A CONTRIBUIÇÃO DE EFRAIN FISCHBEIN PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR

Francisco Regis Vieira Alves[1]
Rua Monsenhor Otávio de Castro, nº 21,
apt. 402, CEP: 60.150-050
E-mail: fregis@etfce.br.

Hermínio Borges Neto[2]
Rua Leonardo Brandão, nº 188,
apt. 200, CEP: 60.170-040
E-mail: hermínio@ufc.br

RESUMO

Este artigo descreve a aplica algumas das principais noções formuladas por Efrain Fischbein no ensino/aprendizagem de Matemático. O mencionado psicólogo foi o fundador do grupo de pesquisa internacional em Psicologia da Educação Matemática - PME. Com fortes influencias piagetianas, ele concebeu um arcabouço teórico que proporciona uma interpretação, de modo sui generis, para inúmeros fenômenos de natureza cognitiva. Uma de suas contribuições particulares diz respeito à caracterização do raciocínio intuitivo e uma discussão filosófica e psicológica de sua natureza. Com tal preocupação, destacam-se alguns aspectos marcantes da manifestação de categorias do raciocínio intuitivo (intuição afirmativa, intuição conjectural e intuição antecipatória) no âmbito da resolução de problemas de matemática, com uma preocupação marcante voltada à formação de professores de matemática.

Palavras-chave: Intuição; Raciocínio; Professores de Matemática

ABSTRACT

This article describes some of the main concepts formulated by Efrain Fischbein on teaching and learning of Mathematics. The psychologist was the founder of the international research group in Psychology of Mathematics Education – PME. With strong influences from Piaget, he created a theoretical framework that provides an interpretation, in such a sui generis way, for several phenomena of cognitive nature. One of his particular contributions regards the characterization of intuitive reasoning and a discussion about its philosophical and psychological nature. With this concern, it is highlighted some important aspects of the manifestation of the intuitive reasoning categories (affirmative intuition, conjectural intuition and anticipatory intuition) in the context of problem solving in Mathematics, with a remarkable concern focused on the training of Mathematics teachers.

Keywords: *Intuition; Thinking; Mathematics Teachers.*

1 A CONTRIBUIÇÃO DE EFRAIN FISCHBEIN

Nascido em Bucareste em janeiro de 1920, conclui seu período formativo na Romênia. Gradua-se na Universidade de Bucareste em 1947 e torna-se membro do Departamento Educacional de Psicologia, de 1959 a 1975. Efrain Fischbein apresenta um trabalho reconhecido e de relevo perante à comunidade contemporânea internacional de pesquisadores em Educação Matemática.

Fischbein reconhece que a manifestação de uma consciência coletiva e uma sinergia no que diz respeito ao esforço pelo aperfeiçoamento de ações de especialistas voltadas ao ensino/aprendizagem em Matemática não é recente. Neste âmbito, salienta que

> *grandes matemáticos, como Felix Klein, Henri Poincaré, foram altamente interessados em educação matemática e publicaram suas ideias em conexão com a didática da matemática* (FISCHBEIN, 2000, p. 47).

Participa como membro fundador do Grupo Internacional de Psicologia em Educação Matemática (*The Internacional Group of Mathematics Education* – PME[3]). Fischbein publica sua tese de doutoramento intitulada *The Figural Concepts: the nature of geometric entities*

[1] Licenciado e Bacharel em Matemática (UFC), Mestre em Matemática Pura e Mestre em Educação com ênfase no ensino de Matemática. Doutorando em Educação com ênfase no ensino de Matemática em nível superior (UFC) e professor do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE.

[2] Mestre em Matemática Pura, Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Pós-doutorado em Educação Matemática na Universidade Paris V e coordenador do programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará – UFC.

[3] Fischbein explica que a criação deste grupo *tencionou a organização dos esforços do talento ativo de pessoas que estavam atentas ao enorme alcance social da Educação Matemática* (2000, p. 47).

and their development in children em 1963. Nela, sua preocupação com as faculdades intuitivas dos aprendizes exigidas na aprendizagem e contato inicial com alguns conceitos da Matemática é flagrante.

Um elemento identificado na teorização desenvolvida por ele diz respeito ao papel e às fontes de explicação da natureza do conhecimento que obtemos por meio da faculdade psíquica que nomeamos de intuição. Efrain Fischbein recorre tanto ao campo da pesquisa em Psicologia Cognitiva como ao terreno filosófico para estruturar e desenvolver suas argumentações e divisar a proficuidade dos problemas que possivelmente exigem respostas de ambas áreas do saber científico.

De fato, encontramos em um dos seus trabalhos uma recorrente discussão acerca da natureza de tal faculdade. Neste sentido, ele explica

> *diferentes definições do termo 'intuição' têm sido propostas, exprimindo como de hábito o ponto de vista do autor sobre a natureza deste fenômeno. [...] Citamos apenas alguns para recordar a diversidade de orientações. Mas de todos os autores, identificamos um elemento comum. O termo intuição em sua acepção mais geral, significa conhecimento imediato* (FISCHBEIN, 1971, p. 264).

De modo incisivo, observamos em sua produção acadêmica, profundas implicações extraídas para o ensino e a aprendizagem, com base na compreensão do papel não trivial desempenhado pelo que nominamos de 'intuição'. Com essa preocupação, Fischbein (1969, p.291) expressa

> *na realidade, a aprendizagem não se reduz a uma simples absorção de informações e a formação de mecanismos mentais sobre terrenos neutros. A aprendizagem implica em um processo ativo de reconstrução, com meios intelectuais próprios, a partir de dados fornecidos* (FISCHBEIN, 1969, p.291).

Percebemos com facilidade os pressupostos piagetianos aplicados em seu discurso. De fato, ele recorda que Jean Piaget (1896-1980) *apresenta uma das teorias mais consistentes à respeito dos estádios mentais, resultado de uma pesquisa de quase cinco décadas* (FISCHBEIN, 1969, p. 263). E com suporte em algumas posições assumidas por Piaget, Fischbein sublinha que

> *para contribuir à elaboração de estruturas mentais, o ensino deve ser estrutural. O ensino deve acentuar os conceitos fundamentais, sobre ideias diretrizes, sobre técnicas essenciais de descoberta, de organização, de interpretação de fatos em um domínio de conhecimentos* (FISCHBEIN, 1969, p. 295).

Com apoio nesse e noutros pressupostos, Fischbein analisa o complexo e multifacetado raciocínio lógico-matemático. Nunca desconsidera o modo peculiar e diferenciado na Matemática, em relação às outras áreas do saber científico. Analisa também o modo peculiar do surgimento, evolução, abstração e da sistematização das ideias matemáticas.

De fato, Fischbein descreve que

> *a Matemática trata com objetos ideias e operações ideais, meios de verificação ideias, um significado no qual é totalmente determinado pela formalidade estabelecida por definições e regras* (FISCHEBEIN, 1987, p. 20).

Numa perspectiva histórico-filosófica, ele se recorda de que as inúmeras mudanças e quebras de paradigmas nesta ciência foram consequência da evolução das formas de cognição humana, do desenvolvimento da capacidade abstrativa e da libertação, pelo menos em parte, do mundo sensível no sentido de geração de ideias. Nesse passo, Fischbein (1987, p. 16) destaca que *a completa independência da matemática, como um mundo fechado de entidades formalmente postuladas, mostrou-se impossível.*

Em todo caso, no quadro do seu ensino, encontramos, sem muito esforço, professores que parecem habitar numa realidade paralela à do estudante real. Suas predileções, crenças, concepções e hábitos platônicos e/ou *formalistas* produzem um *saber matemático* de caráter universal e que elimina a dimensão subjetiva, e por que não dizer, dimensão mundana do conhecimento que ele professa. Este quadro de ensino proporciona sérios entraves à aprendizagem do estudante e é analisado cuidadosamente por Fischbein ao mencionar que

> *muito frequentemente, a criança enfrenta dificuldades em sua aprendizagem, compreensão e resolução de problemas desafiadores porque suas estratégias de raciocínio são controladas por modelos tácitos inadequados. O professor deve tentar identificar tais modelos a auxiliar o estudante para corrigir seus modelos mentais ou adquirir outros mais adequados neste caso* (FISCHBEIN, 1987, p. 203).

Como identificar, todavia, modelos mentais inadequados que em geral apresentam intensa base intuitiva se o mestre desconhecer os significados e os modos de manifestação do raciocínio intuitivo? Como aproveitar o caráter subjetivo dos modelos mentais provisórios empregados pelo iniciante se o único raciocínio reconhecido e recomendado pelo docente, segundo a *prática formalista*, é o raciocínio lógico-matemático?

De fato, questões desta natureza requerem ampla argumentação e na seção seguinte, passaremos a discutir de modo pormenorizado a noção de transmissão didática e de outras que sempre mantiveram a atenção de Fischbein (1987; 1993; 1999; 2000; 2001) e de vários outros colaboradores (FISCHBEIN, 1999; FISCHBEIN, BARBAT & MINZAT, 1971; FISCHBEIN & GAZIT, 1984;).

