UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARIA ELISA DE CASTRO GUIMARÃES

INTRODUZINDO OS CONCEITOS DE LIMITE, DERIVADA E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA
2019

MARIA ELISA DE CASTRO GUIMARÃES

INTRODUZINDO OS CONCEITOS DE LIMITE, DERIVADA E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G979i Guimarães, Maria Elisa de Castro.
Introduzindo os conceitos de limite, derivada e integral no ensino médio / Maria Elisa de Castro Guimarães. – 2019.
105 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Ensino Médio. 3. Área. I. Título.

CDD 510

MARIA ELISA DE CASTRO GUIMARÃES

INTRODUZINDO OS CONCEITOS DE LIMITE, DERIVADA E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 16 de Agosto de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Ederson Melo Braga, pela gentileza com que aceitou o convite para orientar este trabalho, pelo prazer em tê-lo como orientador, pela orientação com propriedade, pelas críticas construtivas, pelo exemplo de comprometimento, dedicação e profissionalismo e, principalmente, pela confiança em mim depositada.

Aos Professores José Valter Lopes Nunes, da Universidade Federal do Ceará, e Eurípedes Carvalho da Silva, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, pelas valiosas sugestões e contribuições para a realização deste trabalho.

A todo o corpo docente do PROFMAT, pela qualidade que imprimiram ao curso.

Aos meus colegas do PROFMAT, pelo sentimento mútuo de camaradagem que permeou nosso curso e pela companhia salutar nessa caminhada coletiva.

A meus chefes, pelo apoio recebido para que pudesse realizar esse curso.

Aos meus colegas de trabalho, pelas substituições eventuais e pelas palavras de encorajamento.

Às Professoras Hildenize Andrade Laurindo e Angela de Alencar Carvalho Araújo, do Colégio Militar de Fortaleza, estimadas colegas de trabalho, pela gentileza e pela forma prestativa com que se dispuseram a me ajudar com a revisão do texto e do *abstract*.

A meu pai e minha mãe, pelo incentivo aos estudos e por sempre regozijarem-se com minhas conquistas.

A meu filho Jorge, razão da minha existência, pela sua simples presença tornar o fardo mais leve e pela forma como lidou com os momentos de ausência da “mamãe” durante o período de realização desse curso.

Às amigas e aos amigos, pelo carinho incondicional e, sobretudo, pelo aconchego emocional.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a concretização deste trabalho: MUITO OBRIGADA!

RESUMO

O presente trabalho tem por escopo apresentar uma proposta de como introduzir, no Ensino Médio, os conceitos fundamentais do Cálculo de limite, derivada e integral. Diante do preconizado pela Base Nacional Comum Curricular - Etapa Ensino Médio para o ensino da Matemática, o estudo do Cálculo nesse contexto revela-se uma ferramenta conveniente para a formação do jovem. Para atingir tal objetivo, a definição de cada um desses conceitos é enunciada, conforme estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Em seguida, exibem-se sugestões de abordagens, contidas em dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, de como introduzir noções básicas desses conceitos no ensino médio. Posteriormente, apresentam-se propostas para a introdução de cada conceito nesse segmento. As propostas apresentadas baseiam-se em abordagens que exigem apenas conhecimentos que já são familiares ao aluno de ensino médio e que buscam atingir todo aluno que se encontra nesse nível escolar, com exceção da proposta de como introduzir o conceito de integral. Por se tratar de uma abordagem um pouco mais sofisticada, esta volta-se para alunos com um reconhecido grau de vivência e de amadurecimento com a argumentação matemática. Finalmente, aprofunda-se a discussão acerca do cálculo de áreas, mostrando que não é possível calcular a área de todo subconjunto do plano, considerando a noção intuitiva sobre a área de uma região.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Ensino Médio. Limite. Derivada. Integral. Área.

ABSTRACT

The scope of the present paper is to present a proposal on how to introduce each of the fundamental concepts of Calculus of limit, derivative and integral in High School. Based on the recommendations of the legislation to regulate the commom basic national curriculum (Base Nacional Comum Curricular in Portuguese) for the teaching of Mathematics in High School, the study of Calculus in this context proves to be a convenient tool for school education. To accomplish this objective, we enunciate the definition of each of these concepts as studied in the courses of Differential and Integral Calculus. Afterwards, we present, from dissertations of the master's PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional in Portuguese), some suggestions of approaches on how to introduce these basic concepts in High School. Subsequently, we present some proposals for introducing each of these concepts in this educational level. The proposals presented were based on approaches that only require knowledge that is already familiar to High School students and that seeks to reach every student at this level, except for the proposal on how to introduce the concept of integral. Since it was a quite sophisticated approach, it focus on students with a recognized degree of experience and maturity with mathematical argumentation. Finally, we deepen the discussion about the area calculation, showing that it is not possible to calculate the area of every subset of the plane, considering the intuitive notion of the area of a region.

Keywords: Differential and Integral Calculus. High School. Limit. Derivative. Integral. Area.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Valores de $f(x)$ aproximando-se de 2 à esquerda 22
Figura 2 – Valores de $f(x)$ aproximando-se de 2 à direita 22
Figura 3 – Gráfico da função $f(x) = x + 2$ 24
Figura 4 – Ideia intuitiva de limite 26
Figura 5 – Posição (x, em m), em função do tempo (t, em s) 26
Figura 6 – Limite da função $y = x + 2$ quando x tende a 2 28
Figura 7 – Limite da função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ quando x tende a 2 29
Figura 8 – Definição de limite 29
Figura 9 – Ponto P pertence ao gráfico da função $f(x)$. 31
Figura 10 – Pontos do tipo $Q_x \in Graf(f)$, com $x_0 \in$ Dom f. 32
Figura 11 – Pontos do tipo $Q_x \in Graf(f)$, com $x_0 \notin$ Dom f. 33
Figura 12 – Pontos $Q_x \in f(x) = x^2 - 5x + 6$. 34
Figura 13 – Pontos $Q_x \in Graf(g)$. 36
Figura 14 – Inclinação da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ 38
Figura 15 – A reta tangente é a posição-limite da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ quando Q tende a P. . 39
Figura 16 – Caso $h > 0$. (Q está à direita de P.) 40
Figura 17 – Reta tangente a $f(x)$ em P e secante a $f(x)$ passando por $\overleftrightarrow{PQ}$ 42
Figura 18 – Comparando reta tangente a $f(x)$ e secantes 42
Figura 19 – Reta t tangente a $y = f(x)$ em P 43
Figura 20 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x + 4$. 46
Figura 21 – Gráco da função $f(x) = x^2$, retas secantes e reta tangente. 47
Figura 22 – Ideia de derivada como declive 48
Figura 23 – Ideia de derivada como limite 49
Figura 24 – Reta que passa pelos pontos P e Q pertencentes ao gráfico da função $f(x)$. . 50
Figura 25 – Comportamento do ponto Q e da reta que passa pelos pontos P e Q, quando x se aproxima de x_0. 51
Figura 26 – $S = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ 55
Figura 27 – Subdivisão da região S em n faixas de igual largura 56
Figura 28 – A área do i-ésimo retângulo é dada por $f(x_i)\Delta x$. 57
Figura 29 – Retângulos aproximantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. 58

Figura 30 – Se $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann $\sum f(x_i^*)\Delta x$ é a soma das áreas de retângulos. 60
Figura 31 – Se $f(x) \geq 0$, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b. . . 60
Figura 32 – $\sum f(x_i^*)\Delta x$ é uma aproximação para a área resultante. 61
Figura 33 – $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área resultante. 61
Figura 34 – Área do triângulo por aproximação 62
Figura 35 – Gráfico da área S 63
Figura 36 – Gráfico da divisão de S em retângulos 64
Figura 37 – Gráfico da divisão de S em n retângulos 64
Figura 38 – Área sob o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau 66
Figura 39 – Área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,4]$ 66
Figura 40 – Soma por excesso e por falta 67
Figura 41 – Subdivisão em n faixas 68
Figura 42 – Subintervalos 68
Figura 43 – Cinemática 69
Figura 44 – Distância percorrida 70
Figura 45 – Velocidade do carro freando 70
Figura 46 – Aproximação por falta e por excesso 71
Figura 47 – Aproximação por falta. Aproximação por excesso. 72
Figura 48 – Área dos retângulos 72
Figura 49 – Área sob o gráfico da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ 73
Figura 50 – Aproximação da área sombreada por soma à esquerda e à direita 74
Figura 51 – Obtenção da área sombreada utilizando a soma média 75
Figura 52 – Qual é o valor da área A? 76
Figura 53 – Qual é o valor da área A, considerando que $f(x) = x^2$? 77
Figura 54 – Calculando o valor da área A, dispondo de apenas um retângulo. 78
Figura 55 – Calculando, por falta, o valor da área A, dispondo de dois retângulos com bases iguais. 79
Figura 56 – Calculando, por excesso, o valor da área A, dispondo de dois retângulos com bases iguais. 80
Figura 57 – Calculando o valor da área A, dispondo de três retângulos com bases iguais. 81
Figura 58 – Calculando o valor da área A, dispondo de n retângulos com bases iguais, sendo $n \geq 4$. 82

SUMÁRIO

1 **INTRODUÇÃO** 11
2 **O ESTUDO DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO** 14
2.1 **O Cálculo e a BNCC - Etapa Nível Médio** 15
3 **INTRODUZINDO O CONCEITO DE LIMITE** 20
3.1 **O conceito de limite no Cálculo** 20
3.2 **O conceito de limite no ensino médio** 21
3.2.1 ***Sugestão 1*** 21
3.2.2 ***Sugestão 2*** 22
3.2.3 ***Sugestão 3*** 24
3.3 **Uma proposta para a introdução do conceito de limite no Ensino Médio** 30
4 **INTRODUZINDO O CONCEITO DE DERIVADA** 38
4.1 **O conceito de derivada no Cálculo** 38
4.1.1 ***Tangentes*** 38
4.1.2 ***Derivadas*** 40
4.2 **O conceito de derivada no ensino médio** 41
4.2.1 ***Sugestão 1*** 41
4.2.2 ***Sugestão 2*** 44
4.2.3 ***Sugestão 3*** 48
4.3 **Uma proposta para a introdução do conceito de derivada no ensino médio** 50
5 **INTRODUZINDO O CONCEITO DE INTEGRAL** 55
5.1 **O conceito de integral no Cálculo** 55
5.2 **O conceito de integral no ensino médio** 61
5.2.1 ***Sugestão 1*** 61
5.2.2 ***Sugestão 2*** 65
5.2.3 ***Sugestão 3*** 73
5.3 **Uma proposta para a introdução do conceito de integral no ensino médio** 75
5.4 **Calculando a área de subconjuntos do plano** 90
6 **CONSIDERAÇÕES FINAIS** 97
REFERÊNCIAS 99
APÊNDICE A – RECORRÊNCIAS 101

APÊNDICE B – BINÔMIO DE NEWTON 103

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral consiste em uma das ferramentas mais utilizadas pelas ciências para solucionar a complexidade de problemas diversos. Dessa forma, o Cálculo é considerado um dos conteúdos matemáticos mais influentes no desenvolvimento científico e tecnológico atual. De fato, Lopes (1999) afirma que

> O Cálculo Diferencial e Integral permite, nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sociais, Ciências da Terra, etc, a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico, humanístico dos diversos países do mundo (p. 125).

Seus principais conceitos, como derivada e integral, por exemplo, são definidos a partir de uma única ideia: o conceito de limite. Limite é, pois, o conceito fundamental do Cálculo.

> "Todo o Cálculo nasce de uma única ideia fundamental: o de usar uma linha reta para servir de aproximação a uma linha que não é tão reta. E dessa ideia surgem outras duas, que são a ideia de integral e derivada. Apesar dos nomes técnicos, são duas ideias muito simples"(MACHADO, 2015).

No entanto, o registro histórico revela-nos que os conceitos modernos de derivada e integral ganharam forma antes do conceito de limite. Na verdade, para que o conceito de limite fosse estabelecido como é hoje, foram necessários muitos séculos. De acordo com Muniz Neto (2015), no século XVII, a ideia do conceito de limite ainda era nebulosa, utilizada de maneira informal e sem o rigor matemático necessário. Nesse período, os estudos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) aproximaram-se muito da ideia de limite, contribuindo sobremaneira para o desenvolvimento do Cálculo propriamente dito, a ponto de a tradição atribuir a esses matemáticos "um papel central na 'invenção' do Cálculo, ainda que o Cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens" (BARON BOS, *apud* MORAES, 2013).

Finalmente, a formalização do conceito de limite ocorreu no século XIX com os matemáticos Augustin Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Theodor Whilhelm Weierstrass (1815-1897).

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$ e $f : I - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que f tem **limite** L, quando x tende a x_0, se, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que

$$x \in I \;\; e \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Naturalmente, a definição moderna de limite evidencia um elevado grau de rigor matemático que se revela inapropriado para boa parte dos alunos do ensino médio. Sendo assim, é interessante que o conceito de limite seja introduzido de forma mais intuitiva, evitando-se formalizações e o rigor que o assunto requer, quando estudado no ensino superior, e buscando-se explorar sua noção geométrica. Dessa forma, foge-se das técnicas usuais de modo a priorizar a compreensão do conceito.

Lopes (1999) destaca que

> em todos os países, educadores e matemáticos buscam encontrar métodos que visem facilitar o entendimento do Cálculo por parte dos estudantes. Muito se tem conseguido, mas é importante dizer que nenhuma fórmula mágica foi encontrada até hoje (p. 126).

Diante desse quadro, uma diversidade de indagações acerca do estudo do Cálculo no ensino médio nos inquietam. É possível estudar Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio? O estudo do Cálculo, nesse segmento, vai ao encontro do previsto, atualmente, na legislação que orienta as práticas pedagógicas no Brasil? Como introduzir o conceito de limite para alunos nessa fase da escolaridade? E os conceitos de derivada e integral?

Nesse sentido, a questão que orienta a presente pesquisa é como podemos trabalhar, de forma acessível ao aluno do ensino médio, os conceitos fundamentais do Cálculo. Interessa-nos também conhecer sugestões contidas em dissertações de alunos do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT[1] de como introduzir esses conceitos na educação básica.

Nosso objetivo principal é, pois, apresentar uma contribuição de como introduzir os conceitos de limite, derivada e integral no ensino médio. Além disso, pretendemos, com o intuito

[1] O **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT** é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional que visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na educação básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. É formado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Disponível em: **<http://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/>**. Acesso em: 24 jun. 2019.

de subsidiar o trabalho docente, discutir se é possível calcular a área de qualquer subconjunto do plano, considerando a noção intuitiva que temos da área de uma região.

O presente estudo justifica-se uma vez que pretende contribuir com uma pesquisa que talvez possa ampliar as discussões acerca da importância do estudo do Cálculo no ensino médio. Sua relevância reside na medida em que mostra, por meio de várias possibilidades, que o Cálculo consiste em um conhecimento acessível ao aluno desse nível de ensino.

De forma complementar, a pesquisa proposta configura-se como relevante, tendo em vista que busca oferecer, de forma eminentemente objetiva, elementos ao professor da educação básica que deseja inserir noções de Cálculo em sua prática.

O texto está organizado em quatro capítulos. O primeiro inicia com uma breve discussão acerca da pertinência do estudo do Cálculo no ensino médio. Em seguida, analisamos se o estudo desse conhecimento específico dialoga com o preconizado pela Base Nacional Comum Curricular - Etapa Ensino Médio no que tange ao ensino da Matemática.

O segundo, o terceiro e o quarto capítulos, que tratam acerca dos conceitos de limite, derivada e integral no ensino médio, respectivamente, estão estruturados de forma semelhante. Inicialmente, enunciamos a definição de cada conceito, conforme estudado nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Posteriormente, exibimos algumas sugestões de abordagens, contidas em dissertações de mestrado de alunos do PROFMAT, de como introduzir cada conceito nessa fase da escolaridade. Finalmente, a última parte do capítulo volta-se para a apresentação de uma proposta para a introdução de cada conceito no ensino médio, por meio da exibição de um método que aplicamos para funções simples, isto é, funções cujos gráficos, em sua maioria, são curvas suaves.

O quarto capítulo, por sua vez, encerra aprofundando a discussão do cálculo de áreas, discutindo se é possível calcular a área de qualquer subconjunto do plano, considerando a noção intuitiva que temos da área de uma região.

2 O ESTUDO DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Nos últimos anos, o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio tem se constituído em objeto de pesquisa de concludentes do PROFMAT. Os trabalhos desenvolvidos nessa linha apontam, em sua maioria, no sentido de incluir esse conhecimento específico nessa fase da escolaridade.

Não se trata, contudo, de introduzir os conceitos de Cálculo da forma como são trabalhados na educação superior, mas sim noções básicas de seus conceitos fundamentais. Nessa perspectiva, Junior (2014) afirma que

> Não propomos inserir Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio em sua completude e sim ambientar os estudantes a interagirem de modo dinâmico com ideias que têm o intuito de desenvolver aptidões para uma melhor compreensão dos conceitos abordados no estudo dos limites, derivadas e integral. Propomos um estudo livre de formalizações e muito mais prático, algo que fuja das técnicas e priorize a reflexão dos conceitos por parte dos alunos, familiarizando-os com novas simbologias e que desperte a curiosidade nas inúmeras aplicações dessa disciplina (p. 2).

Ribeiro (2018), Rocha (2018), Lima (2017), Costa (2016) e Machado (2016) ilustram esse rol de pesquisas acima mencionado. Não obstante apresentarem enfoques diferenciados, todos convergem para uma posição a favor da introdução dos conceitos de limite, derivada e integral nesse nível escolar.

Autores como Rezende (2003) e Ávila (1991) também defendem essa proposta. Segundo Rezende,

> É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O Cálculo é, metaforicamente falando, a espinha dorsal do conhecimento matemático (2003, p. 13).

Ávila, por sua vez, faz uma análise que, mesmo quase trinta anos depois, ainda nos parece bastante pertinente.

> Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa (1991).

Machado (2015), ao comentar acerca do desempenho insatisfatório de alunos de diferentes universidades na disciplina introdutória de Cálculo Diferencial e Integral, afirma que “o melhor jeito de corrigir esse problema é justamente no Ensino Médio, onde o estudante conheceria as ideias mais importantes do cálculo por meio tão somente de funções simples, especialmente as funções polinomiais.”

André (2008, *apud* REZENDE, 2003) é outro especialista que enfatiza a importância de estudar os conceitos fundamentais do Cálculo no ensino médio.

> Ao contrário do que se pensa em geral, pode-se afirmar que parte significativa dos problemas de aprendizagem “do atual” ensino de Cálculo está “fora” dele e é “anterior” inclusive ao seu tempo de execução. Não se trata apenas da tão propalada “falta de base” dos estudantes, como afirma a grande maioria dos nossos colegas professores. [...] Assim, ao invés de se fazer menção a uma “falta de base” dos estudantes, o que se precisa fazer, de fato, é estabelecer os conceitos básicos e necessários para aprender as ideias básicas do Cálculo (p. 31).

Convém ressaltar que a produção acadêmica do PROFMAT acerca dessa temática desenvolveu-se, sobretudo, no período de vigência dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)[1]. No entanto, a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - Etapa Ensino Médio, em dezembro de 2018, leva-nos a questionar a pertinência do ensino do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio, com o intuito de dimensionar a real contribuição que pode trazer para a formação dos jovens, diante das finalidades estabelecidas por esse documento para o ensino da Matemática.

2.1 O Cálculo e a BNCC - Etapa Nível Médio

A Base Nacional Comum Curricular consiste em um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica. Trata-se de uma referência para a formulação dos currículos e das propostas pedagógicas das instituições escolares em todo o território nacional.

Desde sua aprovação, em dezembro de 2017, educadores de todo o Brasil têm se debruçado sobre a BNCC com o propósito de compreender sua implementação e avaliar os impactos na educação básica brasileira. A BNCC - Etapa Ensino Médio, por sua vez, aprovada pelo Conselho Nacional de Educação no ano seguinte, também tem provocado o mesmo efeito na comunidade educacional do país, sobretudo por trazer grandes inovações para esse nível escolar.

Na verdade, o estudo comparativo entre a BNCC e os PCNs tem ocupado um espaço relevante nos debates sobre esse novo documento normativo. De forma mais específica, o

[1] Trata-se de um documento orientador das práticas pedagógicas no Brasil, em vigor desde 15 de outubro de 1997.

que está no centro das discussões é a análise das semelhanças e das diferenças, em cada área do conhecimento[2], entre esses dois documentos, com foco principalmente nas mudanças que deverão ser implementadas. Por outro lado, uma vertente que tem sido explorada ainda de forma incipiente é a reflexão acerca das contribuições que a introdução de conhecimentos específicos no ensino médio pode trazer para o jovem, levando em consideração as finalidades constantes na nova legislação.

Por conseguinte, nosso objetivo é apontar elementos presentes na Base que permitam discutir o papel que o Cálculo pode desempenhar na consecução dos objetivos do currículo de Matemática que venha a ser elaborado para essa fase da escolaridade, a partir das orientações emanadas pela BNCC.

O primeiro elemento a ser considerado diz respeito à progressão das aprendizagens essenciais do ensino fundamental para o ensino médio. A BNCC - Etapa Ensino Médio estabelece que, nesse nível escolar,

> na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (2018, p. 471).

Notadamente, a introdução de noções básicas do Cálculo nesse segmento vai ao encontro do preconizado pelo documento no que tange à aquisição de novos conhecimentos que favoreçam a ampliação da capacidade dos alunos de resolver problemas mais complexos. De fato, Ávila (1991) afirma que é possível ensinar a disciplina de Cálculo no ensino médio: "desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos."

No que diz respeito à visão mais integrada da Matemática, sabemos que o cotidiano escolar dos alunos gira em torno de diferentes disciplinas que são apresentadas de maneira que evidenciam enfoques ainda pouco articulados entre si, tendo em vista que a organização da escola é marcadamente disciplinar. Esse caráter fragmentado do currículo escolar contrapõe-se ao papel integrador que o Cálculo desempenhou no desenvolvimento científico-tecnológico. Na verdade, sua natureza eminentemente interdisciplinar confunde-se com sua própria origem.

---

[2] A BNCC - Etapa Ensino Médio estabelece quatro áreas do conhecimento, a saber: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

> O espaço ocupado pelo Cálculo na expressão matemática de tantas descobertas científicas e inovações tecnológicas nos últimos três séculos, em diferentes áreas como a Física, a Química e a Economia, mostra seu papel integrador dentro das ciências exatas. Mais do que isso, o Cálculo representa uma parte significativa do próprio desenvolvimento do método científico moderno (ORFALI, 2018, p. 41).

Outro aspecto relevante, segundo a Base, é que o ensino médio deve, por meio da articulação entre diferentes áreas do conhecimento, possibilitar ao estudante *compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas.*

De acordo com Ávila (1991),

> o Cálculo vem desempenhando um papel de grande importância em todo desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo do ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Ainda no que concerne ao papel do Cálculo no desenvolvimento científico a partir do século XVII, Kleiner (*apud* ORFALI, 2017) faz uma descrição bastante representativa:

> A invenção (descoberta?) do cálculo é uma das grandes realizações intelectuais da civilização. Por três séculos, o Cálculo tem servido como a principal ferramenta quantitativa para a investigação de problemas científicos. Ele permitiu expressar de forma precisa (matemática) conceitos fundamentais como movimento, continuidade, variabilidade, e o infinito (em alguns de seus aspectos) - noções que foram base para muitas especulações científicas e filosóficas desde os tempos antigos. A física e a tecnologia moderna seriam impossíveis sem o cálculo. As equações mais importantes da mecânica, da astronomia e das ciências físicas em geral são equações diferenciais ou integrais - produtos do cálculo do século XVII (p. 40).

Por essa razão, quando pensamos na *compreensão e utilização dos conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico* como uma das finalidades do ensino médio no Brasil, parece-nos contraditória a opção de o Cálculo não constar no programa desse segmento. Perante a função que exerceu na descrição de fenômenos científico-tecnológicos, trabalhar seus principais conceitos, mesmo em um nível bastante introdutório, contribuiria muito para a compreensão desses fenômenos.

De forma complementar, convém, ainda, resgatar a discussão em torno de recentes mudanças na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), por meio da Lei nº 13.415/2017. Essas mudanças estabeleceram que o ensino médio será composto pela BNCC e por itinerários formativos[3], que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, dentre eles a Matemática e suas Tecnologias.

Esses itinerários formativos podem ser estruturados com foco em uma área do conhecimento, na formação técnica e profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas. Na área de Matemática e suas Tecnologias, eles devem contribuir para o

> aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (BNCC, 2018, p. 477).

Em que pese a BNCC não incluir formalmente o Cálculo, não citando explicitamente seus conceitos fundamentais nas competências específicas e habilidades da Matemática e suas Tecnologias, é imperioso destacar que o documento admite a possibilidade da aplicação de *diferentes conceitos matemáticos* que permitam diversos estudos. O Cálculo, notadamente, encerra diferentes conceitos que podem enriquecer os itinerários formativos dessa área do conhecimento.

Podemos, também, vislumbrar a presença dos conceitos fundamentais do Cálculo neste extrato da BNCC que versa sobre a finalidade da área de Matemática e suas Tecnologias:

> Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (2018, p. 528).

Com relação à organização curricular, a BNCC aponta várias possibilidades para o ensino da Matemática, sendo uma delas por unidades similares às propostas para o ensino fundamental[4]. Dentre as habilidades elencadas pela Base para a unidade Números e Álgebra, indicamos pelo menos uma em que nos parece bastante razoável o estudo do limite e da derivada como ferramentas para contribuírem para o seu desenvolvimento, a saber:

---

[3] Os itinerários formativos são estratégicos para a flexibilização da organização curricular do Ensino Médio.

[4] Essas unidades podem ser, entre outras, Números e Álgebra, Geometria e Medidas e Probabilidade e Estatística.

> (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Na unidade de Geometria e Medidas, a integral também pode oferecer sua colaboração.

> (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Diante do exposto, entendemos que o estudo de noções de Cálculo no ensino médio não se contrapõe ao preconizado pela legislação vigente no Brasil atualmente. Dessa maneira, acreditamos que, se convenientemente trabalhado, o Cálculo pode contribuir de forma significativa para a formação dos jovens, constituindo-se, portanto, em um desafio possível de ser alcançado.

3 INTRODUZINDO O CONCEITO DE LIMITE

Neste capítulo, nossa intenção é apresentar uma proposta para a introdução do conceito de limite no ensino médio. Antes, primeiramente, trazemos a definição de limite, conforme apresentada nos cursos de Cálculo, seguida por sugestões contidas nas dissertações de alunos do PROFMAT de como introduzir esse conceito na educação básica.

3.1 O conceito de limite no Cálculo

Em seu livro de Cálculo, Stewart (2014, p. 81), após discutir o problema de encontrar a tangente de uma curva e a velocidade de um objeto, apresenta, inicialmente, a seguinte definição de limite:

Definição. *Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número $\underline{a}$. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha $\underline{a}$, exceto possivelmente no próprio $\underline{a}$.) Então escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos

"o limite de $f(x)$, quando x tende a $\underline{a}$, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de $\underline{a}$ (por ambos os lados de $\underline{a}$), mas não igual a $\underline{a}$.

Segundo ressalta o autor, os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a $\underline{a}$. Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número $\underline{a}$ (por qualquer lado de $\underline{a}$), mas $x \neq \underline{a}$.

Stewart ainda observa que a frase "mas $x \neq \underline{a}$", na definição de limite, indica que, para se determinar o limite de $f(x)$, quando x tende a $\underline{a}$, não se considera $x = \underline{a}$, pois $f(x)$ não precisa estar definida para $x = \underline{a}$. O importante é como f está definida próximo de $\underline{a}$.

