



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ANTONIO EDINALDO DE OLIVEIRA FERREIRA

ESTUDO COMPUTACIONAL DE FRATURAS EM MEIOS DESORDENADOS

FORTALEZA

2019

ANTONIO EDINALDO DE OLIVEIRA FERREIRA

ESTUDO COMPUTACIONAL DE FRATURAS EM MEIOS DESORDENADOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- F439e Ferreira, Antônio Edinaldo de Oliveira.
Estudo computacional de fraturas em meios desordenados / Antônio Edinaldo de Oliveira Ferreira. – 2019.
44 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.
1. Rede de resistores. 2. Sistemas desordenados. 3. Dimensão fractal. 4. Processos de fratura. I. Título.
CDD 530
-

ANTONIO EDINALDO DE OLIVEIRA FERREIRA

ESTUDO COMPUTACIONAL DE FRATURAS EM MEIOS DESORDENADOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de
Oliveira. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. André Auto Moreira.
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jeanlex Soares de Sousa.
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus, meus pais e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me manter no caminho certo, ao meu pai, Arnaldo, à minha mãe, Ivonete, e ao meu irmão, Ronaldo. Muito obrigado por me apoiarem e acreditar que todo o meu esforço valeu muito a pena. A família sempre será a minha base para tudo.

Agradeço ao professor Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira pela suas orientações em projetos de iniciação científica nos modelos computacionais, como percolação invasiva e rede de resistores e também pela orientação para realização deste trabalho. No geral, gostaria de agradecer por tudo que me ensinou.

Agradeço também aos professores do departamento da física, além do meu orientador, André, Jeanlex, Saulo, Maluf, Carmona, Carlos William, Alexandre Pascoal e Nildo, pelos ensinamentos durante o curso.

Queria agradecer aos meus amigos, por me apoiarem e sempre estarem comigo durante o curso. Na verdade, são tantos amigos que resolvi citar alguns em especial. Gostaria de agradecer ao Gabriel (careca) por decifrar as minhas conversas aleatórias e por tentar fazer piadas que não tem graça, ao Alehff (Shazam) e Alyson (Negão) por me fazer rir do nada, ao Tanaka (presidente) pelas caronas e rolês aleatórios, ao Higo (Mestre) e Alysson (Ceguetta) pelos conselhos e dicas, ao João por ser meu irmão nas pesquisas e por ser um grande amigo, ao Netto por me ajudar nos problemas e por ser uma cara excepcional, Canutto (irmão) pela amizade e companheirismo desde do ensino médio, Victor, Rômulo, Márcio, Igor, Higor, Bushi, Humberto, Lara, Ewerton, Lucas Saraiva, Luan mesquita, Cássio, Pedro Uchôa e Afonso. Além disso, gostaria de agradecer ao grupo de pesquisa do laboratório de biofísica, aos "bixos" de 2016.1, ao pessoal da monitoria e o pessoal da república por terem me acolhido.

Gostaria de agradecer aos meus professores do ensino médio, em especial ao professor Lucas Saraiva, Assis Bento e Madson Dias.

Gostaria de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela ajuda financeira ao longo dos anos como bolsista do programa de iniciação científica (PIBIC).

E, por fim, agradecer a Universidade Federal do Ceará (UFC), pelos auxílios financeiros que me proporcionaram seguir em frente e pela oportunidade de me formar em física-bacharel.

“Penso noventa e nove vezes e nada descubro;
deixo de pensar, mergulho em profundo silêncio
- e eis que a verdade se me revela.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho, nós aplicamos o modelo de rede de fusíveis através de simulações computacionais para representar sistemas desordenados do tipo *quenched*, ou seja, sistemas que apresentam variáveis aleatórias que não dependem do tempo. Uma das aplicações desse modelo é simular processos de fratura em materiais heterogêneos para entender como possíveis falhas se espalham em estruturas construídas pelo homem ou encontradas na natureza. Tal conhecimento pode ajudar a prevenir que tais falhas possam comprometer a estrutura e assim aumentar a sua vida útil. É importante ressaltar que do ponto de vista tecnológico este estudo abrange muitas áreas de pesquisa aplicada como, por exemplo, as ciências dos materiais, resistência dos materiais, engenharia, física, etc. O modelo de rede de resistores apresenta uma analogia entre os sistemas elétricos relacionado à lei de Ohm, $I = GV$, com as deformações elásticas de um material que são descritas pela lei de Hooke, $\sigma = E\varepsilon$, onde substitui-se a tensão σ pela corrente elétrica I , o módulo de elasticidade E pela condutância elétrica G e a deformação elástica ε pelo potencial elétrico V . Nós, então, aplicamos esta analogia ao estudo de morfologia de fraturas em meios desordenados. Este modelo computacional foi realizado em uma rede quadrada com uma corrente global I_g atravessando o sistema e atribuindo valores aleatórios de condutância elétrica para cada resistor de maneira que possamos calcular os potenciais, através da lei de Kirchhoff. Com isso, definimos um critério de queima dos resistores retirando-o e repetindo o mesmo processo até encontrar o agregado fraturado. Além disso, determinamos a dimensão fractal ϕ , que mostra como as falhas microscópicas se espalham pelo meio, e analisamos também a condutância global G_g do sistema.

Palavras-chave: Rede de resistores. Sistemas desordenados. Dimensão fractal. Processos de fratura.

ABSTRACT

In this work, we apply the fuse network model through computer simulations to represent quenched disordered systems, i.e., systems that present random variables that do not depend on time. One of the applications of this model is to simulate fracture processes in heterogeneous materials in order to understand how possible failures spread in man-made structures or in those found in nature. Such knowledge may help to prevent that such failures could compromise the structure. From a technological point of view, such study cover many areas of applied research, such as, materials sciences, materials strength, engineering, physics, etc. The resistor network model presents an analogy between the electrical systems related to Ohm law, $I = GV$, with the elastics deformations of a material that is described by Hooke's law, $\sigma = E\varepsilon$, where the voltage σ is replaced by the electric current I , the modulus of elasticity E by the electrical conductance G and the elastic deformation ε by the electric potential V . Thus, we apply this model to study fracture morphology in disordered media. This computational model was realized in a square lattice with a global current I_g applied to the system and we assign random values of electrical conductance to each resistor, in order to calculate the potentials at each node using Kirchhoff's law. With this, we defined a criterion for the damage of the resistors, removing them from the lattice, and repeating the same process until we found the fractured aggregate. In addition, we determine the fractal dimension ϕ , which is related to microscopic flaws spread out on the medium, how and we also analyze the global conductance G_g of the system.

Keywords: Resistor network model. Disordered systems. Fractal dimension. Fracture processes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – análise esquemática do estudo de fraturas em diferentes escalas de comprimentos.	16
Figura 2 – Corresponde ao crescimento da trinca num plano perpendicular à direção da tensão principal de tração.	17
Figura 3 – (a) Tipo de fratura dúctil, na qual apresenta uma característica na parte central com um formato fibroso e irregular. (b) Tipo de fratura frágil que gera pouca deformação plástica macroscópica.	18
Figura 4 – Vista da fratura frágil entre a secção central do navio Liberty (estrutura dúctil).	18
Figura 5 – Comportamento frágil e dúctil de alguns materiais após testes de tração sob diferentes condições.	19
Figura 6 – Exemplos de ensaios sobre a atuação de uma determinada força em um material.	21
Figura 7 – Gráfico de tensão e deformação de um material.	22
Figura 8 – Diferentes tipos de pontos no gráfico de tensão vs deformação em relação ao processo de fratura do material.	23
Figura 9 – Diagrama de tensão vs deformação mostrando um comportamento do tipo frágil na curva B e um comportamento dúctil na curva B'.	24
Figura 10 – (a) Um brócolis romanesco. (b) Raio atingindo casa no em São José dos Campos-SP. Ambas as figuras são objetos irregulares encontrados na natureza.	26
Figura 11 – (a) fronteira entre Brasil e a Bolívia. (b) Tamanho da régua 3x e a extensão da fronteira é 9x. (c) Tamanho da régua x e a extensão da fronteira é 11x.	27
Figura 12 – Construção da curvas de Koch e generalização para m iterações da curva, de cima para baixo.	29
Figura 13 – Construção do conjunto de Cantor e generalização para m iterações da curva, de cima para baixo.	30
Figura 14 – Representação do Conjunto de Mandelbrot, caracterizando a autossimilaridade e a sua complexidade infinita.	30
Figura 15 – Fractais determinísticos vs aleatórios. (a) Tapete de Sierpinski determinístico. (b) Tapete de Sierpinski aleatório.	31
Figura 16 – Interface fractal no momento em que o fluido invasor "envolve" a rede quadrada de 2048 x 2048 sítios.	33

Figura 17 – O Tamanho do fluido invasor, no momento em que esse envolve a rede, representando uma lei de potência com valores de $M(L)$ para os tamanhos de rede $L = 64, 128, 256, 512, 1024$ e 2048	33
Figura 18 – (a) Distribuição aleatória das condutâncias elétricas na rede 4×4 quadrada. (b) Determinamos a maior potência dissipada na rede entre os potenciais V_7 e V_{11} , sendo exatamente o critério da queima. (c) Momento em que não há mais passagem de corrente no sistema.	36
Figura 19 – Diferença de potencial entre as duas placas superior e inferior com uma corrente global.	36
Figura 20 – Uma rede quadrada de 32×32 , com resistores queimados representados pelas cores vermelhas e azuis, sabendo que os resistores queimados de azul representa a fratura do sistema.	39
Figura 21 – Uma rede quadrada de 64×64 , com resistores queimados representados pelas cores vermelhas e azuis, sabendo que os resistores queimados de azul representa a fratura do sistema.	40
Figura 22 – A quantidade de resistores queimados no agregado fratura $M(L)$ para os tamanhos de rede $L = 8, 16, 64, 128$ e 256 , através da lei de potência.	40
Figura 23 – Gráfico da condutância global do sistema em uma rede quadrada com tamanhos de $L=8,16,32$ e 64 . Aplicando uma corrente global $I_g=1A$	41
Figura 24 – Gráfico da condutância global do sistema em uma rede quadrada com tamanhos de $L=8,16,32$ e 64 . Aplicando uma corrente global $I_g=3A$	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação dos processos de fraturas.	17
---	----

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	Tensão normal
G	Condutância elétrica
E	Módulo de elasticidade
V	Potencial elétrico
ε	Deformação elástica
ϕ	Dimensão fractal
I	Corrente elétrica
I_g	Corrente elétrica global
V_g	Potencial elétrico global
G_g	Condutância elétrica global
τ	Tensão de cisalhamento
P	Potência dissipada
S	Siemens (Unidade SI de condutância elétrica)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	MECÂNICA DA FRATURA	16
2.1	Ductilidade, tenacidade e fragilidade.	16
2.2	Propriedades mecânicas dos metais.	19
2.2.1	<i>Conceitos de tensão e deformação.</i>	20
2.2.2	<i>Diagrama de tensão e deformação através da deformação elástica e plástica.</i>	22
3	FRACTAL	25
3.1	Geometria fractal	25
3.2	Dimensão fractal	25
3.3	Fractais determinístico	28
3.4	Fractais aleatórios	29
4	MODELO DE REDE DE RESISTORES	34
4.1	Analogia entre sistemas elétricos e mecânicos.	34
4.2	Modelo computacional	34
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	38
5.1	Fraturas em uma rede quadrada	38
5.2	Dimensão fractal do material fraturado	38
5.3	Condutividade global do sistema.	39
6	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Fraturas em meios materiais ocorrem em estruturas construídas pelo homem, como armações metálicas, asfaltos, vidros, concretos, cerâmicas, gessos e telhados, como também na natureza, tal como solos secos e rochas. O estudo de fraturas tem atraído a atenção da comunidade científica há muito tempo, devido a sua grande importância no meio tecnológico e constitui um ramo da ciência e engenharia dos materiais.

Do ponto de vista tecnológico tais estudos tem o intuito de prever possíveis falhas no material, e assim determinar a vida útil de um componente ou estrutura para que este possa ser reparado. Infelizmente, falhas em materiais podem ocasionar acidentes ou catástrofes, como um dos exemplos mais icônicos podemos citar o naufrágio do navio Titanic. Devido a colisão a um *iceberg* e ao alto teor de enxofre presente na composição química do aço, que ocasionou a fragilização do material pela baixa temperatura de operação (LIMA, 2014).

