UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DIEGO ELOI MISQUITA GOMES

ESTIMATIVAS DO GRADIENTE NA FRONTEIRA PARA SOLUÇÕES DE DESIGUALDADES DIFERENCIAIS TOTALMENTE NÃO LINEARES

FORTALEZA

2019

DIEGO ELOI MISQUITA GOMES

ESTIMATIVAS DO GRADIENTE NA FRONTEIRA PARA SOLUÇÕES DE DESIGUALDADES DIFERENCIAIS TOTALMENTE NÃO LINEARES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Orientador: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G613e Gomes, Diego Eloi Misquita.
Estimativas do gradiente na fronteira para soluções de desigualdades diferenciais totalmente não lineares / Diego Eloi Misquita Gomes. – 2019.
81 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira.
Coorientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. EDP's elípticas. 2. Dini continuidade. 3. Soluções no sentido da viscosidade. 4. Estimativas de fronteira do gradiente. 5. Regularidade de fronteira do gradiente. I. Título.

CDD 510

DIEGO ELOI MISQUITA GOMES

ESTIMATIVAS DO GRADIENTE NA FRONTEIRA PARA SOLUÇÕES DE DESIGUALDADES DIFERENCIAIS TOTALMENTE NÃO LINEARES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Aprovada em: 26/07/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Co-Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Renan Dantas Medrado
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Prof. Dr. Basilis Gidas
Brown University

A Deus, autor e consumador da minha fé, minha família e amigos que me inspiraram e me incentivaram a chegar ao final desta etapa.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus por me dar forças para que conseguisse terminar essa etapa tão importante da vida.

Aos meus pais e meu irmão, que sempre me incentivaram, me sustentaram e deram forças para que eu chegasse até aqui, além de servirem como fonte de inspiração.

À minha maravilhosa esposa Izabela, minha melhor amiga e cúmplice da vida, que sempre esteve ao meu lado, me acolhe e me incentiva a ser melhor. Obrigado por sempre estar e entender quando precisei não estar com você para terminar este projeto. Amo você!

Agradeço ao professor Diego Moreira, que, para além de um grande professor e orientador, mostrou-se grande como pessoa, teve muita paciência e me ensinou tantas coisas que não sei descrever o quanto sou grato por todos esses anos. O senhor me inspira!

Quero ainda agradecer em especial ao professor Ederson Braga, com quem tive momentos únicos de aprendizados matemáticos que foram de grande importância, além de sempre me incentivar.

Aos professores Renan Medrado, Raimundo Leitão e Basilis Gidas por terem aceitado prontamente participarem da minha banca examinadora.

Aos queridos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFC, meus sinceros agradecimentos por terem contribuído tanto na minha formação desde a graduação ao doutorado, dentre eles destaco: Alexandre Gurgel, Daniel Cibotaru, Edson Sampaio, Ernani Ribeiro, Fábio Montenegro, João Lucas, Jorge Herbert e Marcos Melo, os quais certamente serviram ainda de fonte de inspiração para minha carreira, jamais os esquecerei.

Tenho ainda que agradecer aos meus amigos da Pós-Graduação (alunos e ex-alunos): Adam Oliveira, Alex Santos, Amilcar Montalbán, Danuso Highlander, Davi Ribeiro, Davi Lustosa, Diego Silva, Diego Sousa, Eddygledson Gama (vulgo Nino), Elzimar Rufino, Emanuel Viana, Fabrício Oliveira, Fagner, Francisca Damiana, Francisco Yure, Halyson Baltazar, Israel Evangelista, Janielly Araújo, Jocel Faustino, J. Tiago Cruz, Léo Ivo, João Luiz, João Victor, Joserlan da Silva, Marcos Raniere, Nícolas Alcântara, Renan Santos, Renato Targino, Renivaldo Sena, Roger Oliveira, Tiago Gadelha, Tiarlos Cruz, Valdir Junior, Wanderley Pereira, Wesley Vieira e Zé Eduardo. Muito obrigado por esses tantos anos de convivência, ajuda, pela força(principalmente o Wanderley) e pelas conversas durante o café da tarde no seu Diniz ou na Sâmia. Alguns destes me acompanham há tempos, desde a graduação ou mestrado, muito obrigado gente, vocês são pessoas marcantes na minha vida!

Além destes, quero aqui agradecer meus colegas que me incentivaram desde a graduação, que me inspiraram a seguir com a pós-graduação, são estes: Adenilson Arcanjo, Luiz Paulo, Marlon Oliveira, Hudson Lima, Rafael Rezende e Ramon Moreira.

Sem dúvida isso não aconteceria sem vocês, obrigado pessoal!

Não posso deixar de agradecer à instituição de ensino à qual estou vinculado, IFCE-Campus Canindé, pelo tempo no qual pude estar afastado e deixo aqui um agradecimento também aos meus amigos professores de lá, os quais me deram força e me incentivaram para a conclusão do trabalho.

Agradecimentos também a Andrea Dantas e Jessyca Soares, secretárias da Pós-Graduação, por toda competência e agilidade.

Aos funcionários da biblioteca da PGMAT, por toda a agilidade e presteza.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Pois nele vivemos, nos movemos e existimos.” (At 17:28)

RESUMO

Neste trabalho obtemos uma estimativa e a regularidade do gradiente para soluções de desigualdades diferenciais totalmente não lineares com coeficientes não limitados e com crescimento quadrático no gradiente. O dado de fronteira prescrito é $C^{1,Dini}$ e soluções são entendidas no âmbito de soluções no sentido da viscosidade. Mais especificamente, o coeficiente do termo de transporte e o segundo membro pertencem a L^q com $q > n$. Mostramos que u é de classe C^1 ao longo da fronteira com certo módulo de continuidade e estimativas. Nossos resultados estendem as estimativas notáveis e pioneiras no tema obtidas por N. Krylov (1983), O. Ladyzhenskaya e N. Ural'tseva (1989). Por fim, mostramos que nossos resultados são essencialmente ótimos, uma vez que soluções com o segundo membro em L^n não são sequer Lipschitz contínuas em pequenas vizinhanças da fronteira.

Palavras-chave: EDP's elípticas. Dini continuidade. Soluções no sentido da viscosidade. Estimativas de fronteira do gradiente. Regularidade de fronteira do gradiente.

ABSTRACT

In this work we obtain an estimate and a regularity of the gradient for solutions to fully nonlinear differential inequalities with unbounded coefficients and quadratic growth on the gradient. The boundary data is $C^{1,Dini}$ and solutions are understood in the viscosity sense. More specifically, the drift term and the RHS are in L^q with $q > n$. We prove that $u \in C^1$ on the flat boundary with some modulus of continuity with the estimates. Our results can be seen as extended versions of remarkble estimates obtained by N. Krylov (1983) and O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva (1989). Finally, we also show that in the case RHS is in L^n the result does not hold and solutions may fail to be even Lipschitz on a neighborhood of the boundary wich means that, in the RHS sense, this theorem is sharp.

Keywords: Elliptic PDE's. Dini continuity. Viscosity Solutions. Boundary gradient estimates. Boundary gradient regularity .

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta tese, estenderemos um dos teoremas mais conhecidos de N. Krylov, o qual foi provado nos anos 80 no contexto de pesquisa por uma estimativa C^2, que era um ponto que faltava para resolver um problema relevante para a época para equação do Monge-Àmpere com condições de Dirichlet:

$$\begin{cases} Det(D^2u) & = \Psi(x,u,\nabla u) \text{ em } \Omega \\ u & = \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

A fim de especificarmos qual dos teoremas de Krylov vamos estender, apresentamos o mesmo abaixo:

Teorema 1.1 (Krylov, KRYLOV (1983)). *Seja $u \in W^{2,n}(B^+_{R_0}) \cap C^0(\overline{B}^+_{R_0})$ uma solução forte de $Lu = Trace(A(x)D^2u) = f$ em $B^+_{R_0}$ e $u = 0$ em $B'_{R_0} := \partial B^+_{R_0} \cap \{x_n = 0\}$ onde A é uma (λ,Λ)[1]$-$matriz uniformemente elíptica de ordem n e $f \in L^\infty(B^+_{R_0})$. Então, para todo $r \leq R_0$, temos*

$$\underset{B^+_r}{osc}\left(\frac{u}{x_n}\right) \leq C\left(\frac{r}{R_0}\right)^\alpha \left(\underset{B^+_{R_0}}{osc}\left(\frac{u}{x_n}\right) + ||f||_{L^\infty(B^+_{R_0})}\right) \tag{1}$$

onde $\alpha \in (0,1)$ e $C > 0$ são constantes universais dependendo apenas de n, λ, Λ.

É possível provar que a estimativa acima na verdade implica na existência do gradiente clássico [2] da solução na fronteira B'_{R_0} e que o gradiente é Hölder contínuo na mesma. Tem-se ainda que vale a seguinte estimativa:

$$\underset{B^+_r}{osc}\,|\nabla u(x',0)| \leq C\left(\frac{r}{R_0}\right)^\alpha \left(\underset{B^+_{R_0}}{osc}\left(\frac{u}{x_n}\right) + ||f||_{L^\infty(B^+_{R_0})}\right). \tag{2}$$

O teorema é o Teorema 9.31 em GILBARG (2001)[3]. O resultado do Krylov é, de fato, impressionante! Sabemos, da teoria de Krylov-Safonov em KRYLOV e SAFONOV (1979, 1980) e SAFONOV (1988) que soluções de equações uniformemente elípticas com coeficientes mensuráveis são, no máximo, Hölder contínuas dentro do domínio e então o gradiente clássico pode nem existir no interior. O teorema do Krylov se conforma com a observação de que soluções de equações do tipo não divergente tendem a se comportar melhor na fronteira.

[1] Isso significa que A é uma matriz simétrica de ordem n tal que $\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi,\xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in B^+_1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

[2] De fato, o resultado do Krylov implica na existência da derivada normal u_{x_n} ao longo de B'_1 desde que o gradiente tangencial zera em B'_1.

[3] Para uma apresentação diferente que melhor se adapte aos nossos propósitos, referenciamos o Teorema 5.1 abaixo.

Além do Teorema de Krylov, destacamos um teorema importante, também provado na década de 80 por O. Ladyzhenskaya e N. Ural'tseva. Tal teorema foi provado em uma generalidade maior que o anterior, pois, além de ter sido provado para inequações diferenciais, há um coeficiente do termo gradiente ao quadrado, além do domínio considerado ser o gráfico de uma função $W^{2,q}$:

Teorema 1.2 (O. Ladyzhenskaya-N. Ural'tseva 89'). *Seja $u \in W^{2,n}(B_1^+)$ solução de:*

$$|Tr(A(x)D^2u)| \leq \gamma(x)|\nabla u| + \rho|\nabla u|^2 + f \text{ em } B_1^+$$

onde A é uniformemente elíptica e limitada, $\gamma, f \in L^q(B_1), q > n$.

$$\underset{B_r^+}{osc}\left(\frac{u}{x_n}\right) \leq C\left(\frac{r}{R_0}\right)^{\alpha},$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, ||\gamma||_{L^q(B_1^+)}, ||f||_{L^q(B_1^+)}, \rho) > 0$.

Ao longo dos últimos 15 anos, muitas extensões desta teoria para EDP's elípticas totalmente não lineares foram publicadas, algumas destas no sentido de considerar os segundos membros com diferentes regularidades, coeficientes apenas mensuráveis ou não-limitados nas equações de estrutura dos operadores de *Pucci*. Alguns destes resultados consideraram ainda o crescimento quadrático no gradiente, como (KOIKE e SWIECH (2012); KOIKE e A. (2009, 2007); KOIKE e A (2009); KOIKE e NAKAGAWA (2009); KOIKE e SWIECH (2004); SIRAKOV (2010); NORNBERG (2018a)). Além disso, mais recententemente uma extensão de estimativas $C^{1,\alpha}$ interiores e até a fronteira para esta teoria foi publicada considerando também o crescimento quadrático no gradiente(NORNBERG (2018a)). Neste trabalho, apresentamos uma extensão do teorema 1.1, para soluções L^n no sentido da viscosidade, as quais são contínuas e limitadas, satisfazendo as inequações abaixo nas quais o dado de fronteira é pontualmente $C^{1,Dini}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2u) + \gamma(x)|\nabla u| + \varrho|\nabla u|^2 + \sigma(x)u &\geq -|f| \quad \text{in} \quad B_1^+ \qquad (3)\\ \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u) - \gamma(x)|\nabla u| - \varrho|\nabla u|^2 + \sigma(x)u &\leq |f| \quad \text{in} \quad B_1^+ \qquad (4)\\ u &= \varphi \quad \text{on} \quad B_1'. \qquad (5) \end{aligned}$$

Aqui, $0 \leq \gamma \in L^q(\Omega)$ e $\sigma, f \in L^q(\Omega)$ com $q > n$ e $\varrho > 0$. Os operadores $\mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}$ acima são os operadores extremais de Pucci com constantes $0 < \lambda < \Lambda$. Nós também mostramos que o resultado não vale se $f \in L^n(B_1^+)$. Na verdade, se isso acontece, as soluções podem não ser nem Lipschitz em uma vizinhança bem pequena da fronteira. Nosso resultado pode ser visto como uma extensão de um teorema similar contido em SILVESTRE e SIRAKOV (2014), onde os autores obtiveram a versão com coeficientes limitados e sem o termo quadrático (i.e, $\gamma, f \in L^\infty(B_1^+)$ e $\varrho = 0$). Ainda no caso em que $\varrho = 0$ e os coeficientes $\gamma, f \in L^q(B_1^+)$ com $q > n$ e dado de fronteira $C^{1,Dini}$ nosso resultado é novo. Outrossim, existem algumas diferenças do nosso trabalho com relação a SILVESTRE e SIRAKOV (2014), pois as equações diferenciais que nós utilizamos aqui não tem uma espécie de *"envelope class"* , i.e, se $\gamma, f \in L^\infty$, então $S^*(\gamma; f) \subset S^*(||\gamma||_{L^\infty}; ||f||_{L^\infty})$. Além disso, existem algumas sutilezas ao lidarmos com equações com crescimento quadrático no gradiente, como podem ser vistas em (3) e (4). Para essas equações, existem alguns resultados clássicos de CAFFARELLI *et al.* (1996) que não valem. Por exemplo, o ABP clássico não vale em geral como podemos ver no exemplo da seção 3 de KOIKE e SWIECH (2004). Abaixo, apresentamos o teorema principal desta tese, assim como um corolário do teorema:

Teorema 1.3 (**Existência pontual e estimativa da derivada normal na fronteira).** *Seja* $u \in C^0(\overline{B}_1^+) \cap S^*(\gamma, \varrho, f)$ *em* B_1^+ *onde* $\gamma, f \in L^q(B_1^+)$ *com* $q > n$, $\varrho \geq 0$ *e* $\beta_* := \min\left\{1 - n/q, \alpha_{00}^-\right\}$. *Considere o dado de fronteira* $\varphi = u_{|_{B_1'}}$ *satisfazendo* $\varphi \in C^{1,\omega}(0)$ *onde* $\omega \in \mathcal{DM}_{\beta_*}^+$. *Seja* L *o polinômio de Taylor de* φ *na origem e definamos*

$$M_0^{\#} := ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\omega}(0)} + ||f||_{L^q(B_1^+)} + \Big(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho|\nabla\varphi(0)|\Big)|\nabla\varphi(0)|$$

Então, existe um único $\Psi_0 \in \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $x = (x', x_n) \in B_{d_\omega}^+$,

$$|u(x) - L(x', 0) - \Psi_0 \cdot x_n| \leq T_0 \cdot M_0^{\#} \cdot |x| \cdot (\vartheta_\omega)_{\beta_*}^{\#}(|x|), \tag{6}$$

$$|\Psi_0| \leq T_0 \cdot M_0^{\#}, \tag{7}$$

onde

$$(\vartheta_\omega)_{\beta_*}^{\#}(t) := t^{\beta_*} + \vartheta_\omega(t) \quad \text{for} \quad t \in [0, d_\omega].$$

Em particular, existe (e é finita) a derivada normal (com a estimativa acima)

$$D_{x_n}u(0) := \lim_{t\to 0^+} \frac{u(te_n) - u(0)}{t} = \Psi_0. \tag{8}$$

Aqui,

$$T_0 = T_0(n, q, \lambda, \Lambda, ||\gamma||_{L^q(B_1^+)}, \varrho, d_\omega, M_0^{\#}, D_\omega) > 0.$$

Podemos ainda tomar T_0 *como*

$$T_0 = J_0 \cdot d_\omega^{-\Theta_1} \left[1 + \left[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho\Big(|\nabla\varphi(0)| + M_0^{\#}\Big)\right]^{\Theta_0}\right]$$

onde $J_0 = J_0(n,q,\lambda,\Lambda,D_\omega) > 0$ *e* Θ_0, Θ_1 *são constantes positivas que dependem de* n,q,λ,Λ.

Em particular, se $\varrho = 0$ *a constante* T_0 *acima não depende de* $\nabla\varphi(0)$ *nem de* $M_0^{\#}$.
No caso, o dado de fronteira $\varphi \in C^{1,\omega}(B_1')$, o que significa que $\varphi \in C^1(B_1')$ e

$$[\nabla\varphi]_{C^{0,\omega}(B_1')} = \sup_{\substack{x,y\in B_1', x\neq y\\ |x-y|\leq d_\omega}} \frac{|\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y)|}{\omega(|x-y|)} < \infty.$$

Corolário 1.1. *Seja* $u \in C^0(\overline{B}_1^+) \cap S^*(\gamma,\varrho,f)$ *em* B_1^+ *com* $\gamma, f \in L^q(B_1^+)$ *onde* $q > n$ *e* $\varrho \geq 0$. *Considere ainda o dado de fronteira* $\varphi = u_{|_{B_1'}} \in C^{1,\omega}(B_1')$ *com* $\omega \in \mathcal{M}_{\beta_*}^+$, *onde* $\beta_* := \min\left\{1-n/q, \alpha_{00}^-\right\}$. *Como outrora, definamos*

$$M_0^{\#\#} := ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\omega}(B_1')} + ||f||_{L^q(B_1^+)} + \Big(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho||\nabla\varphi||_{L^\infty(B_1^+)}\Big)||\nabla\varphi||_{L^\infty(B_1^+)} \tag{9}$$

Então, existe um único campo $A : B_{1/2}' \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\forall x_0 \in B_{1/2}'$ *com* $|x-x_0| \leq \delta_* := \min\{d_\omega, 1/2\}$ *:*

$$\Big|u(x) - u(x_0) - A(x_0)(x-x_0)\Big| \leq T_0^{\#} \cdot M_0^{\#\#} \cdot |x-x_0|(\vartheta_\omega)_{\beta_*}^{\#}(|x-x_0|), \tag{10}$$

$$||A||_{C^{0,(\vartheta_\omega)_{\beta_*}^{\#}}(\overline{B'}_{1/2})} \leq T_0^{\#} \cdot M_0^{\#\#}, \tag{11}$$

onde

$$(\vartheta_\omega)_{\beta_*}^{\#}(t) := t^{\beta_*} + \vartheta_\omega(t) \quad \text{para} \ \ t \in [0, d_\omega].$$

Aqui,

$$T_0^{\#} = T_0^{\#}\Big(n,q,\lambda,\Lambda,||\gamma||_{L^q(B_1^+)},\varrho,d_\omega,M_0^{\#\#},||\nabla\varphi||_{L^\infty(B_1')},D_\omega,\delta_*\Big)$$

Da prova do teorema e do corolário, podemos destacar algumas observações importantes:

Observação 1.1. *No corolário acima 1.1, o campo A pode ser pensado como o gradiente de u ao longo de* $B_{1/2}'$.

Observação 1.2. *É bem conhecido que até para funções harmônicas no semi-espaço, o fato de o dado de fronteira ser* $C^{1,Dini}$ *é necessário para obtermos pelo menos o gradiente finito na fronteira (veja WIDMAN (1967), observação 1).*

Observação 1.3. *Percebamos que todos os resultados acima valem para as classes* $S^*(\gamma,\varrho,\sigma,f)$ *(assim como o corolário abaixo) que têm como termo de ordem zero* $\sigma \in L_+^q$, *coeficiente do gradiente* $\gamma \in L_+^q$, *segundo membro* $f \in L^q$ *para* $q > n$ *e coeficiente do termo quadrático*

$\varrho \geq 0$ com mudanças óbvias nas estimativas (veja observação 2.6).

Observação 1.4. *Segue da prova do teorema 1.3 e seguirá na prova do Corolário acima 1.1 que J_0 e $J_0^{\#}$ (e então T_0 e $T_0^{\#}$ da mesma forma) dependem de D_ω de maneira monotonamente crescente.*

Observação 1.5. *O teorema 1.3 não vale quando $q = n$. De fato, se esse fosse o caso, $\beta_* = 0$ e $(\vartheta_\omega)^{\#}_{\beta_*}(t) = 1 + \vartheta_\omega(t)$ o que não é nem um módulo de continuidade, dado que $\vartheta(0) \geq 1$. Nesse caso, (6) não implicaria sequer a diferenciabilidade de u na origem na fronteira.*

Observação 1.6. *Observemos que no Teorema 1.3 e no Corolário 1.1 acima, temos as seguintes estimativas:*

$$
\begin{aligned}
M_0^{\#} &\leq M_0^{\star} := ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + \Big(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho||\varphi||_{C^{1,\omega}(0)}\Big)||\varphi||_{C^{1,\omega}(0)} + ||f||_{L^q(B_1^+)}.\\
T_0 &\leq J_0 \cdot d_\omega^{-\Theta_1}\left[1 + \left[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho\Big(||\varphi||_{C^{1,\omega}(0)} + M_0^{\star}\Big)\right]^{\Theta_0}\right].\\
M_0^{\#\#} &\leq M_0^{\star\star} := ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + \Big(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho||\varphi||_{C^{1,\omega}(B_1')}\Big)||\varphi||_{C^{1,\omega}(B_1')} + ||f||_{L^q(B_1^+)}.\\
T_0^{\#} &\leq J_0^{\#} \cdot \delta_*^{-\Theta_3}\left[1 + \left[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho\Big(||\varphi||_{C^{1,\omega}(B_1')} + M_0^{\star\star}\Big)\right]^{\Theta_2}\right].
\end{aligned}
$$

Na segunda seção nós expomos as principais definições, incluindo as de soluções no sentido da viscosidade e observações sobre *scaling*'s. Depois disso, na terceira seção, falamos sobre uma espécie de caso zero do teorema principal, onde ficam evidentes os ingredientes que precisaremos para provar o teorema principal, assim como a construção de barreiras radiais, as quais são importantes também em outros contextos.

Na seção 4 nós apresentamos um lema de perturbação por funções afins, o qual está provado em NORNBERG (2018a), assim como uma estimativa Hölder global provada por B. Sirakov em SIRAKOV (2010), tais fatos são postos para provarmos um novo tipo de *improvement of flatness* utilizado na prova do teorema principal, assim como o resultado sobre estabilidade provado por A. Świech e S. Koike em KOIKE e A (2009). A proposição ressalta ainda a importância do dado de fronteira ser $C^{1,Dini}$, que faz com que possamos realizar um processo de aproximações sucessivas da derivada normal até chegar no que representa o gradiente da função na origem(que é um ponto da fronteira).

A seção 5 é dedicada à prova das estimativas do tipo Krylov com dado de fronteira $C^{1,Dini}$. Nesta seção, juntaremos o lema de perturbação por funções afins e os argumentos de *scaling* para fazer funcionar o *improvement of flatness* dado que

$$||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + C \cdot N\varrho := ||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + C\Big(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \Big([\varphi]_{C^{1,\omega}(0)} + 2\|f\|_{L^q(B_1^+)}\Big)\Big)\varrho$$

é pequeno, o que faz com que o teorema do tipo Krylov funcione. Além disso, colocamos na mesma seção o exemplo 5.1 que mostra que, em certo sentido(regularidade do segundo membro), a estimativa é ótima.

2 PRELIMINARES

Nesta seção vamos citar as principais definições e notações envolvidas no nosso trabalho, de modo que possamos compreender do que cada teorema trata. A maioria das definições aqui serão as canônicas encontradas em literaturas usuais da área. Além disso, forneceremos aqui muitas das ferramentas necessárias para as provas inseridas nos próximos capítulos.

2.1 Notações e definições importantes

Por todo o texto, utilizaremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como um domínio - que é um conjunto aberto e limitado. Quando houver necessidade, colocaremos mais suposições sobre Ω. Uma outra notação usual é:

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}.$$

Quando a bola tiver centro na origem, omitiremos o centro e escreveremos apenas B_r. Além deste conjunto, utilizaremos bastante os conjuntos definidos abaixo:

$$B_r(x_0)^+ = B_r(x_0) \cap \{x_n \geq 0\}$$

$$B'_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; x = (x', 0),\ com\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\ e\ |x' - x_0| < r\} = B_r(x_0) \cap \{x_n = 0\}.$$

Para algumas estimativas, consideraremos em $\mathbb{R}^n$ a seguinte norma:

$$|x|_\infty := \max_{i \in \{1, \cdots, n\}} |x_i|$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Utilizaremos a base canônica $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\} \in \mathbb{R}^n$ onde os vetores ortonormais são os conhecidos $\vec{e_1} = (1, 0, 0, ..., 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0, ..., 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1, ..., 0), ..., \vec{e_n} = (0, 0, 0, ..., 1)$.

Definição 2.1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, o rank map é uma operação definida por:*

$$(a \otimes b)(x) := (b \cdot x)a$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Denotaremos o gradiente de uma função $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por ∇u e sua matriz Hessiana, que é a matriz quadrada $n \times n$ formada pelas suas derivadas parciais de segunda ordem por $D^2 u$. O conjunto das matrizes simétricas de ordem n será denotado por $S(n)$. Dada uma matriz $M \in S(n)$ e $0 < \lambda \leq \Lambda$ números reais, podemos definir os *operadores* *extremais de Pucci* por

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(M) = \lambda \cdot \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \cdot \sum_{e_i<0} e_i = \inf_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} Tr(AM) = \lambda\mathcal{M}^{+}(M) - \Lambda\mathcal{M}^{-}(M)$$

$$\mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(M) = \lambda \cdot \sum_{e_i<0} e_i + \Lambda \cdot \sum_{e_i>0} e_i = \sup_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} Tr(AM) = \Lambda\mathcal{M}^{+}(M) - \lambda\mathcal{M}^{-}(M).$$

Onde $\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda} = \{A \in S(n); \lambda.I_n \leq A \leq \Lambda.I_n\}$ e os e_i's são os autovalores da matriz M.

