



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

Francisco Israel Alves do Nascimento

O modelo do votante majoritário em regimes de baixa e alta desordem

Fortaleza

2019

Francisco Israel Alves do Nascimento

O modelo do votante majoritário em regimes de baixa e alta desordem

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Orientador: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior

Coorientador: Dr. Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho

Fortaleza

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N195m Nascimento, Francisco Israel Alves do.

O modelo do votante majoritário em regimes de baixa e alta desordem / Francisco Israel Alves do Nascimento. – 2019.
67 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Bioquímica, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior.

Coorientação: Prof. Dr. Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho.

1. Sistemas Complexos. 2. Transições de não equilíbrio. 3. Modelo do votante majoritário. 4. Múltiplos estados. I. Título.

CDD 572

Francisco Israel Alves do Nascimento

O modelo do votante majoritário em regimes de baixa e alta desordem

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Aprovada em 19/07/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho (Coorientador)
Instituto de Pesquisa e Estratégia Econômica do Ceará
(IPECE)

Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Dedico este trabalho aos
meus pais que fizeram seu
melhor por mim.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus amigos que foram colaboradores diretos e indiretos e possibilitaram a resiliência deste trabalho. Gostaria de agradecer em especial para Marciel Carvalho, Ludwing Marenco, Jonathan Sales, Wagner Sena, Aurélio Wildson, Aureliano Sancho, Lucas Muniz, Márcio Bastos, Emanuel Fontelles, João Paulo Nogueira, Kaique Bilotta, Felipe Operti, Samuel Morais, Marciano Rufino, José Igor, Miguel Costa, Maria Elinete, Mangangá, Samille Barros, Heloísa Teixeira, Patrícia Monteiro, Emanuel Lima, Carolina Ribeiro, Soraya Moreira Pessoa e Maria Luiza Lima de Souza .

Agradeço aos professores José Soares, Cesar Sampaio e André Auto pela orientação neste projeto.

Agradeço ao CNPq pelo fomento.

“Você sabe que a vida é um tecido fino, pois a qualquer momento pode se rasgar, talvez não seja nada seja só o destino, era simplesmente a hora de tudo acabar.”

POESIA ACÚSTICA #3

Resumo

O presente trabalho tem como proposta estudar transições de fase de não equilíbrio a partir do modelo do votante majoritário com o implemento de ruído descrito por uma distribuição hiperbólica, incorporando assim regimes de baixa e alta desordem. Neste cenário, analisaremos os efeitos dos diferentes níveis de desordem sobre sistemas definidos por múltiplos estados e variando o alcance das interações. Desta forma, nosso espaço de parâmetros é definido em termos do número S de estados, pelo número N_v de vizinhos e pelo parâmetro β que controla o nível de desordem da distribuição de ruídos. Nossa análise concentrou-se em sistemas descritos por $S = 2, 3$ e 4 . A partir de simulações de Monte Carlo e da teoria de escala de sistemas de tamanho finito analisamos a dependência da magnetização (parâmetro de ordem), da suscetibilidade e do cumulante de Binder sobre o espaço de parâmetros do modelo. Para cada valor de S considerado, o modelo descreve uma transição de fase contínua, do tipo ordem-desordem, com os expoentes críticos sendo os mesmos dos respectivos modelos de equilíbrio.

Palavras-chave: Sistemas Complexos. Transições de não equilíbrio. Modelo do votante majoritário. Múltiplos estados.

Abstract

A study of the non-equilibrium phase transition from the majority voter model is presented. A hyperbolic distribution was implemented as the noise of the system in order to create low and high disorder regimes. In this way, we analyse the effects of different levels of disorder over systems defined by multiple states, changing the range of interactions. With this in mind, our parameter space is defined by of the number of states S , the number of neighbors N_v and the parameter β that controls the disorder level on the noise distribution. We concentrate the analysis on systems described by $S = 2, 3$ and 4 . Monte Carlo simulations and finite-size scaling theory were used to compute the dependence of the magnetization (The control parameter), the susceptibility and the Binder's cumulant on the parameter space of the model. We show that for each value of S , the model describes a like order-disorder continuum phase transition where the critical exponents are the same as the ones the correspondent equilibrium models.

Keywords: Complex system. Non-equilibrium phase transitions. Majority voter model. Multiple states.

