

# ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS ACERCA DA GEOMETRIA ESCOLAR

*Francisco Alves Bezerra Neto*

*Maria Gilvanise de Oliveira Pontes*

*Mércia de Oliveira Pontes*

---

## **Introdução**

Tendo como ponto de largada um sobrevoo sobre a Matemática escolar, destacamos o ensino da Geometria Euclidiana a partir da última metade do Século XVIII, a relação estabelecida entre a Geometria escolar e o avanço da industrialização do Brasil e a relevância da Geometria na educação formal. Colocamos, pois, em relevo uma abordagem dos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria sob uma visão histórico-epistemológica.

## **O Ensino de Matemática: uma breve retrospectiva**

Não sendo nossa pretensão analisar com profundidade a contribuição que o ensino de Geometria pode dar à formação do aluno – dependendo, obviamente, do modo que é trabalhada –, e sim fazer um estudo, em grandes linhas, do desenvolvimento do ensino da Matemática e, em particular, o da Geometria, levando em conta as mudanças, que se efetivaram na sociedade e na Educação nos Séculos XIX e XX.

Ao nos debruçarmos sobre a História da Matemática no derradeiro século da Idade Moderna, evidenciamos que, tanto para o desenvolvimento da Matemática quanto para o seu ensino é de extrema importância a criação, na segunda metade do Século XVIII, das escolas e academias militares e a fundação da Escola Politécnica de Paris.

Em decorrência da Revolução Industrial, são estabelecidas excelentes condições para o desenvolvimento da Matemática na parte continental europeia, sendo de suma importância, sabermos que esta revolução teve como valiosos antecedentes a Revolução Francesa e o período napoleônico. É na França e na Alemanha – países em que a ruptura com o Antigo Regime e a preparação para a nova estrutura capitalista foi mais intensa – que são constatados os maiores progressos no âmbito da Matemática.

De acordo com Pavanello (1989), neste período de ebulição cresce o interesse pelos conhecimentos científicos e tecnológicos. Isto acarreta críticas e discussões acerca da reformulação e modernização das instituições de ensino superior, com destaque nos planos de estudos das várias vertentes da Matemática. Contudo, nas escolas preparatórias, frequentadas pela elite, o ensino de Matemática goza de pouquíssimo prestígio, muitas vezes nem mesmo sendo ofertado, restando aos interessados em estudos matemáticos recorrerem, via de regra, a aulas particulares.

O ensino de Matemática nessas escolas é introduzido somente no início do Século XIX. Segundo Pavanello (1989), igualmente as todas as disciplinas escolares, a Geometria é trabalhada em uma perspectiva inteiramente abstrata, sendo ensinada com base nos textos de Euclides.

No que concerne à classe proletária – gerada pela ascensão do modo de produção capitalista que efetivou a substituição dos ofícios pela implantação do sistema fabril –, até o final do Século XIX somente tinha acesso, grosso modo, à escola elementar. Nela, em termos de Matemática, eram ensinados somente os processos aritméticos (aprendizado das quatro operações fundamentais).

Em relação ao estudo de Geometria, o que é observado: nas escolas para a elite é dada ênfase aos processos dedutivos, oportunizando o desenvolvimento do raciocínio lógico. Já nas escolas para as classes mais desfavorecidas, os princípios geométricos são vinculados às questões práticas ligadas

ao trabalho. Como já mencionamos, este quadro não sofre nenhuma alteração substancial, durante todo o Século XIX. Mas, motivada pelo desenvolvimento da indústria, emerge uma demanda por uma melhoria na educação técnico-científica “[...] o que implica numa maior ênfase em relação ao ensino de Matemática, dado que esta, sob a então crescente influência do positivismo, é vista cada vez mais como uma ferramenta para as outras ciências” (PAVANELLO, 1989, p. 88).

Próximo ao final do Século XIX, temos o surgimento de tendências pedagógicas que lançam críticas à escola e à educação tradicionais. Tais tendências recebem a denominação de Escola Nova cuja pedagogia tem como cerne “[...] o conhecimento da psicologia infantil e da psicologia da idade evolutiva, tanto da criança individual como da infância e da adolescência em geral, como idade que tem em si suas leis e sua razão de ser” (MANACORDA, 2006, p. 305).

Apesar de as ideias da “educação nova” terem dado relevo à importância da mudança nas metodologias aplicadas ao ensino, provocaram pequena alteração no que tange ao ensino de Matemática e, em particular, ao da Geometria.

O período de escolarização obrigatória tem sua duração aumentada, a partir do Século XX, nos países em que os avanços tecnológicos demandam uma melhor preparação de crianças e de jovens para sua futura inserção no mercado de trabalho. Notadamente, posteriormente à Segunda Guerra Mundial em uma grande parcela de países, o ensino secundário gratuito já é uma realidade, emergindo daí a necessidade de expansão do ensino superior.

Questionamentos acerca do ensino de Matemática são verificados ao longo das últimas décadas. Todavia, no início dos anos 1950, as críticas ao ensino de Matemática tornam-se mais contundentes.

Concordava-se geralmente no princípio da década de 1950 e mesmo antes dessa data que o ensino de matemática malograra. As notas dos estudantes em matemática

eram muito mais baixas que em outras matérias. A aversão e até mesmo o pavor do estudante pela matemática eram generalizadas. Adultos instruídos quase nada retinham da matéria que lhes fora ensinada [...]. De fato, essas pessoas não hesitavam dizer que nada obtiveram de seus cursos de matemática (KLINE, 1976, p. 32).

Muitos grupos estadunidenses – cabendo o pioneirismo à Comissão de Matemática Escolar da Universidade de Illinois, grupo formado em 1952 – dedicaram-se, no transcurso dos anos 1950 à criação de novos currículos de Matemática (tanto para a escola secundária quanto para a escola elementar).