Observação 2.1. *Dada uma matriz simétrica de ordem n, A, existe uma matriz ortogonal O tal que $A = OBO^t$, onde B é uma matriz diagonal, ou seja, $B_{ij} = \delta_{ij}e_i$, onde os e_i's são os autovalores de A.*

Seja F um operador dado por $F : S(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que F é uniformemente elíptico quando

$$\mathcal{M}^{-}(X - Y) \leq F(X, p, r, x) - F(Y, p, r, x) \leq \mathcal{M}^{+}(X - Y). \tag{12}$$

Devido à observação acima e a definição imediatamente anterior a ela, perceba que conseguiremos diagonalizar A e que seus autovalores estão todos contidos no intervalo $[\lambda, \Lambda]$, esta pode ser ainda uma definição encontrada para a definição do conjunto $\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}$.

Como o foco principal deste trabalho é regularidade, começaremos entendendo o que é um módulo de continuidade:

Definição 2.2. *Uma função contínua $\omega : [0, \delta_\omega) \longrightarrow [0, +\infty)$, com $\delta_\omega \in (0, 1)$ é um módulo de continuidade se é **não decrescente**, tal que $\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$. O módulo de continuidade de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é denotado por*

$$\omega_f(t) := \sup_{|x-y|\leq t} |f(x) - f(y)|. \tag{13}$$

Além disso, se ω_f é o módulo de continuidade de f, vale que

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|), \forall x, y \in \Omega. \tag{14}$$

Quando $\omega_f(t) = Ct$, por exemplo, temos que a função f é Lipschitz com constante de Lipschitz igual a C. Vamos relembrar as definições de algumas classes de funções vistas nas disciplinas de Cálculo:

Definição 2.3. *Seja $0 < \alpha < 1$. Dizemos que uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é α-hölder contínua quando, para todos $x, y \in \Omega$, existe uma constante real $C > 0$ tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

Observação 2.2. *Perceba que, para este caso, o módulo de continuidade será dado por $\omega_f(t) = kt^{\alpha}$, para algum $k \in \mathbb{R}$.*

Como aparecerá com frequência no texto, definiremos a razão $Q_{\alpha}[\omega](t) := \frac{\omega(t)}{t^{\alpha}}$. Vejamos agora o que significa uma função ser Dini contínua:

Definição 2.4. *Diremos que uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é Dini contínua se*

$$\int_0^{d_\omega} \frac{\omega_f(t)}{t} dt < +\infty.$$

Dada uma função $f \in C^{\alpha}(\Omega)$, já vimos que vale $\omega_f(t) = k.t^{\alpha}$, com $k \in \mathbb{R}$. Veja que:

$$\int_0^1 \frac{w_f(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{k.t^{\alpha}}{t} dt = \int_0^1 k.t^{\alpha-1} dt = k.\frac{1}{\alpha}.t^{\alpha}\Big|_0^1 = \frac{k}{\alpha} < +\infty.$$

Com isso, vê-se que toda função que é Hölder contínua é também Dini contínua, porém, o contrário não é verdade, como poderemos verificar em um exemplo mais adiante.

2.2 Funções α-Dini

Definição 2.5. *Sejam $\alpha, d_\omega \in (0, 1]$. Uma função $\omega : [0, d_\omega] \to [0, \infty)$ é chamada uma $\alpha-$função se a função dada por*

$$Q_{\alpha}[w](t) := t^{-\alpha}\omega(t) \quad \text{para} \quad t \in (0, d_\omega], \tag{15}$$

é monotonamente decrescente em $(0, d_\omega]$. Dado isto, podemos escrever que uma função é Dini contínua se:

$$\int_0^{d_\omega} \frac{\omega(t)}{t} dt =: D_\omega < \infty. \tag{16}$$

Uma $\alpha-$função que é também Dini contínua é dita ser $\alpha-$Dini função. Denotaremos ainda, para $t \in [0, d_\omega]$

$$\vartheta_\omega(t) := \int_0^t \frac{\omega(s)}{s} ds = \int_0^t Q_1[\omega](s) ds, \tag{17}$$

$$\omega_\alpha^{\#}(t) := t^\alpha + \omega(t). \tag{18}$$

Além disso, se ω é monotonamente crescente, contínua na origem e $\omega(0) = 0$, diremos que ω é um módulo de continuidade e denotaremos isso por $\omega \in \mathcal{M}$. Ademais, se $\omega \in \mathcal{M}$ é ainda uma $\alpha-$Dini função, diremos que ω é um $\alpha-$Dini módulo de continuidade e denotaremos isso por $\omega \in \mathcal{DM}_\alpha$. Escreveremos $\omega \in \mathcal{M}^+$ se $\omega(t) > 0$ sempre que $t > 0$. Definimos $\mathcal{DM}_\alpha^+$ do mesmo modo. Finalmente, observamos que $\vartheta_\omega \in \mathcal{M}$ sempre que ω é Dini contínuo.

Vamos agora apresentar algumas propriedades das $\alpha-$funções que serão bastante utilizadas nas provas de teoremas contidos nesta tese. Algumas delas não são tão fáceis de encontrar na literatura, principalmente em português. Além das propriedades, mostraremos alguns exemplos e apresentaremos uma extensão de uma $\alpha-$função a todo o semi-espaço $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Percebemos que a monotonicidade do fator $Q_\alpha[\omega](t)$ junto com a Dini continuidade aparecem em trabalhos que abordaram temas como o nosso(i.e, regularidade de fronteira com dado de fronteira $C^{1,Dini}$) como podemos ver nos artigos de G. Lieberman (LIEBERMAN (1986)), K. Widman (WIDMAN (1967)), M. Borsuk (BORSUK (1998)) e no livro de M. Borsuk e V. Kondratiev(BORSUK e KONDRATIEV (2006)) para equações lineares da formar divergente e não divergente.

Proposição 2.1 (Propriedades das $\alpha-$funções). *Sejam $\omega : [0, d_\omega] \to [0, \infty)$ e $\alpha, d_\omega \in (0, 1]$. Então,*

i) Se ω é uma $\alpha-$função e $C \geq 1$ então,

$$\omega(Ct) \leq C^\alpha \omega(t) \quad \forall t \in [0, C^{-1} d_\omega]; \tag{19}$$

Em particular,

$$\mu^\alpha \omega(\mu^k t) \leq \omega(\mu^{k+1} t) \quad \forall \mu \in (0, 1], \quad \forall t \in [0, d_\omega], \quad \forall k \geq 0; \tag{20}$$

ii) Se ω é uma $\alpha-$ função e monotonamente crescente, então ela é doubling, i.e,

$$s \leq t \leq Cs \Longrightarrow \omega(s) \leq \omega(t) \leq C^\alpha \omega(s) \quad \forall s, t \in [0, C^{-1} d_\omega], \quad \forall C \geq 1. \tag{21}$$

iii) Se ω é uma $\alpha-$função, então ela é uma $\beta-$função para todos os $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$;

iv) Se ω é uma $\alpha-$Dini função, então

$$\omega(t) \leq \alpha \vartheta_\omega(t) \leq \vartheta_\omega(t), \quad \forall t \in [0, d_\omega]; \tag{22}$$

v) Se ω é uma $\alpha-$Dini função, então ϑ_ω também é. Em particular, (19) e (20) também *valem para ϑ_ω (ao invés de ω).*

vi) Se ω é uma $\alpha-$Dini função, então para $\mu \in (0, \frac{1}{2}]$, temos, para $k \geq 0$

$$\sum_{j=k}^{\infty} \omega(\mu^j d_\omega) \leq 2\vartheta_\omega(\mu^k d_\omega).$$

Em particular,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \omega(\mu^j d_\omega) \leq 2D_\omega.$$

vii) Se ω é uma $\alpha-$Dini função. Considere

$$\omega_K(t) := \omega(Kt) \quad \text{para} \quad t \in [0, K^{-1}d_\omega].$$

Então, ω_K é uma $\alpha-$Dini função tal que $D_{\omega_K} = D_\omega$ (como definido em (16)).

viii) Se ω é uma $\alpha-$Dini função, então $\omega_\alpha^{\#}(t) := t^\alpha + \omega(t)$ e $\vartheta_{\omega_\alpha^{\#}}(t)$ também são. Analogamente, (19) e (20) também valem para $\omega_\alpha^{\#}$ e $\vartheta_{\omega_\alpha^{\#}}$ (ao invés de ω).

Além disso,

$$\vartheta_{\omega_\alpha^{\#}}(t) \leq \alpha^{-1}(t^\alpha + \vartheta_\omega(t)) = \alpha^{-1}(\vartheta_\omega)_\alpha^{\#}(t) \quad \forall t \in [0, d_\omega]. \tag{23}$$

ix) Se $\omega^{\frac{1}{\alpha}}(t)$ é côncava em $[0, d_\omega]$ então ω é uma $\alpha-$função.

x) Se ω é uma $\alpha-$função com $d_\omega = \infty$, então é subaditiva, i.e, $\omega(t+s) \leq \omega(t) + \omega(s), \quad \forall s, t \geq 0$.

Demonstração. Da própria definição de $\alpha-$função, segue que:

$$\omega(s) \leq s^\alpha \eta^{-\alpha} \omega(\eta) \quad \text{para} \quad 0 < \eta \leq s \leq d_\omega.$$

Basta tomarmos $s = Ct \geq t = \eta$ e isso prova a primeira desigualdade. Para a segunda, aplicamos a primeira desigualdade para $C = \mu^{-1} > 1$ e $t = \mu^{k+1}s$, a qual vale sempre que $t = \mu^{k+1} \in [0, \mu d_\omega]$. Em particular, isso é verdade para qualquer $t \in [0, d_\omega]$ e então $i)$ está provado. Para provar $ii)$, observamos que, como ω é monotonamente crescente e (19) vale, consequentemente $\omega(s) \leq \omega(t) \leq \omega(Cs) \leq C^\alpha \omega(s)$ e então $ii)$ está provado. Agora, se $\alpha < \beta \leq 1$, então $Q_\beta[\omega](t) = t^{\alpha-\beta} \cdot Q_\alpha[\omega](t)$ para $t \in [0, d_\omega]$ a qual é decrescente desde que é o produto de duas funções não negativas e decrescentes e isso prova $iii)$. Agora, lembrando que $Q_\alpha[\omega]$ é decrescente, temos para $t \in [0, d_\omega]$,

$$\vartheta_\omega(t) = \int_0^t \frac{\omega(s)}{s} ds = \int_0^t Q_\alpha[\omega](s) s^{\alpha-1} ds \geq \frac{\omega(t)}{t^\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1} ds = \frac{\omega(t)}{\alpha}.$$

Isso prova que a estimativa em $iv)$ já que $0 < \alpha \leq 1$. Para $v)$, observamos que por (22), temos

$$\frac{d}{dt} Q_\alpha[\vartheta_\omega](t) = \frac{d}{dt}\left(t^{-\alpha} \int_0^t \frac{\omega(s)}{s} ds \right) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left(\omega(t) - \alpha \vartheta_\omega(t) \right) \leq 0.$$

Para $vi)$, temos que ω é uma $1-$função e então, $Q_1[\omega]$ é monotonamente decrescente. Desse modo, para qualquer $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mu^{j+1} d_\omega}^{\mu^j d_\omega} Q_1[\omega](s) ds &= d_\omega \int_{\mu^{j+1}}^{\mu^j} Q_1[\omega](d_\omega s) ds \qquad \text{(mudança de variáveis)} \\
&\geq d_\omega Q_1[\omega](\mu^j d_\omega) \int_{\mu^{j+1}}^{\mu^j} ds \qquad \text{(já que o integrando é decrescente)} \\
&= d_\omega Q_1[\omega](\mu^j d_\omega)(\mu^j - \mu^{j+1}) \\
&\geq \omega(\mu^j d_\omega)(1-\mu) \qquad \text{(desde que } 0 < \mu \leq 1/2) \\
&\geq \frac{1}{2} \omega(\mu^j d_\omega).
\end{aligned}$$

Agora, estimamos, para $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{N} \omega(\mu^j d_\omega) &\leq 2 \sum_{j=k}^{N} \int_{\mu^{j+1} d_\omega}^{\mu^j d_\omega} Q_1[\omega](s) ds \\
&= 2 \int_{\mu^{N+1} d_\omega}^{\mu^k d_\omega} Q_1[\omega](s) ds \\
&\leq 2 \vartheta_\omega(\mu^k d_\omega) \qquad (\text{por } \ iv)).
\end{aligned}$$

Fazendo $N \to \infty$ segue o item $vi)$. O item $vii)$ segue imediatamente do fato de $Q_\alpha[\omega_K](t) = K^\alpha Q_\alpha[\omega](Kt)$ para todo $t \in (0, K^{-1} d_\omega]$ e então a monotonicidade é preservada. Uma simples mudança de variáveis prova diretamente que $D_{\omega_K} = D_\omega$. Finalmente, para o item $viii)$, temos que para $t \in (0, d_\omega]$, segue que $Q_\alpha[\omega_\alpha^\#](t) = 1 + Q_\alpha[\omega](t)$ e então a monotonicidade é preservada o que nos faz concluir que $\omega_\alpha^\#$ é uma $\alpha-$função. Então, por $iv)$, $\vartheta_{\omega_\alpha^\#}(t)$ também é uma $\alpha-$função. Agora, para $t \in [0, d_\omega]$, já que $0 < \alpha \leq 1$, vem que:

$$\vartheta_{\omega_\alpha^\#}(t) = \int_0^t \frac{\omega_\alpha^\#(s)}{s} ds = \int_0^t s^{\alpha-1} ds + \vartheta_\omega(t) = \alpha^{-1} t^\alpha + \vartheta_\omega(t) \leq \alpha^{-1}(t^\alpha + \vartheta_\omega(t)).$$

Vamos agora provar $ix)$. Considere $0 \leq s < t \leq d_\omega$. Percebemos que,$\forall x, y \in [0, d_\omega]$ com $x < y$ e $\forall \theta \in [0,1]$, temos:

$$\omega^{\frac{1}{\alpha}}(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta \omega^{\frac{1}{\alpha}}(x) + (1-\theta)\omega^{\frac{1}{\alpha}}(y).$$

Agora, vamos tomar $x = 0, y = t$ e $\theta = 1 - s/t$. A expressão acima nos dá que:

$$\omega^{\frac{1}{\alpha}}(s) \geq \frac{s}{t} \omega^{\frac{1}{\alpha}}(t)$$

e então $Q_\alpha[\omega](t) \leq Q_\alpha[\omega](s)$ ao elevarmos os dois lados da desigualdade a potência α.

Para mostrar $x)$, observamos que, desde que $\alpha \in (0,1]$ implica que $(s+t)^\alpha \leq s^\alpha + t^\alpha \ \forall s, t \geq 0$. Então,

$$Q_\alpha[\omega](s+t)(s+t)^\alpha \leq Q_\alpha[\omega](s+t)s^\alpha + Q_\alpha[\omega](s+t)t^\alpha.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \omega(s) + \omega(t) - \omega(s+t) &= Q_\alpha[\omega](t)t^\alpha + Q_\alpha[\omega](s)s^\alpha - Q_\alpha[\omega](s+t)(s+t)^\alpha \\ &\geq Q_\alpha[\omega](t)t^\alpha + Q_\alpha[\omega](s)s^\alpha - Q_\alpha[\omega](s+t)s^\alpha - Q_\alpha[\omega](s+t)t^\alpha \\ &= s^\alpha(Q_\alpha[\omega](s) - Q_\alpha[\omega](s+t)) + t^\alpha(Q_\alpha[\omega](t) - Q_\alpha[\omega](s+t)) \\ &\geq 0 \quad \text{(já que } \ Q_\alpha[\omega] \quad \text{é uma função decrescente).} \end{aligned}$$

□

Vejamos agora que nem toda função que é Dini contínua é Hölder contínua:

Exemplo 2.1 (Função puramente Dini contínua). *Consideremos a função* $\omega(t) = |\ln(t)|^\gamma$*, onde* $\gamma < -1$*. Veja que* ω *é crescente em* $(0,1)$*. Como* $\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$*, podemos assumir que* ω *está definida na origem como* $\omega(0) = 0$*. Além disso, para todo* $\alpha \in (0,1]$*, calculemos* $Q'_\alpha[\omega](t)$*:*

$$Q'_\alpha[\omega](t) = -\frac{t^{\alpha-1}|\ln t|^{\gamma-1}(\gamma + \alpha|\ln t|)}{t^{2\alpha}} \qquad \text{para} \quad 0 < t < 1.$$

Logo, $Q'_\alpha[\omega](t) \leq 0$ *se* $t \in (0, e^{\gamma/\alpha}]$*. Então, podemos tomar* $d_\omega := e^{\gamma/\alpha} \in (0,1)$ *e* ω *é uma* $\alpha-$*função. Ademais, fazendo uma mudança de variáveis* $|\ln t| = \ln(1/t) =$

s (lembrando que $0 < t < d_\omega < 1$ *e então* $|\ln(t)| = -ln(t)$ *para t nesse intervalo), concluímos que* ω *é um módulo de continuidade Dini. De fato, para* $0 < d_\omega < 1$,

$$D_\omega = \int_0^{d_\omega} t^{-1}\big|\ln(t)\big|^\gamma dt = \int_0^{d_\omega} t^{-1}\big(\ln(t^{-1})\big)^\gamma dt = \int_{|\ln d_\omega|}^{\infty} s^\gamma ds = -\frac{|\ln d_\omega|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)} < \infty.$$

Então, $\omega \in \mathcal{M}_\alpha^+$. *Além disso,* $\omega(t)$ *não pode ser controlado por nenhum módulo de continuidade Hölder, digamos* $\leq Ct^\alpha$ *com* $\alpha \in (0,1]$ *e* $C > 0$. *Suponha que fosse possível, então* $\omega(t) \leq Ct^\alpha$ *para todo t suficientemente pequeno e* $C > 0$. *Tomando* $\gamma = -\mu$ *onde* $\mu > 1$ *e fazendo novamente uma mudança de variáveis* $|\ln t| = \ln(1/t) = s$ *chegamos a*

$$0 < C^{-1} \leq \limsup_{t\to 0^+} t^\alpha\big(\omega(t)\big)^{-1} = \limsup_{t\to 0^+} t^\alpha|\ln(t)|^\mu = \lim_{s\to\infty} e^{-\alpha s}s^\mu = 0, \tag{24}$$

que é uma contradição. □

Observação 2.3 (Extensão de uma $\alpha-$função para $d_\omega = \infty$). *Assuma que* $\omega : [0, d_\omega] \to [0,\infty)$ *é uma* $\alpha-$*Dini função com* $0 < d_\omega < \infty$. *Podemos construir uma extensão de* ω *para* $[0,\infty)$ *através do seguinte procedimento: definimos* $\overline{\omega} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *dada por*

$$\overline{\omega}(t) := \begin{cases} \omega(t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq d_\omega, \\ \\ \omega(d_\omega) & \text{se} \quad t \geq d_\omega. \end{cases} \tag{25}$$

A Dini continuidade de $\overline{\omega}$ é preservada, pois $\int_0^{d_\omega} \frac{\overline{\omega}(t)}{t}dt = D_\omega < \infty$. Conjecturamos que $\overline{w}$ é uma $\alpha-$função dado que ω é também uma $\alpha-$função. De fato, assumamos que $0 < s < \eta < \infty$. Se $\eta \leq d_\omega$, então $Q_\alpha[\overline{\omega}](\eta) = Q_\alpha[\omega](\eta) \leq Q_\alpha[\omega](s) = Q_\alpha[\overline{\omega}](s)$. Se $d_\omega \leq s < \eta$, então $Q_\alpha[\overline{\omega}](\eta) = \eta^{-\alpha}\overline{w}(\eta) = \eta^{-\alpha}\omega(d_\omega) \leq s^{-\alpha}\omega(d_\omega) = s^{-\alpha}\overline{\omega}(s) = Q_\alpha[\overline{\omega}](s)$. Finalmente, se $0 < s \leq d_\omega \leq \eta$ já que $0 < \eta^{-1}d_\omega < 1$, temos que $Q_\alpha[\overline{\omega}](\eta) = \eta^{-\alpha}\overline{w}(\eta) = (\eta^{-1}d_\omega)^\alpha\omega(d_\omega)d_\omega^{-\alpha} \leq Q_\alpha[\omega](d_\omega) \leq Q_\alpha[\omega](s) = Q_\alpha[\overline{\omega}](s)$. E isso prova nossa conjectura.

Definição 2.6. *Seja u uma função contínua definida em um conjunto aberto* Ω. *Definimos, para cada* $K \subset \Omega$, *o seguinte número:*

$$[\nabla u]_{C^{0,\omega}(K)} := \inf\Big\{C > 0 \,:\, |\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq C\cdot\omega(|x-y|), \quad \forall x,y \in K, |x-y| \leq d_\omega\Big\}. \tag{26}$$

Note que, se $\omega \in \mathcal{M}^+$ *então segue que*

$$[\nabla u]_{C^{0,\omega}(K)} = \sup_{\substack{x,y\in K \\ x\neq y,\, |x-y|<\delta_\omega}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{\omega(|x-y|)}.$$

Existem ainda outras funções que comumente são vistas nos resultados de regularidade:

Definição 2.7. *Seja* $0 < \alpha < 1$. *Dizemos que uma função* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é* $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *quando* u *é* k*-vezes diferenciável e, para todos* $x, y \in \Omega$, *existe uma constante real* $C > 0$ *tal que:*

$$|D^k u(x) - D^k u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}.$$

Um outro tipo de conjuntos de funções é uma mescla das funções C^k's com as Dini contínuas:

Definição 2.8. *Sejam* $u : B_1 \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in B_1$ *com* $\omega \in \mathcal{M}$. *Diremos que* $u \in C^{1,\omega}(x_0)$ *se existe uma função afim* L_{x_0} *para a qual* $[u]_{C^{1,\omega}(x_0)} < \infty$ *onde*

$$[u]_{C^{1,\omega}(x_0)} := \inf\Big\{C > 0;\ |u(x) - L_{x_0}(x)| \leq C|x-x_0|\omega(|x-x_0|) \quad \forall x \in B_1 \text{ tal que } |x-x_0| \leq d_\omega\Big\}. \tag{27}$$

Perceba que se $\omega \in \mathcal{M}^+$

$$[u]_{C^{1,\omega}(x_0)} := \sup_{\substack{x \in B_1 \\ 0<|x-x_0|\leq d_\omega}} \frac{|u(x) - L_{x_0}(x)|}{|x-x_0|\omega(|x-x_0|)}. \tag{28}$$

Se $[u]_{C^{1,\omega}(x_0)} < \infty$, *então* L_{x_0} *é única na definição acima (veja a observação abaixo). Nesse caso, definimos o polinômio de Taylor de primeira ordem de* u *em* x_0 *para ser uma função afim* L_{x_0}. *Claramente,*

$$L_{x_0}(x) = \nabla u(x_0) \cdot (x - x_0) + u(x_0), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{29}$$

e definimos

$$||u||_{C^{1,\omega}(x_0)} := |u(x_0)| + |\nabla u(x_0)| + [u]_{C^{1,\omega}(x_0)}. \tag{30}$$

Dizemos que uma função $u \in C^{1,\omega}_{loc}(\Omega)$ *se* u *é diferenciável em* K *e para qualquer* $K \subset\subset \Omega$ *temos:*

$$\|u\|_{C^{1,\omega}(K)} := \|u\|_{L^\infty(K)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(K)} + [\nabla u]_{C^{0,\omega}(K)} < \infty.$$

Observação 2.4. *Suponha* $[u]_{C^{1,\omega}(x_0)} < \infty$ *e seja* $\overline{L}_{x_0}$ *uma outra função afim satisfazendo a definição acima. Então, segue diretamente da definição que* $L_{x_0}(x_0) = \overline{L}_{x_0}(x_0) = u(x_0)$. *Além disso, usando estimativas do gradiente para funções harmônicas, temos*

$$\begin{aligned}
\left|\nabla L_{x_0} - \nabla \overline{L}_{x_0}\right| &\leq \frac{||L_{x_0} - \overline{L}_{x_0}||_{L^\infty(B_r(x_0))}}{r}\\
&\leq \frac{||u - L_{x_0}||_{L^\infty(B_r(x_0))} + ||u - \overline{L}_{x_0}||_{L^\infty(B_r(x_0))}}{r}\\
&\leq 2[u]_{C^{1,\omega}(x_0)}\omega(r).
\end{aligned}$$

Fazendo $r \to 0^+$, concluímos que $\nabla L_{x_0} = \nabla \overline{L}_{x_0}$. Então, $L \equiv \overline{L}$.

Observação 2.5. *No que segue, iremos tratar de funções definidas em B_1' que são pontualmente $C^{1,\omega}$. Para fazer isso, iremos introduzir os conceitos a seguir. Definimos $\varphi \in C^{1,\omega}(x_0)$ onde $x_0 \in B_1'$ exatamente como na definição anterior, impondo apenas que a função afim L sobre $\mathbb{R}^n$ satisfaz adicionalmente que $\partial L_{x_0}/\partial x_n \equiv 0$, i.e,*

$$[\varphi]_{C^{1,\omega}(x_0)} := \inf\Big\{C > 0;\ |\varphi(x) - L_{x_0}(x)| \leq C|x - x_0|\omega(|(x - x_0|)\ \forall x \in B_1' \ \text{ tal que } \ |x - x_0| \leq d_\omega\Big\}.$$

onde na definição acima $\partial L_{x_0}/\partial x_n \equiv 0$. Nesse caso, definimos

$$\nabla\varphi(x_0) := \nabla L_{x_0}(x_0) =: (\nabla_T u(x_0), 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

Logo,

$$L_{x_0}(x) := \nabla\varphi(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

E ainda,

$$||\varphi||_{C^{1,\omega}(x_0)} := |\varphi(x_0)| + |\nabla\varphi(x_0)| + [\varphi]_{C^{1,\omega}(x_0)}.$$

Como antes, no caso em que $\omega \in \mathcal{M}^+$ a mesma expressão como em (28) vale.

Definição 2.9. *Sejam $a, b, c > 0$. Utilizaremos a seguinte notação:*

$$\min\big\{a, b^-\big\} := \begin{cases} a & \text{se} \quad a < b, \\ \\ \kappa & \textit{para qualquer } \kappa \in (0, b) \ \text{ se } \ b \leq a. \end{cases} \tag{31}$$

Além disso,

$$\min\big\{a, b, c^-\big\} := \min\big\{\min\{a, b\}, c^-\big\}.$$

2.3 Soluções no sentido da viscosidade

Definição 2.10 (Soluções L^n no sentido da viscosidade). *Seja $F : S(n) \times \Omega \to \mathbb{R}$ um operador elíptico totalmente não-linear. Dizemos que $u \in C^0(\Omega)$ é uma solução de*

$F(D^2u,x) \geq f$, em Ω, L^n no sentido da viscosidade se para qualquer $\phi \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ tal que $u - \phi$ tem um máximo local em $x_0 \in \Omega$, temos

$$ess \limsup_{x \to x_0} \Big(F(D^2u, x) - f(x) \Big) \geq 0.$$

Diremos ainda que $F(D^2u,x) \leq f$, em Ω, L^n no sentido da viscosidade se para qualquer $\phi \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ tal que $u - \phi$ tem um mínimo local em $x_0 \in \Omega$ temos

$$ess \liminf_{x \to x_0} \Big(F(D^2u, x) - f(x) \Big) \leq 0.$$

Todas as vezes que citarmos no texto uma solução o sentido da viscosidade isso significará uma solução L^n no sentido da viscosidade, a menos que explicitemos algo diferente.