Lista de Figuras

- 2.1 Diagrama temperatura-pressão da água. As fases da água são separadas pelas linhas de coexistência de dois estados e cada uma ocupa uma região do diagrama. O ponto triplo ($T_0 = 273,16\text{ K}$ e $P_0 = 611,7\text{ Pa}$) é o ponto nas quais os estados sólido, líquido e gasoso coexistem. O Ponto crítico ($T_c = 647,14\text{ K}$ e $P_c = 22,06\text{ MPa}$) é o ponto onde ocorre o desequilíbrio entre as fases líquida e gasosa. p. 19
- 2.2 Simulação do modelo de Ising com simetria *up-down*. Magnetização média em função da temperatura para vários tamanhos de redes. Inicialmente a magnetização é máxima na qual o sistema está completamente ordenado e segue um ordenamento ferromagnético. Com o aumento da temperatura, a desordem do sistema cresce até um estado completamente desordenado e adquire ordenamento paramagnético. Fonte: Disponível em: <http://fig.if.usp.br/lucmod/science/ising2d.pdf>. Acesso em 15 de Novembro de 2018. p. 20
- 2.3 Diagrama do modelo do votante majoritário. O sistema apresenta simetria *up-down* onde os sítios com estado σ_i estão representados em azul (*up*) e vermelho (*down*). p. 25
- 2.4 Magnetização média como função do ruído q para o modelo do votante majoritário em redes quadradas obtidas por simulação numérica para vários valores de L indicados. A linha tracejada indica o valor crítico $q_c = 0,075$ p. 26
- 2.5 Suscetibilidade magnética χ como função de q para o modelo do votante majoritário em redes quadradas obtidas por simulação numérica para vários valores de L indicados. A linha tracejada indica o valor crítico $q_c = 0,075$ p. 26
- 2.6 Distribuição de $P(q, \beta)$ em função do ruído q para diferentes valores de β . O parâmetro de controle β controla largura da distribuição de ruídos como mostrado acima para diferentes valores. p. 31

3.1	Vizinhança de Von Neumann e Moore.	p. 40
4.1	Magnetização $m(\beta)$ em função do passo de Monte Carlo t . Cada passo de Monte Carlo representa N sorteios na rede de tamanho linear $L = 128$, onde cada sítio tem em média uma chance de ser escolhido e após esses N sorteios, calculamos a magnetização do sistema. Calculamos a magnetização média $\langle m(\beta) \rangle$ como função de β na qual obtivemos as médias $\langle m(\beta_1) \rangle = 0,82$ onde há um estado majoritário definido, em $\langle m(\beta_2) \rangle = 0,05$ temos o sistema na região crítica com vários agregados e para $\langle m(\beta_3) \rangle = 0,01$ temos o sistema na fase desordenada.	p. 43
4.2	Instantâneos do modelo do votante majoritário para $S = 2$ estados. A fase desordenada representa a ausência de consenso macroscópico que é caracterizada por baixos valores de β . A região crítica possui agregados devido ao sistema está passando pelo regime de transição de fase que ao atingir o ponto crítico, o sistema apresentará uma transição do tipo ordem-desordem. O estado ordenado representa um consenso entre a comunidade de sítios cujo sistema apresenta uma opinião majoritária (vermelha).	p. 44
4.3	Magnetização $m_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Temos um consenso macroscópico à medida que β aumenta.	p. 44
4.4	Suscetibilidade $\chi_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Temos uma suscetibilidade divergente próxima do ponto crítico.	p. 45
4.5	Cumulante de quarta ordem de Binder $U_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . As curvas se cruzam na estimativa do valor crítico.	p. 45
4.6	Estimativa para o expoente β_e/ν_e em sistemas de dois estados. Magnetização calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $m_L \sim L^{-\beta_e/\nu_e}$, com $\beta_e/\nu_e = 0,124 \pm 0,002$	p. 46
4.7	Estimativa para o expoente γ_e/ν_e em sistemas de dois estados. Suscetibilidade magnética calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $\chi_L \sim L^{\gamma_e/\nu_e}$, com $\gamma_e/\nu_e = 1,70 \pm 0,08$	p. 47

