Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1990). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Paidós, Buenos Aires, Argentina, 344.

Trigueros, M. (2005). "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior".EducaciónMatemática, 7, 5-31.

Zemelman, S. Daniels, H. y Hyde, A. (2005). Best Practice: New Standards for Teaching and Learning in America's Schools. Portsmouth. Heinemann. Recuperado el 15 de julio de 2013 en: http://www.heinemann.com/shared/onlineresources/E00744/sample.

❖❖❖

UM ESTUDO DAS DERIVADAS IMPLÍCITAS COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA VISUALIZAÇÃO CARTESIANA: O CASO DO FÓLIO DE DESCARTES E DA CARDIOIDE

Alessandro Mendonça Nasserala
Universidade Federal do Ceará
nasserala.alessandro@gmail.com
Francisco Régis Vieira Alves
UFC; Instituto Federal do Ceará -IFCE
fregis@ifce.edu.br

Resumo

No estudo das Derivadas Implícitas há muitos obstáculos de cunho algébrico-geométrico. Nessa perspectiva, foi observado que a visualização através do software Geogebra no âmbito cartesiano do R^2 de algumas curvas que são encontradas noestudo do Cálculo, como o Fólio de Descartes e a Cardioide são interessante para o ensino do Cálculo. Assim, com o recurso do software, mostrar-se-á que a visualização

cartesiana no R^2 constitui um componente imprescindível para o entendimento do comportamento dessas curvas, assim como a análise dos valores numéricos assumidos pelas retas tangentes a cada trajetória. A fundamentação teórica encontra-se nos estudos de Guidorizzi (1998), Stewart (2011), relativos às Derivadas Implícitas. Concluísse que por meio de certas situações didáticas, o software proporciona a visualização e a (re)significação de expressões complexas inerentes a este conteúdo.

Palavras-chave: Cálculo, Geogebra, Derivadas*.*

1. Introdução

O presente trabalho busca discutir algumas situações didáticas voltadas para o estudo das Derivas Implícitas, este assunto que é encontrado em livros de Cálculo Diferencial e Integral como Guidorizzi (1998) e Stewart (2011). Nestes livros podem ser encontrados: definições, exemplos e exercícios interessantes; o objetivo deste trabalho é justamente mostrar que a visualização cartesiana no R^2 constitui um componente imprescindível para o entendimento do comportamento dessas curvas.

Segundo Stewart (2011, p. 192) fala que “[...] a derivação implícita, que consiste em derivar ambos os lados da equação em relação a x e então isolar y’ na equação resultante”. Essa é explicação resumida do método de derivação implícita, esse tipo de derivação é muito eficaz para encontrar retas tangentes a curvas complexas, como por exemplo: Fólio de Descartes e Cardioide. Estas são justamente o objeto de estudo deste trabalho com o auxílio do Geogebra, possibilitando uma visualização das curvas e uma análise e exploração heurística relativa às retas tangentes as mesmas.

2. Situações Didáticas de Derivadas Implícitas: o Fólio de Descartes e a Cardioide

Segundo Guidorizzi (1998, p. 190) diz que "uma função y=*f*(x) é dada implicitamente por tal equação se, para todo x no domínio de *f*, o ponto (x, *f*(x)) for solução da equação". Essa é uma definição simples de função implícita, isso pode ser explorado quando se trabalha com uma situação didática de curvas.

O Fólio de Descartes é uma curva do tipo $x^3 + y^3 = 3cxy$, sendo que c pode variar dentro dos reais, claro que se c = 0 o gráfico será uma reta que passa na origem. A curva faz um laço com um ponto duplo na origem e tem assíntota do tipo x + y + c = 0. Sabe-se também que a curva é simétrica para y = x e que seu nome vem do latim *folium* que significa "folha".

O *folium* foi proposto pela primeira vez por René Descartes em 1638. A curva tornou-se famosa através de um incidente ocorrido durante o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Fala-se que Descartes desafiou Pierre de Fermat a encontrar a reta tangente à referida curva em um ponto arbitrário, uma vez que Fermat acabara de descobrir um método para encontrar retas tangentes. Então, Fermat resolveu o problema facilmente, desde então esta curva vem sendo citada em vários trabalhos e se tornou imortalizada.

A Cadioide também é uma curva na qual se pode usar a derivação implícita para encontrar retas tangentes a mesma, esta curva em sua forma cartesiana é descrita como sendo:

$$x^2 + y^2 = 2a\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)$$

Nesse caso o valor de *a* pode ser qualquer real.