Posteriormente, o autor destaca que a definição intuitiva de limite, conforme apresentada anteriormente, revela-se inadequada para alguns propósitos, tendo em vista que frases como

"x suficientemente próximo de $\underline{a}$" e "$f(x)$ arbitrariamente próximos de L" são vagas. Sendo assim, Stewart aponta a necessidade de uma definição mais precisa:

Definição. *Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número $\underline{a}$, exceto possivelmente no próprio $\underline{a}$. Então dizemos que existe o* ***limite de $f(x)$ quando x tende a $\underline{a}$ e este é L****, e escrevemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$se\ 0 < |x-a| < \delta\ \text{então}\ |f(x)-L| < \varepsilon.$$

Uma vez que $|x-a|$ é a distância de x a $\underline{a}$ e $|f(x)-L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa, em palavras, da seguinte forma:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a $\underline{a}$ suficientemente pequena (mas não igual a 0).

Ou, de forma alternativa,

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos, tornando-se x suficientemente próximo de $\underline{a}$ (mas não igual a $\underline{a}$).

3.2 O conceito de limite no ensino médio

A seguir, encontram-se sinteticamente descritas algumas sugestões de abordagens de como introduzir o conceito de limite no ensino médio.

3.2.1 Sugestão 1

Machado (2016, p. 33) propõe introduzir a noção de limite a partir do cálculo do valor da função $f(x) = 2x+3$ para $x = 2$. Ora, $f(2) = 7$, o que significa que o ponto $(2,7)$ pertence ao gráfico de $f(x)$. O autor sugere, em seguida, estudar os valores da função f quando x assume valores próximos de 2, porém diferentes de 2 (ver Figura 1 e Figura 2).

A observação desses quadros permite concluir que, quanto mais o valor de x se aproxima de 2, mais a imagem $f(x)$ se aproxima de 7.

Figura 1 – Valores de $f(x)$ aproximando-se de 2 à esquerda

x	1,5	1,8	1,9	1,99	1,999
$f(x)$	6	6,6	6,8	6,98	6,998

Fonte: Elaborada pela autora, com base no Quadro 3.1, de Machado (2016, p. 34).

Figura 2 – Valores de $f(x)$ aproximando-se de 2 à direita

x	2,5	2,25	2,1	2,01	2,001
$f(x)$	8	7,5	7,2	7,02	7,002

Fonte: Elaborada pela autora, com base no Quadro 3.2, de Machado (2016, p. 34).

O autor destaca que, ainda que não se soubesse que $f(2) = 7$, seria possível descobrir um provável resultado utilizando um número suficientemente próximo de 2. Ressalta também que é fácil ver que f tende a 7 quando x se aproxima de 2 e conclui que isso é o que significa limite.

O autor salienta que, em linguagem matemática, esse exemplo fica escrito da forma: $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ e lê-se: "O limite de $f(x)$ quando x tende a 2 é igual a 7".

Em seguida, o autor faz um estudo análogo, porém com a função $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$. Seu objetivo é levar os alunos a perceberem que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$, embora a função não esteja definida para $x = 3$.

Cabe ainda salientar que, em ambos os exemplos, Machado apresenta o gráfico das funções.

3.2.2 Sugestão 2

Ribeiro (2018, p. 85) sugere uma abordagem que parte, inicialmente, de exemplos para introduzir limite de uma perspectiva menos formal. Vale ressaltar que nos limitamos a exibir e a discutir apenas exemplos que contemplem especificamente uma abordagem introdutória do conceito de limite.

Exemplo 1

Considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [1]*, com termo geral dado por* $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ *,* $n \in \mathbb{N}$*.*

[1] Para maiores detalhes, ver RIBEIRO, H. C. **Cálculo:** uso de recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no Ensino Médio. 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado em Prossional em Matemática

Discussão

A autora observa que, à medida que n cresce indefinidamente, o valor de $\frac{1}{2^n}$ fica cada vez menor, mais próximo de zero, e conclui que, conforme n aumenta, o valor da sequência tende a zero. Ela destaca que, matematicamente, isso significa dizer que, quando n tende ao infinito, o limite dessa sequência é igual a zero, isto é, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Exemplo 2

Considere a sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [2]*, com termo geral dado por* $b_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1), n \in \mathbb{N}$.

Discussão

Nesse exemplo, Ribeiro inicia considerando que n cresce ilimitadamente. O objetivo da autora é alertar os alunos de que, por vezes, a intuição em relação a aproximações e à percepção do infinito pode conduzir a resultados equivocados. Nesse caso, em particular, se o valor de b_n não for explorado numericamente, é possível que não se perceba que esta sequência converge para o valor de logaritmo de 2.

Exemplo 3

Considere o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x + 2$ (ver Figura 3).

Discussão

A autora toma valores para x que se aproximam de 3 (sem atingi-lo), pela esquerda e pela direita, e observa, por meio de uma tabela, que, à medida que x se aproxima de 3, $f(x)$ se aproxima de 5. Sua conclusão é que o limite dessa função, quando x tende a 3, é igual a 5.

Uma vez trabalhados esses exemplos em sala, Ribeiro propõe a utilização do *software* Geogebra [3] para explorar a definição formal de limite. A autora salienta que essa prática deve ser conduzida de forma a permitir ao aluno analisar e compreender o porquê da solução apresentada pelo computador e não consista apenas em uma fonte para a resposta procurada.

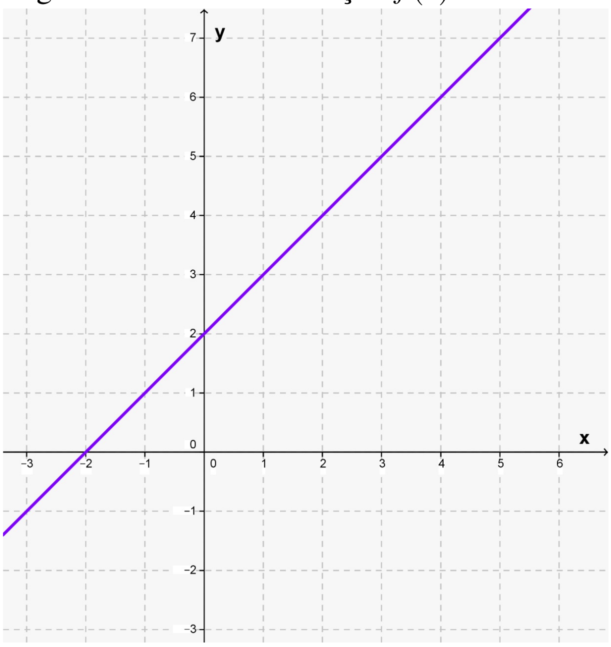
---

em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

[2] Para maiores detalhes, ver RIBEIRO, H. C. **Cálculo:** uso de recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no Ensino Médio. 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado em Prossional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

[3] O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. Disponível em: <**https://www.geogebra.org/about**>. Acesso em: 2 out. 2019.

Figura 3 – Gráfico da função $f(x) = x + 2$



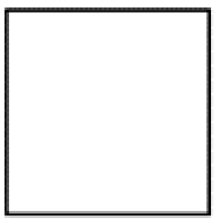
Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 59 de Ribeiro (2018, p. 86).

3.2.3 Sugestão 3

A pesquisa desenvolvida por Costa (2016, p. 26) também se utiliza da exemplificação para motivar a ideia intuitiva de limite. Cabe salientar que, à semelhança do discutido na Sugestão 2, limitamo-nos a exibir e a discutir os exemplos voltados apenas para uma abordagem introdutória do conceito de limite.

Exemplo 1

Consideremos uma figura de forma quadrada e de área igual a 1.



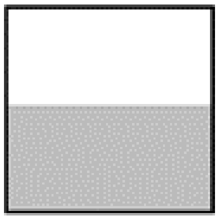
Vamos desenvolver as seguintes etapas:

a) preencher metade da figura;

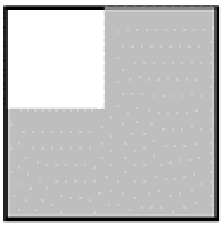
b) preencher metade do que restou em branco;

c) preencher, novamente, metade do que restou em branco;

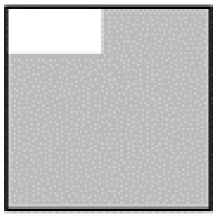
e continuar esse processo sucessiva e indefinidamente.



$$\textit{Área preenchida} = \frac{1}{2}$$



$$\textit{Área preenchida} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\textit{Área preenchida} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

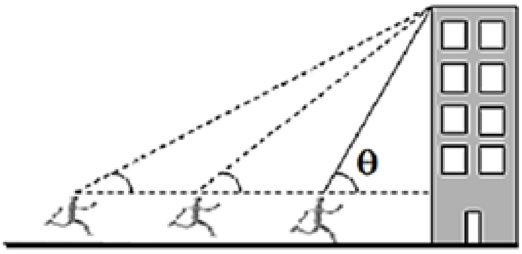
Discussão

O autor observa que a área hachurada vai preenchendo quase todo o quadrado inicial e, portanto, a medida da área vai se aproximando de 1 ou tendendo a 1. Nesse caso, afirma que o limite desse processo, quando o número de partes preenchidas tende a um valor maior do que qualquer valor imaginável, é preencher a figura toda, ou seja, é obter uma área preenchida igual a 1. Por fim, conclui que, quando dizemos que a área preenchida tende a 1, significa que ela se aproxima de 1, sem, no entanto, assumir esse valor.

Exemplo 2

Considere uma pessoa que observa o ângulo de elevação do topo de um prédio, do qual ela se aproxima, em uma mesma direção, conforme a figura.

Figura 4 – Ideia intuitiva de limite



Fonte: Costa, 2016.

Discussão

Costa observa que, quando a distância *d* dessa pessoa em relação ao prédio diminui cada vez mais, aproximando-se de zero, o ângulo θ se aproxima de 90º. A pessoa poderá aproximar-se o quanto quiser do prédio, porém não pode ultrapassar sua parede. Assim, o prédio é o limite. Logo, quanto menor a distância, maior é o ângulo de elevação. Assim, podemos dizer que "o ângulo de elevação θ tendeu ao limite 90º quando a distância *d* se aproximou de zero".

Exemplo 3

Um carro em movimento progressivo passa pela origem da trajetória em t = 0 s, com uma velocidade escalar constante de 6 m/s. A tabela (ver Figura 5) *demonstra as posições do objeto ao longo do tempo.*

Figura 5 – Posição (x, em *m*), em função do tempo (t, em *s*)

t (s)	x (m)
0	0
1	6
2	12
3	18
4	24
5	30

Fonte: Costa, 2016.

Discussão

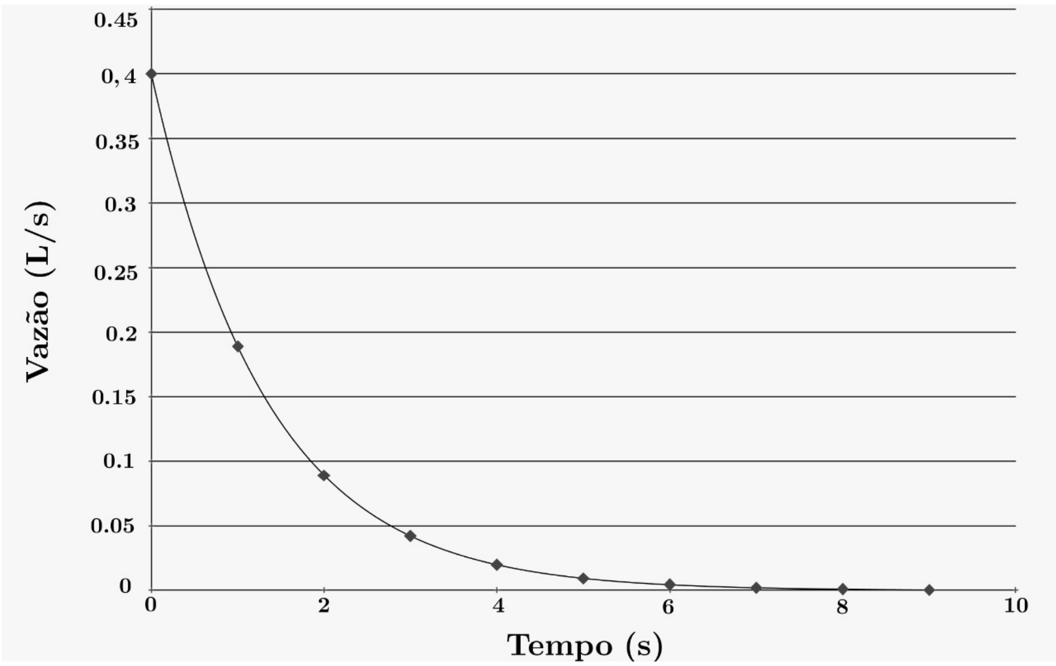
O conceito de limite, nesse exemplo, é explorado por meio de um gráfico que representa as posições do carro ao longo do tempo. A proposta é que, a partir de questionamentos como "O que acontece com os valores de posição, quando o tempo se aproxima de 4 *s*?", explore-se o conceito de limite.

No que diz respeito ao questionamento acima, o autor observa que os valores de posição para um tempo próximo de 4 s são próximos de 24 m e, assim, quanto mais próximo de 4 s for o tempo, mais próximo ele estará da posição 24 m.

Assim, conclui que $\lim_{t \to 4} x(t) = 24$.

Exemplo 4

Tendo um tanque cheio de água, ao abrir uma tampa no fundo do reservatório, a água iniciará o escoamento. Supondo que sua taxa inicial de vazão seja de 4,0 L/s, o que acontece com esta vazão ao longo do tempo?



Discussão

Nesse exemplo, Costa observa que a vazão da água diminui, pois a vazão depende diretamente da pressão exercida pela altura da coluna de água do tanque e, com o escoamento da água, a altura dessa coluna diminui. Por meio do gráfico, verificamos que a taxa de vazão (V, em L/s) diminui em função do tempo (t, em s) até que todo o líquido contido no tanque se tenha esvaído.

Exemplo 5

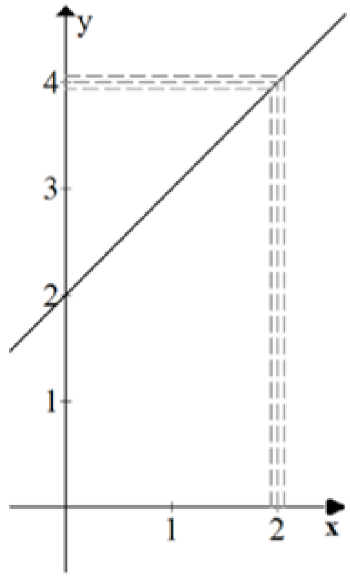
Considere o gráfico da função $y = x + 2$.

Discussão

Por meio da análise do gráfico (ver Figura 6), o autor observa quais são os valores que y assume quando x está próximo de 2 e conclui que y assume valores próximos de 4. Afirma, assim, que y tende a 4 quando x tende a 2 ou que o limite da função y é 4 quando x tende a 2, e escreve simbolicamente com a notação $\lim\limits_{x \to 2} y = 4$.

Figura 6 – Limite da função $y = x + 2$ quando x tende a 2

x	$y = x + 2$
1,7	3,7
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
2	4
2,001	4,001
2,01	4,01
2,1	4,1
2,3	4,3



Fonte: Costa, 2016.

Exemplo 6
Considere a função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Discussão

O objetivo desse exemplo é mostrar um fato mais interessante quando se tenta determinar o limite de y para x tendendo a 2.

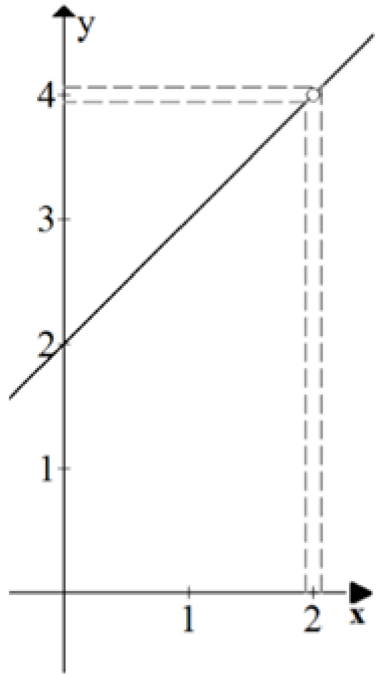
Costa ressalta que a função considerada não é definida para $x = 2$. Logo, não se pode calcular o valor de y nesse ponto. Entretanto, o gráfico da função (ver Figura 7) permite-nos observar que o valor de y, quando x se aproxima de 2, também se aproxima de 4, como no exemplo anterior, pois as duas funções assumem os mesmos valores nos mesmos pontos, exceto no ponto $x = 2$.

De fato, a função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ pode ser simplificada e escrita na forma $y = x + 2$, dando origem à função $y = x + 2$, $x \neq 2$, que é equivalente à função dada.

Nesse caso, tem-se igualmente $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} y = 4$.

Figura 7 – Limite da função $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ quando x tende a 2

x	$y = \frac{x^2-4}{x-2}$
1,997	3,997
1,998	3,998
1,999	3,999
2	-
2,001	4,001
2,002	4,002
2,003	4,003

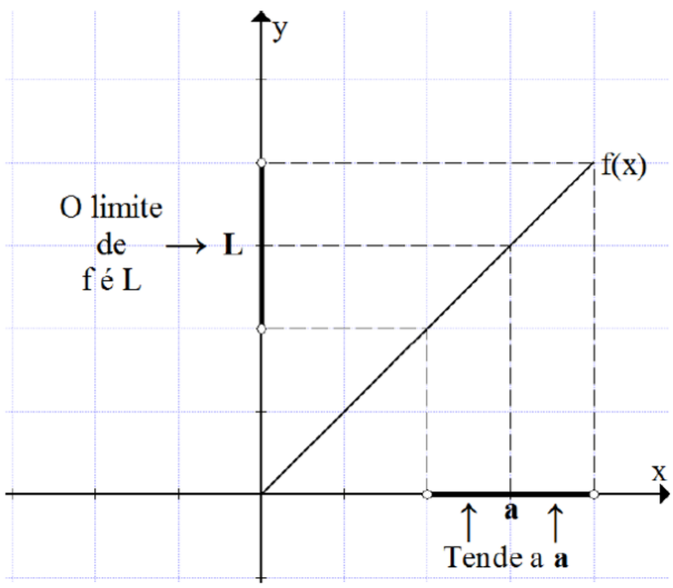


Fonte: Costa, 2016.

Uma vez explorado o conceito de limite por meio de exemplos, o autor apresenta a definição de limite proposta por Giovanni (1992).

Considere o gráfico da função $f(x)$ (ver Figura 8).

Figura 8 – Definição de limite



Fonte: Costa, 2016.

Dizemos que o limite da função $f(x)$*, quando x tende a* a *é igual ao número real L* *se, e somente se, os números reais $f(x)$, para os infinitos valores de x, permanecerem próximos de L, sempre que x estiver muito próximo de* a.

Indica-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Diante das abordagens que foram apresentadas, todas passíveis de vantagens e desvantagens, a curiosidade acerca de outras possibilidades nos inquieta. Nesse sentido, apresentamos, a seguir, uma proposta de como introduzir o conceito de limite no ensino médio.

3.3 Uma proposta para a introdução do conceito de limite no Ensino Médio

Iniciamos com uma indagação simples e objetiva, cuja resposta sabemos que não é trivial:

"O que é limite?"

Naturalmente, o aluno de ensino médio tem uma noção do que vem a ser limite, porém suas experiências prévias remetem-no a outros contextos que não o matemático. Dessa forma, na tentativa de definir limite, ele poderá apresentar uma diversidade de respostas, que, certamente, se basearão em outros campos do conhecimento humano e que se aproximarão de alguma das seguintes definições constantes no dicionário[4]:

1 linha que determina uma extensão espacial ou que separa duas extensões; linha de demarcação; raia
2 momento, espaço de tempo que determina uma duração ou que separa duas durações
3 *fig.* o que determina, marca os contornos de um domínio abstrato ou separa dois desses domínios
4 *fig.* linha que marca o fim de uma extensão (espacial ou temporal); confim, termo
5 *fig.* o que não pode ou não deve ser ultrapassado
6 *fig.* falta de perfeição; insuficiência, defeito

Apresentamos, então, uma resposta, que será trabalhada em seguida:

"Limite é o resultado de um processo de investigação baseado em teoria das funções."

[4] Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, 2001.

Em que pese o aluno ter certo conhecimento acerca de função desde o 9º ano do ensino fundamental [5], tal resposta, em um primeiro momento, poderá causar estranheza para os alunos, haja vista que podem julgar que não se aproxima do conceito que possuem do termo.

Diante do exposto, somos impelidos a levar o aluno a compreender essa "definição", buscando explicitar em qual sentido esse processo investigativo se dá. Nesse momento, recorremos à argumentação matemática.

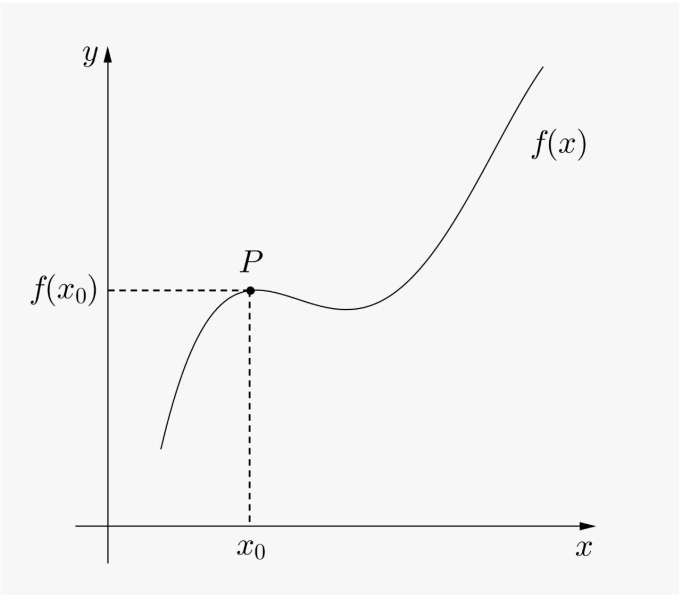
Antes, porém, é imperioso salientar que o aluno de ensino médio está familiarizado com todos os conceitos matemáticos que serão aqui abordados, o que ratifica a viabilidade do estudo do Cálculo nesse nível escolar, se convenientemente trabalhado.

Sejam f uma função real e x_0 um número real. Consideremos duas situações:

(1) x_0 pertence ao domínio da função f ($x_0 \in \text{Dom } f$).

Dessa forma, podemos escolher um ponto $P = (x_0, f(x_0))$, o que equivale a dizer que o ponto P pertence ao gráfico da função f.

Figura 9 – Ponto P pertence ao gráfico da função $f(x)$.

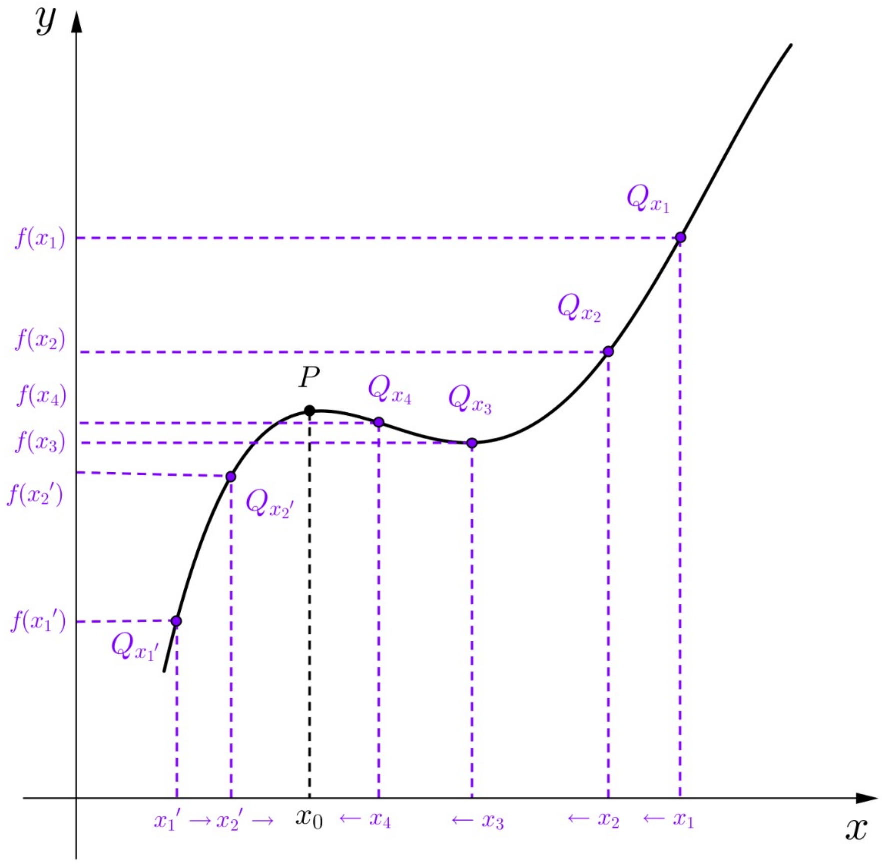


Fonte: Elaborada pela autora.

Nosso objetivo é investigar o comportamento dos pontos, no plano, da forma $Q_x = (x, f(x))$ (pontos que pertencem ao gráfico de f), quando, na reta, x se aproxima de x_0.

5 No 9º ano do ensino fundamental, o aluno estuda o conceito de função e, em seguida, função afim e função quadrática.

Figura 10 – Pontos do tipo $Q_x \in Graf(f)$, com $x_0 \in$ Dom f.



Fonte: Elaborada pela autora.

(2) x_0 não pertence ao domínio da função f ($x_0 \notin$ Dom f).

Neste caso, o ponto P não pertence ao gráfico da função f e, portanto, o gráfico de f tem um "furo"(ver Figura 11).

Sem perda de generalidade, suponhamos que $x_0 \notin$ Dom f, mas $x \in Dom\ f\ \forall x \neq x_0$. Queremos investigar como Q_x se comporta quando x se aproxima de x_0 (ver Figura 11).

A análise do gráfico permite-nos observar que $f(x)$ se aproxima de um número L quando x se aproxima de x_0. Em outras palavras, isso significa que os pontos $Q_x = (x, f(x))$ se aproximam do ponto (x_0, L).

Neste momento, podemos definir, para o aluno, que

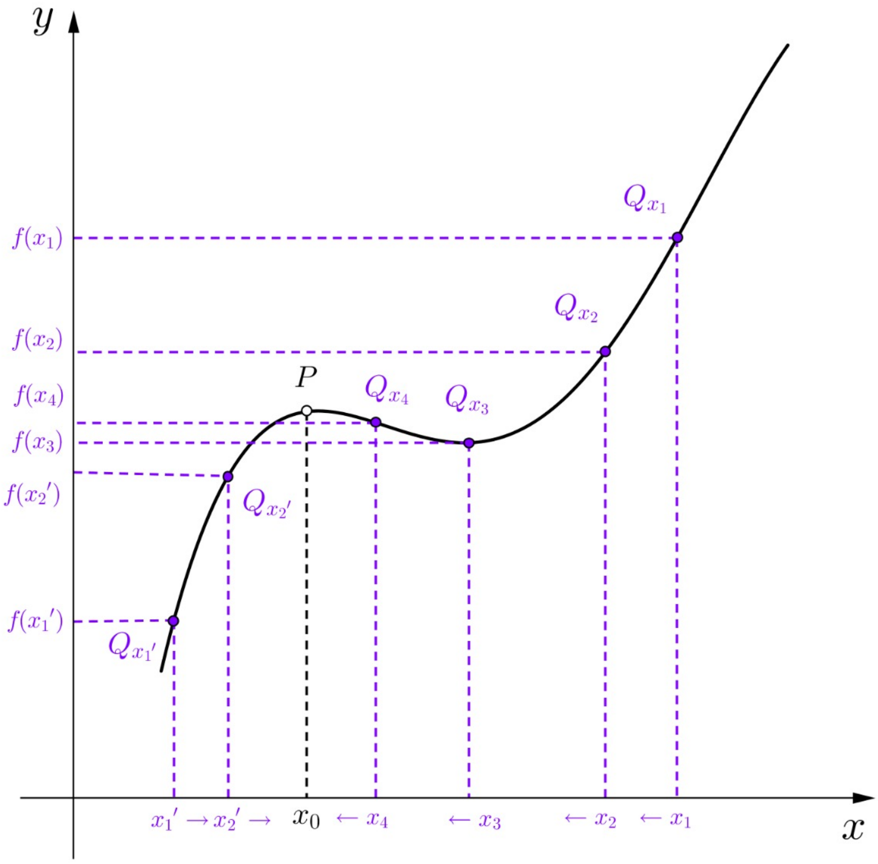
L é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima [6] de x_0

e escrever $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

É importante destacar que, na situação (1), $L = f(x_0)$.

