helicidade de esquerda, ele não interagem com o campo de Higgs e portanto não ganham massa. Quanto aos outros léptons, após o ganho de massa é como se o par esquerda-direita agora se tornasse apenas um só lépton massivo, podendo apresentar duas componentes de helicidade.

Para preservar a invariância de Lorentz e a conservação de cargas, o campo de Higgs deve ser um dubleto de $SU(2)$ com isospin $J_H = 1/2$ e hipercarga $Y_H = 1$ escrito da forma:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

sendo a primeira componente associada a uma carga $+e$ e a segunda sendo nula.

Podemos então escrever a Lagrangiana de Higgs e implementá-la à nossa teoria. Para que a nossa teoria permaneça renormalizável e as simetrias sejam mantidas, escreveremos o termo cinético de Higgs como

$$(D^\mu\Phi)^\dagger \cdot (D_\mu\Phi), \quad (4.27)$$

onde a derivada covariante será definida da seguinte forma:

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi - i\frac{g}{2}(T \cdot W_\mu)\Phi - i\frac{g'}{2}YB_\mu\Phi. \quad (4.28)$$

Por outro lado, o potencial mais simples, renormalizável e escalar por $SU(2)$ que podemos escrever para o nosso setor de Higgs será dado por:

$$V_\Phi = -\frac{\mu^2}{2}|\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\Phi|^4 \quad (4.29)$$

onde temos necessariamente $\lambda > 0$ para que obtenhamos um vácuo estável, enquanto que o termo $-\mu^2$ garante que tenhamos mínimos não triviais ($\langle\phi\rangle \neq 0$) para valores positivos de

μ . Podemos fazer uma análise desses termos no gráfico da figura [4.1].

A análise física real desses valores na história do universo é que inicialmente, quando o universo era extremamente energético logo após o Big Bang, o termo quadrático no campo ganha correções térmicas tais que o potencial era como o dado no primeiro gráfico da figura [4.1]. Porém, conforme o universo foi resfriando, as correções térmicas foram tendendo a zero de tal forma que o potencial se deformou e possibilitou a quebra espontânea de simetria, como mostrado no último gráfico dessa figura. Foi a partir daí que as partículas receberam massa.

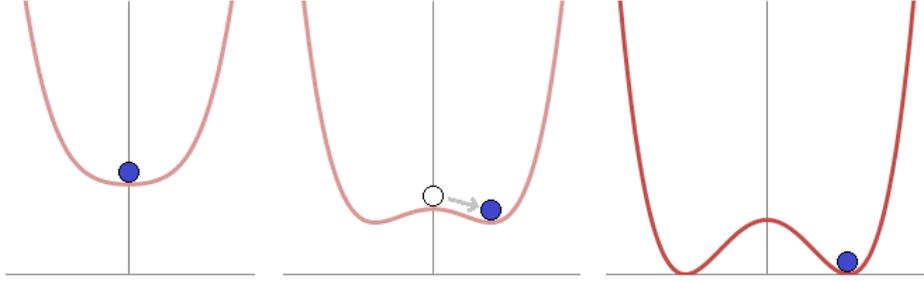


Fig. 4.1: Aqui podemos ver ilustrações bidimensionais do potencial de Higgs para diferentes valores de $\mu_{eff}^2 = \mu^2 + \delta\mu^2$, onde $\delta\mu^2$ é o termo referente às correções térmicas (com $\lambda > 0$ sempre). Acredita-se que essa mudança do potencial aconteceu quando o universo esfriou devido à sua expansão. Fonte: [28]

O gráfico real do potencial de Higgs é dado em três dimensões e é plotado em função de $\text{Re}(\Phi)$ e $\text{Im}(\Phi)$, como mostrado na figura [4.2].