4.8	Colapso dos dados de magnetização m para $S = 2$ estados. Os pontos são obtidos a partir de simulações de Monte Carlo para cinco tamanhos diferentes de L como indicado. Tomamos os valores dos expoentes críticos $\beta_e = 1/8$ e $\nu_e = 1$	p. 48
4.9	Magnetização e suscetibilidade magnética em função de β variando a vizinhança de Von Neumann.	p. 49
4.10	Diagrama de fase do parâmetro de controle em função do número de vizinhos para $S = 2$ estados. A relação entre β versus N_v (figura interna) é descrita por uma lei de potência com expoente $0,65 \pm 0,01$	p. 49
4.11	Instantâneos do modelo do votante majoritário para $S = 3$ estados. O estado desordenado é representado pelo ordenamento paramagnético e possui magnetização nula para valores do parâmetro de controle β abaixo do valor crítico. Na região crítica há agregados entre a comunidade de sítios e o sistema apresenta magnetização próxima de zero. A partir do ponto crítico, o sistema assume uma opinião majoritária e adquire o ordenamento ferromagnético com magnetização não nula.	p. 50
4.12	Estimativa para o expoente β_e/ν_e em sistemas de três estados. Magnetização calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $m_L \sim L^{-\beta_e/\nu_e}$, com $\beta_e/\nu_e = 0,132 \pm 0,003$	p. 51
4.13	Estimativa para o expoente γ_e/ν_e em sistemas de três estados. Suscetibilidade magnética calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $\chi_L \sim L^{\gamma_e/\nu_e}$, com $\gamma_e/\nu_e = 1,73 \pm 0,06$	p. 52
4.14	Diagrama de fase do parâmetro de controle em função do número de vizinhos para $S = 3$ estados. A relação entre β versus N_v (figura interna) é descrita por uma lei de potência com expoente $0,93 \pm 0,01$	p. 53
4.15	Instantâneos do modelo do votante majoritário para $S = 4$ estados. De maneira análoga à $S = 2$ e $S = 3$, na fase desordenada apresenta ordenamento paramagnético com magnetização nula. A região crítica possui agregados devido ao sistema está passando pelo regime de transição de fase que ao atingir o ponto crítico, o sistema apresentará uma transição do tipo ordem-desordem. O estado ordenado representa um consenso entre a comunidade de sítios, cujo sistema apresenta uma opinião majoritária (vermelha).	p. 54

4.16	Estimativa para o expoente β_e/ν_e em sistemas de três estados. Magnetização calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $m_L \sim L^{-\beta_e/\nu_e}$, com $\beta_e/\nu_e = 0,125 \pm 0,005$.	p. 55
4.17	Estimativa para o expoente γ_e/ν_e em sistemas de quatro estados. Suscetibilidade magnética calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $\chi_L \sim L^{\gamma_e/\nu_e}$, com $\gamma_e/\nu_e = 1,75 \pm 0,08$.	p. 55
4.18	Diagrama de fase do parâmetro de controle em função do número de vizinhos para $S = 4$ estados. A relação entre β versus N_v (figura interna) é descrita por uma lei de potência com expoente $0,92 \pm 0,01$.	p. 56
4.19	O valor de β_c é a coordenada das abcissas que é solução para a equação (4.5).	p. 57
4.20	Magnetização $m_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Versão <i>annealing</i> com distribuição de ruídos variáveis com o tempo.	p. 58
4.21	Suscetibilidade $\chi_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Temos uma suscetibilidade divergente próxima do ponto crítico. Versão <i>annealing</i> com distribuição de ruídos variáveis com o tempo.	p. 59
4.22	Cumulante de quarta ordem de Binder $U_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Versão <i>annealing</i> com distribuição de ruídos variáveis com o tempo.	p. 59
4.23	Estimativa para o expoente β_e/ν_e em sistemas de dois estados para a versão <i>annealing</i> . Magnetização calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $m_L \sim L^{-\beta_e/\nu_e}$, com $\beta_e/\nu_e = 0,125 \pm 0,002$.	p. 60
4.24	Colapso dos dados de magnetização m para $S = 2$ estados para a versão <i>annealing</i> . Os pontos são obtidos a partir de simulações de Monte Carlo para cinco tamanhos diferentes de L como indicado. Tomamos os valores dos expoentes críticos $\beta_e = 1/8$ e $\nu_e = 1$.	p. 61
4.25	Magnetização e suscetibilidade magnética em função de β variando a vizinhança de Von Neumann. Versão <i>annealing</i> com distribuição de ruídos variáveis com o tempo.	p. 62

4.26 Diagrama de fase do parâmetro de controle em função do número de vizinhos para $S = 2$ estados para a versão *annealing*. A relação entre β versus N_v (figura interna) é descrita por uma lei de potência com expoente $0,62 \pm 0,03$ p. 62

Lista de Símbolos

q_c	Ruído crítico
β_c	Parâmetro de controle crítico da relação $q_i = \frac{1}{2} \exp [\beta(r_i - 1)]$
k_B	Constante de Boltzmann
β_B	$1/k_B T$
β_e	Expoente crítico associado à magnetização
γ_e	Expoente crítico associado à suscetibilidade magnética
ν_e	Expoente crítico associado ao comprimento de correlação
m	Magnetização média
χ	Suscetibilidade magnética
U	cumulante de quarta ordem de Binder
σ	Variável estocástica associada ao estado do spin/sítio