[6] Pode-se mencionar que a terminologia matemática mais utilizada nesse caso é "quando x tende a x_0".

Figura 11 – Pontos do tipo $Q_x \in Graf(f)$, com $x_0 \notin \text{Dom } f$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Uma vez introduzido o conceito de limite, propomos a discussão de alguns exemplos com o intuito de apresentar uma sugestão de um método para calcular o limite de uma função. Por se tratar de uma proposta para ser aplicada com estudantes de ensino médio, limitamo-nos a trabalhar com funções afins, funções quadráticas e funções do tipo $\dfrac{1}{p(x)}$, sendo $p(x)$ uma função polinomial com, no máximo, grau 2, haja vista que consistem em funções mais apropriadas para se trabalhar com alunos desse segmento.

Exemplo 1

Seja a função $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

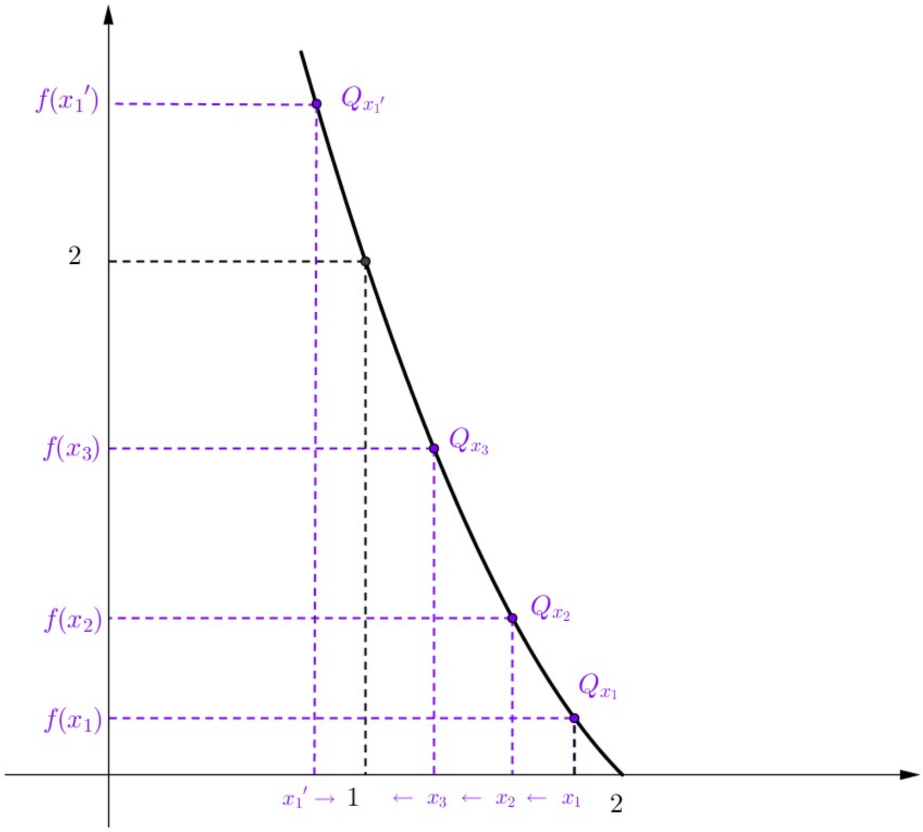
Considere $L = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$. *Determine o valor de L.*

Discussão

Determinar o valor de L significa determinar o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 (ver Figura 12).

Notemos que os pontos $Q_x = (x, f(x)) = (x, x^2 - 5x + 6)$ aproximam-se do ponto

Figura 12 – Pontos $Q_x \in f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Fonte: Elaborada pela autora.

$P = (1, L)$. Logo, quando x se aproxima de 1, temos que $x^2 - 5x + 6$ se aproxima de L. Isso significa dizer que $x^2 - 5x + 6$ assume valores distintos cada vez mais próximos de L à medida que x se aproxima de 1.

Denotemos esses valores por L_x. Como $L_x = x^2 - 5x + 6$, segue que $x^2 - 5x + 6 - L_x = 0$ e, daí, vem que

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24 + 4L_x}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{1 + 4L_x}}{2},$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1 + 4L_x}}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1 + 4L_x}}{2}. \tag{3.1}$$

Pela definição de L_x, temos que $L_x \longrightarrow L$. Assim,

$$\frac{5 + \sqrt{1 + 4L_x}}{2} \longrightarrow \frac{5 + \sqrt{1 + 4L}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{5 - \sqrt{1 + 4L_x}}{2} \longrightarrow \frac{5 - \sqrt{1 + 4L}}{2}$$

e, portanto, de (2.1), obtemos que

$$x \longrightarrow \frac{5 + \sqrt{1 + 4L}}{2} \quad \text{ou} \quad x \longrightarrow \frac{5 - \sqrt{1 + 4L}}{2}. \tag{3.2}$$

Mas, por outro lado, sabemos que

$$x \longrightarrow 1. \tag{3.3}$$

Como x não pode se aproximar de dois valores distintos ao mesmo tempo, concluímos, de (2.2) e (2.3), que

$$\frac{5+\sqrt{1+4L}}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{5-\sqrt{1+4L}}{2} = 1.$$

Temos que:

(i) $\frac{5+\sqrt{1+4L}}{2} = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{1+4L} = -3 \;\Rightarrow\; 1+4L = 9 \;\Rightarrow\; L = 2.$

(ii) $\frac{5-\sqrt{1+4L}}{2} = 1 \;\Rightarrow\; -\sqrt{1+4L} = -3 \;\Rightarrow\; 1+4L = 9 \;\Rightarrow\; L = 2.$

Logo,

$$L = 2,$$

o que mostra que

$$\lim_{x\to 1} x^2 - 5x + 6 = 2.$$

Exemplo 2
Seja a função $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \frac{1}{1+x}$.
Considere $L = \lim_{x\to 1} g(x)$. *Determine o valor de L.*

Discussão

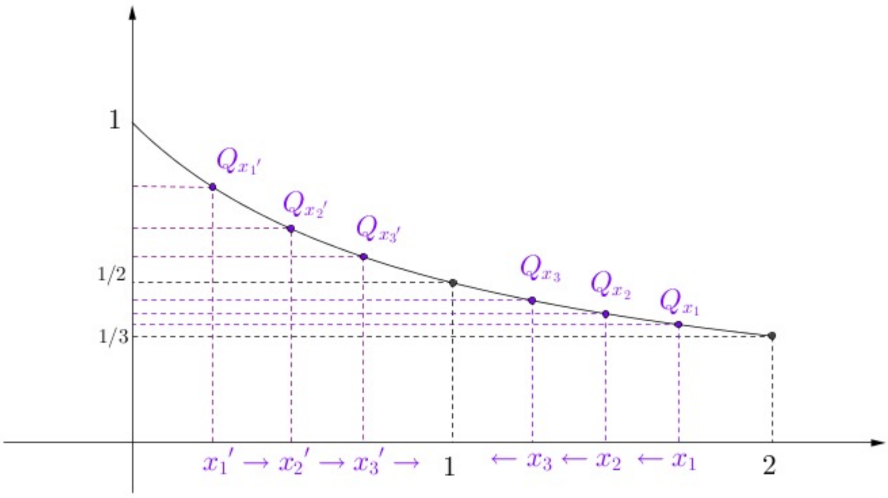
À semelhança do que vimos no exemplo anterior, vamos determinar o valor do qual $g(x)$ se aproxima quando x se aproxima de 1, conforme ilustrado na Figura 13.

Notemos que os pontos $Q_x = (x, g(x)) = \left(x, \frac{1}{1+x}\right)$ aproximam-se do ponto $P = (1, L)$. Logo, quando x se aproxima de 1, temos que $\frac{1}{1+x}$ se aproxima de L. Isso significa dizer que $\frac{1}{1+x}$ assume valores distintos cada vez mais próximos de L à medida que x se aproxima de 1.

Denotemos esses valores por L_x. Como $L_x = \frac{1}{1+x}$, segue que $\frac{1}{L_x} = 1 + x$ e, daí, vem que

$$x = \frac{1}{L_x} - 1. \tag{3.4}$$

Figura 13 – Pontos $Q_x \in Graf(g)$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Pela definição de L_x, temos que $L_x \longrightarrow L$. Assim, $\dfrac{1}{L_x} - 1 \longrightarrow \dfrac{1}{L} - 1$ e, portanto, de (2.4), obtemos que

$$x \longrightarrow \frac{1}{L} - 1. \tag{3.5}$$

Mas, por outro lado, sabemos que

$$x \longrightarrow 1. \tag{3.6}$$

De (2.5) e (2.6), podemos concluir que $\dfrac{1}{L} - 1 = 1$ e, portanto,

$$L = \frac{1}{2},$$

o que mostra que

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

A discussão inicial, por meio da análise do gráfico da função, pode levar o aluno a concluir que, como no Exemplo 1, temos que $L = f(1)$, e, no Exemplo 2, temos que $L = g(1)$, isto é,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \;\; e \;\; \lim_{x \to 1} g(x) = g(1),$$

então esse resultado é geral, ou seja, $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, com $x_0 \in \mathbb{R}$, para toda função.

Mostraremos que essa conclusão é falsa, apresentando um contraexemplo.

Seja h a função definida por

$$\begin{array}{rcl} h:[0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq 1 \\ \dfrac{3}{2}, & \text{se } x = 1, \end{cases} \end{array}$$

onde g(x) é a função definida no Exemplo 2, isto é,

$$\begin{array}{rcl} h:[0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & \text{se } x \neq 1 \\ \dfrac{3}{2}, & \text{se } x = 1. \end{cases} \end{array}$$

Vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) \neq h(1)$.

Discussão

Pelo exemplo anterior, sabemos que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \dfrac{1}{2}$.
Como $h(x) = g(x)\ \forall x \neq 1$, então

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

Mas, pela definição de h, temos que

$$h(1) = \frac{3}{2}. \tag{3.8}$$

Logo, de (2.7) e (2.8), concluímos que

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2} = h(1),$$

como queríamos mostrar.

4 INTRODUZINDO O CONCEITO DE DERIVADA

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta para a introdução do conceito de derivada no ensino médio. Mostraremos, primeiro, contudo, a definição de derivada, de acordo com o estudado nos cursos de Cálculo. E, em seguida, traremos sugestões de abordagens, contidas em dissertações do PROFMAT, de como introduzir esse conceito nessa fase da escolaridade.

4.1 O conceito de derivada no Cálculo

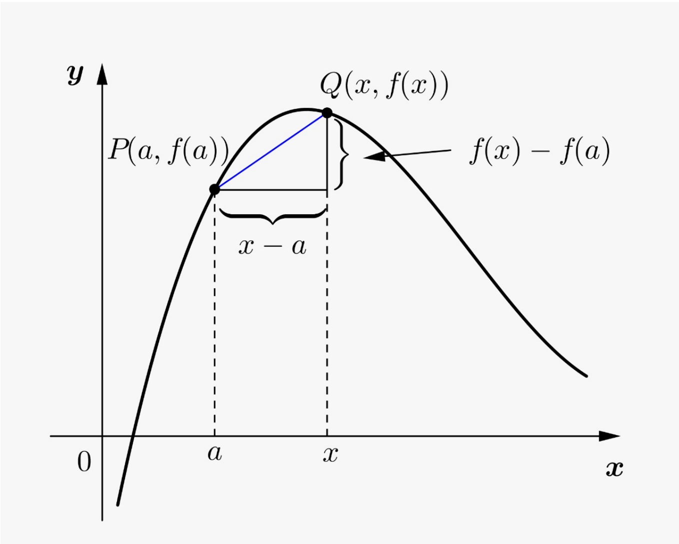
Stewart (2014, p. 131) inicia o estudo da derivada com o problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto.

4.1.1 Tangentes

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, com $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

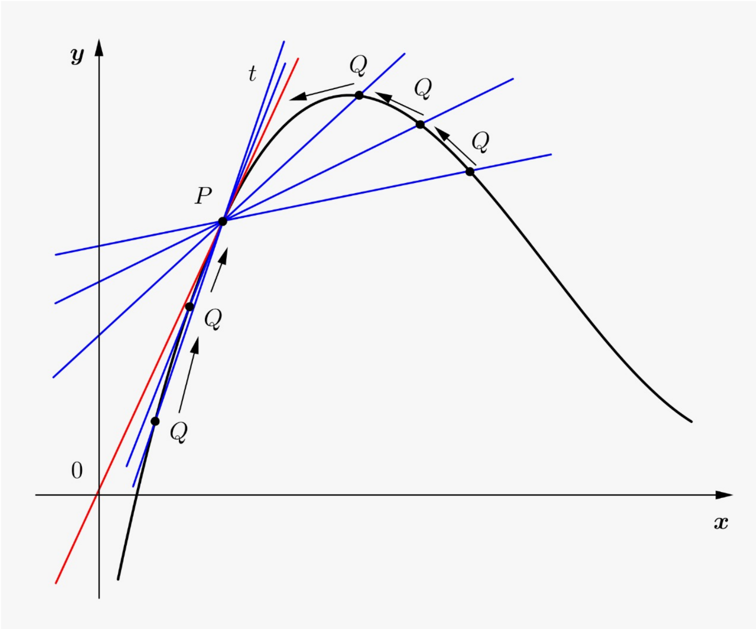
Figura 14 – Inclinação da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na figura 1 de Stewart (2014, p. 131).

Fazemos, então, Q se aproximar de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a.

Figura 15 – A reta tangente é a posição-limite da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ quando Q tende a P.



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na figura 1 de Stewart (2014, p. 131).

Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos:

Definição. *A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

O autor ressalta que há outra expressão para a inclinação da reta tangente. Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, assim, a inclinação da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ é dada por

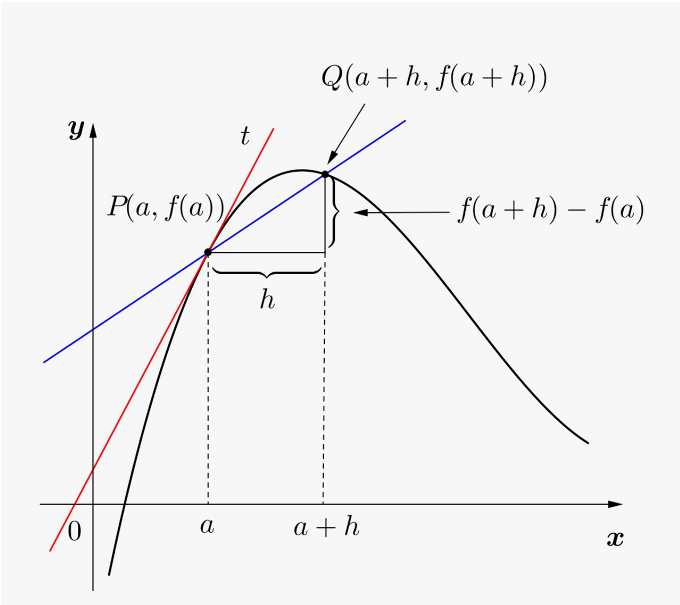
$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(Stewart sugere que o leitor observe a Figura 16, onde o caso $h > 0$ é ilustrado e Q está à direita de P. No entanto, se $h < 0$, então Q estaria à esquerda de P.)

Quando x tende a a, h tende a 0, pois $h = x - a$. Assim, a expressão para a inclinação da reta tangente na definição anterior fica

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Figura 16 – Caso $h > 0$. (Q está à direita de P.)



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na figura 3 de Stewart (2014, p. 132).

4.1.2 Derivadas

Stewart ressalta que o limite do tipo acima encontra-se presente em vários ramos das ciências. E, assim, define derivada.

Definição. *A* ***derivada de uma função*** f ***em um número*** a*, denotada por* $f'(a)$*, é*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a. Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição de derivada é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Definimos a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ como a reta que passa em P e tem inclinação m. Como isso é o mesmo que a derivada $f'(a)$, podemos agora afirmar que

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Daí, resulta que

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

é a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

4.2 O conceito de derivada no ensino médio

4.2.1 Sugestão 1

O trabalho de Ribeiro (2018) tem como objetivo auxiliar professores de Matemática da Educação Básica a introduzirem os conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio, usando como ferramentas dois *softwares* livres, o Geogebra e o WxMaxima [1].

Sendo assim, a autora sugere introduzir o conceito de derivada de uma maneira rápida, a fim de que o aluno possa ter uma noção do conteúdo abordado e de sua utilização quando do uso dos *softwares*.

Por meio do exemplo numérico a seguir, ela apresenta o conceito de reta tangente a uma parábola em um ponto determinado.

Exemplo
Traçar a reta tangente à curva dada pela função $f(x) = -x^2 + 4x + 1$*, no ponto* $P = (1, f(1))$.

Discussão

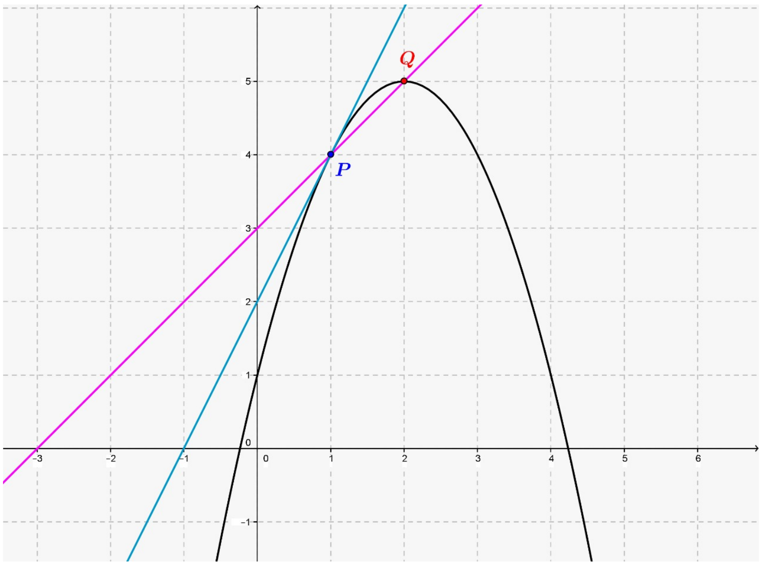
Para determinar a reta tangente à curva dada pela função $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, no ponto $P = (1, f(1))$, precisamos de um ponto Q pertencente à curva. Tomando $Q = (2, f(2))$, a inclinação da reta secante à curva que passa pelos pontos P e Q é dada pela variação em y sobre a variação em x:

$$m_{PQ} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1,$$

como podemos observar na Figura 17.

[1] O WxMaxima é um *software* livre disponível para a realização de cálculos matemáticos através da manipulação de expressões simbólicas e numéricas. Estas incluem diferenciação, integração, equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações lineares, vetores, matrizes, entre outros. Além disso, o WxMaxima produz resultados de precisão elevada e pode traçar gráficos de funções em duas e três dimensões. Disponível em:**<http://w3.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/Apostilas/apostila-software-wxmaxima.pdf>**. Acesso em: 2 out. 2019.

Figura 17 – Reta tangente a $f(x)$ em P e secante a $f(x)$ passando por $\overleftrightarrow{PQ}$

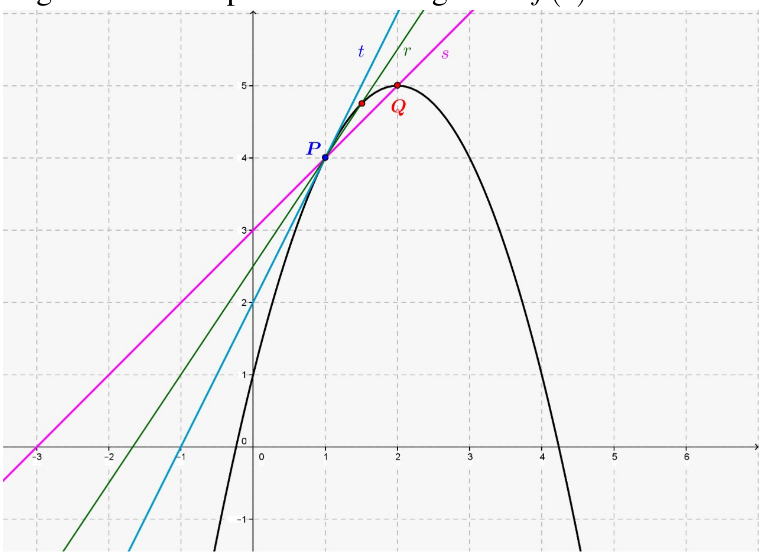


Fonte: Elaborada pela autora, com base na Figura 70 de Ribeiro (2018, p. 93).

Vamos aproximar o ponto Q do ponto P para verificarmos o que acontece com a reta secante (ver Figura 18). Seja $Q' = \left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$. A inclinação da reta secante a $f(x)$ que passa por $\overleftrightarrow{PQ'}$ é dada por

$$m_{PQ'} = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{3}{2}.$$

Figura 18 – Comparando reta tangente a $f(x)$ e secantes



Fonte: Elaborada pela autora, com base na Figura 71 de Ribeiro (2018, p. 94).

Podemos aproximar Q de P o quanto quisermos. Assim, a inclinação da reta secante ficará cada vez mais próxima da inclinação da reta tangente que passa por P. Com mais alguns cálculos, é possível verificar que as inclinações das secantes estão cada vez mais próximas do número 2. Logo, a inclinação da reta que passa por P e é tangente a $f(x)$ é 2 e sua equação é dada por $2x - y + 2 = 0$.

A ideia é fazer com que os alunos percebam que, para descobrir a inclinação da reta tangente à curva, que passa por P, basta fazer com que o ponto Q deslize sobre a curva, aproximando-se cada vez mais de P, ou seja, obrigando x a tender a a. Sendo assim, o m_{PQ} tende à inclinação m da reta tangente que passa por P.

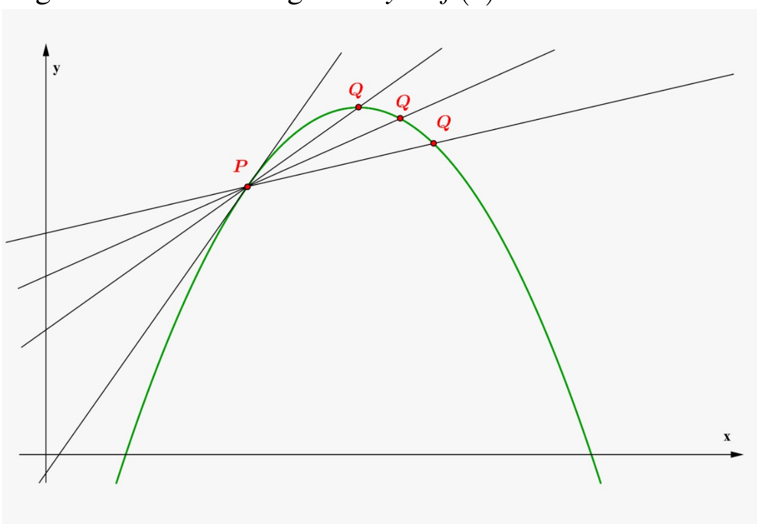
Após os alunos compreenderem a ideia intuitiva de derivada, a autora sugere apresentar, de uma maneira breve, as definições de derivada de uma função em um ponto e a derivada de uma função.

Definição. *A reta tangente à curva representada pela função $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Figura 19 – Reta t tangente a $y = f(x)$ em P



Fonte: Elaborada pela autora, com base na Figura 72 de Ribeiro (2018, p. 95).

O limite descrito acima é conhecido como derivada da função f no ponto a, representado por $f'(a)$. Dizemos que, quando esse limite existe, f é derivável em a ou f é diferenciável em a.

Definição. *A derivada de uma função $f(x)$ é denotada por $f'(x)$, com $x \in D(f)$, tal que*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se esse limite existir.

Podemos afirmar que uma função só é dita derivável quando existe derivada em todo seu domínio.

A autora também orienta sobre a possibilidade de apresentar a derivada como taxa de variação instantânea, ou apenas taxa de variação. Sua sugestão consiste em abordar, previamente, a taxa de variação média, conhecida pelos estudantes como o quociente entre a variação em y pela variação em x, dada pela expressão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

E, em seguida, explicar que, aplicando o limite na expressão da taxa de variação média, quando Δx tende a zero, obtemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4.2.2 Sugestão 2

Rocha (2016, p. 39) desenvolve, em sua dissertação, uma abordagem constituída por atividades para introduzir, para alunos do primeiro ano do ensino médio, de forma simples e sem o formalismo e o rigor ensinados nos cursos superiores, as noções de derivada. Sua sugestão consiste em apresentar roteiros de atividades que estimulam o aprendizado associado ao ensino de funções do primeiro e segundo graus. A autora salienta que os roteiros criados têm como objetivo despertar, de maneira intuitiva, por meio de exemplos do cotidiano, a noção de derivada e suas aplicações.

De forma mais concreta, a concepção de Rocha é utilizar o conceito de derivada para explorar cinco propostas diferenciadas: taxa de variação, crescimento e decrescimento das funções do 1º grau, inclinação da reta tangente, máximos e mínimos e velocidade instantânea.

A seguir, vamos apresentar a proposta da autora, que recorre ao conceito de derivada como inclinação da reta tangente à curva do gráfico de uma função do segundo grau. Convém ressaltar, para começar, que Rocha, durante sua exposição, emprega o termo **derivada**[2], visto que já introduziu sua definição na primeira proposta, que é referente à taxa de variação.

A atividade proposta pela autora, com relação à inclinação da reta tangente, consiste em estudar a taxa de variação (derivada) da função polinomial de grau 2. Para isso, Rocha analisa o gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x+4$.

A autora destaca que a reta que representa o gráfico da função $g(x)$ consiste em uma reta secante à parábola, tendo em vista que intercepta o gráfico da função $f(x)$ nos pontos $P(4,16)$ e $Q(-1,1)$. Observa também que, dados dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencentes à curva $y = f(x)$, a inclinação m da reta secante a esta curva, que passa por esses dois pontos, é dada por meio da razão $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$, denominada de taxa de variação, ou seja,

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dessa forma, a inclinação da reta secante à parábola é dada por

$$m = \frac{16-1}{4-(-1)} = 3.$$

O próximo passo é verificar a inclinação da reta secante quando o ponto B se aproxima do ponto A, "percorrendo"a parábola pela função f (ver Figura 21).

