CAPÍTULO 04

INSTRUMENTOS DE MEDIÇÃO NO ESTUDO DA GRANDEZA COMPRIMENTO

Elizabeth Matos Rocha

Hermínio Borges Neto

6 A dissertação "Uso de instrumentos de medição no estudo da grandeza comprimento a partir de sessões didáticas" foi realizada pelo Programa de Pós-graduação na FACED/UFC.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo é um recorte da pesquisa de mestrado[6] realizada de 2004 a 2006 com alunos do 6.º ano do Ensino Fundamental com ênfase no estudo da grandeza comprimento como abordagem conceitual prevista na matriz curricular. Objetivou-se investigar o uso de instrumentos de medição, em sessões didáticas, como suporte para a aprendizagem da grandeza comprimento no universo do sistema métrico decimal.

De acordo com autores Miguel e Miorim (1986), Lima e Bellemain (2002) posturas didáticas centradas somente na abordagem conceitual indicadas no livro didático de Matemática mostram-se insuficientes para a aprendizagem das grandezas geométricas, assunto importante pelo caráter de aplicação no cotidiano. Em 1997, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), as grandezas e medidas foram eleitas como um dos quatro grandes blocos de conteúdo que permeiam a formação escolar Matemática no Ensino Fundamental. Os outros três blocos foram assim determinados: Números e operações, Espaço e forma e Tratamento de informação.

Mesmo que essa reorganização curricular proposta pelos Parâmetros tenha representado um avanço "de direito", por assim dizer, na tentativa de alavancar do segundo plano, nas salas de aula brasileiras, o estudo das grandezas, o que se observa "de fato", no dia a dia letivo, é que a compreensão do conceito de grandeza, por ser um dos mais elementares na cultura humana, de acordo com Lima & Bellemain (2002, p.8), "reveste-se de inevitáveis dificuldades", que ocasionam uma abordagem, no mínimo, superficial desse assunto nas aulas.

Especificamente, no trato das grandezas e suas medidas, estudos desenvolvidos na França, consoante Lima & Bellemain (2002, p.26), evidenciam que "tanto o obstáculo conceitual que permeia esse assunto quanto o desconhecimento, por grande parte da comunidade dos professores de Matemática, dessa realidade," tornam-se indicativos claros de que a abordagem desses assuntos é realizada, nas aulas, de forma incorreta.

Basicamente, nos dias de hoje, com relação às medidas, tem-se tudo pronto e acabado. As regras estão estabelecidas e são funcionais, mesmo que apenas uns poucos saibam realmente utilizá-las. Talvez, por isso, não se enxergue ou valorize devidamente sua importância. Trazendo esse questionamento para dentro dos muros da escola, parece-me que tanto a limitação dos professores no trato dessa questão, quanto a falta de pesquisa mais elaborada por parte dos autores de livros didáticos de Matemática, sobretudo os de primeiro ao sexto ano do Ensino Fundamental, contribuem para a realidade do 'faz-de-conta-que-aprendeu'.

Nesse universo do Ensino Fundamental, a parte experimental da pesquisa envolveu projetos-piloto em 2002, 2003 e 2004 com turmas do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Município de Fortaleza. Nesses projetos-pilotos, foram desenvolvidas atividades voltadas para a aquisição da aprendizagem da grandeza comprimento que subsidiaram informações enriquecedoras que permitiram extrair importantes resultados que ajudam a nortear a prática do professor de Matemática.

Os projetos-pilotos foram concebidos e discutidos com participantes do Grupo de Educação Matemática Multimeios (GEM^2) ligados ao Laboratório de Pesquisa Multimeios da Universidade Federal do Ceará. Os estudos, na área de Matemática e Didática da Matemática, realizados nesse grupo, possibilitaram eleger e vincular teorias acadêmicas com a prática de sala de aula. Por meio dos estudos feitos nesse grupo, ampliou-se conhecimento para incorporação na pesquisa de estudos relacionados ao Douady (1986), Engenharia Didática e Sequência Fedathi, sendo esta, metodologia genuína do GEM^2.

A articulação entre teoria e prática subsidiou a abordagem conceitual e criação das atividades significativas, pautadas em medições com utilização de instrumentos de medição, que auxiliaram o professor na aquisição dos conhecimentos junto aos alunos, relativos ao entendimento da grandeza comprimento, do ato de medir e do sistema métrico decimal.

A pesquisa foi desenvolvida no ambiente real da sala de aula, no sentido de que os resultados obtidos pudessem ser submetidos a elementos comuns à maioria das salas de aula, como barulhos, número excessivo de alunos por sala, dentre outros. O empecilho em conseguir um professor de Matemática que me substituísse na escola municipal onde desenvolvi o experimento tornou-se fator relevante para que eu mesma ministrasse as sessões didáticas.

A análise da produção dos alunos, obtidas por meio das fichas de atividade, as anotações feitas nas observações de sala e as transcrições das fitas de vídeo, permitiu-me discutir o entendimento do conteúdo e as estratégias de resolução dos alunos, bem como as suas dificuldades com a temática.

O intuito do projeto visou a responder o seguinte questionamento: a utilização de instrumentos de medição, como recurso didático, inserido em um estudo previamente elaborado, estimula a aprendizagem do aluno na aquisição do conceito de comprimento, da abordagem do sistema métrico decimal e do ato de medir? Antes de mostrar os resultados este texto resgata a evolução da Geometria, a sistematização dos sistemas de medidas e apresentação da experimentação.

2 COMO A GEOMETRIA EVOLUIU A PARTIR DA MENSURAÇÃO

Durante o período Neolítico[7], a humanidade evoluiu da condição de nômade para a capacidade de se fixar na terra pelo domínio da agricultura e domesticação de animais. Somente a partir de 3 000 a. C, houve o desenvolvimento de formas mais avançadas de sociedade, com comunidades efetivamente agrícolas e densamente povoadas, que, de acordo com registros históricos, estabeleceram-se ao longo de alguns dos grandes rios, como o Nilo, na África, o Tigre e o Eufrates, na Ásia.

Tornam-se difícil saber, entretanto, as verdadeiras origens da Geometria. Aristóteles, de acordo com Boyer (1974, p. 4), propunha que a existência, no Egito, de uma classe sacerdotal, que dispunha de tempo para o lazer, contribuiu para o desenvolvimento da Geometria. Heródoto, por sua vez, defendia a ideia de que o caráter utilitário da Geometria se originava no Egito, em razão da necessidade prática de drenar pântanos, controlar inundações e promover a irrigação de terras.

