A SEQUÊNCIA FEDATHI COMO PROPOSTA METODOLÓGICA PARA A CONSTRUÇÃO E APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PICK

Ana Paula Rodrigues Alves Santos

Introdução

Neste trabalho pretende-se relatar a abordagem do Teorema de Pick vivenciada por uma turma de alunos de uma escola privada, sendo o objetivo prepará-los para Olimpíada Brasileira de Matemática, nível 1 (alunos de 6º e 7º anos). Temos como objetivo treiná-los durante todo o ano para desenvolver habilidades na resolução de problemas matemáticos. Utilizar a metodologia de ensino Sequência Fedathi, como alternativa para ultrapassar alguns obstáculos, como a desistência e o desinteresse por parte de alguns alunos, por não se sentirem capazes e nem envolvidos durante o processo de ensino e aprendizagem, assim como também descobrir novos talentos na Matemática, pois o aluno participa ativamente da construção do novo saber matemático, vivenciando as etapas da Sequência Fedathi, as quais proporcionam a construção e a elaboração do novo conhecimento.

A escolha desse tema deve-se a dificuldade vivenciada na aplicação do teorema que aparenta ser algo simples, porém ao estuda-lo verificamos algumas sutilezas, suscitando questionamentos surpreendentes, como: a mesma fórmula pode ser usada para o cálculo de volume? Como podemos verificar? Representando uma oportunidade ímpar em mostrar aos alunos através da sua própria vivência, a beleza e a sutileza da Matemática. Pretendemos neste trabalho focalizar as dificuldades e descrever como foram ultrapassadas pelos alunos até demostrarem o Teorema de Pick. Buscamos artigos, livros, sites e problemas propostos em olimpíadas para auxiliarem na elaboração da referida sequência didática, direcionando os alunos a vivenciarem uma nova metodologia, a Sequência Fedathi.

Desse modo, o presente trabalho apresenta uma proposta pedagógica, composta por uma **sequência didática** constituída por quatro sessões didáticas, nas quais utilizamos a Sequência Fedathi (SF) como metodologia de ensino. A SF foi apresentada em 1996, na tese de pós-doutorado do Prof. Hermínio Borges Neto, UFC, na Universidade de paris VI. A partir daí, a SF vem sendo experimenta e aperfeiçoada com base nos estudos de Borges Neto, com a participação de professores e pesquisadores da Faculdade de Educação-FACED/UFC.

Referencial Teórico

A metodologia de Ensino Sequência Fedathi

A Sequência Fedathi é uma nova metodologia de ensino que segundo Borges Neto, propõe que o aluno ao se deparar com um problema, deve reproduzir os mesmos passos que um matemático realiza quando se debruça sobre a busca de um novo conhecimento: analisa os dados do problema proposto, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, verifica possíveis erros, busca conhecimentos para constituir a solução, testa os resultados para saber se errou e onde errou, corrige-se e elabora um modelo geral. A Sequência Fedathi conduz o professor a levar os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático, através da interpretação, compreensão e investigação de problemas matemáticos, levando-os a construírem suas aprendizagens a partir das experimentações e constatações feitas durante todo o processo de desenvolvimento da Sequência. .

A SF é composta por quatro etapas sequenciais e interdependentes: **Tomada de Posição, Maturação, Solução e**

Prova (SOUZA, 2013 p.18). Verificamos que é muito importante a vivência desse ambiente em sala de aula para que ocorra uma aprendizagem mais significativa e uma participação ativa de cada aluno na construção dos conceitos matemáticos.

Vivenciar a SF durante a realização da sequência didática auxilia-nos a superar as dificuldades encontradas em anos anteriores em que prevalecia o ensino tradicional, os alunos apresentavam grande dificuldade em assimilar e aplicar o Teorema de Pick. Vale ressaltar que esse conteúdo é trabalhado comumente na preparação dos alunos para Olimpíada Brasileira de Matemática, não pertencendo a grade curricular do ensino fundamental II, representando um conhecimento novo que não está presente nos livros didáticos. Porém, esse tema pode ser estudado por alunos do ensino fundamental II ou médio, desde que tenham os conhecimentos prévios necessários para a construção do novo conhecimento.