2 O ENSINO/APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DE FISCHBEIN

Efrain Fischbein delimita o campo de aplicação da Psicologia Cognitiva em Matemática. E, ao mencionar, por exemplo, um caso específico do ensino de funções, evidencia que a natureza dos problemas psicológicos no caso de representações algébricas e gráficas de funções que *não podem ser definidos e analisados somente no respectivo meio matemático-didático* (FISCHBEIN, 2000, p. 57).

Ele e outros especialistas manifestam uma recorrente preocupação com os processos de transmissão didática. Neste sentido, Fischbein, Barbat & Minzat (1971, p. 265) caracterizam os conhecimentos em três circunstâncias específicas:

(a) as informações dadas em um quadro de processo de ensino que encontram um terreno intuitivo favorável;

(b) um quadro em que as intuições são contrariadas e o terreno não é intuitivo e

(c) ausência de uma atitude intuitiva prévia à informação ensinada.

Notamos que o fenômeno intuitivo é expresso no centro do processo didático descrito há pouco. Por outro lado, efetivar uma mediação, por parte do professor, considerando-se *a priori* as três circunstâncias ora descritas, urge que conheçamos a natureza e o papel dos modelos de cognição intuitiva, embora essa tarefa exija enorme esforço, uma vez que uma intuição é *uma estrutura cognitiva complexa e o seu papel e organiza informação utilizável (e mesmo incompleta) de modo aparentemente coerente, internamente consistente, autoevidente* (FISCHBEIN, 1987, p. 211).

A matemática, entretanto, é caracterizada pela sua natureza formal e como um conhecimento axiomaticamente organizado. *Além disso, cada declaração matemática é aceita mediante os paradigmas de uma prova completa*. (op.cit 1987, p. 211) É interessante notar os extremos contemplados na visão do saudoso Fischbein, ou seja, a valorização do conhecimento obtido por meio da intuição de um lado e, por outro lado, a consideração das características intrínsecas do *saber matemático*, sua natureza como campo epistêmico, e a constituição da circunstância para implementar um ensino estrutural. Neste âmbito, o filósofo alerta

> *na aprendizagem de Matemática de uma maneira moderna (e não apenas conceitos modernos de matemática) o aluno aprende sobretudo a descobrir além de uma variedade aparente, as relações fundamentais e suas propriedades, seus modos fundamentais de organização das entidades matemáticas e sobretudo a dinâmica vivaz destas relações* (FISCHBEIN, 1969, p. 295).

Sem dúvida, no trecho final de suas colocações, ele caracteriza uma visão global peculiar ao matemático profissional; mas apesar de que, na maioria das vezes, o estudante não atinge tal grau de visão ampliada do saber descrita por Fischbein, pelo menos, em parte, o estudante necessita compreender a 'beleza' que envolve as relações apontadas por ele.

Falar de 'beleza' se constitui sempre uma difícil tarefa. Tal noção reside de modo latente no ensino de Matemática, uma vez que identificar e compreender a 'beleza' do *saber matemático* é condição *sine qua non* para o mestre transmitir e enriquecer a visão do aluno. Uma das maneiras de conduzir o aluno a identificar a 'beleza' ou a 'estética' do *saber matemático* reside, possivelmente, em explorarmos o terreno intuitivo.

Com efeito, Fischbein alerta para o fato de que parece absurdo *falar de associatividade ou comutatividade da adição antes que a criança tenha tido a ocasião de adicionar, reunindo um grupo de bolinhas ou carneiros* (op.cit. 1969, p. 296). Destacamos o que ele orienta se emprega para todos os níveis de escolaridade, e não apenas nas séries iniciais.

Deste modo, dificilmente um professor consegue transmitir a 'beleza', e, assim, chamar a atenção do aluno com respeito a determinado conteúdo, apresentando-o ao conjunto de regras formais que garantem sua consistência ou validade lógica. O que Fischbein aconselha, para uma compreensão efetiva de regras aparentemente simplórias como a *comutatividade* e *associatividade*, diz respeito ao estímulo adequado das faculdades intuitivas.

Por outro lado, tais faculdades mentais podem ser mais ou menos promovidas na medida em que possamos contar com um objeto matemático ou um terreno conceitual propício a este tipo de ação intencional do professor. Assim, para o item (a), podemos identificar alguns conteúdos que podem proporcionar um forte apelo intuitivo para o estudante.

Por exemplo, na figura 1, Fischbein, Tirosh & Melamed explicam que, como uma consequência de um conhecimento imediato, expresso por sua obviedade, afirmamos em (I) que BC é mais longo do que AB; entretanto, podemos ter algumas dúvidas e incertezas quanto ao traçado do segmento, o que nos conduz a uma sensação de incerteza com respeito a tal propriedade.

Por outro lado, na figura 1-II, percebemos a fórmula que produz as raízes de uma equação polinomial de grau dois. Fischbein, Tirosh & Melamed (1981, p. 492) explicam que *aqueles que usaram cálculos algébricos não possuem dúvidas quando a validade da fórmula*. Além disso, *eles ficam completamente convencidos de que a fórmula está correta*; todavia, não temos de imediato o 'feeling' de que a fórmula é intuitivamente evidente. Eles concluem que *podemos permanecer altamente convencidos da validade de uma afirmação sem estar intuitivamente satisfeitos com ela*

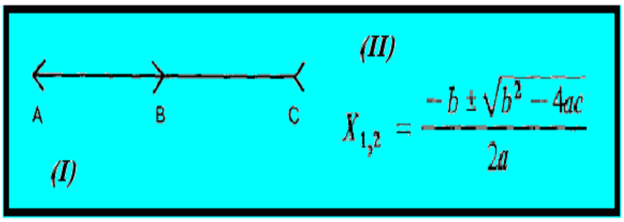

Figura 1: Exemplos discutidos por Fischbein, Tirosh & Melamed (1981, p. 492)

Não é aleatório o exemplo escolhido aqui no campo da Álgebra. De fato, a História da Matemática demonstra, de modo contundente, exemplos emblemáticos, neste sub-ramo do saber, que se mostram inférteis, no que diz respeito à apreensão intuitiva. De fato, Fischbein (1987, p. 10) questiona o significado intuitivo de $a^0 = 1$, para $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, ou ainda a^{-3}, $a^{0,5}$.

Outro conceito discutido por ele é o de *números complexos*. O Filósofo diz que *é bem conhecido que raízes 'imaginárias' são obtidas quando certas equações possuem representação como jogos para matemáticos*. O termo 'imaginário' indica o fato de que tais raízes foram consideradas desde um ponto de vista exterior ao racional. *Eles não são considerados como sendo números 'verdadeiros', mas imaginários*. (op.cit 1987, p. 133).

Podemos mencionar o seguinte exemplo para caracterizar os processos de transmissão didática para o item (c). Consideremos a listagem: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots$. Na sequência, Fischbein, Tirosh & Melamed (1981) perguntam se ela não possui fim.

Considerando esse exemplo no campo de ensino das *progressões geométricas*, sabemos que o ensino escolar trabalha com deficiência as noções de infinito, como uma consequência legítima de uma falha da formação do professor neste campo de fundamentos da Matemática.

Assim, o aluno depara uma situação envolvendo um modelo matemático completamente inusitado e, do ponto de vista intuitivo, complexo. Reconhecidamente, a noção de infinito[4] causa estranheza e proporciona algumas propriedades inesperadas, que contrariam algumas de nossas intuições constituídas *a priori*.

Fischbein discute o exemplo em que podemos estabelecer uma correspondência um por um entre dois segmentos AB e CD, a partir de um ponto M. Assim, intuitivamente, podemos conjecturar que, apesar de comprimentos distintos, tais segmentos apresentam a mesma quantidade de elementos (figura 2), o que contraria nossa intuição, quando recorremos aos nossos sentidos.

[4] Couturat (1973, p. 212) explica que *na Aritmética e na Álgebra, o infinito se apresenta como um símbolo de impossibilidade, como uma solução absurda e falsa*. Todavia são justamente os modelos da Aritmética e da Álgebra que são mais conhecidos dos estudantes.

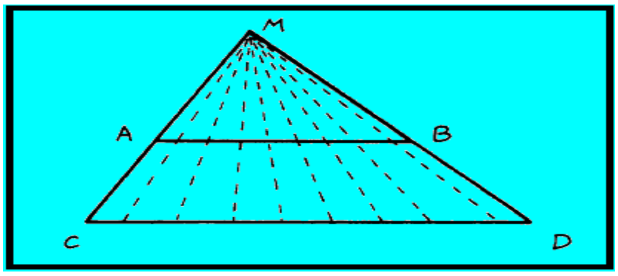

Figura 2: Fischbein (1987, p. 138)

Para Fischbein, observamos que as figuras geométricas constituem uma entidade mental construída por meio de um raciocínio geométrico. Esse autor distingue uma figura de sua definição formal e de sua imagem mental, que se apoia em uma percepção sensorial de uma representação particular fornecida.

Deste modo, com arrimo em suas considerações, podemos conceber e comparar o percurso da evolução do raciocínio de um aluno com um professor. O primeiro, ao conhecer um assunto pela primeira vez, ainda não apresenta familiaridade suficientemente desenvolvida para lidar com definições formais deste conteúdo. Assim, se apoiará predominantemente num raciocínio intuitivo.