Modelos simples de mecânica estatística permitem uma compreensão mais profunda do comportamento desses fenômenos em sistemas heterogêneos, mas algumas questões fundamentais permanecem sem solução. As propriedades estatísticas de fratura em meios desordenados representam um problema teórico com importantes aplicações práticas. A presença de desordens naturalmente leva a distribuições estatísticas de tensões de falha, acúmulo de danos, propagação de trinca, formas de rachadura e assim por diante. Um modelo que simula essas propriedades é chamado de rede de resistores que é um modelo computacional para representar a morfologia de fraturas em sistemas desordenados do tipo *quenched*, i.e., quando os parâmetros do sistema são variáveis aleatórias que não dependem do tempo. Uma das aplicações desse modelo é na formação e evolução de trincas e na sua evolução até o sistema se tornar uma fratura macroscópica que separa o material em duas ou mais partes.

Na literatura de fraturas podemos definir dois tipos de falha: a fratura dúctil e a frágil. Usando simulação computacional podemos estudar o comportamento desses fenômenos a fim de melhorar as condições de operação dos componentes ou estruturas e prevenir algumas falhas futuras. Além disso, a análise dos fractais formados na interface do agregado fraturado, que atravessa a rede, pode ser compreendido como uma assinatura característica da fratura.

Vamos estudar as características morfológicas das fraturas, calcular suas dimensões fractais, estudar se essas dimensões mudam com a desordem e como elas estão relacionadas com o tipo de fratura dúctil ou frágil e calcular a condutância global do sistema. No capítulo 2, vamos estudar as propriedades mecânicas dos materiais em relação aos processos de fratura.

Já no capítulo 3 vamos discutir a geometria fractal e suas definições. O modelo de rede de resistores será discutido no capítulo 4. No capítulo 5, discutimos os resultados do modelo de rede de fusível. Finalmente, no capítulo 6, serão apresentadas as conclusões.

2 MECÂNICA DA FRATURA

A mecânica da fratura é a área do conhecimento que é utilizada nas ciências e engenharia dos materiais, que estuda o crescimento de trincas e a formação de falhas em materiais utilizados nas indústrias e laboratórios. Na figura 1, mostramos esse estudo em diferentes escalas. Basicamente, o processo de falhas ocorre na seguinte sequência: acúmulo de danos, iniciação das trincas, propagação das trincas e fratura do material. Na figura 2, podemos observar o crescimento de uma trinca ao longo do tempo em um objeto metálico.

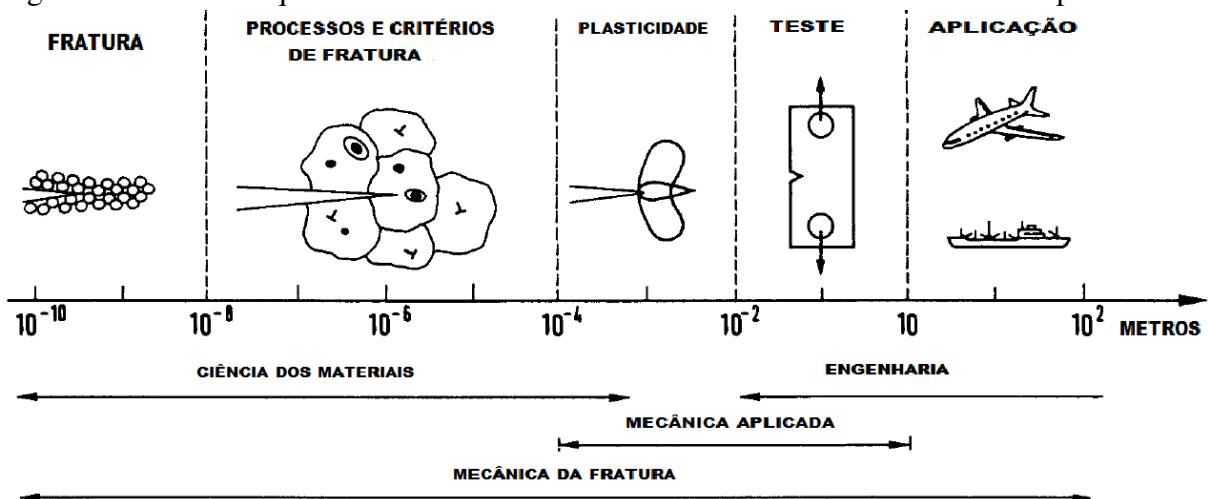
A fratura é definida como sendo a separação macroscópica de duas ou mais partes de um sólido, após sofrer uma tensão suficientemente grande ou quando o dano é acumulado com o tempo para tensões pequenas (processo conhecido como fadiga). O valor dessa tensão, tal como a forma e outras características da fissura resultante, depende das propriedades e da geometria do material e da maneira como ela foi aplicada. A tensão submetida pode ser de tração, compressão, cisalhamento ou torcional.

2.1 Ductilidade, tenacidade e fragilidade.

Podemos classificar a fratura em material metálico de várias formas, dependendo de como ele é tratado. No caso em que há energia absorvida no decorrer do processo, há dois tipos de fragmentação, a tenaz, que está ligada a um grande consumo de energia antes da fissão do meio, e a ruptura frágil, que está relacionada a um pequeno consumo de energia.

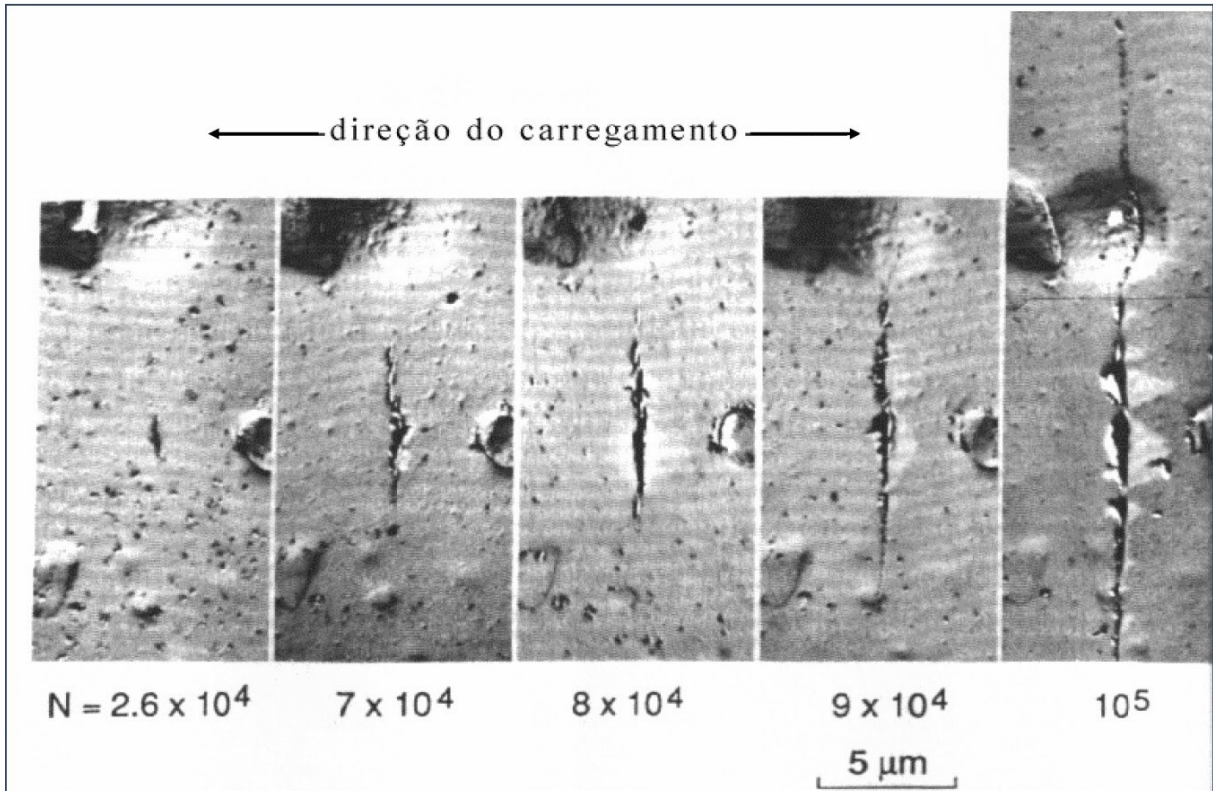
Em relação ao estudo do micromecanismo de fratura em estruturas cristalinas,

Figura 1 – análise esquemática do estudo de fraturas em diferentes escalas de comprimentos.



Fonte: Herrmann (1990).

Figura 2 – Corresponde ao crescimento da trinca num plano perpendicular à direção da tensão principal de tração.



Fonte: Milfont (2014).

podemos classificar dois tipos de ruptura: a frágil, que acontece por meio de clivagem, que é a propriedade que os minerais se quebram seguindo planos relacionados a sua estrutura; e a dúctil que acontece geralmente por cisalhamento.

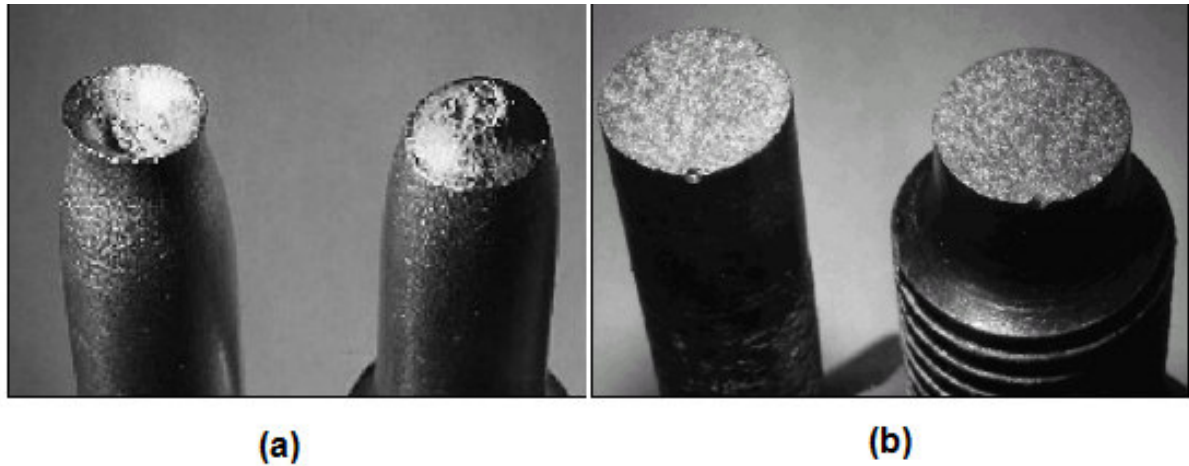
Já na análise de deformação plástica, onde o corpo não retorna ao seu estado original, permanecendo deformado permanentemente, a fratura pode ser classificada como fratura dúctil mostrada na figura 3(a), que é a deformação plástica extensa caracterizada pela lenta propagação das trincas, junto com grande absorção de energia, relacionada também ao comportamento tenaz, e fratura frágil, mostrada na figura 3(b), que ocorre com rápida propagação das trincas e com pequena quantidade de deformação plástica e assim com pouco consumo de energia. Portanto, podemos resumir os diferentes tipos de fraturas como na tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Classificação dos processos de fraturas.

Comportamento descrito	Classificação da fratura	
Modo cristalográfico	cisalhamento	clivagem
Aparência da superfície de fratura	fibrosa	granular
Deformação plástica	dúctil	frágil
Energia absorvida	tenaz	frágil

Fonte: o autor.