Esses registros históricos apontam que a Matemática primitiva evoluiu em certas áreas do Oriente antigo, forçosamente como ciência prática, surgida, de acordo com Machado (1987, p.11), "diretamente do empírico e que auxiliava na resolução de problemas ligados à agricultura e à Engenharia, que, por sua vez, necessitavam de um calendário utilizável", do desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas utilizado nas colheitas, e de práticas financeiras e comerciais. Esses avanços iniciais da Matemática ocorreram na Aritmética e na mensuração prática[8]. Segundo Eves (1997, p.57), "foi dessa maneira que a Álgebra evolveu ao fim da Aritmética e a Geometria teórica originou-se da mensuração".

3 QUALIDADE E QUANTIDADE NO ATO DE MEDIR

A breve incursão da abordagem da Geometria ligada à mensuração prática do tópico anterior objetiva situar o leitor na linha do tempo e fazê-lo perceber que a medida é quase tão antiga quanto à contagem e que em nenhum momento se trata de um tema nascido nas circunstâncias atuais. As palavras de Auden[9], de que "vivemos em sociedades para as quais o estudo daquilo que pode ser pesado e medido é uma paixão obsedante", tornam-se, pois, nesse contexto, muito oportunas, como proposta de justificar o avanço da Ciência moderna, a partir da elaboração de uma "teia de leis quantitativas" (CARAÇA, 1984, p.124).

A busca pela quantificação parece inerente à natureza humana. Passagens desse fato podem ser encontradas tanto na escola pitagórica mediante à "afirmação bela e fecunda, da existência duma *ordenação matemática do Cosmos* - todas as coisas têm um número" (CARAÇA, 1984, p.72), como numa literatura mais atualizada, intitulada *A Mensuração da Realidade*, onde Crosby (1997) assinala que sua inquietação reside em explicar o espantoso sucesso do imperialismo europeu. O livro sugere que a vantagem dos europeus, em relação a outros povos, estava na mudança de mentalidade, que *grosso modo* impunha "um modelo quantitativo em substituição ao antigo modelo qualitativo, ou seja, refletir sobre a realidade em termos quantitativos, em caráter mais sistemático do que qualquer outro membro de sua espécie." (CROSBY 1997, p.12-13).

Seja qual for a necessidade da citação cronológica, é preciso perceber que a noção de quantidade está intimamente relacionada

8 Infere-se que os babilônicos do período 2000 a.C. a 1600 a.C. soubessem regras gerais da área do retângulo, triângulo (retângulo e isósceles) e trapézio retângulo. (EVES, 1997, p.60).

9 W. H. Auden. The English Auden: Poems, Essays e Dramatic Writings, 1927-1939. London: Faber & Faber, 1986. p.292.

10 Essa definição encontrada em Lima & Bellemain (2002, p.86-87) trata-se, na verdade, de uma citação dos autores, retirada do *Tratado Elementar de Aritmética*, de José Aelino Serrasqueiro que, em sua 21ª edição, publicada em Coimbra, em 1921, continha o programa oficial para o ensino nos liceus e foi utilizado em escolas brasileiras, juntamente com manuais do mesmo autor versando sobre Geometria e Álgebra, até a década de 1950.

à ideia de qualidade e que, no estudo das medidas, tornam-se elementos básicos do campo conceitual. Qual a distinção, porém, entre qualidade e quantidade? Eis duas definições de qualidade, segundo a visão de seus autores

1. (s.f.) Propriedade, atributo ou condição das coisas ou das pessoas capaz de distingui-las das outras e de lhes determinar a natureza. (Aurélio, 2000, p.1165).
2. Sejam A, B, ... , L componentes dum isolado (uma secção da realidade, nela recortada arbitrariamente); ao conjunto de todas as relações A $\rightarrow$ B, ... A $\rightarrow$ L dá-se o nome de qualidades de A em relação a B, ... L. (Caraça, 1984, p.114).

Há qualidades, entretanto, não suscetíveis de medição. Não se pode dizer, por exemplo, que "uma circunferência é mais ou menos circular que outra" (CARAÇA, 1984, p.114). Com outras palavras, é possível apenas emitir um juízo de valor, como o caso de dizer, de duas pessoas nossas conhecidas, qual das duas é mais ou menos responsável do que a outra. Quanto à quantidade, eis o que encontramos em termos de sua definição

1. (s.f.) Número de unidades, ou medida, que determina um conjunto de coisas consideradas como equivalentes e suscetíveis de aumento ou diminuição. Grandeza expressa em número. (Aurélio, 2000, p.1165).
2. A quantidade é um atributo da qualidade e, como tal, só em relação a ela pode ser considerada. (Caraça, 1984, p.117).
3. Quantidade é a grandeza expressa em números. Assim, um monte de trigo constitui propriamente uma grandeza, e vinte alqueires de trigo constitui uma quantidade. (Lima & Bellemain, 2002, p.87)[10].

A sistematização das leis quantitativas, entretanto, remete à ação de medir e, consequentemente, à necessidade do entendimento, mesmo que, em linhas gerais, de termos correlatos a esse campo de estudo: o conceito de grandeza e de medida.

4 O QUE SIGNIFICA MEDIR UMA GRANDEZA?

As grandezas podem ser classificadas basicamente em dois tipos: as discretas e as contínuas. Uma grandeza é dita discreta quando "é formada por um número finito de elementos (conjunto contável) que não podem ser quebrados. Por exemplo, o conjunto das cartas de um baralho". Já uma grandeza contínua "é formada por um número infinito de elementos (pontos) e admite, teoricamente, divisibilidade infinita. Por exemplo, um pedaço de barbante, um segmento de reta" (MIGUEL & MIORIM, 1986, p.45).

De acordo com Lima (1991, p. 7), "comparar uma grandeza discreta com a unidade significa efetuar uma *contagem*; o resultado é sempre um número inteiro". Temos, pois, no conjunto dos números naturais, o modelo matemático para a *contagem*. Se, entretanto, a grandeza é contínua, compará-la com a unidade é *medi-la*; o resultado da comparação (medida) é um número real.