Ao decorrer da evolução e no avanço sucessivo de seus estádios mentais de aprendizagem, o estudante, paulatinamente, generaliza, sistematiza e sintetiza as ideias fundamentais envolvidas naquele assunto. Deste modo, o sujeito avança para um raciocínio lógico e matemático.

Já no caso do professor, toda aquela teoria já lhe é bastante familiar. Toda a base formal é conhecida e repetida cotidianamente. Na hipótese em que sua preocupação não se restrinja ao aprendizado formal, ele necessita desenvolver uma mediação intuitiva do saber. Para tanto, necessitará realizar algumas transformações e adaptações necessárias, respeitadas as características dos seus alunos.

Na figura 3, esquematizamos o esforço e o tipo de atividade mental, com respeito à natureza dos raciocínios, desenvolvida tanto pelo professor quanto pelo aluno. Poderíamos simplificar e interpretar o diagrama, parafraseando o filósofo francês Ettienne Bonnot de Condillac (1715-1780), dizendo que o aluno vai do 'conhecido ao desconhecido'. Enquanto isso, o professor mobiliza seu raciocínio do 'conhecido ao conhecido'.

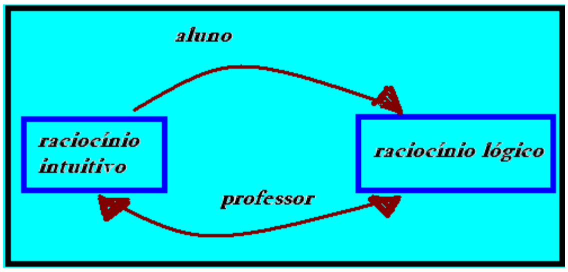

Figura 3: Percurso realizado por aluno e professor.

Para concluir esta seção, advertimos que uma abordagem e adaptação metodológica do professor se processa na medida em que ele conhece e reconhece a manifestação de um raciocínio tipicamente intuitivo. De outro modo, se não conhecemos as características psicológicas do fenômeno intuitivo, dificilmente o promoveremos de modo intencional no ensino. Com essa preocupação em foco, passaremos a descrever algumas das características do raciocínio intuitivo apontadas pelo nosso autor de referência.

3 CARACTERÍSTICAS DA INTUIÇÃO

Fischbein & Gazit (1984, p. 2) descrevem, de modo conciso

> *o termo 'intuição' significa, basicamente, uma avaliação global, sintética, não explicitamente justificada ou predição. Tal cognição global é sentida por um sujeito como auto-evidente, auto-consistente, e duramente questionável.*

Notamos o poder de síntese na descrição de um fenômeno reconhecidamente multifacetado e singular. Deste modo, acreditamos na conveniência de nos determos em uma descrição pormenorizada de certos termos mencionados no excerto passado.

Neste sentido, Fischbein (1999) desenvolve um discurso mais detalhado no artigo intitulado *Intuitions and Schemata of Mathematical Reasoning*. Nesse artigo, encontramos a delineação do significado de algumas características dos processos de raciocínios intuitivos. Assim, Fischbein explica que em tais raciocínios, identificamos:

- *cognições autoevidentes* significam que intuições são aceitas sem que o indivíduo manifeste a necessidade de uma checagem ou prova *a posteriori*;

- *convicção intrínseca* diz respeito a uma cognição intuitiva usualmente associada ao sentimento de certeza, convicção de segurança;

- que a intuição manifesta um '*efeito coercitivo'* no sentido de afetar as estratégias de raciocínio do indivíduo e sua seleção de hipóteses e soluções. *Isto significa que o indivíduo tende a rejeitar interpretações alternativas, as quais contrariem suas intuições privadas;*

- por fim, uma característica basilar entre um raciocínio intuitivo e um raciocínio lógico é descrita pelo autor como *globalidade*, isto é, intuições são cognições globais em oposição às cognições adquiridas por uma via de sequências inferenciais e lógicas ou analítico-inferencial.

A importância do '*caráter coecitivo'* de um processo mental que resulta numa intuição no ensino é inquestionável. De fato, no ensino de Matemática é frequente a posição autoritária assumida do professor em aceitar apenas as estratégias discutidas e, preferencialmente, referendadas por ele em sala de aula. Assim, o estudante aguarda as diretrizes explicitadas pelo mestre e repete o mesmo receituário no dia da prova ou exame.

Esse tipo de ritual caracteriza a reprodução de um raciocínio privado do professor, e não, necessariamente, desenvolvido pelo próprio aluno. No ensino tradicional, tal hábito improfícuo do estudante se caracteriza pelo *pensamento algorítmico*. Tal pensamento é mencionado e explicado por Otte (1991) como um conhecer sem percepção.

Discutiremos na próxima seção a contextualização e as implicações desta forma de conhecer sem significado. Por enquanto, nos deteremos nos aspectos mais destacados da faculdade intuitiva. Por exemplo, Fischbein (1987, p. 57) recorda que a classificação piagetiana para tal faculdade psíquica é bem mais complexa.

Além disso, Fischbein diz que Piaget mencionava algumas dicotomias e diferenciava *intuições empíricas* e *intuições operacionais*. As primeiras referiam-se "*a avaliação física dos objetos ou experiências psicológicas reais por meio da introspecção"*(p. 58). *Já as intuições operacionais* referiam-se a ações relacionadas aos objetos e fenômenos psicológicos.

A segunda diferença realçada na teoria piagetiana diz respeito a intuições acompanhadas de imagem e intuições que não possuíam tal propriedade. No primeiro caso, ainda segundo a Teoria Psicogenética, podemos falar de *intuições geométricas*. Fischbein destaca a imagem do círculo (como uma figura geométrica) e o conceito de círculo e declara que "*ambos são completamente congruentes, uma vez que não existe nada a mais na figura do que é expresso pelo conceito"*. (op.cit 1987, p. 57)

Ele acentua a dificuldade em se compreender a classificação piagetiana no que diz respeito à generalidade atribuída ao termo "intuição". De fato, segundo a terminologia do Epistemólogo suíço, esta atividade intelectual pode ser tanto intuitiva como formal. Por outro lado, Fischbein fornece uma classificação mais detalhada e que apresenta menos dicotomias.

De acordo com sua classificação, podemos ter: '*intuições afirmativas'*, '*intuições conjecturais'*, '*intuições antecipatórias'*. As primeiras nomeadas por '*intuições afirmativas'* são "*representações ou interpretações de vários fatos aceitos como corretos, auto-evidentes e auto-consistentes"*. (op.cit 1987, p. 58) Por exemplo, quando dizemos que "dois pontos determinam um linha reta" ou que "o todo é maior do que as suas partes constituintes", manifestamos um conhecimento baseado em *intuições afirmativas*.

Reparemos que na primeira sentença declaramos algo a respeito de um objeto que possui um significado e uma definição formal dentro de uma teoria axiomática que conhecemos como Geometria Plana. Por outro lado, na segunda sentença, apesar de descrever, conforme Fischbein, uma *intuição afirmativa*, empregamo-la num contexto não determinado e/ou preciso.

Outro exemplo pode ser mencionado quando afirmamos que o "objeto mais pesado deverá tocar o chão, em queda livre, mais rápido do que um outro objeto mais leve". Para formular tal afirmação, não necessitamos precisamos ir à escola, e muito menos estudar formalmente nenhum conceito de Física Clássica, entretanto, quando Fischbein descreve as categorias intuitivas, delimita algumas delas em determinados campos do conhecimento.

De fato, quando afirmamos que "por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma reta paralela a primeira", tal declaração, historicamente, é conhecida como um dos postulados euclidianos. Fischbein declara que a compreensão desta propriedade axiomática envolve algum tipo de *intuição afirmativa*, todavia, para um sujeito compreendê-la, necessita divisar alguns dos condicionantes intrínsecos da Geometria Plana.

Explica ainda que uma intuição do tipo afirmativa pode ser descrita, para efeito de distinção, por meio de um modelo inferencial. Por exemplo, a partir de $A = B$ e B=C, concluímos que $A = C$.

Um exemplo deste tipo de '*intuição inferencial'* é fornecido por Poincaré (1920, p. 19), quando diz que "se numa reta o ponto C reside entre os pontos A e B, e o ponto D se encontra entre A e C, consequentemente, o ponto D estará também entre A e B". Vemos a descrição da situação na figura 4.

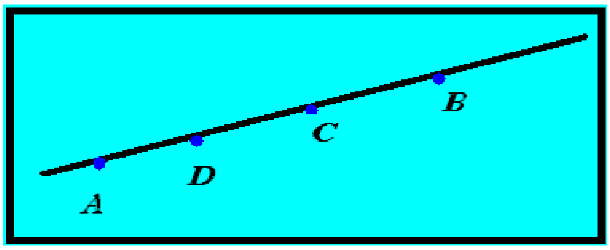

Figura 4: Exemplo de *intuição inferencial* discutida por Poincaré (1920).

Note-se que, no caso de "*intuição afirmativa*", o sujeito afirma/declara algo a respeito de um fato aceito como evidente. Por outro lado, "*intuições conjecturais expressam uma presunção sobre eventos futuros, a respeito do curso de certo fenômeno*". (FISCHBEIN, 1987, p. 60) Esse tipo de intuição desempenha uma importância fundamental em todo tipo de atividade profissional.