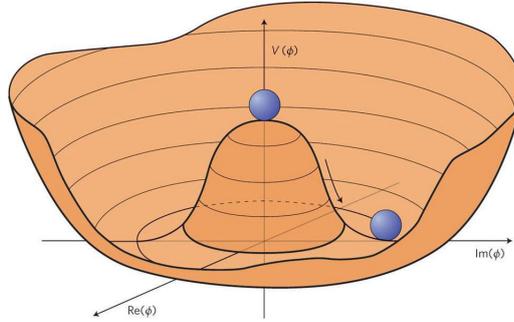


Fig. 4.2: Gráfico do potencial de Higgs em função de $\text{Re}(\Phi)$ e $\text{Im}(\Phi)$. Fonte: [9]

Voltando nossa atenção para o setor de Higgs da Lagrangiana do nosso modelo, podemos então escrever a Lagrangiana de Higgs em função dos termos apresentados nas equações (4.25), (4.27) e (4.29)

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D^\mu \Phi)^\dagger \cdot (D_\mu \Phi) - V_\Phi + \sqrt{2} \sum_l y_l (\bar{L} \Phi R_l + \bar{R} \Phi L_l), \quad (4.30)$$

na qual inserimos o último termo para que a Lagrangiana permaneça hermitiana.

Podemos então escrever a Lagrangiana completa da nossa teoria antes da quebra de simetria, juntando \mathcal{L}_{quiral} e \mathcal{L}_{Higgs} em uma só, que chamaremos de Lagrangiana de GSW

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GSW} = & \sum_l \bar{L}_l \gamma^\mu i D_\mu L_l + \sum_l \bar{R}_l \gamma^\mu i D_\mu R_l - \frac{1}{4} (W_{\mu\nu})_i (W^{\mu\nu})^i - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + (D^\mu \Phi)^\dagger \cdot (D^\mu \Phi) - V_\Phi + \sqrt{2} \sum_l y_l (\bar{L}_l \Phi R_l + \bar{R}_l \Phi L_l), \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu - ig(J^i(W_\mu)_i) - i\frac{g'}{2}YB_\mu. \quad (4.32)$$

Nessa derivada covariante definimos $J_i = (J^+, J_3, J^-)$ e $(W_\mu)_i = (W_\mu^+ / \sqrt{2}, W_3, W_\mu^- / \sqrt{2})$, sendo

$$J_\pm = \sigma_1/2 \pm i(\sigma_2/2), J_3 = \sigma_3/2 \quad (4.33)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli.

Buscamos agora o valor de vácuo do campo de Higgs, que será um mínimo absoluto de energia, para que possamos determinar a massa dos quatro bósons da nossa teoria e dos léptons. É válido observar que esse estado de vácuo quebra a simetria $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, mas preserva a simetria $U(1)_{em}$ referente ao eletromagnetismo, por isso os outros bósons ganham massa, mas o fóton não.

No modelo padrão é necessário que o estado de vácuo não possua spin, para que se possa manter a invariância de Lorentz. Assim, no estado de vácuo o valor de todos os outros campos é nulo, exceto o de Higgs. Dessa forma, a Lagrangiana de GSW no vácuo será dada apenas por

$$\mathcal{L}_V = (\partial^\mu \Phi)^\dagger \cdot (\partial_\mu \Phi) - V_\Phi. \quad (4.34)$$

Assim, a componente Θ^{00} do tensor de energia-momento que é equivalente a energia do sistema, será dada por

$$\Theta^{00} = |\partial_0 \Phi|^2 + |\nabla \Phi|^2 + V_\Phi. \quad (4.35)$$

Como os temos $|\partial_0 \Phi|^2 \geq 0$ e $|\nabla \Phi|^2 \geq 0$, então o valor mínimo para essas termos é zero, de forma que teremos

$$\Theta_{min}^{00} = V_{\phi min}, \quad (4.36)$$

logo minimizar a energia é minimizar o potencial de Higgs.