Um ponto basilar da reforma curricular é a substituição de conteúdos tradicionais (desenvolvidos antes do Século XVIII) por tópicos pertencentes aos novos campos da Matemática (Álgebra Abstrata e Topologia, por exemplo). “A ênfase no novo (conteúdo e abordagem) faz com o movimento fique conhecido como ‘matemática moderna’” (PAVANELLO, 1989, p. 94).

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) não se restringe aos EUA. De acordo com um relato de Kline (1976), durante um encontro internacional na França, em 1959, a recomendação foi que os tópicos tradicionais da escola secundária fossem abandonados, inclusive a Geometria, e que os novos tópicos fossem ensinados em uma nova linguagem: a da teoria dos conjuntos.

Quanto à geometria, seu estudo é reduzido justamente no momento em que a escola secundária se democratiza [décadas de 1950-1960] e privilegia-se, em seu lugar, a álgebra e a aritmética. Procura-se justificar essa nova orientação do ensino, como o fazem os autores de um manual de ensino (francês) ‘não somente pelo campo de aplicação sempre mais vasto da aritmética à física, à química, à biologia, mas sobretudo pelo valor cultural do estudo do número em si mesmo’ (NOT, 1981, p. 305-306 *apud* PAVANELLO, 1989, p. 95).

Diante do tom enfático da expressão “estudo do número por si mesmo”, achamos totalmente pertinente nos reportarmos ao registro feito por Pontes (2009) ao destacar que, ao longo da História da Matemática, ela tem sido, em linhas gerais, classificada em Matemática Pura e Aplicada, porém ao revisitar as tendências de ensino da Matemática, em congressos, conferências e comissões internacionais, no período de 1966 a 1984, D’Ambrosio (2009) promoveu uma reclassificação. Segundo esse autor, há dois enfoques contemporâneos da Matemática: internalista e externalista.

A visão internalista assemelha-se à Matemática Pura. Nessa abordagem, o âmbito considerado é o da própria Matemática, ou seja, não recorre à reflexão sobre fatos do cotidiano, revelando-se “[...] desligada da vida, das coisas que nos rodeiam, das coisas que os homens fazem” (CARVALHO, 1988, p. 17 *apud* PONTES, 2003, p. 56). Em posição oposta, temos a visão externalista, na qual a Matemática é usada como meio, não visando um fim em si mesma, e sim oportunizando o estabelecimento de vínculos com o mundo tangível. “[...] podendo-se dizer que é uma Matemática a serviço da compreensão do mundo” (PONTES, 2009, p. 59).

Retomando ao MMM, argumentava-se que, pelo enfoque tradicional, os problemas desse ensino estavam ligados “[...] ao conhecimento do professor, aos métodos utilizados, ou ainda às dificuldades de se estabelecer uma ponte entre a Geometria prática preconizada para a escola elementar e a abordagem axiomática introduzida na secundária” (PAVANELLO, 1989, p. 95). Constata-se que os problemas como o ensino de Geometria aumentavam quando ela era trabalhada segundo a abordagem sugerida pelo MMM (transformações algébricas e teoria dos conjuntos). Reconhecidamente, até pelos próprios defensores da Matemática Moderna, os tópicos abordados não eram dominados pela esmagadora maioria dos professores em ação docente. Tudo isto tem uma implicação que consideramos bastante nefasta: a Geometria, via de regra, não seria ensinada sob nenhum enfoque nas décadas seguintes.

Sob o olhar de Pavanello (1989), enfatizar a Álgebra, tendência predominante no MMM, em detrimento da Geometria fez emergir uma questão de caráter essencialmente político.

Se o trabalho, na álgebra, pode conduzir, de fato, à execução de operações mecanicamente – dado que as transformações algébricas são determinadas unicamente por um sistema de leis formais que dizem o que é ou não autorizado –, enquanto o realizado na geometria pode conduzir à análise de fatos e de relações, estabelecendo ligações entre eles e deduzindo, a partir daí, novos fatos e novas relações, a pergunta que se apresenta é: a quem interessa um indivíduo acostumado a operar sem questionamento sobre regras preestabelecidas, a quem basta saber que se pode fazer isto e não aquilo, sem questionar o que faz? (NOT, 1981, p. 312 *apud* PAVANELLO, 1989, p. 97).

Para a indagação acima, com certeza, não é do interesse do aluno pela seguinte razão: se o ensino de Geometria não lhe é ofertado, então não é dada a ele a possibilidade de desenvolver outros processos de pensamento. Assim, a questão de ensinar-se ou não Geometria não deve ser visto somente como de cunho pedagógico, mas também como um ato político, pois “[...] está relacionada com a possibilidade de proporcionar, ou não, iguais oportunidades – e condições – de acesso a esse ramo do conhecimento” (PAVANELLO, 1989, p. 98).

Nosso próximo passo é analisar a evolução do ensino da Geometria em nosso país, tendo como pano de fundo o seu desenvolvimento nos âmbitos político, social e econômico no fluxo do Século XX.

## **O Caso da Geometria no Ensino de Matemática no Brasil**

Nossa análise incidirá sobre o ensino de Matemática e, particularmente, o de Geometria nas escolas brasileiras e a relação dele com o processo de industrialização desenvolvido no Brasil, do início do século XX. Na escola primária, que

contemplava um baixo percentual da população, o conteúdo trabalhado de Matemática estava voltado para a aprendizagem das técnicas operatórias e o estudo de Geometria tinha um caráter também pragmático. Quanto ao nível secundário, a escola de referência era o Colégio Pedro II (Rio de Janeiro). Ele e alguns estabelecimentos mantidos pelos governos estaduais (por exemplo, o Colégio Liceu do Ceará) eram gratuitos e suas poucas vagas eram preenchidas mediante um rigoroso processo seletivo. Essas escolas eram uma exceção, pois quase a totalidade das instituições que ofereciam ensino secundário eram estabelecimentos particulares, logo, destinados às elites. A Geometria, assim como os demais ramos da Matemática, recebia na escola secundária, semelhantes às escolas da Europa, um tratamento puramente abstrato. No tocante ao nível superior, a Escola Militar e a Escola Politécnica de São Paulo, sob influência positivista, contribuíram de algum modo para o desenvolvimento e o ensino da Matemática.