Vamos agora definir espaços onde os teoremas serão provados. Novamente, definiremos tais espaços para um operador elíptico totalmente não linear qualquer e logo abaixo definiremos os operadores com os quais trabalharemos de forma mais evidente.

$$\overline{S}(\gamma, f) = \overline{S}(\lambda, \Lambda, \gamma, \varrho, f) = \Big\{ u \in C^0(\Omega); F(D^2u, x) \leq f(x) \text{ em } \Omega,\ \ L^n\text{−no sentido da viscosidade} \Big\},$$

$$\underline{S}(\gamma, \varrho, f) = \underline{S}(\lambda, \Lambda, \gamma, f) = \Big\{ u \in C^0(\Omega); F(D^2u, x) \geq f(x) \text{ em } \Omega,\ \ L^n\text{−no sentido da viscosidade} \Big\},$$

$$S(\gamma, \varrho, f) = \underline{S}(\gamma, \varrho, f) \cap \overline{S}(\gamma, \varrho, f), \quad S^*(\gamma, \varrho, f) = \underline{S}(\gamma, \varrho, -|f|) \cap \overline{S}(\gamma, \varrho, |f|).$$

Para $\gamma \geq 0$ uma função mensurável e ϱ uma constante não negativa, definimos os operadores de Pucci $\mathcal{P}^{\pm}_{\lambda,\Lambda,\gamma,\varrho}\colon S(n) \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ por:

$$\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda,\gamma,\varrho}(M, p) = \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(M) - \gamma(x)|p| - \varrho|p|^2 \tag{32}$$

e

$$\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda,\gamma,\varrho}(M, p) = \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(M) + \gamma(x)|p| + \varrho|p|^2. \tag{33}$$

Estes elementos γ, ϱ são conhecidos como coeficientes das *equações de estrutura* da EDP. Como já dito antes, faremos vários argumentos de *scaling*. Esses *scalings* em geral afetam todos os coeficientes das equações de estrutura, no nosso caso, γ e ϱ dos operadores de Pucci $\mathcal{P}^{\pm}_{\lambda,\Lambda,\gamma,\varrho}$, mas não afetam as constantes λ, Λ. Para simplificar a notação, escreveremos os operadores de Pucci $\mathcal{P}^{\pm}_{\lambda,\Lambda,\gamma,\varrho}$ apenas como $\mathcal{P}^{\pm}_{\gamma,\varrho}$ e caso venhamos a utilizar outro operador de Pucci, deixaremos isto claro no texto. Além disso, quando os coeficientes forem importantes, explicitaremos quem eles são. A fim de simplificar ainda mais a notação, utilizaremos: (omitiremos Ω nos símbolos, considerando que, pelo contexto o domínio vai estar claro)

$$\mathcal{P}^{\pm}_{\gamma,\varrho}[u](x) = \mathcal{P}^{\pm}_{\lambda,\Lambda,\gamma,\varrho}[u](x) := \mathcal{P}^{\pm}_{\lambda,\Lambda,\gamma,\varrho}(D^2u(x), \nabla u(x)).$$

A partir de agora, todas as vezes que mencionarmos os conjuntos $\mathcal{S}$'s acima, estaremos considerando nas definições acima $F(D^2u, x) = \mathcal{P}^{\pm}_{\lambda,\Lambda,\gamma,\varrho}$.

Observação 2.6. *Observamos que os resultados que serão apresentados aqui também se aplicarão às classes que envolvem os termos de ordem zero, assim como para funções limitadas. De fato, vejamos os seguintes operadores extremais de Pucci* $\mathcal{P}^{\pm}_{\Lambda,\lambda,\gamma,\varrho,\sigma} : S(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dados por*

$$\mathcal{P}^{-}_{\gamma,\sigma}(M,p,z) = \mathcal{P}^{-}_{\Lambda,\lambda,\gamma,\varrho,\sigma}(M,p,z) := \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(M) - \gamma \cdot |p| - \varrho \cdot |p|^2 + \sigma \cdot z$$

e

$$\mathcal{P}^{+}_{\gamma,\varrho,\sigma}(M,p,z) = \mathcal{P}^{+}_{\Lambda,\lambda,\gamma,\varrho,\sigma}(M,p,z) := \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(M) + \gamma \cdot |p| + \varrho \cdot |p|^2 + \sigma \cdot z,$$

onde $\gamma \in L^q_+(\Omega)$, $\sigma \in L^q(\Omega)$ *com* $q > n$ *e* ϱ *é uma constante não negativa. Assim como anteriormente, podemos definir*

$$\mathcal{P}^{\pm}_{\gamma,\varrho,\sigma}[u](x) := \mathcal{P}^{\pm}_{\gamma,\varrho,\sigma}(D^2u(x), \nabla u(x), u(x))$$

$$\overline{S}(\gamma,\varrho,\sigma,f), \quad \underline{S}(\gamma,\varrho,\sigma,f), \quad S(\gamma,\varrho,\sigma,f) \quad e \quad S^*(\gamma,\varrho,\sigma,f).$$

Agora,

$$\overline{S}(\gamma,\varrho,\sigma,f) \subset \overline{S}(\gamma,\varrho,f-\sigma\cdot u), \quad \underline{S}(\gamma,\varrho,\sigma,f) \subset \underline{S}(\gamma,\varrho,f-\sigma\cdot u),$$

$$S(\gamma,\varrho,\sigma,f) \subset S(\gamma,\varrho,f-\sigma\cdot u), \quad S^*(\gamma,\varrho,\sigma,f) \subset S^*(\gamma,\varrho,f+\sigma|u|).$$

Como $u \in L^\infty$, *então* $||f+\sigma u||_{L^q} \leq ||f||_{L^q} + ||\sigma||_{L^q} \cdot ||u||_{L^\infty}$.

2.4 Observações sobre scalings

Nesta subseção, colocamos algumas observações sobre um ponto que é uma peça importante para mostrarmos muitas estimativas: o argumento de *scaling*.

Exemplo 2.2. *Esse tipo de técnica é bem comum e vamos ver aqui, de modo heurístico, como este processo funciona. Chamamos a atenção de que o que segue não é uma prova formal deste fato, pois, como visto na definição 2.10, precisaríamos tomar uma função teste e utilizar as definições de toques por cima ou por baixo da função em questão, aqui, porém, apenas fazemos as contas como se as funções em questão tivessem regularidade para tal. Seja* $u \in \overline{S}(\gamma, f)$*, ou seja,* u *satisfaz:*

$$\mathcal{M}^-(D^2u) - \gamma|\nabla u| \leq f(x).$$

Considere, para $\alpha, \beta > 0$ *a seguinte função:* $v(x) := \alpha u(\beta x), x \in B^+_{\frac{1}{\beta}}$*. Afirmamos que* $v \in \overline{S}(\overline{\gamma}, \overline{f})$*, para* $\overline{\gamma}(x) = \beta\gamma(\beta x)$ *e* $\overline{f}(x) = \alpha\beta^2 f(\beta x)$*. Para descobrir qual equação* v *satisfaz, em comparação com* u*, com relação à equação de estrutura, calculemos o gradiente e a hessiana de* v*:*

$$\nabla v(x) = \alpha\beta\nabla u(\beta x) \Rightarrow D^2v(x) = \alpha^2\beta^2 D^2u(\beta x).$$

Pelas equações de estrutura da u*, aplicadas à* $u(\beta x)$*, temos que:*

$$\mathcal{M}^-(D^2u(\beta x)) - \gamma(\beta x)|\nabla u(\beta x)| \leq f(\beta x)$$

Substituindo os valores do gradiente e da hessiana na equação de estrutura:

$$\mathcal{M}^-\Big(\frac{1}{\alpha\beta^2}D^2v(x)\Big) - \gamma(\beta x).\frac{1}{\alpha\beta}|\nabla v(x)| \leq f(\beta x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta^2}\mathcal{M}^-(D^2v(x)) - \frac{\gamma(\beta x)}{\alpha\beta}|\nabla v(x)| \leq f(\beta x)$$

$$\Rightarrow^{\cdot\alpha\beta^2} \mathcal{M}^-(D^2v(x)) - \beta\gamma(\beta x)|\nabla v(x)| \leq \alpha\beta^2 f(\beta x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}^-(D^2v) - \overline{\gamma}(x)|\nabla v(x)| \leq \overline{f}(x)$$

para $\overline{\gamma}(x) = \beta\gamma(\beta x)$ *e* $\overline{f}(x) = \alpha\beta^2 f(\beta x)$*, como afirmamos anteriormente.*

Este processo, apesar de comum, não é tão simples de ser realizado, sobretudo no problema principal desta tese, visto que as funções "transformadas" podem não ser melhores que as iniciais no sentido de a regularidade se manter com estimativa.

Observação 2.7. *Suponha que* $\omega \in \mathcal{DM}^+_\alpha$ *para algum* $\alpha \in (0, 1]$ *definido para* $t \in [0, d_\omega]$*. Definamos* $\omega_K(t) := w(Kt)$ *para* $t \in [0, d_\omega/K]$*. Sabemos da propriedade* $v)$ *das* α*-funções que* $\omega_K \in \mathcal{DM}^+_\alpha$ *e* $D_{\omega_K} = D_\omega$*. Agora, tomemos* $u : B_1 \to \mathbb{R}$ *com* $u \in C^{1,\omega}(0)$ *onde* L

é o seu polinômio de Taylor no zero. Podemos definir $\overline{u}(x) = K^{-1}u(Kx)$ *para* $x \in B_1$ *e* $\overline{L}(x) := K^{-1}L(Kx)$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$. *Mais ainda, para* $|x| \leq d_\omega \leq d_\omega/K$ *temos:*

$$\begin{aligned} |\overline{u}(x) - \overline{L}(x)| &= \left|K^{-1}\big(u(Kx) - L(Kx)\big)\right| \\ &\leq K^{-1}[u]_{C^{1,\omega}(0)}|Kx|\omega(K|x|) \\ &\leq [u]_{C^{1,\omega}(0)}|x|\omega_K(|x|). \end{aligned}$$

Consequentemente, no caso onde $K = d_\omega$, *a função reescalonada* $\overline{u} \in C^{1,\omega_{d_\omega}}(0)$ *onde* $d_{\omega_{d_\omega}} = 1$ *e* $[\overline{u}]_{C^{1,\omega_{d_\omega}}(0)} \leq [u]_{C^{1,\omega}(0)}$. *No caso em que* $0 < K \leq 1$, *podemos ainda melhorar estimativa anterior e concluir que, para todo* $|x| \leq d_\omega$*:*

$$|\overline{u}(x) - \overline{L}(x)| \leq [u]_{C^{1,\omega}(0)}|x|\omega_K(|x|) \leq [u]_{C^{1,\omega}(0)}|x|\omega(|x|).$$

Isso implica que $\overline{u} \in C^{1,\omega}(0)$ *e* $[\overline{u}]_{C^{1,\omega_{d_\omega}}(0)} \leq [u]_{C^{1,\omega}(0)}$. *Então, o módulo de continuidade permanece o mesmo.*

Observação 2.8 (Scaling remark). *Seja* $u \in \underline{S}(\gamma, \rho, f)$ *em* Ω, *consideremos*

$$\Omega_\beta = \beta^{-1} \cdot \Omega := \Big\{\beta^{-1}y; \quad y \in \Omega\Big\}. = \Big\{x; \quad \beta x \in \Omega\Big\}.$$

Então, definindo $v(x) := \alpha u(\beta x)$ *para* $x \in \Omega_\beta$, *chegamos que* $v \in \underline{S}(\overline{\gamma}, \overline{\varrho}, \overline{f})$ *em* Ω_β *onde*

$$\overline{\gamma}(x) := \beta\gamma(\beta x), \quad \overline{\varrho}(x) := \frac{\varrho}{\alpha}, \quad \overline{f}(x) := \alpha\beta^2 f(\beta x).$$

É claro que de modo análogo podemos fazer isso para as classes $\underline{S}(\gamma, \varrho, f), S(\gamma, \varrho, f)$ *e* $S^*(\gamma, \varrho, f)$.

3 RESULTADOS DO TIPO KRYLOV COM SEGUNDO MEMBRO NULO

Nesta seção, exporemos uma espécie de *caso zero* do teorema principal da tese, de modo que possamos ver, em uma menor escala, como serão os passos para a prova, os quais já podem ser percebidos aqui.

3.1 Barreiras Radiais

Iniciaremos esta subseção apresentando um teorema bem relevante da teoria de EDP's:

Teorema 3.1. ***(Lema de Hopf-Oleinik 52')*** *Seja* $u \in C^0(\overline{B_r}), u \geq 0$ *tal que* $\Delta u = 0$ *em* B_r*. Então, existe uma constante* $C = C(n)$ *tal que valem:*
(a) $u(x) \geq c.\frac{u(0)}{r}.dist(x, \partial B_r)$*;*
(b) Se $x_0 \in \partial B_r, u(x_0) = 0$ *e* $\exists \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq c.\frac{u(0)}{r}$*. Onde* ν *é o vetor unitário interior e normal à fronteira da bola.*

Observação 3.1. *Caso* $u(0) = 0$ *em* B_r*, sabemos do princípio do máximo que* $u \equiv 0$ *em* B_r*. Além disso, se vale que* $u(0) > 0$*, então o teorema acima nos diz que* $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$*.*

Para provar 3.1, vamos utilizar uma proposição que é uma parcela significativa na prova de alguns teoremas, conhecida como Desigualdade de Harnack. A versão aqui apresentada é para funções harmônicas:

Proposição 3.1. *(Desigualdade de Harnack) Seja* $u \geq 0$ *em* Ω *tal que* $\Delta u = 0$*. Então, para todo compacto* $K \subset\subset \Omega$*, existe* $C = (n, K)$ *tal que:*

$$\max_K u \leq C. \min_K u.$$

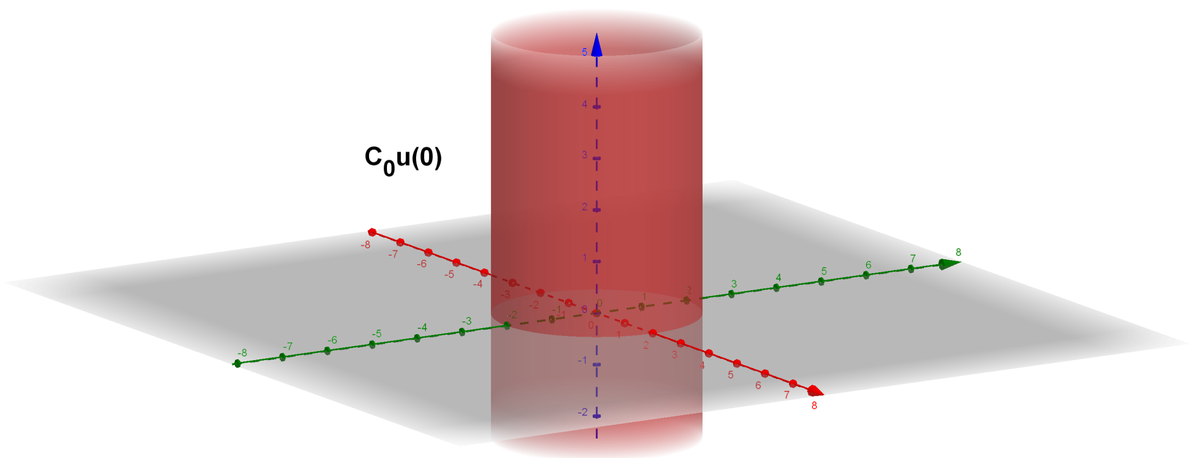
Em particular, a desigualdade acima vale para $K = \overline{B_{\frac{1}{2}}}$ *e podemos reescrevê-la como:*

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq C.u(y), \forall x, y \in B_{\frac{1}{2}}.$$

Observação 3.2. *A desigualdade acima quer dizer que* $u(x) \approx u(y)$*, ou seja, os valores da função em* x *e em* y *são comparáveis. A Desigualdade de Harnack funciona como uma fórmula do valor médio para a função* u *no sentido de obter uma comparação entre o valor da função com os seus vizinhos. A prova do mesmo pode ser encontrada no capítulo 1 de FANGHUA e HAN (1997).*

Prova do Lema de Hopf-Oleinik: Vamos provar o Lema de Hopf para $r = 1$, pois os demais casos podem ser feitos via *scaling*'s. Suponhamos sem perda de generalidade que $u(0) > 0$. Por Harnack, como os valores da função u são comparáveis, existe um menor valor que a função atinge em uma vizinhança do 0. Logo, existe um $C_0 > 0$ tal que $u(x) \geq C_0 u(0), \forall x \in \overline{B_{\frac{1}{2}}}$. A estimativa acima nos diz que, geometricamente, o gráfico de u está acima de um cilindro de altura fixa $C_0 u(0) > 0$ em $B_{\frac{1}{2}}$:

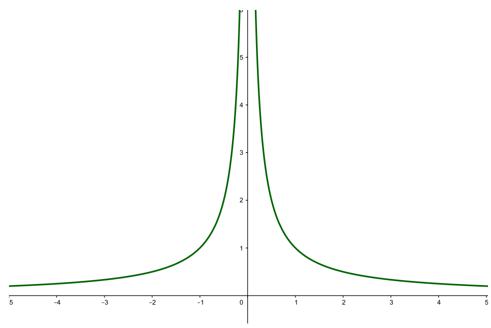
Figura 1 – Cilindro de altura $C_0 u(0)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Provar o teorema significa quantificar o ângulo de chegada da função u no sentido de estimar essa derivada normal. Desse modo, devemos construir uma função auxiliar que chegue com um determinado ângulo e que ela seja comparável a u. Consideremos, então, a solução fundamental $\mathcal{V}(x) = |x|^{2-n}$, para $n \geq 3$:

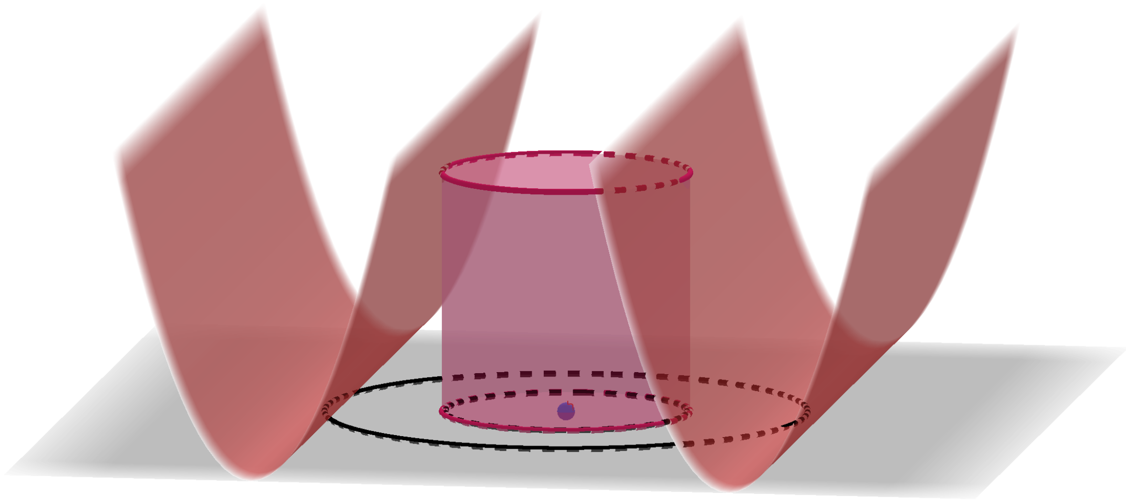
Figura 2 – Solução Fundamental



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dado que queremos um ângulo de chegada, a ideia é construir uma barreira “colando”a solução fundamental em um cilindro, como na figura abaixo:

Figura 3 – Contrução da função barreira



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já que ela chega com ângulo na esfera maior e contém, de certa maneira, a figura do gráfico da solução fundamental. Dessa maneira, basta construirmos $\Gamma \in C^{\infty}(\mathcal{A})$ tal que:

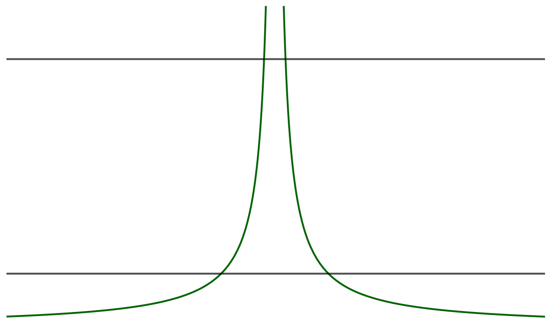
$$\begin{cases} \Delta\Gamma(x) = 0 \ \text{ em } \ B_1 \backslash \overline{B}_{1/2} := \mathcal{A}, \\ \\ \Gamma(x) = 1, \ \text{em } \partial B_{1/2} \\ \\ \Gamma(x) = 0, \ \text{em } \partial B_1. \end{cases} \tag{34}$$

Caso exista Γ, podemos transformá-la em $\tilde{\Gamma}(x) := \Gamma(x)u(0)C$, de modo que ela satisfaça:

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\Gamma}(x) = 0 \ \text{ em } \ B_1 \backslash \overline{B}_{1/2} := \mathcal{A}, \\ \\ \tilde{\Gamma}(x) = C.u(0), \ \text{em } \partial B_{1/2} \\ \\ \tilde{\Gamma}(x) = 0, \ \text{em } \partial B_1. \end{cases} \tag{35}$$

Veja que, desse modo, $\tilde{\Gamma}$ chega com o ângulo que queremos. A construção de $\tilde{\Gamma}$ nos mostra, na verdade, que podemos construir esse tipo de barreira com a altura que desejamos. Além disso, $u \geq \tilde{\Gamma}$ em $\partial\mathcal{A}$ e $\Delta u = \Delta\tilde{\Gamma} = 0$ em $\mathcal{A}$ e então pelo princípio da comparação $\Rightarrow u \geq \tilde{\Gamma}$ em $\overline{\mathcal{A}}$ e isso pode nos dar a comparação que queremos. Vamos, então, construir a função $\Gamma(x)$. Primeiramente, vamos cortar o gráfico da solução fundamental $\mathcal{V}(x)$:

Figura 4 – Corte da função barreira



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desse modo, $\Gamma_0(x) = |x|^{2-n} - 1$ é tal que $\Gamma_0 \equiv 0$ em ∂B_1. Queremos que $\Gamma(x) = 1$ em $\partial B_{\frac{1}{2}}$, então façamos

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma_0(x)}{\Gamma_0(1/2)} = \frac{|x|^{2-n} - 1}{2^{n-2} - 1} \text{ em } \mathcal{A}.$$

Na reta, vamos olhar a função $\psi(t) = \frac{1}{2^{n-2}-1}.(t^{2-n} - 1) = c_n.(t^{2-n} - 1), c_n = \frac{1}{2^{n-2}-1} > 0$. Derivando ψ na reta, temos:

$$\psi'(t) = c_n(2-n)t^{1-n} \Rightarrow \psi''(t) = c_n(2-n)(1-n)t^{-n} > 0.$$

Logo, ψ é convexa e então $\psi(t) \geq \psi(1) + \psi'(1).(t-1)$ e então podemos escrever $\psi(t) \geq \alpha_n(t-1)$, com $\alpha_n = c_n(2-n) < 0$. Vamos então definir:

$$\Gamma(x) = \psi(|x|) \geq \alpha_n(|x| - 1) = |\alpha_n|(1 - |x|) = |\alpha_n|.d(x, \partial B_1).$$

E então, pelo princípio da comparação conseguimos o item (a) para $r = 1$, como queríamos. Vamos então mostrar o item (b). Pela definição de derivada direcional:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) := \lim_{t\to 0^+} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} \overbrace{=}^{\text{por hipótese}} \lim_{t\to 0^+} \frac{u(x_0 + t\nu)}{t}.$$

Fazendo $x = x_0 + t\nu$, pelo item (a), temos que

$$u(x_0 + t\nu) \geq C.u(0)d(x, \partial B_1) = C.u(0)|x_0 + t\nu - x_0|$$

$$\Rightarrow u(x_0 + t\nu) \geq C.u(0).t \Rightarrow \frac{u(x_0 + t\nu)}{t} \geq Cu(0).$$

Por hipótese, existe a derivada direcional e então podemos utilizar a desigualdade acima:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(x_0 + t\nu)}{t} \geq C.u(0).$$

Caso $r \neq 1$, tomemos $v(x) = \frac{u(rx)}{r}, x \in \overline{B}_1$. Temos ainda que $\Delta v = 0$ em B_r, $v \in C^0(\overline{B_r})$ e ainda $v \geq 0$ em B_r. Pelo caso $r = 1$:

$$v(x) \geq C.v(0)d(x, \partial B_1).$$

Substituindo por u, temos que

$$\frac{u(rx)}{r} \geq C.\frac{u(0)}{r}.d(x, \partial B_1) \Rightarrow u(rx) \geq C.\frac{u(0)}{r}.r.d(x, \partial B_1).$$

Agora, escrevendo $rx = y \Rightarrow u(y) \geq C.\frac{u(0)}{r}d(y, \partial B_r)$. Logo, fazendo $\tilde{x_0} = x_0.r$, vem que:

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(\overline{x_0}) \geq Cv(0).$$

E então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq C\frac{u(0)}{r}$$

que é o que queríamos demonstrar. Desse modo, o Lema de Hopf-Oleinik está provado e utilizaremos a barreira que foi construída aqui em outros pontos do trabalho.

□

O lema abaixo nos permitirá estender a construção da barreira acima, basta utilizarmos funções radiais.