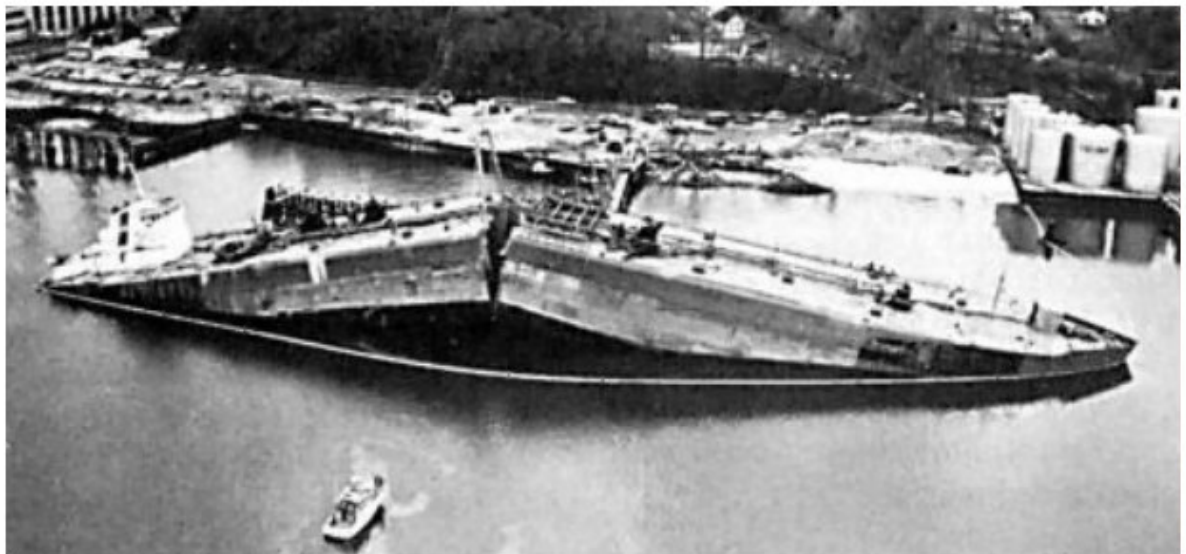
Figura 3 – (a) Tipo de fratura dúctil, na qual apresenta uma característica na parte central com um formato fibroso e irregular. (b) Tipo de fratura frágil que gera pouca deformação plástica macroscópica.



Fonte: (CALLISTER, 2005a).

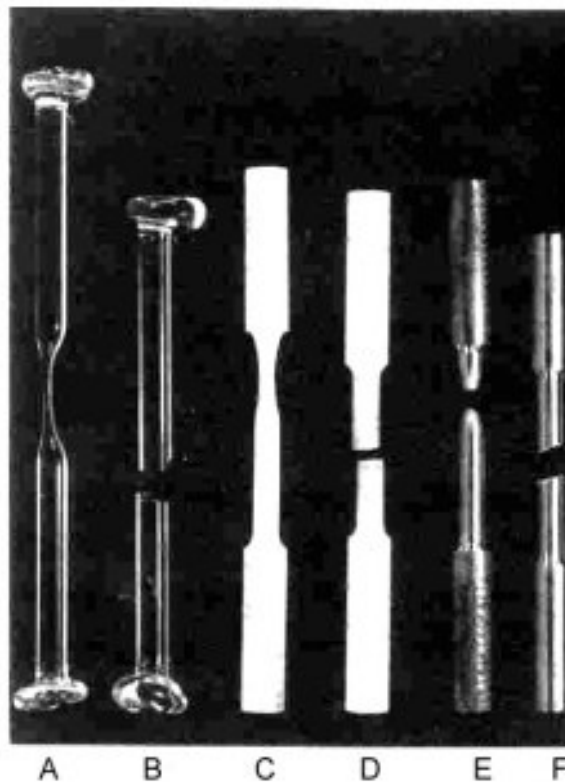
Neste trabalho, nós estudaremos materiais que sofrem deformação plástica. Materiais classificados como dúcteis podem fraturar de maneira frágil a temperaturas baixas, como foi o caso dos navios Liberty desenvolvidos na metade da segunda guerra mundial, na qual foram construídos cerca de 4694 navios, dos quais 1289 sofreram fratura frágil, sendo 233 catastróficos e em 19 casos, os navios partiram-se ao meio (KOBAYASHI; ONOVE, 1943). Na figura 4, vemos um navio Liberty sendo fraturado de forma frágil. A fadiga, é um tipo de fratura frágil que ocorre em materiais dúcteis.

Figura 4 – Vista da fratura frágil entre a secção central do navio Liberty (estrutura dúctil).



Fonte: Callister (2005b).

Figura 5 – Comportamento frágil e dúctil de alguns materiais após testes de tração sob diferentes condições.



Vidro:	A à temperatura de 527°C	B à temperatura ambiente
Polímero:	C tracionado lentamente	D tracionado rapidamente
Aço comum:	E à temperatura ambiente	F à temperatura de -73°C

Fonte: Heck (2014).

Segundo Callister (CALLISTER, 2005c), a ductilidade representa o grau de deformação que foi suportado durante o processo da fratura e depende da temperatura do material, da taxa de deformação e do estado de tensão. Na figura 5, podemos analisar fraturas em diferentes materiais sob diferentes condições.

2.2 Propriedades mecânicas dos metais.

As propriedades mecânicas nos dão informações sobre o comportamento do material sob efeito de cargas externas, ou seja, sobre a capacidade de resistir a esforços sem fratura ou muita deformação. Portanto há uma necessidade de conhecer as propriedades do material e como ele se comporta ao ser usado na indústria, a fim de que a deformação que o mesmo receba não sofra muita deformação plástica, evitando a fratura pelo maior tempo possível. A análise

mecânica de cada material está relacionada à deformação de uma força externa ou carga aplicada ao meio. Algumas propriedades são mais importantes para fenômenos, como a resistência, ductilidade, rigidez e a dureza (CALLISTER, 2005d).

O comportamento mecânico dos materiais são testados e analisados em laboratórios e indústrias, para assim determinar a sua resistência a vários regimes de perturbação, incluindo os testes de ensaios de tensões, a forma em que a carga é posta e o período que foi utilizado, tal como as condições ambientais (CALLISTER, 2005e). O estudo das propriedades mecânicas dos materiais deve garantir confiabilidade e segurança e podem ser determinadas por meio de testes experimentais. Para depois serem aplicadas em produção de automóveis, aviões, navios, dentre outros, industriais.

2.2.1 *Conceitos de tensão e deformação.*

Quando um corpo rígido, sob o efeito de forças, é deformado, e após a retirada dessas forças o corpo volta ao seu estado inicial, chamamos esse tipo de regime de elástico. Quando as forças excedem o limite elástico, o corpo não volta ao seu estado natural e mantêm-se deformado. Podemos definir que cada forma de deformação apresenta uma tensão diferente, relacionando a intensidade das forças que geram a compressão, torção, cisalhamento e tração de um corpo sólido, como no caso da figura 6.

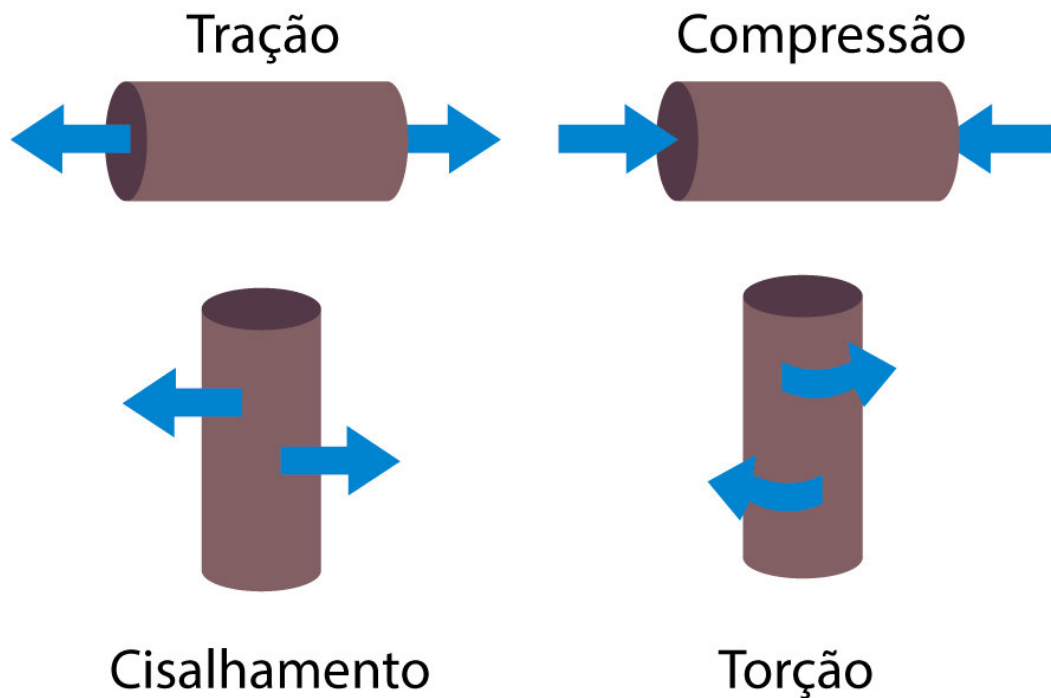
Consideremos um corpo sólido contínuo, homogêneo e coeso, isto é, todas as suas porções estão interligadas, sem apresentar trincas ou separações. A tensão através de ensaios de tração (figura 6) σ é caracterizada pela dilatação do corpo sólido e é definida como um elemento infinitesimal de força dF que é aplicada perpendicular à área de um elemento infinitesimal do material, dA_0 , como na equação

$$\sigma = \lim_{\Delta A_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A_0}. \quad (2.1)$$

A unidade σ (SI) é Pa, onde $1 \text{ Pa} = \text{N}/\text{m}^2$. Podemos definir a deformação de acordo com a expressão

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (2.2)$$

Figura 6 – Exemplos de ensaios sobre a atuação de uma determinada força em um material.



Fonte: Autor.

onde L_0 representa o comprimento antes do corpo sofrer alguma alteração e $(L - L_0)$ é o alongamento da deformação. Portanto, ϵ é uma grandeza adimensional.

A tensão em ensaios de compressão (figura 6) é caracterizada pela contração do corpo ao longo da direção da força aplicada. E, por convenção, a força de compressão é negativa, uma vez que L_0 é maior que L e, por isso, a diferença apresenta um sinal negativo. Podemos classificar que a tensão através de ensaios de tração e compressão são chamadas de tensão normal, pois a força por unidade de área age perpendicularmente à área.

Os ensaios de tração em um material são mais comuns, pois ele pode ser avaliado para diversas propriedades mecânicas dos materiais e são mais fáceis de serem realizados. Na engenharia, a análise experimental da maioria dos materiais são retiradas poucas informações nos ensaios de compressão, mas quando estes estão sujeito a grandes deformações plásticas os ensaios de compressão tem um papel importante para se conhecer como o material se comporta e na fabricação do mesmo e classificá-lo como dúctil ou frágil (CALLISTER, 2005f).

A tensão através de ensaios de cisalhamento (figura 6) está relacionada a aplicação

da força cisalhante, ou seja, forças que agem tangente a área, e são denominadas como tensão de cisalhamento τ representada na seguinte equação

$$\tau = \lim_{\Delta A_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A_0}. \quad (2.3)$$

2.2.2 Diagrama de tensão e deformação através da deformação elástica e plástica.

Quando aplicamos uma força a um material, como o ensaio mecânico mostrado na figura 7, podemos ver uma região de deformação elástica, na cor amarela, e uma região de deformação plástica, na cor vermelha. A diferença entre as duas deformações é que o regime elástico é caracterizada por uma reta e a deformação plástica é caracterizada por uma curva, existe um ponto que separa a deformação elástica da plástica que vamos discutir na figura 8.

Figura 7 – Gráfico de tensão e deformação de um material.