Pela não existência de instituições formadoras de professores secundários – criadas somente na década de 1930 – os docentes de todas as disciplinas são “[...] quase todos autodidatas ou recrutados, como no Império, nos quadros das profissões liberais” (AZEVEDO, 1976, p. 135 *apud* PAVANELLO, 1989, p. 150). Engenheiros civis ou militares, em número reduzido, atuavam como professores de Matemática. Logo, por razões óbvias, eles não tinham formalmente nenhuma proximidade com a área pedagógica.

Tendo como referência o modelo estabelecido no Estatuto das Universidades Brasileiras (Reforma Francisco Campos, ocorrida em 1931), temos, em 1934, a fundação da Universidade de São Paulo. Nela é promovido, dentre outros cursos, o de Matemática para o magistério secundário. Conforme Pavanello (1989), apesar de, ao longo da década de 1930, terem surgido várias outras faculdades com este fim, a quantidade de professores secundaristas formados, com base na realidade do estado de São Paulo, não satisfaz à demanda por conta da grande expansão da rede pública que, em grande parte, é devida ao crescimento do polo industrial paulista.

Essa reforma, ao tratar da organização do Ensino Secundário, estabelece os conteúdos e sugere instruções pedagógicas às diversas disciplinas e, na tentativa de estabelecer conexões entre os três ramos da Matemática, determina que esta disciplina seja assumida, na mesma série, por um único professor. No texto das instruções pedagógicas é facilmente percebido, segundo Bicudo (1942 *apud* PAVANELLO, 1989), a influência da Escola Nova, quando enfatiza que o professor deve estar atento tanto ao grau de desenvolvimento mental do aluno, quanto aos seus interesses nos tópicos que apresenta maior inclinação e que o ensino se processe através da atividade constante do aluno, fazendo-o descobridor e não receptor passivo de conhecimentos.

Ainda inserido nessa reforma temos a orientação de um curso propedêutico de Geometria. De acordo com Pavanello (1989), a proposta é que a aquisição de conhecimentos geométricos seja iniciada pelas explorações intuitivas, por meio de atividades experimentais, e que, de modo progressivo, evolua até atingir uma sistematização. Em outras palavras, a ação professoral no ensino de Geometria deve ser desenvolvida, objetivando que os alunos efetuem a passagem do estudo intuitivo para o sistemático (estudo dedutivo).

Gustavo Capanema, no comando do Ministério da Educação, promove, em 1942, uma reforma que reestrutura o Ensino Secundário. Pavanello (1989) destaca que na Exposição de Motivos da Lei Orgânica do Ensino Secundário, contida nessa reforma, nota-se que a concepção dos processos de ensino e de aprendizagem na reforma Capanema (igualmente à Francisco Campos) sofre influência do movimento escolanovista. Vejamos este fragmento:

No ensino científico [...] falhará sempre irremediavelmente o processo do erudito monologar docente, [...] os alunos terão que discutir e verificar, terão que ver e fazer. Entre eles e o professor é necessário estabelecer um regime de cooperação no trabalho, trabalho que

deverá estar cheio de vida e que seja sempre, segundo o preceito deweyano, uma 'reconstrução da experiência' (PAVANELLO, 1989, p. 158).

No que tange à Geometria, a reforma Capanema preconiza que ela seja abordada em todo o curso ginásial (quatro anos de duração, atualmente, anos finais do Ensino Fundamental) e com bastante ênfase no curso científico que, juntamente com o curso clássico, compunham o Ensino Secundário (três anos de duração, atualmente denominado Ensino Médio).

Em nosso país, na fase inicial da década de 1960, temos a geração de uma grande quantidade de empregos em decorrência do desenvolvimento econômico à época. Isto vai repercutir na esfera educacional e, de forma especial, no ensino de Matemática no Ensino Secundário. Em conformidade com a nossa Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) nº 4024/61, nas três primeiras séries do curso ginásial o ensino de Matemática será fundamentalmente de natureza instrumental (em Geometria: desenvolver a intuição) e na 4ª série, Geometria dedutiva. No ciclo dois, não desprezando seu caráter utilitarista, busca estabelecer relações entre a Matemática e as demais disciplinas, prioritariamente com as Ciências Naturais.

No transcurso dos anos 1960, perdurando pela década de 1970, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) vai ter grande penetração no Brasil. Sob sua influência são lançados os primeiros livros didáticos (para o curso ginásial de autoria de Osvaldo Sangiorgi) e formados grupos de estudo para o ensino de Matemática.

Na tentativa de manter a coerência do MMM, ou seja, fazer uso da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos e das transformações algébricas ao ensino da Matemática, a proposta era ensinar Geometria do ponto de vista das estruturas, isto é, sob o enfoque das transformações algébricas. Como a grande maioria dos professores secundários

não dominava tal assunto, essa orientação não foi seguida. Na verdade, um grande contingente de professores do primeiro e segundo graus (nomenclatura decorrente da reformulação da educação elementar e secundária pela LDBEN nº 5692/1971) deixou de ensinar Geometria sob qualquer abordagem. Assim, os professores passaram a trabalhar quase que exclusivamente a Álgebra e que de certo modo está alinhada com a ênfase dada pelo MMM a esse segmento da Matemática.

Neste contexto, a maioria dos alunos conclui as quatro primeiras séries do primeiro grau sem ter contato com a Geometria escolar. Também é fácil evidenciar, que nas quatro séries derradeiras desse nível de ensino o estudo de Geometria era bastante comprometido pois como, via de regra, os capítulos dedicados à Geometria eram os últimos do livro-didático, os professores alegavam que “não dava tempo” atingi-los. Assim, o estudo de Geometria passa a ser feito, quando o é, apenas no segundo grau. Na nossa trajetória de docentes, nos deparamos com alunos que tiveram os primeiros contatos com a Geometria, no curso de Licenciatura curta.