Uma classe de intuição que assume significado importante em nossa discussão é nomeada por ele de '*intuições conjecturais'*. Esta categoria representa "*uma visão preliminar, global que antecede uma solução analítica e completamente desenvolvida de um problema"* (1987, p. 61). Sua importância didática reside no pressuposto de que iniciamos uma boa aula de Matemática por meio da colocação de um bom problema[5]. As barreiras nem sempre explícitas aqui se manifestam quando sentimos a dificuldade em conhecer e diferenciar um bom problema de um outro menos interessante.

Fischbein distingue uma *intuição afirmativa* de uma *intuição antecipatória* quando declara que

> *por meio de uma intuição afirmativa aceitamos a autoevidência de determinada noção [...] Uma intuição antecipatória não estabelece simplesmente um determinado fato. Esta aparece como uma descoberta, como uma solução de um problema e subitamente como resultado de um esforço da busca pela solução* (op.cit 1987, p. 61).

Sublinha ainda que, quando falamos de uma '*intuição antecipatória'*, nos referimos a uma fase no processo sistemático de resolução de problemas. Enquanto isso, a '*intuição conjectural'* se relaciona a um momento não necessariamente relacionado à atividade de busca para a solução intrínseca de um problema. Note-se que, considerando que falamos sobre processos cognitivos mentais, as três formas de intuição descritas há pouco não ocorrem de modo isolado.

Na figura 5, identificamos o percurso de uma '*intuição afirmativa'* que, em razão ao sentimento de *evidência* experimentado por um solucionador de problemas, não entende que determinada propriedade necessite de uma demonstração ou verificação mais formal. Na figura 5, notamos a direção em que ela se manifesta. Já no caso da *intuição conjectural*, uma vez manifesta, o solucionador identifica uma situação que envolve um problema e exige uma argumentação mais detalhada, apesar de que o solucionador não necessariamente se encontra mergulhado num esforço para a sua resolução de fato.

No caso da '*intuição antecipatória'*, porém, o solucionador se encontra na fase de aplicação concreta de estratégias, emprego de fórmulas, elaboração de desenhos que auxiliam de modo efetivo a identificação de uma solução.

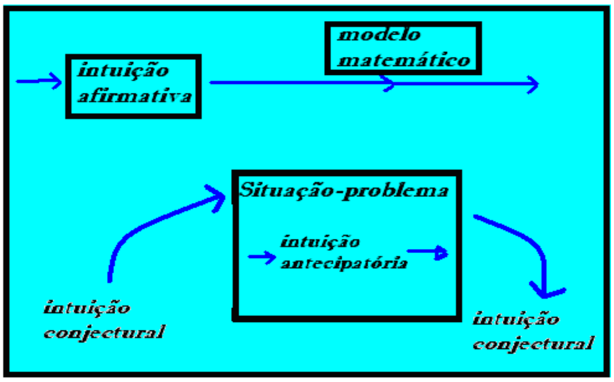

Figura 5: Interpretação das categorias intuitivas (elaboração própria)

A '*intuição conjectural'* é marcante na figura do professor, uma vez que, ele deve ter a capacidade de prever e antecipar as possibilidades de êxito ou fracasso de qualquer argumentação apresentada pelos estudantes. Por outro lado, no que diz respeito ao estudante, não é muito imediata a identificação tácita de uma manifestação intuitiva, pois elas não ocorrem de modo isolado, uma vez que estamos falando sobre processos mentais. Em todo caso, com suporte nas argumentações de Fischbein, podemos descrever a possibilidade de manifestação de uma *intuição conjectural* numa fase eminentemente anterior à resolução do problema e, em outra fase, destacadamente num

[5] Vergnaud (1991, p. 80) referenda nossa asserção quando sustenta que *a história nos ensina que é em resposta aos problemas práticos ou teóricos que temos o nascimento e o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos.*

momento *a posteriori* (figura 5). Note-se, porém, que a *intuição conjectural* numa fase após a resolução efetiva do problema proporciona ao estudante a identificação de consequências futuras daquele resultado particular obtido.

A linha divisória entre estas categorias intuitivas é bastante tênue e um professor experiente tem maiores chances de realizar as identificações necessárias. Em relação a tal fato, Fischbein esclarece que "*devemos considerar um continuum a partir de uma intuição afirmativa para uma intuição antecipatória que passa através de uma intuição conjectural*". (1987, p. 61) Em todos os casos em que registramos a ocorrência de alguma delas, a situação contextual é decisiva no sentido de condicionar/determinar a preponderância de uma em relação a outra.

Em sua teoria, distingue ainda o tipo de intuição segundo a sua fonte e origem. Assim, Fischbein diferencia *intuições primárias* e *intuições secundárias*. As *intuições primárias* referem-se a "*crenças cognitivas que se desenvolvem no indivíduo de modo independente de uma instrução sistemática como efeito de uma experiência pessoal*". (1987, p. 64)

Já na classe de *intuições secundárias*, identificamos o surgimento de intuições com raízes e uma origem pouco natural. "*Elas não são produzidas por meio de uma experiência normal do indivíduo*". (1987, p. 68) Ademais, em alguns casos elas contrariam uma atitude ou crença habitual do indivíduo com respeito a alguma questão.

De fato, quando falamos que o todo é maior do que suas partes constituintes, enfrentamos dificuldades na tentativa de explicar o modelo matemático de uma aplicação $\sigma : \mathbb{N} \to \{Pares\}$, definida por $\sigma(n) = 2 \cdot n$, que afirmar que 'o conjunto dos números naturais possui a mesma quantidade de elementos do que o conjunto do pares'.

Em outros casos, quando se veicula no ensino formal o enunciado demonstrado relativo ao qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º, proporcionamos a frustração e geramos conflitos cognitivos nos estudantes quando recorremos a algum *software* como o *Cabrie Geometrie* e exibimos um triângulo com uma soma dos ângulos internos diferentes de 180º. Numa faixa etária mais baixa, Balacheff (1987, p. 149) lembra que "*para alguns alunos a soma dos ângulos de 180º em um triângulo maior não pode ser a mesma para um triângulo menor*".

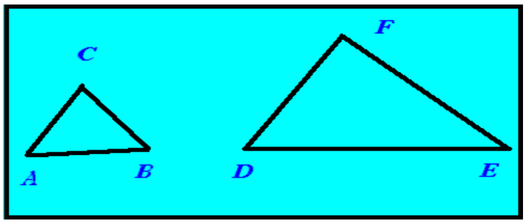

Figura 6: Exemplo de Balacheff (1987)

Zaslavsky (2005, p. 2999) comenta algumas situações-problema que envolvem conflitos cognitivos inerentes ao uso do raciocínio intuitivo. Ele explica que *perplexidade, confusão e dúvida são frequentemente associadas e evocadas com conflitos cognitivos*. Por exemplo, na figura 6 exibimos um triângulo gerado por um *software*. Em seguida é colocado o problema: para um dado triângulo ΔABC, existe um ponto D no triângulo de modo que ΔABD, $\Delta \mathrm{ACD}$ e $\Delta \mathrm{BCD}$ todos possuem mesmas áreas?

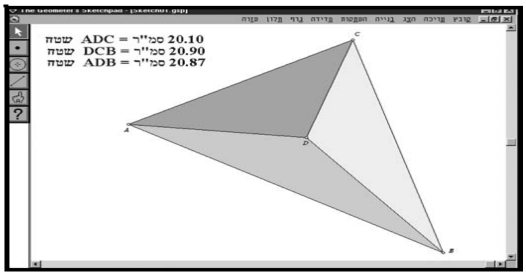

Figura 7: Situação-problema discutida por Zaslavsky (2005, p. 303).

Na análise da figura construída na tela do computador no ambiente de Geometria Dinâmica, o aluno pode manifestar e formular algumas conjecturas. Podemos observar que estas mesmas são produzidas eminentemente a partir da observação/percepção das propriedades que proporcionem uma maior atenção ao observador. Neste momento, o sujeito formula *intuições conjecturais*, verbalizando-as ou não. Assim, para que o professor consiga identificar as que apresentam maiores condições de êxito, torna-se premente que ele estimule o aluno a relatar e descrever sua opinião.

Mais adiante Zaslavsky fornece os seguintes valores para as áreas: $S_{\Delta ADC} = 20{,}10$; $S_{\Delta DCB} = 20{,}90$ e $S_{\Delta ADB} = 20{,}87$. Essas medições realizadas pelo computador são formuladas com o apoio nas próprias características do programa empregado, que, não está livre de imperfeições. Uma situação-problema como esta, de aparente contradição entre as figuras, que nos levam a pensar que os triângulos em questão são iguais, e os valores numéricos fornecidos pelo computador dessemelhantes, produzem conflitos cognitivos nos estudantes e, deste modo, preparamos o terreno para a evolução das intuições.

Cabe recordar que *Piaget considerava a equilibração como um processo estimulado por meio de um conflito ou desequilíbrio*. (ZASLAVSKY, 2005, p. 2999) Neste caso, o conhecimento intuitivo mobilizado pode alcançar um estádio mental de equilíbrio, na medida em que o professor forneça ou sugira uma perspectiva diferenciada de interpretar o problema. Em todo caso, na condição em que o mesmo observador inicial fosse realizar a mesma tarefa no ambiente axiomático usual das demonstrações em Geometria, ele já manifestaria sua crença afetada no sentido de não manifestar a mesma certeza ou acreditar no resultado sugerido pelo problema inicial.