Sumário

1	Introdução	p. 17
1.1	Estrutura da dissertação	p. 18
2	Referencial Teórico	p. 19
2.1	Transição de fase e criticalidade	p. 19
2.2	Modelo do votante majoritário	p. 22
2.3	O modelo de interesse: sistemas fracamente e fortemente desordenados	p. 28
2.4	Distribuição hiperbólica	p. 30
2.5	Expoentes críticos	p. 32
2.6	O método Monte Carlo	p. 35
3	Metodologia	p. 38
3.1	Topologia da vizinhança	p. 39
3.2	Algoritmo	p. 40
4	Resultados	p. 42
4.1	Sistema de dois estados ($S = 2$)	p. 42
4.1.1	Escala de tamanho finito	p. 46
4.1.2	Variação do tamanho da vizinhança e diagrama de fase	p. 48
4.2	Sistema de três estados ($S = 3$)	p. 50
4.2.1	Escala de tamanho finito	p. 51
4.2.2	Variação do tamanho da vizinhança e diagrama de fase	p. 52
4.3	Sistema de quatro estados ($S = 4$)	p. 53

4.3.1	Escala de tamanho finito	p. 54
4.3.2	Varição do tamanho da vizinhança e diagrama de fase	p. 55
4.4	Análise da dinâmica <i>annealing</i> do modelo de dois estados ($S = 2$)	p. 56
4.4.1	Escala de tamanho finito	p. 59
4.4.2	Varição do tamanho da vizinhança e diagrama de fase	p. 61
5	Conclusão e perspectivas	p. 63
	Referências	p. 65

1 Introdução

A vida cotidiana apresenta muitas situações nas quais é necessário que um grupo alcance decisões compartilhadas. O acordo é importante pois fortalece a posição e amplia a concordância na sociedade. A complexidade como característica inerente do indivíduo implica numa dinâmica de concordância ou discordância não trivial. Físicos estatísticos que trabalham na dinâmica de opinião visam definir os estados de opinião de uma população e os processos elementares que determinam as transições entre esses estados, verificando sempre a verossimilhança de tais procedimentos na tentativa de alcançar novos avanços no entendimento dos processos de formação de opinião [1].

Nesse contexto, a física estatística tem demonstrado ser uma poderosa ferramenta para resolver problemas fora do contexto da física tradicional. É comum aplicarmos seus métodos para resolver problemas nas quais indivíduos fazem parte de grupos que interagem de maneira não linear e desordenada [2, 3]. Exemplos são variados e vão de modelos de opiniões públicas à dinâmica de sistemas biológicos [1, 4]. Temos ainda aplicações em sistemas ecológicos, dinâmica meteorológica, e o estudo da dinâmica de colônias de insetos [5].

Esses exemplos são válidos porque estamos abordando sistemas que evoluem de acordo com um parâmetro, como o tempo por exemplo, e suas interações ocorrem de maneira desordenada e não determinística. Podem também, apresentar comportamento não periódico e seu estado final depende estatisticamente das variáveis e das regras locais utilizadas, ou seja, evoluem a partir de variáveis estocásticas [6]. Em geral tais sistemas não evoluem no tempo a partir de um hamiltoniano, mas sim através de regras probabilísticas que descrevem interações não lineares, sejam caóticas ou estocásticas.

Nesse contexto, para um sistema de física estatística de agentes não interagentes, a isometria é esperada. Isso significa que o sistema é extenso e os observáveis escalonam linearmente com o tamanho do sistema. Ou seja, se dobrarmos o número de partículas, a energia também dobra [7]. Esse efeito também é chamado de alometria no campo da

biologia e atualmente está sendo investigado na sociofísica, por exemplo, na escala com o tamanho das cidades de diferentes indicadores urbanos como atividade tecnológica [8] e indicadores de saúde [9, 10]. Em termos de nosso sistema social de interesse, um sistema extensivo não interativo linear implica que o número de pessoas com as características de interesse deve escalar linearmente com o número de agentes que têm opiniões positivas. Assim, a linearidade é o subproduto da não interação entre os agentes [11].

Em geral, quando trabalhamos com modelos de opiniões temos interesse em modelar um sistema que os agentes possam atingir o consenso. É difícil obter estatísticas diretas sobre a evolução temporal das opiniões individuais em grande escala. Felizmente, grandes dados transversais sobre a distribuição de opiniões de indivíduos sobre diferentes questões específicas estão disponíveis publicamente. Esses dados são obtidos por meio de pesquisas, cada um inquirindo uma ampla amostra de pessoas sobre sua atitude em relação a um assunto específico e oferecendo evidências valiosas sobre a natureza complexa das opiniões públicas. Essas pesquisas apresentam um notável preditor não linear da ascensão das visões de opiniões extremas [11].