Este é o panorama do nosso setor educacional, quando a escola pública sofre expansão no Brasil no sentido que o número de escolas mantidas pelo governo e de alunos que nelas estudam dá um salto quantitativo. Aos professores se impõe a seguinte realidade: lidar com uma população maior de alunos sob novas e, quase sempre, piores condições de trabalho e de remuneração, além de ser pressionado pelo Estado ao lembrar-lhes o custo aluno por ano em uma escola.

Começa, assim, um processo de deterioração – física e cognitiva – da escola pública, que passa a ser frequentada, agora, pelas camadas menos favorecidas da população, enquanto que as camadas mais privilegiadas vão para as escolas particulares. Nestas ainda ocorre o ensino de geometria, em que pesem as diferentes orientações

e a influência dos livros didáticos – nos quais a álgebra continua sendo realçada, pelo simples fato de se apresentar a geometria sempre ao final das publicações (PAVANELLO, 1989, p. 165).

Não esquecendo que estamos nos referindo aos anos 1970, com ditadura militar em pleno vigor, Pavanello (1989) fala que nas academias militares, o estudo da Geometria e das matérias que com ela tem afinidade (Desenho Geométrico, por exemplo) permanece sendo enfatizado.

Partindo do princípio que a situação descrita é verdadeira, não são poucos os obstáculos a serem superados por parte de todos aqueles que são comprometidos com os processos de ensino e de aprendizagem. Mediante um quadro em que o conhecimento de Geometria dos alunos é praticamente nulo e, cientes da contribuição dada por esse ensino, no âmbito da educação formal, devemos colocá-lo no rol de prioridades para uma Educação de boa qualidade.

A bem da verdade, de alguns anos para cá, nas palavras de Lorenzato (2012), em locais diferentes do Brasil, o ensino de Geometria está passando por uma oxigenação, tendo uma (re)ativação em consequência de iniciativas pontuais de grupos de professores. Todavia, a pauta de questões a serem discutidas engloba perguntas tais como:

O programa de geometria que consta de propostas curriculares e de livros didáticos contém o mínimo necessário para nossa atualidade? Onde deve ser colocado o ponto de equilíbrio dinâmico entre o intuitivo e o dedutivo, o concreto e o abstrato, o experimental e o textual, tendo em vista uma aprendizagem significativa da geometria? Como tornar presente o estudo da geometria nos cursos de formação de professores? Como ampliar a produção de publicações para professores e para alunos sobre resolução de problemas, história, recursos didáticos, curiosidades, quebra-cabeças, sofismas, ilusões de ótica e jogos direcionados para o ensino de geometria? Onde devem

ser focalizadas as pesquisas sobre o ensino da geometria? Como investir fortemente na formação geométrica do professor em exercício? (LORENZATO, 2012, p. 28).

Assim, conforme esse autor, renovar ou ressurgir o ensino de Geometria é uma questão que extrapola os aspectos epistemológicos ou didático-pedagógicos. Por envolver Universidades e Secretarias de Educação, é uma questão também social. E mais, também se trata de uma questão de cunho político-administrativo, “[...] pois o professor, sendo aquele que deve exercer uma função de vital importância nos processos de transformação educacional, com sua atual remuneração não terá muitas condições para efetuar mudanças, a não ser de profissão” (LORENZATO, 2012, p. 29).

Salientamos, a seguir, a importância da Geometria escolar no contexto da educação formal e algumas possíveis contribuições da aquisição de saberes geométricos ao longo da vida.

## **Geometria: por que ensiná-la?**

Sob nosso ponto de vista, não há espaço para dúvida, quando afirmamos que um dos grandes objetivos da Matemática escolar deve ser contribuir na tomada de consciência por parte do aluno da relevância de adquirir conhecimentos geométricos, levando-o a uma melhor compreensão da sociedade na qual está inserido. Ademais, perceber a utilização da Geometria nos mais diversos contextos que vivencia e, com isso, ter uma leitura de mundo construída a partir de um olhar mais reflexivo e crítico, em conformidade com a sugestão presente em Brasil (1998).

De acordo com Mendes (2006), com a passagem do homem da condição de nômade para a de fixar-se na terra, temos o advento da Matemática como um todo e, em especial, da Geometria. Nesse novo modo de vida, surgiu a necessidade de um melhor aproveitamento do solo ocupado, visando a plantação, comercialização e armazenamento do excedente da

produção. Com “endereço” fixo, o homem construiu moradias estruturadas e passou a fazer observações dos movimentos das estrelas com o intuito de planejar plantações, colheitas e festas religiosas. Esses fatores elencados, dentre outros, favoreceram à evolução da Geometria.

No quadro dos atuais desafios da Educação Matemática, consta que, o ensino de Matemática, inclusive o de Geometria, aconteça de modo contextualizado. Com a mesma orientação, Brasil (1998) reforça a necessidade de o aluno ter um olhar que desvele o valor da Geometria em situações do seu mundo vivencial (nas artes, nas formas da natureza e nas construções feitas pelo homem). Isso está explicitado, quando afirmam que o aluno desenvolve um “[...] tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, p. 75).

Por outra vertente, enfocamos que o entendimento efetivo de Geometria contribui de modo substancial no decorrer da trajetória acadêmica de quem trilha caminhos ligados à Matemática Superior (sua desenvoltura na compreensão de conteúdos ligados ao cálculo diferencial e integral, à guisa de exemplo) ou até mesmo para solucionar questões de caráter estritamente pragmático (determinação da capacidade de armazenamento de uma caixa-d’água, por exemplo). Isso posto, consideramos não haver discordância quanto ao fato que excluir do currículo ou dar um tratamento inadequado à Geometria “[...] podem causar sérios prejuízos à formação dos indivíduos” (PAVANELLO, 1989, p. 181).