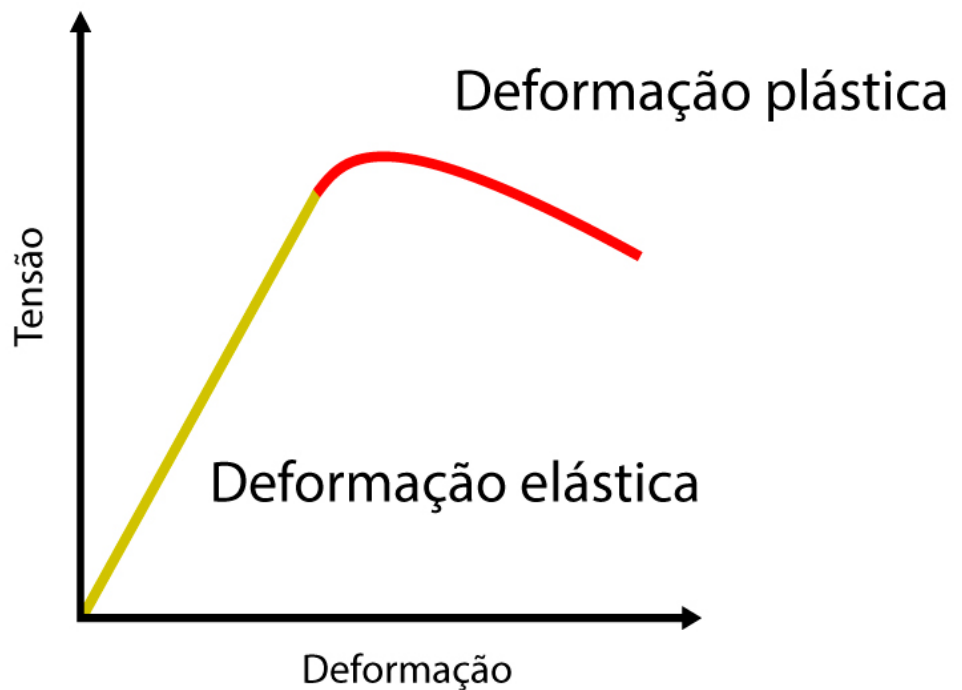
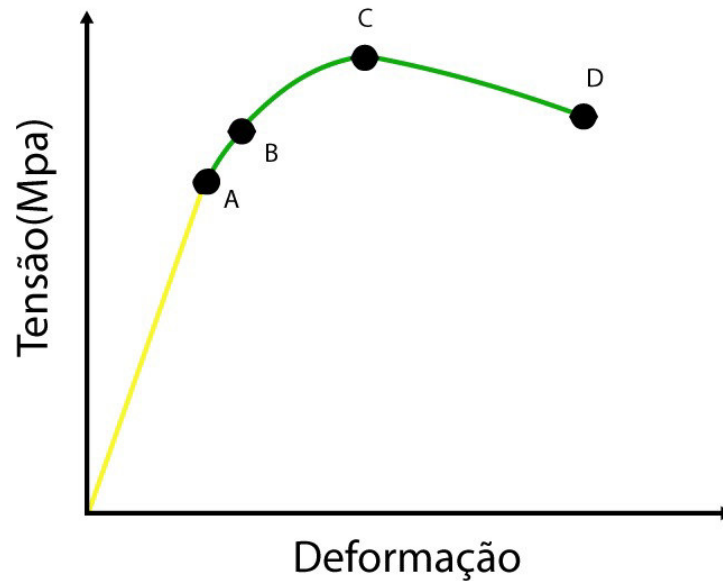


Figura 8 – Diferentes tipos de pontos no gráfico de tensão vs deformação em relação ao processo de fratura do material.



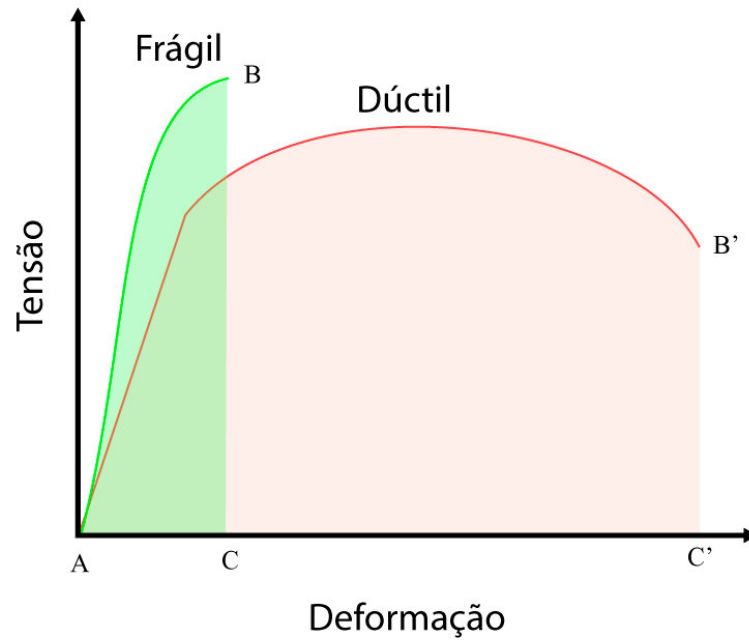
Fonte: Autor

A deformação elástica é caracterizada pela lei de Hook dada por $\sigma = E\varepsilon$, sendo σ a tensão, E o módulo de Young, ε a deformação do material. Além disso, deformações elásticas são reversíveis, isto é, dentro da região de deformação elástica (representada pela cor amarela) se removermos a força em que estamos aplicando ao longo deste teste o material volta à sua configuração original. Já durante o ensaio da deformação plástica, qualquer momento em que interrompermos a força, o material nunca retorna à posição inicial, apresentando uma deformação permanente. Na figura 8, vemos a atuação de diferentes pontos no gráfico.

O ponto A é o limite do regime linear, ou seja, é o valor de resistência que separa deformação elástica de deformação plástica. Já o ponto B é chamado de limite de escoamento que se caracteriza por um aumento relativamente grande na deformação, acompanhada por uma pequena variação na tensão, na qual acontece geralmente no início da fase plástica. Se continuarmos aplicando a tensão no material, vamos chegar ao ponto C, que é a resistência máxima que o material vai suportar ao longo do teste. Continuando o ensaio após a resistência máxima no ponto C, o material apresenta um declínio nos valores de tensão, até chegar no ponto D, que é a fratura ou ruptura do material. Vamos discutir o caso tensão vs deformação de materiais frágeis e dúcteis na figura 9.

Na figura 9, vemos que na curva do tipo B, apresenta comportamento de um material do tipo frágil, pois apresenta pouca deformação plástica até sofrer a ruptura, enquanto na curva B'

Figura 9 – Diagrama de tensão vs deformação mostrando um comportamento do tipo frágil na curva B e um comportamento dúctil na curva B'.



Fonte: (CALLISTER, 2005g)

o material é do tipo dúctil, pois há grande acúmulo de deformação plástica durante o processo.

3 FRACTAL

3.1 Geometria fractal

A geometria euclidiana é o ramo da matemática que estuda a geometria de pontos, retas, planos e objetos em três dimensões como esferas, cilíndricos, dentre outros. Pesquisas recentes revelam que métodos matemáticos euclidianos, há muito estabelecidos e que procuram representar a geometria da natureza, são incompletos e em determinadas situações inadequados. Muitos objetos encontrados na natureza não apresentam formatos de triângulos, nem círculos, nem esferas ou retângulos, por isso a geometria euclidiana não consegue explicar esses objetos irregulares.

Existem diversos objetos irregulares encontrados na natureza, por exemplo, um brócolis romanesco, mostrado na figura 10, que é uma variedade da espécie a que pertencem também a couve-flor, o couve-de-Bruxelas e o repolho, que assume aparência de um sólido irregular. Outro exemplo mostrado na figura 10 é o relâmpago, o qual não pode ser descrito por uma reta. Para descrever esses fenômenos e formas irregulares encontrados na natureza foi necessário o desenvolvimento matemático, a chamada matemática dos fractais.

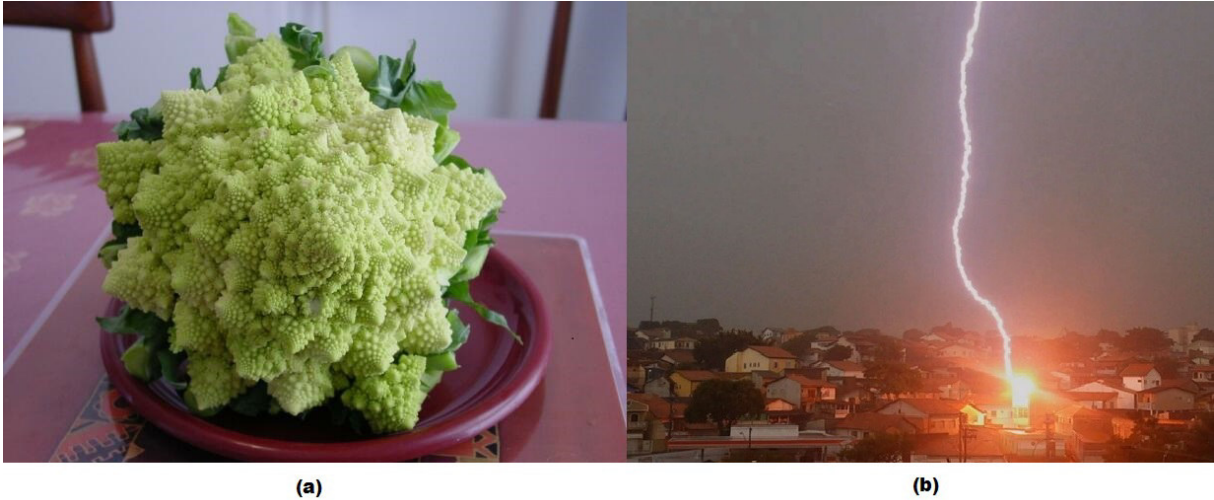
O termo fractal, que tem origem do latim, significa não inteiro. E foi empregado pela primeira vez no ano de 1975 pelo matemático francês Benoit Mandelbrot. Benoit Mandelbrot desenvolveu a geometria fractal, que visa o estudo dos subconjuntos complexos de espaços métricos (MANDELBROT, 2000). Um fractal é um objeto geométrico que apresenta três características fundamentais que diferenciam dos outros objetos: ele é autossimilar, pois apresenta configurações idênticas em escalas diferentes; possui dimensão fractal e possui complexidade infinita.

3.2 Dimensão fractal

Geralmente a dimensão de um objeto é denotado por um número inteiro, mas existem casos em que a dimensão do objeto não é inteira, que são chamadas de dimensão fractal. Por exemplo, um sólido com poros, uma superfície com saliência ou uma reta com muitas mudanças de orientação, podem apresentar uma dimensão fracionária.

Existem na literatura diversas abordagens para estimar a dimensão fractal de objetos irregulares. No entanto, a maioria delas é descrita pelos conceitos de dimensão de Hausdorff-

Figura 10 – (a) Um brócolis romanesco. (b) Raio atingindo casa no em São José dos Campos-SP. Ambas as figuras são objetos irregulares encontrados na natureza.



Fonte: Alexandre (2011) e Silva (2014)

Besicovitch que foi desenvolvida pelos matemáticos alemães Felix Hausdorff e Abram Samoilovitch Besicovitch. Esse tipo de dimensão relaciona o tamanho e o espaço ocupado de um determinado objeto. Agora vamos considerar um fio de comprimento L e outro fio de comprimento μ , sendo que $L > \mu$. Colocando o fio μ sobre o fio L até cobri-lo, encontramos um valor pela seguinte expressão

$$N(\mu) = \frac{L}{\mu} \text{ para um fio (unidimensional)}, \quad (3.1)$$

onde $N(\mu)$ é o número de divisões de L em relação a μ . Fazendo a mesma analogia para medir um quadrado de lado L e colocando vários quadrados pequenos de lado μ vamos ter uma expressão semelhante ao caso do fio, mas só que $N(\mu)$ vai ser a área do quadrado L

$$N(\mu) = \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 \text{ para um quadrado (bidimensional)}. \quad (3.2)$$

Generalizando esse conceito, podemos ter uma relação dada pela seguinte fórmula, com ϕ sendo a dimensão do objeto

$$N(\mu) = \left(\frac{L}{\mu}\right)^\phi, \quad (3.3)$$

e aplicando as propriedades logarítmicas nesta equação e isolando ϕ , temos

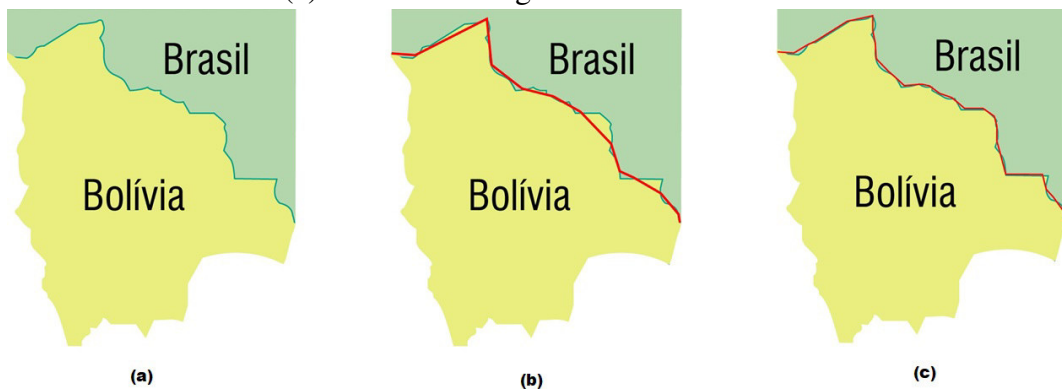
$$\phi = \frac{\ln N(\mu)}{\ln \frac{L}{\mu}}, \quad (3.4)$$

onde ϕ é a dimensão fractal de Hausdorff. Caso o objeto seja regular, a dimensão de ϕ é um valor inteiro como definida na geometria euclidiana. Já para um fractal a dimensão ϕ é fracionária, μ é o tamanho da aresta do quadrado que é determinado por $\mu = \frac{L}{n}$, com n sendo o número de divisões em relação a L e $N(\mu)$ o número de quadrados preenchidos no objeto fractal.