Sabemos que o mínimo de potencial pode ser encontrado fazendo $\frac{dV_\Phi}{d\Phi} = 0$ e partir daí

podemos encontrar o módulo quadrado do mínimo do campo de Higgs

$$|\Phi_{min}|^2 = |\Phi_{min}^+|^2 + |\Phi_{min}^0|^2 = \frac{\mu^2}{h}. \quad (4.37)$$

Para que a simetria $U(1)_{em}$ do eletromagnetismo seja preservada, o estado de vácuo não pode estar carregado. Assim, para que esse estado do campo de Higgs permaneça invariante sob $U(1)_{em}$, a sua componente Φ^+ deve ser nula e com isso ficamos com

$$|\Phi_{min}^0|^2 = \frac{\mu^2}{h} \quad (4.38)$$

e podemos escrever o nosso campo no vácuo como

$$\Phi_\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

onde

$$\nu = \sqrt{\frac{\mu^2}{h}} \quad (4.40)$$

Podemos facilmente constatar que esse estado de vácuo quebra as simetrias $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$ ao mesmo tempo que preserva a simetria $U(1)_{em}$ ⁶.

Com esse valor de ν , podemos encontrar a massa dos léptons, que será dada por:

$$M_l = y_l \nu = y_l \sqrt{\frac{\mu^2}{h}}, \quad (4.41)$$

onde y_l é a constante de acoplamento que depende de cada lépton.

Vamos agora considerar pequenas flutuações em torno do vácuo do campo de higgs. Como o valor de vácuo é fixo, a ação do campo será representada através dessas flutuações, de forma que podemos escrever que o campo de Higgs será dado por

$$\Phi' = \Phi_\nu + \Phi'' = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta + i\delta \\ \nu + h + i\rho \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

onde $\eta, \delta, h, \rho \ll \nu$, pois são apenas pequenas flutuações em comparação a esse valor.

Podemos reescrever essa equação na forma de uma transformação de $SU(2)$

$$\Phi' = e^{i\omega_i \sigma_i / 2} \begin{bmatrix} 0 \\ (\nu/\sqrt{2} + h) \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

⁶Para maiores detalhes, consultar [25]

onde ⁷

$$\omega_1 = 2\delta/(v/\sqrt{2} + \chi), \quad \omega_2 = 2\eta/(v/\sqrt{2} + \chi), \quad \omega_3 = -2\rho/(v/\sqrt{2} + \chi). \quad (4.44)$$

Como nossa Lagrangiana é invariante sob $SU(2)$, podemos realizar uma transformação dessa simetria sem alterar a física do problema de forma que essa transformação seja inversa à realizada na equação (4.43) e assim nosso campo possa simplesmente ser escrito como

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ (v/\sqrt{2} + \chi) \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Nossa Lagrangiana total pode ser decomposta em quatro partes

$$\mathcal{L}_{GSW} = \mathcal{L}_{Higgs+W+B} + \mathcal{L}_{Higgs+l} + \mathcal{L}_{Higgs+Higgs} + \mathcal{L}_{W+B+l} \quad (4.46)$$

onde W e B representam os quatro bósons da nossa teoria e l representa os léptons. Essas quatro partes representam, respectivamente, a Lagrangiana da interação do campo de Higgs com os campos de gauge, a Lagrangiana da interação do campo de Higgs com os léptons, a Lagrangiana de auto interação do campo de Higgs e a Lagrangiana de interação dos léptons com os campos de gauge.

A Lagrangiana de interação $Higgs + l$ é a responsável por gerar a massa dos léptons e já trabalhamos com ela na equação(4.25), encontrando assim a massa dos léptons dada em (4.41). A Lagrangiana de auto interação do campo possui apenas termos de interação do higgs com ele mesmo e seu termo de massa, mas esse não é o foco do nosso trabalho. A Lagrangiana de $W + B + l$ é a responsável pela geração das correntes eletrofracas do modelo padrão⁸, o que também não é o foco do trabalho. Nos restringiremos então a estudar a Lagrangiana de interação $Higgs + W + B$, que é a responsável pela geração de massa dos campos bosônicos da nossa teoria.

A Lagrangiana em questão será dada pelo termo cinético de Higgs dado em (4.27), sendo

⁷Perceba que essa transformação é quase infinitesimal, por os valores de ω_i são muito pequenos.