1.1 Estrutura da dissertação

Este trabalho tem como objetivo estudar através de simulações de Monte Carlo e de processos estocásticos markovianos o modelo do votante majoritário para múltiplos estados com uma proposta de ruído que segue uma distribuição hiperbólica $q_i = \frac{1}{2} \exp[\beta(r_i - 1)]$ com *cutoff* $q_i \in [e^{-\beta}/2, 1/2]$, onde $\beta > 0$ é o parâmetro de controle do sistema e r_i é um número aleatório distribuído uniformemente no intervalo $r_i \in [0, 1]$.

Para melhor compreensão dos aspectos envolvidos, apresentaremos na fundamentação (capítulo 2) o estudo das transições de fase e como adotamos os parâmetros que caracterizam as estruturas dos sistemas em questão. Posteriormente, vamos abordar o modelo do votante majoritário e descrever como simular sua dinâmica (seção 2.2). Em seguida abordaremos nossa contribuição principal que é a distribuição de ruídos hiperbólica independente para cada sítio.

Descreveremos também, como foram os métodos aplicados nesse trabalho (capítulo 3) e como analisar os resultados da nossa contribuição (capítulo 4). Com essa abordagem pretendemos também verificar se os expoentes críticos satisfazem a classe de universalidade do modelo de Ising e Potts em redes quadradas de tamanho linear L onde apresentaremos os resultados obtidos através do método *finite-size scaling*.

2 Referencial Teórico

2.1 Transição de fase e criticalidade

A água quando aquecida a pressão constante, entra em ebulição a uma temperatura bem definida, transformando-se em vapor. A cada valor da pressão que a água está submetida, corresponde uma temperatura de ebulição. Em um diagrama temperatura-pressão (Figura 2.1), a transição líquido-vapor é representada por uma linha que possui uma inclinação positiva, pois a temperatura de transição cresce com o aumento da pressão. Sobre a linha de transição, o líquido e o vapor coexistem em quaisquer proporções. Entretanto, o líquido e o vapor apresentam densidades bem definidas que dependem apenas da temperatura de transição.

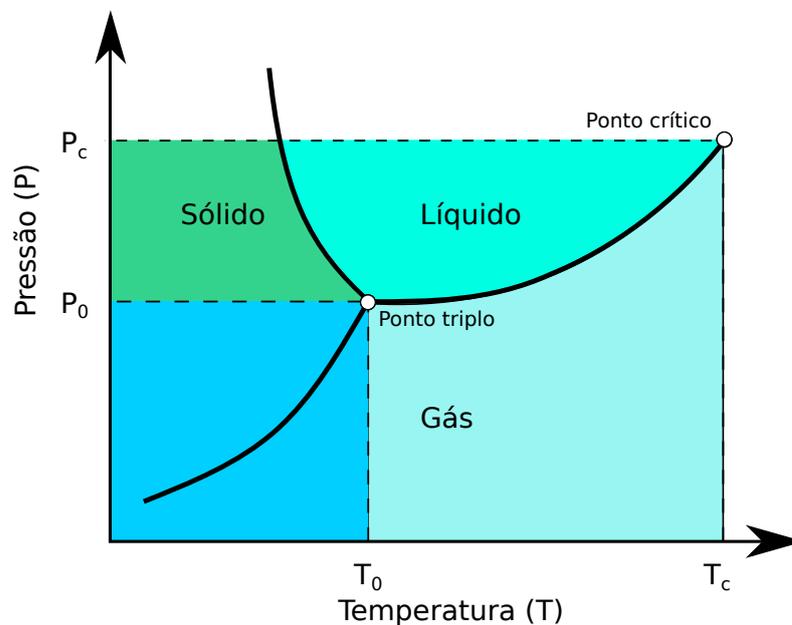


Figura 2.1: Diagrama temperatura-pressão da água. As fases da água são separadas pelas linhas de coexistência de dois estados e cada uma ocupa uma região do diagrama. O ponto triplo ($T_0 = 273,16 \text{ K}$ e $P_0 = 611,7 \text{ Pa}$) é o ponto nas quais os estados sólido, líquido e gasoso coexistem. O Ponto crítico ($T_c = 647,14 \text{ K}$ e $P_c = 22,06 \text{ MPa}$) é o ponto onde ocorre o desequilíbrio entre as fases líquida e gasosa.

À medida que aumentamos a temperatura, ao longo da linha de coexistência, a diferença entre a densidade do líquido e do vapor torna-se cada vez menor e se anula, em um ponto caracterizado por uma temperatura e uma pressão bem definidas. A partir desse ponto, denominado ponto crítico, o líquido e o vapor tornam-se indistintos e a linha de coexistência tem seu término. Além desse ponto, não há mais distinção entre a fase líquida e a fase gasosa.