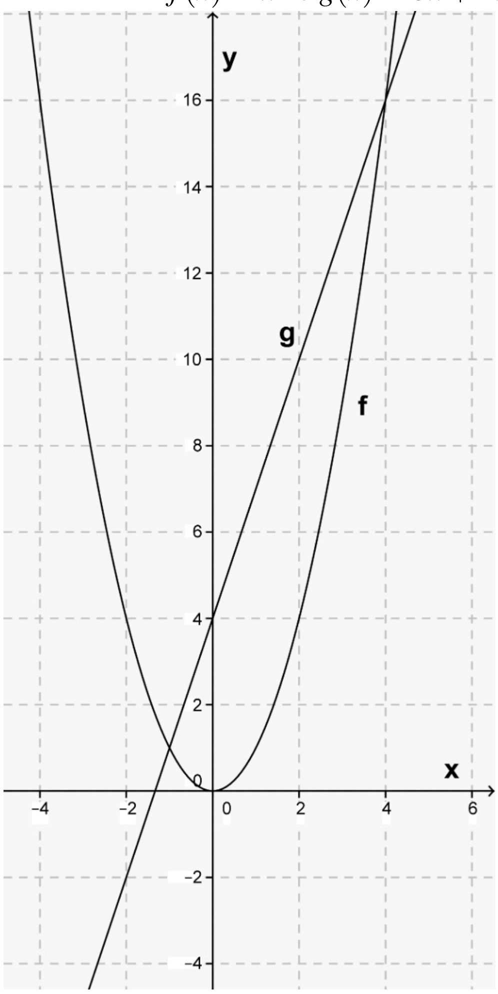
(i) $A(-1,1)$ e $B(3,9)$ $\Rightarrow$ $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{9-1}{3-(-1)} = 2.$

(ii) $A(-1,1)$ e $C(2,4)$ $\Rightarrow$ $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{4-1}{2-(-1)} = 1.$

(iii) $A(-1,1)$ e $D(1,1)$ $\Rightarrow$ $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{1-1}{1-(-1)} = 0.$

[2] **A taxa de variação das funções** $f(x) = 10x$ **e** $g(x) = 3x+8$**, que são duas funções polinomiais de 1º grau, é constante e igual ao coeficiente angular das retas (gráficos) dessas funções. Esta taxa de variação é também denominada derivada da função e é denotada por** $f'(x)$ **e** $g'(x)$**, respectivamente. Ou seja, dizemos que a derivada de** $f(x) = 10x$ **é igual a 10 e a derivada de** $g(x) = 3x+8$ **igual a 3.** (ROCHA, 2016, p. 44)

Figura 20 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x + 4$.



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 4.6 de Rocha (2016, p. 48).

(iv) $A(-1,1)$ e $E(0,0)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{0-1}{0-(-1)} = -1.$

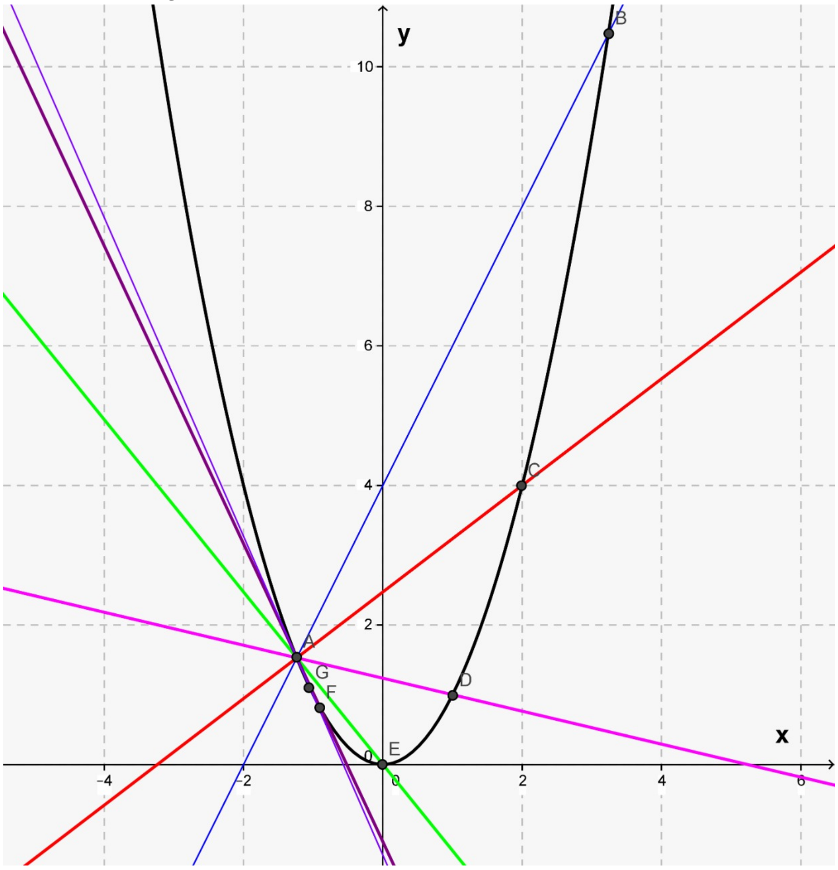
(v) $A(-1,1)$ e $F(-0,9;0,81)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{0,81-1}{-0,9-(-1)} = -1,9.$

(vi) $A(-1,1)$ e $G(-0,999;0,998001)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{0,998001-1}{-0,999-(-1)} = -1,999.$

Rocha observa que, tomando o ponto $A(-1,1)$ fixo e considerando valores para Δ_x cada vez mais próximos de zero, a reta secante que passa pelos pontos $(-1,1)$ e $(-1+\Delta_x, f(-1+\Delta_x))$ aproxima-se de uma reta limite, denominada de reta tangente à curva dada por $f(x) = x^2$ no ponto $(-1,1)$, conforme ilustra a Figura 21.

A taxa de variação, ou a inclinação, das retas secantes que passam pelos pontos $(-1,1)$ e $(-1+\Delta_x, f(-1+\Delta_x))$ é dada por

Figura 21 – Gráco da função $f(x) = x^2$, retas secantes e reta tangente.



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 4.7 de Rocha (2016, p. 49).

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(-1+\Delta_x) - f(-1)}{-1+\Delta_x - (-1)} = \frac{1 - 2\Delta_x + \Delta_x^2 - 1}{\Delta_x} = \frac{\Delta_x(-2+\Delta_x)}{\Delta_x} = -2 + \Delta_x \ .$$

À medida que Δ_x se aproxima de zero, ou seja, à medida que a distância entre os pontos se aproxima de zero, a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ aproxima-se de 2. Esse valor é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $(-1, 1)$, denominada de derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = -1$ e representamos por $f'(-1) = -2$.

À semelhança do exemplo anterior, a autora calcula a derivada da função $f(x) = x^2$ nos pontos $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$.

Calculando a derivada no ponto $x = 2$, conclui-se que, quando Δ_x se aproxima de zero, a taxa de variação $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ aproxima-se de 4. Logo, a derivada de f no ponto $x = 2$ é igual a 4, ou seja, $f'(2) = 4$.

No ponto $x = 3$, quando Δ_x se aproxima de zero, a taxa de variação $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ aproxima-se de 6. Logo, a derivada de f no ponto $x = 3$ é igual a 6, isto é, $f'(3) = 6$.

No caso da derivada no ponto $x = 4$, quando Δ_x se aproxima de zero, a taxa de variação $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ aproxima-se de 8. Logo, $f'(4) = 8$, o que significa que a derivada de f no ponto

$x = 4$ é igual a 8.

A autora salienta que a derivada não é constante e $f'(x)$ é o dobro do valor de x.

No caso geral, considerando um número real fixado $x = x_0$, a derivada de f no ponto $x = x_0$ é dada por

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x_0+\Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = \frac{(x_0+\Delta_x)^2 - (x_0)^2}{\Delta_x} = \frac{\Delta_x(2x_0+\Delta_x)}{\Delta_x} = 2x_0 + \Delta_x.$$

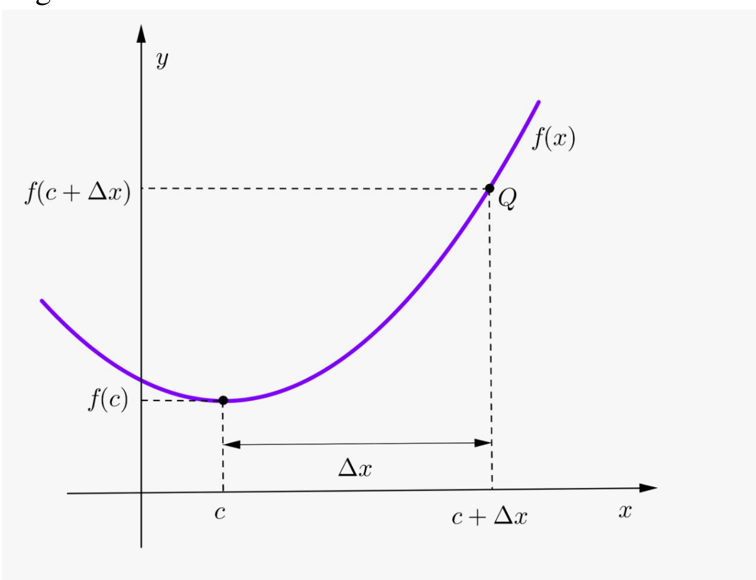
Isto significa que, quando Δ_x se aproxima de zero, a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aproxima-se de $2x_0$. Portanto, dado um número real x_0, a derivada da função f no ponto $x = x_0$ é igual a $2x_0$ e denotamos por $f'(x_0) = 2x_0$.

A autora finaliza essa proposta mostrando que, dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, temos que $f'(x) = 2ax + b$.

4.2.3 Sugestão 3

Machado (2016, p. 46) inicia sua abordagem supondo que a curva da Figura 22 seja o gráfico de uma certa função f e considera $P = (c, f(c))$ e $Q = (c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ dois pontos do gráfico de f.

Figura 22 – Ideia de derivada como declive



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 4.2 de Machado (2016, p. 47).

A inclinação (declive) da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ é dada pelo quociente

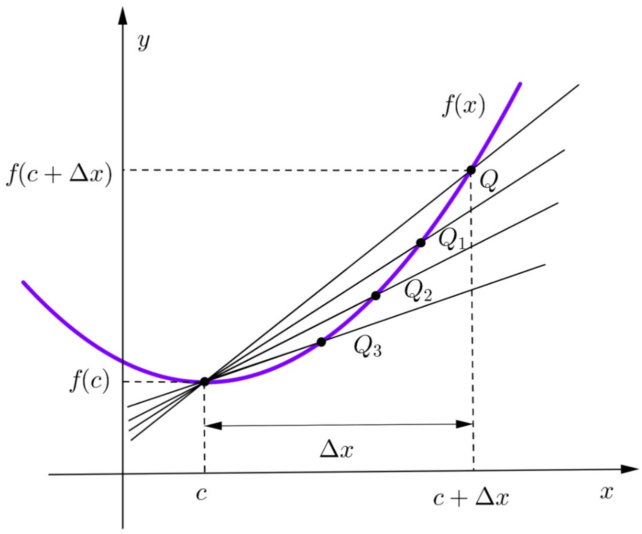
$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{c+\Delta x - c} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x},$$

conforme já estudado, segundo Machado, no 1º ano do ensino médio, em funções lineares, e no 3º ano, em Geometria Analítica.

Esse quociente é também chamado de *razão incremental*, já que Δx é realmente um incremento que damos à abscissa de P para obter a abscissa de Q. Consequentemente, a ordenada $f(c+\Delta x)$ é obtida de $f(c)$ mediante o incremento $f(c+\Delta x)-f(c)$.

Como queremos traçar a tangente em P, vamos mantê-lo fixo, enquanto fazemos o ponto Q aproximar-se de P, passando por sucessivas posições, Q_1, Q_2, Q_3 etc. Dessa forma, a secante $\overleftrightarrow{PQ}$ assumirá as posições PQ_1, PQ_2, PQ_3 etc, conforme mostra a Figura 23. Portanto, esperamos que a razão incremental, que é o declive da secante, aproxime-se de um determinado valor m, à medida que o ponto Q se aproxima de P. Logo, definimos a *reta tangente* à curva no ponto P como sendo aquela que passa por P cujo declive ou coeficiente angular ou inclinação é m.

Figura 23 – Ideia de derivada como limite



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 4.3 de Machado (2016, p. 48.

Para que isso aconteça, o número Δx deve aproximar-se cada vez mais de zero na razão incremental, ou seja, $\Delta x \longrightarrow 0$. Dessa forma, podemos dizer que m é o *limite da razão incremental com* Δx *tendendo a zero*, ou seja, é a *derivada* da função f no ponto c e é indicada por f' e escrevemos:

$$m = f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

O autor finaliza destacando que é fundamental que o professor crie, no Geogebra, uma animação, mostrando exatamente o que foi exposto, a fim de que o aluno perceba, com naturalidade, o conceito de limite na definição de derivada.

4.3 Uma proposta para a introdução do conceito de derivada no ensino médio

No capítulo anterior, apresentamos uma proposta para a introdução do conceito de limite no ensino médio. Nesta seção, pretendemos, de forma análoga, apresentar uma proposta para a introdução do conceito de derivada no ensino médio. Para isso, aplicaremos o conceito de limite, invocando o entendimento da proposta do capítulo anterior.

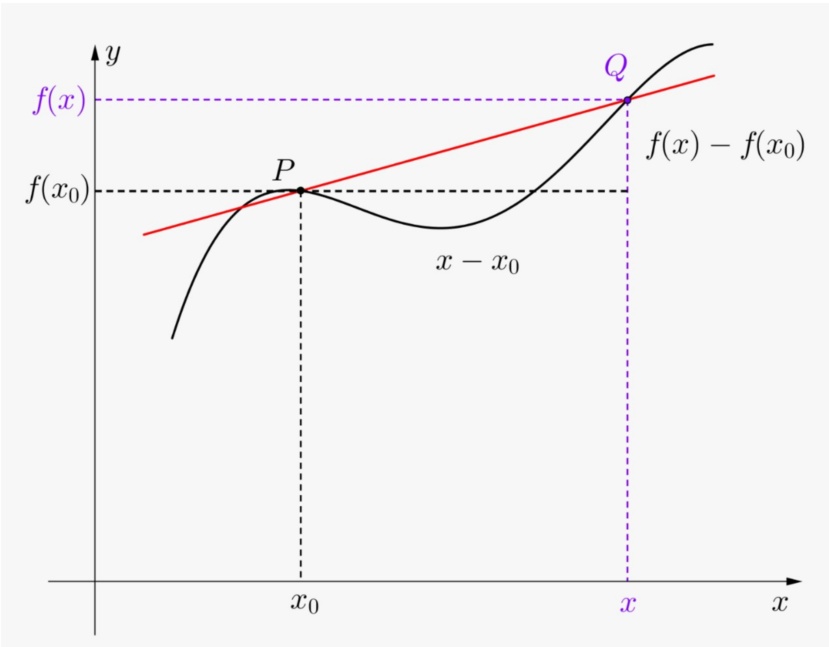
Dada uma função $f(x)$ e dado $x_0 \in \text{Dom} f$, nosso objetivo será calcular o

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4.1}$$

Antes, contudo, é interessante entendermos o que a função $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ representa.

Dado um ponto fixo $P = (x_0, f(x_0))$ pertencente ao gráfico da função $f(x)$, consideremos o ponto $Q = (x, f(x))$ também pertencente ao gráfico de $f(x)$, conforme ilustrado na Figura 24.

Figura 24 – Reta que passa pelos pontos P e Q pertencentes ao gráfico da função $f(x)$.



Fonte: Elaborada pela autora.

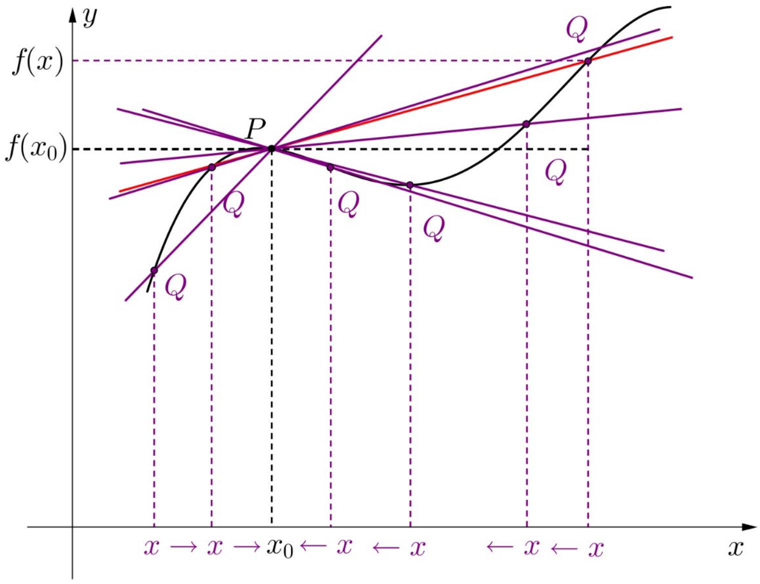
Notemos que, do ponto de vista geométrico,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

é o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta que passa pelos pontos P e Q.

À semelhança do procedimento adotado no capítulo anterior, quando x se aproxima de x_0, temos que o ponto Q se aproxima do ponto (x_0, L), sendo L o limite de $f(x)$, quando x se aproxima de x_0, como pode ser observado na Figura 25.

Figura 25 – Comportamento do ponto Q e da reta que passa pelos pontos P e Q, quando x se aproxima de x_0.



Fonte: Elaborada pela autora.

Analisando, mais uma vez, sob o ponto de vista geométrico, observamos que, quando x se aproxima de x_0, a reta que passa pelos pontos P e Q assume posições distintas cada vez mais próximas da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto P. Consequentemente, o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta que passa pelos pontos P e Q assume valores distintos cada vez mais próximos do coeficiente angular (ou a inclinação) m da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto P.

Isso significa dizer que o coeficiente angular (ou a inclinação) m da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto P é o limite dos coeficientes angulares das retas que passam pelos pontos P e Q, quando x se aproxima de x_0.

Em termos matemáticos, queremos dizer que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m.$$

Em resumo, nosso objetivo, conforme estabelecido em (3.1), consiste em calcular o coeficiente angular (ou a inclinação) m da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto P.

Neste momento, podemos definir, para o aluno, que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

é a **derivada** de $f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$. Ou, de forma equivalente, é o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$.

Uma vez definida a derivada, vamos discutir um exemplo em que aplicamos o que propusemos no capítulo anterior.

Exemplo
Seja a função $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Considere $L = \lim_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$. *Determine o valor de L.*

Discussão

Inicialmente, é importante enfatizar que determinar o valor do $\lim_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ é determinar a inclinação da reta tangente à curva definida por $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ no ponto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$. Isso significa determinar o valor de m na equação

$$y - \frac{1}{2} = m(x - 1).$$

Pelo que vimos, queremos determinar o valor do qual $\dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ se aproxima quando x se aproxima de 1.

Ora,

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{\frac{1 - x}{2(1+x)}}{x - 1} = -\frac{1}{2(1+x)}.$$

Assim, queremos determinar o valor do qual $\dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -\dfrac{1}{2(1+x)}$ se aproxima quando x se aproxima de 1.

Sabemos que os pontos $Q_x = \left(x, \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}\right) = \left(x, -\dfrac{1}{2(1+x)}\right)$ se aproximam do ponto $P = (1, L)$. Logo, x aproxima-se de 1 e $-\dfrac{1}{2(1+x)}$ aproxima-se de L. Isso significa dizer que $-\dfrac{1}{2(1+x)}$ assume valores distintos cada vez mais próximos de L à medida que x se aproxima de 1.

Denotemos esses valores por L_x. Como $L_x = -\dfrac{1}{2(1+x)}$, segue que $\dfrac{1}{L_x} = -2-2x$ e, daí, vem que

$$x = -\frac{1}{2L_x} - 1. \tag{4.2}$$

Pela definição de L_x, temos que $L_x \longrightarrow L$, quando $x \longrightarrow 1$. Assim, $-\dfrac{1}{2L_x} - 1 \longrightarrow -\dfrac{1}{2L} - 1$ e, portanto, de (3.2), obtemos que

$$x \longrightarrow -\frac{1}{2L} - 1. \tag{4.3}$$

Mas, por outro lado, sabemos que

$$x \longrightarrow 1. \tag{4.4}$$

De (3.3) e (3.4), podemos concluir que $-\dfrac{1}{2L} - 1 = 1$ e, portanto,

$$L = -\frac{1}{4},$$

o que mostra que

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\frac{1}{4}.$$

Com isso, podemos concluir que $m = -\dfrac{1}{4}$ é a inclinação da reta tangente à curva definida por $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ no ponto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ e, portanto, a equação da reta tangente à curva definida por $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ no ponto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ é dada por

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-1),$$

ou seja,

$$y = \frac{3-x}{4}.$$

Logo, $-\dfrac{1}{4}$ é a derivada de $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ no ponto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

É importante destacar para o aluno que não é possível calcular a derivada, no ponto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, da função exibida como contraexemplo no capítulo anterior [3].

Sabemos que, para que uma função seja diferenciável em um ponto x_0 de seu domínio, é necessário que ela seja contínua em x_0. Continuidade, porém, não consiste em um conceito com o qual o aluno de ensino médio tenha familiaridade, além de não consistir em um conceito trivial para ser trabalhado na educação básica. Nesse sentido, a fim de não imprimir um tratamento mais rigoroso, não acreditamos ser necessário justificar a não diferenciabilidade da função

$$\begin{array}{rcl} h : [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq 1 \\ \dfrac{3}{2}, & \text{se } x = 1. \end{cases} \end{array}$$

em $x_0 = 1$.

Todavia, a critério do professor, e no intuito de dirimir eventuais dúvidas, é possível comentar que a continuidade de uma função está intimamente relacionada com a não existência de *saltos*, de *buracos* na função. Dessa forma, o aluno poderá ser capaz de ter uma ideia intuitiva do que vem a ser uma função contínua.

[3] De fato,

$$\begin{array}{rcl} h : [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & \text{se } x \neq 1 \\ \\ \dfrac{3}{2}, & \text{se } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

não é contínua em $x = 1$.

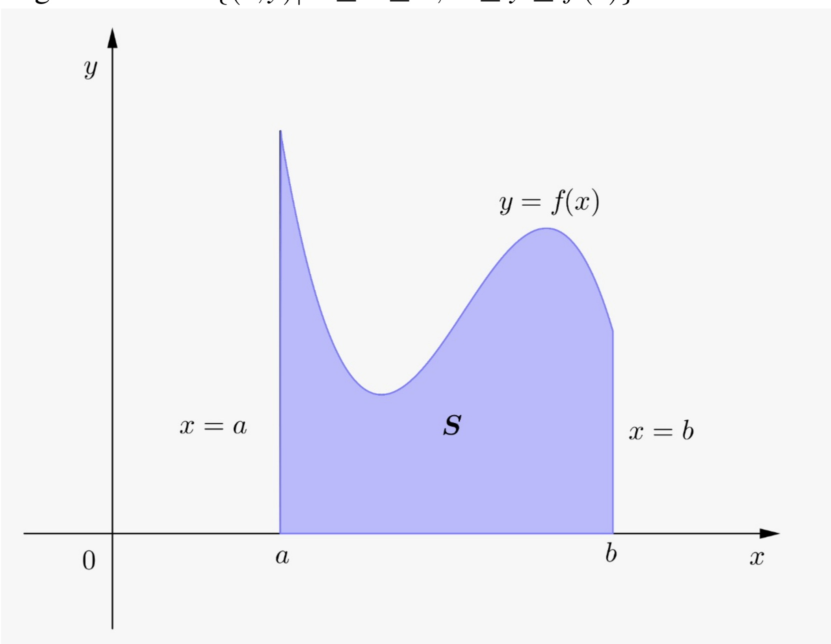
5 INTRODUZINDO O CONCEITO DE INTEGRAL

Este capítulo traz, inicialmente, a definição de integral, conforme apresentada nos cursos de Cálculo. Posteriormente, são discutidas sugestões de alunos do PROFMAT de como introduzir esse conceito no ensino médio. Na terceira parte, apresentamos uma proposta de como introduzir integral nesse segmento. E, por fim, aprofundamos a discussão do cálculo de áreas, analisando se é possível calcular a área de qualquer subconjunto do plano, considerando a noção intuitiva que temos da área de uma região.

5.1 O conceito de integral no Cálculo

Stewart (2014, p. 326) introduz o conceito de integral tentando resolver o *problema da área*: determinar a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ da a até b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 26, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geq 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.

Figura 26 – $S = \{(x,y) |\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 1 de Stewart (2014, p. 326).

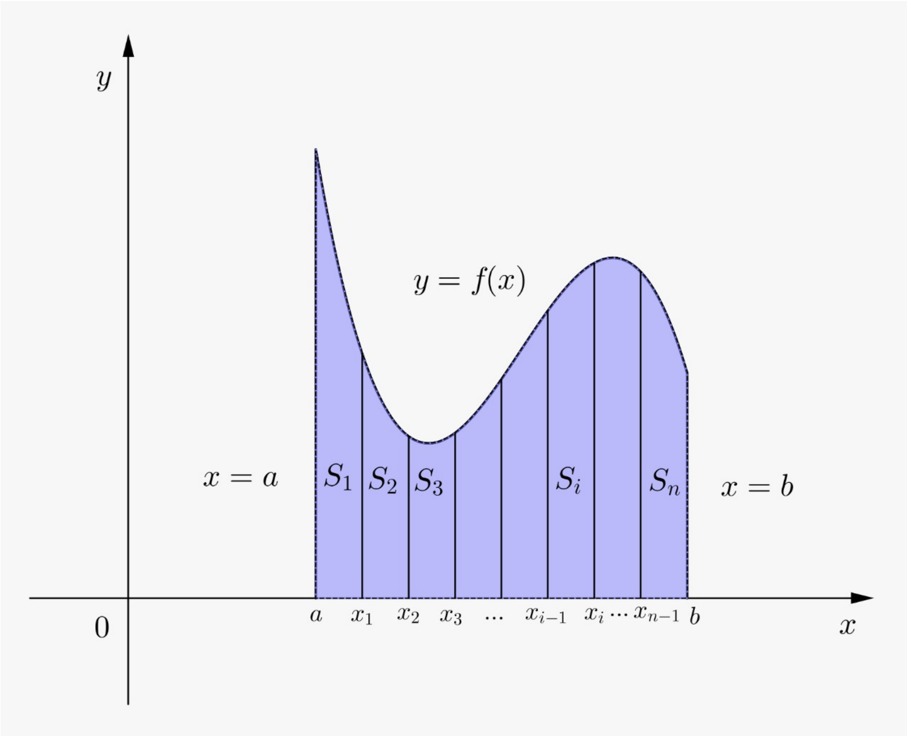
O autor salienta que, inicialmente, devemos nos perguntar qual é o significado da palavra *área*, pois, no caso de regiões com lados retos, trata-se de uma questão fácil de ser respondida. Entretanto, não é tão fácil encontrar a área de uma região com lados curvos. De fato, para um retângulo, por exemplo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura.

A área de um triângulo, por sua vez, é a metade da base vezes a altura. E, a área de um polígono, de uma maneira geral, pode ser encontrada dividindo-o em triângulos e, a seguir, somando-se as áreas dos triângulos.

No que concerne às regiões com lados curvos, temos uma ideia intuitiva de qual é a área da região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata.

Para resolver o problema, em primeiro lugar, subdividimos S em n faixas S_1, S_2, ..., S_n de igual largura.

Figura 27 – Subdivisão da região S em n faixas de igual largura



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 10 de Stewart (2014, p. 329).