Outra situação típica ocorre quando concebemos um modelo intuitivo de '*uma reta que toca uma curva em apenas um ponto*'. A noção de tangencia pode ser adquirida ainda no ambiente escolar (intuição secundária), entretanto, apenas no *locus* acadêmico nos preocupamos com o caráter formal de tangência local, principalmente nos primeiros anos de estudo de Cálculo. De fato, se prolongarmos a reta r em direção ao lado esquerdo, notamos que ela deixará de ser tangente à curva descrita pelo gráfico da figura 8, quando observamos em toda a sua extensão.

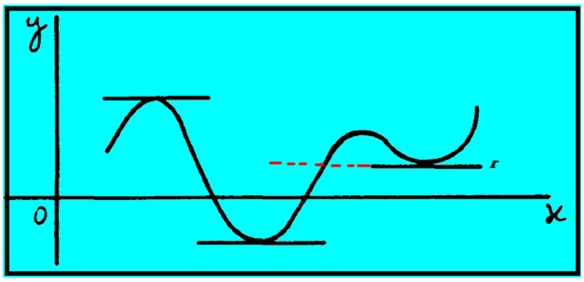

Figura 8: Retas tangentes ao gráfico (FISCHBEIN, 1987, p. 18).

Por outro lado, localmente, a reta "r" é tangente à curva na vizinhança de um ponto no eixo Ox. Aqui a interpretação da figura 8, e, consequentemente, a produção de uma *intuição conjectural* depende de modo íntimo do conhecimento da definição formal de reta tangente.

Fischbein, como já mencionamos, em virtude da larga influência recebida pelos trabalhos de Piaget, analisa aspectos interessantes que apontam a estreita ligação entre a sua perspectiva e as formulações deste. Neste sentido, encontramos num de seus artigos que "*as intuições são baseadas em esquemas mentais*" (FISCHBEIN & GROSSMAN, 1997, p. 29). Em seguida acrescentam que

> *esquema é sempre um sistema organizado de interpretações sequências e procedimentos conjuntos que expressam um nível de maturação mental e uma quantidade suficiente de experiência. Um esquema tanto é estável como flexível* (FISCHBEIN & GROSSMAN, 1997, p. 30).

Assim, desde que os esquemas mentais constituem, segundo Piaget, "*os mecanismos fundamentais de conceitualização e da manifestação de ações*" (FISCHBEIN, 1978, p. 119), compreender os *esquemas mentais* que explicam as ações e os motivo da gênese e manifestação das ações ou decisões do estudante, numa situação de resolução de problemas, exige que entendamos as características proeminentes das intuições requeridas e acionadas por eles.

Para encerrar esta seção, destacamos as seguintes reflexões de Fischbein & Grossman (1997)

> *geralmente falando, intuições podem ser pensadas como sendo baseadas em regras estruturais que expressam tanto níveis de maturação como níveis de treinamento. Se o objetivo é influenciar intuições favoráveis – e isto é uma importante tarefa no processo de ensino – temos que identificar a estrutura esquemática e específica de cada intuição. Encorajar o aprendiz a conjecturar, criar situações desafiadoras. Outro modo é colocar o estudante ante a conflitos envolvendo crenças pessoais e soluções matematicamente aceitas* (FISCHBEIN & GROSSMAN, 1997, p. 43).

A orientação de Fischbein é clara no sentido de conhecermos e controlarmos situações de desequilíbrição/equilibração entre crenças intuitivas *a priori* e modelos matemáticos formais que encerram o potencial de contrariar/contradizer, na medida do razoável, tais crenças; entretanto, Fischbein alerta para o fato de que muitos professores reagem negativamente *quando um estudante sugere uma solução ou estratégia de solução antes de se tornar apto de sustentar sua resposta de modo completo ou bem organizada.* (1999, p. 34) Uma vez apresentada uma solução ou estratégia por completo, no entanto, o professor perde a oportunidade de lidar diretamente com os raciocínios intuitivos de caráter provisório.

Na sequencia, apresentaremos algumas situações específicas que podem funcionar como inspiração em outras aplicações ou, em última análise, uma advertência relativa a fatos aparentemente banais e corriqueiros do ensino/aprendizagem, mas que podem encerrar elementos difíceis de identificar e compreender, até mesmo no caso de professores com alguma experiência.

4 ALGUNS EXEMPLOS E APLICAÇÕES DE SUA TEORIA E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR

O ensino de Matemática padece de alguns males e distorções que apresentam raízes profundas e são consequências de condicionantes históricos e filosóficos. Tais fatores, em sua origem, pertencem ao próprio campo epistêmico do saber matemático. O ápice de sua manifestação ocorre quando reunimos professor e alunos em uma sala de aula e notamos sua ocorrência de forma velada e dificilmente são detectados por profissionais sem uma formação matemática específica.

Assim, encontramos um ensino que privilegia uma abordagem algorítmica e repetitiva. Um ensino referenciado em crenças inadequadas proporcionadas também pelos próprios livros didáticos que negligenciam heurísticas preciosas. Neste sentido, Lima (2001) alerta para o fato de que

> *o modo de apresentação às vezes dá a impressão de ser intuitivo e experimental, às vezes parece ser dedutivo, pois enuncia alguns teoremas e até mesmo os demonstra, embora nunca escreva a palavra "demonstração", como se ela tivesse sido banida no ensino de matemática. Essa indefinição entre o heurístico e o lógico dificulta o acompanhamento da exposição* (LIMA, 2001, p. 31).

Não é incomum uma situação na qual o professor se vale do caráter formal e rigoroso do saber matemático e impõe determinadas verdades universais e inquestionáveis em sala de aula. De fato, Fischein (1987, p. 68) lembra que "*aceitamos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º por intermédio da prova"*. Esta afirmação torna-se preocupante quando encontramos este hábito de aceitação, mediante uma *prova*, de fatos e propriedades matemáticas. Uma situação extrema ocorre em decorrência da "*má qualidade dos livros do escolares"* (LIMA, 2001), quando o aluno aceita, sem intuir e, até mesmo, sem conhecer a prova ou a demonstração do fato.

Em outros casos, identificamos a introdução de noções sem os cuidados necessários, proporcionando a evolução de concepções indesejadas. Quando mencionam a noção de conjunto, Fischbein & Baltsan (1999) esclarecem

> *na escola, o conceito de conjunto é usado em vários contextos, geralmente, de modo inconsistente. A maior dificuldade para os estudantes é o fato de que o conceito de conjunto é aceito em matemática como um termo primitivo, conceito não definido, em contraste com a definição formal que inicia com um modelo intuitivo, a ideia de coleção de objetos* (FISCHBEIN & BALTSAN, 1999, p. 1)

Ademais, alguns tópicos pertencentes ao currículo escolar, em razão da sua natureza, impõem dificuldades ao entendimento e, como resultado, obrigam o professor a desenvolver e improvisar determinadas argumentações e a exploração de metáforas[6] que, em uma perspectiva formal, incorrem em contradições e inconsistências com referência a um modelo matemático.

Richard (2004, p. 258) comenta um exemplo ocorrente quando para o aluno de 15 e 16 anos, "*a primeira intuição pode ser equivocada, pois a visualização do desenho de uma espiral parece percorrer um caminho indefinidamente em torno de um ponto de chegada"*. Uma das dificuldades aqui reside na passagem ao infinito (figura 9).

Richard também discute o tratamento algébrico, tradicionalmente dispensado para este tipo de problema no ensino de séries geométricas. Assim, *quando mostramos ao aluno este tipo de procedimento pela primeira vez, instituímos um tipo de funcionamento do cálculo analítico*. (op.cit p. 259) O entrave[7] verificado no ensino é que, se desenvolvendo prioritariamente os cálculos, o papel e a função do desenho ou figura passam a ser reduzidos ou eliminados completamente (figura 9-II).

Esse reducionismo é explicado por Vergnaud (1991, p. 79), quando comenta que *a matemática é um conhecimento e não uma linguagem* [...] Mesmo que possa ser constituída com base em enunciados, textos e representações, *são os*

[6] Fischbein (2001, p. 312) explica que o termo metáfora apresenta uma definição original no sentido de *transferência de significado de um conceito para outro*. Além disso, *analogias, paradigmas, metáforas e diagramas, etc. são todos modelos mentais. Eles são substitutos que podem nos auxiliar em várias classes de problemas.*

[7] Fischbein (2001, p. 314) aponta outros entraves no ensino quando explica que *adolescentes e adultos, mesmo quando estão conscientes da natureza abstrata dos objetos geométricos, continuam pensando em termos de modelos figurais* e esboçam conclusões legitimados nestes modelos particulares, porém, isto pode ocasionar conclusões incorretas.

conceitos e teoremas que constituem o seu conteúdo.