Ninguém duvida de que as operações de contar e de medir são exigências diárias e que são inúmeros os exemplos possíveis de encontrar nesse sentido. Especificamente a ação de medir consiste em comparar duas grandezas da mesma natureza (grandezas homogêneas), como dois comprimentos ou dois volumes. Tal comparação, entretanto, não pode ser feita de qualquer forma sob pena de não se conseguir uma medida adequada. A correta ação de medir, portanto, envolve três fases distintas: a escolha adequada da unidade de medida, que é uma grandeza por meio da qual se vão medir outras grandezas da mesma espécie; a adequada comparação entre a unidade de medida e a grandeza de mesma natureza a ser medida e o resultado desta comparação, expresso por um número. Caraça (1984, p. 30) esclarece essa questão da seguinte maneira, quando diz ser necessário

> 1º - Estabelecer um *estalão* único de comparação de todas as grandezas da mesma espécie; esse estalão chama-se *unidade* de medida da grandeza de que se trata – é, por exemplo o *centímetro* para os comprimentos, o *grama-peso* para os pesos, o *segundo* para os tempos, etc.
> 2º - Responder à pergunta – quantas vezes? – acima posta, o que se faz dando um número que exprima o resultado da comparação com a unidade.
> Este número chama-se *medida* da grandeza em relação a essa *unidade*. Por exemplo, na fig. 01, o resultado da comparação exprime-se dizendo que no segmento $\overline{CD}$ cabe *três* vezes a unidade $\overline{AB}$, ou que a *medida* de $\overline{CD}$ *tomando* $\overline{AB}$ como unidade, é *três*.

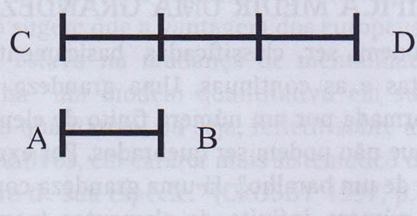


Figura 01:
Comparação entre segmentos de reta

É conveniente ressaltar, em princípio, que se pode escolher a unidade de medida de várias maneiras, ou seja, "uma mesma grandeza tem, portanto, tantas *medidas* quantas as *unidades* com que a medição se faça" (CARAÇA, 1984, p.31). Devem-se, contudo, levar em conta certos aspectos dessa escolha, pois não seria cômodo, por exemplo, medir o comprimento de uma sala, utilizando o quilômetro como unidade de medida. Nesse sentido, o comprimento, por ser passível de medida, é uma grandeza contínua. Seu estudo é um dos muitos assuntos que compõe a Matemática elementar e incorre num problema pedagógico (BROLEZZI, 1996, p.5), justamente quando o professor, por não explorar a relação existente entre os aspectos discreto e contínuo, prefere optar ora por um ou outro aspecto.

5. ABORDAGEM DIDÁTICA DO CAMPO CONCEITUAL DA MENSURAÇÃO DA GRANDEZA COMPRIMENTO

Considerando essa abordagem, a pesquisa buscou minimizar esse obstáculo conceitual e didático ao procurar uma interação entre a ideia de continuidade presente no ato de medir diversas distâncias, com instrumentos de medição, e a necessidade de efetuar cálculos com as diversas quantidades obtidas dessas medições, o que ilustra o aspecto discreto do contínuo. Para administrar melhor esses dois aspectos – contínuo e discreto, desenvolveu-se o recurso didático chamado de quadro valor de lugar das medidas de comprimento, ao utilizar o sistema métrico decimal, ideia inspirada no quadro valor de lugar utilizado no estudo do sistema de numeração decimal, já que ambos os sistemas utilizam a base dez.

O comprimento pertence a uma classe particular das grandezas, denominadas geométricas. Para tornar mais compreensível, junto aos alunos, a grandeza com que se vai trabalhar, no caso, a grandeza comprimento, o professor deve, num primeiro momento, utilizar-se da abordagem dos sentidos para explorar empiricamente sua presença nos diversos recursos materiais no alcance deles, alunos. Por exemplo, o comprimento horizontal e vertical do quadro de escrever, o comprimento da caneta, o comprimento da sala e outros.

Somente depois, o professor buscará o rigor matemático, compatível com o nível de maturidade dos alunos, para abordá-la como objeto matemático. Com o intuito de nortear como a grandeza comprimento, é enfocada do ponto de vista da Matemática escolar, recorro a alguns autores, esclarecendo, de antemão, que está além dos meus objetivos, neste texto, fazer a explanação de uma estrutura axiomática para a grandeza comprimento.

É importante esclarecer que o comprimento é visto de forma mais aprofundada na quinta série do Ensino Fundamental, o que corresponde ao terceiro ciclo. A análise de alguns livros didáticos, em torno desse assunto, faz-nos perceber que os autores limitaram sua abordagem apenas ao sistema métrico decimal. Apesar de alguns trazerem, para o professor, orientação metodológica, em páginas anexas, dificilmente sugerem, no corpo do livro, propostas de exercícios que utilizem a régua graduada como suporte para o melhor entendimento dos submúltiplos do metro, por exemplo.

O estudo da grandeza comprimento, como objeto matemático, é visto, na Geometria plana, como a medida de um segmento de reta, também reconhecida como distância métrica. Ao consultarmos uma literatura mais especializada, Lima (1991, p.1) define comprimento como sendo a medida de um segmento de reta, nesses termos

> Indicaremos com o símbolo $\overline{AB}$ a medida do segmento de reta AB. A medida, ou comprimento, $\overline{AB}$ é um número que deve exprimir quantas vezes o segmento AB contém um segmento u, fixado previamente, que se convencionou tomar como unidade de comprimento, ou como segmento unitário.

O autor assume, entretanto, a noção de que a explicação acima é vaga do ponto de vista matemático e propõe um desenvolvimento lógico em torno do raciocínio da definição de comprimento, de forma que discute todas as situações sobre a medida $\overline{AB}$ de um segmento de reta AB, onde relaciona essa medida a um número, que pode ser inteiro, fracionário ou irracional.

6 UMA CONSEQUÊNCIA RESULTANTE DA MEDIDA ENTRE DOIS COMPRIMENTOS: A EXPANSÃO NUMÉRICA

O sugestivo lema da escola pitagórica "Tudo é número" sintetizava a obsessão dos seus componentes pelos números. Sem entrar no mérito do misticismo adotado por esta irmandade, o fato é que a Filosofia pitagórica se baseava na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria eram os números inteiros.