Além dos fractais serem autossimilares e apresentar uma dimensão fracionária, eles também apresentam características da extensão infinita. Veja, por exemplo a figura 11, onde consideramos a fronteira entre Brasil e Bolívia, o formato dessa fronteira é irregular, se determinamos o comprimento dessa fronteira com uma dada unidade de medida e se reduzirmos essa unidade, o comprimento da fronteira entre Brasil e Bolívia aumentará. Se a fronteira entre o Brasil e Bolívia for medida com uma régua de tamanho igual a $3x$, sua extensão será igual a $9x$. Continuando a medida, mas agora com uma régua de tamanho igual a x , ou seja, um terço da primeira régua, a sua extensão será igual a $11x$. Com isso, podemos perceber que quanto menor é o tamanho da régua, mais próximo o valor medido vai ficar do tamanho real da fronteira.

Alguns fractais podem ser construídos através de uma regra de recursividade, sendo classificados como fractais determinísticos, já outros são chamados de fractais aleatórios ou estocásticos, pois sua construção é dada de maneira aleatória.

Figura 11 – (a) fronteira entre Brasil e a Bolívia. (b) Tamanho da régua $3x$ e a extensão da fronteira é $9x$. (c) Tamanho da régua x e a extensão da fronteira é $11x$.



Fonte: Autor.

3.3 Fractais determinístico

Fractais determinísticos apresentam uma autossimilaridade exata, ou seja, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples que ocorrem no próprio objeto, o qual é formado por ele mesmo em tamanhos reduzidos. A construção desse tipo de fractal é dado através de um objeto iniciador ou gerador, que apresenta uma regra geométrica padrão, e a partir disso gera infinitas iterações.

Um exemplo de fractal determinístico é a construção da curva de Koch mostrada na figura 12, que apresenta um gerador que é uma reta de comprimento L . Assim, dividindo a reta em 3 partes iguais, ou seja, $\mu = \frac{L}{3}$, e com uma regra de recursividade de retirar o segmento do meio e adicionar dois segmentos de retas com o tamanho $\frac{L}{3}$ para assim formar um triângulo equilátero, mas sem base. A partir disso, temos ter 4 segmentos de retas com o mesmo tamanho e cada segmento passará pela mesma operação geométrica que o da interação anterior. Essa operação é então aplicada m vezes, que chamamos de geração.

Na figura 12 mostramos a curva de Koch em algumas gerações. E podemos analisar que o μ (que é o comprimento de cada divisão do objeto) é reduzido por um fator de 3 de uma operação a outra, enquanto o número de segmentos $N(\mu)$ aumenta por um fator de 4. Portanto, podemos calcular a sua dimensão fractal da curva de Koch da seguinte forma

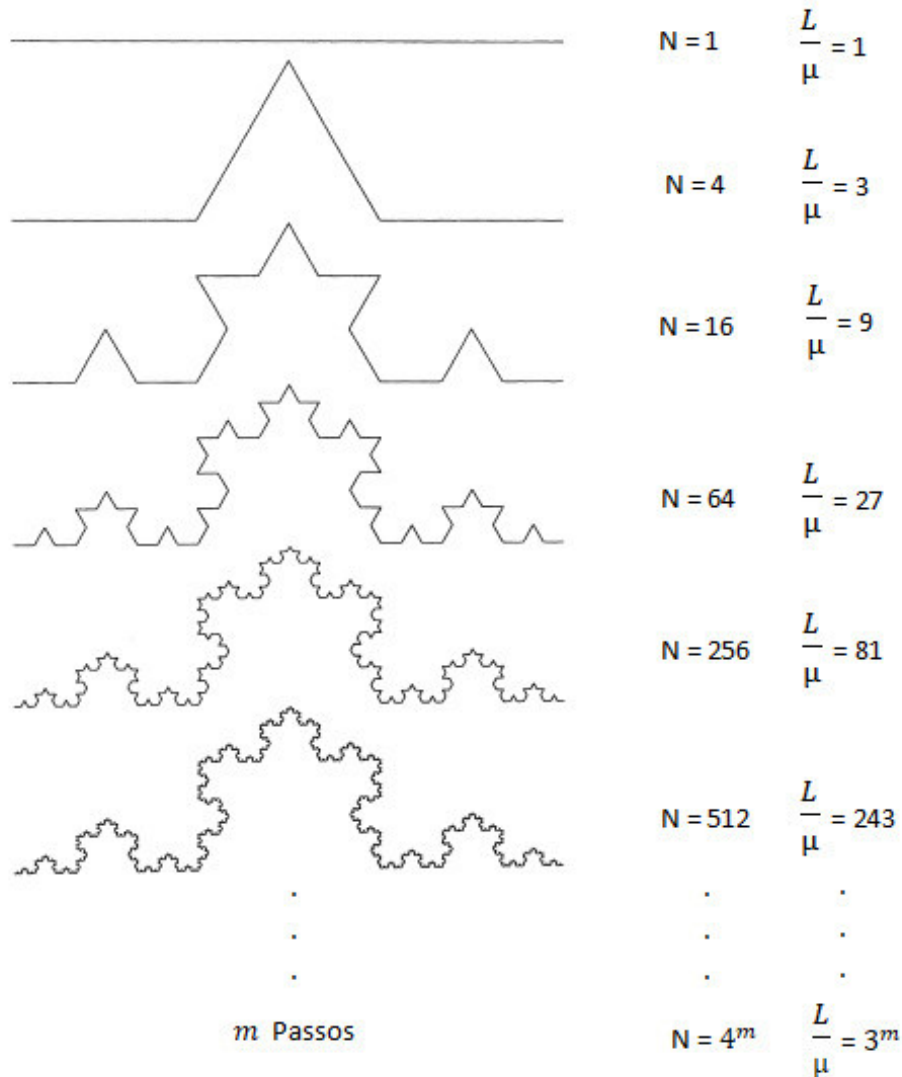
$$\phi = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26. \quad (3.5)$$

Além da curva de Koch, existem outros tipos de fractais determinísticos como o conjunto de Cantor representado na figura 13 e o conjunto de Mandelbrot na figura 14. O conjunto de Cantor é construído através de uma regra similar aquela da curva de Koch, onde dessa vez não acrescentamos segmentos ao meio após a sua retirada e gerando isso de forma recursiva para infinitas interações, teremos um comprimento tendendo a 0, e diferente da curva de Koch, $N(\mu)$ é aumentado por um fator de 2, então sua dimensão fractal é denotada pela expressão abaixo

$$\phi = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63. \quad (3.6)$$

O conjunto de Mandelbrot na figura 14 é construído através de uma equação de recursividade $z_{n+1} = z_n^2 + c$, com z sendo um número complexo e c uma constante complexa

Figura 12 – Construção da curvas de Koch e generalização para m iterações da curva, de cima para baixo.



Fonte: (FEDER, 1988)

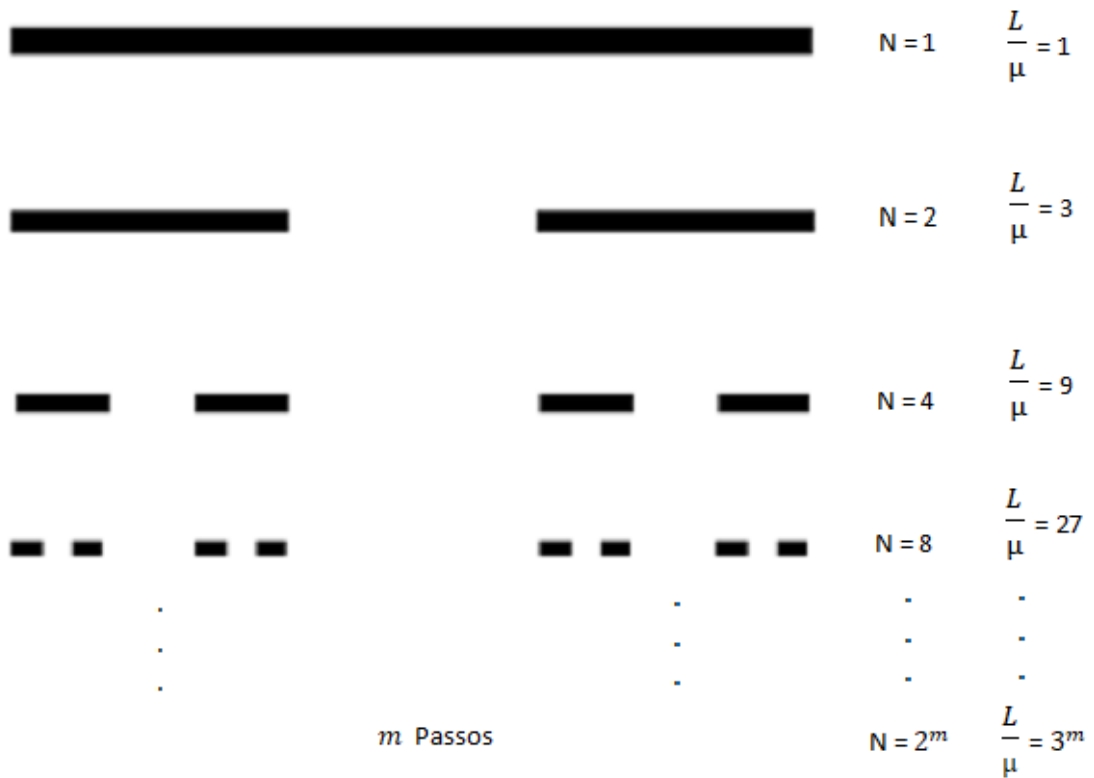
e o valor z_0 é igual a 0. Se o módulo de $|z| \leq 2$ o número complexo c faz parte do conjunto de Mandelbrot.

3.4 Fractais aleatórios

São fractais que são gerados por processos estocásticos ao invés de determinístico, ou seja, não apresenta regra de recursividade para sua construção. Os fractais aleatórios possuem medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. As definições desses tipos de fractais geralmente relacionam em alguma forma de autossimilaridade estatística.

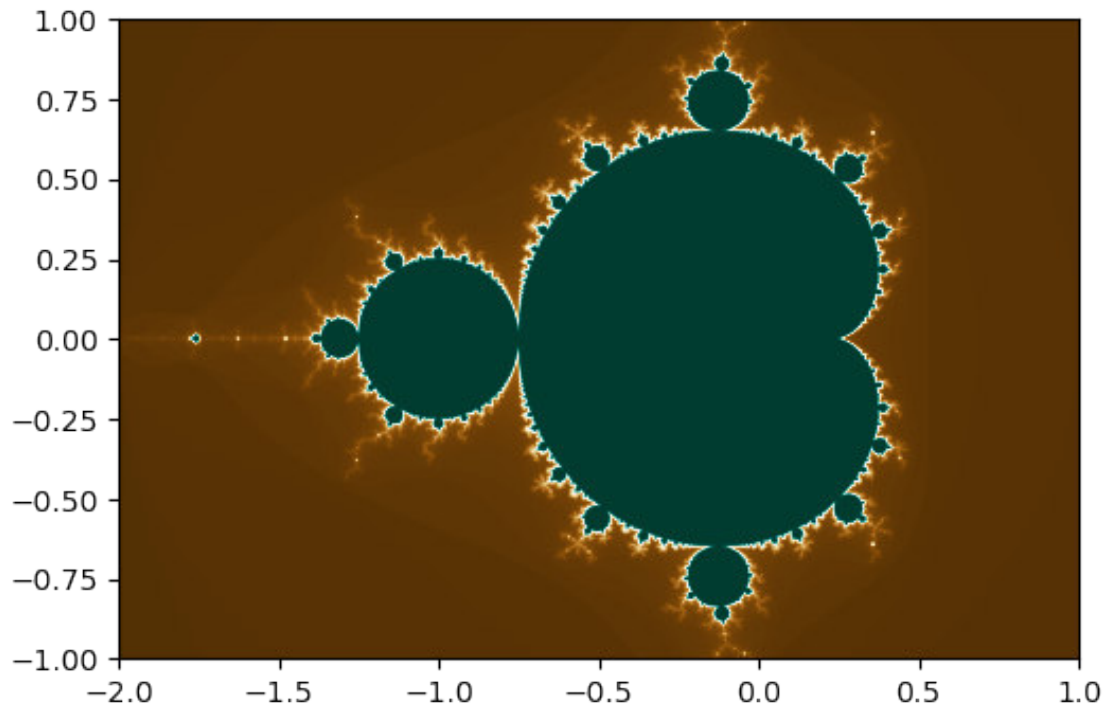
Outro fractal determinístico representado na figura 15 é chamado de Tapete de Sierpinski, onde seu padrão de interação é denotado por um quadrado unitário, subdividindo

Figura 13 – Construção do conjunto de Cantor e generalização para m iterações da curva, de cima para baixo.