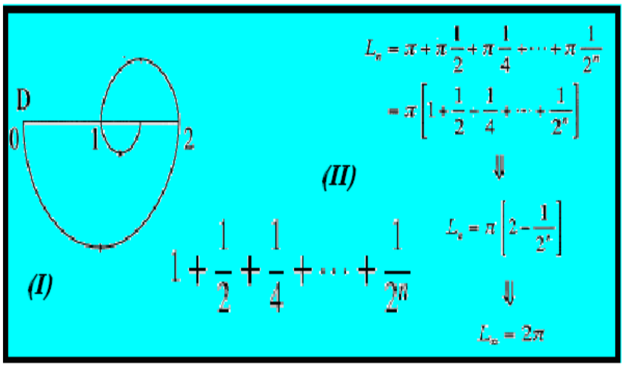

Figura 9: Richard (2004, p. 258)

O professor, ordinariamente, prefere tal expediente que reduz a aplicação do saber a um conjunto de regras, uma vez que, ao final dos cálculos, ele mesmo transmite a sensação de que não houve necessidade de uma exploração da figura (ilustração 9-I). Assim, no momento da avaliação, o conhecimento que será auferido pelo mestre se restringe ao algorítmico-operacional, referendado pela aplicação de um método formal de resolução, uma vez que as intuições produzidas e mobilizadas pelos estudantes, nem sempre verbalizadas, não obtiveram o aproveitamento e a análise adequada. O *poder coercitivo* do raciocínio intuitivo, como menciona Fischbein, não é experimentado de modo idiossincrásico pelo estudante.

Tal atitude docente que prioriza o raciocínio formal em detrimento do intuitivo não pode ser vista como casual e/ou isolada. Por vezes, ela é consequência de um movimento de busca no interior da própria ciência. Neste âmbito, Fischbein (1999, p. 12) sublinha que uma tendência básica nos tempos modernos *é a tentativa de purificação de nosso conhecimento do subjetivo, interpretações diretas e crenças são colocadas de lado a favor da objetividade e do rigor*.

Em outra situação, Fischbein (op.cit p. 24) discute a seguinte equação $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$. Ele menciona a técnica usual empregada, que consiste em eliminar os denominadores comuns. Obtemos assim: (1) $3x+2x=30$; (2) $5x=30$; (3) $x=6$. Ele observa que, por transitividade, podemos concluir que a equação (1) e (4) são equivalentes. Destaca, todavia, que o conceito de 'equivalência' *não é ensinado de modo explícito em nível escolar* (op.cit p. 24). Note-se que o referido conceito surge em séries iniciais da instrução, nas quais o aluno aprende, por exemplo: $12:2=6 \rightarrow 6=12:2$, ou ainda observa que $12:2=6$ e $6=2\times3 \therefore 12:2=2\times3$. Fischbein questiona se fatos como este, triviais, para quem conhece, e estranhos para quem se depara pela primeira vez, são intuitivos ou evidentes.

Respostas para suas colocações não permitem, em virtude do que já temos discutido, um caráter reducionista ou superficial. Seu delate requer um profundo debruçamento e dedicação por parte do professor. Afinal, Piaget dedica cerca de cinco décadas para compreender determinadas operações e esquemas cognitivos de pensamento mobilizados em torno da aquisição básica das quatro operações.

Por outro lado, é sempre mais cômodo para o professor de Matemática usar o próprio método axiomático como metodologia de ensino e apresentação da Matemática. Uma das consequências desta atitude é apontada por Poincaré (1921) quando explica

> *um matemático usa uma regra. Naturalmente ele inicia demonstrando tal regra; e quando a demonstração está clara em sua memória e o mesmo compreende perfeitamente o seu significado, o mesmo passa a empregá-la de um modo mecânico* (POINCARÉ, 1921, p. 384).

Por outro lado, o risco que corremos no ensino é a permissão ou o incentivo, por parte do professor, do emprego mecânico de rotinas algorítmicas. Note-se que, "*em princípio, um algoritmo pode ser aprendido por repetição, pela prática*". (FISCHBEIN, 2000, p. 52) Entretanto, no algoritmo da subtração, por exemplo, algumas coisas podem ser mais complexas do que se apresentam.

De fato, por trás do algoritmo da subtração, existe um "*modelo primitivo, concreto, com o qual, em algumas instâncias, alguns de seus passos podem conflitar com outros passos do mesmo algoritmo*" (FISCHBEIN, 2000, p. 53). O neglicenciamento de questões particulares e localizadas como esta pode não comprometer a evolução cognitiva do aluno num curto prazo; mas suas consequências nefastas podem ser observadas a longo prazo.

Neste sentido, não é incomum identificarmos no ambiente acadêmico licenciandos de semestres elevados que manifestam inseguranças e incertezas em explicar, de modo convincente, não apenas para si, mas também para terceiros, o motivo das igualdades e quais dos itens (I), (II) ou (III) encerram verdades ou inconsistências. Quais podem ser aceitos de modo intuitivo?

Observamos que, neste caso, temos a circunstância caracterizada por Fischbein, Barbat & Minzat (1971) que se coaduna ao item (b). De fato, aos olhos de um aprendiz, não identificamos em caráter imediato as relações intuitivas estabelecidas; diferentemente, a mesma dificuldade não observamos no estudo da Geometria, que não é outra coisa se não *uma representação espontânea do espaço* (VERGNAUD, 1991, p. 80), todavia, o especialista sabe que a conceitualização encontra suas raízes e critérios na representação abstrata do real.

$$\begin{cases} (I)\ 8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = (2)^{\frac{3}{3}} = (2)^1 = 2 \\ (II)\ (-8)^{\frac{1}{3}} = \left((-2)^3\right)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{3}{3}} = (-2)^1 = -2 \\ (III)\ (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \\ = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = (2)^{\frac{6}{6}} = (2)^1 = 2 \end{cases}$$

Por outro lado, não nos frustramos se oferecemos a um acadêmico a seguinte expressão $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$, pois, rapidamente, nos forneceria a resposta obtida pelo emprego de uma técnica algorítmica estabelecida *ad hoc*, que em nada explica a natureza intuitiva deste objeto matemático que chamamos de limite.

Para encerrar nossos exemplos, assumimos a hipótese que em uma situação-problema apresentarmos a figura 10-I, exibida para um estudante sem nenhum treinamento e conhecimento em Geometria Espacial. Em seguida, se requisitarmos para ele completar a referida figura, que resultado podemos esperar? Note-se que é relativamente fácil encontrar nosso sujeito, uma vez que, em muitas escolas de nosso Estado, não se ensina Geometria[8].

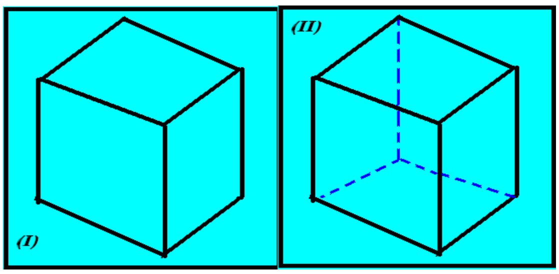

Figura 10: Descrição de uma figura espacial.

[8] Apesar de não serem recentes, as conclusões de Pavanello (1989, p. 180) explicam a situação de ensino hodierno quando afirma que *a Geometria é praticamente excluída do currículo escolar ou passa a ser, em alguns casos restritos, de uma forma muito mais formal a partir da matemática moderna*.

Observamos aqui que o sujeito se apoiará em suas imagens mentais vivenciadas no seu dia a dia com base em objetos do mundo físico. Por outro lado, ao aluno com algum treinamento formal (intuições secundárias), esperamos que ele mesmo manifeste uma percepção de linearidade, regularidade, profundidade da figura 10-II. Esta última propriedade merece ser comentada, afinal, apesar de exibir um viés intuitivo, em geral, no ensino de Geometria Espacial, as representações são exibidas no plano, como o cubo da figura 10-I, transmitindo uma falsa impressão de pertencerem ao espaço tridimensional.

Em relação à atividade solucionadora de problemas como a situação passada, Fischbein explica que

> *o processo de solução de problemas, usualmente, passa por três fases. No primeiro, o solucionador investe seu esforço máximo nas tentativas de várias estratégias, hesitações, recuperação de esquemas e modelos previamente adquiridos em outro contexto. Este processo é mais ou menos consciente por que as estratégias usadas são relativamente conscientes* (FISCHBEIN, 1999, p. 34).

Subitamente, o solucionador passa a sentir a sensação de que encontrou uma solução, todavia, *ele nem sempre possui todos os elementos para a solução, isto é, do ponto de vista formal e analítico*. Na segunda fase, observamos que

> *o solucionador tem em mente uma ideia global de uma representação e principalmente do tratamento da direção que deve escolher. [...]Esta é também uma intuição, um intuição antecipatória, chamada as vezes de momento de 'iluminação'* (FISCHBEIN, 1999, p. 34).

Nesta fase, todas as intuições mobilizadas são fundadas numa sensação de convicção, um sentimento de certeza, antes que a cadeia formal – baseada numa solução analítica – tenha sido estabelecida pelo solucionador, momento no qual ocorre a preponderância do raciocínio lógico-formal.

4 CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES FINAIS

Fischbein & Gazit (1984) advertem para o argumento de que

> *no processo de ensino algumas atitudes intuitivas devem ser ignoradas. Se estiverem corretas, elas auxiliam o aprendiz adquirir e*

> *integrar os conceitos científicos correspondentes. Se não forem objetivamente aceitas, deverão ser eliminadas e representações intuitivas adequadas devem ser desenvolvidas no seu lugar. Se o programa de professores não atende tais tendências intuitivas, ele continuará a enganar o aprendiz com respeito a estruturas conceituais que tem sido ensinadas* (FISCHBEIN & GAZIT, 1984, p. 2).