⁸Ver mais detalhes em [25]

então escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{H+W+B} &= (D^\mu \Phi_\nu)^\dagger \cdot (D_\mu \Phi_\nu) = \left[\partial^\mu \Phi_\nu - i \frac{g}{2} (\sigma_i (W^\mu)^i) \Phi_\nu - i \frac{g'}{2} Y B^\mu \Phi_\nu \right]^\dagger \\
&\quad \cdot \left[\partial^\mu \Phi_\nu - i \frac{g}{2} (\sigma_i (W^\mu)^i) \Phi_\nu - i \frac{g'}{2} Y B^\mu \Phi_\nu \right] = \\
&\quad \frac{g^2}{4} \Phi_\nu^\dagger (\sigma_i (W^\mu)^i) (\sigma_i (W_\mu)^i) \Phi_\nu + \frac{g g'}{2} \Phi_\nu^\dagger (\sigma_i (W^\mu)^i) B_\mu \Phi_\nu \\
&\quad + \frac{g'^2}{4} B^\mu B_\mu \Phi_\nu^\dagger \Phi_\nu
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Usando algumas relações de álgebra linear, considerando o valor de vácuo do campo de higgs $|\Phi_\nu| = v^2/2$ e fazendo uso dos seguintes resultados

$$\begin{aligned}
\frac{g^2 v^2}{8} (W^\mu)^i (W_\mu)^i &= \frac{g^2 v^2}{4} W^{\mu+} (W_\mu^+)^* + \frac{g^2 v^2}{8} W_3^\mu W_{3\mu} \\
\frac{g g'}{2} \Phi_\nu^\dagger (\sigma_i (W^\mu)^i) B_\mu \Phi_\nu &= -\frac{g g' v^2}{4} B_\mu W_3^\mu
\end{aligned} \tag{4.48}$$

chegamos à seguinte expressão da Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{H+W+B} = \frac{g^2 v^2}{4} W^{\mu+} (W_\mu^+)^* + \frac{g^2 v^2}{8} W_3^\mu W_{3\mu} - \frac{g g' v^2}{4} B_\mu W_3^\mu + \frac{g'^2 v^2}{8} B^\mu B_\mu. \tag{4.49}$$

Da equação (4.21) é fácil ver que $(W^+)^* = W^-$, ou seja, os bósons W^\pm são um par partícula e antipartícula e portanto possuem a mesma massa. Da equação (4.49) podemos identificar o termo de massa desses bósons⁹, tal que sendo M_W a massa dos bósons,

$$M_W = \frac{g v}{2}. \tag{4.50}$$

Vamos agora trabalhar com os termos restantes da nossa Lagrangiana, que estão em função dos campos W_3^μ e B^μ . Podemos reescrever os termos remanescentes da nossa Lagrangiana de forma matricial

$$\mathcal{L}_{H+W_3+B} = \frac{g^2 v^2}{8} W_3^\mu W_{3\mu} - \frac{g g' v^2}{4} B_\mu W_3^\mu + \frac{g'^2 v^2}{8} B^\mu B_\mu = \frac{1}{2} V^T M V, \tag{4.51}$$

⁹Lembrando que o termo de massa é o coeficiente que acompanha um termo de campo ao quadrado

onde

$$V = \begin{bmatrix} B^\mu \\ W_3^\mu \end{bmatrix} \quad M = \frac{v^2}{4} \begin{bmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Podemos identificar V como a matriz de campos e M como a matriz das massas, por razões que ficarão mais claras a seguir.

Aplicaremos uma transformação de similaridade¹⁰ na nossa matriz M a fim de diagonalizá-la

$$M' = R_W M R_W^T = \begin{bmatrix} M_A^2 & 0 \\ 0 & M_Z^2 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

sendo R_W uma matriz de rotação dada por

$$R_W = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Fazendo uso de algumas técnicas de álgebra linear, podemos diagonalizar a matriz M com facilidade chegando a

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{(g'^2 + g^2)v^2}{4} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

daí, vemos que $M_A = 0$ e $M_Z^2 = \frac{(g'^2 + g^2)v^2}{4}$.

Da mesma forma que aplicamos a transformação de similaridade em M , devemos também aplicar em V . A transformação não muda a física do sistema, mas altera a base vetorial em que estamos trabalhando, logo para termos tudo na mesma base devemos encontrar a nova matriz de campo V' , dada por

$$V' = R_W V = V = \begin{bmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

onde teremos

$$\begin{aligned} A^\mu &= \cos \theta B^\mu + \sin \theta W_3^\mu; \\ Z^\mu &= -\sin \theta B^\mu + \cos \theta W_3^\mu. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Os campos A^μ e Z^μ correspondem verdadeiramente aos campos do fóton e do Z^0 .