Análise ambiental e teórica: o plateau e o acordo didático

Propomos uma sequência didática composta por quatro sessões didáticas, assim denominadas: **Sessão 1**- Calculando áreas através da decomposição de Figuras. **Sessão 2** - Construindo o Teorema de Pick. **Sessão 3** - Aplicando o Teorema de Pick através do Software Geogebra. **Sessão 4** - O Teorema de Pick e outras realidades matemáticas.

Apresentaremos uma análise da **Sessão 2**, por representar maior relevância durante a construção do novo saber matemático, momento culminante durante o processo de ensino e aprendizagem.

Sessão Didática 2 - Nessa sessão didática, os alunos partiram de uma análise de certas figuras geométricas (polígonos) desenhados no plano cartesiano com vértices nos pontos de uma malha quadriculada, representados por pontos de coordenadas inteiras. Tendo essa referência, os alunos devem encontrar a área dessas figuras, obtendo uma fórmula que seja válida para todos os casos. Os alunos utilizaram o Software

Geogebra como ferramenta didática para desenhar os polígonos, seguindo a mediação do professor. O planejamento dessa sessão didática requer uma análise ambiental e teórica.

Análise Ambiental

Propomos uma sequência didática que foi planejada para superar as dificuldades dos alunos que estão a se preparar para a Olimpíada Brasileira de Matemática, nível 1. Os alunos participaram ativamente da construção do novo saber matemático. Tendo como **objetivo**: descobrir uma fórmula que seja válida para encontrar a área de figuras geométricas planas desenhadas no plano cartesiano com vértices nos pontos de uma malha retangular. Os alunos devem ter como **conhecimentos prévios**: a definição de polígonos, saber determinar as áreas de alguns polígonos, tais como a área do quadrado, do triângulo, do trapézio, do paralelogramo e do losango. Devem também, saber classificar os triângulos quantos aos lados e quanto aos ângulos e também saber classificar os quadriláteros, em especial, trapézios. Também, ter conhecimento em determinar a área de figuras planas através da decomposição de figuras **(Sessão Didática 1)** e resolver sistemas lineares. Nesse momento, verifica-se o **plateau**[10] dos alunos e estabelecemos o acordo didático. Segundo a Sequência Fedathi, o acordo didático enfatiza o desenvolvimento do trabalho do professor, a organização de estratégias metodológicas que possam ser pensadas durante a preparação de uma sessão didática, a postura que o professor deve assumir durante o processo de ensino e aprendizagem, que é a postura de mediador, ao observar as investigações dos estudantes, acompanhando-os durante a descoberta do novo saber, tornando-os mais investigativos, reflexivos, críticos, autônomos e colaborativos entre si.

O material necessário para a realização dessa sessão didática: lápis, caderno, projetor multimídia, tablet e o Software

10 De acordo com a Sequência Fedathi, o "plateau" faz parte do processo de diagnóstico realizado para compreender o nível cognitivo dos alunos (SOUZA, 2013 p.20).

Geogebra versão 5.0. O Software Geogebra será utilizado como ferramenta didática ampliando a visão espacial do aluno no momento de descobrir as estratégias para solucionar o problema proposto.

O Teorema de Pick

O Teorema de Pick afirma que, se um polígono no plano cartesiano tem apenas vértices de coordenadas inteiras. Então, sua área é dada pela fórmula

$$A=\frac{1}{2}f+i-1$$

Sendo ***f*** o número de pontos de coordenadas inteiras no contorno (pontos de fronteira) do polígono e ***i*** o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do mesmo.