Outros tipos de transições de fase ocorrem em física da matéria condensada. Temos uma transição do tipo ordem-desordem em sistemas com simetria ferro-paramagnética como no modelo do Ising [12], quando o sistema é aquecido, perde sua magnetização espontânea a uma temperatura bem definida, denominada temperatura de Curie, tornando-se paramagnético, como mostrado na Figura 2.2. Nessa fase paramagnética, o sistema só adquire magnetização quando sujeito a um campo magnético externo. Quando o campo é retirado, a magnetização se anula. Na fase ferromagnética, ao contrário, a magnetização permanece depois de retirar o campo magnético.

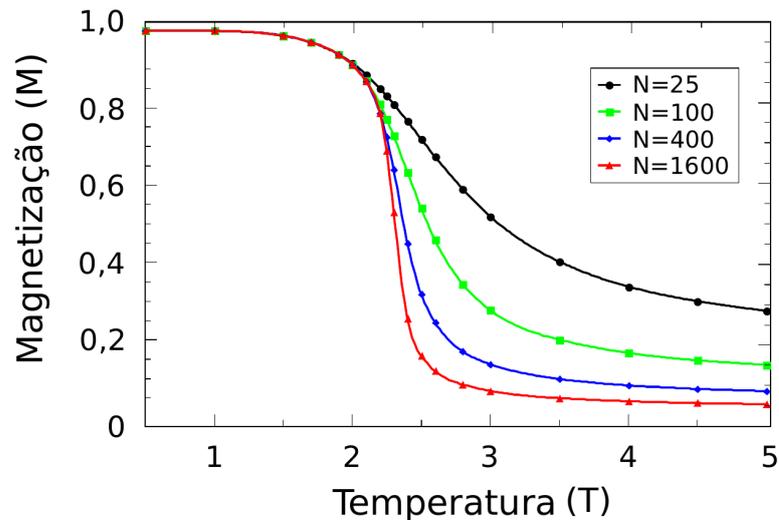


Figura 2.2: Simulação do modelo de Ising com simetria *up-down*. Magnetização média em função da temperatura para vários tamanhos de redes. Inicialmente a magnetização é máxima na qual o sistema está completamente ordenado e segue um ordenamento ferromagnético. Com o aumento da temperatura, a desordem do sistema cresce até um estado completamente desordenado e adquire ordenamento paramagnético. Fonte: Disponível em: <http://fig.if.usp.br/lucmod/science/ising2d.pdf>. Acesso em 15 de Novembro de 2018.

Em temperaturas muito abaixo do valor crítico, é pouco provável que os spins mudem de orientação, mas com o aumento da temperatura, é mais provável que alguns spins mudam de sentido ao passar pela temperatura crítica T_c , o sistema tende a anular a magnetização total. Observando a Figura 2.2, percebemos o efeito de tamanho finito do

sistema, à medida que aumentamos o número de agentes N , a curva fica mais acentuada na temperatura crítica. Esta simulação mostra a transição de fase do sistema que estava inicialmente no estado ferromagnético e ao passar por T_c torna-se paramagnético.

Outro exemplo de transição de fase do tipo ordem-desordem é o da liga zinco-cobre. Quando uma estrutura composta por duas sub-redes, sub-rede A (cobre) e sub-rede B (zinco), está submetida a diferentes variações de temperaturas os átomos de cada sub-rede são encontrados em locais distintos de acordo com a temperatura. Em temperaturas baixas, os átomos de cobre se localizam preferencialmente em uma das sub-redes, enquanto os átomos de zinco se localizam preferencialmente na outra. Em temperaturas altas, entretanto, ambos os átomos podem ser encontrados em qualquer sub-rede. Aumentando a temperatura, a liga passa de uma fase ordenada para uma fase desordenada ao atingir a temperatura crítica. Abaixo da temperatura crítica, podem ocorrer dois estados ordenados. Em um deles os átomos de zinco se localizam com maior probabilidade na sub-rede A , e no outro estado, na sub-rede B . Acima da temperatura crítica, há um único estado tal que um átomo de zinco possui igual probabilidade de ser encontrado em qualquer sub-rede. A simetria é maior na fase desordenada, e menor na fase ordenada. Assim quando diminui a temperatura a partir da fase desordenada, há uma quebra espontânea de simetria que ocorre na temperatura crítica [13].

As transições podem ser classificadas como primeira ou segunda ordem. Essa classificação vem do número de derivadas da energia livre $F = -k_B T \ln Z$ que precisamos antes verificarmos um comportamento descontínuo. Para a descrição das transições de fase, é também conveniente introduzir a grandeza denominada parâmetro de ordem, cuja propriedade mais importante é assumir o valor nulo na fase desordenada, ou de maior simetria, e o valor não nulo na fase ordenada, ou de menor simetria. Na transição líquido-vapor, podemos defini-lo como a diferença entre as densidades da água (Figura 2.1). Em simetrias que apresentam ferromagnetismo, o parâmetro de ordem é simplesmente a magnetização, denominada espontânea ou remanente (Figura 2.2). Na liga binária discutida no último exemplo, podemos definir o parâmetro de ordem como a diferença entre as concentrações do zinco nas duas sub-redes. Em todos os três sistemas discutidos acima, o parâmetro de ordem se anula a temperaturas acima da temperatura crítica [13].