Não obstante a nossa atenção estar voltada para o ensino de Geometria, não corresponde à verdade que ressaltamos a Geometria em detrimento do papel da Álgebra. Pavanello (1989) destaca que ambas são essenciais à Educação Matemática e, portanto, devemos incentivar o desenvolvimento tanto do pensamento visual quanto do sequencial, preponderantes na Geometria e na Álgebra, nesta ordem.

Em nossa experiência como docentes em exercício da Educação Básica constatamos que ainda hoje há priorização

do ensino da Álgebra. Isso, “[...] acabou por desenvolver somente um tipo de pensamento. É necessário, portanto, restabelecer o equilíbrio, retomando-se o ensino da Geometria” (PAVANELLO, 1989, p. 182).

É fundamental termos em mente que a possível grande contribuição a ser dada pela Geometria escolar, desde que trabalhada de modo adequado, para a formação do aluno, vai além do desenvolvimento da percepção espacial.

A geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da “capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível” – que é um dos objetivos da matemática – oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados (PAVANELLO, 1989, p. 182).

Assim, a importância da Geometria reside no fato de o seu estudo desenvolver habilidades específicas de raciocinar, contribuindo para a formação das pessoas. Em outras palavras, “[...] ser bom conhecedor de Aritmética ou de Álgebra não é suficiente para resolver problemas de geometria” (LORENZATO, 2012, p. 29).

Sob qualquer abordagem, a Geometria mostra-se um tema extremamente fecundo. “Nenhum assunto presta-se mais à explicitação da impregnação entre a Matemática e a Língua Materna bem como a uma estruturação compatível da ação docente do que a Geometria” (MACHADO, 2001, p. 137).

Ademais, é possível que o aluno ao participar do processo de aprendizagem envolvendo Geometria, desenvolva um tipo peculiar de pensamento. “Ela permite o desenvolvimento da ‘arte da especulação’ traduzida na questão ‘o que aconteceria se ...’, que expressa o estilo hipotético-dedutivo do pensamento geométrico.” (WHEELER, 1981, p. 352 *apud* PAVANELLO, 1989, p. 183). A marca desse tipo particular de pensamento é a busca por novas situações,

formulação de indagações decorrentes dos choques visuais provocados por figuras geométricas.

Sob outro prisma, temos a defesa do ensino de Geometria através do seguinte argumento:

[...] a geometria é um intermediário natural e possivelmente insubstituível entre a língua e o formalismo matemático, no qual cada objeto é reduzido a um símbolo e o grupo de equivalências é reduzido à identidade do símbolo escrito consigo mesmo. Deste ponto de vista, o estágio do pensamento geométrico pode ser um estágio impossível de omitir no desenvolvimento normal da atividade racional do homem (THOM, 1971, p. 698 *apud* PAVANELLO, 1989, p. 183).

Pavanello (1989) destaca que tais argumentos expostos por educadores matemáticos não dão conta de toda a discussão, envolvendo o valor educacional do ensino de Geometria, mas têm o mérito de apontarem para futuras pesquisas e para caminhos a serem palmilhados no tocante à escolha dos conteúdos e ao trabalho mais apropriados ao desenvolvimento de determinadas capacidades no aluno com vistas à sua formação integral.

### **Geometria Escolar: uma abordagem histórico-epistemológica**

Alinhando-nos com o pensamento de Mendes (2006), e de outros autores, defendemos a ideia que os processos de ensino e de aprendizagem de Geometria tendem a ser melhores quando o professor desenvolve sua ação docente levando em conta tanto a visão histórico-epistemológica quanto as conexões que a Geometria mantém com a Álgebra e a Aritmética e também procura estabelecer ligações entre os conteúdos geométricos ministrados e o cotidiano do aluno.

Referente ao olhar histórico, Eves (1992) e Pavanello (1989) afirmam que é fundamental o professor ter clareza da

relação existente entre os problemas enfrentados pela humanidade e a origem da Geometria, assim como da sua progressão, destacando que durante seu desenvolvimento este segmento da Matemática se mostrou dicotômico: a Geometria deve ter um caráter prático ou teórico?

Nesta visão macroscópica, citamos que Eves (1992) denominou a Geometria pré-histórica de Geometria subsciente pois, grosso modo, foi restrita à noções de distância, forma, verticalidade e paralelismo. Considera-se que o homem primitivo concebeu as ideias de curvas, superfícies e sólidos a partir de observações do seu cotidiano, (por exemplo: contorno do Sol e da Lua, trajetória descrita por uma pedra arremessada, troncos de árvores, frutas e muros de pedra). Na Antiguidade, egípcios e babilônios e, provavelmente, hindus e chineses, usavam conhecimentos geométricos de forma pragmática. A título de exemplo, Eves (1992) e Pavanello (1989) pontuam que provavelmente o surgimento das noções de figuras geométricas e dos conceitos de área e de perímetro estão relacionados à necessidade prática de demarcação de terras após as inundações do rio Nilo, no Egito.

Por seu lado, os gregos criavam e desenvolviam a Geometria demonstrativa, pois advogavam a ideia que a Geometria deveria estar a serviço do aprimoramento intelectual. Com os gregos, passamos a ter uma Geometria de caráter teórico, axiomático e dedutivo. Pontuamos que

Euclides produziu uma obra memorável, os *Elementos*, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, a teoria dos números e a álgebra geométrica grega (EVES, 1992, p. 9).

Em “Os Elementos”, Euclides de Alexandria (Século III a.C.) estabeleceu um sistema lógico-dedutivo fundamentado em axiomas (axioma é um fato matemático que contém evidência em si próprio e por isso não precisa ser demonstrado) e

postulados (premissas básicas aceitas como verdadeiras), usados para aprovar os teoremas (afirmação matemática não óbvia mas passível de uma demonstração sustentada por axiomas, postulados e definições). A influência do trabalho de Euclides foi tão forte que o conjunto de conhecimentos geométricos por ele compilado recebeu o nome de Geometria Euclidiana.