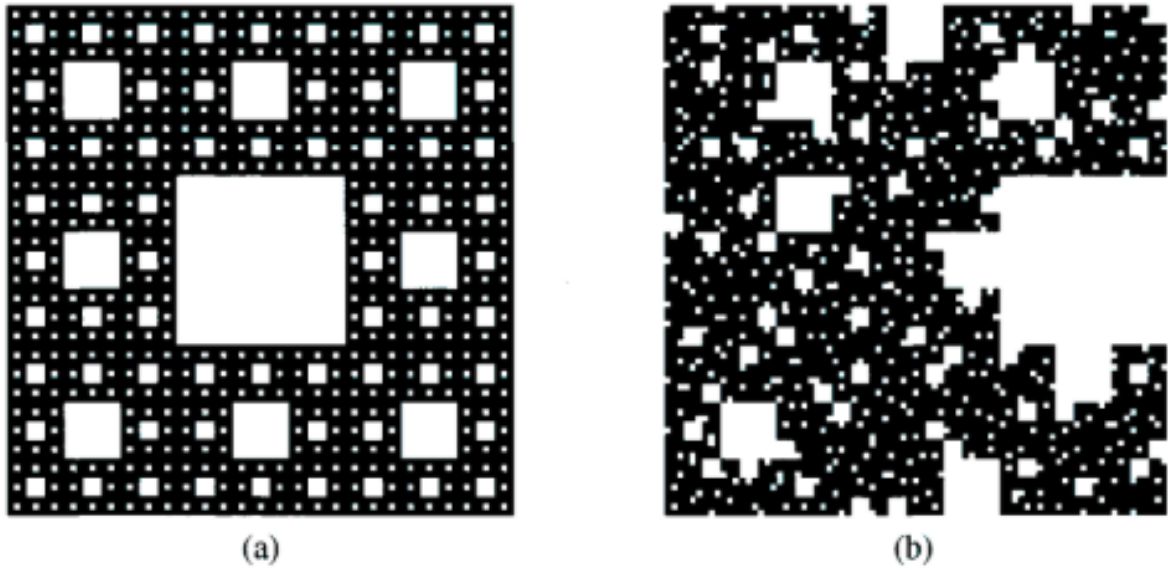
Fonte: (CHOVANEK, 2010)

Figura 14 – Representação do Conjunto de Mandelbrot, caracterizando a autossimilaridade e a sua complexidade infinita.



Fonte: Autor.

Figura 15 – Fractais determinísticos vs aleatórios. (a) Tapete de Sierpinski determinístico. (b) Tapete de Sierpinski aleatório.



Fonte: (BEN-AVRAHAM; HAVLIN, 2000)

em 3×3 , e assim retirando a subunidade central, de modo que a interação se repita para cada subunidade. Se colocarmos uma aleatoriedade de escolha para retirada de uma das 9 subunidades, logo o meio vai se tornar aleatório e somente seguirá um padrão de autossimilaridade quando considerado a média de várias realizações.

Na figura 15(a), a construção do tapete de Sierpinski é dado por um gerador de tamanho L , com área inicial L^2 e usando a primeira iteração, temos que o conjunto que pode ser descrito como a união de 8 subconjuntos em relação a figura original e que a área de cada subconjunto é $\frac{L^2}{3}$, então a área é sempre reduzida por um fator de 3. Sendo assim, podemos calcular sua dimensão fractal na seguinte forma

$$\phi = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.89. \quad (3.7)$$

Já a figura 15(b) mostra um fractal aleatório e sua dimensão fractal ϕ depende do número de objetos preenchidos, $M(L)$, que são os subconjuntos pretos, e do tamanho do comprimento L do tapete de Sierpinski determinado pela seguinte lei de potência

$$M(L) \sim L^\phi. \quad (3.8)$$

Usando a fórmula da equação (3.7) e (3.8), e calculando a dimensão fractal tanto no meio determinístico quanto no meio aleatório do Tapete de Sierpinski, encontramos a mesma

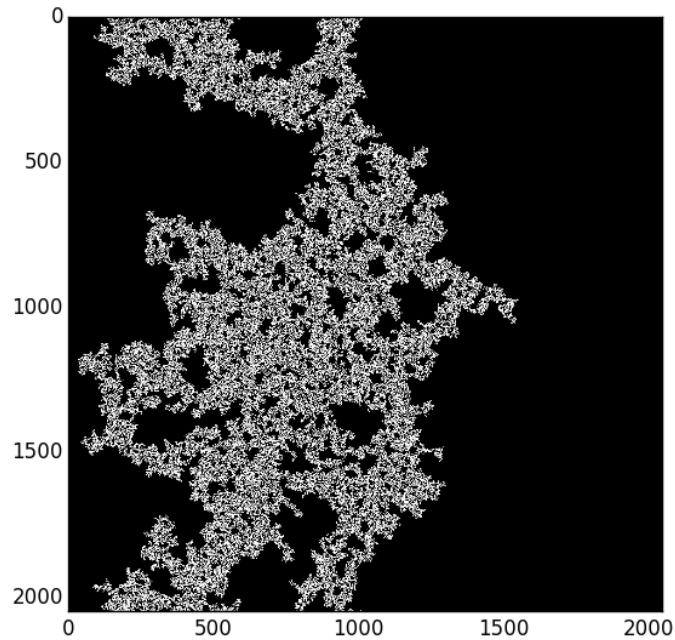
dimensão.

Outro tipo de fractal aleatório é aquele obtido pelo modelo de percolação invasiva, uma das linhas de pesquisa desse modelo é simular a retirada de óleos em reservatórios petrolíferos. Esse modelo representa o processo de escoamento bifásico em meios porosos, onde um fluido é deslocado por outro através de um meio poroso. Meios porosos são estruturas sólidas cheias de espaços preenchidos por um fluido, que sofre a ação de forças capilares. Após a injeção de um fluido invasor, o seu deslocamento é governado somente pelas forças capilares relativas ao tamanho dos poros próximos, desconectando assim o fluido defensor em vários agregados pelo meio, facilitando com que o fluido invasor atravesse o sistema, representado na figura 16.

Para simular o processo invasivo, analisamos o caso em que o fluido deslocado se encontra sem aprisionamento (sem trapping), com isso o fluido deslocado apresenta uma característica de ser infinitamente compressível. Este modelo de percolação invasiva foi realizado através de uma rede quadrada $L \times L$, em que cada sítio representa um poro do meio poroso, onde atribuímos valores aleatórios a cada um desses sítios, entre 0 e 1, representando assim a permissividade deste poro. Na figura 17, determinamos a dimensão fractal usando a equação (3.8) e calculamos para diferentes tamanho de rede $L=64, 128, 256, 512$ o valor de ϕ do agregado percolante no sistema, assim obtemos o valor de $\phi = 1.888 \pm 0.0025$.

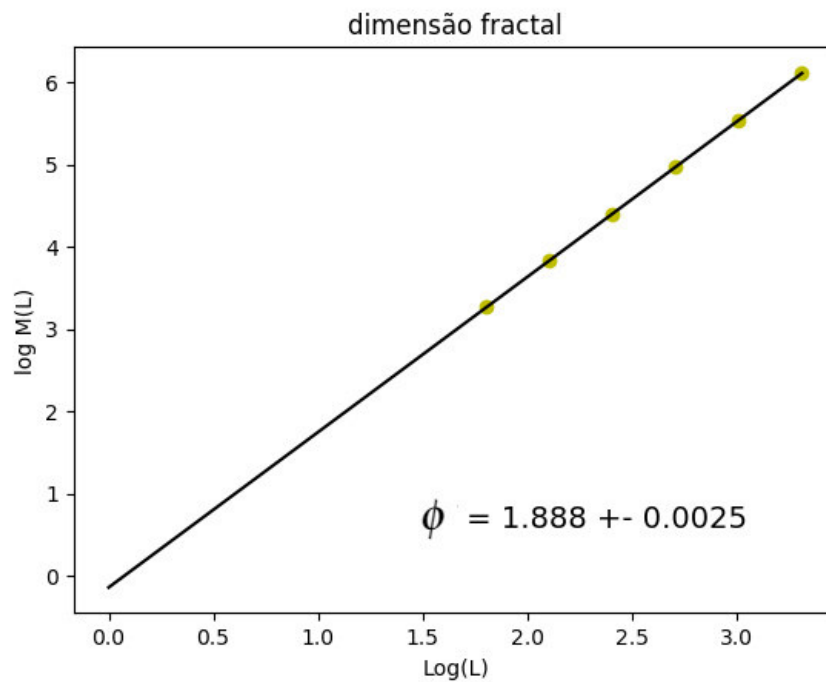
Sistemas que apresentam parâmetros como variáveis aleatórias, são denotados como sistemas desordenados, como no caso do modelo de percolação invasiva, geralmente acabam construindo fractais aleatórios. Existem outros tipos de fractais aleatórios que podem ser obtidos por modelos computacionais como *random walk*, dinâmica molecular e rede de resistores. No capítulo 4, vamos estudar o modelo de rede de resistores aplicado na área de fratura em meios desordenados.

Figura 16 – Interface fractal no momento em que o fluido invasor "envolve" a rede quadrada de 2048 x 2048 sítios.



Fonte: Autor.

Figura 17 – O Tamanho do fluido invasor, no momento em que esse envolve a rede, representando uma lei de potência com valores de $M(L)$ para os tamanhos de rede $L = 64, 128, 256, 512, 1024$ e 2048 .



Fonte: Autor.

4 MODELO DE REDE DE RESISTORES

4.1 Analogia entre sistemas elétricos e mecânicos.

No capítulo 2, revisamos a mecânica da fratura, as propriedades mecânicas, e a aplicação da lei Hooke nos processos de fratura nos materiais. Um dos modelos mais simples para simular esses processos de fratura é chamado de rede de resistores. Este modelo apresenta analogia entre os sistemas mecânicos (Lei de Hooke: $\sigma = E\varepsilon$) e os sistemas elétricos (Lei de Ohm: $I = GV$), onde a corrente elétrica I equivale à tensão σ , o potencial elétrico V é equivalente à deformação ε , e a condutância elétrica G equivale ao módulo de elasticidade E .

Para circuitos elétricos, se um resistor for colocado sob uma determinada tensão que se aproxima do limite da potência nominal, ele gera mais calor do que o normal. Dessa forma, a tensão força mais passagem de corrente elétrica, e se essa quantidade de corrente pode exceder o limite em que o resistor possa suportar, ele será queimado, da mesma forma se um determinado material receber uma certa quantidade de tensão σ , ele vai apresentar formações de trincas. O principal objetivo dessa analogia é simplificar a notação tensorial presente na descrição matemática da deformações de sólidos, de forma que podemos aproximar deformações em duas ou três dimensões usando apenas a lei de Hooke.