¹⁰Uma transformação de similaridade muda a forma da matriz, mas não altera a matemática ou a física do sistema.

A partir disso, podemos reescrever nossa Lagrangiana de (4.51) como

$$\mathcal{L}_{H+A+Z} = \frac{1}{2}V'^T M' V' = 0 \cdot A^\mu + \frac{1}{2}M_Z Z_\mu Z^\mu. \quad (4.58)$$

Vemos então que o fóton realmente não possui massa, enquanto que o bóson Z^0 é massivo com massa dada por

$$M_Z = \frac{(g'^2 + g^2)^{1/2}v}{2} \quad (4.59)$$

Obtivemos então todas as massas desejadas, sendo a massa de W^\pm , Z^0 e dos léptons dadas por

$$M_W = \frac{gv}{2}, \quad M_Z = \frac{(g'^2 + g^2)^{1/2}v}{2}, \quad M_l = y_l v = y_l \sqrt{\frac{\mu^2}{h}} \quad (4.60)$$

onde g , g' e y_l são constantes de acoplamento e v é dado pela equação (4.40).

Note que a razão entre as massas do W e do Z depende somente de g e g' (e da representação do Higgs sob $SU(2)$), e portanto estão correlacionadas com a estrutura de gauge do Modelo Padrão.

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho apresentamos o Modelo Eletrofraco de Glashow-Salam-Weinberg com o mecanismo de Higgs e pudemos observar como esse modelo gera a massa das partículas sem haver qualquer inconsistência com as simetrias do modelo padrão.

Compreendemos porque o formalismo lagrangiano é o mais apropriado para se trabalhar no modelo padrão, visto que ele expõe as simetrias do sistema. Além disso, estudamos sobre grupos de simetria que foram essenciais no desenvolvimento da teoria. Assim, adquirimos o embasamento teórico necessário para montarmos o modelo de GSW.

Pudemos observar como a teoria de GSW, sozinha, descreve perfeitamente a interação eletrofraca, porém peca por não aceitar termos de massa sem que haja uma quebra de simetria. Foi assim que o mecanismo de Higgs, externo à teoria, foi implementado, na condição de um campo escalar complexo, tal que seu valor de vácuo quebrava a simetria do modelo e portanto a interação com o campo de Higgs tornava os outros campos de bósons e léptons massivos, com exceção do fóton e do neutrino.

Dessa forma o problema da massa foi resolvido e, como o mecanismo de Higgs é uma implementação externa, isso não acarreta qualquer problema à teoria de GSW, logo as simetrias do modelo padrão são respeitadas. Assim, encontramos as massas do setor eletrofraco do modelo padrão, sendo a massa de W^\pm , Z^0 e dos léptons dadas por

$$M_W = \frac{g\nu}{2}, \quad M_Z = \frac{(g'^2 + g^2)^{1/2}\nu}{2}, \quad M_l = y_l\nu = y_l\sqrt{\frac{\mu^2}{h}}. \quad (5.1)$$

Até os dias atuais, essa teoria ainda é a que melhor descreve a interação eletrofraca. Ainda assim, da mesma forma que com o avanço dos experimentos a teoria inicial da interação fraca teve que ser alterada, também agora encontramos novos problemas cruciais no modelo. Podemos citar, por exemplo, a descoberta das oscilações dos neutrinos e conseqüentemente

de suas massas (que rendeu o Nobel de 2015), o que é inconsistente com a teoria estudada que mostra que eles não são massivos.

Dessa forma, temos como perspectivas futuras estudar as falhas do Modelo Padrão e os possíveis mecanismos que possam consertá-las. Além disso, estenderemos o estudo da geração de massas para a interação forte, que possui como grupo de simetria o $SU(3)$, conforme foi comentado brevemente no decorrer do trabalho.