Com o advento da Idade Média, em meados do Século XV, um problema é posto na ordem do dia para pintores e arquitetos renascentistas: como melhor representar e analisar objetos tridimensionais em perspectiva, ou seja, por meio de suas projeções em uma tela (espaço bidimensional)? Na busca pela solução desse problema, temos o estabelecimento e o desenvolvimento da Geometria Projetiva. Paralelo à progressão da Geometria Projetiva temos o surgimento das ideias da moderna Geometria Analítica. Eves (1992) salienta que existe uma diferença fundamental entre as Geometrias Projetiva e Analítica, enquanto a primeira é um ramo da Geometria, a segunda é um método de solucionar problemas de Geometria, usando a Álgebra.

Por conta do sistema axiomático da Geometria Euclidiana ser satisfatório somente em superfícies planas, temos no Século XIX a emergência de novas geometrias, aplicáveis a espaços curvos. É o caso da Geometria Esférica (relevante em situações que envolvem grandes deslocamentos na superfície da Terra, por exemplo) e da Geometria Hiperbólica (usada no âmbito da Teoria Geral da Relatividade, teoria gravitacional publicada por Albert Einstein em 1915).

No campo epistemológico, nós, docentes, devemos buscar entender o processo de construção do conhecimento geométrico. Conforme Pais (2000), a construção de saberes geométricos ocorrerá com maior dificuldade ou até mesmo não se efetivará se a prática educativa seguir, exclusivamente, ou a tendência epistemológica racionalista ou a empirista.

A visão racionalista, na sua vertente mais radical, defende que a razão é a fonte exclusiva de conhecimento. Em outras palavras, a aquisição de conhecimento é decorrente

da razão, operando por si mesma, não havendo necessidade da realização de qualquer tipo de experiência sensível, que seja controlada pela razão. Na visão empirista, em sua concepção fundamental, o conhecimento é oriundo das atividades experimentais que estimulam nossos sentidos. Assim, para os empiristas, os conhecimentos são adquiridos, exclusivamente, por meio de experiências sensíveis, que controlam a razão. Levando isso em consideração, esse autor enfatiza que

Nas atividades de ensino da geometria, envolvendo o uso de materiais, é preciso estar duplamente vigilante para que toda informação proveniente de uma manipulação esteja em sintonia com algum pressuposto racional e, ao mesmo tempo, que todo argumento dedutivo esteja associado a alguma dimensão experimental. Acreditamos que este é o primeiro passo para valorizar uma interpretação dialética para o uso dos materiais didáticos. Evitar uma racionalidade vazia desprovida de significado, assim como, evitar toda espécie de atividade empírica desconexa de um objetivo educacional previamente analisado [...] (PAIS, 2000, p. 13).

No âmbito das tendências epistemológicas, Hessen (1980 apud PAIS, 2000) faz referência ao intelectualismo e ao apriorismo. Conforme esse autor, essas correntes de pensamento são tentativas de harmonização entre as posições extremas do racionalismo e do empirismo. Em linhas gerais, para o intelectualismo “[...] a atividade experimental seria a fonte do conteúdo do conhecimento enquanto que a razão daria apenas sua forma final” (PAIS, 2000, p. 11). Em outras palavras, os conceitos formulados pela razão representariam o sentido último do conhecimento, onde este tem origem e é buscado na experiência. Pais (2000) acrescenta que os conceitos dependem da intuição, que pode ser de dois tipos: uma motivada pela experiência (intuição sensível) e a outra, animada pela razão (intuição racional). A síntese das intuições sensível e racional é o que definimos como o conceito.

Com relação ao apriorismo, “[...] o conhecimento apresenta elementos *a priori* independentes da experiência [...] que só se justifica [o conhecimento] quanto à forma originada na razão, mas o conteúdo receberia influência decisiva da experiência.” (PAIS, 2000, p. 12). Esse autor destaca o seguinte princípio do apriorismo: conceitos não embasados na intuição mostram-se vazios, do mesmo modo que a intuição sem clareza conceitual perde sua força. Achamos não haver espaço para dúvidas que essa postura epistemológica deixa patente a pertinência de um eterno diálogo entre a razão e a experiência com a constante mediação da intuição.

Na esfera da epistemologia da Geometria, Pais (1996) anuncia que há quatro elementos que têm uma presença efetiva nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria, quais sejam: objeto, desenho, imagem mental e conceito. Nesse sentido, o autor em pauta alerta quanto à importância do uso de desenhos, de objetos materiais – isto é, de materiais didáticos manipuláveis –, e das imagens mentais como recursos didáticos de grande valia, tanto no processo de construção quanto nas formas de representação dos conceitos geométricos bi e tridimensionais.

Ao refletir sobre pesquisas realizadas com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II (na época, séries finais do primeiro grau), Pais (1996) reconheceu uma possível correlação dos elementos mencionados anteriormente com os aspectos (ou formas) fundamentais de conhecimento geométrico, o intuitivo, o experimental e o teórico, distinguidos por Gonseth (1945 *apud* PAIS, 1996), ao desenvolver uma análise epistemológica da Geometria.

A correlação levantada entre os elementos fundamentais à aprendizagem geométrica e a teoria epistemológica de Gonseth aponta para a necessidade de uma utilização racional dos materiais didáticos em determinados níveis da aprendizagem como recursos auxiliares, mas não como substitutivos à construção de conceitos. Ao mesmo tempo em que essa utilização é justificada, fica

evidente que a marginalização do aspecto conceitual negaria a própria essência do conhecimento geométrico (PAIS, 1996, p. 73).

A construção teórica dos conceitos geométricos é percebida como um processo que, em função de sua complexidade, se efetiva gradativamente. Nesse sentido, esse autor salienta que os modos de representação mais simples dos conceitos geométricos são o objeto e o desenho. Didaticamente, o objeto é o primeiro modo de representação do conceito e corresponde, por assim dizer, a uma ideia geométrica materializada. Pais (1996) salienta que o objeto desempenha o importante papel de auxiliar na formação das ideias, porém não as substitui.