4.2 Modelo computacional

No modelo computacional, descrevemos uma rede quadrada de tamanho $L \times L$, onde as ligações de cada sítio representam resistores, os quais atribuímos valores aleatórios entre 0.1 e 1.0, representando a condutância elétrica. Nós então aplicamos verticalmente uma corrente global I_g ao sistema, com condições periódicas de contorno horizontais, que acaba percorrendo a rede por completo. Para encontrarmos a tensão elétrica em cada sítio, aplicamos a lei de Kirchhoff em cada sítio, e sabendo que a 1ª lei de Kirchhoff que define que soma algébrica das correntes que passam em um nó qualquer de um circuito é nula $\sum_n I_i = 0$. Dessa forma, determinamos o seguinte conjunto de equações lineares,

$$\sum_{j=1}^4 G_{ij}(V_i - V_j) = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1)$$

onde G_{ij} é a condutância do resistor que liga os nós adjacentes, i e j . V_i é o potencial no sítio i e $N = L^2$ é o número total de nós na rede. Esse conjunto de equações lineares forma uma matriz esparsa, onde a grande maioria dos elementos são nulos. E aplicamos o método dos gradientes conjugados (PRESS *et al.*, 1986-1992) (SENA, 2014), para determinar os potenciais elétricos em cada nó, assim a lei de Ohm pode ser expressa na seguinte forma matricial,

$$\underline{I} = \underline{G} \underline{V}. \quad (4.2)$$

Multiplicando os dois lados pela matriz inversa de \underline{G} e sabendo que $\underline{G}^{-1} \underline{G} = \underline{1}$ é igual a matriz identidade e isolando \underline{V} , temos

$$\underline{V} = \underline{G}^{-1} \underline{I}, \quad (4.3)$$

onde as matrizes \underline{G} e \underline{I} , apresentam uma grande quantidade de zeros e assim usando o método dos gradientes conjugados podemos encontrar os valores da matriz dos potenciais elétricos.

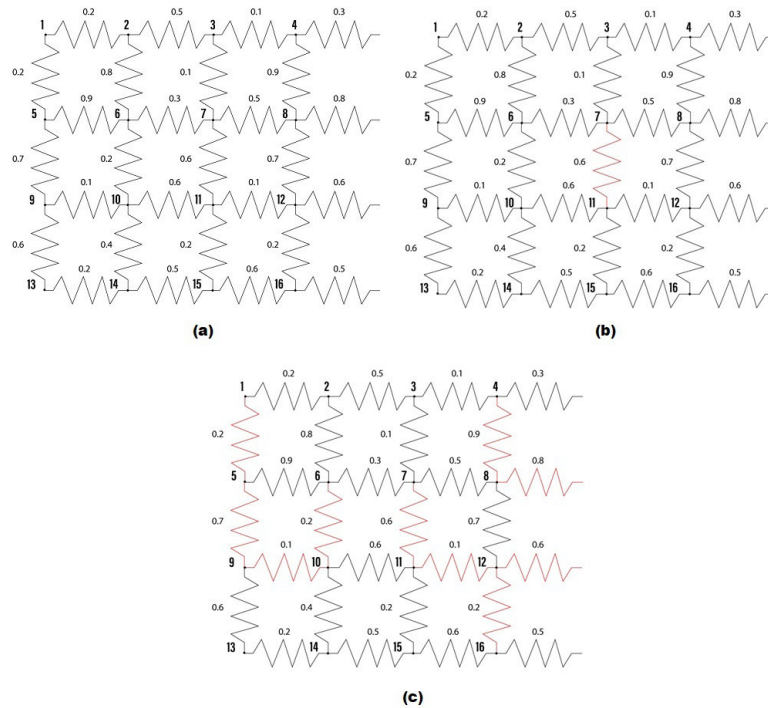
Após termos resolvido o sistema de equações lineares e encontrado a diferença de potencial em cada nó, podemos calcular a potência dissipada de cada resistor pela seguinte equação

$$P_{ij} = G_{ij}(V_i - V_j)^2, \quad (4.4)$$

onde P_{ij} é a potência dissipada na ligação entre o nó i e j . O critério de queima é definido pela potência dissipada dos resistores, ou seja, aquele resistor que possui a maior potência dissipada, dentre todos os resistores não queimados, é escolhido para ser queimado e é retirado da rede. Depois de queimado o primeiro resistor, as equações de Kirchhoff são resolvidas novamente, com as mesmas condições de contorno, e um novo resistor é escolhido para ser queimado, e assim por diante, a simulação termina quando a corrente global I_g não atravessa mais o sistema (MOREIRA *et al.*, 2012), devido uma fratura como mostrado na figura 18.

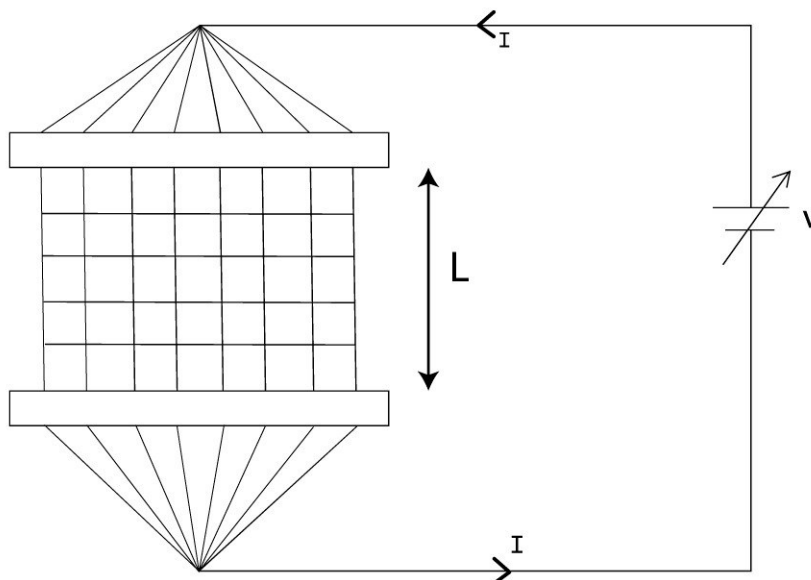
Na figura 19, vemos como é a estrutura da rede quadrada de resistores $L \times L$, onde aplicamos uma corrente global I_g na parte superior até a parte inferior da rede. Com isso, podemos calcular a diferença de potencial V_g entre as duas placas da rede. Dessa forma, com

Figura 18 – (a) Distribuição aleatória das condutâncias elétricas na rede 4x4 quadrada. (b) Determinamos a maior potência dissipada na rede entre os potenciais V_7 e V_{11} , sendo exatamente o critério da queima. (c) Momento em que não há mais passagem de corrente no sistema.



Fonte: Autor.

Figura 19 – Diferença de potencial entre as duas placas superior e inferior com uma corrente global.



Fonte: Autor.

o valor da corrente global I_g e a diferença de potencial entre as placas, podemos determinar a condutância global G_g do sistema representado na equação (4.3),

$$G_g = \frac{I_g}{V_g}. \quad (4.5)$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 Fraturas em uma rede quadrada

Sistemas que apresentam desordem, são estudados em áreas de pesquisa da física, por exemplo, os sistemas complexos que é uma área de pesquisa que busca padrões e comportamento universais que ocorrem em diferentes classes de sistemas. Podemos apontar a desordem tipo *quenched*, onde as variáveis aleatórias não dependem do tempo. Uma das aplicações desse tipo de desordem é na formação de rochas porosas ou impurezas em estruturas materiais.

A desordem do tipo *quenched* é estudada no modelo de rede de resistores. Este modelo é uma aproximação elétrica das deformações elásticas de um material, onde, desprezando as componentes tensoriais da tensão, a lei de Hooke se compara com a lei de Ohm, como foi definido no capítulo 4.

O objetivo desse trabalho é analisar o crescimento da trinca até a formação da fratura do sistema, determinar a dimensão fractal do *cluster* fraturado para diferentes tamanhos L da rede e encontrar a condutância global do sistema.

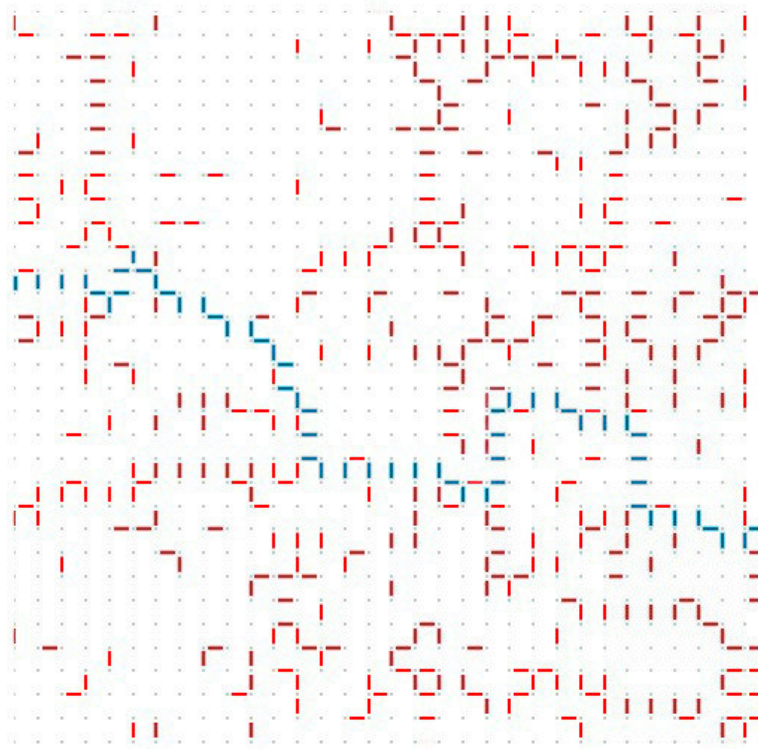
Na figura 20 e a figura 21 podemos ver a formação de trincas até o sistema sofrer a fratura, onde cada ligação representa uma condutância aleatória, e as cores em vermelho significa que o resistor foi queimado e as cores em azuis é denotado como o *cluster* ou o caminho de fratura do sistema que impede a passagem da corrente global de cima para baixo.

Nesse trabalho foram estudadas a morfologia das fraturas em rede quadradas de tamanhos diferentes com $L = 8, 16, 32, 64, 128, 256$. A fim de entender cada processo de fratura desde a sua formação até a suas estruturas finais e o comportamento de tais fenômenos a fim de prever a melhor condição de operação das partes das estruturas metálicas e prevenir possíveis falhas.

5.2 Dimensão fractal do material fraturado

Para determinarmos a dimensão fractal do agregado fraturado que atravessa a rede quadrada, identificamos o tamanho da rede $M(L)$, representado pelo número de resistores queimados no momento em que a simulação termina quando acontece a ruptura do sistema. Assim obtemos $M(L)$ para diversos valores com diferentes tamanhos L da rede. Como vimos no capítulo 3, determinamos a dimensão fractal do sistema após o rompimento e se comporta como

Figura 20 – Uma rede quadrada de 32x32, com resistores queimados representados pelas cores vermelhas e azuis, sabendo que os resistores queimados de azul representa a fratura do sistema.