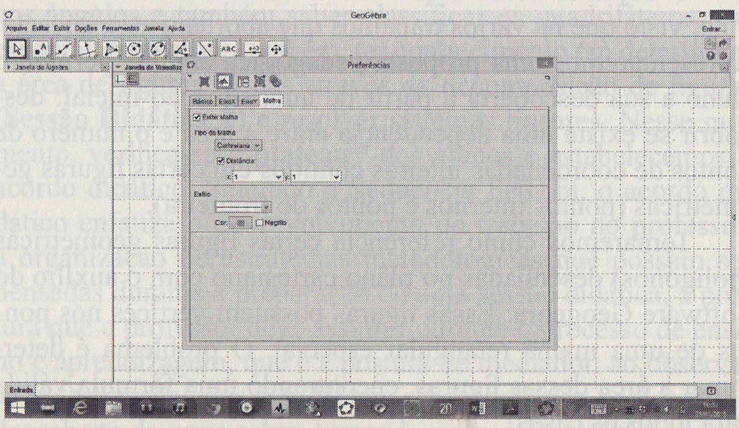
O objetivo dessa seção não é demostrar a fórmula de Pick, visto que há vários trabalhos que abordam essa questão. Apresentaremos uma proposta pedagógica em que permite o aluno a sua descoberta a partir de uma situação inicial: descobrir se existe uma dependência entre a área e o número de pontos de coordenadas inteiras contidos em certas figuras geométricas (pontos internos e pontos de fronteira).

Tomaremos como referência certas figuras geométricas (polígonos) desenhadas no plano cartesiano com o auxílio do Software Geogebra. Essas figuras possuem vértices nos pontos de uma malha retangular especial. O problema é determinar a área dessas figuras, encontrando uma fórmula válida para todos os casos.

Vivenciando a Sequência fedathi: Aplicação da Sessão Didática

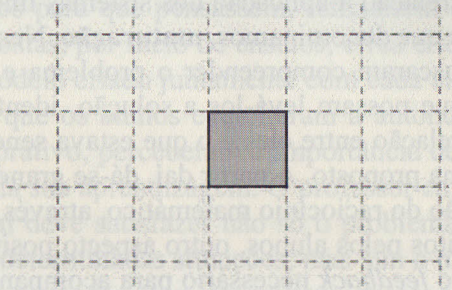
O problema foi proposto a turma, inicia-se a primeira etapa da Sequência Fedathi, a **tomada de posição**. Neste momento o professor promoveu a interação entre si e os alunos, propiciando um trabalho interativo, ou seja, o professor assumiu a postura de mediador, refletindo, ouvindo, indagando e levantando hipóteses acerca do novo saber, bem como suscitou questionamentos entre todos. O professor esclareceu que os pontos do plano cartesiano de coordenadas inteiras formam uma malha retangular, e as expressões pontos de coordenadas inteiras e pontos da malha retangular serão usadas daqui para frente. As figuras que serão trabalhadas sempre serão polígonos com vértices em pontos dessa malha. Vários questionamentos surgiram e o professor buscou sempre mediar o trabalho desenvolvido pelos alunos com outras perguntas que os conduzissem a encontrar uma estratégia para resolver o problema. O software Geogebra auxiliou-os na visualização e compreensão do problema. Primeiramente, os alunos prepararam o campo de visualização do Geogebra (figura 1).

Figura 1. Procedimento para ajustar a malha.



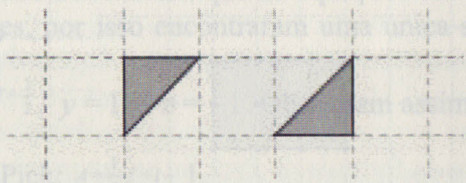
Esse ajuste feito na malha do software Geogebra, ajuda o aluno a compreender o conceito de padronização da unidade de área. Então, desenham o menor quadrado (quadrado que contém apenas 4 pontos da malha) de área 1 como padrão (figura 2). Indaga-se aos alunos: que polígono obteremos se dividirmos o quadrado ao meio? Qual a sua área?