Conforme mencionamos antes, as medições de grandezas se fazem necessárias no cotidiano. Para medirmos, por exemplo, dois comprimentos, tomando um deles como unidade de medida, e o outro, o comprimento a ser medido, o mais provável que aconteça é que um não caiba um número exato de vezes no outro (LIMA, 1991, p.1-3). Para satisfazer esse raciocínio elementar das medições, são necessárias as frações. Os números racionais comportam uma interpretação geométrica fácil de representar essa situação.

Ao medirmos um segmento de reta AB fixando uma unidade u de medida 1 (segmento unitário ou unidade de comprimento), duas situações podem ocorrer:

Primeira situação: A unidade u cabe um número inteiro de vezes em AB:

Figura 02: A unidade u cabe um número exatos de vezes em AB

Se u couber n vezes em AB, então a medida de $\overline{AB}$ = n unidades, portanto um número natural.

Segunda situação: A unidade u não cabe um número exato de vezes em AB:

Figura 03: A unidade u não cabe um número exato de vezes em AB

Para resolver esse impasse, é necessário procurar um segmento de reta menor w, que caiba m vezes no segmento unitário u. A medida de w será a fração $\frac{1}{m}$. Neste caso, a medida de $\overline{AB}$ será n vezes $\frac{1}{m}$, o que resulta em $\frac{n}{m}$, portanto um número racional. O segmento w é, neste caso, um submúltiplo comum de AB e u, o que os torna comensuráveis entre si.

Livros da História da Matemática (EVES, 1997; BOYER, 1974) fazem menção ao possível conflito dos pitagóricos acerca da descoberta de que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional. Os números racionais são insuficientes para medir todos os segmentos de reta. A situação para comprovar tal fato pode ter ocorrido, por exemplo, tanto para comparar a diagonal de um quadrado ou de um pentágono com seu lado. Não importa, pois, a realidade, de certa forma insuportável para a convicção pitagórica, mostrava que os inteiros e suas razões eram insuficientes para resolver tal comparação, pois a diagonal e o lado do quadrado ou do pentágono não têm um submúltiplo comum, por mais que se diminua a unidade de medida.

Considerando, pois, um quadrado cujo lado seja 1. O cálculo da sua diagonal d é encontrado utilizando-se o teorema de Pitágoras. Dessa forma, tem-se: $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$. O cálculo de $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ que não é uma decimal exata, tão pouco periódica. É possível observar, pois, que não há um segmento w que caiba m vezes no lado unitário do quadrado e n vezes na diagonal, de modo que a medida da diagonal seja $\frac{n}{m}$. Já que não existe esse submúltiplo comum entre o lado do quadrado e sua diagonal, diz-se que são segmentos incomensuráveis.

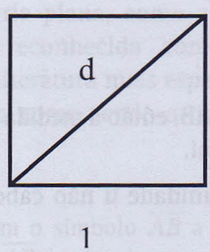


Figura 04:
A relação entre o lado e a diagonal do quadrado

Abaixo se encontra a demonstração (PAIVA, 1995, p.58) de que $\sqrt{2}$ é um número irracional:

> Suponhamos que exista um número racional p/q, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, tal que $(p/q)^2 = 2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que p/q seja fração irredutível, isto é, o máximo divisor comum entre p e q é igual a 1. Temos duas, e apenas duas, possibilidades a considerar: p é par ou p é ímpar.
>
> Primeira possibilidade: admitamos que p é par, ou seja, $p = 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Assim, temos: $(2n/q)^2 = 2 \Rightarrow 4n^2 = 2q^2 \therefore 2n^2 = q^2$.
>
> Note que q^2 é par, pois $2n^2$ é par. Ora, o quadrado de um número inteiro é par se, e somente se, esse inteiro for par; logo q é par.
>
> Essa conclusão é absurda, pois, sendo p e q números pares, a fração p/q não será irredutível. Logo a primeira possibilidade não pode ocorrer.

Segunda possibilidade: admitamos que p é ímpar, $p = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Assim, temos: $(2n + 1)^2/ q^2 = 2 \Rightarrow (2n + 1)^2 = 2q^2$.

O quadrado de um número ímpar é sempre ímpar; logo $(2n + 1)^2$ é ímpar. Como $2q^2$ é par, temos que essa última igualdade é absurda. Logo, a segunda possibilidade não pode ocorrer.

Ora, se não existe p inteiro, par ou ímpar, de modo que $(p/q)^2 = 2$, segue-se que não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2.

Surgiu assim a necessidade de novos números, que não pudessem ser representados como uma razão entre dois inteiros. Convencionou-se chamá-los de *números irracionais*.

A obtenção do conjunto dos números reais é resultante da reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Ou seja, se um número não é racional, então é irracional. Com isso, a cada número real corresponde um único ponto da reta e vice-versa, estabelecendo-se, dessa forma, uma *correspondência biunívoca*, de forma que todos os segmentos de reta podem ser medidos. A reta real pode ser construída, desde que nela se escolha um ponto de origem a ele associado, no caso, o zero; um sentido de percurso e ainda uma unidade de comprimento.

A explanação dos aspectos conceituais vinculados ao estudo do Comprimento ajuda perceber que não se trata de um tema simples, já que envolve termos que se fundem, por isso mesmo se confundem, por sua própria natureza – quantidade, qualidade, dimensão, espaço, grandeza, medida, a ação de medir, sistema de medidas. Essas questões ganham maior dimensão na sua complexidade, quando inseridas no contexto escolar, em que se objetiva o aspecto cognitivo em curso. Nesses termos, entender o processo de aprendizagem será o enfoque abordado no capítulo seguinte.

6.1 EM BUSCA DA COMPREENSÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM

Certamente uma preocupação constante do professor consiste em saber se o aluno compreendeu o que lhe foi ensinado durante o tempo relativo a cada aula. Como saber, senão perguntando ao próprio aluno? Responder a essa pergunta, entretanto, aparentemente tão simples e direta, pressupõe que este aluno tenha autonomia intelectual no campo da matemática. Do professor, nesse processo, espera-se que ele saiba "objetivar a interrogação", "conduzir uma reflexão sobre o processo cognitivo em curso", além da capacidade de avaliação dos diversos aspectos relativos aos processos cognitivos.