Lema 3.1. *Seja $w \in C^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ e seja $u(x) = w(|x|)$. Então,*
(a) $u \in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$;
(b) $D^2u(x) = \frac{w'(|x|)}{|x|}.I_n + \left\{\frac{w''(|x|)}{|x|^2} + \frac{w'(|x|)}{|x|^3}\right\} \cdot (x \otimes x)$;
(c) Os autovalores de $D^2u(x)$ são $\frac{w'(|x|)}{|x|}$ de multiplicidade $(n-1)$ e $w''(|x|)$ com multiplicidade 1.
Em particular, se $U \subseteq \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, vale:

$$||D^2u(x)||_{L^\infty(U)} \leq \sup_{x \in U}\left\{w''(|x|), \frac{w'(|x|)}{|x|}\right\}.$$

(d) Se w é convexa e decrescente, vale:

$$\mathcal{M}^-(D^2u) = \lambda\left(w''(|x|) + \frac{\Lambda}{\lambda}(n-1).\frac{w'(|x|)}{|x|}\right), x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

(e) Caso w seja côncava e crescente, vale:

$$\mathcal{M}^+(D^2u) = \lambda\left(w''(|x|) + \frac{\Lambda}{\lambda}(n-1).\frac{w'(|x|)}{|x|}\right), x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Demonstração. Os itens (a) e (b) seguem de manipulações algébricas e definições. Para provar o item (c), vejamos que $w''(|x|)$ é um autovalor de $D^2u(x)$. Tomando $\frac{x}{|x|}$, temos que

$$\left(D^2u\right)\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{w'(|x|)}{|x|^2}.x + w''(|x|)\frac{x}{|x|} - w'(|x|).\frac{x}{|x|^2}$$

$$\Rightarrow \left(D^2u\right)\left(\frac{x}{|x|}\right) = w''(|x|)\frac{x}{|x|}$$

e então $w''(|x|)$ é autovalor. Temos ainda que, dado $\xi \perp x/|x| \Rightarrow (x \otimes x)(\xi) = 0$. Logo, usando o item (b):

$$(D^2u(x))(\xi) = \frac{w'(|x|)}{|x|}.\xi + 0$$

o que nos dá que $w'(|x|)/|x|$ é autovalor com multiplicidade $(n-1)$ e desse modo (c) está provado. Para provarmos os itens (d) e (e), basta aplicarmos o que já temos às definições dos operadores de Pucci:

$$\mathcal{M}^-(D^2u) = \lambda Tr(D^2u)^+(x) - \Lambda Tr(D^2u)^-(x) = \lambda w''(|x|) + \Lambda(n-1).\frac{w'(|x|)}{|x|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}^-(D^2u) = \lambda\left(w''(|x|) + \frac{\Lambda}{\lambda}(n-1).\frac{w'(|x|)}{|x|}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. O item (e) segue de modo análogo.

□

Existe ainda uma versão mais geral do Lema de Hopf, provado agora para a classe de funções em $S(0)$ e não apenas harmônicas. Perceba que na prova do mesmo precisaremos construir uma outra barreira.

Proposição 3.2. *Seja $u \in C^0(\overline{B_r})$, $u \geq 0$ e $u \in S(0)$. Então,*

$$u(x) \geq \frac{C}{r}u(0)d(x, \partial B_r), \forall x \in \overline{B_r}$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ é uma constante universal. Além disso, se $x \in \partial B_r, u(x_0) = 0$ e $\exists \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq \frac{C}{r} u(0).$$

Demonstração. Consideremos a função $\Gamma(x) = |x|^{-\alpha}$, com $\alpha > 0$. Fazendo $w(t) = t^{-\alpha}, t > 0$, temos que $\Gamma(x) = w(|x|)$. Derivando, temos:

$$w'(t) = -\alpha t^{-(\alpha+1)} \Rightarrow w''(t) = \alpha(\alpha+1)t^{-(\alpha+2)} > 0.$$

Vejamos que w é convexa, decrescente e vale 3.1, que nos dá:

$$\mathcal{M}^-(D^2(|x|^{-\alpha})) = \lambda\alpha(\alpha+1)|x|^{-(\alpha+2)} - \Lambda\alpha(n-1)|x|^{-(\alpha+2)}. \tag{36}$$

Pela expressão 36, existe um $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda) > 0$ tal que $\mathcal{M}^-(D^2\Gamma) > 0$ em $\mathbb{R}^n$. Se $|x| \leq 1 \Rightarrow \mathcal{M}^-(D^2\Gamma) = \frac{P(\alpha)}{|x|^{\alpha+2}} \geq P(\alpha)$, onde $P(\alpha) := \lambda\alpha(\alpha+1)|x|^{-(\alpha+2)} - \Lambda\alpha(n-1)|x|^{-(\alpha+2)}$. Como sabemos, é suficiente provar a proposição para $r = 1$, por argumentos de *scalling*. Podemos supor que $u(0) > 0$. Pelo princípio do máximo forte:

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq C. \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{C}.u(0) \leq u(x), \forall x \in \overline{B_{\frac{1}{2}}}.$$

Fazendo $\frac{1}{C} = \overline{C} \Rightarrow \overline{C}u(0) \leq u(x), \forall x \in \overline{B_{\frac{1}{2}}}$, com $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \Lambda) > 0$. Vamos definir, novamente, uma barreira alternativa para provar o lema de Hopf. Definindo $\Gamma_0(x) = \overline{C}u(0).\left(\frac{|x|^{-\alpha}-1}{2^\alpha-1}\right)$, temos que

$$\begin{cases} \Gamma_0(x) = 0 \quad \text{em} \quad \partial B_1, \\ \\ \Gamma_0(x) = \overline{C}.u(0), \text{ em } \partial B_{1/2} \quad (37) \\ \\ \Gamma_0 \in C^0(B_1 \backslash B_{\frac{1}{2}}), \Gamma_0 \in \underline{S}(0). \end{cases}$$

Temos então que

$$\mathcal{M}^{\pm}(D^2\overline{C}u(0)\Gamma(x)) = \overline{C}u(0).\mathcal{M}^{\pm}(D^2\Gamma_\alpha), \Gamma(x)_\alpha = \left(\frac{|x|^{-\alpha}-1}{2^\alpha-1}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{C}u(0).\mathcal{M}^{\pm}(D^2\Gamma_\alpha) = \overline{C}u(0).\mathcal{M}^{\pm}\left(\frac{1}{2^\alpha-1}D^2(|x|^{-\alpha}-1)\right) =$$

$$= \frac{\overline{C}u(0)}{2^\alpha-1}.\mathcal{M}^{\pm}(D^2(|x|^{-\alpha})) > 0.$$

Agora, note que o princípio da comparação vale para os operadores de Pucci e sabemos, pelos cálculos acima, que:

$$\mathcal{M}^-(D^2(\Gamma_0)) \geq 0, \;\; \mathcal{M}^-(D^2 u) \leq 0.$$

Pelo princípio da comparação, como $u \geq \Gamma_0$ em $\partial \mathcal{A}_{1,\frac{1}{2}} \Rightarrow u \geq \Gamma_0$ em $\mathcal{A}_{1,\frac{1}{2}}$ e então a estimativa segue. $\square$

3.2 Teorema de Krylov em $S(0)$ com dado de fronteira nulo

Nesta seção, dissertaremos a respeito de um teorema bem famoso na área de equações diferenciais parciais que inclusive motivou o teorema principal desta tese. Antes disso, apresentaremos algumas proposições. Nicolai Krylov provou em 79' uma desigualdade de Harnack:

Teorema 3.2. *Seja $u \in W^{2,n}(B_1)$ e $Lu = Tr(A(x)D^2u) = 0$ q.t.p. em B_1, com $I\lambda \leq A \leq I\Lambda$. Então, existe uma constante $c = c(n, \lambda, \Lambda) > 1$ tal que*

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq c \inf_{B_{\frac{1}{2}}} u.$$

Da estimativa acima, conseguimos como corolário:

Corolário 3.1. *(Krylov-Safonov 79') Seja $u \in W^{2,n}(B_1)$, limitada em B_1 e $Lu = Tr(A(x)D^2u) = 0$ q.t.p. em B_1, com $I\lambda \leq A \leq I\Lambda$. Então, existe $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda) \in (0,1)$ e $c = c(n, \lambda, \Lambda) > 1$ tais que:*

$$||u||_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}})} \leq c.||u||_{L^\infty(B_1)}.$$

Observação 3.3. *Já sabíamos, pelo mergulho de Sobolev ($W^{2,n}(B_1) \hookrightarrow C^\alpha(B_1)$) que $u \in C^\alpha$. O que faz do teorema um grande resultado é a estimativa. Na verdade, vale a estimativa para o conjunto abaixo:*

$$F := \{M \mid \alpha u(\beta x) \text{ satisfazem a desigualdade de Harnarck sempre que } M \mid \alpha u(\beta x) \geq 0 em\, B_1\}$$

onde $M, \alpha, \beta > 0$.

Teorema 3.3. *(Evans-Krylov 82') Seja $F : S(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente elíptica e convexa. Se $u \in C^2(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ e é solução de $F(D^2u) = 0$ em B_1, $\exists \alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda) \in (0,1)$*

e $c > 0$ universal tal que $u \in C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})$ e vale a estimativa:

$$||u||_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq c.||u||_{C^2(B_{\frac{1}{2}})} \Bigg(||D^2u||_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}})} \leq c.||u||_{L^\infty(B_1)} \Bigg).$$

Observação 3.4. *Ser côncavo ou convexo é essencialmente imprescindível ao teorema de Evans-Krylov. Existe um exemplo dado por Nadirashvili e Vladut(NADIRASHVILI e VLADUT (2007)) que mostra que, $\forall\beta \in (0,1), \exists F_\beta$ uniformemente elíptico, $F_\beta \in C^\infty$ e u solução de $F_\beta(D^2u) = 0$ que nunca é $C^{1,\beta}$.*

A primeira versão do teorema do Krylov foi publicada pelo mesmo no ano de 1983 como em 1.1. o qual pode ser encontrado como o Teorema 9.31 em GILBARG (2001). Vamos olhar para o teorema acima de um outro modo:

Teorema 3.4. *(Krylov) Seja $u \in S^*(0)$ em B_1^+ e $u \in C^0(\overline{B_1^+})$ com $u = 0$ em B_1'. Então, existe um $A : B_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda) \in (0,1)$ e $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ tais que:*
i) $|u(x) - A(x_0)(x - x_0)| \leq C.||u||_{L^\infty(B_1^+)}.|x - x_0|^{1+\alpha}, \forall x_0 \in B'_{\frac{1}{2}}, \forall x \in B_1^+$;
ii) $||A||_{L^\infty(B'_{\frac{1}{2}})} \leq C.||u||_{L^\infty(B_1^+)}$.

Observação 3.5. *Uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in \Omega$ quando existe uma aplicação linear $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) = u(x_0) + l(x_0).(x - x_0) + R_{x_0}(x)$ onde $l(x_0) = \nabla u(x_0)$. Isso significa que existe $L_{x_0}(x)$- função afim tal que*

$$|u(x) - L_{x_0}(x)| = o(|x - x_0|), i.e, \lim_{x \to x_0} \frac{|u(x) - L_{x_0}(x)|}{x - x_0} = 0.$$

Por definição, $u \in C^{1,\alpha}(B_1) \Leftrightarrow u \in C^1 \mathrm{e} \nabla u \in C^\alpha$. Como temos:

$$R_{x_0}(x) = u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)(x - x_0) = u(x) - P^t_{x_0}(x). \tag{38}$$

Desse modo, temos que $R_{x_0}(x)$ também é C^1, já que é a diferença de duas funções que são C^1's. Daí, podemos também tomar a expansão de Taylor de R_{x_0}:

$$R_{x_0}(x) = R_{x_0}(x_0) + \nabla R_{x_0}(x)(x - x_0)$$

e, pelo Teorema do Valor Médio, $R_{x_0}(x) - R_{x_0}(x_0) = \nabla R_{x_0}(\xi)(x - x_0), \xi \in [x_0, x]$. Substituindo $x = x_0$ e a expressão 38 em x, obtemos:

$$u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)(x - x_0) = \Big(\nabla u(\xi) - \nabla u(x_0)\Big)(x - x_0)$$

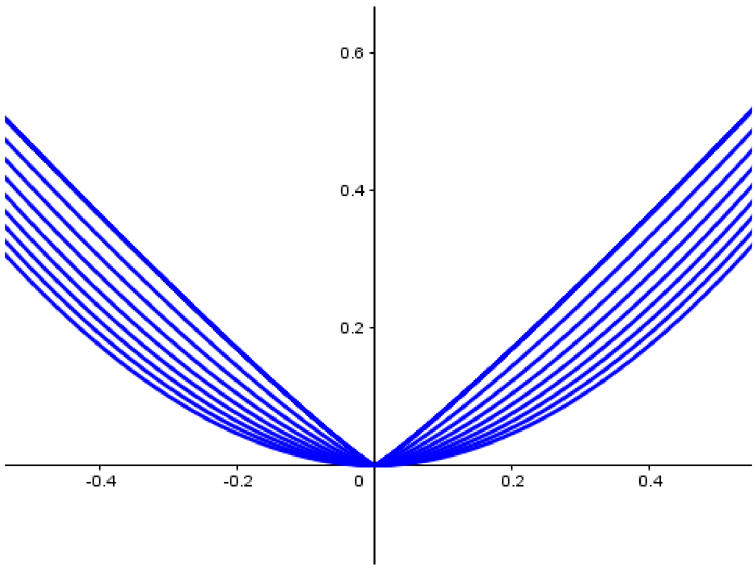
$$\Leftrightarrow |u(x) - P^t_{x_0}(x)| = |u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)(x - x_0)| \leq |\nabla u(\xi) - \nabla u(x_0)|.|x - x_0|.$$

Como $u \in C^{1,\alpha} \Rightarrow \nabla u \in C^{\alpha}$. Então, temos:

$$|u - P^t_{x_0}| \leq [\nabla u]_{C^{\alpha}(B_1)}.|\xi - x_0|^{\alpha}.|x - x_0| \leq [\nabla u]_{C^{\alpha}(B_1)}.|\xi - x_0|^{1+\alpha}.$$

Observação 3.6. *Classificar uma função segundo a sua regularidade significa comparar a ordem do erro que a função tem de uma função modelo. No caso das funções $C^{1,\alpha}$, a função modelo que tomamos é $f(x) = |x|^{1+\alpha}$. Heuristicamente, podemos pensar ainda que se uma determinada função é Lipschitz e a constante de Lipschitz decai como Hölder, então a função é $C^{1,\alpha}$. Esse decaimento pode ser percebido através de intervalos iguais e comumente tomamos intervalos diádicos. Vejamos graficamente como são as funções $|x|^{1+\alpha}, \alpha \in (0,1)$, o qual nos dará uma ideia que de fato o lema abaixo funciona:*

Figura 5 – Gráficos de funções $|x|^{1+\alpha}$, com $0 \leq \alpha < 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lema 3.2. *Seja $u \geq 0$ com $u(0) = 0$ e suponha que $\mu \in (0,1)$ tal que*

$$\sup_{B_{\frac{1}{2^k}}} u \leq \mu \sup_{B_{\frac{1}{2^{k-1}}}} u, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Então, $u \in C^{\alpha}(0)$ com estimativa.

Proposição 3.3. *Seja $u \in C^0(\overline{B_1^+}) \cap S(0)$ e $u \equiv 0$ em B_1'. Então, existe $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ tal que*

$$|u(x)| \leq C||u||_{L^{\infty}(B_1^+)} x_n.$$

Corolário 3.2. *Se ao invés de* $u \in S(0)$ *em* B_1^+ *tivermos* $F(D^2u) = 0$ *em* B_1^+ *e* $F(0) = 0$*, então, existe* $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ *tal que*

$$||\nabla u||_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leq C||u||_{L^\infty(B_1)}.$$

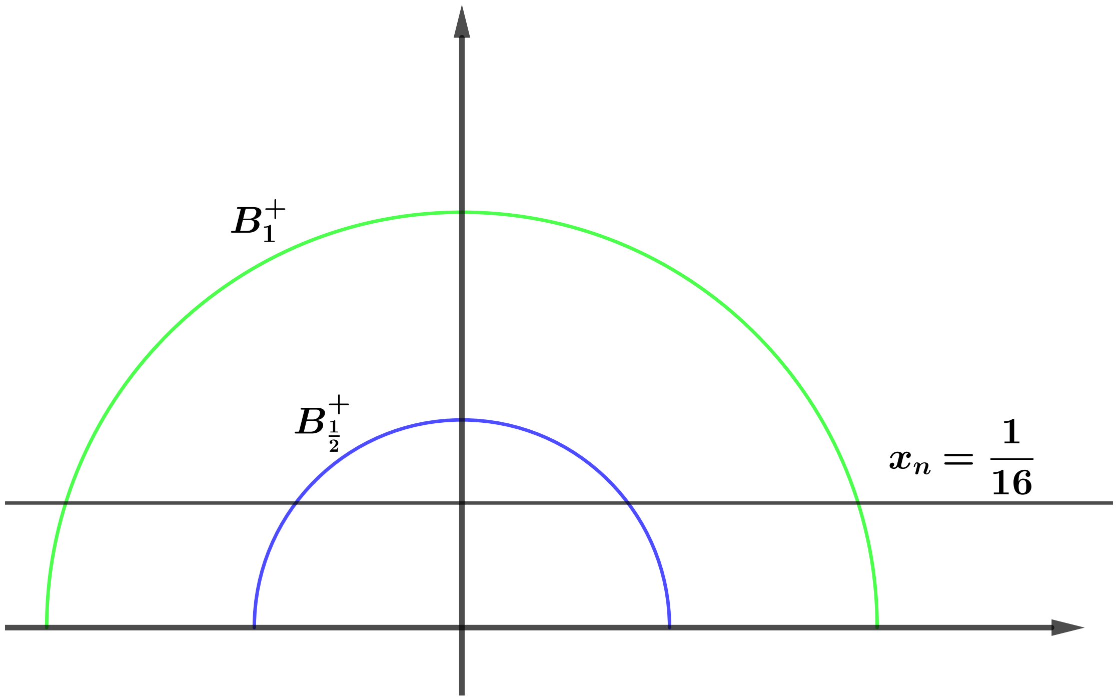
Em particular,

$$|u(x) - u(y)| \leq C||u||_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}}+)}.|x - y|, \forall x, y \in B_{\frac{1}{2}}^+.$$

Prova do Corolário: Veja que poderíamos invocar diretamente o teorema de regularidade para a equação $F(D^2u) = 0$ em B_1^+ e $u = 0$ em B_1', já que o dado de fronteira é $C^{1,\alpha}$. Vamos considerar dois casos:

1º Caso: se $x_n \geq \frac{1}{16}$ e $|x| \leq \frac{1}{2}$:

Figura 6 – Região Ω_0



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso, basta aplicarmos o teorema de regularidade para a região acima $\Omega_0 := \{x_n > \frac{1}{16}\} \cap B_{\frac{1}{2}}^+$. Logo, temos que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ e vale:

$$||u||_{C^{1,\alpha}(\Omega_0)} \leq C.||u||_{L^\infty(B_1^+)}, C = d^{-\delta}(\Omega_0, \partial B_1^+) = \frac{1}{d^\delta} \leq 16^\delta$$

$$\Rightarrow ||\nabla u||_{L^\infty(\Omega_0)} \leq ||u||_{C^{1,\alpha}(\Omega_0)} \leq 16^\delta.||u||_{L^\infty(B_1^+)}.$$

E então a estimativa segue.

2º Caso: se $x \in B^+_{\frac{1}{2}}$ e $x_n < \frac{1}{16}$, temos que $B_{x_n}(x) \subset B^+_1$. Como $F(D^2u) = 0$ e $F(0) = 0$, vale que:

$$|\nabla u| \leq \frac{C_0||u||_{L^\infty(B_{x_n}(x))}}{x_n} \leq \frac{C_0||u||_{L^\infty(B^+_{\frac{3}{4}})}}{x_n} \leq \frac{C_0||u||_{L^\infty(B^+_1)}}{x_n}.$$

E então a estimativa segue!

Prova do Teorema: Sabemos que $u \in S(0)$ em $B^+_1 \Leftrightarrow \mathcal{M}^+(D^2u) \geq 0$ em B^+_1 e $\mathcal{M}^-(D^2u) \leq 0$ em $B^+_1 \Leftrightarrow u, -u \in \overline{S}(0)$. Em particular, $-\mathcal{M}^+(D^2u) \leq 0$ em $B^+_1 \Leftrightarrow \mathcal{M}^-(D^2u) \leq 0$ em B^+_1. Então, basta mostrarmos que:

Lema 3.3. *Seja $u \in C^0(\overline{B^+_1}) \cap \overline{S}(0)$ e $u \geq 0$ em B'_1. Então, vale a estimativa*

$$u(x) \leq C.||u||_{L^\infty(B^+_1)} x_n.$$

Afirmação: O lema 3.2 implica na prova do teorema.

De fato, $u, -u \in \overline{S}(0)$ em B^+_1 e $u, -u \in C^0(\overline{B^+_1})$. Além disso, como $u = 0$ em B'_1, temos que $u, -u \geq 0$ em $B'_1 \Rightarrow \pm u(x) \leq C.||u||_{L^\infty(B^+_1)}.x_n \Rightarrow |u(x)| \leq C.||u||_{L^\infty(B^+_1)}.x_n$ e então o resultado segue.

Afirmação: Dadas as mesmas condições do lema 3.2, basta provarmos para u satisfazendo $||u||_{L^\infty(B^+_1)} \leq 1$.

De fato, se $u \in C^0(\overline{B^+_1}) \cap \overline{S}(0)$ em B^+_1 e $u \geq 0$ em B'_1. Defina $v = \frac{u}{||u||_{L^\infty(B^+_1)}}$ e então veja que $||v||_{L^\infty(B^+_1)} \leq 1$. Pelas propriedades de 2.2, sabemos que v satisfaz a uma equação bem parecida com a que a u satisfaz, e, portanto, basta provarmos que tal resultado vale pra u normalizada.

Prova da proposição: Segundo as observações acima, podemos assumir que $||u||_{L^\infty(B^+_1)} \leq 1$. Vamos provar a estimativa para $x \in B^+_{\frac{1}{2}}$ e $0 \leq x_n \leq \frac{1}{100}$, por exemplo, teríamos:

$$u(x) \leq 1.||u||_{L^\infty(B^+_1)} \leq ||u||_{L^\infty(B^+_1)} 100 x_n.$$

Seja $x_0 = (x'_0, x_n) \in B^+_{\frac{1}{2}}$ tal que $0 < x_n < \frac{1}{100}$ e $z_0 = (x'_0, -1/100)$. Para resolver o problema, vamos construir uma barreira como a conhecida *lilly flower* no anel $\mathcal{A} = B_{2/100}(z_0) \backslash B_{1/100}(z_0)$. Definamos, então, Γ como em 37, sabemos que $\exists \alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda) > 0$ tal que:

$$\Gamma := \Gamma_\alpha(x) = \frac{(1/100)^\alpha - |x - z_0|^{-\alpha}}{(1/100)^\alpha - (2/100)^\alpha}, \mathcal{M}^+(D^2\Gamma_\alpha) \leq 0.$$

Observe que, para $\Omega := B_{1/100}(z_0) \cap \{x_n \geq 0\} \not\subseteq B_1^+$. Assim, podemos usar o lema da comparação:

$$u \leq \Gamma \text{ em } \partial\Omega$$

$$\mathcal{M}^+(D^2u) \geq 0 \geq \mathcal{M}(D^2\Gamma) \text{ em } \Omega$$

para concluir que $u(x) \leq \Gamma(x), \forall x \in \Omega$, porém, $x_0 \in \Omega \Rightarrow u(x_0) \leq \Gamma(x_0) \leq C_1.d(x_0, \partial B_{1/200}) = C_1.X_{0n}$. Veja que a barreira serviu para trazer a estimativa que tínhamos para Γ para u. No caso geral, como dissemos, basta fazermos a mesma coisa para $v(x) = \frac{u(x)}{||u||_{L^\infty(B_1^+)}}$.

Teorema 3.5. *Seja $u \in C^0(\overline{B}_1^+) \cap S(0)$ em B_1^+ e $u = 0$ em B_1'. Suponha que existam $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_0 \cdot x_n \leq u(x) \leq \beta_0 \cdot x_n, \forall x \in B_1^+$. Então, existe $\mu \in (0,1)$ e $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq \beta_0$ e*

$$\alpha_1 \cdot x_n \leq u(x) \leq \beta_1 \cdot x_n \text{ em } B_{\frac{1}{2}}^+$$

$$(\beta_1 - \alpha_1) \leq \mu(\beta_0 - \alpha_0).$$

Demonstração. É suficiente provar para $\alpha_0 = 0$ e $\beta_0 = 1$. De fato, no caso geral procederemos assim: se $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ não temos nada a fazer, pois isso implica que $u = 0$ e então basta tomarmos $\alpha_0 = \alpha_1$ e $\beta_0 = \beta_1$. Podemos, então, assumir que $\alpha_0 < \beta_0$, caso contrário basta fazermos $\alpha_0 = \alpha_1$ e $\beta_0 = \beta_1$. Definamos então

$$v(x) = \frac{u(x) - \alpha_0 \cdot x_n}{\beta_0 - x}, 0 \leq v(x) \leq x_n.$$

Então, por hipótese, $\exists \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \leq 1$ tais que:

$$\alpha_1 \cdot x_n \leq v(x) \leq \beta_1 \cdot x_n \text{ em } B_1^+$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot x_n \leq \frac{u(x) - \alpha_0 \cdot x_n}{\beta_0 - \alpha_0} \leq \beta_1 \cdot x_n \Leftrightarrow (\beta_0 - \alpha_0).\alpha_1 \cdot x_n \leq u - \alpha_0 \cdot x_n \leq \beta_1(\beta_0 - \alpha_0) \cdot x_n. \quad (39)$$

Podemos, na equação 39, somar a parcela $\alpha_0 \cdot x_n$ em todas as desigualdades, chegando a:

$$(\beta_0 - \alpha_0)\alpha_1 \cdot x_n + \alpha_0 \cdot x_n \leq u \leq (\beta_0 - \alpha_0)\beta_1 \cdot x_n + \alpha_0 \cdot x_n.$$

Como, por hipótese, vale para $v : (\beta_1 - \alpha_1) \leq \mu(1 - 0), \mu \in (0,1)$, veja que

$$(\beta_0 - \alpha_0).\beta_1 + \alpha_0 - \alpha_0 - (\beta_0 - \alpha_0).\beta_1 = (\beta_0 - \alpha_0)(\beta_1 - \alpha_1) \leq \mu(\beta_0 - \alpha_0).$$

Fixaremos agora nosso olhar para o caso em que $\alpha_0 = 0$ e $\beta_0 = 1$. Assumamos que $0 \leq u \leq x_n, \forall x \in B_1^+$. Temos, então, duas possibilidades:

i) $u(\frac{1}{2}e_n) \geq 1/4$

ii) $u(\frac{1}{2}e_n) < 1/4$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que ocorre (i), pois, caso contrário, basta considerarmos $v(x) = x_n - u(x)$ e então, temos que: $0 \leq v \leq x_n$ em B_1^+, $v \in S(0), v \in C^0(\overline{B_1^+}), v(\frac{1}{2}.e_n) = 1/2 - u(\frac{1}{2}.e_n)$. No tocante a u, podemos usar Harnack para chegar à:

$$u(y) \geq C_0 u(\frac{1}{2}.e_n) \geq \frac{C_0}{4}, \forall y \in Q_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}e_n)$$

Vamos, então, construir uma função barreira Γ satisfazendo:

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-(D^2\Gamma) \geq 0 \text{ em } \mathcal{A}, \\ \\ \Gamma = 0, \text{ em } \partial B_{1/2}(\frac{1}{2}.e_n) \quad (40) \\ \\ \Gamma = \frac{c_0}{4}, \text{ em } \partial B_{1/8}(\frac{1}{2}.e_n). \end{cases}$$

Onde $\mathcal{A} := B_{1/2}(\frac{1}{2}.e_n)\backslash\overline{B_{1/8}}(\frac{1}{2}.e_n)$. Neste anel, temos que $\mathcal{M}^-(D^2\Gamma) \geq 0 \geq \mathcal{M}^-(D^2u)$ e em $\partial\mathcal{A}$, temos que $u(x) \geq \Gamma(x)$. Sabemos, porém, que

$$\Gamma(x) \geq c_1.\frac{c_0}{4}d(x, \partial B_{1/2}(\frac{1}{2}.e_n))$$

e se $x \in [0, \frac{3}{8}]$, vem que:

$$u(x) \geq \Gamma(x) \geq c_2 d(x, \partial B_{1/2}(\frac{1}{2}.e_n)) = c_2.x_n.$$

Caso $x \in [3/8.e_n, 1/2.e_n]$, então $x \in Q_{1/4}(\frac{e_n}{2})$. Logo, vale que:

$$u(x) \geq \frac{c_0}{4} \geq \frac{c_0}{4}.x_n.$$

Em todo caso, conseguimos mostrar que $u(x) \geq c_3.x_n$, onde $c_3 = min\{c_2, \frac{c_0}{4}\}$, ou seja, existe um $\alpha_1 = c_3$ que satisfaz o que desejamos. Do mesmo modo, temos, por Harnack, que vale a desigualdade contrária para $\beta_1 = \frac{1}{c_0} \leq 1$. Como $\beta_1 - \alpha_1 \leq 1$, o teorema está provado para um $1 \geq \mu \geq \beta_1 - \alpha_1$.