Figura 2. Quadrado desenhado com o auxílio do software Geogebra



Pretende-se que os alunos compreendam que qualquer outro triângulo que tenha apenas três pontos da malha tem área $\frac{1}{2}$ (figura 3).

Figura 3. Triângulos desenhados com o auxílio do software Geogebra



Primeiramente, os alunos são instigados a encontrar uma relação entre os pontos da malha e a área de uma tal figura. Então, deve-se pensar se há influência entre o número de pontos da malha contidos na figura e o valor dessa área. Destaca-se alguns questionamentos:

Aluno: - Professora, devemos fazer uma equação?

Professora: - Há influência entre o número de pontos da malha que pertencem a figura com a sua área?

Aluno: - Professora, quanto maior a figura, maior o número de pontos. Correto?

Professora: - Observe que há pontos internos, pontos nos vértices e pontos que pertencem ao contorno (borda) da figura.

Alunos: - Devo relacionar todos eles?

Professora: - Estude a influência de cada um separadamente.

Neste momento, deve-se falar sobre a dependência linear e fazer uma relação à aplicação dos sistemas lineares, vivenciando a fase que denominamos, **maturação**. Neste momento, os alunos buscaram compreender o problema e formularam estratégias que possam levá-los a solução, identificaram dados, qual a relação entre eles e o que estava sendo solicitado pelo problema proposto. A partir daí, dá-se grande relevância na formulação do raciocínio matemático, através dos questionamentos feitos pelos alunos, outro aspecto positivo é o professor obter o *feedback* necessário para acompanhar o desenvolvimento do trabalho realizado. Os alunos se debruçaram sobre os dados do problema, originando reflexões e hipóteses que poderiam leva-los a solução em questão.

Então, cada aluno desenhou três figuras utilizando o software Geogebra (figuras 4, 5 e 6).

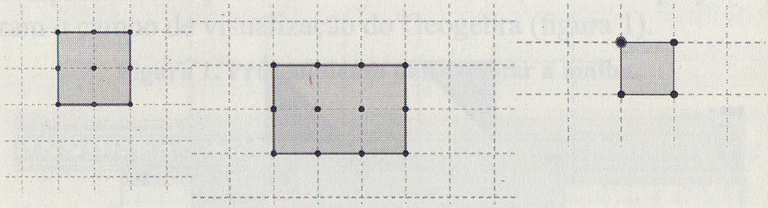


Figura 4 **Figura 5** **Figura 6**

Desde então, os alunos fizeram as relações existentes entre os pontos internos, os pontos de fronteira e os pontos dos vértices, obtendo as equações:

$$A = fx + iy + z$$

Sendo A área do polígono; f pontos de fronteira e i pontos internos.

Logo, obtiveram as equações:

$$1 = 4x + 4y + z \text{ (figura 4)}$$
$$4 = 8x + 1y + z \text{ (figura 5)}$$
$$6 = 10x + 2y + z \text{ (figura 6)}$$

A resolução do sistema linear acima, caracterizou a **solução**, a terceira fase da Sequência Fedathi em que os alunos

Neste momento, deve-se falar sobre a dependência linear e fazer uma relação à aplicação dos sistemas lineares, vivenciando a fase que denominamos, **maturação**. Neste momento, os alunos buscaram compreender o problema e formularam estratégias que possam levá-los a solução, identificaram dados, qual a relação entre eles e o que estava sendo solicitado pelo problema proposto. A partir daí, dá-se grande relevância na formulação do raciocínio matemático, através dos questionamentos feitos pelos alunos, outro aspecto positivo é o professor obter o *feedback* necessário para acompanhar o desenvolvimento do trabalho realizado. Os alunos se debruçaram sobre os dados do problema, originando reflexões e hipóteses que poderiam leva-los a solução em questão.

Então, cada aluno desenhou três figuras utilizando o software Geogebra (figuras 4, 5 e 6).