Durante a fase experimental desta pesquisa, cuidou-se em fazer pré-testes com o intuito de saber o conhecimento prévio dos alunos sobre o campo das grandezas. O que perguntar, como perguntar, quando perguntar são atitudes que o professor precisa saber fazer no sentido da condução do processo de reflexão. Abaixo um breve relato de situação ocorrida na sessão didática 06, no sentido de ilustrar essa fala:

- Minha pergunta para vocês é: vocês conhecem alguns desses símbolos? (símbolos do sistema métrico decimal).
Alunos: sim. O km, o m.

No quadro de escrever, da sala de aula, estavam escritos os símbolos: km, hm, dam, m, dm, cm e mm, respectivamente, quilômetro, hectômetro, decâmetro, metro, decímetro, centímetro e milímetro, dos quais os alunos só identificaram dois.

De acordo com Campos (2001, p.31), 'a aprendizagem é uma modificação sistemática do comportamento ou da conduta, pelo exercício ou repetição, em função de condições ambientais e condições orgânicas'. Esta definição pressupõe que a aprendizagem envolve o uso e o desenvolvimento de todos os poderes, capacidades, potencialidades do homem, tanto físicas, quanto mentais e afetivas. Dentre os diversos métodos e técnicas de estudo da Psicologia da Aprendizagem de pesquisa empregados para a comprovação de hipóteses, este trabalho se utiliza do método da experimentação porque permite variar, de forma ampla, o fenômeno estudado e o rigor das observações.

A precisão e a exatidão tornam esse método digno de confiança por possibilitar o controle das variáveis envolvidas no fenômeno a ser investigado, apesar da sua complexidade, pois, para que os resultados sejam considerados válidos, faz-se necessária a descrição detalhada das circunstâncias em que se passa a pesquisa, que consiste da aparelhagem e instrumentos utilizados, incluindo as características da população envolvida (CAMPOS, 2001).

7 SITUAÇÕES DIDÁTICAS: APRENDIZAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO PROFESSOR, ALUNO E CONHECIMENTO MATEMÁTICO

A parte experimental do trabalho, por intermédio de sessões didáticas, buscou, como dito anteriormente, abordar a grandeza comprimento dentro dos aspectos reais da sala de aula. Para isso, pautou-se em elementos da teoria das situações didáticas, por encontrar elos de apoio nesse sistema, desenvolvido por Brousseau (1996), que "representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula envolvendo professor, aluno e conhecimento matemático" (FREITAS, 1999, p.65).

7.1 A DIALÉTICA FERRAMENTA-OBJETO QUE SUBSIDIA O JOGO DE QUADROS DA GRANDEZA COMPRIMENTO

As pesquisas de Douady (1986,1987) trabalham com atividades que se referem às hipóteses cognitivas e didáticas, pois esclarece que o processo da decomposição e composição de figuras planas faz uso da "dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros" (FACCO, 2003, p.33). Há dois aspectos interessantes nas pesquisas de Douady que subsidiaram ideias importantes para a concepção da Engenharia Didática da parte experimental desta pesquisa. O primeiro é que ela 'toma como base as hipóteses piagetianas sobre a *formação de conhecimentos* em termos de *desequilíbrio-reequilibração*', rejeitando a parte teórica do desenvolvimento cognitivo por estádios de desenvolvimento de Piaget (MARANHÃO, 1999, p.131). Entendo que fica mais acessível para o pesquisador estabelecer os momentos de aprendizagem do aluno sobre determinada abordagem pela assimilação/acomodação, sujeitos-em-ação, por se tornar mais próximo do momento real da aula.

O segundo aspecto diz respeito à noção de jogos de quadros desenvolvida por Douady (1986), em que busca esclarecer que um dos aspectos mais relevantes em Matemática consiste na mudança de ponto de vista, de tradução de um problema de um quadro para outro, com a finalidade específica de acessar outras ferramentas de resolução que as inicialmente previstas. Um quadro é constituído, segundo Douady, de ferramentas de uma parte da Matemática, de relações entre objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Duarte (2002, p.27-28) menciona o jogo de quadros de Douady[11] (1986), referente à grandeza área, como parte integrante da sua pesquisa. Faço uma adaptação dessa modelização didática compatível com a grandeza comprimento, objeto de estudo deste trabalho:

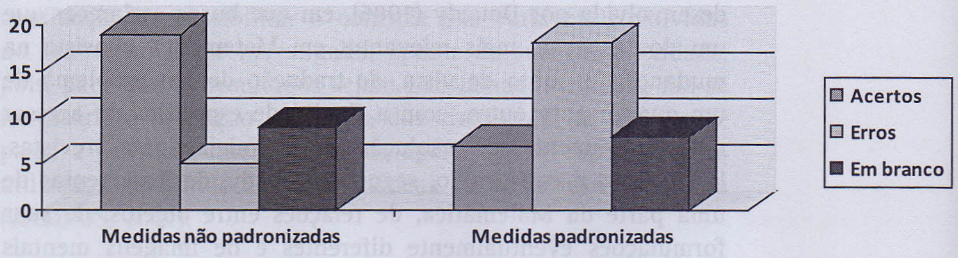
- o quadro geométrico, constituído por figuras unidimensionais - como o segmento de reta e figuras bidimensionais - o triângulo, o quadrado e o retângulo;
- o quadro numérico, consistindo nas medidas dos comprimentos, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos;
- o quadro das grandezas, contexto próprio da noção de comprimento, que integra os dois primeiros.

8 A PARTE EXPERIMENTAL DA PESQUISA: USO DE INSTRUMENTOS DE MEDIÇÃO NAS AULAS SOB O PRECEITO METODOLÓGICO DA ENGENHARIA DIDÁTICA E SEQUÊNCIA FEDATHI

A parte experimental da pesquisa, como o pré-teste, pós-teste e sessões didáticas, em 2004, foi refinada de experimentações-piloto realizadas em 2002 e 2003, com diferentes turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. A fim de diagnosticar o conhecimento prévio dos alunos, foi realizado um pré-teste com 33 alunos, em abril de 2004, em 100 min, que mostraram forte desconhecimento do sistema de medida da grandeza comprimento, como retratado, abaixo, no gráfico 01 que faz o recorte do pré-teste das atividades matemáticas, constituída de sete questões que sondou os conhecimentos dos alunos sobre unidades de medida padronizadas, ligadas à grandeza comprimento, em que abordou também noções de formas geométricas e de perímetro, todas no nível do sexto ano, cuja abordagem estava no formato do livro didático.