$\square$

O caso acima pode funcionar como o caso inicial da indução abaixo:

Teorema 3.6. *Seja $u \in C^0(\overline{B}_1^+) \cap S(0)$ em B_1^+ e $u = 0$ em B_1'. Suponha que existam $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_0 \cdot x_n \leq u(x) \leq \beta_0 \cdot x_n, \forall x \in B_1^+$. Então, existem $\delta_0 \in (0,1)$ e* *sequências* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \beta_0, \beta_1, \beta_2, ... \in \mathbb{R}$ *satisfazendo:*

$$\begin{cases} \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ...\alpha_k \leq ... \leq \beta_k \leq \beta_{k-1} \leq ... \leq \beta_0 \\ \\ \beta_k - \alpha_k \leq \delta_0^k(\beta_0 - \alpha_0) \end{cases} \tag{41}$$

tais que

$$\alpha_k \cdot x_n \leq u(x) \leq \beta_k \cdot x_n \text{ em } B^+_{2^{-k}}.$$

Em particular, para $0 < r \leq 1$,

$$\underset{B_r^+}{osc}\left(\frac{u}{x_n}\right) \leq \overline{C}.r^{\alpha}$$

onde $\overline{C}$ *é uma constante e* $\alpha \in (0,1)$. *Isso implica que existe um* $\Psi_0 \in \mathbb{R}$ *e* α *tais que:*

$$|u(x) - \Psi_0 \cdot x_n| \leq C|x|^{\alpha} \cdot x_n,\ \forall x \in B^+_{1/2},\ |\Psi_0| \leq 1 \tag{42}$$

na qual C *é uma constante universal.*

Demonstração: Já temos o caso inicial pelo teorema acima. Suponha, por propósito de indução, que a afirmação é válida para $k = m$ e vamos provar que vale para $k = m + 1$. Se é válido para $k = m$, temos que existem $\beta_m, \alpha_m, \delta_0 \in (0,1)$:

$$(\beta_m - \alpha_m) \leq \delta_0^m(\beta_0 - \alpha_0)$$

$$\beta_m \cdot x_n \leq u(x) \leq \alpha_m \cdot x_n,\ x \in B_{2^{-m}}.$$

Definamos, então:

$$u_m(x) := \frac{u(2^{-m}x)}{2^{-m}}, x \in B_1^+.$$

Agora temos uma função definida em B_1^+ e tal que $u_m \in S^*(0)$ em B_1^+ e $u_m = 0$ em B_1' e satisfaz $\beta_m \cdot x_n \leq u_m(x) \leq \alpha_m \cdot x_n, \forall x \in B_1^+$, com β_m e α_m satisfazendo a condição da hipótese de indução. Assim, se definirmos:

$$v_m(x) := \frac{u_m(x) - \alpha_m \cdot x_n}{\delta_0^m}, x \in B_1^+$$

perceba que, pelo lema 4.1, temos que $v_m(x) \in S^*(0)$. Assim, podemos usar o teorema acima(caso inicial), para mostrar que existem $\tilde{\alpha_1}, \tilde{\beta_1} \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(\tilde{\beta_1} - \tilde{\alpha_1}) \leq \delta_0$$

$$\tilde{\alpha_1} \cdot x_n \leq v_m(x) \leq \tilde{\beta_1} \cdot x_n, x \in B^+_{1/2}.$$

Voltando para a nossa função u, temos que

$$\delta_0^m\tilde{\alpha_1}\cdot x_n+\alpha_m\cdot x_n\leq u_m(x)\leq\delta_0^m\tilde{\beta}_1\cdot x_n+\alpha_m\cdot x_n, x\in B^+_{1/2}.$$

Logo, fazendo $\alpha_{m+1}:=\delta_0^m\tilde{\alpha_1}+\alpha_m$ e $\beta_{m+1}:=\delta_0^m\tilde{\beta}_1+\alpha_m$, podemos escrever:

$$\alpha_{m+1}\cdot x_n\leq u_m(x)\leq\beta_{m+1}\cdot x_n, x\in B^+_{1/2}.$$

O que implica que:

$$\alpha_{m+1}\cdot x_n\leq u(x)\leq\beta_{m+1}\cdot x_n, x\in B^+_{2^{-(m+1)}}$$

com $\alpha_m\leq\alpha_{m+1}$, $\beta_{m+1}\leq\beta_m$ e ainda:

$$\beta_{m+1}-\alpha_{m+1}=(\tilde{\beta}_1-\tilde{\alpha_1})\delta_0^m\leq\delta_0^{m+1}(\beta_0-\alpha_0).$$

E então o resultado segue por indução. Além disso, da monotonicidade das sequências, temos que existe um $\Psi_0\in\mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{m\to+\infty}\alpha_m=\lim_{m\to+\infty}\beta_m=\Psi_0$$

com $|\Psi_0|\leq 1$. Fazendo $\alpha:=-log_2^{\delta_0}>0\Rightarrow\alpha\in(0,1)$. Para $x\in B^+_{1/2}$, existe um $k\geq 1$ tal que $2^{-(k+1)}<|x|\leq 2^{-k}$. Logo, temos que:

$$\begin{aligned}u(x)-\Psi_0\cdot x_n&=u(x)+(\alpha_k-\Psi_0)\cdot x_n-\alpha_k\cdot x_n\\&\leq(\beta_k-\alpha_k)\cdot x_n\\&\leq 2.\delta_0^k x_n=2^{\alpha+1}(2^{-(k+1)})^\alpha\cdot x_n\\&\leq 2^{\alpha+1}.|x|^\alpha\cdot x_n.\end{aligned}$$

Analogamente, conseguimos mostrar que, para $x\in B^+_{1/2}$ $u(x)-\Psi_0\cdot x_n\geq -2^{\alpha+1}|x|^\alpha\cdot x_n$ e então concluímos que:

$$|u(x)-\Psi_0\cdot x_n|\leq 2^{\alpha+1}|x|^\alpha\cdot x_n,\ \forall x\in B^+_{1/2}.$$

Fazendo $C=2^{\alpha+1}$ a estimativa segue. Agora, observe que para $0<r<1$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $2^{-(k+1)}<r\leq 2^{-k}$. Fazendo $\psi(r)=\underset{B_r^+}{osc}\left(\frac{u}{x_n}\right)$, temos que:

$$\psi(r)\leq\psi(2^{-k})\leq\beta_k-\alpha_k\leq 2\delta_0^k=2\delta_0^{-1}2^{-(k+1)\alpha}\leq\overline{C}.r^\alpha$$

e então a estimativa segue.

4 IMPROVEMENT OF FLATNESS

Após termos visto as definições de soluções no sentido da viscosidade e suas respectivas classes, assim como é importante para argumentos de *scaling*'s entender qual a equação que a nova função escalonada satisfaz, no nosso argumento, como estimamos a norma da diferença de uma função que está em alguma dessas classes com uma função linear, é útil para nós entendermos em que possíveis classes tal diferença está. Dado isto, vamos mostrar agora um lema de pertubação por funções lineares. A seguinte prova segue de modo similar o argumento apresentado na afirmação 3.9 da página 40 de NORNBERG (2018b). No que se segue, nós usaremos diversas vezes perturbações por funções afins de funções na classe $S^*(\gamma, \varrho, f)$. De modo a simplificar os argumentos seguintes, enfatizamos que se L é uma função afim e $\gamma \in L^n_+(\Omega), f \in L^n(\Omega)$ e ϱ é uma constante não negativa, temos os seguintes resultados de perturbação.

Lema 4.1 (Perturbação por funções afins). *Seja L uma função afim. Então,*

i) $u \in \underline{S}(\gamma, \varrho, f)$ *em* $\Omega \Longrightarrow u + L \in \underline{S}(\gamma + 2\varrho|\nabla L|, \varrho, f - \gamma|\nabla L| - \varrho|\nabla L|^2)$ *em* Ω*;*

ii) $u \in \overline{S}(\gamma, \varrho, f)$ *em* $\Omega \Longrightarrow u + L \in \overline{S}(\gamma + 2\varrho|\nabla L|, \varrho, f + \gamma|\nabla L| + \varrho|\nabla L|^2)$ *em* Ω*;*

iii) Em particular,

$$u \in S^*(\gamma, \varrho, f) \text{ in } \Omega \Longrightarrow v := u+L \in S^*\Big(\gamma+2\varrho|\nabla L|, \varrho, |f|+\gamma\cdot|\nabla L|+\varrho\cdot|\nabla L|^2\Big) \text{ em } \Omega. \tag{43}$$

iv) Seja $u \in S^*(\gamma, \varrho, f)$ *em* Ω*. Para* $\alpha, \beta > 0$*, definamos*

$$v_{\alpha\beta}(x) := \alpha u(\beta x) + L(x) \quad \text{para} \quad x \in \Omega_\beta$$

onde Ω_β *como considerado na observação 2.8. Então,*

$$v_{\alpha\beta} \in S^*(\overline{\gamma}, \overline{\varrho}, \overline{f}) \quad \text{em} \quad \Omega_\beta$$

onde

$$\overline{\gamma}(x) := \beta\gamma(\beta x)+2\frac{\varrho}{\alpha}|\nabla L|, \quad \overline{\varrho} := \frac{\varrho}{\alpha}, \quad \overline{f}(x) := \alpha\beta^2|f(\beta x)|+\beta\gamma(\beta x)|\nabla L|+\frac{\varrho}{\alpha}|\nabla L|^2. \tag{44}$$

Demonstração. Começamos percebendo que *iii)* é uma consequência direta de *i)* e *ii)*. Além disso, (43) junto com a observação 2.8 nos dá *iv)*. Provaremos o item *i)*. Seja $\varphi \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ e suponha que $(u + L) - \varphi = u - (\varphi - L) = u - \overline{\varphi}$ tem um máximo local em $x_0 \in \Omega$ onde $\bar{\varphi} = \varphi - L \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$. Temos ainda que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{+}_{\gamma,\varrho}[\varphi - L] &= \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi - D^2L) + \gamma|\nabla\varphi - \nabla L| + \varrho|\nabla\varphi - \nabla L|^2 \\
&\leq \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi) + \gamma|\nabla\varphi| + \gamma|\nabla L| + \varrho|\nabla\varphi|^2 + \varrho|\nabla L|^2 + 2\varrho|\nabla\varphi||\nabla L| \\
&\leq \mathcal{P}^{+}_{\gamma+2|\nabla L|\varrho,\varrho}[\varphi] + \gamma|\nabla L| + \varrho|\nabla L|^2 \quad \text{q.t.p em } \Omega.
\end{aligned}
$$

Passando o termo da esquerda para a direita da desigualdade acima, vem que:

$$
R(x) := \mathcal{P}^{+}_{\gamma+2|\nabla L|\varrho,\varrho}[\varphi](x) - \mathcal{P}^{+}_{\gamma,\varrho}[\varphi - L](x) + \gamma(x)|\nabla L| + \varrho|\nabla L|^2 \geq 0 \quad \text{q.t.p } x \quad \text{em } \Omega.
$$

Ou ainda

$$
\mathcal{P}^{+}_{\gamma+2|\nabla L|\varrho,\varrho}[\varphi](x) - f(x) + \gamma(x)|\nabla L| + \varrho|\nabla L|^2 = R(x) + \mathcal{P}^{+}_{\gamma,\varrho}[\varphi - L] - f(x) \quad \text{q.t.p } x \quad \text{em } \Omega.
$$

Agora, já que $R \geq 0$ q.t.p em Ω

$$
ess \limsup_{x\to x_0} \left(\mathcal{P}^{+}_{\gamma+2|\nabla L|\varrho,\varrho}[\varphi](x) - f(x) + \gamma(x)|\nabla L| + \varrho|\nabla L|^2\right) \geq ess \limsup_{x\to x_0} \left(\mathcal{P}^{+}_{\gamma,\varrho}[\overline{\varphi}](x) - f(x)\right) \geq 0,
$$

onde aqui nós usamos que $u \in \underline{S}(\gamma, \varrho, f)$ em Ω. A prova do item *ii*) é análoga, considere $\varphi \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ e suponha que $(u + L) - \varphi = u - (\varphi - L) = u - \overline{\varphi}$ tem um mínimo local em $x_0 \in \Omega$ onde $\bar{\varphi} = \varphi - L \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$. Como no item anterior,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{-}_{\gamma,\varrho}[\varphi - L] &= \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi - D^2L) - \gamma|\nabla\varphi - \nabla L| - \varrho|\nabla\varphi - \nabla L|^2 \\
&\geq \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi) - \gamma|\nabla\varphi| - \gamma|\nabla L| - \varrho|\nabla\varphi|^2 - \varrho|\nabla L|^2 - 2\varrho|\nabla\varphi||\nabla L| \\
&\geq \mathcal{P}^{-}_{\gamma+2|\nabla L|\varrho,\varrho}[\varphi] - \gamma|\nabla L| - \varrho|\nabla L|^2 \quad \text{q.t.p em } \Omega.
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo como acima, podemos organizar nossa estimativa para obtermos

$$
\overline{R}(x) := \mathcal{P}^{-}_{\gamma+2|\nabla L|\varrho,\varrho}[\varphi](x) - \mathcal{P}^{-}_{\gamma,\varrho}[\varphi - L](x) - \gamma(x)|\nabla L| - \varrho|\nabla L|^2 \leq 0 \quad \text{q.t.p } x \quad \text{em } \Omega.
$$

Temos então que

$$
\mathcal{P}^{-}_{\gamma+2|\nabla L|\varrho,\varrho}[\varphi](x) - f(x) - \gamma(x)|\nabla L| - \varrho|\nabla L|^2 = \overline{R}(x) + \mathcal{P}^{-}_{\gamma,\varrho}[\varphi - L] - f(x) \quad \text{q.t.p } x \quad \text{em } \Omega.
$$

Como $\overline{R} \leq 0$ q.t.p em Ω

$$
ess \liminf_{x\to x_0} \left(\mathcal{P}^{-}_{\gamma+2|\nabla L|\varrho,\varrho}[\varphi](x) - f(x) + \gamma(x)|\nabla L| + \varrho|\nabla L|^2\right) \leq ess \liminf_{x\to x_0} \left(\mathcal{P}^{-}_{\gamma,\varrho}[\overline{\varphi}](x) - f(x)\right) \leq 0,
$$

aqui usamos que $u \in \overline{S}(\gamma, \varrho, f)$ em Ω e então nosso lema está provado.

$\square$

4.1 Resultados de Estabilidade

Tal proposição está provada em CAFFARELLI *et al.* (1996) de um modo mais geral. Para nós importará apenas a desigualdade para o caso $m = 2$. Para tal, consideremos a equação :

$$\mathcal{M}^{-}(D^2u) - \mu_1(x)|\nabla u| - \mu_m(x)|\nabla u|^m = f(x) \text{ em } \Omega \tag{45}$$

Considere ainda que F é uniformemente elíptico e que o mesmo satisfaz a seguinte equação de estrutura, com $\mu \in L^q_+(\Omega), c \in L^p_+(\Omega)$ e $w \in C([0, +\infty))$ com $w(0) = 0$:

$$|F(X,p,r,x) - F(X,q,s,x)| \leq \mu(x)(|p|^{m-1} + |q|^{m-1} + 1)|p - q| + c(x)w(|r - s|). \tag{46}$$

Podemos agora enunciar a proposição que trata da estabilidade das soluções de equações elípticas totalmente não lineares. Por estabilidade, entendemos que podemos, em algum sentido, passar o limite em uma sequência de funções que satisfazem determinadas equações e obter que o limite é solução de uma equação limite.

Proposição 4.1. ***(Estabilidade)*** *Sejam $F, F_k : S(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ para $k = 1, 2, ...$ uniformemente elípticos com $\lambda, \Lambda > 0$ e satisfazendo 45 para $m \geq 1$, $F_k(O, 0, 0, x) = F(O, 0, 0, x) = 0$ em Ω, $\mu \in L^q_+(\Omega)$, $c \in L^p_+(\Omega)$, onde p, q, n podem se relacionar como na observação abaixo. Considere ainda $f, f_k \in L^p(\Omega), \forall k \geq 1$. Para cada k, seja u_k uma subsolução(resp. supersolução) L^p no sentido da viscosidade de*

$$F_k(D^2u_k, \nabla u_k, u_k, x) = f_k(x) \text{ em } \Omega \tag{47}$$

Assuma ainda que para toda $B_r(x) \subset \Omega$, com $u_k \to u$ uniformemente em $B_r(x)$ quando $k \to \infty$ e para $\phi \in W^{2,p}(B_r(x))$, vale que

$$\lim_{k \to +\infty} ||(g - g_k)^+||_{L^p(B_r(x))} = 0 \tag{48}$$

$$\left(resp. \lim_{k \to +\infty} ||(g - g_k)^-||_{L^p(B_r(x))} = 0\right) \tag{49}$$

onde

$$g_k(x) := F_k(D^2\phi, \nabla\phi, u_k(x), x) - f_k(x)$$

e

$$g(x) := F(D^2\phi, \nabla\phi, u(x), x) - f(x)$$

Então, u é uma subsolução (resp. supersolução) L^p no sentido da viscosidade de

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = f(x) \text{ em } \Omega$$

Observação 4.1. *As relações entre n, p, q podem ser qualquer uma das duas abaixo:*

$$\begin{cases} (1)\ q > n,\ q \geq p \geq n, \\ \\ (2)\ q > n > p > p_0,\ p(mq-n) > nq(m-1). \\ \end{cases} \tag{50}$$

Além da proposição acima, precisaremos ainda de uma estimativa C^{α} global para soluções no sentido da viscosidade de equações que trabalhamos em nosso texto, presente no artigo de B. Sirakov (SIRAKOV (2010)), a qual também apresentaremos aqui. Tal proposição será importante quando queremos provar teoremas de estabilidade, onde usaremos a mesma para aproximar soluções de equações que possuímos com equações com coeficientes regulares. Utilizaremos isso para concluir que uma sequência dessas soluções é pré-compacta em $C(\overline{\Omega})$.

Proposição 4.2. *Seja $u \in C(\Omega)$ solução de*

$$\begin{cases} F(D^2u, \nabla u, u, x) = f(x) \ em\, \Omega, \\ \\ u(x) = \psi(x) \ em\, \partial\Omega \\ \end{cases} \tag{51}$$

onde F é um operador totalmente não linear uniformemente elíptico, e que satisfaz 45 para $q = 0, N = 0, s = 0$. Então, existe um $\alpha \in (0,1)$, com $\alpha = \alpha(n, \Lambda, \lambda, p, ||\mu||_{L^p(\Omega)})$, tal que $u \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$, e para todo subconjunto $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos que

$$||u||_{C^{\alpha}(\Omega')} \leq K$$

onde K depende de $n, \lambda, \Lambda, p, ||\mu||_{L^q(\Omega)}, ||c||_{L^p(\Omega)}, ||f||_{L^p(\Omega)}, dist(\Omega', \partial\Omega), \sup_{\Omega'} u$. Se, além das hipóteses que já temos, $u \in C(\overline{\Omega})$ e Ω satisfaz a condição do cone exterior (com medida L), então existem $\alpha_0, \rho_0 > 0$, dependendo só de $n, \lambda, \Lambda, p, ||\mu||_{L^q(\Omega)}, ||c||_{L^p(\Omega)}$ tais que, para cada bola B_ρ com raio $\rho \leq \rho_0$ e centro em $\overline{\Omega}$, vale:

$$osc_{\Omega \cap B_\rho} u \leq K(\rho^{\alpha_0} + osc_{\partial\Omega \cap B_{\sqrt{\rho}}} u),$$

onde K depende de $n, \lambda, \Lambda, p, ||\mu||_{L^q(\Omega)}, ||c||_{L^p(\Omega)}, ||f||_{L^p(\Omega)}, diam(\Omega), \sup_{\Omega'} u$. Então, se $u_{|\partial\Omega} \in C^{\beta}(\partial\Omega)$, então $u \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, com $\alpha = min\{\alpha_0, \beta/2\}$.

Para ver os detalhes da prova, basta ver em SIRAKOV (2010).

4.2 Improvement of flatness argument

Este é o ponto principal desta seção, onde provaremos um argumento como um *"improvement of flatness"* em uma nova versão, a qual foi adequada ao problema que resolvido neste trabalho. Antes disso, faremos uma observação importante:

Observação 4.2. *No que se segue, precisamos aplicar o Teorema 5.1 em uma bola diferente de B_1^+, por exemplo $B_{3/4}^+$. Isso é claramente verdade e pode ser provado com um simples argumento de scaling onde precisaremos apenas mudar a constante universal C_0 por outra constante universal(que denotaremos por F_0).*

Proposição 4.3 (Improvement of flatness). *Seja $u \in C^0(\overline{B}_1^+) \cap S^*(\gamma, \varrho, f)$ em B_1^+ onde $0 \leq \gamma, f \in L^q(B_1^+)$ com $q > n$ e $\varrho \geq 0$. Seja $u_{|_{B_1'}} = \varphi$ o dado de fronteira e $0 \leq \alpha < \alpha_{00}$. Assim, para todo $\mu_* \in (0, \mu_\alpha)$ podemos encontrar(um pequeno) $0 < \tau_0 = \tau_0(\alpha, \mu_*) < 1/4$ tal que, se*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} \leq 1 \quad e \quad \|\gamma\|_{L^q(B_1^+)} + \varrho + \|f\|_{L^q(B_1^+)} + \|\varphi\|_{L^\infty(B_1')} \leq \tau_0, \tag{52}$$

existe um $G_0 \in [-F_0, F_0]$ tal que

$$\big\|u(x) - G_0 \cdot x_n\big\|_{L^\infty(B_{\mu_*}^+)} \leq \frac{1}{4}\mu_*^{1+\alpha}. \tag{53}$$

Aqui, $F_0 = F_0(n, q, \lambda, \Lambda) > 0$ é uma constante universal. Além disso, μ_α é a constante universal dada por

$$\mu_\alpha := \min\left\{\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{8F_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_{00}-\alpha}}\right\} \in (0, 1/4]. \tag{54}$$

Demonstração. Sabemos que vale o Teorema 5.1 e a observação 4.2 que

$$\left\{\begin{array}{l} \forall v \in S(0) \ \text{ em } \ B_{3/4}^+, \\ \\ \|v\|_{L^\infty(B_{3/4}^+)} \leq 1, \\ \\ v = 0 \text{ em } \ B_{3/4}', \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \exists \ \ A_v(0) \in \mathbb{R} \quad \text{então} \\ \\ |v(x) - A_v(0) \cdot x_n| \leq F_0|x|^{1+\alpha_{00}} \quad \text{para todo } \ x \in B_1^+, \\ \\ |A_v(0)| \leq F_0 \quad \text{onde } \ F_0 = F_0(n, \lambda, \Lambda) > 0. \end{array}\right. \tag{55}$$

Seja $\mu \in (0, \mu_\alpha)$. Pela escolha de μ_α feita em (54), temos, para qualquer $|x| \leq \mu$ que

$$|v(x) - A_v(0) \cdot x_n| \leq F_0|x|^{1+\alpha_{00}} = F_0|x|^{1+\alpha+(\alpha_{00}-\alpha)} \leq F_0\mu^{1+\alpha}\mu_\alpha^{\alpha_{00}-\alpha} \leq \frac{1}{8}\mu^{1+\alpha}.$$

Então, (55) implica que

$$\begin{cases} \forall v \in S(0) \quad \text{em} \quad B^+_{3/4}, \\ \\ \|v\|_{L^\infty(B^+_{3/4})} \le 1, \\ \\ v = 0 \quad \text{em} \quad B'_{3/4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \ \ A_v(0) \in \mathbb{R} \quad \text{e então} \\ \\ \big|\big|v - A_v(0)\cdot x_n\big|\big|_{L^\infty(B^+_\mu)} \le \frac{1}{8}\mu^{1+\alpha} \text{ para tod } \mu \in (0,\mu_\alpha), \\ \\ |A_v(0)| \le F_0 \quad \text{onde} \quad F_0 = F_0(n,q,\lambda,\Lambda) > 0. \end{cases} \tag{56}$$

Vamos provar a proposição 4.3 por contradição. Para isso, suponhamos que a proposição é falsa. Desse modo, existe um $\mu_* \in (0,\mu_\alpha)$ e uma sequência $u_k \in C^0(\overline{B}^+_1) \cap S^*(\gamma_k, \varrho_k, f_k)$ em B^+_1 e $\tau_k \to 0$ com

$$\|u_k\|_{L^\infty(B^+_1)} \le 1 \quad \text{e} \quad \|\gamma_k\|_{L^q(B^+_1)} + \varrho_k + \|f_k\|_{L^q(B^+_1)} + \|\varphi_k\|_{L^\infty(B'_1)} \le \tau_k,$$

tal que, para cada constante $G \in [-F_0, F_0]$,

$$\big|\big|u_k - G\cdot x_n\big|\big|_{L^\infty(B^+_{\mu_*})} > \frac{1}{4}\mu_*^{1+\alpha} \quad \text{para todo } k \ge 1. \tag{57}$$

Provaremos que a sequência $(u_k)_{k\ge1}$ é equicontínua em $B^+_{3/4}$. Podemos então aplicar a estimativa global provada por B. Sirakov no Teorema 2[4] em SIRAKOV (2010) e deduzirmos que, para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x, y \in B^+_{3/4}, |x-y| \le \delta$ e $k \ge k_0$ implicando que $|u_k(x) - u_k(y)| \le \varepsilon$. Veja que agora podemos usar o Teorema de Arzela-Ascoli (ou mais precisamente a sua prova) e concluir que podemos passar a uma subsequência de u_k a qual converge uniformemente em $B^+_{3/4}$. Definamos u_∞ como o limite (uniforme) dessa subsequência definida em $B^+_{3/4}$. Observe que se $B_r(x) \subset B^+_1$ e $\phi \in W^{2,n}_{loc}(B_r(x))$ temos, para

$$R_k := \left\|\mathcal{P}^\pm_{\gamma_k,\varrho_k}(D^2\phi, \nabla\phi) - \mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}(D^2\phi)\right\|_{L^n(B_r(x))} + ||f_k||_{L^n(B_r(x))}$$

que

$$R_k = ||(\gamma_k \cdot |\nabla\phi|) + (\varrho_k \cdot |\nabla\phi|^2)||_{L^n(B_r(x))} + ||f_k||_{L^n(B_r(x))}.$$

Tomemos

$$T_k := ||\gamma_k||_{L^q(B_r(x))} \cdot |||\nabla\phi|||_{L^{n\tau}(B_r(x))} + \varrho_k \cdot |||\nabla\phi|||^2_{L^{2n}(B_r(x))} + |B_r(x)|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} \cdot ||f_k||_{L^q(B_r(x))} \tag{58}$$

e então vemos $0 < R_k \le T_k$. Aqui, $\tau = q/(q-n) > 1$ é o expoente conjugado de

[4]Esse é o mesmo argumento usado no lema 3.4 de SILVESTRE e SIRAKOV (2014) que também funciona para o nosso caso. Como observado lá, apesar do Teorema 2 em SIRAKOV (2010) ser provado para soluções, ele vale ainda para a classe $S^*(\gamma, \varrho, f)$ que consideramos aqui. Veja a observação feita na página 603 de SIRAKOV (2010). Para o argumento preciso(para equações do tipo (3) em SIRAKOV (2010)) veja as provas na página 604 de SIRAKOV (2010).