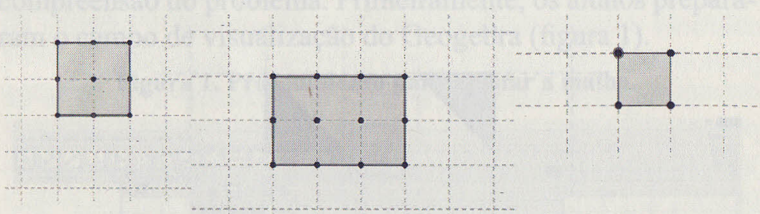


Figura 4 **Figura 5** **Figura 6**

Desde então, os alunos fizeram as relações existentes entre os pontos internos, os pontos de fronteira e os pontos dos vértices, obtendo as equações:

$$A = fx + iy + z$$

Sendo A área do polígono; f pontos de fronteira e i pontos internos.

Logo, obtiveram as equações:

$$1 = 4x + 4y + z \text{ (figura 4)}$$
$$4 = 8x + 1y + z \text{ (figura 5)}$$
$$6 = 10x + 2y + z \text{ (figura 6)}$$

A resolução do sistema linear acima, caracterizou a **solução**, a terceira fase da Sequência Fedathi em que os alunos

Neste momento, o foco passou a ser a verificação da fórmula para todo o tipo de figura. O professor propôs que desenhassem no Geogebra um polígono qualquer e comparassem a área calculada através da fórmula com a exposta na janela algébrica do software Geogebra. O professor pediu que desenhassem uma figura composta pela junção de duas figuras. Houve mais uma conclusão, a fórmula também pode ser aplicada para a junção de figuras. Surpreendente, simples e bela Fórmula de Pick, os alunos tiveram a oportunidade de vivenciar a sua construção seguindo as fases da Sequência fedathi, metodologia que proporcionou a descoberta, a curiosidade e autonomia dos alunos. A partir daí, a turma está pronta para vivenciar situações práticas, como calcular valores aproximados de áreas vistas através de satélites, por exemplo, utilizando a fórmula de Pick, esse será o momento da **avaliação**.

Podemos pensar mais além para a fórmula de Pick?

Uma das perguntas mais intrigantes durante a vivência da construção da fórmula de Pick foi se era possível utilizá-la para o espaço tridimensional, ou seja, é possível com ela calcular volumes?

Vamos aplicar o mesmo raciocínio para o plano tridimensional, utilizaremos sólidos geométricos com vértices em pontos da malha tridimensional formada pelos pontos do espaço cartesiano tridimensional com coordenadas inteiras. Analogamente, adotaremos como referência o cubo com oito pontos da malha tridimensional, com volume 1 e o tetraedro de volume 1/6 com apenas 4 pontos da malha. Próximo passo, é verificar se a equação $V = fx + iy + z$ que usa o número de pontos da malha que estão na fronteira e os que estão no interior da figura (como no caso da área) vale para o cálculo do volume. Aplicamos ao cubo de volume 1 e ao tetraedro de volume 1/6, obtendo as equações (1) e (2).