Por sua vez, o desenho é uma forma de representação amplamente usada no ensino e na aprendizagem da Geometria e é mais complexa do que a primeira por requerer do aluno uma interpretação de seu significado. Esse autor nos diz, ratificando o que presenciamos como docentes do Ensino Médio, que os desenhos de figuras tridimensionais geram grandes dificuldades nos alunos na identificação de propriedades geométricas, haja vista que os objetos originais estão projetados em um plano (na lousa e/ou no papel) pela técnica da perspectiva.

Entre os estudos no campo da Psicologia cognitiva que conduziram a inclusão das imagens mentais no contexto de uma epistemologia da Geometria, constam os realizados por Michel Denis (1979, 1989 *apud* PAIS, 1996), a saber: *Les Images Mentales* (1979) e *Image et Cognition* (1989). Em Pais (1996), temos uma análise da associação entre essas imagens e os conceitos geométricos. Esse autor nos diz que, enquanto o objeto e o desenho são recursos didáticos de natureza concreta e particular, as imagens mentais têm a subjetividade e a abstração como características fundamentais. Enquanto esta característica as relacionam com os conceitos, aquela a distancia da natureza do conhecimento formal. Todavia, enfatiza Pais (1996), que é imprescindível a passagem pela fase subjetiva da concepção individual do educando para a construção da objetividade

Embora não seja fácil definir formalmente o que seja uma imagem mental, pode-se dizer que o indivíduo tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos. Assim, como as noções geométricas são ideias abstratas e, portanto, estranhas à sensibilidade exterior do homem, a formação de imagens mentais é uma consequência quase exclusiva do trabalho com desenhos e objetos (PAIS, 1996, p. 70).

Com base na análise de Pais (1996, 2000), inferimos que, nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria, os objetos e os desenhos, em grande medida, incentivam à formação de boas imagens mentais. Neste quadro, elas fundam o terceiro modo de representação das noções geométricas. Esse autor prossegue, afirmando que, não obstante ser uma forma de representação mais complexa, em comparação aos objetos e desenhos, as imagens mentais possibilitam uma rapidez e eficiência em seu uso.

No ensino da Geometria, durante o processo de conceitualização – processo de elaboração dos conceitos geométricos ou processo de construção do conhecimento teórico da Geometria –, o aluno pode vir a enfrentar dificuldades de aprendizagem que se assemelham aos obstáculos constatados na própria evolução histórica do conceito. A nosso ver, isso está relacionado à natureza geral e abstrata dos conceitos geométricos. No curso do processo de conceitualização, o aluno faz uso, inicialmente, de objetos e desenhos como elementos recursivos à representação dos conceitos e, na sequência, esses conceitos serão representados por imagens mentais. Em sua análise, Pais (1996) supõe que a barreira mais forte a ser vencida pelo aluno no início do desenvolvimento de sua aprendizagem é a “[...] a transposição desta dupla correlação dialética, envolvendo o *particular* e o *geral*, o *concreto* e o *abstrato*” (PAIS, 1996, p. 71).

Conforme Pais (1996, 2000), um adepto da linha de pensamento que defende uma adequada e permanente

intermediação da intuição no constante diálogo entre a razão e a experiência foi o filósofo e matemático suíço Ferdinand Gonseth (1890-1975). A obra de Gonseth, de acordo com esse autor, é uma das referências exponenciais no campo da epistemologia da Geometria no Século XX. Como foi anteriormente citado, Gonseth (1945 *apud* PAIS, 1996) fez a distinção de três aspectos (ou formas) básicas de conhecimento geométrico, quais sejam: a intuição, a experiência e a teoria (ou razão). No entendimento de Gonseth, segundo nossa percepção, é que para a compreensão da utilização dos materiais didáticos nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria é imprescindível a visão dialetizada dos três aspectos elencados.

Portanto, parece ser conveniente estabelecer uma permanente interpretação dialética entre a materialidade do suporte didático com as ideias para quais volta-se a intencionalidade educativa. Assim, o conhecimento geométrico seria formado como o resultado de uma síntese das atividades da experimental e intuitiva coordenada pela razão. O conhecimento sensitivo seria a princípio caótico e à razão competiria a tarefa de ordenar esse caos (PAIS, 2000, p. 13).

Encontramos em Pais (1996) uma exposição acerca das três formas de conhecimento geométrico e sua interdependência com os elementos considerados basilares para o ensino de Geometria. A intuição corresponde a um tipo de conhecimento direto e diz respeito à subjetividade (dependente do cabedal de conhecimento do indivíduo), às nossas percepções do mundo e à racionalidade humana. Sua explicitação não requer um raciocínio (lógica) discursivo. “Os axiomas da Geometria Euclidiana podem ser aceitos com base nesta forma de conhecimento intuitivo. [...] axioma se define como ‘um propriedade evidente por ele mesma’ [...]” (PAIS, 1996, p. 72). Já um teorema, por exemplo, somente é evidenciado por meio de um raciocínio matemático chamado demonstração, mas não esqueçamos que as demonstrações estão ancoradas na admissão de algumas noções intuitivas, sequencia Pais (1996).

Assim, proposta uma situação envolvendo a Geometria Euclidiana, se o aluno chegar à resposta, por assim dizer, subitamente e sem lançar mão de recursos “externos” (objetos, por exemplo), o conhecimento por ele mostrado é na forma intuitiva. Por outro lado, se a resposta é encontrada pelo aluno por meio de um desenho, por exemplo, temos evidenciada a forma de conhecimento experimental. No entanto, se o aluno para resolver essa questão utiliza a demonstração sem o recurso direto da intuição ou do desenho, fica caracterizado o aspecto teórico do conhecimento geométrico. Pais (1996) destaca que devemos procurar entender melhor este sincretismo (profusão de elementos envolvidos na construção dos conceitos geométricos) e suas implicações nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria.