A largura do intervalo $[a,b]$ é $b-a$; assim, a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Essas faixas dividem o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos

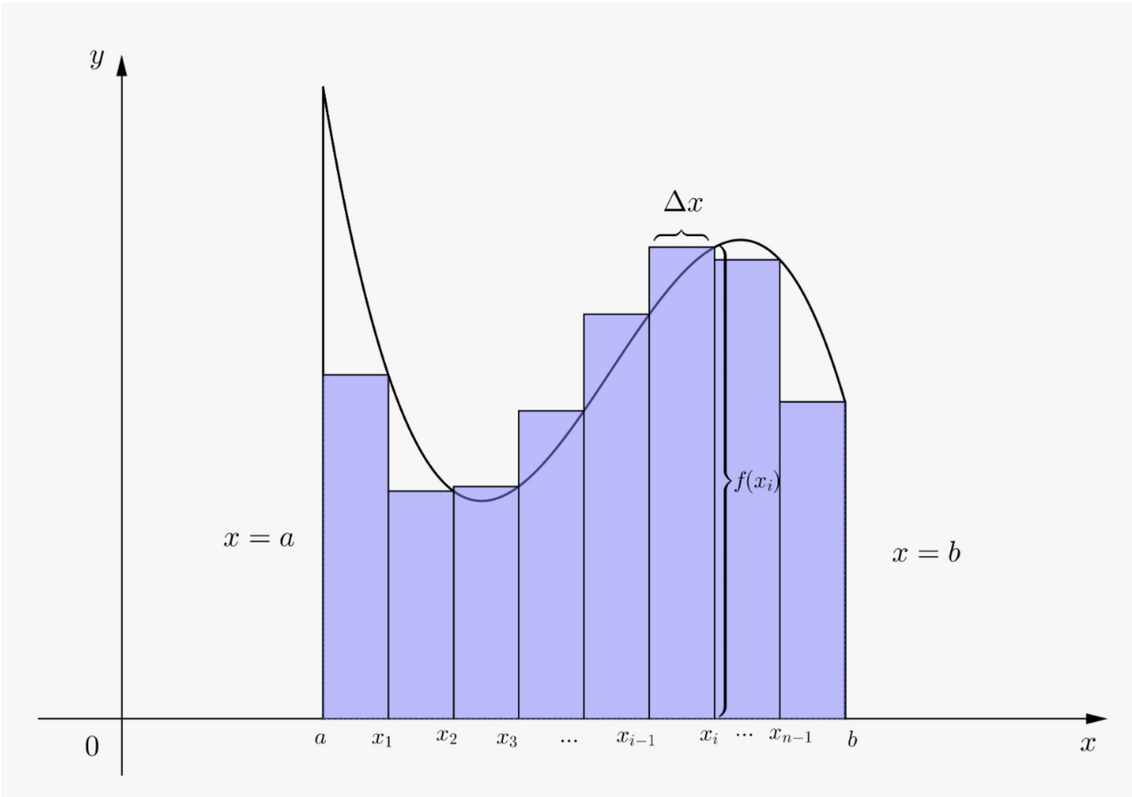
$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ [x_2,x_3],\ ...,\ [x_{n-1},x_n],$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são: $x_1 = a+\Delta x$, $x_2 = a+2\Delta x$, $x_3 = a+3\Delta x$ etc.

Vamos aproximar a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita. Então, a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Figura 28 – A área do i-ésimo retângulo é dada por $f(x_i)\Delta x$.



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 11 de Stewart (2014, p. 330).

Observemos que essa aproximação torna-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto, podemos definir a área A da região S da seguinte forma:

Definição. *A* ***área*** *A da região S que está sob o gráfico de um função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:*

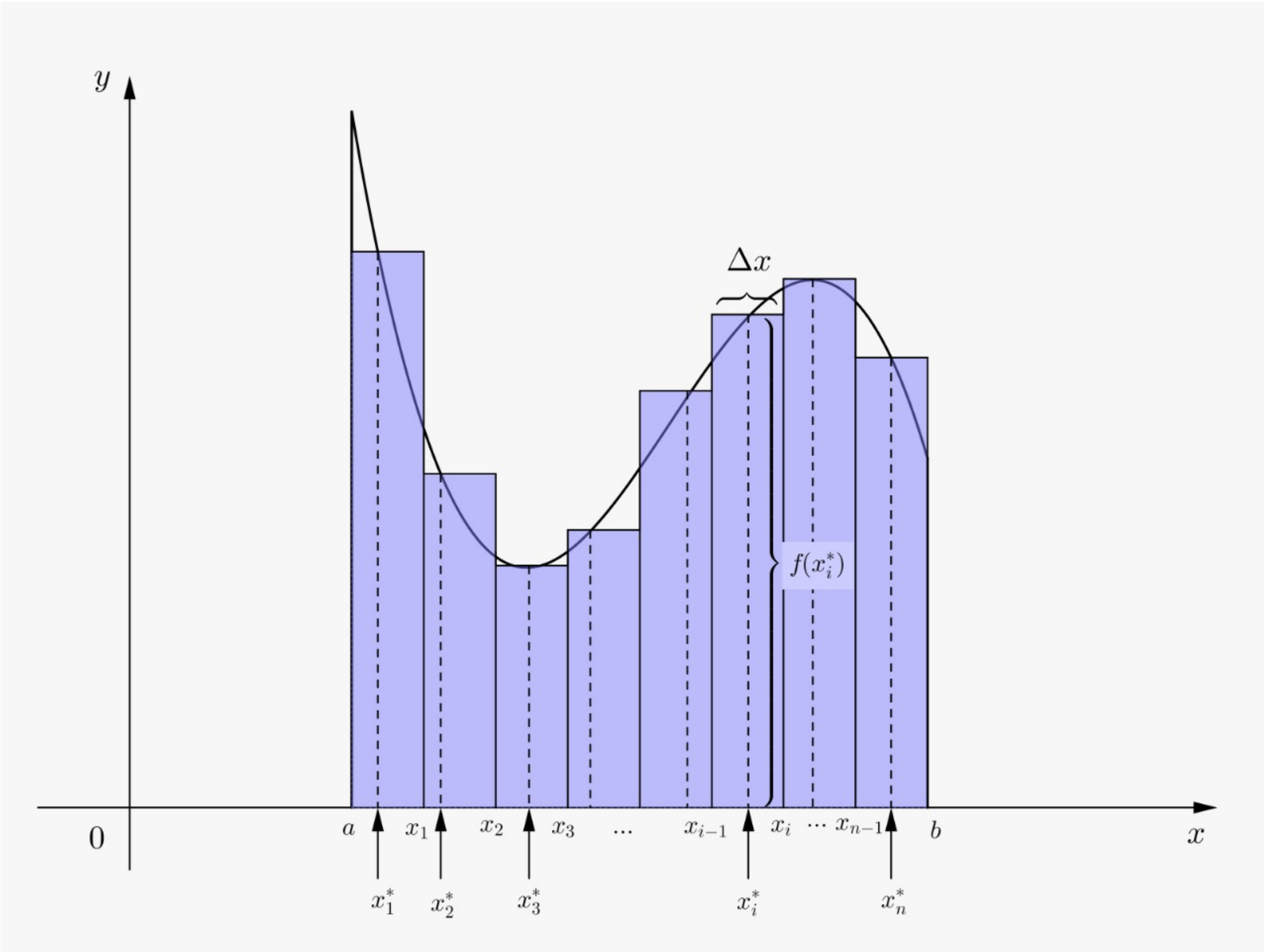
$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x],$$

isto é,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Em vez de usarmos as extremidades esquerda ou direita, Stewart destaca que podemos tomar a altura do i-ésimo retângulo como o valor de f em *qualquer* número x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Figura 29 – Retângulos aproximantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades.



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 13 de Stewart (2014, p. 331).

Chamamos os números x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* de **pontos amostrais**.

A Figura 29 mostra os retângulos aproximantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área S é

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + ... + f(x_n^*)\Delta x]$$

ou, ainda,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

A esse limite, chamamos de **integral definida**.

Definição. *Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Sejam $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam x_1^*, x_2^*, ..., x_n^** ***pontos amostrais arbitrários*** *nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a* ***integral definida de f de a a b*** *é*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é ***integrável*** *em $[a,b]$.*

O autor ressalta que o significado exato do limite que define integral é o seguinte:

Para todo número $\varepsilon > 0$, existe um inteiro N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\Delta x \right| < \varepsilon$$

para todo inteiro $n > N$ e toda escolha de x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$.

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

é denominada de **soma de Riemann**. Assim, a definição diz que a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.

Sabemos que, se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes (ver Figura 30).

Comparando as duas definições, vemos que a integral definida

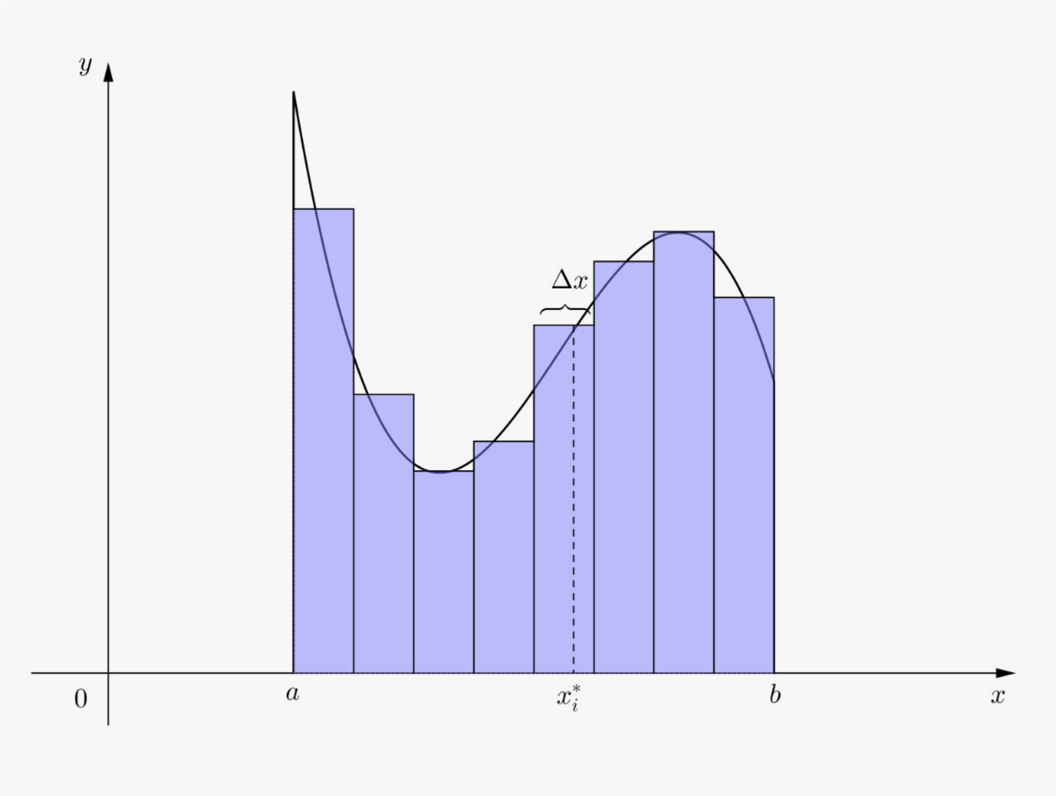
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b (ver Figura 31).

Se f assumir valores positivos e negativos, como na Figura 32, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e do *oposto* das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x.

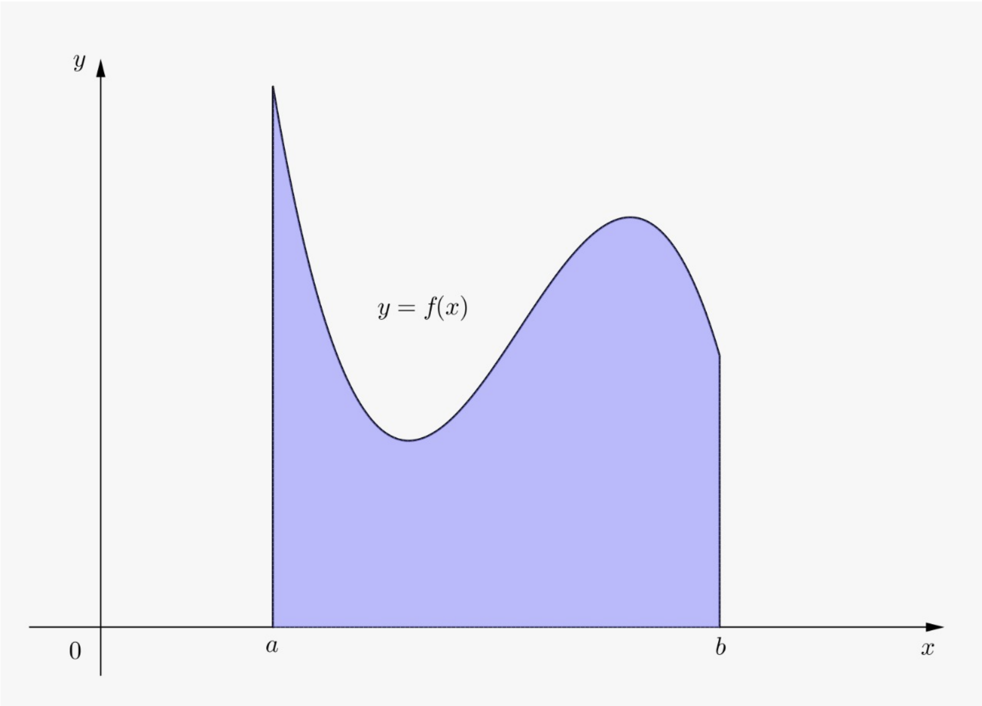
Quando tomamos o limite dessas somas de Riemann, obtemos a situação ilustrada na Figura 33.

Figura 30 – Se $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann $\sum f(x_i^*)\Delta x$ é a soma das áreas de retângulos.



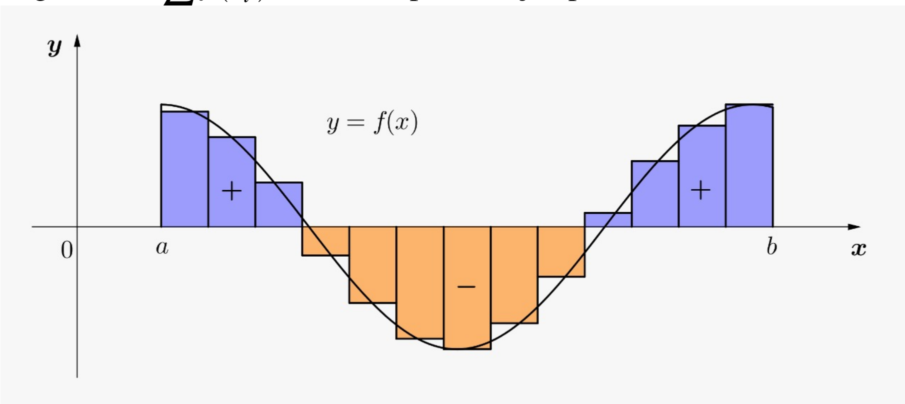
Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 1 de Stewart (2014, p. 338).

Figura 31 – Se $f(x) \geq 0$, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.



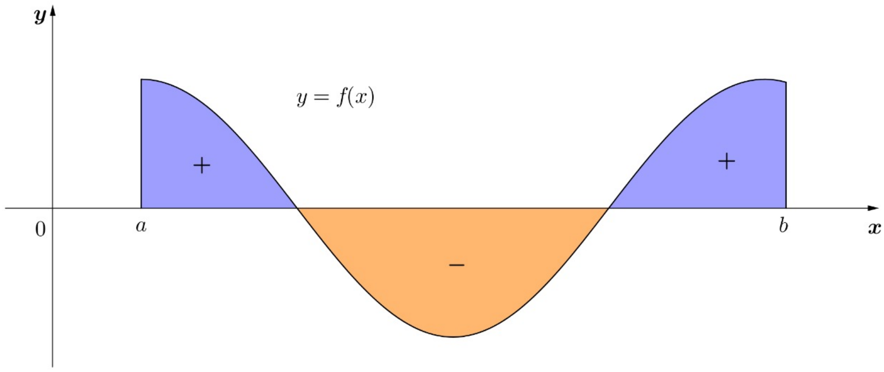
Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 2 de Stewart (2014, p. 338).

Figura 32 – $\sum f(x_i^*)\Delta x$ é uma aproximação para a área resultante.



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3 de Stewart (2014, p. 338).

Figura 33 – $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área resultante.



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 4 de Stewart (2014, p. 338).

Uma integral definida pode ser interpretada como **área resultante**, isto é, a diferença das áreas

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2,$$

onde A_1 é a área da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, e A_2 é a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f.

5.2 O conceito de integral no ensino médio

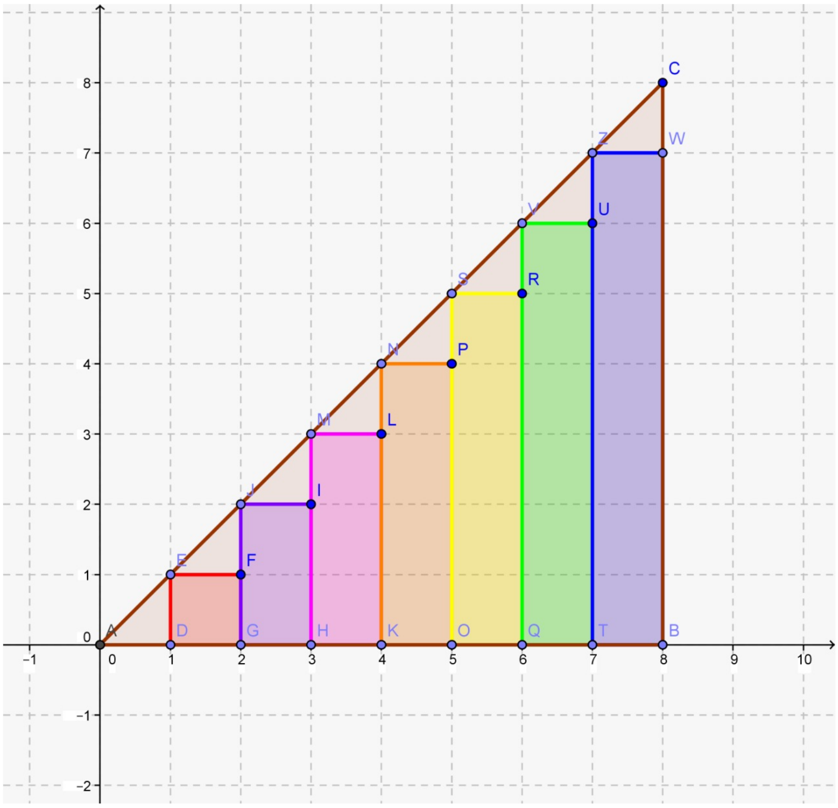
5.2.1 Sugestão 1

Para introduzir a ideia inicial de integral no contexto escolar de alunos de ensino médio, Ribeiro (2018, p. 97) propõe abordar as integrais definidas por meio de um exemplo para calcular a área de um triângulo. A autora justifica que se trata de uma figura geométrica plana de fácil entendimento e os estudantes deste segmento já estão familiarizados com o cálculo de sua área.

Exemplo 1

Vamos calcular a área do triângulo da figura a seguir usando aproximação por áreas de retângulos.

Figura 34 – Área do triângulo por aproximação



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 73 de Ribeiro(2018, p. 97).

Discussão

Cada retângulo inserido no interior do triângulo possui 1 unidade de base $(1u)$. Suas alturas são dadas em Progressão Aritmética de razão 1, com primeiro termo igual a 1 e o último igual a 7. Assim, temos 7 retângulos, e para calcular a área aproximada do triângulo, basta somar suas áreas, usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A..

Obtemos o resultado 28 u^2 e a área real do triângulo é de 32 u^2, sendo o erro de apenas 4 u^2. A intenção é que os alunos percebam que, quanto maior o número de retângulos inseridos no interior do triângulo, mais próximo do valor real da área será o resultado.

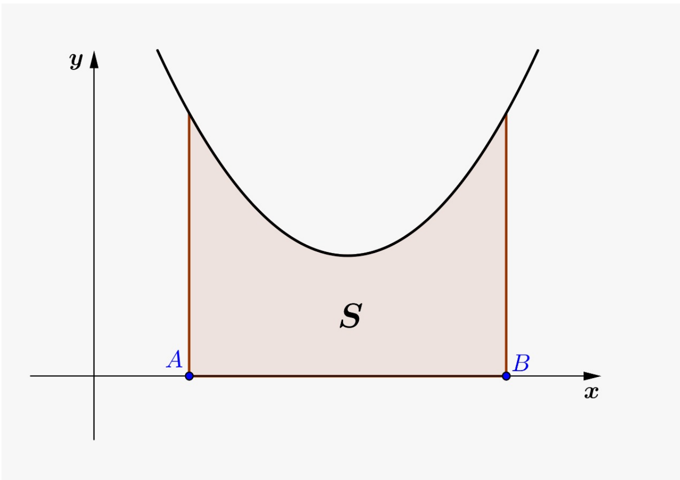
O propósito desse exemplo é levar o aluno a compreender o processo que conduz ao conceito de integral para calcular áreas em figuras que não possuem fórmulas definidas.

A autora propõe, em seguida, fazer uso do *software* Geogebra para inserir o conceito de integral definida, também como um limite especial, utilizando a soma de Riemann. Sua justificativa para essa escolha baseia-se no recurso visual que ele oferece para auxiliar o aluno na interpretação geométrica do resultado da integral. A autora destaca que, embora o aluno não entenda a parte algébrica por trás das resoluções apresentadas pelo *software*, poderá ter ideia do processo de integração.

Exemplo 2

Dada a região S, representada na figura a seguir, delimitada pela função $f(x)$, pelo eixo das abscissas e por duas retas $x = a$ e $x = b$, utilize a Soma de Riemann para se aproximar do valor real da área de S. Qual sua conclusão sobre a relação entre a Soma de Riemann e a área real da região S?

Figura 35 – Gráfico da área S



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 52 de Ribeiro (2018, p. 74).

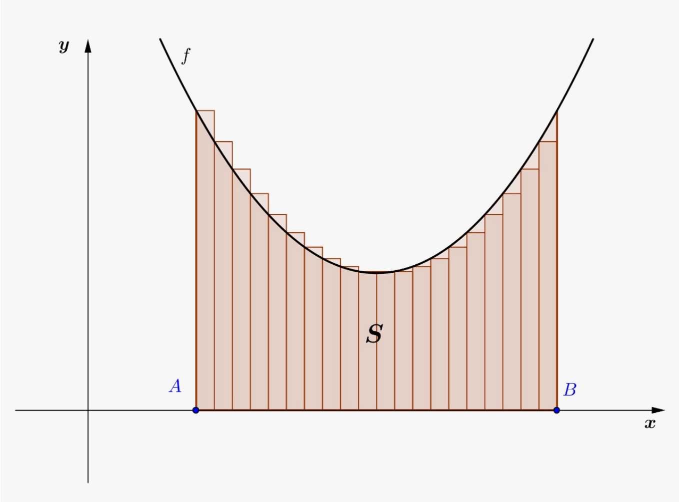
Discussão

Inicialmente, a autora sugere que o professor apresente, no Geogebra, a figura da região S.

Para encontrar a área S, o professor deve solicitar aos alunos que aumentem o número de retângulos inseridos na imagem (ver Figura 36).

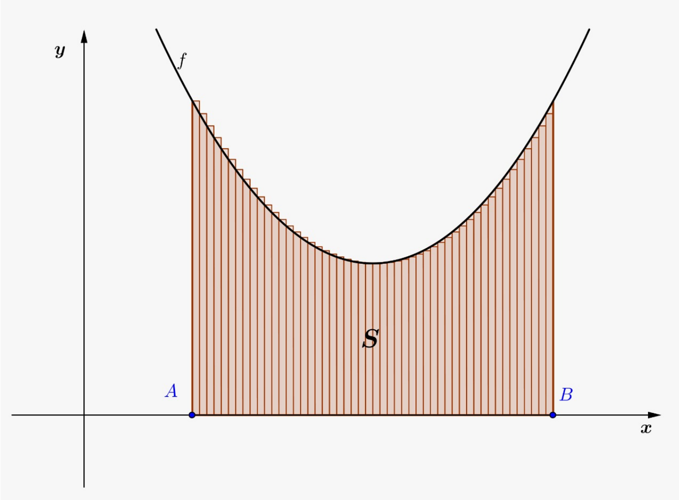
Seguindo esse raciocínio, os estudantes perceberão que, quanto maior o número de retângulos inseridos, maior será a precisão da aproximação da área S (ver Figura 37).

Figura 36 – Gráfico da divisão de S em retângulos



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 53 de Ribeiro (2018, p. 74).

Figura 37 – Gráfico da divisão de S em n retângulos



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 54 de Ribeiro (2018, p. 75).

O professor ainda pode definir que a área foi dividida em n retângulos, de altura $f(x_i*)$ e base Δx, e que, se o número de retângulos tender ao infinito, o resultado da soma das áreas dos retângulos nos dará a área S. Assim, a integral definida é o resultado do limite da soma de Riemann, que pode ser escrito como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\Delta x.$$

Dessa forma, conseguimos fazer com que o aluno entenda, visualmente, o conceito de integral definida.

Os exemplos apresentados em seguida trabalham com curvas conhecidas pelos alunos. A autora justifica que se trata de uma oportunidade para valorizar seus conhecimentos adquiridos até então.

Exemplo 3
Encontre a área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$ *e o eixo das abscissas.*

Discussão

Por meio do Geogebra, o aluno calcula a área, bem como visualiza a região onde a área foi calculada.

Exemplo 4
Encontre a área delimitada pelos gráficos de $f(x) = x$ *e* $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2$.

Discussão

À semelhança do exemplo anterior, utiliza-se o Geogebra para o cálculo da área.

5.2.2 Sugestão 2

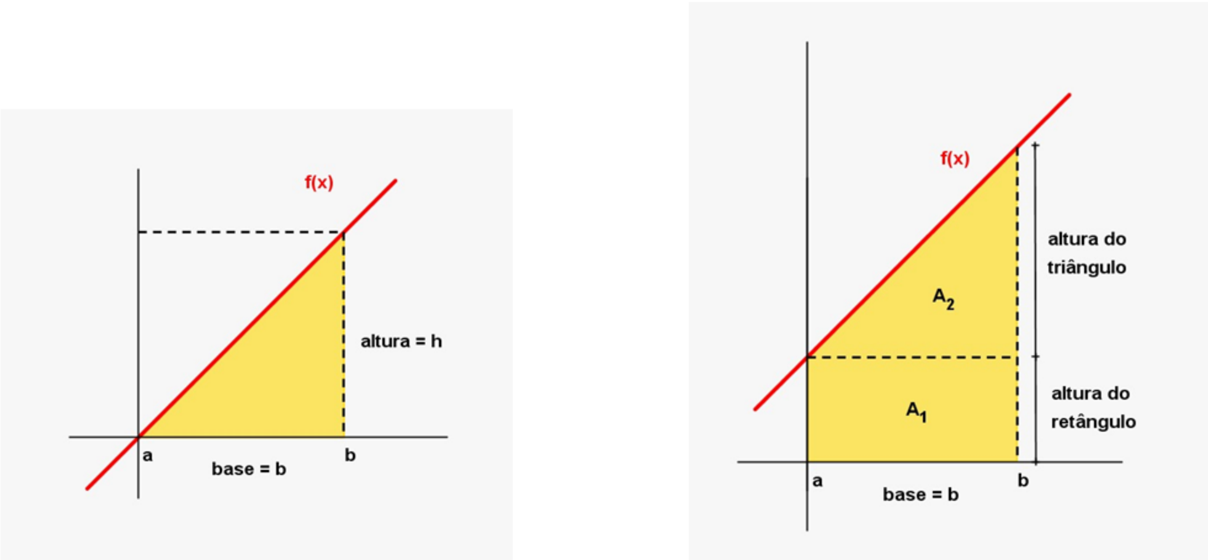
Lima (2018, p. 133) afirma que, quando aborda, em sala de aula, o cálculo de áreas sob o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau, em determinado intervalo $[a,b]$ dado, os alunos conseguem, sem muita dificuldade, chegar a um resultado satisfatório. Usando somente os conceitos sobre o cálculo de áreas que já conhecem, estudantes observam que, como o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau é uma reta e identificam a região do gráfico limitada pela reta e pelo eixo OX como um triângulo ou como a união de um triângulo com um retângulo, a área total é obtida por meio da soma das áreas das duas figuras, ou até mesmo por meio do cálculo da área de um trapézio (ver Figura 38).