As colocações de Fischbein & Gazit, apesar de veiculadas em artigos de circulação científica na década de 1980, preservam uma contemporaneidade inquestionável. De fato, o quadro atual do ensino de Matemática ainda é marcado por problemas seculares que determinam seu vigor em sala de aula nos dias atuais. De fato, o ensino/aprendizagem de Matemática é ruim em consequência, pelo menos em boa parte, da qualidade de formação do professor e egressos das IES.

Um ensino deficiente, consequência de uma formação e um programa de preparação de professores inadequado ou anacrônico, provoca atitudes e crenças nos futuros professores que se perpetuam em sala de aula e influenciam de modo marcante e determinante todo o período escolar. Neste sentido, Fischbein (1999, p. 24) lembra que *em algumas ocasiões o estudante manifesta o sentimento de que provas e definições são supérfluos*.

Evitar esse ponto de vista adquirido pelo estudante se constitui tarefa complexa e exige vigilância constante do formador de professores de Matemática; todavia, o mencionado ponto de vista limitado do conhecimento matemático no que diz respeito às provas de demonstrações evolui na medida em que *o estudante não alcança o significado da matemática como uma ciência dedutiva, formal, rigorosa* (1999, p. 24).

Reconhecemos a dificuldade em se trabalhar as concepções do estudante no sentido de compreender que o saber matemático é passível de limitações e contradições. Tal entendimento poderia valorizar uma atitude intuitiva de apreensão dos objetos conceituais próprios desta ciência, todavia, uma mediação do docente no sentido exatamente contrário ao que relatamos é encontrado no processo de investigação do matemático profissional, na medida em que observamos

> *que um matemático continua o seu trabalho em qualquer ramo, ele descobre novos conceitos que são dignos de serem introduzidos e desenvolvidos. Segundo, na medida em que seu trabalho avança, seus conceitos são cada vez menos evocados da experiência e, cada vez mais recônditos da mente humana* (KLINE, 1962, p. 661).

Uma atitude preventiva com a intenção precípua de evitar a eliminação paulatina da subjetividade, das aprendizagens heurísticas e idiossincrásicas, consubstancia-se com a valorização e, consequentemente, a exploração das faculdades intuitivas; embora sua exploração eficaz poderá ser alcançada na condição em que estejamos cônscios do que se tratam e quais são suas características. E neste sentido, a teoria que discutimos proporciona implicações auspiciosas. Com efeito, é flagrante a preocupação de Fischbein, quando menciona

> *falando geralmente, com respeito ao ensino de matemática, é muito importante que o professor compreenda a interação entre o intuitivo e o formal, e os aspectos procedurais dos processos de compreensão, recordação e solução de problemas* (FISCHBEIN, 1999, p. 28).

Muito embora na academia não observemos esse cuidado por parte de professores formadores, a impressão que adquirimos é a de que o que importa é o ensino, uma vez que muitos ainda acreditam que a aprendizagem é apenas uma consequência imediata de uma exposição magistral e impecável por parte do professor, com ênfase no caráter lógico-formal da teoria. Tal *modus operandi* do profissional do ambiente acadêmico é explicado por Poincaré (1921, p. 213), quando adverte o fato de que *"a intuição não nos fornece o rigor, nem igualmente a certeza; que deve ser reconhecida paulatinamente"*.

Realmente é preocupante uma ideia de formação de professores que privilegia o raciocínio lógico-formal em detrimento do intuitivo, tendo em vista que, como mencionou Poincaré, não alcançamos o rigor por esta via. No outro extremo, o docente atribui o *rigor matemático* como o principal alvo a ser atingido. A *crença* é a de que, aprendendo todos os teoremas e suas respectivas demonstrações, a aprendizagem com significado será garantida. Fischbein & Mariotti (1997) descrevem com elegância tal crença que atua de modo decisivo no ensino/aprendizagem quando relatam que

> *em matemática, como um conhecimento teórico, uma regra básica é executada por meio do processo de definição e validação. Primeiro, todos os objetos com os quais*

> *lidamos, devem estar claramente definidos. Então propriedades sobre tais objetos devem ser consideradas como verdadeiras somente no caso em que derivam de outras afirmações via argumentos com que a comunidade científica aceita* (FISCHBEIN & MARIOTTI, 1997, p. 219).

Se analisamos, no entanto, o referido quadro desde uma perspectiva mais ampla, evidenciamos que na realidade o mecanismo funciona de um modo muito mais complicado do que podemos presumir. Neste sentido, recordamos o arcaísmo de algumas concepções do passado, quando identificamos que *"alguns filósofos, tais como Platão e Sócrates, acreditavam que as verdades eram plantadas em nossas mentes por Deus"* (KLINE, 1962, p. 662).

De modo pitoresco, encontramos sem muitas dificuldades professores que agem e professam seu discurso fundamentado em perspectivas "reducionistas" e arcaicas da aprendizagem em Matemática. Não estamos falando aqui de influências metafísicas ou esotéricas de outros campos do conhecimento. Destacamos tão somente as influências internas (como as correntes filosóficas do *formalismo* e/ou *logicismo*[9]) à própria Matemática que determinam e condiciona a visão, o hábito e a concretização do ofício de que ser professor em sala de aula.

Por outro lado, para se efetivar um ensino livre ou 'parcialmente' distante destas concepções anacrônicas, torna-se imprescindível conhecer tanto as tendências atualizadas sobre ensino/aprendizagem de Matemática.

Numa rápida observação das teorizações que propõem ações voltadas ao ensino/aprendizagem de Matemática, respeitando as características epistemológicas deste saber, identificamos, na maioria dos casos, a influência da teoria psicogenética elaborada por Jean Piaget.

O caso de Fischbein constitui um exemplo mais atual, sublinhando, entretanto, que no início dos seus estudos na década de 1980, ele recebeu influencia de Gerard Vergnaud, criador da *Teoria dos Campos Conceituais*. De fato, ao mencionar as possíveis significações atribuídas à noção de esquema cognitivo, que está presente tanto em Piaget como em Vergnaud, ele recorda que este último atribuiu uma profunda releitura da referida noção, ao descrever que um esquema "*gera ações e deve conter regras. Um esquema não é um estereótipo e como uma sequencia de ações depende de parâmetros da situação"* (FISCHBEIN & MARIOTTI, 1997, p. 29).

Na condição de um entendimento maior desta noção e sua importância na Psicologia Cognitiva, sublinhamos ainda a ideia de que

> *um esquema é sempre um sistema organizado de interpretações seqüenciais e juntamente procedurais para certo nível de maturação e um suficiente volume de experiência. Um esquema é tanto estável como flexível. Ele expressa um caminho de pensamento, interpretação e solução. De fato, o conceito formal de prova matemática é um esquema mental, por que é expresso pelo princípio de que em matemática a verdade de um enunciado não é estabelecido pela confrontação com a realidade, porém dedutivamente em conformidade das regras lógicas. Uma criança de 8 anos de idade não possui esquemas para compreender a necessidade de verificação de um enunciado aparentemente evidente* (FISCHBEIN & MARIOTTI, 1997, p. 30).

Apesar de sua extensão, essa citação expressa a profundidade e as ligações conceituais estabelecidas entre os teóricos mencionados. Notem-se os termos 'maturação' e 'experiência' destacados por Fischbein & Mariotti. Enquanto isso, no caso do estudante, o professor deve observar se o nível maturacional permitirá a manifestação de determinada intuição ou uma reequilibração a partir de um conflito cognitivo vivenciado pelo estudante ante a determinada tarefa.

Decerto, a coordenação e o controle desses elementos numa turma de 25 alunos são impraticáveis. De fato, muitos dos elementos discutidos até aqui são considerados de modo mais sério, na condição em que o ensino de Matemática é tomado como uma atividade séria, que exige não apenas um domínio específico do conteúdo e de 'teorias cognitivistas generalistas', e sim um olhar específico e preciso, semelhante ao que Piaget, Vergnaud e, na sequência, Fischbein lançaram sobre a aprendizagem de Matemática.

Certamente, na tarefa didático-pedagógica, o professor enfrenta inúmeras dificuldades, neste sentido, Fischbein orienta neste sentido que

> *num primeiro olhar, notamos que seria favorável um processo de ensino no qual as soluções intuitivas coincidissem com as*

[9] Grey (2008, p. 380) lembra que *a precisão da Matemática é devida a uma combinação entre pensamento e sua linguagem, por meio da qual seu pensamento é expresso*. A corrente filosófica do formalismo prioriza o papel da linguagem como um fator condicionador do pensamento.

> *soluções obtidas por meio de uma análise lógica. Porém, a realidade didática é bem diferente* (FISCHBEIN, 1999, p. 21).