2.2 Modelo do votante majoritário

O modelo do votante ou modelo do eleitor (*voter model*) foi assim denominado pela interpretação de suas regras em termos de dinâmica de opinião e por sua definição extremamente simples. O modelo foi minuciosamente investigado em campos distintos das dinâmicas sociais, como na teoria da probabilidade e a genética populacional [1]. A dinâmica eleitoral foi primeiramente considerada por Clifford e Sudbury (1973) [14] como um modelo para a competição de espécies e denominada “modelo eleitoral” por Holley e Liggett (1975) [15, 16].

Contudo, apesar da abrangência do modelo, o desenvolvimento da dinâmica de opinião até agora tem sido descoordenado e baseado em tentativas individuais, onde os mecanismos sociais considerados razoáveis se transformaram em regras matemáticas, sem uma estrutura geral compartilhada e muitas vezes sem referência a estudos sociológicos reais [1]. A primeira dinâmica de opinião projetada por um físico foi o modelo proposto por Weidlich (1971)[17], seu modelo foi baseado na estrutura probabilística da sociodinâmica, que ficou conhecida pelas primeiras contribuições dos físicos para o estudo dos sistemas sociais, esta foi a introdução de métodos e ferramentas provenientes da teoria de sistemas dinâmicos e dinâmica não linear [18, 19, 20].

A partir dessa abordagem, o modelo do votante majoritário é um modelo estocástico definido num reticulado, possui simetria de inversão e apresenta uma transição de fase do tipo ordem-desordem. Imagine uma comunidade de indivíduos em que cada um possui uma opinião sobre determinado assunto, colocando-se de forma favorável ou contrária ao tema em debate. Com o passar do tempo, os indivíduos vão mudando de opinião de acordo com o que pensam seus vizinhos. Numa comunidade receptiva, um indivíduo passa a ser contra se a maioria for contra. Entretanto, estamos diante de uma comunidade de indivíduos hesitantes, isto é, que às vezes agem contrariamente à opinião da maioria. Assim, introduzimos um parâmetro positivo q que dá a medida de hesitação dos indivíduos e que é entendido como a probabilidade de um determinado indivíduo optar pela opinião contrária à da maioria [21].

Para construir um modelo que descreve tal comunidade, imaginamos que os indivíduos estejam localizados nos sítios de uma rede regular. A cada sítio i associamos uma variável estocástica σ_i que toma o valor $+1$, caso o indivíduo localizado em i seja a favor, e o valor -1 , caso ele seja contra, isso é uma convenção para um modelo que admite $S = 2$ estados possíveis.

Para descrever de forma analítica tal modelo, utilizamos a equação mestra (2.1). Para esse modelo, temos uma equação diferencial fenomenológica de primeira ordem que descreve a probabilidade de uma determinada configuração $\{\sigma\}$ acontecer dentre as configurações possíveis em um sistema, tal que

$$\frac{d}{dt}P(\{\sigma\}, t) = \sum_{\substack{\text{sítios} \\ i=1}}^N [w_i(\{\sigma\}_i)P(\{\sigma\}_i, t) - w_i(\{\sigma\})P(\{\sigma\}, t)], \quad (2.1)$$

onde $\{\sigma\}_i$ é o estado idêntico a $\{\sigma\}$ com exceção do sítio i que é invertido, $w_i\{\sigma\}$ e $w_i\{\sigma\}_i$ são as taxas de inversão, ou seja, são as taxas de transição do estado $\{\sigma\}$ para o estado $\{\sigma\}_i$ e vice-versa. $P\{\sigma\}_i$ é a probabilidade de encontrar o sistema em uma determinada configuração $\{\sigma\}_i$. O produto $w_i(\{\sigma\}_i)P(\{\sigma\}_i, t)$ determina o fluxo de probabilidade de passar de uma configuração $\{\sigma\}_i$ para $\{\sigma\}$ e $w_i(\{\sigma\})P(\{\sigma\}, t)$ o fluxo de probabilidade de retornar de uma $\{\sigma\}$ para $\{\sigma\}_i$.