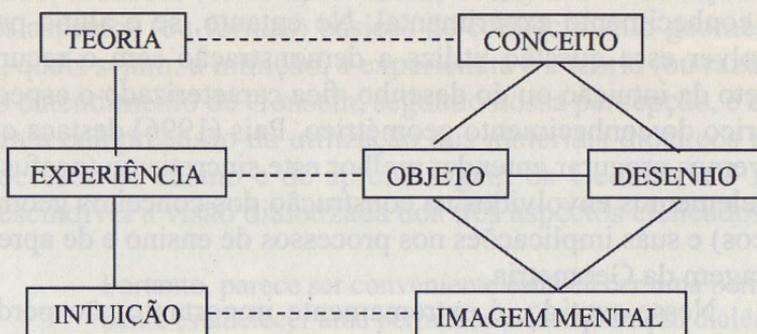
Nesse sentido, é extremamente importante não perdermos de vista as correlações entre as formas de conhecimento (intuitiva, experimental e teórica ou racional) e os recursos didáticos básicos usados no ensino da Geometria (objetos materiais, desenhos e imagens mentais) no decorrer do processo de construção de saberes geométricos. Reparemos que “[...] da mesma forma que há uma base intuitiva no método axiomático, o apelo à experiência acaba determinando uma forte influência na gênese das noções teóricas da geometria” (PAIS, 1996, p. 73). Vejamos também que a intuição e as imagens mentais guardam entre si pontos de aproximação, pois elas “apresentam não só uma certa disponibilidade de utilização como também a propriedade de serem essencialmente subjetivas” (PAIS, 1996, p. 73).

Nesse contexto, o autor em tela salienta que, não obstante o objeto e o desenho por si próprios não especificarem as noções geométricas, pelo fato de serem elementos materiais que contribuem para a construção de um conhecimento de caráter experimental. São eles, juntamente com os fundamentos intuitivos, que tornam possível a elaboração dos conceitos, implicando na efetivação da construção do conhecimento teórico da Geometria.

Com o intuito de ilustrar e mostrar condensadamente as correlações entre os elementos enfatizados como

fundamentais ao ensino da Geometria e as três formas (ou aspectos) do conhecimento geométrico, Pais (1996) elaborou o seguinte esquema:

**Correlações entre os aspectos do conhecimento geométrico e os elementos fundamentais ao ensino de Geometria**



Fonte: Pais (1996, p. 72).

Sob a perspectiva da prática pedagógica, esse esquema ratifica a ideia da interdependência entre as modalidades de aquisição de saberes geométricos e os recursos didáticos usados para a representação dos conceitos da Geometria.

### Considerações finais

Através de nosso olhar panorâmico, constatamos que tanto em importantes países europeus (França e Alemanha, por exemplo) como em nosso país, a Matemática escolar (em particular, a Geometria) foi impulsionada, em grande medida, pelo avanço científico-tecnológico que, por sua vez, foi reflexo da ampliação (no Brasil, da implantação) de parques industriais. Esse quadro implicou, nas condições já explicitadas neste trabalho, em uma demanda por trabalhadores mais bem qualificados.

Em termos de Brasil, pontuamos o abandono da Geometria nas escolas como um forte reflexo da adoção das ideias do Movimento da Matemática Moderna no que tange

ao ensino da Geometria por meio de uma linguagem algébrica, conteúdo esse não dominado pela esmagadora maioria dos professores brasileiros da Educação Básica.

Consideramos que o enfoque histórico-epistemológico é de grande valia nos processos de ensino e de aprendizagem que levam à aquisição de conhecimentos geométricos, haja vista que ao tratarmos da visão histórica fica patente que o advento e o desenvolvimento da Geometria foram motivados, via de regra, pela necessidade de a humanidade fazer frente a questões de ordem prática. Sob o ângulo epistemológico, nós, docentes, devemos compreender a dinâmica da construção dos conceitos geométricos que, a nosso juízo, deve caminhar do concreto para o abstrato. Inserido nesse contexto, defendemos o pensamento que o professor em sua prática educativa opte por problemas geométricos que sejam pertinentes à realidade dos alunos e que as atividades desenvolvidas, por exemplo, sejam representadas por composição e decomposição de figuras bi ou tridimensionais.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1998. 174 p.

EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**: geometria. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. 77 p.

KLINE, M. **O fracasso da Matemática Moderna**. Trad. Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976. 211 p.

LORENZATO, S. Desafios do contemporâneo que não é novo. **Rev. Educação Matemática em Foco**, Campina Grande, v. 1, n. 2, ago/dez 2012, p. 9–32. Disponível em: <file:///C:/Users/Usuario/Downloads/RevistaEducacaoMatematica24-04-2014%20(4).pdf>. Acesso em: 02/05 /2015.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez e Autores Associados, 2001.

MANACORDA, M. A. **História da educação**: da antiguidade aos nossos dias. Trad. Gaetano Lo Monaco. 12. ed. São Paulo: Cortez, 2006. 382 p.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. *Revista Zetetiké*, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul/dez 1996.

\_\_\_\_\_. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. 2000. Disponível em: <[http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_23/analise\\_significado.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf)>. Acesso em: 02/11/2015.

PAVANELLO, M. R. **O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica**. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação/Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989. Disponível em: <[http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls00004\\_5423\\_](http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls00004_5423_)>. Acesso em: 03/04/2014.

PONTES, M. G. de O. **Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho**. João Pessoa: Ideia, 2009. 182 p.

sobre a importância da vivência, pelo professor, em sala de aula, de uma metodologia que fundamente sua prática docente e promova inquietações sobre a aprendizagem do aluno, visando a construção de interfaces epistemológicas que pense sobre questões como a deficiência visual, o laboratório de matemática, e a inserção da educação à distância, ressaltando a importância da formação docente. Por fim, esperamos que os profissionais da educação possam aproveitá-la da melhor forma.

*Maria José Costa dos Santos  
Fortaleza, 25 de fevereiro de 2016.*