11 Para Douady (1989), um quadro é constituído por objetos da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa a um momento dado aos objetos e suas relações.

Gráfico 1 - Recorte do pré-teste



O pré-teste buscou, ainda, identificar a capacidade de o aluno situar as grandezas que remetem à altura e peso do próprio corpo, em que se evidenciou que, dos 33 alunos, 26 desconheciam completamente suas medidas. Foi planejada, de abril a junho de 2004, a realização de 16 sessões didáticas, cada uma de 100 min, de forma compatível com o tempo didático e a organização dos conteúdos.

A expressão sessão didática, nesses termos, não foi encontrada nas consultas bibliográficas, durante o período relativo a essa pesquisa, entretanto, percebeu-se familiaridade de propósitos com a ideia de situação didática, expressa por Pais (2001, p. 65) e que exprime bem o teor de cada sessão didática desenvolvida nesta pesquisa.

> Uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. Esses três elementos componentes de uma situação didática (professor, aluno, saber) constituem a parte necessária para caracterizar o espaço vivo de uma sala de aula.

Dessa maneira, cada sessão didática utilizou três elementos básicos – professor, aluno e saber – associados a outros elementos igualmente necessários, como objetivos, métodos, recursos didáticos, dentre outros.

Para a fase de desenvolvimento, a pesquisa caracterizou-se por abordagem qualitativa, com ênfase em estudo de caso (LÜDKE & ANDRÉ, 1986), numa prática pedagógica, por meio da intervenção, com sessões didáticas, cujo propósito foi perceber como os alunos evoluem na aquisição do conhecimento relativo à grandeza comprimento no contexto escolar.

As sessões didáticas foram planejadas com base nos aportes da Engenharia Didática, concebida na década de 1990, por Michele Artigue e método largamente empregado nas pesquisas da Didática da Matemática. De acordo com Artigue (1996, p. 243) "é uma maneira de trabalho compatível com aquele desenvolvido por um engenheiro", que, para fazer um projeto com o mínimo de falhas, busca suporte nos conhecimentos científicos na sua linha de atuação, além de submeter-se a um controle do tipo científico, para que possa enfrentar problemas que a ciência não leva em consideração, por não querer, ou não poder.

A pesquisa utilizou tal pensamento quando relacionou meios e estratégias para melhorar os conhecimentos dos alunos no estudo da grandeza comprimento, evidenciados nos pilotos de 2002 e 2003 e no pré-teste de 2004. Por isso, as sessões didáticas foram planejadas com critérios amplos e variados, que pudessem favorecer a aprendizagem "para certa população de alunos" Douady (apud MACHADO *et alii*, 1999, p.198). Para a análise de outras abordagens deste tema, há diversidade de literaturas (SOUZA, 2005; BORGES NETO, H. CUNHA, F. G. M. & LIMA, I. P, 2001).

A abordagem metodológica de cada sessão didática em uma visão global utilizou as fases da Engenharia Didática, quando dos estudos prévios sobre grandezas, inseridos na análise preliminar, levantamento de hipóteses e elaboração de estratégias didáticas inseridas na segunda etapa, análise *a priori*. A terceira etapa vinculou-se aos procedimentos experimentais, como os pilotos. Ao final, na quarta etapa, os estudos e experimentos confrontaram a situação didática real e a ideal, validando ou refutando as hipóteses levantadas, tanto que a quantidade de sessões didáticas, em total de 16, decorre do parâmetro experimental de todo esse processo de estudo.

A organização e articulação das sessões didáticas, como eixo norteador da prática letiva, contaram com um controle local favorecido pela Sequência Fedathi, que, apesar de aparecer de forma mais evidente na segunda e terceira fase da Engenharia Didática, manteve-se presente em outras fases também, sobretudo na análise a priori. Isso se justifica porque seu intuito maior consiste em buscar contribuições para elucidar o fato de que o professor deve ocupar cada vez menos o lugar dos alunos - mas, acima de tudo, estimular a promoção existencial destes no fazer matemático. De acordo com Borges Neto *et alii* (2001, p.5) "reproduzir o trabalho do matemático significa abordar uma situação de ensino, levando em consideração as fases de trabalho vivenciadas por esse profissional no desenvolvimento de suas experimentações e produções."

Composta por quatro fases, a Sequência Fedathi estimula que a postura docente para o ensino de Matemática, efetivamente, envolva ao máximo a participação do aluno. Dessa maneira, sempre que um aluno é colocado diante de uma situação-problema, ele tem chances de ampliar seu raciocínio matemático, ao experimentar vários caminhos que possam levar à solução, analisar possíveis erros, fazer uma transposição didática dos conhecimentos, testar os resultados encontrados para saber se errou e onde errou e resolver a questão de forma sistematizada. Em suma, mesmo que uma sequência didática faça uso da Engenharia Didática, de nada valerá, se não ocorrer ao aluno, conforme propõe a Sequência Fedathi, viver sua experiência matemática.

Desse modo, cada uma das 16 sessões didáticas utilizaram as quatro fases da Sequência Fedathi. Cada sessão didática teve uma situação-problema norteadora ao iniciar com uma tomada de posição (fase 01), a partir da apresentação de uma situação-problema, com base no assunto da aula. Em seguida, estimulou-se a maturação/debruçamento (fase 02) dos alunos sobre o problema proposto. Nessa fase, há o incentivo por parte do professor, a partir de questionamentos sobre os conhecimentos prévios da Matemática que ajudam a resolver a situação em foco. Discutida a situação-problema, há a apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema, tomada como solução (fase 03). Nesta fase, os alunos são estimulados a apresentarem suas soluções, com ampla discussão do grupo. A quarta fase, considerada como prova, consiste da apresentação e formalização do modelo matemático, ou seja, a sistematização do problema, sob a validação do professor. Na Matemática, é o momento em que são apresentadas as demonstrações rigorosas de um problema devidamente finalizado.

Abaixo, os assuntos abordados em cada sessão didática e o desempenho dos alunos extraídos das fichas de atividades aplicadas ao fim de cada sessão. O quantitativo relativo a cada coluna do desempenho foi extraído da média das atividades, em cada sessão didática.