$q/n > 1$. Como $\phi \in W^{2,n}_{loc}(B_r(x))$, então pelo Teorema do mergulho de Rellich-Kondrachov (Teorema 9.16 em BREZIS (2011)) temos $|\nabla\phi| \in W^{1,n}(B_r) \hookrightarrow L^p(B_r)$ para todo $p \in [n, \infty)$. Assim,

$$\max\left\{|||\nabla\phi|||_{L^{n\tau}(B_r(x))}, |||\nabla\phi|||^2_{L^{2n}(B_r(x))}\right\} < \infty. \tag{59}$$

Logo, T_k é um número real positivo e bem definido. Juntando as equações (58) e (59), temos que $T_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Então, $R_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Pelos resultados de estabilidade para L^n-soluções no sentido da viscosidade nesse contexto provados por S. Swiech e S. Koike no Teorema 9.4 em KOIKE e A (2009), concluímos:

$$\begin{cases} u_\infty \in S(0) \quad \text{em} \quad B^+_{3/4}, \\ \\ \|u_\infty\|_{L^\infty(B^+_{3/4})} \leq 1, \\ \\ u_\infty = 0 \quad \text{em} \quad B'_{3/4}. \end{cases} \tag{60}$$

Portanto, o segundo membro da implicação em (56) pode ser aplicado a u_∞, i.e., existe um $A_{u_\infty}(0)$ tal que

$$\left|\left|u_\infty - A_{u_\infty}(0)\cdot x_n\right|\right|_{L^\infty(B^+_{\mu_*})} \leq \frac{1}{8}\mu_*^{1+\alpha}. \tag{61}$$

e

$$|A_{u_\infty}(0)| \leq F_0.$$

Porém, $u_k \to u_\infty$ uniformemente em $B^+_{3/4} \supseteq B^+_{\mu_*}$, já que $\mu_* \leq \mu_\alpha < \frac{1}{4}$. Em particular, para k suficientemente grande,

$$\left|\left|u_k - u_\infty\right|\right|_{L^\infty(B^+_{\mu_*})} \leq \left|\left|u_k - u_\infty\right|\right|_{L^\infty(B^+_{3/4})} \leq \frac{1}{8}{\mu_*}^{1+\alpha}. \tag{62}$$

Então, juntando (61) e (62), chegamos a

$$||u_k - A_{u_\infty}(0)\cdot x_n||_{L^\infty(B^+_{\mu_*})} \leq \left|\left|u_k - u_\infty\right|\right|_{L^\infty(B^+_{\mu_*})} + \left|\left|u_\infty - A_{u_\infty}(0)\cdot x_n\right|\right|_{L^\infty(B^+_{\mu_*})} \leq \frac{1}{4}\mu_*^{1+\alpha}$$

para k suficientemente grande, o que contradiz (57) e então o resultado segue. $\square$

5 ESTIMATIVAS $C^{1,dini}$ DO TIPO KRYLOV

5.1 Prova do Teorema Principal

Vamos agora compreender o tipo de teorema que estamos estendendo. Seguimos com um teorema relevante da teoria:

Teorema 5.1 (SILVESTRE e SIRAKOV (2014), Lema 3.1)**.** *Seja $u \in C(\overline{B}_1^+) \cap S(0)$ em B_1^+ tal que u é identicamente nula em B_1'. Então, existe $A \in \mathbb{R}$ (imitando a derivada normal na origem) tal que as seguintes estimativas são satisfeitas*

$$|u(x) - Ax_n| \leq C_0(||u||_{L^\infty(B_1^+)} + L)|x|^{1+\alpha_{00}} \quad \forall x \in B_1^+, |A| \leq C_0(||u||_{L^\infty(B_1^+)} + L).$$

Aqui, $\alpha_{00} = \alpha_{00}(n, \lambda, \Lambda) \in (0,1)$ e $C_0 = C_0(n, \lambda, \Lambda) > 0$.

Sabendo que vale o teorema acima, podemos agora escrever o teorema principal da tese. No que se segue, a classe $S^*(\gamma, \varrho, f)$ é a que definimos nas preliminares.

Vamos agora mostrar que há um caso inicial do teorema através da proposição abaixo:

Teorema 5.2 (**Estimativa pontual do tipo gradiente - caso zero do plano tangente**)**.** *Seja $u \in C^0(\overline{B}_1^+) \cap S^*(\gamma, \varrho, f)$ em B_1^+ onde $\gamma, f \in L^q(B_1^+)$ com $q > n$, $\varrho \geq 0$ e $\beta_* := \min\{1 - n/q, \alpha_{00}^-\}$. Considere que o dado de fronteira $\varphi = u_{|_{B_1'}} \in C^{1,\omega}(0)$ com polinômio de Taylor na origem, onde $\omega \in \mathcal{DM}^+_{\beta_*}$ com $d_\omega = 1$. Definamos*

$$M_0 := \|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + [\varphi]_{C^{1,\omega}}(0) + \|f\|_{L^q(B_1^+)}. \tag{63}$$

Então, existe um único $\Psi_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in B_1^+$,

$$|u(x) - \Psi_0 \cdot x_n| \leq F_1 \cdot M_0 \cdot |x| \cdot (\vartheta_\omega)^\#_{\beta_*}(|x|), \tag{64}$$

$$|\Psi_0| \leq F_1 \cdot M_0, \tag{65}$$

Lembrando que

$$(\vartheta_\omega)^\#_{\beta_*}(t) := t^{\beta_*} + \vartheta_\omega(t) \quad \text{para} \quad t \in [0,1].$$

e

$$F_1 = F_1(n, q, \lambda, \Lambda, ||\gamma||_{L^q(B_1^+)}, \varrho, M_0, D_\omega).$$

Além disso, no caso onde $\varrho = 0$ *então* F_1 *não depende de* M_0.

Observação 5.1. *Na verdade, no Teorema 5.2 acima,* F_1 *pode ser tomado como*

$$F_1 = J_1 \cdot \left[1 + \left(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + M_0 \cdot \varrho \right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}} \right], \quad J_1 = J_1(n, q, \lambda, \Lambda, D_\omega) > 0.$$

Segue da prova abaixo que a dependência de J_1 *(e então de* F_1*) em* D_ω *é monotonamente crescente.*

Demonstração. Inicialmente, observamos que, como $n > q$, temos $0 < \beta_* < \alpha_{00} < 1$ e definamos as seguintes constantes:

$$\mu_* := \mu_{\beta_*} = \min \left\{ \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{8F_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_{00} - \beta_*}} \right\} \in (0, 1/4], \tag{66}$$

onde

$$F_0 = F_0(n, q, \lambda, \Lambda) > 0, \tag{67}$$

e ambas as constantes são as mesmas escolhidas na Proposição 4.3. Feita a escolha de μ_*, o número $\tau_0 = \tau_0(\beta_*, \mu_*) \in (0, 1/4)$ dado pela proposição 4.3 está completamente determinada, consideremos

$$N := \left(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \frac{1}{\tau_0} \left([\varphi]_{C^{1,\omega}}(0) + 2\|f\|_{L^q(B_1^+)} \right) \right). \tag{68}$$

Para simplificar a notação, definiremos o seguinte (e auxiliar) módulo de continuidade definido para $t \in [0, 1]$

$$\omega_0(t) := \omega_{\beta_*}^{\#}(t) = t^{\beta_*} + \omega(t), \quad \chi_0(t) := Q_1[\omega_{\beta_*}^{\#}](t) = \frac{\omega_0(t)}{t} = t^{\beta_* - 1} + \frac{\omega(t)}{t}, \tag{69}$$

$$\Theta_0(t) := \vartheta_{\omega_{\beta_*}^{\#}}(t) = \int_0^t \chi_0(s) ds, \quad \Upsilon_0(t) := (\vartheta_\omega)_{\beta_*}^{\#}(t) := t^{\beta_*} + \vartheta_\omega(t), \tag{70}$$

$$D_0 := D_{\omega_{\beta_*}^{\#}} = \vartheta_{\omega_{\beta_*}^{\#}}(1) = \Theta_0(1) = \int_0^1 Q_1[\omega_{\beta_*}^{\#}](t) dt = \beta_*{}^{-1} + D_\omega. \tag{71}$$

$$\Upsilon_0(1) = 1 + D_\omega. \tag{72}$$

Agora, percebamos que, pelo item *viii*) das propriedades 2.1

$$\omega_0 \in \mathcal{DM}_{\beta_*}^+, \quad \Theta_0(t) \leq \beta_*^{-1} \Upsilon_0(t) \quad \forall t \in [0, 1], \tag{73}$$

Ademais, pelo item *iv*) das propriedades 2.1

$$\omega_0(t) \leq t^{\beta_*} + \beta_* \vartheta_\omega(t) \leq 2\Upsilon_0(t) \quad \forall t \in [0,1]. \tag{74}$$

Dividiremos nossa prova em duas partes:

Parte I: O Teorema 5.2 vale em *regimes pequenos* (75), i.e,

Afirmação: Existe uma constante $\gamma_0 = \gamma_0(n, q, \lambda, \Lambda, D_\omega) > 0$ tal que o Teorema 5.2 vale com

$$F_1 = F_1(n, q, \lambda, \Lambda, D_\omega) > 0$$

se

$$||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + N \cdot \varrho \leq \gamma_0. \tag{75}$$

Prova da Afirmação: Mostraremos que existe uma sequência de números reais $\{A_k\}_{k\geq 0}$ tais que

$$\big|\big|u - A_k \cdot x_n\big|\big|_{L^\infty(B^+_{\mu_*^k})} \leq N\mu_*^k \omega_0(\mu_*^k), \tag{76}$$

$$|A_{k+1} - A_k| \leq 2F_0 N \omega_0(\mu_*^k) \quad \text{onde } F_0 > 0 \text{ é a constante dada em (67).} \tag{77}$$

Escolhemos $A_0 = 0$, e consequentemente (76) funciona para $k = 0$. Vamos construir os outros valores dos A_k's indutivamente. Agora, assumamos que para todos $0 \leq j \leq k$ valem (76) e (77). Precisamos mostrar que existe um número real A_{k+1} tal que (76) e (77) valem para $j = k+1$. Definamos, então, os seguintes elementos:

$$u_k(x) := \frac{1}{2N\mu_*^k \omega_0(\mu_*^k)}\Big(u(\mu_*^k x) - A_k \mu_*^k \cdot x_n\Big) \quad \text{para } x \in B_1^+. \tag{78}$$

Pelo item *iv*) do Lema 4.1 e (44) com

$$\alpha = \frac{1}{2N\mu_*^k \omega_0(\mu_*^k)}, \quad \beta = \mu_*^k \quad \text{e} \quad L(x) = \alpha\beta A_k x_n$$

implica que $u_k \in S^*(\gamma_k, \varrho_k, f_k)$ em B_1^+, onde

$$\gamma_k(x) := \mu_*^k \gamma(\mu_*^k x) + 2|A_k|\mu_*^k \varrho \quad \text{para } x \in B_1^+,$$

$$\varrho_k := 2N\mu_*^k \omega_0(\mu_*^k)\varrho \quad \text{para } x \in B_1^+,$$

e

$$f_k(x) := \frac{\mu_*^k}{2N\omega_0(\mu_*^k)}\Big(|f(\mu_*^k x)| + \gamma(\mu_*^k x)|A_k| + \varrho|A_k|^2\Big) \quad \text{para } x \in B_1^+.$$

Também, o (novo) dado de fronteira:

$$\varphi_k(x) := \frac{\varphi(\mu_*^k x)}{2N\mu_*^k\omega_0(\mu_*^k)} \quad \text{para} \quad x \in B_1'.$$

Da hipótese de indução e (76), obtemos $\|u_k\|_{L^\infty(B_1^+)} \leq 1$.

Queremos agora aplicar o *improvement of flatness* (proposição 4.3). Para isso, devemos estimar a seguinte quantidade:

$$\widetilde{M_k} := ||\gamma_k||_{L^q(B_1^+)} + \varrho_k + \|f_k\|_{L^q(B_1^+)} + \|\varphi_k\|_{L^\infty(B_1')}.$$

Da definição de N e ω_0 em (68) e (69), temos que, para todo $x \in B_1'$,

$$\begin{aligned}
|\varphi_k(x)| = \frac{|\varphi(\mu_*^k x)|}{2N\mu_*^k\omega_0(\mu_*^k)} &\leq \frac{1}{2N}\frac{|\varphi(\mu_*^k x)|}{\mu_*^k\omega(\mu_*^k)} \\
&\leq \frac{1}{2N}\frac{|\varphi(\mu_*^k x)||x|}{(\mu_*^k|x|)\omega(\mu_*^k|x|)} \quad (\omega \text{ é não decrescente}) \\
&\leq \frac{1}{2N}\Big([\varphi]_{C^{1,\omega}}(0)\Big)|x| \\
&\leq \frac{[\varphi]_{C^{1,\omega}}(0)}{2N} \\
&\leq \frac{\tau_0}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\varphi_k\|_{L^\infty(B_1')} \leq \tau_0/2. \tag{79}$$

Pelo item $vi)$ das propriedades 2.1 e como $\mu_* \in (0, 1/4]$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \omega_0(\mu_*^j) \leq 2D_0. \tag{80}$$

Agora, como $q > n$ e $0 < \tau_0, \mu_* < 1$ temos

$$\begin{aligned}
||\gamma_k||_{L^q(B_1^+)} &\leq (\mu_*^k)^{1-\frac{n}{q}}||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + 2\varrho\mu_*^k|A_k||B_1|^{\frac{1}{q}} \qquad (81) \\
&\leq ||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + 2|B_1|^{\frac{1}{q}}\varrho\mu_*^k\sum_{j=0}^{k-1}|A_{j+1} - A_j| \\
&\leq ||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + 4F_0N|B_1|^{\frac{1}{q}}\varrho\mu_*^k\sum_{j=0}^{\infty}\omega_0(\mu_*^j) \quad (\text{por } (77)) \\
&\leq ||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + 8F_0D_0N|B_1|^{\frac{1}{q}} \cdot \varrho \quad (\text{por } (80)).
\end{aligned}$$

Sabemos que ω_0 é uma β_*-função por (73), temos ainda, pelo item $iv)$ das propriedades 2.1 e (71) que

$$\omega_0(1) \leq \vartheta_{\omega_0}(1) = \vartheta_{\omega^{\#}_{\beta_*}}(1) = D_0.$$

Então,

$$\varrho_k \leq 2\omega_0(1)N\varrho = 2D_0N\varrho. \tag{82}$$

Como $\omega_0(t) \geq t^{\beta_*}$ para todo $t \in [0,1]$, temos

$$|f_k(x)| \leq \frac{\mu_*^k}{2N(\mu_*^k)^{\beta_*}}\Big(|f(\mu_*^k x)| + \gamma(\mu_*^k x)|A_k| + \varrho|A_k|^2\Big) \quad \text{ para } x \in B_1^+.$$

Como $\beta_* \leq 1 - n/q$, temos que $(\mu_*^k)^{1-\beta_*-\frac{n}{q}} \leq 1$ para qualquer $k \geq 0$ e então encontramos

$$\begin{aligned}
||f_k||_{L^q(B_1^+)} &\leq (\mu_*^k)^{1-\beta_*-\frac{n}{q}}\left(\frac{\|f\|_{L^q(B_1^+)} + ||\gamma||_{L^q(B_1^+)}|A_k|}{2N}\right) + \frac{(\mu_*^k)^{1-\beta_*}|B_1|^{\frac{1}{q}}\varrho|A_k|^2}{2N} \quad (83)\\
&\leq \frac{\tau_0}{4} + \frac{||\gamma||_{L^q(B_1^+)}}{2N}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}|A_{j+1}-A_j| + \frac{|B_1|^{\frac{1}{q}}\varrho}{2N}\left(\sum_{j=0}^{k-1}|A_{j+1}-A_j|\right)^2\\
&\leq \frac{\tau_0}{4} + \Big(F_0\cdot||\gamma||_{L^q(B_1^+)}\Big)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\omega_0(\mu_*^j) + 2F_0^2|B_1|^{\frac{1}{q}}N\cdot\varrho\left(\sum_{j=0}^{\infty}\omega_0(\mu_*^j)\right)^2\\
&\leq \frac{\tau_0}{4} + 2D_0F_0||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + 8D_0^2F_0^2|B_1|^{\frac{1}{q}}N\cdot\varrho \quad (\text{por } (80)).
\end{aligned}$$

Onde, da terceira para a quarta desigualdade acima utilizamos 77. Juntando (79), (81), (82) e (83), obtemos

$$\widetilde{M}_k \leq \frac{3}{4}\tau_0 + \Big(1+2D_0F_0\Big)\cdot||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \Big(2D_0 + 8D_0F_0|B_1|^{\frac{1}{q}} + 8D_0^2F_0^2|B_1|^{\frac{1}{q}}\Big)N\cdot\varrho. \tag{84}$$

Logo, se

$$||\gamma||_{L^q(B_1^+)} \leq \frac{\tau_0}{8(1+2D_0F_0)} \quad \text{ e } \quad N\cdot\varrho \leq \frac{\tau_0}{8\cdot\Big(2D_0 + 8D_0F_0|B_1|^{\frac{1}{q}} + 8D_0^2F_0^2|B_1|^{\frac{1}{q}}\Big)}$$

chegamos a $\widetilde{M}_k \leq \tau_0$. Escolhamos agora

$$\gamma_0 := \tau_0\cdot\min\left\{\frac{1}{8(1+2D_0F_0)}, \frac{1}{8\cdot\Big(2D_0 + 8D_0F_0|B_1|^{\frac{1}{q}} + 8D_0^2F_0^2|B_1|^{\frac{1}{q}}\Big)}\right\}. \tag{85}$$

Então, $0 < \gamma_0 = \gamma_0(n,q,\lambda,\Lambda,D_\omega) < 1/8$ já que $0 < \tau_0 < 1$. Além disso, por (71), γ_0 depende de D_ω de maneira decrescente. Pela proposição 4.3, existe uma constante G_0 tal que $|G_0| \leq F_0$ e

$$\big|\big|u_k - G_0 \cdot x_n\big|\big|_{L^\infty(B^+_{\mu_*})} \leq \frac{1}{4}\mu_*^{1+\beta_*}. \tag{86}$$

Definamos

$$A_{k+1} := A_k + 2N\omega_0(\mu_*^k)G_0. \tag{87}$$

Vejamos que (77) vale para A_{k+1}. Por (87) e (78), temos, para $x \in B_{\mu_*^k}$,

$$u(x) = 2N\mu_*^k\omega_0(\mu_*^k)u_k(x/\mu_*^k) + A_k \cdot x_n$$

Então, a seguinte cadeia de identidades vale para $x \in B_{\mu_*^k}$,

$$\begin{aligned} u(x) - A_{k+1} \cdot x_n &= 2N\mu_*^k\omega_0(\mu_*^k)u_k(x/\mu_*^k) - 2N\omega_0(\mu_*^k)G_0 \cdot x_n \\ &= 2N\mu_*^k\omega_0(\mu_*^k)u_k(x/\mu_*^k) - 2N\mu_*^k\omega_0(\mu_*^k)G_0 \cdot \left(\frac{x_n}{\mu_*^k}\right) \\ &= 2N\mu_*^k\omega_0(\mu_*^k)\left(u_k(x/\mu_*^k) - G_0 \cdot \left(\frac{x_n}{\mu_*^k}\right)\right). \end{aligned}$$

Lembrando que $\omega_0 = \omega_{\beta_*}^{\#}$ é uma β_*-função (por (73)). Desse modo, o item $viii)$ da proposição 2.1 implica que ω_0 satisfaz a inequação (20). Daí,

$$\begin{aligned} \big|\big|u - A_{k+1} \cdot x_n\big|\big|_{L^\infty(B^+_{\mu_*^{k+1}})} &\leq 2N\mu_*^k\omega_0(\mu_*^k)\Big(4^{-1}\mu_*^{1+\beta_*}\Big) \\ &= \frac{N}{2}\mu_*^{k+1}\Big(\mu_*^{\beta}\omega_0(\mu_*^k)\Big) \\ &\leq N\mu_*^{k+1}\omega_0(\mu_*^{k+1}). \end{aligned}$$

E assim terminamos a construção indutiva da sequência $\{A_k\}_{k\geq 0}$ e mostra que (76) e (77) valem para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora,

$$\begin{aligned} |A_{m+k} - A_k| &\leq \sum_{j=k}^{m+k-1} |A_{j+1} - A_j| \qquad (88) \\ &\leq 2F_0N\sum_{j=k}^{\infty}\omega_0(\mu_*^j) \quad \text{(por(77))} \\ &\leq 4F_0N\int_0^{\mu_*^k}\frac{\omega_0(t)}{t}dt = 4F_0N\Theta_0(\mu_*^k) \quad \text{(pela proposição 2.1 item } vi)) \\ &\leq 4\beta_*^{-1}F_0N\Upsilon_0(\mu_*^k) \quad \text{ por (73).} \end{aligned}$$

Pelas estimativas acima, além de (69) e (70), vemos que a Dini continuidade de ω implica que $\{A_k\}_{k\geq 0}$ é uma sequência de Cauchy. Então, seja $\widehat{\Psi_0} := \lim_{k\to\infty} A_k$. Logo, de (76) e (88), fazendo $m \to \infty$), obtemos

$$\begin{aligned}
\big|\big|u - \widehat{\Psi_0}\cdot x_n\big|\big|_{L^\infty(B^+_{\mu^k_*})} &\leq \big|\big|u - A_k\cdot x_n\big|\big|_{L^\infty(B^+_{\mu^k_*})} + \mu^k_*|A_k - \widehat{\Psi_0}| \\
&\leq N\mu^k_*\omega_0(\mu^k_*) + 4\beta_*^{-1}F_0 N\mu^k_*\Upsilon_0(\mu^k_*) \\
&\leq 2N\mu^k_*\Upsilon_0(\mu^k_*) + 4\beta_*^{-1}F_0 N\mu^k_*\Upsilon_0(\mu^k_*) \quad \text{por} \quad (74) \\
&\leq L_0 N\mu^k_*\Upsilon_0(\mu^k_*), \quad L_0 := 2 + 4\beta_*^{-1}F_0 \qquad (89)
\end{aligned}$$

O que nos dá

$$N \leq \left(1 + 2\tau_0^{-1}\right)\left(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + [\varphi]_{C^{1,\omega}}(0) + \|f\|_{L^q(B_1^+)}\right) = \left(1 + 2\tau_0^{-1}\right)M_0. \qquad (90)$$

Da equação (88), fazendo $m \to \infty$ e tomando $k = 0$, obtemos por (72) e da inequação acima que

$$|\widehat{\Psi_0}| \leq 4\beta_*^{-1}F_0\Upsilon_0(1)N = 4\beta_*^{-1}F_0(1 + D_\omega)N \leq 4\beta_*^{-1}F_0(1 + D_\omega)\big(1 + 2\tau_0^{-1}\big)M_0.$$

Pelo item *viii*) das propriedades 2.1 (20) vale, para $\Upsilon_0 = (\vartheta_\omega)^\#_{\beta_*}$, i.e,

$$\Upsilon_0(\mu^k_*) \leq \left(\frac{1}{\mu_*}\right)^{\beta_*}\Upsilon_0(\mu^{k+1}_*) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (91)$$

Agora, para $x \in B_1^+$, podemos escolher $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^{k+1}_* \leq |x| < \mu^k_*$. Então,

$$\begin{aligned}
\big|u(x) - \widehat{\Psi_0}\cdot x_n\big| &\leq \big|\big|u - \widehat{\Psi_0}\cdot x_n\big|\big|_{L^\infty(B^+_{\mu^k_*})} \\
&\leq L_0 N\mu^k_*\Upsilon_0(\mu^k_*) \qquad (\text{por} \quad (89)) \\
&\leq \left(\frac{1}{\mu_*}\right)^{\beta_*+1}\cdot L_0 N\mu^{k+1}_*\Upsilon_0(\mu^{k+1}_*) \qquad (\text{por} \quad (91)) \\
&\leq \left(\frac{1}{\mu_*}\right)^{\beta_*+1}\cdot L_0 N\cdot|x|\Upsilon_0(|x|) \\
&\leq \left(L_0\left(1 + 2\tau_0^{-1}\right)\left(\frac{1}{\mu_*}\right)^{\beta_*+1}\right)M_0\cdot|x|\Upsilon_0(|x|).
\end{aligned}$$

E então o Teorema 5.2 está provado para

$$F_1 := 4\beta_*^{-1}F_0(1+D_\omega)\big(1+2\tau_0^{-1}\big) + \left((2+4\beta_*^{-1}F_0)\Big(1+2\tau_0^{-1}\Big)\left(\frac{1}{\mu_*}\right)^{\beta_*+1}\right).$$

Logo, a parte I está provada.