Bibliografia

- [1] *Albert Einstein*. Nov. de 2019. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein.
- [2] R Aldrovandi e JG Pereira. “Notes for a Course on Classical Fields (2004)”. Em: *Apostila, IFT (Instituto de Física Teórica), Sao Paulo, Brazil* ().
- [3] *All Nobel Prizes in Physics*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics>.
- [4] *Arthur Compton*. Out. de 2019. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Compton.
- [5] *ATLAS*. URL: <https://home.cern/science/experiments/atlas>.
- [6] *Bohr model*. Out. de 2019. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Bohr_model.
- [7] *CERN Accelerating science*. URL: <http://united-states.cern/physics/standard-model-and-beyond>.
- [8] *CMS*. URL: <https://home.cern/science/experiments/cms>.
- [9] John Ellis. “Particle physics today, tomorrow and beyond”. Em: *International Journal of Modern Physics A* 33.02 (2018), p. 1830003.
- [10] *Ernest Rutherford*. Out. de 2019. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernest_Rutherford.
- [11] *Ernst Stueckelberg*. Set. de 2019. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Stueckelberg.
- [12] *Fermilab*. URL: https://www.fnal.gov/pub/inquiring/physics/discoveries/top_quark.html.
- [13] Alysson F. Ferrari. “Teoria Clássica de Campos”. Tese de dout. 2013.
- [14] David J. Griffiths. *Introduction to elementary particles*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004.

- [15] *James Chadwick*. Mai. de 2019. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/James_Chadwick.
- [16] *John Dalton*. Set. de 2019. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Dalton.
- [17] *Joseph John Thomson*. Set. de 2019. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph_John_Thomson.
- [18] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica analítica*. Livraria da Física, 2007.
- [19] *Max Planck*. Out. de 2019. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/Max_Planck.
- [20] *Modelo atômico de Dalton*. Set. de 2019. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelo_at%C3%B4mico_de_Dalton.
- [21] *Modelo atômico de Thomson*. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelo_at%C3%B4mico_de_Thomson#cite_note-MAT1-1.
- [22] João Barcelos Neto. *Matemática para físicos com aplicações: Vetores, tensores e spinors*. Livraria da Física, 2010.
- [23] *Niels Bohr*. Out. de 2019. URL: https://pt.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr.
- [24] *Physicists Find First Direct for Tau Neutrino at Fermilab*. URL: <https://news.fnal.gov/2000/07/physicists-find-first-direct-evidence-tau-neutrino-fermilab/>.
- [25] Victor Elias Mouchrek dos Santos. “Acoplamentos não-mínimos de dimensão cinco com violação da simetria de lorentz nos setores eletrofraco e hadrônico”. Tese de dout. 2018.
- [26] Matthew Schwartz. “Spinor Solutions and CTP”. Em: (2012).
- [27] Jakob Schwichtenberg. *Physics from Symmetry*. Springer, 2018.
- [28] *Spontaneous symmetry breaking*. Jul. de 2019. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Spontaneous_symmetry_breaking.
- [29] John R Taylor. *Classical mechanics*. University Science Books, 2005.
- [30] *The Nobel Prize in Physics 1933*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1933/dirac/facts/>.
- [31] *The Nobel Prize in Physics 1936*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1936/anderson/facts/>.
- [32] *The Nobel Prize in Physics 1945*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1945/pauli/facts/>.

-
- [33] *The Nobel Prize in Physics 1949*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1949/yukawa/facts/>.
- [34] *The Nobel Prize in Physics 1950*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1950/powell/facts/>.
- [35] *The Nobel Prize in Physics 1965*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1965/feynman/facts/>.
- [36] *The Nobel Prize in Physics 1969*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1969/gell-mann/facts/>.
- [37] *The Nobel Prize in Physics 1979*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1979/summary/>.
- [38] *The Nobel Prize in Physics 1995*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1995/reines/biographical/>.
- [39] *The Nobel Prize in Physics 1995*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1995/reines/facts/>.
- [40] *The Nobel Prize in Physics 2013*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2013/summary/>.
- [41] *The Physics*. Jul. de 2017. URL: <https://atlas.cern/discover/physics>.