Sessão Didática	Assunto abordado em cada sessão didática	Desempenho dos alunos[12]		
		Respostas Corretas	Respostas erradas	Em branco
01	Classificação de figuras geométricas em planas e nãoplanas.	21	10	02
02	Classificação dos objetos em uni, bi e tridimensionais	16	11	06
03	Classificação de objetos em uni, bi e tridimensionais	17	14	02
04	Segmento de reta e polígono	18	10	02
05	Identificação da grandeza comprimento nos objetos	16	10	-
06	A sistematização da grandeza comprimento	27	-	01
07	Estudo dos submúltiplos do metro con o uso da régua graduada	21	07	-
08	Medidas de segmentos cons ecutivos colineares e não colineares	20	11	01
09	O polígono e a noção de perímetro. Utilização da régua graduada	19	02	02
10	Cálculo do perímetro de um triângulo a partir das medidas de seus lados. Utilização da régua graduada	09	06	13
11	Transformaçãode unidades de medida de comprimento	18	11	01
12	Estudo do retângulo a partir da utilização da régua graduada.	10	15	05
13	Cálculo do perimetro do quadrado. Utilização da fita métrica. O metro e seus submúltiplos.	23	05	03
14	Medição dos lados da sala d e aula. Utilização da fita métrica. O metro e seus submúltiplos.	16	13	02
15	Cálculo do perímetro de um polígono no operatório formal. Medidas do próprio corpo com a utilização da fita métrica.	18	12	01
16	Resolução de problemas envolvendo perímetro.	15	15	-

12 Participaram do experimento 33 alunos. No entanto, esse número variou de uma sessão didática para outra, em decorrência das faltas de alunos.

Após as 16 sessões didáticas, houve a realização, em junho de 2004, do pós-teste (110 min de duração) com a participação de 32 alunos. O gráfico 02, abaixo, apresenta o desempenho dos alunos.

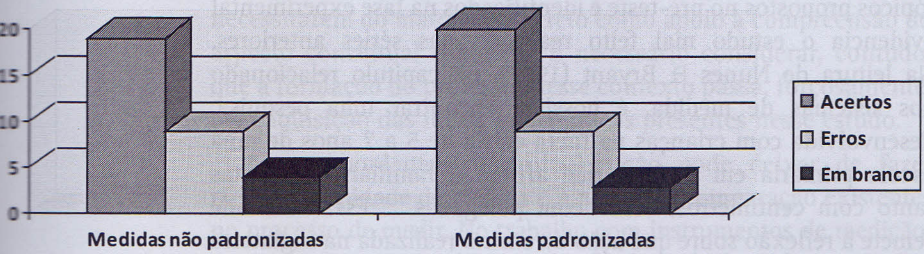


Gráfico 2 - Recorte dos dados extraídos do pós-teste

9 ANÁLISE E RESULTADOS DA PARTE EXPERIMENTAL

O que o pré-teste evidenciou sobre a aquisição dos alunos em termos do conhecimento das medidas, com ênfase na grandeza comprimento? Tomando-se como parâmetro os conhecimentos dos alunos sobre essa temática evidenciada no pré-teste, percebe-se nitidamente aumento do conhecimento por parte dos alunos.

Na análise das respostas dos alunos no pré-teste, três aspectos ficaram evidenciados, do ponto de vista matemático: 1) 61% dos alunos não tinham noção da ação de medir, com ou sem a régua graduada; 2) 90% dos alunos não sabiam fazer transformação de unidades padrão; 3) 93% dos alunos desconheciam o cálculo do perímetro de um polígono.

Aliados a esse desconhecimento específico, várias questões, de caráter mais amplo, igualmente relevantes, foram sendo identificadas, durante a fase de entrevistas individuais, como a insegurança dos alunos e a falta de acompanhamento familiar na realização das tarefas de casa.

Na parte experimental, identificou-se com maior segurança os obstáculos epistemológicos dos alunos, no tocante ao desenvolvimento conceitual relacionados à Geometria e à Aritmética que, em linhas gerais, foram assim pontuados: 1) dificuldade na identificação de figuras planas e não-planas; 2) dificuldade na compreensão de figuras poligonais; 3) dificuldade de estabelecer ligação entre a fração decimal e o número decimal; 4) dificuldade de estabelecer ligação entre a grandeza a ser medida, a unidade de medida e o número resultante da medida; 4) dificuldades em compreender a noção da distância relativa a cada unidade de medida padrão; 5) dificuldade de fazer conversões entre as unidades de medida padrão.

O acentuado desconhecimento dos alunos com relação aos tópicos propostos no pré-teste e identificados na fase experimental evidencia o estudo mal feito realizado nas séries anteriores. Na leitura de Nunes & Bryant (1997), no capítulo relacionado aos sistemas de medida, é possível encontrar uma pesquisa, desenvolvida com crianças na faixa etária de 5 a 7 anos de uma escola primária em Oxford, que afirma a familiaridade destas tanto com centímetros, como com polegadas. Essa realidade remete à reflexão sobre que ação de ensino realizada na Inglaterra possibilita tamanha eficiência de conhecimento aos alunos.

Por meio da análise das fichas de atividades dos alunos e das filmagens das sessões didáticas, confirmou-se a hipótese de que a utilização de instrumentos de medição facilita o entendimento do conceito de comprimento, estimula a aprendizagem do aluno em todo o contexto que envolve o ato de medir - a grandeza a ser medida, a unidade de medida e a medida (número) - e favorece o entendimento do sistema métrico decimal.

No decurso da aplicação das sessões didáticas, trabalhou-se no plano concreto, utilizando ao mesmo tempo o instrumento de medição e o quadro-valor lugar das medidas. Essa ação conjunta foi muito favorável à compreensão dos cálculos resultantes das medidas. Isso permite perceber que o trabalho com materiais concretos, com alunos na faixa etária de 11 a 15 anos pode e deve ser feito no sentido de facilitar a aprendizagem.

Outro aspecto importante foi a utilização de jogos de quadros, também desenvolvido por Douady (1986), que se refere ao geométrico, com a utilização de segmentos de reta e polígonos, ao numérico consistindo nas medidas dos comprimentos e o quadro das grandezas, contexto próprio da noção de comprimento, o que viabilizou a compreensão do conceito de polígono e de perímetro.