Uma Cardioide é uma curva que pode ser produzida traçando-se o caminho de um ponto de um círculo, que rola sem cair ao redor de outro círculo, que é fixo, mas que tem o mesmo raio do círculo rolante. Pode-se dizer também que uma Cardioide é uma curva Matemática cuja forma se assemelha à de um "coração" e por este motivo recebe o nome derivado do grego *kardioeides* = *kardia*: coração + *eidos*: forma.

Um dos caminhos que pode ensejar maior produtividade no processo de ensino e aprendizagem no Cálculo Diferencial e Integral pode estar na diversificação das formas de abordagem de cada tema a ser apresentado, a partir do que se adapta a cada um destes, da condição intrapessoal e interpessoal de cada docente, do nível de aprofundamento desejado, etc. Dessa forma, algumas opções viáveis podem ser encontradas, além da resolução de problemas apenas usando o método tradicional. Neste caso, se apostou no uso do *software* Geogebra para visualização e exploração de situações didáticas.

Segundo Brousseau (1998) define situação didática como sendo

> "um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...] o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes".

Nessa perspectiva de construção de conhecimento é que foi proposto duas situações a seguir para ser discutida e analisada com auxílio do *software* Geogebra.

O primeiro problema a ser proposto consiste no seguinte: *use a diferenciação implícita para encontrar* $\frac{dy}{dx}$ *para o Fólio de Descartes* $x^3 + y^3 = 3xy$ *, encontre o(s) ponto(s) do primeiro quadrante que a reta tangente ao Fólio é horizontal e indentifique a reta tangente e normal a curva.*

O *software* Geogebra aparece como importante parceiro na construção desse conhecimento, pois facilita a visualização conforme Alves (2011, p. 51) afirma que

> "a visualização de uma série de exemplos auxilia os estudantes na absorção de conceitos que podem ser difíceis de compreender em suas formulações matemáticas abstratas, especialmente nos primeiros dois anos do currículo universitário. A partir deste ponto de vista o uso do computador é prático e eficiente, e se o *software* conduz a uma interativa modificação dos dados, podemos facilmente mudar os parâmetros para um exemplo dado e realizar nova escolha".

Analisando a situação proposta, tem-se que derivando $x^3 + y^3 = 3xy$ implicitamente em relação a x, tem-se que $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{x-y^2}$, o Geogebra faz isso apenas usando um comando (derivada implícita), sabe-se que para a reta encontrar a reta tangente horizontal basta fazer $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{x-y^2} = 0$. Daí encontra-se fazendo algumas contas simples que $y = x^2$, substituindo em $x^3 + y^3 = 3xy$ se tem que x = 0 e x = $2^{1/3}$ que fornecem os pontos (0, 0) e $(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}})$, respectivamente. Desses dois pontos, apenas o segundo está no primeiro quadrante. Isso leva a encontrar a reta tangente y = $2^{2/3}$ e a normal x= $2^{1/3}$, ambas representada no gráfico.

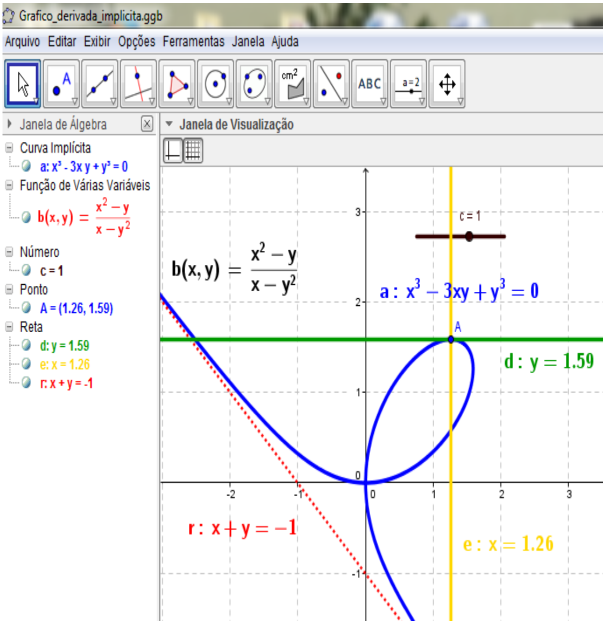

Figura 1. Fólio de Descartes com auxílio do Geogebra (Fonte: Pesquisa direta)

O gráfico com o recurso do Geogebra ajuda a visualização e a sistematização do problema, facilitando a resolução do problema, podendo o aluno ou o professor (re)significar o conhecimento utilizado. Essa construção de um conhecimento significativo ajuda o ensino do Cálculo e "suaviza" alguns procedimentos exaustivos, isso sem perder o rigor matemático.