Parte II: Suponha $||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + N\cdot\varrho > \gamma_0$.

Nesse caso, nós usamos um argumento de *scaling*. Tomemos

$$r_0 := \left[\frac{\gamma_0}{2(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + N\cdot\varrho)}\right]^{\frac{1}{1-n/q}} < 1. \tag{92}$$

E definamos

$$v(x) := u\,(r_0 x)\,/r_0, \qquad x\in B_1^+.$$

Denotaremos $\varphi_v := v_{|_{B_1'}}$. Nesse caso, pela observação 2.8, $v\in S^*\left(\gamma_{00},\varrho_{00},f_{00}\right)$ em B_1^+, onde

$$\gamma_{00}(x) := r_0\gamma(r_0x), \quad \varrho_{00} := r_0\varrho, \quad f_0(x) := r_0 f\,(r_0x) \quad \text{para} \quad x\in B_1^+.$$

Também, pela observação 2.7, φ_v é $C^{1,\omega}$ no 0 e

$$[\varphi_v]_{C^{1,\omega}}(0) \le [\varphi]_{C^{1,\omega}}(0).$$

Além disso,

$$||\gamma_{00}||_{L^q(B_1^+)} \le r_0^{1-n/q}||\gamma||_{L^q(B_1^+)} \le \frac{\gamma_0}{2}, \quad N\cdot\varrho_{00} \le N\cdot r_0^{1-n/q}\varrho \le \frac{\gamma_0}{2},$$

$$\|v\|_{L^\infty(B_1^+)} \le r_0^{-1}\|u\|_{L^\infty(B_1^+)}, \quad \|f_{00}\|_{L^q(B_1^+)} \le r_0^{1-n/q}\|f\|_{L^q(B_1^+)} \le \|f\|_{L^q(B_1^+)}.$$

Então, como

$$||\gamma_{00}||_{L^q(B_1^+)} + N\cdot\varrho_{00} \le \gamma_0,$$

pela afirmação anterior (na parte I da prova), segue que existe $\widehat{\Psi_0}$ tal que, para todo $x\in B_1^+$,

$$\left|v(x) - \widehat{\Psi_0}\cdot x_n\right| \le F_1^*\left(\|v\|_{L^\infty(B_1^+)} + [\varphi_v]_{C^{1,\omega}}(0) + \|f_{00}\|_{L^q(B_1^+)}\right)|x|\Upsilon_0(|x|), \tag{93}$$

$$|\widehat{\Psi_0}| \le F_1^*\left(\|v\|_{L^\infty(B_1^+)} + [\varphi_v]_{C^{1,\omega}}(0) + \|f_{00}\|_{L^q(B_1^+)}\right), \tag{94}$$

onde $F_1^* = F_1^*(n, q, \lambda, \Lambda, D_\omega) > 0$. Voltando para nossa função u, teremos, para $\widetilde{F_1} := r_0^{-1} F_1^*$ que:

$$\left| u(x) - \widehat{\Psi_0} \cdot x_n \right| \leq \widetilde{F_1} \cdot M_0 \cdot |x| \cdot \Upsilon_0\Big(r_0^{-1}|x|\Big) \quad \text{em} \quad B_{r_0}^+ \tag{95}$$

e claramente,

$$|\widehat{\Psi_0}| \leq \widetilde{F_1} M_0. \tag{96}$$

Lembrando que vale (19) para $\Upsilon_0 = (\vartheta_\omega)_{\beta_*}^{\#}$, pelo item $viii)$ das propriedades 2.1. Então, para $C = r_0^{-1} > 1$ em (19), encontramos

$$\Upsilon_0\Big(r_0^{-1}|x|\Big) \leq r_0^{-\beta_*} \Upsilon(|x|) \quad \text{para todo} \ \ |x| \leq r_0.$$

Logo, a estimativa (95), para $\widehat{F_1} := r_0^{-\beta_*} \widetilde{F_1}$ fica

$$\left| u(x) - \widehat{\Psi_0} \cdot x_n \right| \leq \widehat{F_1} \cdot M_0 \cdot |x| \cdot \Upsilon_0(|x|) \quad \text{em} \quad B_{r_0}^+. \tag{97}$$

Finalmente, lidaremos com pontos x em $B_1^+ \setminus B_{r_0}^+$. Observamos que, (já que $\Upsilon_0(t) \geq t^{\beta_*}$ $\forall t \in [0, 1]$)

$$\begin{aligned}
\left| u(x) - \widehat{\Psi_0} \cdot x_n \right| &\leq \Big(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + |\widehat{\Psi_0}| \Big) \\
&\leq (\widetilde{F_1} + 1) \cdot M_0 \\
&= (\widetilde{F_1} + 1) \cdot r_0 \cdot r_0^{-1} \cdot \Upsilon_0\big(r_0\big) \cdot \Big(\Upsilon_0\big(r_0\big)\Big)^{-1} \cdot M_0 \\
&\leq (\widetilde{F_1} + 1) \cdot r_0^{-1} \cdot \Big(\Upsilon_0\big(r_0\big)\Big)^{-1} \cdot M_0 \cdot |x| \cdot \Upsilon_0(|x|) \\
&\leq (\widetilde{F_1} + 1) \cdot r_0^{-(1+\beta_*)} \cdot M_0 \cdot |x| \cdot \Upsilon_0(|x|).
\end{aligned} \tag{98}$$

Juntando agora as estimativas (96), (97) e (98), vemos que o Teorema 5.2 vale na parte II com F_1 dada por

$$\begin{aligned}
F_1 := \widetilde{F_1} + \widehat{F_1} + (\widetilde{F_1} + 1) r_0^{-(1+\beta_*)} &= r_0^{-1} F_1^* + r_0^{-\beta_* - 1} F_1^* + (r_0^{-1} F_1^* + 1) r_0^{-\beta_* - 1} \\
&\leq 3(r_0^{-1} F_1^* + 1) r_0^{-\beta_* - 1} \\
&\leq 3(r_0^{-1-\beta_*} F_1^* + r_0^{-\beta_* - 1}) r_0^{-\beta_* - 1} \\
&= 3(F_1^* + 1) r_0^{-2(\beta_* + 1)}.
\end{aligned}$$

Considerando agora as partes I e II da prova acima, o teorema 5.2 está finalmente provado com constante $F_1 > 0$ dada por

$$3(F_1^* + 1) r_0^{-2(\beta_* + 1)} + F_1^* = 3(F_1^* + 1)(1 + r_0^{-2(\beta_* + 1)})$$

$$
\begin{aligned}
&= 3(F_1^*+1)\left[1+\left(\frac{||\gamma||_{L^q(B_1^+)}+N\cdot\varrho}{\gamma_0}\right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right]\\
&\leq 3(F_1^*+1)\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}+\left(\frac{||\gamma||_{L^q(B_1^+)}+N\cdot\varrho}{\gamma_0}\right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right] \quad (\ 0<\gamma_0<1)\\
&\leq 3(F_1^*+1)\gamma_0^{\frac{-2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\left[1+\left(||\gamma||_{L^q(B_1^+)}+N\cdot\varrho\right)^{\frac{2+\beta_*}{1-n/q}}\right]\\
&\leq 3(F_1^*+1)\gamma_0^{\frac{-2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\left[1+\left(||\gamma||_{L^q(B_1^+)}+\left(1+2\tau_0^{-1}\right)M_0\cdot\varrho\right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right] \quad (\text{por } (90))\\
&\leq 3(F_1^*+1)\left(\frac{1+2\tau_0^{-1}}{\gamma_0}\right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\left[1+\left(||\gamma||_{L^q(B_1^+)}+M_0\cdot\varrho\right)^{\frac{2+\beta_*}{1-n/q}}\right]\\
&=: J_1\left[1+\left(||\gamma||_{L^q(B_1^+)}+M_0\cdot\varrho\right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right]=: F_1
\end{aligned}
$$

Em particular, no caso onde $\varrho = 0$, temos que F_1 não depende de M_0. Também, J_1 depende de D_ω de maneira crescente desde que γ_0 depende de D_ω de maneira decrescente e isso finaliza a prova.

□

Com essas proposições em mãos, vamos à prova o teorema principal:

Demonstração. Vamos dividir a prova em dois passos e, na primeira parte, assumiremos que $d_\omega = 1$. Consideremos a função $v(x) := u(x) - L(x', 0)$ para $x \in B_1^+$. Seja $\varphi_v = v_{|_{B_1'}}$. Claramente, $[\varphi_v]_{C^{1,\omega}}(0) \leq [\varphi]_{C^{1,\omega}}(0)$. Temos também que $v \in S^*(\overline{\gamma}, \varrho, \overline{f})$ em B_1^+ onde $\overline{\gamma} = \gamma + 2|\nabla\varphi(0)|\varrho$ e $\overline{f} = |f| + \gamma\cdot|\nabla\varphi(0)| + \varrho|\nabla\varphi(0)|^2$ pelo lema 4.1. Logo, aplicando o teorema 1.3 a v, sabemos que existe um $\Psi_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in B_1^+$, temos, para M_0 dado por (63),

$$
\begin{aligned}
M_{00} &= M_{00}\Big(||u||_{L^\infty(B_1^+)}, ||\varphi||_{C^{1,\omega}(0)}, ||f||_{L^q(B_1^+)}, ||\gamma||_{L^q(B_1^+)}, \varrho, |\nabla\varphi(0)|\Big) \qquad (99)\\
&:= M_0\Big(||v||_{L^\infty(B_1^+)}, [\varphi_v]_{C^{1,\omega}(0)}, ||\overline{f}||_{L^q(B_1^+)}, ||\overline{\gamma}||_{L^q(B_1^+)}, \overline{\varrho}, |\nabla\varphi_v(0)|\Big)\\
&= ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\omega}(0)} + ||f||_{L^q(B_1^+)} + \Big(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho|\nabla\varphi(0))\Big)|\nabla\varphi(0)|
\end{aligned}
$$

$$
\Upsilon_0(t) := (\vartheta_\omega)^{\#}_{\beta_*}(t) := t^{\beta_*} + \vartheta_\omega(t) \quad \forall t\in[0,1], \quad F_0 := (1+|B_1|^{1/q})F_1
$$

onde F_1 é o mesmo da observação 5.1 e então

$$
\overline{F}_0 = J_0\left[1+\left(||\overline{\gamma}||_{L^q(B_1^+)}+M_{00}\cdot\varrho\right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right], \quad J_0 = J_0(n,q,\lambda,\Lambda,D_\omega) > 0.
$$

$$\begin{aligned}|u(x) - L(x',0) - \Psi_0 \cdot x_n| &= |v(x) - \Psi_0 \cdot x_n| \\ &\le F_1 \left(\|v\|_{L^\infty(B_1^+)} + [\varphi_v]_{C^{1,\omega}}(0) + \|\overline{f}\|_{L^q(B_1^+)} \right) |x| \Upsilon_0(|x|) \\ &\le \overline{F}_0 \cdot M_{00} \cdot |x| \cdot \Upsilon_0(|x|)\end{aligned}$$

com

$$|\Psi_0| \le F_1 \cdot M_{00} \le \overline{F}_0 \cdot M_{00}.$$

Agora, nós observamos que

$$\begin{aligned}\overline{F}_0 &= J_0 \left[1 + \left(||\overline{\gamma}||_{L^q(B_1^+)} + M_{00} \cdot \varrho \right)^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}} \right] \\ &\le J_0 \left[1 + \left[2(1+|B_1|^{1/q}) \Big(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho \Big(|\nabla\varphi(0)| + M_{00} \Big) \Big) \right]^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}} \right] \\ &\le 2(1+|B_1|^{1/q}) J_0 \left[1 + \left[\Big(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho \Big(|\nabla\varphi(0)| + M_{00} \Big) \Big) \right]^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}} \right] \\ &=: \overline{J}_0 \left[1 + \left[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho \Big(|\nabla\varphi(0)| + M_{00} \Big) \right]^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}} \right] \\ &=: F_{00} = F_{00}(||\gamma||_{L^q(B_1^+)}, \varrho, |\nabla\varphi(0)|, M_{00}) \qquad (100)\end{aligned}$$

onde

$$\overline{J}_0 = \overline{J}_0(n, q, \lambda, \Lambda, D_\omega) > 0.$$

Resumindo,

$$|u(x) - L(x',0) - \Psi_0 \cdot x_n| \le F_{00} \cdot M_{00} \cdot |x| \cdot \Upsilon_0(|x|), \quad \forall x \in B_1^+, \qquad (101)$$

$$|\Psi_0| \le F_{00} \cdot M_{00}. \qquad (102)$$

Agora, para a segunda parte da prova, vamos considerar o caso geral, ou seja, $d_\omega \in [0,1]$ e resolver via *scaling*. Considere $v_{00}(x) = d_\omega^{-1} u(d_\omega x)$ para $x \in B_1^+$. E então $v_{00} \in C^0(\overline{B}_1^+) \cap S^*(\gamma_{00}, \varrho_{00}, f_{00})$ em B_1^+ onde $\gamma_{00}(x) := d_\omega \gamma(d_\omega x)$, $\varrho_{00} = d_\omega \varrho$ e $f_{00}(x) = d_\omega f(d_\omega x)$ para $x \in B_1^+$. Tomando $\overline{L}(x) := d_\omega^{-1} L(d_\omega x)$ para $x \in B_1'$ e $\varphi_{00} := v_{00}|_{B_1'}$ como nosso novo dado de fronteira, temos pela observação 2.7 que $\varphi_{00} \in C^{1,\overline{\omega}}(0)$ e $[\varphi_{00}]_{C^{1,\overline{\omega}}}(0) \le [\varphi]_{C^{1,\omega}}(0)$ onde $\overline{\omega}(t) = \omega(d_\omega t)$ para $t \in [0,1]$. Pelo item *vii*) das propriedades

2.1 segue que $\overline{\omega} \in \mathcal{DM}^{+}_{\beta_*}$ com $d_{\overline{\omega}} = 1$ e $D_{\overline{\omega}} = D_{\omega}$. Além disso,

$$||\gamma_{00}||_{L^q(B_1^+)} \leq d_{\omega}^{1-n/q}||\gamma||_{L^q(B_1^+)}, \quad ||f_{00}||_{L^q(B_1^+)} \leq d_{\omega}^{1-n/q}||f||_{L^q(B_1^+)}, \quad ||v_{00}||_{L^\infty(B_1^+)} \leq d_{\omega}^{-1}||u||_{L^\infty(B_1^+)},$$

$$|\nabla\varphi_{00}(0)| = |\nabla\varphi(0)|.$$

Como $d_{\overline{\omega}} = 1$, nós podemos aplicar o caso anterior (i.e, estimativa (101) e (102)) a v_{00}. Então, $\forall x \in B_1^+$

$$|v(x) - \overline{L}(x', 0) - \Psi_0 \cdot x_n| \leq \overline{F}_{00} \cdot \overline{M}_{00} \cdot |x| \cdot \Upsilon_0^{\star}(|x|) \tag{103}$$

$$|\Psi_0| \leq \overline{F}_{00} \cdot \overline{M}_{00}, \tag{104}$$

onde

$$\Upsilon_0^{\star}(t) := (\vartheta_{\overline{\omega}})^{\#}_{\beta_*}(t) := t^{\beta_*} + \vartheta_{\overline{\omega}}(t) \quad \forall t \in [0,1],$$

$$\begin{aligned}
\overline{M}_{00} &= M_{00}(||v_{00}||_{L^\infty(B_1^+)}, ||\varphi_{00}||_{C^{1,\overline{\omega}}(0)}, ||f_{00}||_{L^q(B_1^+)}, ||\gamma_{00}||_{L^q(B_1^+)}, \varrho_{00}, |\nabla\varphi_{00}(0)|) \\
&= ||v_{00}||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi_{00}||_{C^{1,\overline{\omega}}(0)} + ||f_{00}||_{L^q(B_1^+)} + \Big(||\gamma_{00}||_{L^q(B_1^+)} + \varrho_{00}|\nabla\varphi_{00}(0))\Big)|\nabla\varphi_{00}(0)| \\
&\leq d_{\omega}^{-1}\Big(||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\omega}(0)} + ||f||_{L^q(B_1^+)} + \Big(||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho|\nabla\varphi(0))\Big)|\nabla\varphi(0)|\Big) \\
&= d_{\omega}^{-1}M_0^{\#}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{00} &:= \overline{F}_{00}(||\gamma_{00}||_{L^q(B_1^+)}, \varrho_{00}, |\nabla\varphi_{00}(0)|, \overline{M}_{00}) \\
&= \overline{J}_0\left[1 + \Big[||\gamma_{00}||_{L^q(B_1^+)} + \varrho_{00}\Big(|\nabla\varphi_{00}(0)| + \overline{M}_{00}\Big)\Big]^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right] \\
&\leq \overline{J}_0\left[1 + \Big[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho\Big(|\nabla\varphi(0)| + \overline{M}_{00}\Big)\Big]^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right] \\
&\leq \overline{J}_0 d_{\omega}^{-\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\left[1 + \Big[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho\Big(|\nabla\varphi(0)| + M_0^{\#}\Big)\Big]^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right]
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\Upsilon_0^{\star}(t) := t^{\beta_*} + \int_0^t \frac{\overline{\omega}(s)}{s}ds = t^{\beta_*} + \int_0^{d_\omega t} \frac{\omega(s)}{s}ds \quad \text{para} \;\; t \in [0,1]. \tag{105}$$

Em particular, para $d_\omega \leq 1$,

$$\Upsilon_0^\star(d_\omega^{-1}t) = d_\omega^{-\beta_*}t^{\beta_*} + \int_0^t \frac{\omega(s)}{s}ds \leq d_\omega^{-\beta_*}\Upsilon_0(t) \quad \forall t \in [0, d_\omega]. \tag{106}$$

Agora, escrevendo (103) para nossa u (levando em conta (106)), obtemos, para $x \in B^+_{d_\omega}$:

$$|u(x) - L(x', 0) - \Psi_0 \cdot x_n| \leq (d_\omega^{-\beta_*}\overline{F}_{00}\overline{M}_{00}) \cdot |x|\Upsilon_0(|x|) \leq (d_\omega^{-(1+\beta_*)}\overline{F}_{00}M_0^{\#}) \cdot |x|\Upsilon_0(|x|) \tag{107}$$

e como $0 < d_\omega \leq 1$

$$|\Psi_0| \leq \overline{F}_{00}\overline{M}_{00} \leq d_\omega^{-(1+\beta_*)}\overline{F}_{00}M_0^{\#}.$$

Finalizamos a prova tomando

$$\begin{aligned} T_0 \;&:=\; \overline{J}_0 d_\omega^{-\left(1+\beta_*+\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}\right)}\left[1 + \left[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho\Big(|\nabla\varphi(0)| + M_0^{\#}\Big)\right]^{\frac{2(1+\beta_*)}{1-n/q}}\right] \\ &\geq\; d_\omega^{-(1+\beta_*)}\overline{F}_{00}. \end{aligned}$$

Como esperado, dado o que tínhamos antes, o termo $\overline{J}_0$ depende de D_ω de maneira monotonamente crescente e concluímos a prova.

□

Antes de provar o corolário, lembremos que:

Observação 5.2. *Seja $u \in C^{1,\omega}(\overline{B}_1)$. Usando a expansão de Taylor (clássica), vemos que, para qualquer $x_0 \in \overline{B}_{1/2}$ temos*

$$|u(x)-u(x_0)-\nabla u(x_0)\cdot(x-x_0)| \leq [\nabla u]_{C^{0,\omega}(\overline{B}_1)}|x-x_0|\omega(|x-x_0|) \quad \forall x \in \overline{B}_{\min\{1-|x_0|,d_\omega\}}(x_0).$$

Demonstração. Vamos tomar um ponto genérico $x_0 \in B'_{1/2}$. Defina $\delta_* := \min\{d_\omega, 1/2\}$ e $v(x) := \delta_*^{-1}\big(u(x_0 + \delta_* x)\big)$ para $x \in B_1^+$. Sabemos que $v \in S^*(\overline{\gamma}, \overline{\varrho}, \overline{f})$ em B_1^+ onde $\overline{\gamma}(x) = \delta_*\gamma(x_0 + \delta_* x), \overline{\varrho} = \delta_*\varrho$ e $\overline{f}(x) = \delta_* f(x_0 + \delta_* x)$ para $x \in B_1^+$. Além disso, para $y \in B'_1$, seja

$$L_{x_0}(y) := \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0) \cdot (y - x_0)$$

o (clássico) polinômio de Taylor de φ em x_0 e seja $\varphi_v = v_{|_{B'_1}}$. Para $y \in B'_1$, definamos

$$\overline{L}_0(y) := \delta_*^{-1}L_{x_0}(x_0 + \delta_* y),$$

temos, para qualquer $x \in B'_1$, pela expansão de Taylor (clássica) (basta ver a observação

5.2 aplicada a φ) que

$$|\varphi_v(x) - \overline{L}_0(x)| = \delta_*^{-1}|\varphi(x_0 + \delta_* x) - L_{x_0}(x_0 + \delta_* x)| \leq [\nabla\varphi]_{C^{0,\omega}(B_1)}|x|\overline{\omega}(|x|)$$

onde $\overline{\omega}(t) := \omega(\delta_* t)$ para $t \in [0,1]$. Da estimativa acima, obtemos:

$$[\varphi_v]_{C^{1,\overline{\omega}}}(0) \leq [\nabla\varphi]_{C^{0,\omega}(B_1')}.$$

Novamente pela proposição 2.1, temos que $\overline{\omega} \in \mathcal{DM}^+_{\beta_*}$ com $d_{\overline{\omega}} = 1$. Além disso,

$$D_{\overline{\omega}} = \int_0^1 \frac{\overline{\omega}(s)}{s}ds = \int_0^{\delta_*} \frac{\omega(s)}{s}ds \leq \int_0^{\delta_\omega} \frac{\omega(s)}{s}ds = D_\omega \tag{108}$$

Procedendo do mesmo modo como na segunda parte do Teorema 1.3. De fato, o argumento aqui, como na prova anterior, é um argumento de *scaling* com uma translação, a qual será com relação ao ponto x_0, não afeta diretamente nossas estimativas anteriores. Então, aplicando as estimativas a v e retornando para u como fizemos antes, chegamos à seguinte estimativa, observando que δ_* faz o mesmo papel de d_ω na prova do teorema trocando $D_{\overline{\omega}}$ por D_ω em T_0:

$$|u(x) - L_{x_0}(x',0) - \Psi_0 \cdot x_n| \leq T_0^\star \cdot M_0^{\#\#} \cdot \Big(|x| \cdot \Upsilon_0(|x|)\Big), \qquad \forall x \in B^+_{\delta_*}(x_0) := B_\delta(x_0) \cap \{x_n > 0\}$$

$$|\Psi_0| \leq T_0^\star \cdot M_0^{\#\#}.$$

Aqui, $M_0^{\#\#}$ é dado por (9) e

$$T_0^\star = J_0 \cdot \delta_*^{-\Theta_1}\left[1 + \left[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho\Big(||\nabla\varphi||_{L^\infty(B_1')} + M_0^{\#\#}\Big)\right]^{\Theta_0}\right] \tag{109}$$

onde podemos assumir que $J_0 = J_0(n, q, \lambda, \Lambda, D_\omega) \geq 1$, bastando apenas trocá-lo por $J_0 + 1$, se necessário.

Percebamos que, nesse caso $T_0^\star \geq 1$. Definindo

$$P_{x_0}(x) := L_{x_0}(x',0) - \Psi_0 \cdot x_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad A(x_0) := \nabla\varphi(x_0) + \Psi(x_0)e_n$$

e lembrando que $x_0 = (x_0', 0) = (x_0', (x_0)_n)$, pois $x_0 \in B_1'$), chegamos a

$$\begin{aligned}
P_{x_0}(x) := L_{x_0}(x', 0) + \Psi_0 \cdot x_n &= \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0) \cdot ((x', 0) - (x_0', 0)) + \Psi_0 \cdot x_n \\
&= \varphi(x_0) + (\nabla_T u(x_0), 0) \cdot (x' - x_0', 0) + \Psi_0 \cdot e_n \cdot (x - x_0) \\
&= \varphi(x_0) + (\nabla_T u(x_0), 0) \cdot (x' - x_0', x_n - (x_0)_n) + \Psi_0 \cdot e_n \cdot (x - x_0) \\
&= \varphi(x_0) + (\nabla\varphi(x_0) + \Psi(x_0) e_n) \cdot (x - x_0) \\
&= \varphi(x_0) + A(x_0)(x - x_0)
\end{aligned}$$

onde $A(x_0) := \nabla\varphi(x_0) + \Psi(x_0)e_n$. Claramente,

$$|A(x_0)| \leq |\nabla\varphi(x_0)| + |\Psi_0(x_0)| \leq M_0^{\#\#} + T_0^{\#} M_0^{\#\#} = (T_0^{\#} + 1) M_0^{\#}. \tag{110}$$

Agora, nós estamos exatamente nas condições do lema 6.2 definindo

$$T := (T_0^\star + 1) M_0^{\#\#}, \qquad \omega = \Upsilon_0, \qquad r_0 = \delta_*.$$

O resultado então segue da estimativa (124) no lema 6.2, lembrando que vale (70) o que implica

$$\Upsilon_0(t) \geq t^{\beta_*} \quad \forall t \in [0, d_\omega]$$

i.e,

$$\begin{aligned}
||A||_{C^{0,\Upsilon_0}(\overline{B}'_{1/2})} &\leq \left(F\left(1 + \frac{1}{\Upsilon_0(\delta_*/4)}\right) + 1\right)(T_0^\star + 1) M_0^{\#\#} \\
&\leq \left(F\left(1 + 4^{-\beta_*}\delta^{-\beta_*}\right) + 1\right)(T_0^\star + 1) M_0^{\#\#} \\
&= (2F + 1)\delta_*^{-\beta}(T_0^\star + 1) M_0^{\#\#}
\end{aligned}$$

onde F é uma constante dimensional. Como $T_0^\star \geq 1$, temos que $T_0^\star + 1 \leq 2T_0^\star$. Logo, podemos finalizar a prova definindo

$$T_0^{\#} := 4(F + 1)\delta_*^{-\beta} T_0^\star \geq \max\left\{(2F + 1)\delta_*^{-\beta}(T_0^\star + 1), T_0^\star\right\}.$$

Em particular, por (109), para $J_0^{\#} := 4(F+1)J_0 = J_0^{\#}(n,q,\lambda,\Lambda,D_\omega) > 1$, vem

$$T_0^{\#} = J_0^{\#}\delta_*^{-(\Theta_1+\beta_*)}\left[1+\left[||\gamma||_{L^q(B_1^+)} + \varrho\Big(||\nabla\varphi||_{L^\infty(B_1')} + M_0^{\#\#}\Big)\right]^{\Theta_0}\right].$$

□

Através do exemplo abaixo, percebemos que a estimativa do teorema 1.3 é ótima no sentido da regularidade do RHS. Faremos isso construindo em dimensão ($n=2$) uma função $u \in C^0(\overline{B}^+_{1/2}) \cap C^\infty(B^+_{1/2})$ que se anula na fronteira flat (i.e, $u = 0$ em $B'_{1/2}$) tal que u é uma solução forte L^2 de $\Delta u = f$ com $f \in L^2(B^+_{1/2})$ para o qual a derivada normal $u_y(0)$ explode. Isso mostra em particular que a estimativa (8) não funciona. Essa construção mostra ainda que $u \notin C^{0,1}(\overline{B}^+_\varepsilon)$ para qualquer $\varepsilon > 0$.