À medida que os estudos avançaram, observou-se que os alunos assimilavam mais naturalmente o que lhes era proposto. Mesmo que a resposta ainda não fosse a correta, mas o procedimento de resolução da questão proposta era certo, e poucos foram os alunos que não conseguiram manifestar resposta naquilo que lhes era requisitado. Isso valida nossas hipóteses estruturadas no capítulo de introdução deste trabalho.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sugere-se, a partir dessa pesquisa, que o uso, em sala de aula, de instrumentos que favoreçam a ação de medir deve ser iniciado em séries anteriores ao sexto ano, pelo fato dos alunos necessitarem do material concreto como apoio à compreensão do aspecto conceitual estudado. É necessário considerar, contudo, que a formação do professor nesse contexto passa, forçosamente, pela aquisição das ideias matemáticas presentes nesse estudo.

Nessa abordagem, o professor não pode deixar de fazer menção à unidade de medida e à noção da comparação existentes no processo de medir. No trabalho com instrumentos de medição, como a utilização da régua graduada, é possível ao aluno perceber os submúltiplos do metro (decímetro, centímetro e milímetro).

Na utilização deste instrumento de medição, possibilita-se ao aluno o trabalho concomitante com outros tópicos da Geometria, como o estudo dos polígonos, por exemplo. Em seguida, a fita métrica e a trena dão perfeita continuidade aos estudos, por abordarem o metro e, agora, seus múltiplos. Visitas devem ser encorajadas ao pátio da escola no sentido de medir esses espaços.

Nesse sentido, o professor sai da condição de repassador de conteúdo para assumir uma postura mais atuante e reflexiva, como aquela em que percebe o ambiente da sala de aula como um constante laboratório de investigação. Tal percepção encontra apoio na fala de Souza (2005, p.17) quando defende que a "reflexão sobre como as experiências se realizam desempenha um papel fundamental para o desenvolvimento profissional do professor."

As sessões didáticas se propuseram a trabalhar os assuntos abordados, inicialmente, de maneira concreta. Especificamente, na Geometria métrica, foi utilizado o palmo como unidade de medida, visando a subsidiar o entendimento dos elementos necessários na medição: unidade de medida, grandeza a ser medida e número resultante da medida. Posteriormente, o instrumento de medida régua graduada foi amplamente trabalhado.

Essa proposta de trabalho permitiu o acompanhamento da aprendizagem do aluno, de acordo com Douady (1986) de verificar os sujeitos em ação, por se tornar mais próximo do momento real da aula. A viabilização dessas sugestões passa necessariamente pela alteração do atual tempo didático, estabelecido pela comunidade escolar, que propõe o estudo das grandezas geométricas, destinado a três meses letivos no sexto ano. Passa, também, pela devida fundamentação teórica e prática do professor para o trabalho com instrumentos de medição. Outro aspecto importante consiste em reservar, semanalmente, o horário dos estudos destinados à Geometria.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. "Ingénierie didactique". In BRONCKART, J. P. (dirigée). et alii. Didactique des mathématiques - Textes de base en pédagogie. Delachaux et Niestlé S. A.,Lausanne (Switzerland) Paris, 1996.

BORGES NETO, H. CUNHA, F. G. M. & LIMA, I. P. A seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas. GT 19: Educação Matemática - EPENN. São Luís-MA, 2001.

BORGES NETO, H. e DIAS, A. M. I. Desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático no 1º grau e na pré-escola. Cadernos de Pós-Graduação em Educação: Inteligência - enfoques construtivistas para o ensino da leitura e da matemática. v. 2 Fortaleza, CE: Imprensa Universitária/UFC, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, DF: MEC/SEESP, 1997.

BROLEZZI, A.C. A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática. Tese de doutorado em Educação, Universidade de São Paulo-SP, 1996.

CAMPOS, D.M.S. Psicologia da aprendizagem. 31 ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 2001.

CARAÇA, B.J. Conceitos fundamentais da Matemática. 1 ed. Lisboa-Portugal: Livraria Sá da Costa, 1984.

CROSBY, A.W. A mensuração da realidade - A quantificação e a sociedade ocidental

1250-1600. 1 ed. São Paulo-SP: UNESP, 1997.

DOUADY, R. **Un exemple d'Ingéniere Didactique ou sont à l'oeuvre jeux cadres et dialectiqueoutil-objet.** Seminaires de didactique de mathematiques, Année, IRMAR de Rennes 1, 1986.

________ Rapport enseigenement apprentissage: Dialectique outil-objet, jeux de cadres. **Cahier de didactique,** nº 3, 1987.

DUARTE, J. H. **Análise de Situações Didáticas para a Construção do Conceito de Área como Grandeza no Ensino Fundamental.** Dissertação de mestrado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco-Pe, 2002.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 2 ed. Campinas-SP: UNICAMP, 1997.

FACCO, S. R. **Conceito de área – Uma proposta de ensino-aprendizagem.** Dissertação de Mestrado, Pontífice Universidade de São Paulo-SP: 2003.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria** – Comprimento, Área, Volume e Semelhança. 1 ed. Rio de Janeiro-RJ: VITAE, 1991.

LIMA, E.L. **Espaços métricos.** 3 ed. Rio de Janeiro-RJ:IMPA, 1977.

LIMA, Paulo Figueiredo & BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Um Estudo da Noção de Grandeza e Implicações no Ensino Fundamental.** Série Textos de História da Matemática, v. 8. Rio Claro-SP: SBHMAT, 2002.

LÜDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. 6ª reimpressão. São Paulo-SP: E.P.U, 1986.

MACHADO, N.J. **Matemática e realidade.** 3 ed. São Paulo-SP: Cortez, 1987.

MACHADO, S. D. A. "Engenharia Didática". In FRANCHI., A, et alii. **Educação Matemática:** Uma introdução. 1 ed. São Paulo-SP. EDUC, 1999.

MARANHÃO, M. C. S. de A. "Dialética-Ferramenta-Objeto". In FRANCHI, A, et alii. Educação Matemática: Uma introdução. 1 ed. São Paulo-SP. EDUC, 1999.

MIGUEL, Antônio & MIORIM, Maria Ângela. O Ensino de Matemática no Primeiro Grau, 6 ed. São Paulo-SP: Atual, 1986.

PAIS, L. C. Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa. 1 ed. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2001.

PAIS, L. C. "Transposição Didática". In FRANCHI., A, et alii. Educação Matemática: Uma introdução. 1 ed. São Paulo-SP: EDUC, 1999.