Todavia, o autor salienta que grande parte dos alunos sente uma dificuldade enorme no cálculo da área de uma região que não pode ser diretamente comparada a uma figura plana conhecida, como, por exemplo, calcular a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,4]$ (ver Figura 39).

Com recursos do Geogebra, o autor sugere que seja efetuada a soma por excesso e por falta das áreas de quatro retângulos, de base 1 e altura conveniente, conforme indicado na Figura 40, sendo o valor por excesso representado por a e por falta, por b.

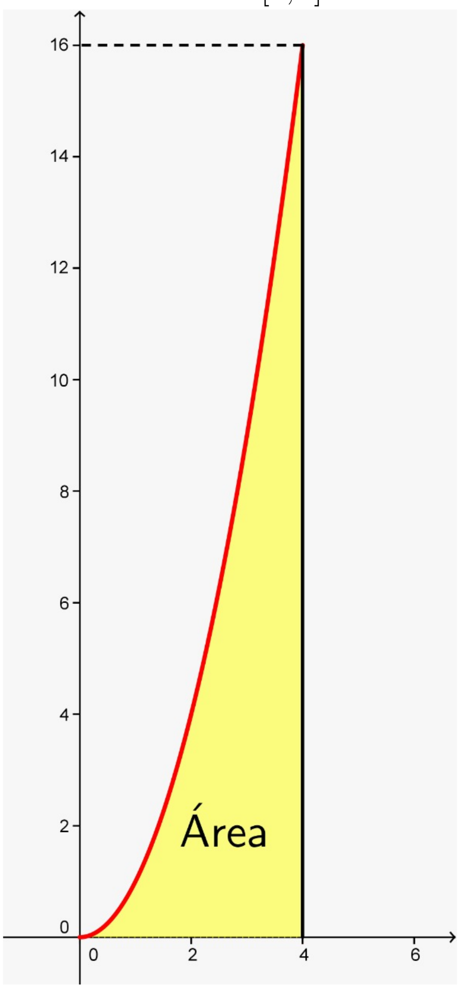
Com isso, a intenção é levar o aluno a perceber que a área procurada está limitada

Figura 38 – Área sob o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau



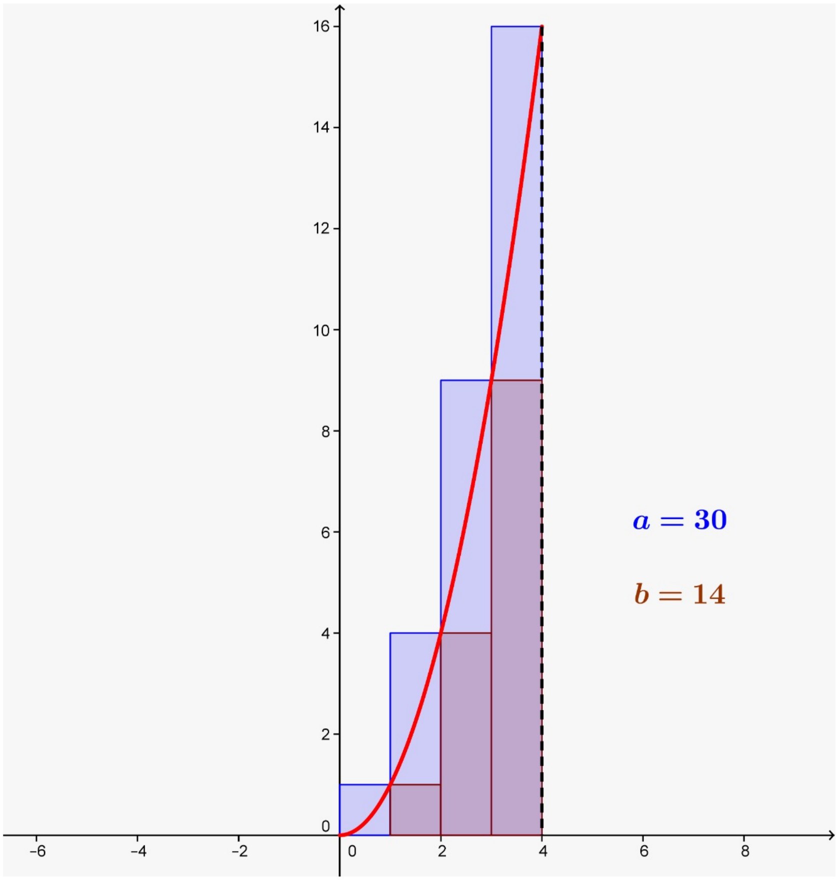
Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3.27 de Lima (2018, p. 134).

Figura 39 – Área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,4]$



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3.28 de Lima (2018, p. 134).

Figura 40 – Soma por excesso e por falta



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3.32 de Lima (2018, p. 137).

pelos valores de a e de b, ou seja, a área da região abaixo da curva do gráfico que queremos calcular fica limitada pelos valores da Soma Superior (a) e da Soma Inferior (b):

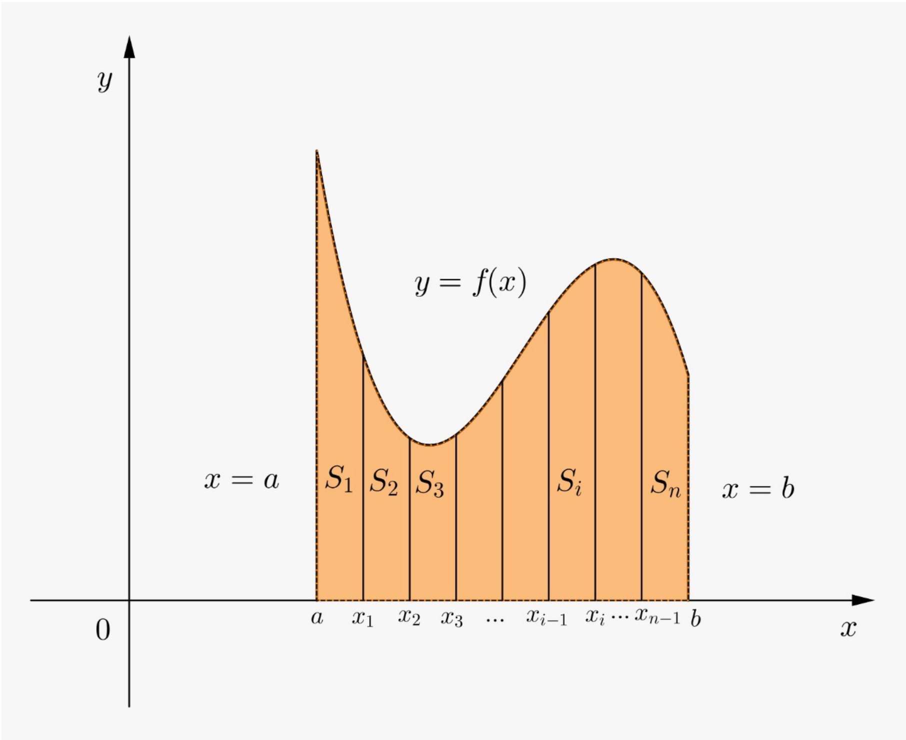
$$\text{Soma inferior } (b) \leq \text{Área procurada} \leq \text{Soma superior } (a).$$

O próximo passo é mostrar que o aumento do número de retângulos resulta em uma aproximação cada vez maior da área procurada e, em seguida, pensar sobre o que ocorreria se o número de intervalos tendesse a infinito. De fato, seja a área S abaixo do gráfico da Figura 41, limitada pelo intervalo $[a,b]$. Começamos subdividindo-a em n faixas S_1; S_2; ... ; S_n de igual largura. A largura do intervalo $[a,b]$ é $b-a$ e, assim, a largura de cada uma das n faixas é dada por

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Essas faixas dividem o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_0;x_1]$; $[x_1;x_2]$; ... ; $[x_{n-1};x_n]$, onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. Logo, teremos que as extremidades dos subintervalos são $x_1 = a+\Delta x$, $x_2 = a+2\Delta x$, $x_3 = a+3\Delta x$ etc.

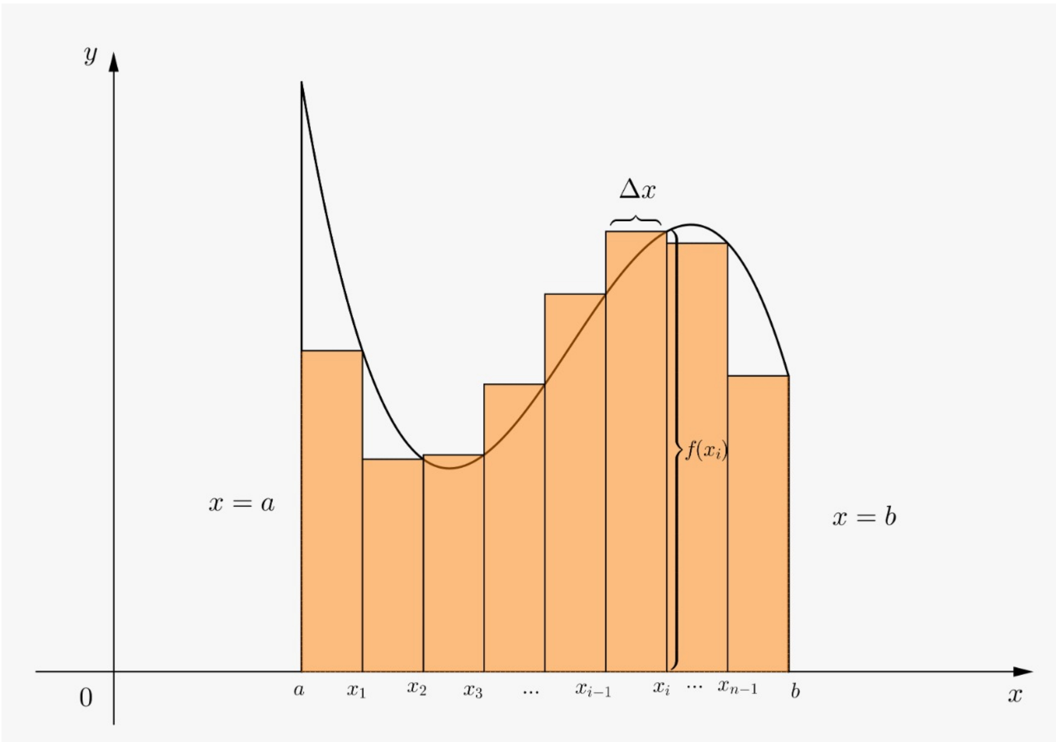
Figura 41 – Subdivisão em *n* faixas



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3.34 de Lima (2018, p. 138).

A área de cada faixa, de largura Δx e altura igual ao valor da função f, é a área do i-ésimo retângulo, que será dada por $f(x_i)\Delta x$.

Figura 42 – Subintervalos



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3.35 de Lima (2018, p. 139).

Como a área S está sendo aproximada pela soma das áreas desses retângulos, podemos escrever que, quando $n \longrightarrow \infty$, a área S sob o gráfico da função f é o limite da soma das áreas dos retângulos, isto é,

$$\text{Área } S = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x].$$

Essa ideia, tratada de forma mais refinada, é denominada de Soma de Riemann.

O objetivo da proposta de Lima é levar o aluno a concluir que, aumentando o número de retângulos, encontramos valores cada vez mais próximos da área da região limitada pelo gráfico da função f.

O autor sugere, então, uma aplicação em que busca explorar a ideia de aproximação da área de uma região definida, introduzindo de maneira superficial a ideia da Soma de Riemann, sem preocupação com a formalização.

Exemplo
Estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo (segundos) dado pela tabela abaixo.

Figura 43 – Cinemática

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Tabela 18 de Lima (2018, p. 140).

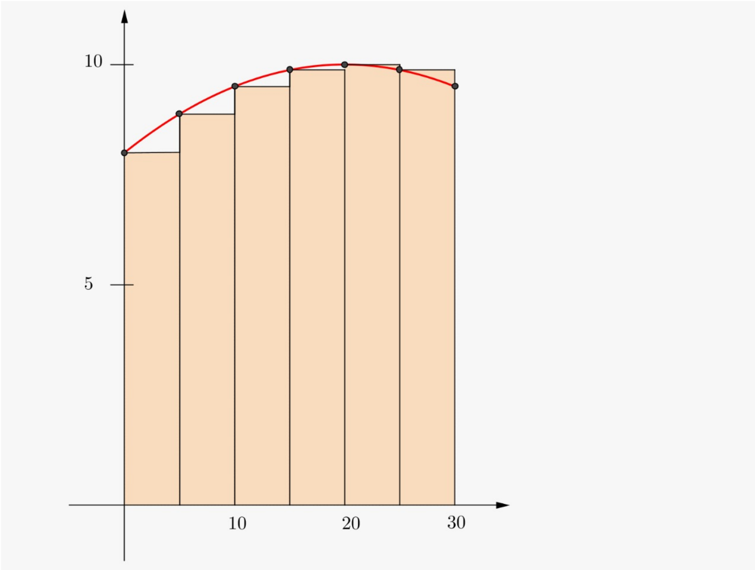
Discussão

Primeiramente, devemos lembrar que a distância percorrida é igual ao produto da velocidade pelo tempo. Traçando um gráfico de velocidade por tempo, observamos que isso é o mesmo que somar as áreas dos retângulos, como representado na Figura 44.

Logo, a área aproximada (por falta) será igual à soma das áreas das distâncias percorridas em cada intervalo, isto é, 342 m. De forma análoga, a área aproximada (por excesso) será igual a 367 m, o que mostra que a distância está entre 342 m e 367 m.

Em seguida, Lima propõe a realização de algumas atividades, inicialmente, no papel e, posteriormente, com o auxílio do *software* Geogebra, no intuito de os alunos perceberem o

Figura 44 – Distância percorrida



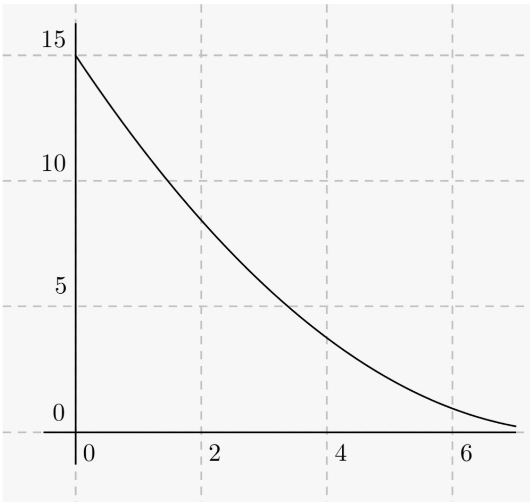
Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3.36 de Lima (2018, p. 140).

seu refinamento gradual.

Atividade 1

O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado abaixo. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios eram acionados (STEWART, 2009).

Figura 45 – Velocidade do carro freando



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3.37 de Lima (2018, p. 141).

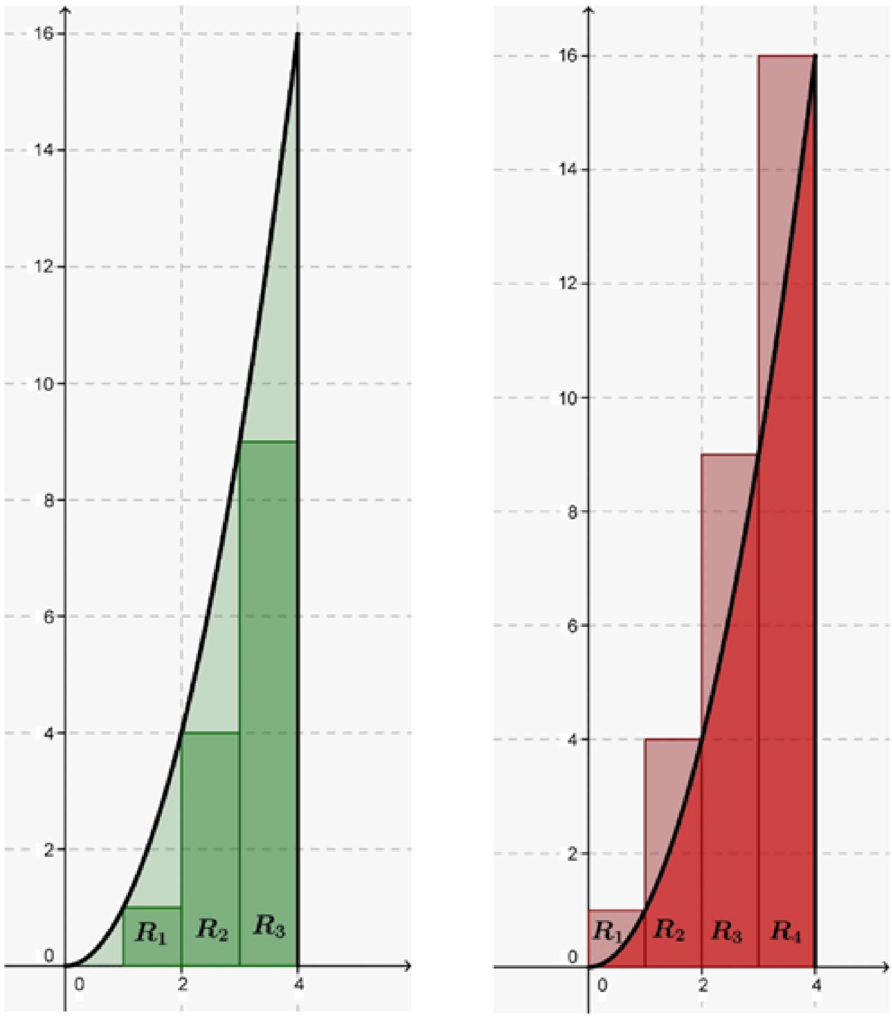
Discussão

A atividade tem o intuito de mostrar a aplicação dos resultados vistos em situações familiares ao aluno, usando elementos da Física para descrever tal cenário. Segundo o autor, se o professor buscar relacionar os conteúdos com situações reais, que exijam do aluno a reflexão e o raciocínio, a partir de contextos que façam sentido, os resultados serão mais proveitosos.

Atividade 2

Considere a função $f(x) = \frac{x^2}{2}$*. Abaixo, foram feitas aproximações, por retângulos, da área abaixo da curva no intervalo dado (ALMEIDA, 2014).*

Figura 46 – Aproximação por falta e por excesso



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 3.37 de Lima (2018, p. 142).

Utilizando seus conhecimentos sobre o cálculo da área de retângulos, preencha as tabelas. Logo, qual é o intervalo em que a área real estaria definida?

Discussão

O objetivo dessa atividade é explorar a ideia de aproximação das áreas das regiões definidas. A ideia intuitiva de integral (definida) foi trabalhada a partir da observação, de modo

Figura 47 – Aproximação por falta. Aproximação por excesso.

	Base b	Altura h = f(x)	Área = b·h
Retângulo 1 R1			
Retângulo 2 R2			
Retângulo 3 R3			

	Base b	Altura h = f(x)	Área = b·h
Retângulo 1 R1			
Retângulo 2 R2			
Retângulo 3 R3			
Retângulo 4 R4			

Fonte: Elaborada pela autora, baseada nas Tabelas 19 e 20 de Lima (2018, p. 142).

que os alunos possam perceber que, quanto maior o número de retângulos considerados, melhor será a aproximação para o valor da área desejada.

Atividade 3

Considere a função definida por $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,b]$ (BRITO, 2013).

a. Dividindo $[0,b]$ em n intervalos, qual o comprimento de cada subintervalo?

b. Sabendo que a sequência $x_0 = b$, $x_1 = \frac{b}{n}$, $x_2 = \frac{2b}{n}$, ... , $x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n}$, $x_n = \frac{nb}{n}$ representa os pontos de subdivisão do intervalo, preencha a tabela abaixo.

Figura 48 – Área dos retângulos

x	Altura dos Retângulos Inferiores	Área dos Retângulos Inferiores	Altura dos Retângulos Superiores	Área dos Retângulos Superiores
0				
$\frac{b}{n}$				
$\frac{2b}{n}$				
$\frac{3b}{n}$				
$\frac{4b}{n}$				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\frac{(n-1)b}{n}$				

Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Tabela 21 de Lima (2018, p. 143).

c. Determine a expressão da soma das áreas dos retângulos em cada caso.

Discussão

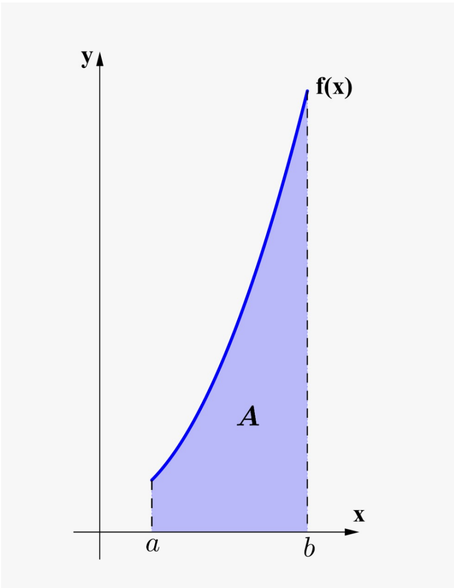
A sugestão do autor é fazer o aluno trabalhar com um pouco mais de simbologia e generalização. Vale ressaltar que o aluno provavelmente terá mais dificuldade nessa atividade, sendo necessária a intervenção do professor para destacar, por exemplo, a mudança no intervalo de definição da função feita anteriormente, pois a altura de cada retângulo é calculada através da imagem do valor inicial de cada partição. É interessante lembrar também que, na segunda parte da tabela, a altura de cada retângulo é calculada através da imagem do valor final de cada partição.

5.2.3 Sugestão 3

Machado (2016, p. 33) inicia seu capítulo sobre a noção de integral destacando que se trata de um conceito que surgiu a partir da necessidade de se calcularem áreas de figuras planas cujos contornos não são segmentos de reta.

Para introduzir o assunto, o autor considera o problema de calcular a área A da região limitada pela função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e o eixo das abscissas.

Figura 49 – Área sob o gráfico da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$

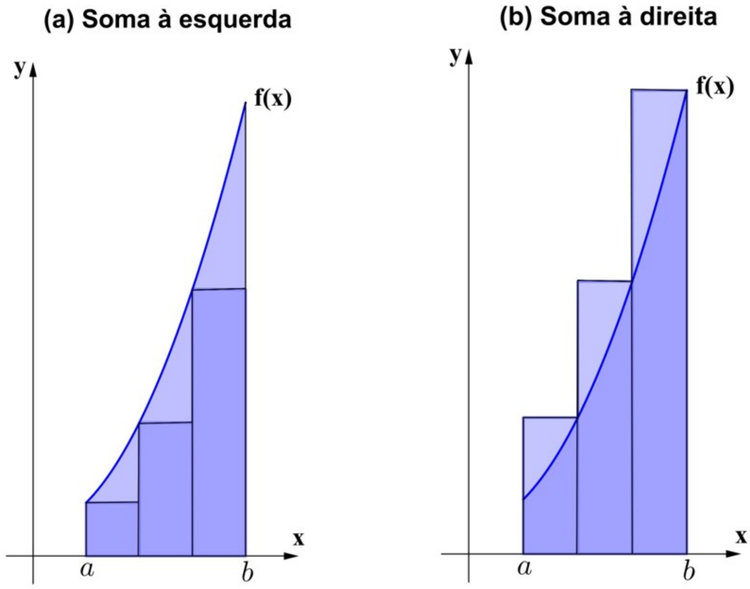


Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 5.1 de Machado (2016, p. 64).

Queremos descobrir a área do espaço sombreado, porém não dispomos de nenhuma fórmula geométrica que nos ajude a encontrar a área de uma figura curva. Machado começa aproximando a área usando figuras cujas áreas já possuem fórmulas e ressaltando que o processo de usar retângulos para aproximar uma área denomina-se Soma de Riemann.

Para simplificar, o autor aproxima a área do espaço sombreado utilizando três retângulos.

Figura 50 – Aproximação da área sombreada por soma à esquerda e à direita



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 5.2 de Machado (2016, p. 65).

Na figura 50a, somamos à esquerda, pois o canto esquerdo superior do retângulo toca a curva. Cada retângulo possui a mesma medida da base e a altura de cada um é dada pela altura da função da borda esquerda do retângulo. Analogamente, na figura 50b, somamos à direita.

Claramente, a área que os retângulos abrangem na figura 50a é menor do que o que há abaixo da curva. Entretanto, na figura 50b, a área que os retângulos abrangem é bem maior do que há abaixo da curva.

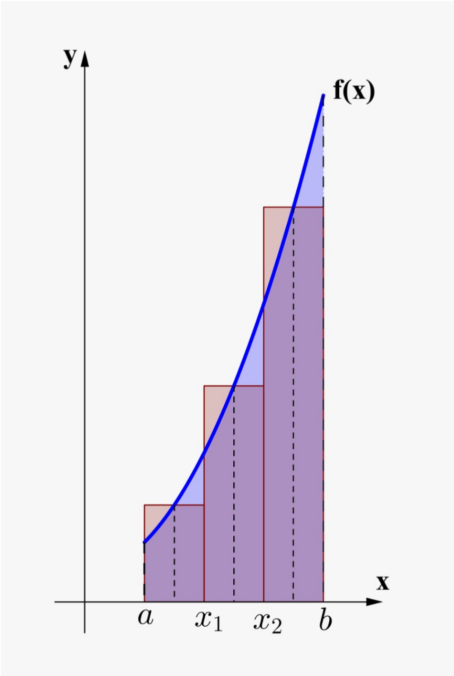
Machado sugere que o professor provoque os alunos no sentido de que consigam deduzir que, para que a soma das áreas dos retângulos se ajuste muito mais à área sombreada, deve-se aumentar o número de retângulos.

Vale salientar que o autor indica o uso do Geogebra com o intuito de que os alunos possam ter uma melhor visualização.

Pode-se definir também a soma média, cuja diferença da soma à direita e da soma à esquerda é a forma como se define a altura dos retângulos. Essa altura será o valor da função no ponto central do intervalo (ver Figura 51).

Também observamos que, à medida que aumentamos o número de retângulos, a medida da base de cada um diminui. Os matemáticos do século XVII interpretavam a área sob

Figura 51 – Obtenção da área sombreada utilizando a soma média



Fonte: Elaborada pela autora, baseada na Figura 5.3 de Machado (2016, p. 66).

um gráfico como a soma de uma infinidade de retângulos verticais, já que, em cada ponto x, há um retângulo de altura $f(x)$ e base infinitamente pequena, indicada por dx, de sorte que a área desse retângulo é dada pelo produto $f(x)dx$, que também é uma quantidade infinitamente pequena.

Escrevemos matematicamente a referida área A da seguinte maneira:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

5.3 Uma proposta para a introdução do conceito de integral no ensino médio

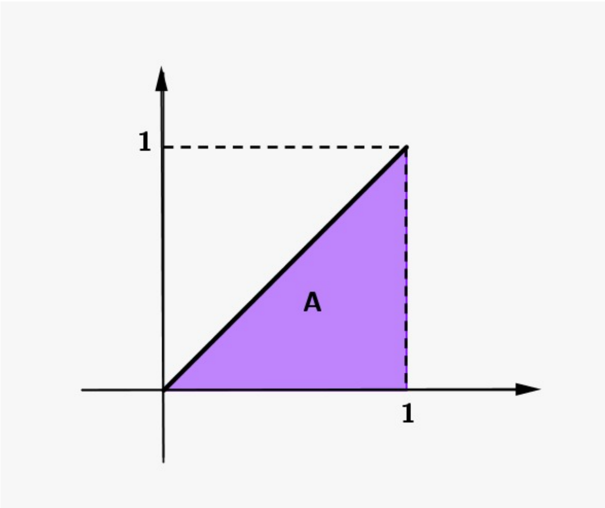
Nos capítulos predecessores, apresentamos uma proposta de como introduzir os conceitos de limite e de derivada no ensino médio. Doravante, pretendemos desenvolver uma proposta para a introdução do conceito de integral nesse nível de ensino.