A segunda situação didática consiste no seguinte: *use a derivada implícita para encontrar a equação da reta tangente à curva* $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ *chamada de Cardioide no ponto (0, ½).*

Fazendo os devidos cálculos, ou seja, derivando implicitamente a curva $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ em relação a x, se tem que $\frac{dy}{dx} = \frac{-8x^3+6x^2-8xy^2+2y^2}{8x^2y-4xy+8y^3-y}$. Substituindo o ponto dado (0, ½), tem-se que o coeficiente angular é 1, isso leva a equação $(y - y_p) = m(x - x_p)$, sendo m o coeficiente angular. Segue que, substituído m=1 e o ponto dado nesta equação, encontra-se a equação da reta tangente a Cardioide dada no ponto (0, ½), sendo y = x+1/2. Observando na representação geométrica consegue-se visualizar a reta encontrada, podendo provar para o aluno que a solução encontrada está correta.

A seguir o Gráfico 2 com a representação da situação didática, a visualização e o recurso do *software* vem a ajudar na análise e verificação dos cálculos. Pois se pode observar que a quantidade de cálculo nesta questão para se chegar a solução desejada é algo significante e exaustivo. Porém, deve-se ressaltar que a intenção deste trabalho é o unir o conhecimento algébrico ao geométrico, buscando com isso uma melhoria no ensino de Derivas Implícitas.

Fica evidente que a representação geométrica da curva aliada a outros atributos do Geogebra vem contribuir significativamente na construção da solução do problema proposto.

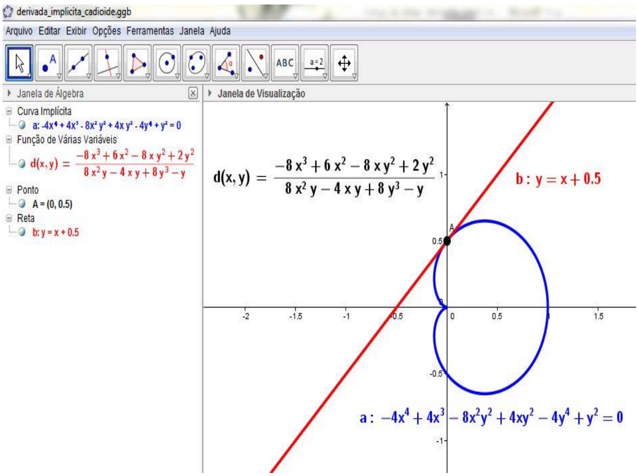

Figura 2. Cardioide com auxílio do Geogebra (Fonte: Pesquisa direta)

O Geogebra por ser dinâmico, pode ser explorado com mudança de valores e com comados facilitadores, que entram como recursos na análise colaborativa entre docente e discente, possibilitando com isso a construção do conhecimento significativo.

3. Considerações Finais

Ficou evidenciado neste artigo que a tecnologia pode afetar a mediação do docente, evidenciou-se a visualização por meio do Geogebra, que de certa forma pode atuar de modo produtivo no processo de aprendizagem, e que, todavia, se mostram impossibilitados de serem promovidos, quando se negligência o uso de *softwares* para o ensino de Matemática e, de modo especial, do Cálculo.

Por fim, concluísse que por meio de certas situações didáticas, o *software* proporciona a visualização e a (re)significação de expressões complexas inerentes a este conteúdo, sendo importante a inserção destas formas de ensino ao Cálculo Diferencial e Integral.

Referências

Alves, Francisco R. V. (2011) Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do software Geogebra. In: Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra, p. 48-55. Acessado em novembro de 2013 no site: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/73.pdf.

Brousseau, Guy. (1995). Théorisation des phénomènes d´enseignement de mathématiques. (Thèse d´État et Sciences). Bordeaux, Université de Bordeaux I.

Brousseau, Guy. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In: BROUSSEAU, Guy. Théorie des situations didactiques (pp. 115-160). Grenoble La Pensée Sauvage

Guidorizzi, Hamilton Luiz. (2012) Cálculo, LTC, v. 1, São Paulo, Brasil, 585p.