$$1 = 8x + 0y + z \ (1)$$

$$1/6 = 4x + 0y + z \ (2)$$

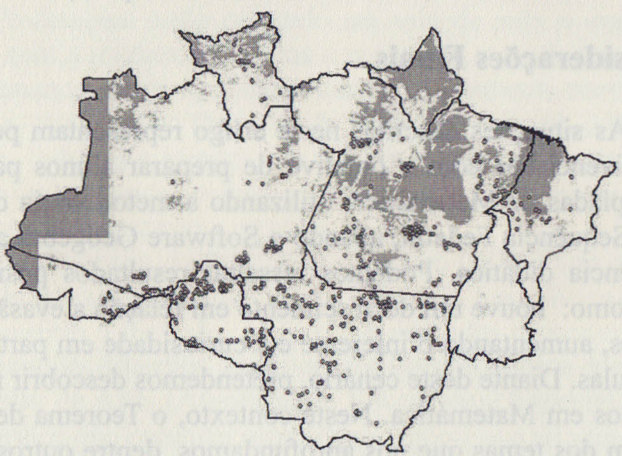
Encontramos para x = 5/24 e z = -16/24. Para verificarmos se estes valores podem ser usados para o cálculo do volume, utilizaremos a junção de dois cubos de volume 1, formando um paralelepípedo, obtemos 12.5/24 - 16/24 = 44/24, verificamos uma contradição, pois o volume do cubo é 2. Daí, conclui-se que a equação usada para obter a fórmula de Pick para áreas no plano não se adequa ao cálculo de volumes.

Em artigos, livros e revistas encontramos uma discussão sobre uma possível extensão adequada da Fórmula de Pick para o espaço Tridimensional, mas não encontramos um resultado que satisfaça tal condição.

Fazendo conexões: onde aplicar o Teorema de Pick?

Podemos aplicar a fórmula de Pick de forma bastante interessante, suscitando a curiosidade e a busca pela resolução de problemas. Apresentar uma imagem (figura 7) que representa o desmatamento na Amazônia divulgado pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe).

Figura 7. Mapa do Inpe mostra os focos de desmatamento detectados no mês de setembro. Em rosa, as áreas que ficaram encobertas por nuvens



Fonte: Inpe

Dando ênfase para determinar, através da fórmula de Pick, o estado mais prejudicado com a degradação da floresta Amazônica. Então, temos a possibilidade de determinar o cálculo da área aproximada de uma região irregular. Primeiramente, os alunos devem identificar a região da qual iremos determinar a área, analisando a figura 7. Vivenciamos uma aplicação na Engenharia Florestal, ainda podemos fazer uma conexão com a estatística, trabalhando gráficos e dados, comparando meses subsequentes. Podemos falar sobre o meio ambiente, cidadania e como a matemática auxilia o homem a solucionar e prever situações, promovendo o bem comum. Muito interessante para os alunos perceberem essas relações, vivenciando as recomendações dos PCN´S que estabelecem a importância dessas questões trabalhadas em sala quando mencionam:

> A compreensão das questões ambientais pressupõe um trabalho interdisciplinar em que a Matemática está inserida. A quantificação de aspectos envolvidos em problemas ambientais favorece uma visão mais clara deles, ajudando na tomada de decisões e permitindo intervenções necessárias (PCN/MEIO AMBIENTE p. 27).

Considerações Finais

As situações descritas neste artigo representam pesquisas vivenciadas com o objetivo de preparar alunos para as Olimpíadas de Matemática, utilizando a metodologia de ensino Sequência Fedathi, aliando o Software Geogebra a cada sequência didática. Podemos ressaltar resultados positivos, tais como: houve um decrescimento em relação a evasão dos alunos, aumentando o interesse e a curiosidade em participar das aulas. Diante deste cenário, pretendemos descobrir novos talentos em Matemática. Neste contexto, o Teorema de Pick foi um dos temas que nos aprofundamos, dentre outros relacionados a Geometria.

As sequências didáticas descritas fomentou a autonomia, a autoestima e a busca pelo saber matemático, constamos que é possível tornar a matemática atrativa para os nossos alunos.

REFERÊNCIAS

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, RJ: Editora da SBM, 2004.

SOUSA, F. E. E. *et al.* **Sequência Fedathi** – Uma Proposta Pedagógica para o Ensino de Ciências e Matemática. Edições UFC, Fortaleza, 2013.

TAMARI, M. E. **O Teorema de Pick e Aplicações**. 2013. 43f. Dissertação-Universidade Federal do ABC, UFABC, Rio de Janeiro. 2001.

VERRI, A. F. G. **Uma apresentação didática do Teorema de Pick.** IME-USP. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html>. Acessado em: 20/10/2015.