Primeiramente, uma questão relevante que merece ser considerada é que, diferentemente do produzido nos capítulos anteriores, acreditamos que essa proposta atende a alunos do ensino médio com um perfil particular. Por exigir um nível mais elevado de conhecimento matemático, uma vez que se trata de uma abordagem com um pouco mais de sofisticação, pensamos que se trata de uma proposta mais adequada para alunos que apresentem um maior grau de vivência e de amadurecimento com a argumentação matemática. Nessa perspectiva, nos referimos a alunos do 3º ano de turmas especiais[1] e/ou que trabalham Matemática em nível olímpico.

Para tanto, a título de motivação, abrimos a discussão com o seguinte questionamento:

"Dada a região abaixo, qual é o valor da área A?"

Figura 52 – Qual é o valor da área A?



Fonte: Elaborada pela autora.

Acreditamos que o aluno de ensino médio facilmente perceberá que a região consiste em um triângulo retângulo de base b igual a 1 e altura h também igual a 1. Logo, a área A da região pode ser determinada por meio do cálculo da área de um triângulo, isto é,

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Ou, de forma alternativa, o aluno pode afirmar que se trata da metade de um quadrado de lado 1. Portanto,

$$A = \frac{l^2}{2} = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

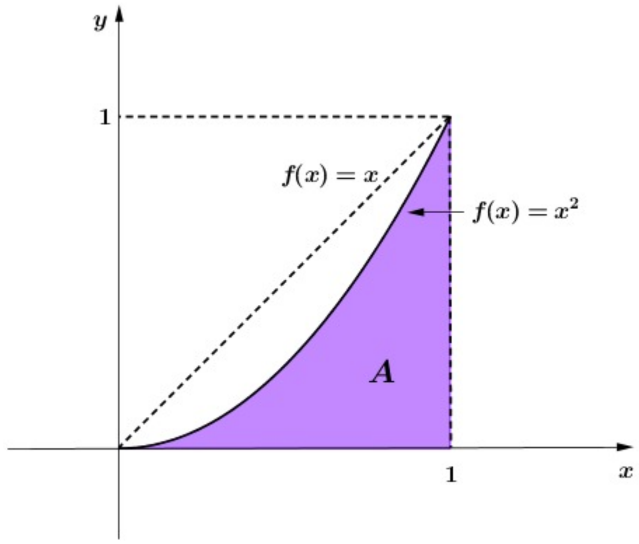
Independente do procedimento utilizado, notemos que encontrar a área A significa encontrar a área da região no plano que está abaixo do gráfico da função $f(x) = x$ no intervalo $[0,1]$ e limitada pelo eixo x.

[1] Consistem em turmas voltadas exclusivamente para a preparação para concursos como o do Instituto Militar de Engenharia e o do Instituto Tecnológico da Aeronáutica. Contam com uma estrutura diferenciada de ensino, sobretudo no que diz respeito à equipe de professores.

Neste momento, lançamos outra provocação:

"Qual é o valor da área A, considerando que $f(x) = x^2$?"

Figura 53 – Qual é o valor da área A, considerando que $f(x) = x^2$?



Fonte: Elaborada pela autora.

Embora estejamos considerando uma função com a qual o aluno de ensino médio tenha grande familiaridade, esse questionamento encerra um elevado grau de complexidade, tendo em vista que, até essa fase da escolaridade, o aluno está familiarizado somente com o cálculo de áreas de figuras geométricas planas cujos lados são segmentos de retas. A única exceção se dá quando do cálculo da área do círculo ou de partes do círculo.

A título de embasamento, é importante compreender por que a curva considerada não se trata de $\frac{1}{4}$ de um círculo de raio igual a 1. Efetivamente, suponhamos que a curva fosse uma parte de um círculo. Consequentemente, dado um ponto $(x, f(x))$ pertencente à curva, teríamos que $(x, f(x))$ satisfaz à equação do círculo de raio 1, ou seja,

$$x^2 + (f(x))^2 = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + x^4 = 1\,. \tag{5.1}$$

Notadamente, o ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pertence ao círculo de raio 1, pois

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1.$$

Substituindo o ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ na equação (4.1), obtemos

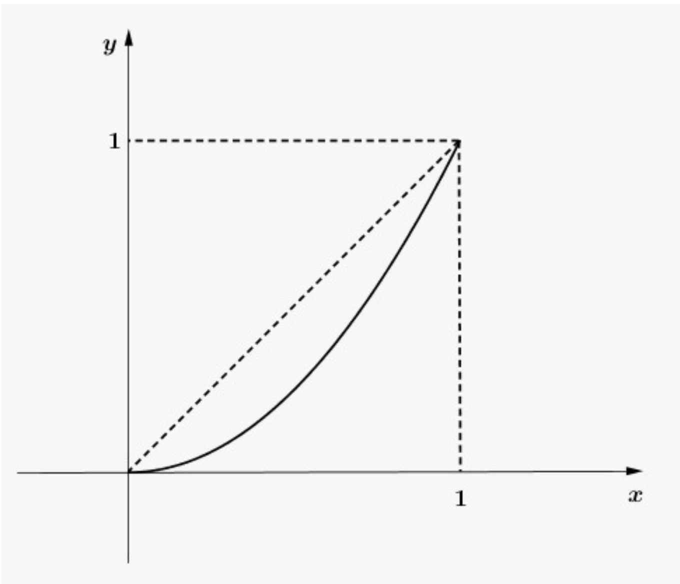
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \;=\; \frac{2}{4}+\frac{4}{16} \;=\; \frac{3}{4} \;\neq\; 1,$$

o que nos mostra que $x^2+x^4=1$ não representa a equação de um círculo.

Prosseguindo com a discussão, que tem por escopo determinar o valor da área A, vamos estimá-la por meio do cálculo, por excesso e por falta, da área de retângulos, uma vez que se trata da figura geométrica plana mais simples que podemos usar. Para tal, vamos tentar, a partir de um número finito de passos subsequentes, melhorar tanto a estimativa por falta quanto a por excesso.

Primeiramente, vamos calcular o valor da área A dispondo de apenas um retângulo.

Figura 54 – Calculando o valor da área A, dispondo de apenas um retângulo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observamos que, no caso do cálculo por falta, temos um retângulo de base 1 e altura igual a 0. Denotando por $\underline{A_1}$ a estimativa, por falta, do valor da área A com apenas um retângulo, concluímos que

$$\underline{A_1} = 1 \cdot 0 = 0. \tag{5.2}$$

No caso do cálculo por excesso, temos um retângulo de base 1 e altura também igual a 1, o que equivale a um quadrado de lado 1. Denotando por $\overline{A_1}$ a estimativa, por excesso, do valor da área A com apenas um retângulo, segue que

$$\overline{A_1} = 1 \cdot 1 = 1^2 = 1. \tag{5.3}$$

Por construção, sabemos que

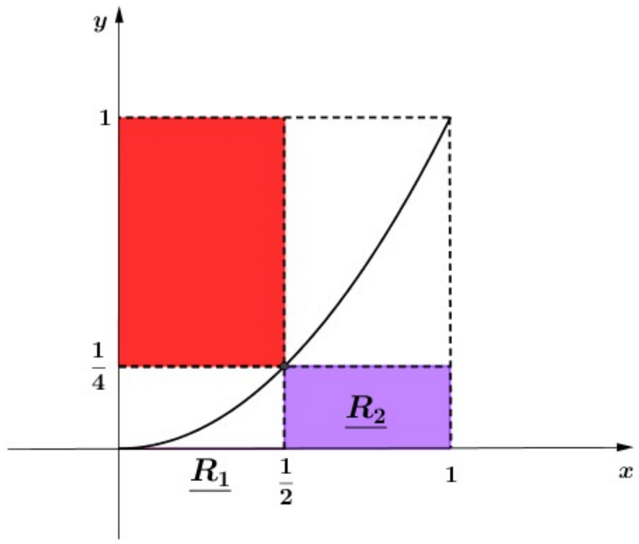
$$\underline{A_1} \leq A < \overline{A_1}. \tag{5.4}$$

Substituindo, em (4.4), os valores encontrados para $\underline{A_1}$, em (4.2), e para $\overline{A_1}$, em (4.3), obtemos que

$$0 \leq A < 1.$$

Vamos, agora, calcular o valor da área A dispondo de dois retângulos. Sem perda de generalidade, vamos considerar dois retângulos com bases iguais.

Figura 55 – Calculando, por falta, o valor da área A, dispondo de dois retângulos com bases iguais.



Fonte: Elaborada pela autora.

Conforme podemos verificar na figura, obtemos um total de quatro retângulos, sendo o vermelho desnecessário para fins do cálculo da estimativa do valor da área A. Podemos, dessa forma, desprezar sua área, que é igual a

$$A_{vermelho} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \ .$$

Com relação à estimativa por falta, observamos que $\underline{A_2} = \underline{R_1} + \underline{R_2}$. Calculando as áreas dos retângulos $\underline{R_1}$ e $\underline{R_2}$, obtemos

$$\underline{A_2} = \underline{R_1} + \underline{R_2} = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \ .$$

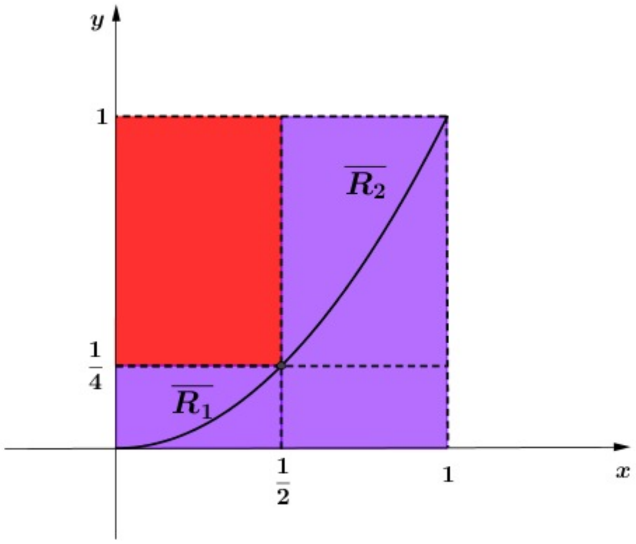
Escrevendo $\underline{A_2}$ em termos da função f, obtemos

$$\underline{A_2} = f(0) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \ .$$

O cálculo por excesso, por sua vez, leva-nos a $\overline{A_2} = \overline{R_1} + \overline{R_2}$ e, daí, segue que

$$\overline{A_2} = \overline{R_1} + \overline{R_2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + f(1) \cdot \frac{1}{2} \ .$$

Figura 56 – Calculando, por excesso, o valor da área A, dispondo de dois retângulos com bases iguais.



Fonte: Elaborada pela autora.

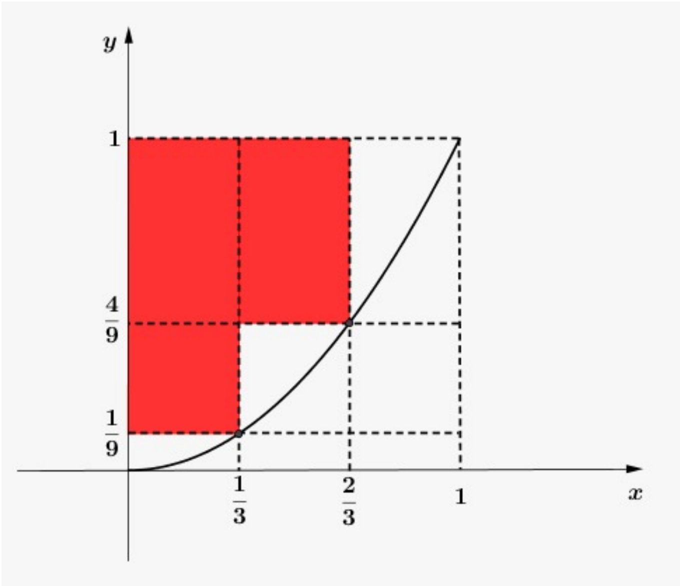
Convém lembrar que, por construção, temos que

$$\underline{A_2} \leq A < \overline{A_2} \ .$$

O próximo passo será calcular o valor da área A dispondo de três retângulos. Mais uma vez, sem perda de generalidade, vamos considerar três retângulos com bases iguais (ver Figura 57).

Dos noves retângulos formados na figura, verificamos que os vermelhos não contribuem nem para o cálculo, por falta, da estimativa do valor da área A nem tampouco para o

Figura 57 – Calculando o valor da área A, dispondo de três retângulos com bases iguais.



Fonte: Elaborada pela autora.

cálculo por excesso. Dessa forma, podemos desprezar suas áreas, que correspondem a

$$A_{vermelho} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \ .$$

O cálculo por falta leva-nos a concluir que

$$\underline{A_3} = \underline{R_1} + \underline{R_2} + \underline{R_3} = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = f(0) \cdot \frac{1}{3} + f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} \ ,$$

enquanto o cálculo por excesso conduz-nos a

$$\overline{A_3} = \overline{R_1} + \overline{R_2} + \overline{R_3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + f(1) \cdot \frac{1}{3} \ .$$

Novamente, por construção, temos que

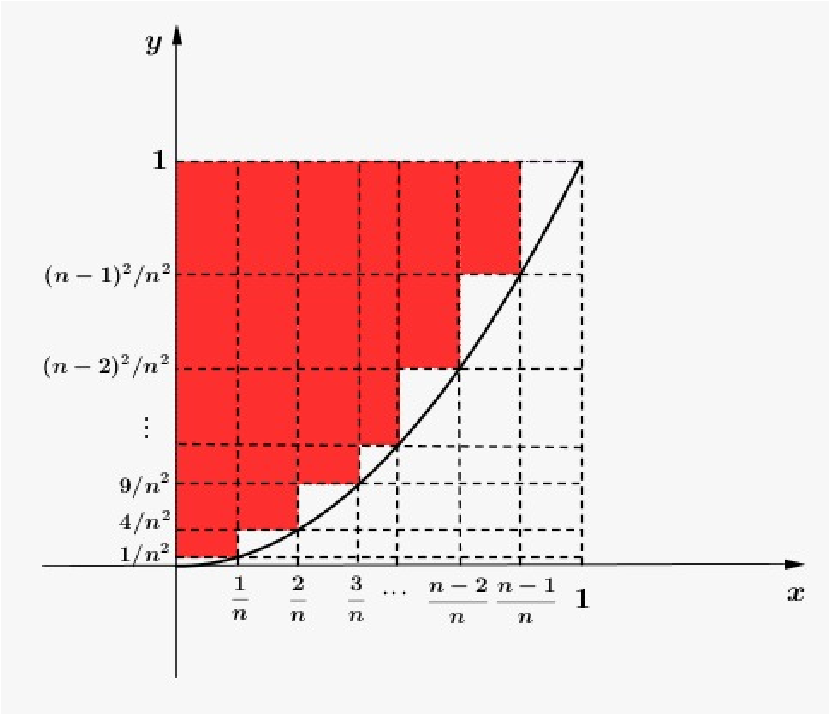
$$\underline{A_3} \leq A < \overline{A_3} \ .$$

Uma vez compreendido o processo de estimativa do cálculo do valor da área A, por meio do sucessivo aumento do número de retângulos em que a região foi dividida, observamos que há um padrão.

Suponhamos, então, que, de maneira geral, dispomos de n retângulos com bases iguais, sendo $n \geq 4$, como pode ser visto na Figura 58.

É fácil ver que formamos n^2 retângulos e que podemos desprezar, de cada linha de retângulos a partir do eixo x, um retângulo vermelho a mais. Dessa maneira, verificamos que, de fato, a área desprezada continua aumentando.

Figura 58 – Calculando o valor da área A, dispondo de n retângulos com bases iguais, sendo $n \geq 4$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Escrevendo $\underline{A_n}$ e $\overline{A_n}$ apenas em termos de f, seguindo esse padrão observado, obtemos

$$\underline{A_n} = f(0)\cdot\frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\overline{A_n} = f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f(1)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right)$$

Convém ressaltar que, nas expressões obtidas para $\underline{A_n}$ e $\overline{A_n}$, temos que $n-1 \in \mathbb{N}$, pois consideramos $n \geq 4$.

À semelhança do que observamos anteriormente, temos, por construção, que

$$\underline{A_n} < A < \overline{A_n} \;.$$

Notemos que o procedimento utilizado para a estimativa do cálculo, por falta e por excesso, do valor da área A nos conduz à seguinte relação:

$$\underline{A_1} < \underline{A_2} < \underline{A_3} < \ldots < \underline{A_{n-1}} < \underline{A_n} < A < \overline{A_n} < \overline{A_{n-1}} < \ldots < \overline{A_3} < \overline{A_2} < \overline{A_1}$$

e, assim, percebemos que o objeto geométrico construído no plano, em termos de área, está tentando se aproximar de A.

Isso nos orienta no sentido de buscar investigar se $\underline{A_n}$ aproxima-se de um valor L quando tomamos n suficientemente grande, mas também se $\overline{A_n}$ aproxima-se desse mesmo valor L quando tomamos n suficientemente grande, ou seja,

$$\text{se } \underline{A_n} \to L \text{ quando } n \to \infty$$

e

$$\text{se } \overline{A_n} \to L \text{ quando } n \to \infty \ .$$

Após a investigação, se concluirmos que $\underline{A_n}$ e $\overline{A_n}$ se aproximam de um mesmo número L, então $L = A$.

Com efeito, suponhamos que $L \neq A$. Tomemos $A < L$.

Se $A < L$, então teríamos $\underline{A_n} > A$, para algum valor suficientemente grande de n, pois $\underline{A_n}$ vai para L. Porém, isso não é possível, tendo em vista que, por construção, $\underline{A_n}$ está se aproximando de A com valores menores do que A.

De forma análoga, se $A > L$, então teríamos $\overline{A_n} < A$, para algum valor suficientemente grande de n, pois $\overline{A_n}$ vai para L. Isso é impossível, considerando-se que, por construção, $\overline{A_n}$ está se aproximando de A com valores maiores do que A.

Na verdade, a investigação que estamos fazendo remete-nos ao conceito de limite que vimos no Capítulo 2. Nosso objetivo é, pois, investigar duas funções, que deixaram de ser na variável x e passaram a ser na variável n, com $n \in \mathbb{N}$, a saber:

$$\begin{aligned} F_1 : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \underline{A_n} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} F_2 : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \overline{A_n} \end{aligned} \ .$$

Entendendo as funções F_1 e F_2

Nosso objetivo é entender o comportamento das funções F_1 e F_2.

Sabemos que

$$F_1(n) = \underline{A_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

e

$$F_2(n) = \overline{A_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) \ .$$

Como $f(x) = x^2$, então

$$F_1(n) = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \tag{5.5}$$

e

$$F_2(n) = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 \ . \tag{5.6}$$

Diante do exposto, concluímos que, para entender F_1 e F_2, precisamos entender os somatórios $\sum_{i=0}^{n-1} i^2$ e $\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2$, respectivamente. De maneira geral, isso significa determinar o objeto matemático da forma

$$S_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} i^k \text{ , com } k \in \mathbb{N}, \tag{5.7}$$

e, posteriormente, restringirmos apenas ao caso particular em que $k = 2$, ou seja,

$$S_{2,n} = \sum_{i=1}^{n} i^{\,2} \ .$$

Determinando $S_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} i^k$, com $k \in \mathbb{N}$

Para determinar (4.7), é necessário evocarmos os conhecimentos de Recorrência[2] e de Binômio de Newton[3].

Em se tratando de um argumento que envolve recorrência, sabemos que conseguiremos determinar um termo por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s). Sendo assim, nossa estratégia irá requerer o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s). Para isso, vamos começar estudando o número $(n+1)^{k+1}$.

Vejamos.

Podemos definir o número $(n+1)^{k+1}$ em termos de $S_{k,n}$. De fato,

$$(n+1)^{k+1} = S_{k+1,n+1} - S_{k+1,n} = \sum_{j=1}^{n+1} j^{k+1} - \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} \ .$$

Ora, podemos reescrever $\sum_{j=1}^{n+1} j^{k+1}$ como $1 + \sum_{j=2}^{n+1} j^{k+1}$. Daí, segue que

$$(n+1)^{k+1} = \left(1 + \sum_{j=2}^{n+1} j^{k+1}\right) - \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^{k+1} - i^{k+1}\right] \ . \tag{5.8}$$

[2] Vide Apêndice A.
[3] Vide Apêndice B.

Notemos que $(i+1)^{k+1}$ é um Binômio de Newton e, portanto, pode ser expandido e escrito como

$$(i+1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^{k+1-j}.$$

Substituindo em (4.8), obtemos

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^{k+1-j} - i^{k+1} \right]. \tag{5.9}$$

Observemos que, para $j = 0$, temos que

$$\binom{k+1}{0} i^{k+1} - i^{k+1} = 0 \ .$$

Logo, a expressão (4.9) pode ser reescrita como

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^{k+1-j} \right] = 1 + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} \left[\sum_{i=1}^{n} i^{k+1-j} \right] \ .$$

Mas, por (4.7), $\sum_{i=1}^{n} i^{k+1-j} = S_{k+1-j,n}$, o que nos leva, então, a uma fórmula para obter todos os $S_{k,n}$ até k, desde que conheçamos seus antecessores:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} S_{k+1-j,n} \ . \tag{5.10}$$

Visto que $(n+1)^{k+1}$ é uma unidade mais a soma dos produtos de números que são combinações por $S_{1,n}$, $S_{2,n}$, $S_{3,n}$, $S_{4,n}$, ..., $S_{k,n}$, então, se conhecermos $S_{1,n}$, $S_{2,n}$, $S_{3,n}$, $S_{4,n}$, ..., $S_{k-1,n}$, obtemos $S_{k,n}$[4]. Por conseguinte, quanto maior for o valor de k, mais valores de $S_{k,n}$ serão necessários.

Nesse sentido, para entender $S_{2,n}$, precisamos de $S_{1,n}$ e de $S_{0,n}$[5].

Estudando $S_{k,n}$ para $k = 0, 1$ e 2.

Vimos, anteriormente, que $S_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} i^k$, com $k \in \mathbb{N}$.

Fazendo, então, $k = 0$, obtemos

$$S_{0,n} = \sum_{i=1}^{n} i^0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n. \tag{5.11}$$

---

4 Nesse caso, dizemos que $S_{k,n}$ é uma recorrência linear não homogênea de ordem k. Vide Apêndice A.

5 Em particular, $S_{2,n}$ é uma recorrência linear não homogênea de segunda ordem. Vide Apêndice A.

Para $k = 1$, segue que

$$S_{1,n} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1) \cdot n}{2}. \tag{5.12}$$

Para $k = 2$, chegamos à expressão

$$S_{2,n} = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Pelo processo de recorrência, com $k = 2$, temos

$$(n+1)^3 = 1 + \sum_{j=1}^{3} \binom{3}{j} S_{3-j,n} = 1 + 3 \cdot S_{2,n} + 3 \cdot S_{1,n} + 1 \cdot S_{0,n}. \tag{5.13}$$

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.13), obtemos

$$3 \cdot S_{2,n} = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n - 1 \ = \ (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] \ = \ \frac{n+1}{2}\left[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2\right]$$

$$= \ \frac{n+1}{2}\left[2n^2 + 2\right] \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

e, portanto,

$$S_{2,n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad . \tag{5.14}$$

Determinando as funções F_1 e F_2

Como $\sum_{i=1}^{n} i^2 = S_{2,n}$, então segue que

$$F_1(n) = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot S_{2,n-1} \tag{5.15}$$

e

$$F_2(n) = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot S_{2,n} \quad . \tag{5.16}$$

Substituindo (4.14) em (4.15) e (4.16), respectivamente, chegamos às seguintes expressões para F_1 e F_2:

$$F_1(n) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \tag{5.17}$$

e

$$F_2(n) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \quad . \tag{5.18}$$

Calculando $\lim\limits_{n\to\infty} F_1(n)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} F_2(n)$

De acordo com (4.17), temos que

$$\lim_{n\to\infty} F_1(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{2n-1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_1(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) . \tag{5.19}$$

Analogamente, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} F_2(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) . \tag{5.20}$$

Considerando que o limite da soma é igual à soma dos limites e que o limite do produto é igual ao produto dos limites, para determinar o valor de $\lim\limits_{n\to\infty} F_1(n)$ e de $\lim\limits_{n\to\infty} F_2(n)$, basta calcularmos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} .$$

Cálculo do $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$

Utilizando a proposta apresentada no Capítulo 2 para a introdução do conceito de limite no ensino médio, consideremos a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$, com $k \in \mathbb{N}$.

Considere $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Queremos determinar o valor de L.

Em outras palavras, queremos determinar o valor do qual $f(x)$ se aproxima quando x assume valores maiores do que qualquer número real.

Notemos que os pontos $Q_x = (x, f(x)) = \left(x, \dfrac{1}{x^k}\right)$ são tais que, quando x assume valores suficientemente grandes, $\dfrac{1}{x^k}$ aproxima-se de L. Isso significa dizer que $\dfrac{1}{x^k}$ assume valores distintos cada vez mais próximos de L à medida que x assume valores suficientemente grandes.

Denotemos esses valores por L_x. Como $L_x = \dfrac{1}{x^k}$, segue que

$$x = \sqrt[k]{\frac{1}{L_x}}. \tag{5.21}$$

Pela definição de L_x, temos que $L_x \longrightarrow L$. Assim, $\sqrt[k]{\dfrac{1}{L_x}} \longrightarrow \sqrt[k]{\dfrac{1}{L}}$ e, portanto, de (4.21), obtemos que

$$x \longrightarrow \sqrt[k]{\frac{1}{L}}. \tag{5.22}$$

Mas, por outro lado, sabemos que

$$x \longrightarrow +\infty, \tag{5.23}$$

o que significa dizer que x assume valores maiores do que qualquer número real.

De (4.22) e (4.23), podemos concluir que $\dfrac{1}{L}$ assume valores suficientemente grandes e, consequentemente, L assume valores suficientemente pequenos. Isso equivale a afirmar que L se aproxima de 0, o que mostra que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \text{com } k \in \mathbb{N}. \tag{5.24}$$

Com esse resultado, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{5.25}$$

Calculando o valor da área A

Substituindo (4.25) em (4.19) e (4.20), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} F_1(n) = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\right] \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \left[\lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)\right] \;=\; \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \;=\; \frac{1}{3}$$

e, de forma análoga,

$$\lim_{n\to\infty} F_2(n) = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\right] \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \left[\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

Como mencionamos anteriormente, se concluíssemos que $\underline{A_n}$ e $\overline{A_n}$ se aproximam de um mesmo número L, o que equivale a dizer que $\lim\limits_{n\to\infty} F_1(n) = L$ e $\lim\limits_{n\to\infty} F_2(n) = L$, então $L = A$.

Ora, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} F_1(n) = \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} F_2(n).$$

Logo,

$$A = \frac{1}{3}.$$

Diante do exposto, podemos definir **a integral de $f(x)$ no intervalo** $[0,1]$ como o $\lim\limits_{n\to\infty} F_1(n)$ ou como o $\lim\limits_{n\to\infty} F_2(n)$.

Calculando a integral de uma função em um intervalo qualquer $[a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$

A pergunta natural que surge é como proceder para calcular a integral de uma função em um intervalo $[a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$.

Na verdade, a resposta é trivial: vamos adotar um procedimento análogo ao utilizado no caso do intervalo $[0,1]$.

Antes, porém, cabe destacar que, como vimos anteriormente, o procedimento funciona. Além disso, $F_1(n)$ e $F_2(n)$ aproximam-se do mesmo valor. Basta, portanto, calcular apenas um dos dois. Em particular, é suficiente calcular $F_2(n)$.