Como já mencionamos, no ensino de Matemática ocorre muitas vezes o reducionismo[10] da percepção desta ciência como um domínio de técnicas manipulatórias[11], o que fortalece, com relação aos pequenos, a visão de que a Matemática é 'abstrata', como se tal peculiaridade não fosse gozada por nenhum outro ramo do saber científico. Neste sentido, vale recordar que muitos especialistas não conseguiram uma formulação razoável para o significado do termo 'abstrato', como menciona, por exemplo, o matemático agraciado com a medalha *field*, Jean Dieudonée ao declarar que

> *muitos dos diálogos encontrados em Platão apresentam por tema a tentativa de elucidação de palavras como "abstrato", empregada na linguagem corrente sem que a concebamos claramente o que ela designa* (DIEUDONÉ, 1987, p. 48).

Com referência específica aos conteúdos da Geometria Plana, Morris Kline esclarece

> *a introdução gradual a novos conceitos matemáticos que mais e mais partem de formas da experiência encontram seus paralelos em geometria. Pensamos em pontos, retas, linhas, triângulos, e em poucos outros conceitos elementares que não são mais do que abstrações da experiência, e que não são verdadeiros na maioria das curvas que a geometria considera* (KLINE, 1962, p. 661).

De modo pitoresco, a falta de definição e precisão do vocábulo 'abstração', como o entendemos e o empregamos, não constitui rara exceção. De fato, vimos ao decorrer de nossa discussão que Efrain Fischbein surge como um dos educadores matemáticos que denuncia semelhantes problemas, de ordem epistemológica, filosófica e, principalmente, psicológica, com respeito ao sentido/significado das expressões 'raciocínio intuitivo', 'intuição matemática', 'evidência matemática', 'autoevidência e 'abstração'.

Certamente, até mesmo para os matemáticos profissionais, algumas desses termos ou terminologias findavam por ser empregadas, sem passar uma assepsia epistêmica adequada, como se tal necessidade fosse um privilégio único da Matemática; mas basta notar, ao longo da História da Matemática, que

> *por séculos os matemáticos tentaram encontrar uma prova para o 5º postulado euclidiano. O postulado parecia correto mas não auto-evidente do suficientemente. O problema básico com este postulado – em qualquer modo de expressá-lo – é que o mesmo admite, implícita ou explicitamente, a possibilidade de infinitas retas* (KLINE, 1987, p. 63).

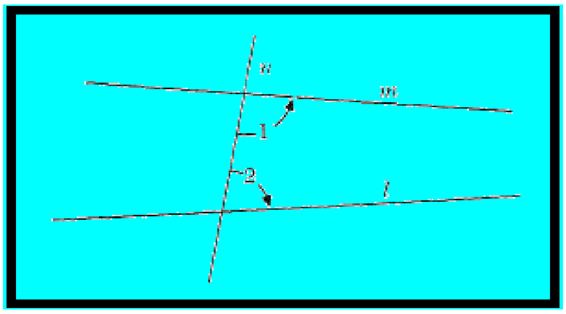

Figura 11: Kline (1962, p. 554)

Temos na figura 11 um exemplo clássico no qual as ideias psicológicas envolvidas e que descrevem determinadas propriedades enganam os nossos sentidos, nomeadamente, nossa visão. O 5º postulado[12] confundiu matemáticos de extrema grandeza e profunda sabedoria, no sentido de ser aceito intuitivamente ou não.

Em todo caso, uma marca registrada na atividade do matemático profissional diz respeito ao seu empenho e dedicação em relação a dois aspectos. O primeiro, o intuitivo, que funciona como propulsão e *start* inicial das ideias que mobiliza. O segundo diz respeito ao raciocínio lógico empregado para a formalização e possibilidade do estabelecimento de uma verdade inabalável. Poincaré dizia que não podemos fugir dessa situação, uma vez que

> *é impossível compreender o trabalho de qualquer matemático sem distinguir dois diferentes tipos de mente. Uma se ocupa com a lógica; para ler os trabalhos [...] A outra é guiada pela intuição* (POINCARÉ, 1921, p. 210).

Mas quando falamos da matemática escolar, longe

[10] Um dos reducionismos que apontamos no ensino de Matemática é o desenvolvimento de um ensino arbitrário baseado em verdades inquestionáveis, entretanto, demonstrações *e provas devem convencer e obter a aceitação não apenas dos matemáticos* (SWART, 1995, p. 43), mas também dos estudantes.

[11] Desavisados procuram enfraquecer este viés com ênfase num outro extremo, vulgarmente chamado de 'lúdico'. Este tipo de abordagem, por vezes superficial, no ensino de matemática recebe críticas de Fischbein ao explicar que *a eficiência de modelos concretos depende da natureza de sua relação com os conceitos correspondentes da Matemática* (1977, p. 162).

[12] A História da Matemática aponta inúmeros matemáticos que não aceitaram de imediato a verdade proporcionada por este postulado. Neste contexto polêmico cabem as colocações de Bunge (1996, p. 123) quando explica que o *que é psicologicamente óbvio não precisa ser logicamente imediato.*

da academia, o professor de matemática necessitar conhecer tais demandas e alguns dos dilemas que discutimos neste artigo? Nossa argumentação até aqui mostra-se ampla e tenciona fortalecer justamente a necessidade da compreensão destes dilemas. E o desconhecimento de muitos dos elementos que abordamos, explicam a qualidade atual do ensino de matemática, que não pode ser muito melhor do que o nível dos professores que nele atuam, e que se referenciam nos seus antigos formadores.

REFERÊNCIAS

[1] BALACHEFF, Nicolas. (1987). Processus de preuve et situation de validation. In: Educational Studies in Mathematics, v. 18, pp. 147-176.

[2] BUNGE, Mario. (1996). Intuitición y Rázon, 1ª édition, Buenos Aires: Delbolsíllo.

[3] COUTURAT, Louis. (1973). L´infinit Mathématiques. Paris: Librarie Scientifique et Techinique.

[4] DIEUDONNÉ, Jean. (1987). Pour l´honneur de l´esprit humain. Paris: Hachette.

[5] FISCHBEIN, E. (1969). Enseignement Mathématique et Développement Intellectuel. In: Educational Studies in Mathematics. v. 38, n. 11, p. 290-306.

[6] FISCHBEIN, E.; BARBAT, I. & MINZAT, I. (1971). Intuitions primaries et intuitions secondaires dans l´initiation aux probabilité. In: Educational Studies in Mathematics. v. 4, n. 12, p. 264-280.

[7] FISCHBEIN, Efrain. (1977). Image and Concept in learning mathematics. In: Educational Studies in Mathematics. v. 8, n. 4, p. 153-165.

[8] FISCHBEIN, Efrain. (1978). Schemes virtuels et Schemes actifs dans l´apprentissage des Sciences. In: Revue Francaise de Pédagogie. Nº 45, n. 15, p. 119-125.

[9] FISCHBEIN, Efrain ; TIROSH, Dina. & MELAMED, U. (1981). Is it possible to mesure the intuitive acceptance of a mathematical statement? In: Educational Mathematics Studies, v. 3, n. 23, p. 491-512.

[10] FISCHBEIN, E. & GAZIT, A. (1984). Does the Teaching of Probability improve probabilistic intuitions. In: In: Educational Studies in Mathematics. v. 15, n. 17, p. 1-24.

[11] FISCHBEIN, E. (1987). Intuition in science and mathematics: an educational approach, Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library.

[12] FISCHBEIN, Efrain. (1993). The Theory of Figural Concepts. In: Educational Studies in Mathematics. v. 24, n. 22, p. 139-162.

[13] FISCHBEIN, E. & MARIOTTI, M. A. (1997). Defining in Classroom Activities. In: Educational Studies in Mathematics. v. 34, n. 32, p. 219-248.

[14] FISCHBEIN, Efrain. & GROSSMAN, A. (1997). Schemata and intuitions in Combinatorial Reasoning. In: Educational Studies in Mathematics. v. 34, n. 9, p. 27-47.

[15] FISCHBEIN, E. & BALTSAN, M. (1999). The mathematical concept of set and the ‘collection’ model. In: Educational Studies in Mathematics. v. 37, n. 10, p. 1-22.

[16] FISCHBEIN, Efrain. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. In: Educational Studies in Mathematics. v 38, n. 11, p. 11-50.

[17] FISCHBEIN, Efrain. (2000). Psychology and Mathematics Education. In: *Mathematical, Thinking and Learning*. New York: Lawrence Erlbaum Associates, p. 47-58.

[18] FISCHBEIN, Efrain. (2001). Tacit models and Infinity, In: Educational Mathematics Studies, p. 309-329.

[19] GREY. Jeremy. (2008). Plato´s Ghost. Oxord: Princenton University.

[20] KLINE, Morris. (1962). Mathematics: a cultural approach. New York: Addison Wesley Publishing Company.

[21] PAVANELLO, M. R. (1989). O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica (tese). São Paulo: Universidade Estadual de Campinas.

[22] POINCARÉ, Henri. (1921). The foundations of the Sciences. New York: The Science Press.

[23] STEWART, Ian. (1995). Nature´s Number: the Unreal Reality of Mathematics. New

York: Basic Books.

[24] VERGNAUD, Gerard. (1991). Langage et pensée dans l´apprentissage des mathématiques. In: Revue Française de Pédagogie, v. 98, n. 8, p. 79-86.

[25] ZASLAVSKY, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. In: Educational Studies in Mathematics. v. 60, n. 5, p. 297-321