Exemplo 5.1. *Consideremos a função dada por:*

$$u(x,y) = \begin{cases} y \cdot \left|\ln\sqrt{(x^2+y^2)}\right|^{1/4} & \forall (x,y) \in B^+_{1/2} \subset \mathbb{R}^2, \\ \\ 0 & \text{on } \{y=0\} \cap \overline{B}^+_{1/2} \subset \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Usando coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$, i.e, $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$, percebemos que, para todo $(x,y) \in \overline{B}^+_{1/2}$

$$0 \le u(x,y) \le r \cdot |\ln r|^{1/4} \to 0 \quad \text{quando} \quad r \to 0^+.$$

Dessa forma, $u \in C^0(\overline{B}^+_{1/2}) \cap C^\infty(B^+_{1/2})$. Definamos $w(r) := |\ln r|^{1/4}$ for $0 < r \le \frac{1}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= \Big(w''(r) + \frac{1}{r}w'(r)\Big) \cdot y + 2\langle w'(r) \cdot \frac{(x,y)}{r}, e_2\rangle \\ &= \Big(w''(r) + \frac{3}{r}w'(r)\Big) \cdot y =: f(x,y) \end{aligned}$$

Agora, calculando as derivadas de w, chegamos que existe uma constante $A_0 > 0$ tal que:

$$|w'(r)|^2 \le \frac{A_0}{r^2|\ln r|^{3/2}} \quad \forall r \in (0,1/2],$$

$$|w''(r)|^2 \le \frac{A_0}{r^4|\ln r|^{3/2}} + \frac{A_0}{r^4|\ln r|^{7/2}} \quad \forall r \in (0,1/2].$$

Logo,

$$|f(x,y)|^2 \le [3(|w''(r)|r + |w'(r)|)]^2 \le 18(|w''(r)|^2 r^2 + |w'(r)|^2) \quad \forall (x,y) \in B^+_{1/2} \subset \mathbb{R}^2.$$

Assim, usando coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$ *e a mudança de variáveis* $s = |\ln r|$ *(lembrando que* $0 < r \leq \frac{1}{2}$*)*

$$\begin{aligned}
\int_{B_{1/2}} |f(x,y)|^2 dxdy &\leq 18\left(\int_{B_{1/2}} |w''(r)r|^2 dxdy + \int_{B_{1/2}} |w'(r)|^2 dxdy\right) \\
&\leq 36\pi\left(\int_0^{1/2} |w''(r)|^2 r^3 dr + \int_0^{1/2} |w'(r)|^2 r dr\right) \\
&\leq 36\pi A_0\left(2\int_0^{1/2} \frac{dr}{r|\ln r|^{3/2}} + \int_0^{1/2} \frac{dr}{r|\ln r|^{7/2}}\right) \\
&= 36\pi A_0\left(2\int_{|\ln(1/2)|}^{+\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} + \int_{|\ln(1/2)|}^{+\infty} \frac{ds}{s^{7/2}}\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Então $f \in L^2(B^+_{1/2})$ *e como* $u \in C^\infty(B^+_{1/2}) \subseteq W^{2,2}_{loc}(B^+_{1/2})$*. Logo,* u *é uma solução* L^2 *forte de* $\Delta u = f$ *em* $B^+_{1/2}$ *e então ela é também uma* L^2 *solução no sentido da viscosidade da mesma equação como no teorema 2.1 em CRANDALL et al. (1996). Vemos ainda que as estimativas (6) e (7) no teorema 1.3 não vale. De fato, caso ela valesse nós conseguiríamos mostrar a existência de uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left|\frac{u(0,y)}{y}\right| \leq C \quad \text{for every} \quad y \in B^+_{1/4}.$$

Contudo, pela definição de u*, podemos checar que*

$$\frac{u(0,y)}{y} \to \infty \quad \text{as} \quad y \to 0^+,$$

i.e, a derivada normal explode na origem (um ponto de fronteira) e então (8) não tem como valer. Concretamente,

$$[u]_{C^{0,1}(\overline{B}^+_\varepsilon)} \geq \sup_{0<y<\varepsilon} \left|\frac{u(0,y)}{y}\right| \geq \lim_{y\to 0^+} \frac{u(0,y)}{y} = \infty$$

e de fato nossa conclusão vale.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos muitos pontos importantes da teoria da regularidade para equações elípticas totalmente não lineares, alguns dos quais são os principais ingredientes na prova de teoremas chaves da teoria. Para perceber como as técnicas funcionam, em um primeiro momento explanamos as principais notações e definições correspondentes ao assunto, como as classes de sub/supersoluções nas quais provamos os teoremas, fatos sobre *scalings* e barreiras, propriedades das α-funções, além de deixar claro as provas destas proposições no texto.

Depois das preliminares, para enxergar melhor como funciona e a importância da evolução do teorema em questão, fazemos uma espécie de "caso zero" do teorema principal. Neste caso inicial, conseguimos perceber como as técnicas são utilizadas para provar o teorema e as utilizamos depois. Seja em maior ou menor grau, o caso zero nos dá um vislumbre do que podemos utilizar das técnicas estudadas. Após isso, destacamos um dos pontos chaves da prova conhecido como *improvement of flatness*, o qual está contido na tese em uma versão diferente das publicadas até agora, dado a dificuldade em realizar a técnica com um coeficiente no termo quadrático e outros coeficientes não-limitados.

Chegamos então ao teorema principal da tese e nele consideramos um tipo específico de equação de estrutura - que é a equação que determina quem são os conjuntos de soluções de inequações diferenciais para os quais valem as proposições que provamos. Os teoremas provados até agora abordaram um tipo muito mais simples de soluções de equações ou inequações. Esse tipo de abordagem para teoremas de fronteira do tipo Krylov é nova e abre um leque de aplicações em outras áreas, como em problemas de fronteira livre. O tratamento do dado de fronteira sendo $C^{1,Dini}$ é diferente do usual, mas conseguimos passar por essas dificuldades e obter a estimativa desejada de uma maneira mais clara com relação a dependência dos coeficientes.

REFERÊNCIAS

BORSUK, M. Dini-continuity of first derivatives of solutions of the Dirichlet problem for second-order linear elliptic equations in a nonsmooth domain. **Sibirsk. Mat. Zh.**, v. 39, n. 2, p. 261–280, 1998.

BORSUK, M.; KONDRATIEV, V. **Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains**, v. 69 of *North-Holland Mathematical Library*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006, vi+531 p.

BRAGA, J. E. M.; FIGALLI, A.; MOREIRA, D. **Optimal regularity for the convex envelope and semiconvex functions related to supersolutions of fully nonlinear elliptic equations**, 2018. (Preprint).

BREZIS, H. **Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals**. Springer, New York, 2011.

CAFFARELLI, L. A.; CRANDALL, M. G.; KOCAN, M.; SWIECH, A. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 49, n. 4, p. 365–397, 1996.

CRANDALL, M. G.; KOCAN, M.; SORAVIA, P.; SWIECH, A. On the equivalence of various weak notions of solutions of elliptic PDEs with measurable ingredients. **Progress in elliptic and parabolic partial differential equations**, p. 136–162, 1996.

FANGHUA, L. A.; HAN, Q. **Elliptic Partial Differential Equations**. Amer. Math. Soc., 1997.

GILBARG, N. S., D.; TRUNDINGER. **Elliptic partial differential equations of second order**. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

KOIKE, S.; A., SWIECH. A Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method. **Mathematische Annalen**, v. 339, n. 2, p. 461–484, 2007.

KOIKE, S.; A., SWIECH. Existence of strong solutions of Pucci extremal equations with superlinear growth in Du. **Journal of Fixed Point Theory and Applications**, v. 5, n. 2, p. 291–304, 2009.

KOIKE, S.; A, SWIECH. Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 61, n. 3, p. 723–755, 2009.

KOIKE, S.; NAKAGAWA, K. Remarks on the Phragmén-Lindelöf theorem for L^p−viscosity solutions of fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients. **Electro-**

nic Journal Differential Equations, v. 146, n. 2009, p. 1–14, 2009.

KOIKE, S.; SWIECH, A. Maximum principle and existence of L^p-viscosity solutions for fully nonlinear uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms. **Nonlinear Differential Equations and Applications**, v. 11, n. 4, p. 491–509, 2004.

KOIKE, S.; SWIECH, A. Local maximum principle for L^p-viscosity solutions of fully nonlinear elliptic PDEs with unbounded coefficients. **Communications on Pure Applied Analysis**, v. 11, n. 5, p. 1897–1910, 2012.

KRYLOV, N. Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain. **Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya**, v. 47, n. 1, p. 75–108, 1983.

KRYLOV, N. V.; SAFONOV, M. V. An estimate for the probability of a diffusion process hitting a set of positive measure. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 245, n. 1, p. 18–20, 1979.

KRYLOV, N. V.; SAFONOV, M. V. A certain property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients. **Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya**, v. 16, n. 1, p. 161–175, 1980.

LIEBERMAN, G. M. The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with continuously differentiable boundary data. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 11, n. 2, p. 167–229, 1986.

NADIRASHVILI, N.; VLADUT, S. Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations. **Geom. Func. Anal.**, v. 17, n. 4, p. 1283–1296, 2007.

NORNBERG, G. S. $C^{1,\alpha}$ **Regularity for Fully Nonlinear Equations with Superlinear Growth in the Gradient** arXiv:1802.01643v1 [math.AP], 2018a.

NORNBERG, G. S. **Methods of the Regularity Theory in the Study of Partial Differential Equations with Natural Growth in the Gradient** , 2018b. Ph.D Thesis, Pontíficia Universidade Catótlica do Rio de Janeiro (PUC-RJ).

SAFONOV, M. V. Unimprovability of estimates of Hölder constants for solutions of linear elliptic equations with measurable coefficients. **Mathematics of the USSR-Sbornik** , v. 60, n. 1, p. 269–281, 1988.

SILVESTRE, L.; SIRAKOV, B. Boundary regularity for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic equations . **Communications in Partial Differential Equations**, v. 39, n. 9, p. 1694–1717, 2014.

SIRAKOV, B. Solvability of uniformly elliptic fully nonlinear PDE. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 195, n. 2, p. 579–607, 2010.

WIDMAN, K. Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. **Mathematica Scandinavica**, v. 21, p. 17–37, 1967.

APÊNDICE-CONTROLE UNIFORME DA EXPANSÃO DE TAYLOR VERSUS REGULARIDADE INTERIOR E DE FRONTEIRA

No apêndice deste trabalho, apresentaremos lemas mostrando que, de fato, a regularidade pontual e a regularidade clássica, interior e de fronteira, são equivalentes. Isso significará que o que provamos funciona não apenas em um sentido pontual, mas no sentido clássico! Além disso, como esses dois resultados são equivalentes, quando for necessário provar uma estimativa, teremos duas maneiras de tentar prová-las.

Controle uniforme da expansão de Taylor versus regularidade interior e de fronteira

Nesta subseção, mostraremos algumas estimativas relacionando a regularidade pontual $C^{1,\omega}$ com a regularidade clássica $C^{1,\omega}$ na fronteira. Essas estimativas são relativamente conhecidas (especialmente no caso $C^{1,\alpha}$). Porém, não é fácil encontrar referências das suas provas, especialmente na generalidade discutida aqui. A versão interior foi provada no apêndice de BRAGA, FIGALLI, e MOREIRA (2018). Aqui, nós usamos ideias similares e mostramos a prova do caso de fronteira com todos os detalhes. Utilizaremos aqui funções afins sempre em $\mathbb{R}^n$.

Lema 6.1 (Regularidade interior $C^{1,\omega}$ pelo controle uniforme da expansão de Taylor). *Seja u definida em B_r e $\omega : [0, d_\omega] \to [0,\infty)$ um módulo de continuidade(e então $\omega \in \mathcal{M}$). Considere ainda $0 < r_0 \leq \min\{r/2, d_\omega\}$. Assuma que, para todo $x_0 \in \overline{B}_{r/2}$ exista uma função afim P_{x_0} tal que*

$$|u(x) - P_{x_0}(x)| \leq T|x - x_0|\omega(|x - x_0|) \quad \forall x \in B_r \ \text{ tal que } \ |x - x_0| \leq r_0. \tag{111}$$

Então, $u \in C^{1,\omega}(\overline{B}_{r_0/8})$ com a seguinte estimativa

$$[\nabla u]_{C^{0,\omega}(\overline{B}_{r_0/8})} \leq ET. \tag{112}$$

Ademais, se $\omega \in \mathcal{M}^+$ e

$$\sup_{x_0 \in \overline{B}_{r/2}} |\nabla P_{x_0}|_\infty \leq T \tag{113}$$

então $u \in C^{1,\omega}(\overline{B}_{r/2})$ e vale a seguinte estimativa:

$$[\nabla u]_{C^{0,\omega}(\overline{B}_{r/2})} \leq \left(1 + \frac{1}{\omega(r_0/4)}\right)ET. \tag{114}$$

Em ambas as estimativas acima, $E > 0$ é uma constante dimensional.

Demonstração. Veja que 111 implica que u é diferenciável em qualquer ponto de $\overline{B_{r/2}}$. Sejam então $x_0, y_0 \in \overline{B}_{r/2}$ com $x_0 \neq y_0$. Desse modo, definamos $d_0 := |x_0 - y_0|$ tal que $2d_0 \leq r_0/2$ e $z_0 := (x_0+y_0)/2 \in \overline{B}_{r/2}$. Das definições, temos que $|z_0-x_0| = |z_0-y_0| = d/2$. Então, teremos que $\overline{B}_{d_0/2}(z_0) \subset \overline{B}_{d_0}(x_0) \cap \overline{B}_{d_0}(y_0) \subset B_r$. Por 111, temos que

$$||u - P_{x_0}||_{L^\infty\left(\overline{B}_{\frac{d_0}{2}}(z_0)\right)} \leq ||u - P_{x_0}||_{L^\infty(\overline{B}_{d_0}(x_0))} \leq Td_0\omega(d_0) \tag{115}$$

e

$$||u - P_{y_0}||_{L^\infty\left(\overline{B}_{\frac{d_0}{2}}(z_0)\right)} \leq ||u - P_{y_0}||_{L^\infty(\overline{B}_{d_0}(y_0))} \leq Td_0\omega(d_0) \tag{116}$$

Agora, podemos usar o fato de que $P_{x_0} - P_{y_0}$ é uma função afim, e, portanto, harmônica. Pela estimativa do gradiente para funções harmônicas, existe uma constante dimensional $\overline{C} > 0$ tal que:

$$\big|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)\big| = \big|P_{x_0} - P_{y_0}\big| \leq \frac{2\overline{C}}{d_0}\big|\big|P_{x_0} - P_{y_0}\big|\big|_{L^\infty(\overline{B}_{d_0/2}(z_0))}$$

$$\leq \frac{2\overline{C}}{d_0}\Big(\Big|\Big|u - P_{x_0}\Big|\Big|_{L^\infty(\overline{B}_{d_0}(x_0))} + \Big|\Big|u - P_{y_0}\Big|\Big|_{L^\infty(\overline{B}_{d_0}(y_0))}\Big) \leq 4\overline{C}T\omega(d_0) = 4\overline{C}T\omega(|x_0 - y_0|), \tag{117}$$

onde na penúltima inequação nós somamos 115 e 116. Daí, vejamos que se $x_0, y_0 \in \overline{B}_{r_0/8}$ com $x_0 \neq y_0$, então eles estarão na condição de $2d_0 \leq r_0/2$, logo, a estimativa 117 nos dá 112. Agora, para mostrarmos que vale 114, tomemos $x_0, y_0 \in \overline{B}_{r/2}$ tais que $d_0 := |x_0 - y_0| > r_0/4 > 0$. Usando que 113,

$$\frac{|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)|}{\omega(|x_0 - y_0|)} = \frac{\nabla P_{x_0} - \nabla P_{y_0}|}{\omega(|x_0 - y_0|)} \leq \frac{2T}{\omega(r_0/4)} \tag{118}$$

Como sabemos,

$$[\nabla u]_{C^{0,\omega}(\overline{B_r})} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{B_r} \\ x\neq y,\, |x-y|<\delta_\omega}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{\omega(|x-y|)}.$$

Então, somando 118 e 117, chegando a:

$$\frac{|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)|}{\omega(|x_0 - y_0|)} \leq 4\overline{C}T + \frac{2T}{\omega(r_0/4)} \leq T(4\overline{C} + 2)\Big(1 + \frac{1}{\omega(r_0/4)}\Big)$$

E então a estimativa 114 segue para $E := 4\overline{C} + 2$.

□

Observação 6.1. *Seja* $Z_\mu(x) = \mu \cdot x_n$ *para algum* $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ *e considere* $a \in \mathbb{R}^{n-1}$. *Então, vale que:*

$$|\mu| = \frac{||Z_\mu||_{L^\infty(B_r^+(a,0))}}{r}.$$

Lema 6.2 (Regularidade $C^{1,\omega}$ de fronteira pelo controle uniforme da expansão de Taylor). *Seja* u *definido em* B_r^+ *e* $\omega : [0, d_\omega] \to [0, \infty)$ *tal que* $\omega \in \mathcal{M}$ *e* $0 < r_0 \leq \min\{r/2, d_\omega\}$. *Suponha que, para todo* $x_0 \in \overline{B}'_{r/2}$ *exista uma função afim* P_{x_0} *tal que*

$$|u(x) - P_{x_0}(x)| \leq T|x - x_0|\omega(|x - x_0|) \quad \forall x \in B_r^+ \text{ tal que } |x - x_0| \leq r_0. \tag{119}$$

Seja $A : B'_{r/2} \to \mathbb{R}^n$ *a única função* $A(x) = (A_1(x), \cdots, A_n(x)) = (A_t(x), A_n(x))$ *tal que*

$$P_{x_0}(x) := A(x_0)(x - x_0) + u(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Então, $A_t, A_n \in C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r_0/8})$ *e*

$$[A]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r_0/8})} \leq [A_t]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r_0/8})} + [A_n]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r_0/8})} \leq FT. \tag{120}$$

Além disso, se $\omega \in \mathcal{M}^+$, *então*

$$\sup_{x_0 \in \overline{B}'_{r/2}} |D_{x_n} P_{x_0}| \leq T \Longrightarrow A_n \in C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r/2}) \quad \text{e} \quad [A_n]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r/2})} \leq FT\left(1 + \frac{1}{\omega(r_0/4)}\right). \tag{121}$$

$$\max_{i \in \{1,\cdots,n-1\}} \sup_{x_0 \in \overline{B}'_{r/2}} |D_{x_i} P_{x_0}| \leq T \Longrightarrow A_t \in C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r/2}) \quad \text{e} \quad [A_T]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r/2})} \leq FT\left(1 + \frac{1}{\omega(r_0/4)}\right). \tag{122}$$

Em particular,

$$\sup_{\overline{B}'_{r/2}} |A|_\infty \leq T \Longleftrightarrow \sup_{x_0 \in \overline{B}'_{r/2}} |\nabla P_{x_0}| \leq T \Longrightarrow [A]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r/2})} \leq FT\left(1 + \frac{1}{\omega(r_0/4)}\right). \tag{123}$$

Como consequência disso:

$$\sup_{\overline{B}'_{r/2}} |A|_\infty \leq T \Longrightarrow ||A||_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r/2})} \leq \left(F\left(1 + \frac{1}{\omega(r_0/4)}\right) + 1\right)T. \tag{124}$$

Em todas as estimativas acima $F > 0$ *é uma constante dimensional.*

Observação 6.2. *Como na observação 1.1, no lema 6.2 acima, o campo* A *pode ser pensado como o gradiente de* u *ao longo de* B'_r.

Demonstração. Começaremos introduzindo algumas notações. Denotaremos $x = (x', x_n)$ com $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Para cada $x_0 = (x'_0, 0) = (x_0, (x_0)_n) \in B'_{r/2}$, escrevemos, para todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\overline{P}_{x'_0}(x') := P_{x_0}(x', 0) = A_t(x_0)(x' - x'_0) + u(x_0)$$

Desse modo, temos, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$P_{x_0}(x) = A_t(x_0)(x' - x'_0) + A_n(x_0)x_n + u(x_0) = P_{x_0}(x', 0) + A_n(x_0)x_n \tag{125}$$

Definamos ainda as seguintes funções:

$$v(x) := u(x) - P_{x_0}(x', 0) \quad \forall x \in B_r^+,$$

$$\varphi(x) := u(x', 0) \quad \forall x \in B'_r.$$

Começaremos pelas estimativas das derivadas tangentes. Observemos então que (119) implica que, para todo $x_0 \in B'_{r/2}$ temos

$$|\varphi(x) - P_{x_0}(x)| \leq T|x - x_0|\omega(|x - x_0)| \quad \forall x \in B'_r \text{ tal que } |x - x_0| \leq r_0 \tag{126}$$

Disso, φ é diferenciável em qualquer $x_0 \in \overline{B}_{r/2}$ e $\nabla\varphi(x_0) = \nabla P_{x_0} = A_t(x_0) = (D_{x_1}P_{x_0}, \cdots, D_{x_{n-1}}P_{x_0})$.

Assim, (126) junto com o lema anterior 6.1 implicam

$$[A_t]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r_0/8})} = [\nabla\varphi]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r_0/8})} \leq FT, \tag{127}$$

Além disso, a estimativa em (122) também segue disso. Agora, veremos as estimativas na derivada normal.

Observemos que (119) implica de (125) que para todo $x_0 \in \overline{B}'_{r/2}$

$$|v(x) - A_n(x_0)x_n| \leq T|x - x_0|\omega(|x - x_0) \quad \forall x \in B_r^+ \text{ tal que } |x - x_0| \leq r_0. \tag{128}$$

Desse modo, se $x_0, y_0 \in \overline{B}'_{r/2}$ com $x_0 \neq y_0$ e $2d_0 = 2|x_0 - y_0| \leq r_0/2$. Seja $z_0 := (x_0 + y_0)/2 \in \overline{B}'_{r/2}$. Sabemos que $|z_0 - x_0| = |z_0 - y_0| = d_0/2$. Logo, $\overline{B}^+_{d_0/2}(z_0) \subset \overline{B}^+_{d_0}(x_0) \cap \overline{B}^+_{d_0}(y_0) \subset B_r^+$. Por (128), temos

$$||v - A_n(x_0)x_n||_{L^\infty(\overline{B}^+_{\frac{d_0}{2}}(z_0))} \leq ||v - A_n(x_0)x_n||_{L^\infty(\overline{B}^+_{d_0}(x_0))} \leq Td_0\omega(d_0), \tag{129}$$

$$||v - A_n(y_0)x_n||_{L^\infty(\overline{B}^+_{\frac{d_0}{2}}(z_0))} \leq ||v - A_n(y_0)x_n||_{L^\infty(\overline{B}^+_{d_0}(y_0))} \leq Td_0\omega(d_0). \qquad (130)$$

Agora, escrevendo $Z(x) = (A_n(x_0) - A_n(y_0)) \cdot x_n$ e lembrando que 6.1 chegamos a

$$\begin{aligned} |A_n(x_0) - A_n(y_0)| &\leq \frac{2\overline{C}}{d_0}\left\|(A_n(x_0) - A_n(y_0))x_n\right\|_{L^\infty(\overline{B}^+_{d_0/2}(z_0))} \\ &\leq \frac{2\overline{C}}{d_0}\left(\left\|v - A_n(x_0)x_n\right\|_{L^\infty(\overline{B}^+_{d_0}(x_0))} + \left\|v - A_n(y_0)x_n\right\|_{L^\infty(\overline{B}^+_{d_0}(y_0))}\right) \\ &\leq 4\overline{C}T\omega(d_0) = 4\overline{C}T\omega(|x_0 - y_0|). \qquad (131) \end{aligned}$$

Observamos que se $x_0, y_0 \in \overline{B}'_{r_0/8}$ com $x_0 \neq y_0$, então $2d_0 := 2|x_0 - y_0| \leq r_0/2$. Daí, segue de (131) que:

$$[A_n]_{C^{0,\omega}(\overline{B}'_{r_0/8})} \leq 4\overline{C}T. \qquad (132)$$

Agora, consideremos o caso onde $x_0, y_0 \in \overline{B}'_{r/2}$ são tais que $d_0 := |x_0 - y_0| > r_0/4 > 0$. Então, como assumimos (121), temos:

$$\frac{|A_n(x_0) - A_n(y_0)|}{\omega(|x_0 - y_0|)} = \frac{|D_{x_n}P_{x_0} - D_{x_n}P_{y_0}|}{\omega(|x_0 - y_0|)} \leq \frac{2T}{\omega(r_0/4)}. \qquad (133)$$

A conclusão em (121) segue das estimativas (131) e (133). Finalmente, (123) segue de (121) e (122), observando que $A_i(x_0) = D_{x_i}P_{x_0}$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ e isso finaliza a prova do lema.

$\square$