De acordo com o procedimento, o intervalo $[a,b]$ deve ser dividido em n partes iguais, com medida $\dfrac{b-a}{n}$ cada uma. Tal partição visa a formar n retângulos com base igual a $\dfrac{b-a}{n}$. Dessa forma, podemos definir

$$
\begin{aligned}
&x_0 = a\\
&x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n} = a + \frac{b-a}{n}\\
&x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)\\
&.\\
&.\\
&.\\
&x_i = a + i \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)\\
&.\\
&.\\
&.\\
&x_n = a + n \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = b
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$F_2(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)\right) .$$

Logo, a **integral da função f no intervalo $[a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$**, será dada por

$$\lim_{n\to\infty} F_2(n) \; ,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)\right) .$$

5.4 Calculando a área de subconjuntos do plano

Uma vez apresentado o conceito de integral enquanto ferramenta matemática que permite o cálculo da área de figuras que possuem partes curvas, mas não são círculos, parece-nos razoável pensar que o aluno de ensino médio pode imaginar que, por meio da integral, seja possível calcular a área de qualquer subconjunto do plano.

Dessa forma, esta seção tem por objetivo responder se, com a noção do conceito de integral, é possível calcular a área de qualquer subconjunto do plano. E, assim, por conseguinte, fundamentar o professor a fim de que ele esteja em condições de responder, com propriedade, ao seguinte questionamento:

"É possível calcular a área de qualquer subconjunto do plano ($\mathbb{R}^2$) de tal sorte que 'noções intuitivas' sejam preservadas?"

Em termos matemáticos, estamos perguntando se existe uma função, denominada de função **área**,

$$\mathbf{A} : \mathscr{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0,\infty),$$

onde $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ é o conjunto das partes do $\mathbb{R}^2$, tal que as seguintes propriedades se verificam:

$(P1)$ Se $E_1, E_2 \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ e $E_1 \subset E_2$, então $\mathbf{A}(E_1) \leq \mathbf{A}(E_2)$.

$(P2)$ Se Q_* é o quadrado de aresta 1, centrado na origem do plano cartesiano, então $\mathbf{A}(Q_*) = 1$.

$(P3)$ Se $E \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ e $h \in \mathbb{R}^2$, então, se $E + h := \{x + h \ ; \ x \in E\}$, vale $\mathbf{A}(E+h) = \mathbf{A}(E)$. O conjunto $E+h$ é a translação do conjunto E por h.

$(P4)$ Para qualquer família enumerável de conjuntos $\{E_j\}_{j\in M} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ disjuntos, então

$$\mathbf{A}\left(\bigcup_{j\in M} E_j\right) = \sum_{j\in M} \mathbf{A}(E_j).$$

É relevante ressaltar que essas propriedades denotam as "noções intuitivas" acima mencionadas. De fato, percebemos facilmente que todas elas são eminentemente intuitivas.

Com uma compreensão mais precisa do questionamento inicial, afirmamos que essa função não existe. Na realidade, sabemos que temos uma noção de área bem intuitiva, e que certamente não se restringe a essas quatro propriedades citadas. Assim, a resposta ao questionamento inicial, em outras palavras, nos diz que, considerando apenas essas quatro propriedades como nossas "noções intuitivas" de área, não é possível calcular a área de todos os subconjuntos do plano.

Vejamos a explicação. Para isso, precisaremos da definição e do resultado que se seguem.

Definição. Uma **relação de equivalência** $\sim$ entre os elementos de um conjunto A é uma relação tal que, para todos $a,b,c \in A$, valem as seguintes propriedades:
(i) **reflexiva:** $a \sim a$;
(ii) **simétrica:** $a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$;
(iii) **transitiva:** Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

Uma relação de equivalência permite *classificar* os elementos de A, uma vez que ele fica subdividido de maneira natural em subconjuntos denominados **classes de equivalências** formadas por elementos que estão relacionados, ou seja, que são **equivalentes entre si**.

Axioma da Escolha. Dada uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ não vazia, de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, então existe um conjunto C contendo exatamente um elemento de cada $A_\alpha, \forall\ \alpha \in J$.

Em linhas gerais, nosso objetivo será construir uma família finita de conjuntos disjuntos do plano. Observemos, porém, que a propriedade $(P4)$ vale para qualquer quantidade finita de conjuntos. Sendo assim, vamos construir uma família infinita enumerável de conjuntos disjuntos do plano, tendo em vista que, dessa família, podemos extrair qualquer família finita de conjuntos disjuntos, como objetivamos.

Suponhamos que exista a função $\mathbf{A}$, com as propriedades $(P1),(P2),(P3)$ e $(P4)$. Consideremos os seguintes conjuntos do plano:

$Q = [0,1] \times [0,1]$, que, em termos geométricos, representa um quadrado

e

$E = [0,1) \times [0,1]$ representa um quadrado menos uma aresta.

Afirmação 1. $\mathbf{A}(E) = \mathbf{A}(Q) = \mathbf{A}(Q_*) = 1$.

Prova

Notemos que Q_* é a translação de Q por $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Dessa maneira, pela propriedade $(P3)$, temos que $\mathbf{A}(Q)=\mathbf{A}(Q_*)$.

Se $E^*=\{(1,t)\ ;\ t\in[0,1]\}$, que, em termos geométricos, representa a aresta que falta de E, então $Q=E\ \bigcup\ E^*$, sendo E e E^* conjuntos disjuntos. Assim, por $(P4)$, temos que $1=\mathbf{A}(Q)=\mathbf{A}(E)+\mathbf{A}(E^*)$.

Ora, queremos provar que $\mathbf{A}(E)=\mathbf{A}(Q)=1$. Logo, a afirmação será verdadeira se mostrarmos que $\mathbf{A}(E^*)=0$.

Suponhamos, por contradição, que $\mathbf{A}(E^*)=L>0$. Então, consideremos o retângulo

$$R=\left\{(x,y)\ ;\ 1-\frac{L}{4}\leq x\leq 1+\frac{L}{4}\ ,\ 0\leq y\leq 1\right\}.$$

É fácil ver que $\mathbf{A}(R)=\frac{L}{2}\cdot 1=\frac{L}{2}$.

Como $E^*\subset R$, segue, de $(P1)$, que $L=\mathbf{A}(E^*)\leq\mathbf{A}(R)=\frac{L}{2}$, o que é um absurdo. Logo, $\mathbf{A}(E^*)=0$ e, portanto, segue a Afirmação 1.

Na prática, em termos de área, isso significa que vamos trabalhar com o conjunto E, mas é o mesmo que estarmos trabalhando com o conjunto Q.

Consideremos, agora, a seguinte relação de equivalência em $[0,1)$:

$$x\sim y\ \Leftrightarrow\ x-y\in\mathbb{Q}. \tag{5.26}$$

Claramente, a equivalência (4.26) gera classes de equivalência $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Pelo Axioma da Escolha, podemos escolher um elemento de cada E_λ, com $\lambda\in\Lambda$, e formar um novo conjunto com esses elementos escolhidos, o que implica que a cardinalidade do conjunto interseção desse novo conjunto com cada E_λ, $\lambda\in\Lambda$, é igual a 1. Em termos práticos, podemos construir o conjunto $N\subset[0,1)$ tal que a cardinalidade do conjunto $N\cap E_\lambda$ é igual a 1, $\forall\lambda\in\Lambda$. Isso significa que o conjunto N construído possui exatamente um elemento de cada classe de equivalência $E_\lambda,\lambda\in\Lambda$.

Conforme mencionado anteriormente, queremos construir uma família infinita enumerável de conjuntos. Uma vez construído $N\subset[0,1)$, podemos construir, por translação, vários outros diferentes entre si. Para isso, recorreremos aos números racionais pertencentes ao intervalo [0,1), ou seja, mediante a translação pelos números racionais pertencentes ao intervalo [0,1), podemos construir a família infinita enumerável de conjuntos que desejamos.

No entanto, precisamos garantir que todos esses conjuntos construídos por meio de translações sejam, de fato, subconjuntos do intervalo $[0,1)$. Em termos concretos, consideremos o conjunto N', construído por meio da translação do conjunto N por r', com $r'\in\mathbb{Q}$ e $0<r'<1$.

Se $N' \subset [0,1)$, não há o que fazer.

Suponhamos, então, que $N' \not\subset [0,1)$, isto é, $[1,1+r')\bigcap N' \neq \emptyset$.

Notemos que $\mid [1,1+r') \mid = \mid [0,r') \mid = r'$. Assim, tomemos o intervalo $[1,1+r')$ e, utilizando um artifício conveniente, "encaixemos no espaço ocupado" pelo intervalo $[0,r')$. Dessa forma, dado $r'_0 \in N'$ tal que $r'_0 \in [1,1+r')$, teremos que $r'_0 \in [0,r')$ e, portanto, $r'_0 \in [0,1)$.

Voltemos, agora, para a discussão no plano ($\mathbb{R}^2$).

Seja $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Definamos

$$N_r^1 := \{(x+r,t)\ ;\ x \in N \cap [0,1-r),\ t \in [0,1]\}$$

e

$$N_r^2 := \{(x+r-1,t)\ ;\ x \in N \cap [1-r,1),\ t \in [0,1]\},$$

isto é, em termos geométricos, N_r^1 é a translação de $(N \cap [0,1-r)) \times [0,1]$ por $(r,0)$ e N_r^2, a translação de $(N \cap [1-r,1)) \times [0,1]$ por $(r-1,0)$.

Definamos, então, que $N_r = N_r^1 \bigcup N_r^2$, sendo N_r^1 e N_r^2 conjuntos disjuntos.

Observemos que, pela propriedade (P4), temos que

$$\mathbf{A}(N_r) = \mathbf{A}(N_r^1) + \mathbf{A}(N_r^2).$$

Ora, os conjuntos N_r^1 e N_r^2 são translações de partes do conjunto N. Logo,

$$\mathbf{A}(N_r) = \mathbf{A}((N \cap [0,1-r)) \times [0,1]) + \mathbf{A}((N \cap [1-r,1)) \times [0,1]).$$

Como $((N \cap [0,1-r)) \times [0,1])$ e $(N \cap [1-r,1)) \times [0,1])$, por construção, são disjuntos, segue, por $(P4)$, que

$$\mathbf{A}(N_r) = \mathbf{A}(N \cap [0,1) \times [0,1]).$$

Mas, sabemos que $N \subset [0,1)$. Portanto,

$$\mathbf{A}(N_r) = \mathbf{A}(N \times [0,1]), \forall\, r \in \mathbb{Q} \cap [0,1),$$

o que significa que todos os conjuntos N_r, com $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, possuem a mesma área.

Temos, finalmente, a seguinte família infinita e enumerável de conjuntos

$$\{N_r\}_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)}. \tag{5.27}$$

É interessante observar que, se todos os conjuntos N_r, com $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, fossem dois a dois disjuntos, poderíamos aplicar sucessivamente a propriedade $(P4)$ e, então, concluir que a união de todos retorna ao conjunto original E.

Esse raciocínio nos direciona, pois, a mais duas afirmações.

Afirmação 2. Os conjuntos da família $\{N_r\}_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)}$ são dois a dois disjuntos.

Prova

Suponhamos, por contradição, que os conjuntos da família $\{N_r\}_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)}$ não sejam dois a dois disjuntos.

Então existem $r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, com $r \neq s$, tais que $N_r \cap N_s \neq \emptyset$.

Seja $x_0 \in N_r \cap N_s$.

Sabemos que existem $x_r \in N$ e $t \in [0,1]$ tais que

$$x_0 = (x_r + r\ ,\ t) \ \text{ ou } \ x_0 = (x_r + r - 1\ ,\ t).$$

Por outro lado, de forma análoga, existem $x_s \in N$ e $t \in [0,1]$ tais que

$$x_0 = (x_s + s\ ,\ t) \ \text{ ou } \ x_0 = (x_s + s - 1\ ,\ t).$$

Vamos analisar todas as possibilidades para x_0.

1^{o} caso: $x_0 = (x_r + r\ ,\ t)$, para $x_r \in N$ e $t \in [0,1]$

Se $x_0 = (x_s + s\ ,\ t)$, então $x_r + r = x_s + s$. Daí, segue que $x_r - x_s = s - r \in \mathbb{Q}$. Logo, x_r e x_s pertencem à mesma classe de equivalência, o que é um absurdo, pois a cardinalidade do conjunto $(N \cap E_\lambda)$ é igual a 1 $\forall \lambda \in \Lambda$.

Se, por outro lado, $x_0 = (x_s + s - 1\ ,\ t)$, então $x_r + r = x_s + s - 1$ e, assim, $x_r - x_s = (s-1) - r \in \mathbb{Q}$, o que significa que x_r e x_s pertencem à mesma classe de equivalência, que, como vimos anteriormente, é uma contradição.

2^{o} caso. $x_0 = (x_r + r - 1\ ,\ t)$, para $x_s \in N$ e $t \in [0,1]$

Se $x_0 = (x_s + s\ ,\ t)$, segue que $x_r + r - 1 = x_s + s$, donde vem que $x_r - x_s = s - (r - 1) \in \mathbb{Q}$ e, portanto, x_r e x_s pertencem à mesma classe de equivalência, o que é uma contradição.

De forma análoga, vemos que, se $x_0 = (x_s + s - 1\ ,\ t)$, também chegamos a uma contradição, pois $x_r - x_s = s - r \in \mathbb{Q}$, o que significa que x_r e x_s pertencem à mesma classe de equivalência.

Diante do exposto, concluímos que a afirmação é verdadeira, ou seja, os conjuntos da família $\{N_r\}_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1)}$ são dois a dois disjuntos.

Afirmação 3. $E = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} N_r$, sendo os conjuntos da família $\{N_r\}_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1)}$ dois a dois disjuntos.

Prova

Desde que $N_r \subset E$, $\forall\, r \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$, temos que $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} N_r \subseteq E$.

Seja agora $z_0 \in E$. Então,

$$z_0 = (x_0\ ,\ y_0), \text{onde } x_0 \in [0,1) \text{ e } y_0 \in [0,1].$$

Sabemos que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_0 \in E_{\lambda_0}$. Por outro lado, existe $\tilde{x_0} \in N$ tal que $\tilde{x_0} \in E_{\lambda_0}$, tendo em vista que N possui um elemento de cada uma das classes de equivalência.

Como x_0 e $\tilde{x_0}$ pertencem à mesma classe de equivalência, segue, daí, a existência de $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x_0 - \tilde{x_0} = r_0$. Logo, $x_0 = \tilde{x_0} + r_0$.

Notemos que $r_0 \in (-1,1)$. Se $r_0 \geq 0$, então $z_0 = (x_0\ ,\ y_0) \in N_{r_0}$.

Se $r_0 < 0$, temos que $x_0 = \tilde{x_0} + (1+r_0) - 1$, o que equivale a dizer que $z_0 \in N_{1+r_0}$.

Em resumo, isso significa que, dado $z_0 \in E$, então $z_0 \in N_r$, para algum $r \in \mathbb{Q}\cap[0,1)$, o que mostra que a afirmação é verdadeira.

Para concluir, vamos recorrer ao conceito de limite.

Seja $\{r_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathbb{Q}\cap[0,1)$ uma enumeração de todos os números racionais pertencentes ao intervalo $[0,1)$ e tome $k \in \mathbb{N}$.

Temos que:

$$1 = \mathbf{A}(E) = \mathbf{A}\left(\bigcup_{j\geq 1} N_{r_j}\right) \geq \mathbf{A}\left(\bigcup_{j\geq 1}^{k} N_{r_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{A}(N_{r_j}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{A}(N\times[0,1]) = k\cdot\mathbf{A}(N\times[0,1]).$$

Logo,

$$\mathbf{A}(N\times[0,1]) \leq \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\mathbf{A}(N\times[0,1]) = 0$$

e, daí, segue que

$$\mathbf{A}(N_{r_j}) = 0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Isto nos levaria a afirmar que, como $\bigcup_{j\geq 1} N_{r_j} \supset E$, então

$$1 = \mathbf{A}(E) \leq \mathbf{A}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_{r_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{A}(N_{r_j}) = 0.$$

Com essa relação, chegamos a uma contradição.

Concluímos, que, de fato, não existe a função $\mathbf{A} : \mathscr{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0,\infty)$, com as propriedades $(P1),(P2),(P3)$ e $(P4)$. Em outras palavras, como afirmamos anteriormente, considerando apenas as propriedades $(P1),(P2),(P3)$ e $(P4)$ como nossas "noções intuitivas", não é possível calcular a área de todos os subconjuntos do plano.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O foco desta pesquisa foi como introduzir os conceitos de limite, derivada e integral no ensino médio. Não se tratou, contudo, de introduzir os conceitos de Cálculo da forma como são trabalhados na educação superior, mas sim noções básicas de seus conceitos fundamentais. Para isso, não apenas exibimos sugestões contidas em dissertações de alunos do PROFMAT, mas também apresentamos uma proposta de como introduzir cada um desses conceitos nessa fase da escolaridade.

Uma breve análise da Base Nacional Comum Curricular - Etapa Ensino Médio, que consiste na legislação que orienta, atualmente, as práticas pedagógicas no Brasil, mostrou que tal proposta revela-se consistente diante do preconizado para o ensino da Matemática.

O Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, contribui para consolidar os conhecimentos desenvolvidos no ensino fundamental e agregar novos, ampliando o cabedal de recursos e estimulando processos mais elaborados de reflexão e de abstração do aluno para resolver problemas mais complexos. Seu caráter integrador favorece a construção de uma visão mais integrada da Matemática. Além de enriquecer os itinerários formativos da área de Matemática e suas Tecnologias, o Cálculo consiste ainda em uma ferramenta significativa no sentido de auxiliar na compreensão e na utilização de conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico.

Entendemos que, no que concerne ao processo de ensino e aprendizagem, não existem regras fixas para a introdução de um conhecimento específico. O contexto poderá determinar, em grande parte, o tratamento que o professor dará a cada assunto. No entanto, existem padrões que costumam ser adotados.

No tocante às abordagens sugeridas nas dissertações de alunos do PROFMAT de como introduzir os conceitos fundamentais do Cálculo no ensino médio, apesar da sua diversidade, nossos estudos indicam que o entendimento é de que sejam introduzidos sem o rigor e o formalismo que o ensino superior requer. Além disso, pode-se perceber também que todas as sugestões demandam apenas conhecimentos específicos de Matemática que já são familiares ao aluno de ensino médio e almejam atingir todo aluno desse segmento, o que ratifica o fato de o Cálculo ser um conhecimento acessível ao aluno desse nível de ensino.

As propostas apresentadas seguiram essa mesma linha de pensamento, com exceção da proposta de como introduzir o conceito de integral. Por se tratar de uma abordagem um pouco mais sofisticada, destinou-se a alunos com um reconhecido grau de vivência e de amadurecimento com a argumentação matemática.

Este trabalho ainda buscou contemplar uma dimensão específica do saber docente. Ao aprofundar a discussão do cálculo de áreas, mostrando que, considerando a noção intuitiva que temos da área de uma região, não é possível calcular a área de todo subconjunto do plano, contribuímos para ampliar o domínio do professor sobre essa temática, a fim de permitir que se tenha uma melhor atuação.

Finalmente, vale ressaltar que esta pesquisa representa apenas uma amostra do que as incursões pelo campo do estudo de como introduzir os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio podem proporcionar ao trabalho do professor de educação básica. No entanto, entendemos ser de nosso dever salientar que a temática problematizada por esta pesquisa está longe de se esgotar. Esperamos, com as discussões e observações aqui delineadas, suscitar no professor de educação básica a sua própria reflexão e o desejo de aprofundar tais questões, como forma de qualificar sua prática profissional.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, S. L. C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio.** 2008. 240 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

AVILA, G. O ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, Sociedade Brasileira de Matemática, n. 18. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/18/1/.htm>. Acesso em: 28 jun. 2019.

Apresentação: PROFMAT. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (site). Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/>. Acesso em: 24 jun. 2019.

BRASIL. **Lei 13.415, de 16 de fevereiro de 2017.** Altera as leis Nºs 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei Nº 5.452, DE 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei Nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei Nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil. Brasília, DF, 17 fev. 2017. Disponível em: <https://legis.senado.leg.br/norma/602639/publicacao/15657824>. Acesso em: 18 jun. 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

COSTA, J. M. A. da. **Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral como Ferramenta para Cálculos de Áreas das Figuras Planas no Ensino Médio.** 2016. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016.

FLORES, A. et al. **Software WxMaxima**. Santa Maria: UFSM, 2013. 52 p.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 298 p.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 2001.

LIMA, G. de S. B. **Explorando Noções Elementares do Cálculo em Sala de Aula, a partir de suas Aplicações e sob uma Perspectiva Histórica.** 2017. 176 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de cálculo da ufrgs. **Matemática Universitária**, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, n. 26/27, p. 123–146, jun./dez. 1999.

MACHADO, F. M. **Noções de cálculo I no ensino médio**: uma proposta de intervenção curricular. 2016. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2016.

MACHADO, N. J. **Cálculo no ensino médio**: já passou da hora. Imaginário puro (site). Disponível em: <https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-japassou-da-hora/>. Acesso em: 15 jun. 2019.

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo.** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORAES, M. S. F. **Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função.** 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MORGADO A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015 294 p.

O que é o Geogebra?. Geogebra (site). Disponível em: <https://www.geogebra.org./about>. Acesso em: 2 out. 2019.

ORFALI, F. **A conciliação da ideias do Cálculo com o currículo da educação básica**: o raciocínio covariacional. 2017. 214 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RIBEIRO, H. C. **Cálculo**: uso de recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no Ensino Médio. 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

ROCHA, J. S. de M. **O Ensino de Cálculo no Ensino Médio.** 2018. 62 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João Del Rei, São João Del Rei, 2018.

SILVA JÚNIOR, O. da. **Cálculo no Ensino Médio**: Números Reais. 2014. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

STEWART, J. **Cálculo, volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

APÊNDICE A – RECORRÊNCIAS

Muitas sequências numéricas são definidas por meio de recorrências, ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. A sequência (x_n) de números naturais pares 2, 4, 6, 8, ... pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2$.

Exemplo 2. Qualquer progressão aritmética (x_n) de razão r e primeiro termo a poder ser definida por $x_{n+1} = x_n + r, (n \geq 1)$, com $x_1 = a$.

Exemplo 3. Qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a poder ser definida por $x_{n+1} = q \cdot x_n$, com $(n \geq 1)$, com $x_1 = a$.

Exemplo 4. A sequência de Fibonacci (F_n), cujos termos são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $n \geq 0$ e $F_1 = F_2 = 1$.

Observe que, nos Exemplos 1, 2 e 3, temos recorrências nas quais cada termo é expresso em função do antecessor imediato. Nesse caso, dizemos que temos uma **recorrência de primeira ordem**. No Exemplo 4, por sua vez, temos uma recorrência na qual cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos. Denomina-se, portanto, **recorrência de segunda ordem**.

Observação. Uma recorrência, por si só, não define a sequência numérica. Para que a sequência esteja bem definida, é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

Recorrências Lineares

Vimos que uma recorrência de primeira ordem expressa x_{n+1} em função de x_n. Ela é dita **linear** se essa função for do primeiro grau.

Exemplo 5. As recorrências $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ e $x_{n+1} = 3x_n$ são lineares. Já a recorrência $x_{n+1} = x_n^2$ não é linear.

Recorrências Homogêneas

Uma recorrência é dita **homogênea** quando não possui termos independentes de x_n.

Exemplo 6. As recorrências $x_{n+1} = 2x_n$ e $x_{n+2} = -3x_{n+1} + 4x_n$ são homogêneas. A recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$ não é homogênea.

APÊNDICE B – BINÔMIO DE NEWTON

Considere a expressão $(1+X)^n$, onde X é uma indeterminada e n é um número natural. Note que o desenvolvimento dessa potência é um polinômio de grau n, em X, cujos coeficientes $a_i, \forall i \in \{0,1,2,...,n\}$, são números naturais:

$$(1+X)^n = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n.$$

O coeficiente a_i, $\forall i \in \{0,1,2,...,n\}$, será denotado pelo símbolo

$$a_i = \binom{n}{i}, \forall i \in \{0,1,2,...,n\},$$

e será chamado de **número binomial**.

Queremos determinar fórmulas explícitas para esses números binomiais.

Observe que a_0 e a_n, isto é, respectivamente, os coeficientes do termo independente de X e do termo em X^n, no desenvolvimento de $(1+X)^n$ são, respectivamente, 1 e 1. Assim, temos que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Se $i > n$, definimos, de forma conveniente, que

$$\binom{n}{i} = 0.$$

Lema 1. Relação de Stifel. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tem-se que

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Demonstração.

Para $i \geq n$, a relação acima é trivialmente verificada.

Para $0 \leq i \leq n$, as relações decorrem, imediatamente, das seguintes igualdades:

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}X + ... + \binom{n+1}{n}X^n + \binom{n+1}{n+1}X^{n+1} =$$

$$= (1+X)^{n+1}$$

$$= (1+X)(1+X)^n$$

$$= (1+X)\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + ... + \binom{n}{n-1}X^{n-1} + \binom{n}{n}X^n\right]$$

$$= \binom{n}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]X + ... + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]X^n + \binom{n}{n}X^{n+1}.$$

Lema 2. Para todos $n, i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq n$, tem-se que

$$i!\binom{n}{i} = n(n-1)\cdots(n-i+1).$$

Demonstração.

Vamos provar por indução sobre n.

A igualdade é trivialmente verificada para n = 1.

Suponha que as igualdades sejam válidas para algum $n \in \mathbb{N}$ e para todo i com $1 \leq i \leq n$.

Pela relação de Stifel, temos, para $i \leq n$, que

$$\begin{aligned} i!\binom{n+1}{i} &= i(i-1)!\binom{n}{i-1} + i!\binom{n}{i} \\ &= in(n-1)\cdot\cdot(n-i+2) + n(n-1)\cdots(n-i+1) \\ &= n(n-1)\cdots(n-i+2)(i+n-i+1) \\ &= (n+1)n(n-1)\cdots(n+1-i+1), \end{aligned}$$

o que prova a igualdade para $n+1$ e para todo i com $1 \leq i \leq n$.

Uma verificação direta mostra que a expressão também vale para $i = n+1$.

Portanto, a igualdade vale para todo n e para todo i com $1 \leq i \leq n$.

Segue-se, daí, que, para $n, i \in \mathbb{N}$, vale a seguinte fórmula para os coeficientes binomiais:

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-1+1)}{i!}$$

e, portanto,

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad .$$

Note que os termos acima têm sentido e são iguais quando $i = 0$.

Da fórmula acima, decorre, imediatamente, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo i com $0 \leq i \leq n$, a seguinte igualdade fundamental:

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}. \tag{B.1}$$

Teorema. Binômio de Newton. Sejam a e b números reais e seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Demonstração.

Se $b = 0$, o resultado é óbvio.

Se $b \neq 0$, tomando X igual a $\frac{a}{b}$[1] na expansão de $(1+X)^n$, segue que

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n = a_0 + a_1\left(\frac{a}{b}\right) + a_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Multiplicando ambos os membros por b^n, tem-se

$$b^n\left(1+\frac{a}{b}\right)^n = a_0b^n + a_1\left(\frac{a}{b}\right)b^n + a_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 b^n + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} b^n + a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n b^n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[b\left(1+\frac{a}{b}\right)\right]^n = a_0b^n + a_1ab^{n-1} + a_2a^2b^{n-2} + \cdots + a_{n-1}a^{n-1}b + a_na^n$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)^n = \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n.$$

Utilizando a igualdade (B.1), conclui-se que

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^n + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

como queríamos demonstrar.

[1] Estamos assumindo a existência do conjunto dos números racionais. Em todo caso, só utilizaremos essa fórmula quando $b = 1$.