Fonte: Autor.

uma lei de potência da seguinte forma

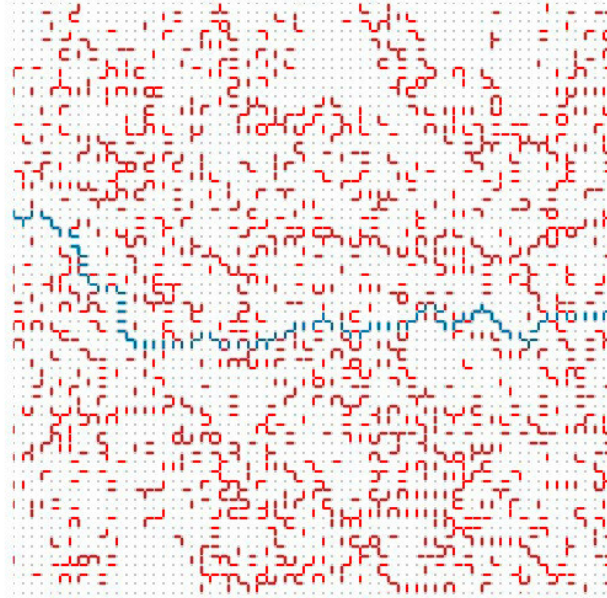
$$M(L) \sim L^\phi. \quad (5.1)$$

Na figura 22, calculamos a dimensão fractal para diferentes tamanhos de rede quadrada L . Usando as propriedades de logaritmos, obtemos ϕ um valor de aproximadamente 1.1648, que no caso é o coeficiente da reta no gráfico $\text{Log} - \text{Log}$:

5.3 Condutividade global do sistema.

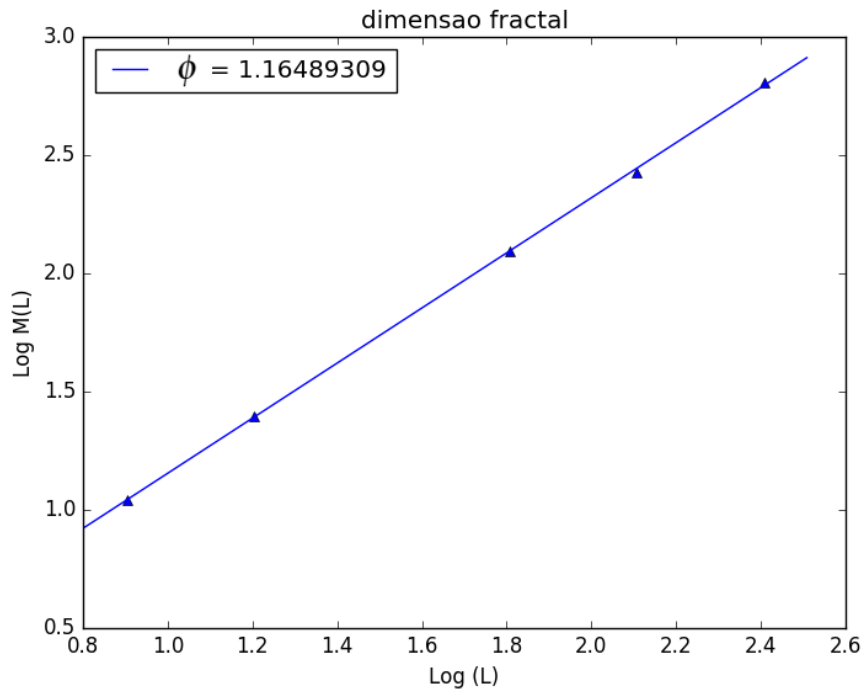
No capítulo 4, vimos que a diferença de potencial entre a placa superior e a placa inferior é V_g e que a corrente global é I_g , dessa forma calculamos a condutividade global G_g do sistema para diferentes tamanhos de rede $L=8,16,32$ e 64 , e analisamos o gráfico $G_g(S)$ vs L e sabendo que a unidade no SI de condutância elétrica é S , como mostrado na figura 23 e na figura

Figura 21 – Uma rede quadrada de 64x64, com resistores queimados representados pelas cores vermelhas e azuis, sabendo que os resistores queimados de azul representa a fratura do sistema.



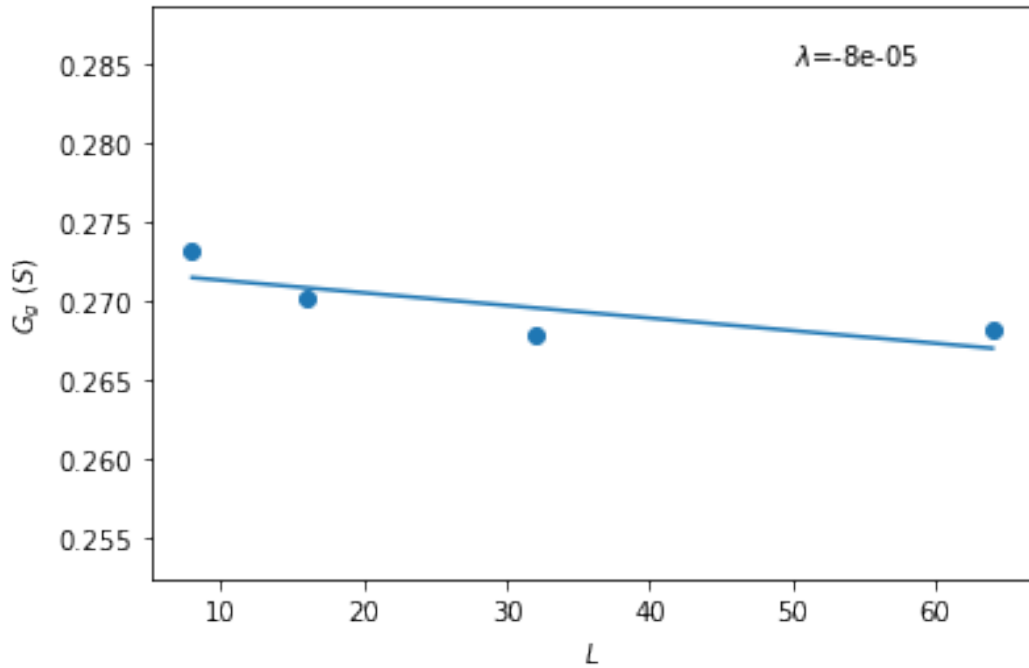
Fonte: Autor.

Figura 22 – A quantidade de resistores queimados no agregado fratura $M(L)$ para os tamanhos de rede $L = 8, 16, 64, 128$ e 256 , através da lei de potência.



Fonte: Autor.

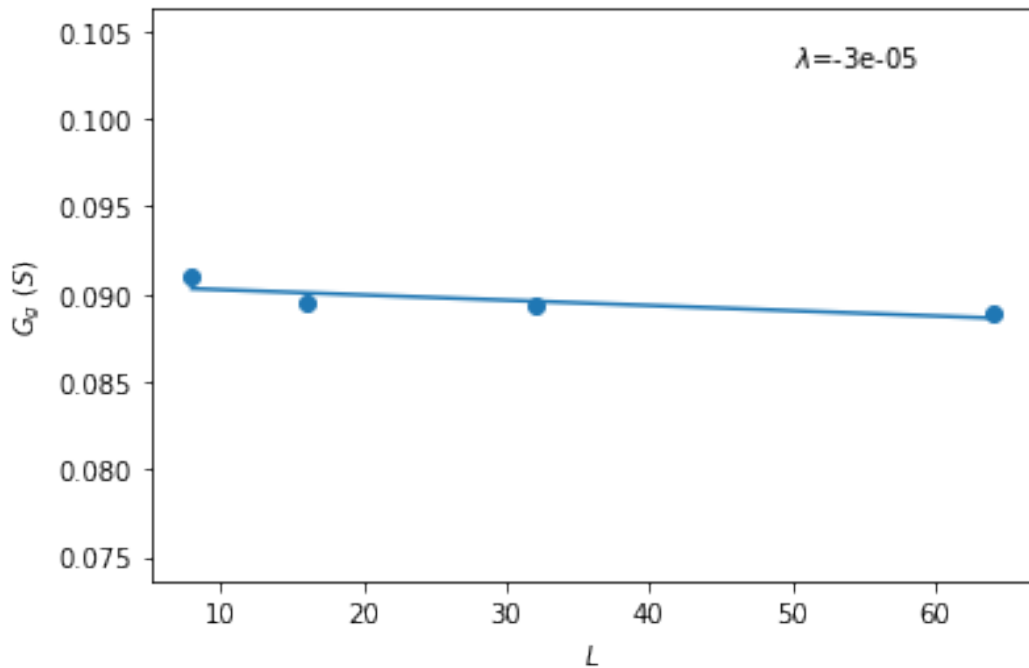
Figura 23 – Gráfico da condutância global do sistema em uma rede quadrada com tamanhos de $L=8,16,32$ e 64 . Aplicando uma corrente global $I_g=1A$.



Fonte: Autor.

24, com duas correntes globais $I = 1A$ e $I = 3A$ respectivamente.

Figura 24 – Gráfico da condutância global do sistema em uma rede quadrada com tamanhos de $L=8,16,32$ e 64 . Aplicando uma corrente global $I_g=3A$.



Fonte: Autor.

Onde λ é o coeficiente angular da reta G_g vs L , podemos analisar que o coeficiente

λ , nos dois gráficos, está muito próximo de zero, com isso podemos perceber que a condutância global é independente do tamanho da rede quadrada L em 2 dimensões. O valor de G_g na figura 23 é 0.2721 ± 0.0023 e para a figura 24, $G_g = 0.09055 \pm 0.0009$.

6 CONCLUSÃO

Realizamos simulações de um modelo computacional de rede de fusíveis através de uma rede quadrada com tamanho $L \times L$ e determinamos as diferenças de potenciais em cada nó por meio da lei de Kirchhoff, dessa forma queimamos os resistores de acordo com a maior potência dissipada, com uma presença de uma corrente global I_g , para assim representar o material sendo rompido. Determinamos a dimensão fractal do *cluster* fraturado para diferentes dimensões L da rede quadrada com os valores de $L=8,16,64,128$ e 256 e obtemos um valor de aproximadamente 1.1648 e analisamos a condutância global do sistema. Nossos resultados, mostram que a condutância independe do tamanho da rede de resistores, isto é, ela é sempre constante, pois a condutância ela depende do comprimento da passagem de corrente elétrica e da área de seção transversal, para um caso em 3D, neste trabalho foi aplicado o caso em 2D em uma rede $L \times L$, então a condutância é constante com o tamanho da rede, $G \sim L^0$. Dessa forma, nosso modelo torna-se uma ótima alternativa para simular o processo de morfologia de fraturas, de modo a ser útil para o cálculo de outros aglomerados fraturados importantes tanto do ponto de vista científico, quanto do ponto de vista tecnológico.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDRE, E. **Espiraís na natureza**. 2011. Disponível em: <<https://www.prof-edigleyalexandre.com/2011/10/espiraís-na-natureza-imagens.html>>. Acesso em: 06 nov. 2019.
- BEN-AVRAHAM, D.; HAVLIN, S. **Diffusion and reactions in fractals and disordered systems**. [S.l.: s.n.], 2000. 8 p.
- CALLISTER, W. **Ciência e Engenharia dos materiais**. [S.l.: s.n.], 2005. 131 p.
- CALLISTER, W. **Ciência e Engenharia dos materiais**. [S.l.: s.n.], 2005. 129 p.
- CALLISTER, W. **Ciência e Engenharia dos materiais**. [S.l.: s.n.], 2005. 89 p.
- CALLISTER, W. **Ciência e Engenharia dos materiais**. [S.l.: s.n.], 2005. 79 p.
- CALLISTER, W. **Ciência e Engenharia dos materiais**. [S.l.: s.n.], 2005. 79 p.
- CALLISTER, W. **Ciência e Engenharia dos materiais**. [S.l.: s.n.], 2005. 81 p.
- CALLISTER, W. **Ciência e Engenharia dos materiais**. [S.l.: s.n.], 2005. 89 p.
- CHOVANEC, F. Cantor sets. p. 1, 2010.
- FEDER, J. **Fractals**. [S.l.: s.n.], 1988. 16 p.
- HECK, N. C. **Fratura frágil e fratura dúctil**. 2014. Disponível em: <<http://www.ct.ufrgs.br/ntcm/graduacao/ENG06638/IEM-Texto-5.pdf>>. Acesso em: 24 set. 2019.
- HERRMANN, H. J. Statistical models for the fracture of disordered media. p. 2, 1990.
- KOBAYASHI, H.; ONOUE, H. Brittle fracture of liberty ships. p. 2, 1943.
- LIMA, W. F. **A importância da engenharia de materiais**. 2014. Disponível em: <<http://www.icb.ufrj.br/Revista-Bio-ICB/Materias-Anteriores/A-importancia-da-Engenharia-de-Materiais-212.html>>. Acesso em: 15 set. 2019.
- MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. [S.l.: s.n.], 2000.
- MILFONT, G. **Falhas por fadiga**. 2014. Disponível em: <<http://inspecaoequipto.blogspot.com/2014/02/falha-por-fadiga.html>>. Acesso em: 23 set. 2019.
- MOREIRA, A.; OLIVEIRA, C.; HANSEN, A.; ARAÚJO, N.; HERRMANN, H.; JR, J. A. Fracturing highly disordered materials. Physical review letters, 2012.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1986–1992. 77 p.
- SENA, W. R. D. Solução numérica de sistemas de equações lineares. p. 16, 2014.
- SILVA, E. **Morador registra raio atingindo casa em São José dos Campos; veja vídeo**. 2014. Disponível em: <<http://g1.globo.com/sp/vale-do-paraiba-regiao/noticia/2014/01/morador-registra-raio-atingindo-casa-em-sao-jose-dos-campos-veja-video.html>>. Acesso em: 06 nov. 2019.