A taxa de inversão para o estado de um sítio, que significa a probabilidade do indivíduo mudar de opinião [16], é dada por

$$w_i\{\sigma\} = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - q)\sigma_i f \left(\sum_{\substack{\langle j \rangle \\ \text{vizinhos de } i}} \sigma_j \right) \right], \quad (2.2)$$

onde $f(x) = -1, 0, +1$, caso $x < 0$, $x = 0$ e $x > 0$, respectivamente. A soma se estende sobre os vizinhos de sítios i . O parâmetro $(1 - q)$ é está restrito entre o intervalo $0 \leq (1 - q) \leq 1$. Note que, se fizermos a transformação $\sigma \rightarrow -\sigma$, a taxa de inversão (equação (2.2)) permanece invariante, isto é, $w_i(-\sigma) = w_i(\sigma)$. A taxa de inversão para $q_i = 0$ corresponde ao modelo de Ising a temperatura $T = 0$, que exhibe simetria sobre mudança de estados das variáveis. Para $q_i = q \neq 0$, o modelo homogêneo, a simetria $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ ainda é válida desde que também mudemos $q \rightarrow (1 - q)$.

O modelo estudado neste trabalho consiste de uma rede quadrada $N = L^2$ com condições de contorno periódicas. O sítio posicionado no local i na rede interage igualmente com seus j vizinhos mais próximos e, como resultado dessa interação, assume o estado da maioria dos seus spins com probabilidade $1 - q_i$ e o estado oposto com probabilidade q_i .

O parâmetro q é denominado parâmetro de ruído, pois descreve a possibilidade de um dado sítio assumir uma opinião contrária a da maioria dos vizinhos. Para uma rede quadrada com interações de primeiros vizinhos, Oliveira (1992) [22] verificou que esse modelo descreve uma transição contínua para um valor de $q = q_c = 0,075 \pm 0,001$,

denominado ruído crítico. Neste sistema, o autor considerou que todos os sítios tinham o mesmo valor de ruído. Desta forma, a distribuição de ruído era descrita por uma função delta de Dirac do tipo $\pi(q) = \delta(q - q')$.

Vilela *et al* (2012) [23] considerou uma distribuição bimodal de ruído $\pi(q) = f\delta(q') + (1 - f)\delta(q' - q)$ para o modelo do votante majoritário. Aqui f é a fração de sítios com ruído nulo, isto é, temos Nf sítios escolhidos aleatoriamente com $q' = 0$, enquanto os $N(1 - f)$ sítios restantes têm ruído $q' = q$. A introdução de desordem no parâmetro ruído não altera o comportamento crítico de Ising do sistema. Para este trabalho, os autores encontraram o ruído crítico $q_c(f = 0,10) = 0,0846 \pm 0,0001$ com o intuito de obter o diagrama de fases e expoentes críticos que caracterizam as transições de fase contínuas e a relação da fração de ruídos f de acordo com a desordem do sistema.

O modelo do votante também foi estudado para diferentes topologias, como em redes de Kleinberg [24, 25], em redes aleatórias [26], com diferentes configurações de vizinhos [27, 28] e para diferentes número do estados [29, 30].

A simulação do modelo do votante majoritário é realizada da seguinte forma. Consideramos um reticulado de tamanho linear L com condições de contorno periódicas, a cada intervalo de tempo, sorteamos um sítio i como mostrado na Figura 2.3a e olhamos para sua vizinhança, Figura 2.3b. Se a função sinal $S(x) = +1$, Figura 2.3c, o sítio escolhido mudará com probabilidade igual a p e assumirá o estado da maioria que estará positiva ou hesitará com probabilidade $1 - p$, e assumirá o estado da minoria, essa probabilidade de hesitar é o ruído do sistema. De maneira análoga, se a função sinal é negativa $S(x) = -1$, Figura (2.3d), significa que a vizinhança tem maioria negativa e com probabilidade p o sítio assumirá o estado da maioria e q da minoria. Caso a função sinal tenha valor nulo, $S(x) = 0$, Figura 2.3e, significa que ocorreu um empate e temos que sortear com igual probabilidade qual estado o sítio i assumirá.

Na Figura 2.3 temos uma rede de tamanho linear $L = 3$ e número de sítios $N = 9$, com condições contorno periódicas. Isso significa que os sítios da borda têm seus vizinhos na extremidade oposta da rede, por exemplo, o vizinho da esquerda de a_{11} é o sítio a_{13} , e o vizinho que está abaixo do sítio a_{33} é o sítio a_{13} . Quando é sorteado um sítio da rede (a_{22}), é somado o sinal dos estados de seus $j = 4$ vizinhos para saber qual a maioria predominante como prescrito na soma da equação (2.2).

Seguindo esta mesma dinâmica, podemos convencionar que as variáveis estocásticas tenham valores $\sigma_i = 1, 2, \dots, N$ e propor que o modelo do votante seja válido para $S = N$ estados. Basta que selecionado um sítio, observemos sua vizinhança com probabilidade p

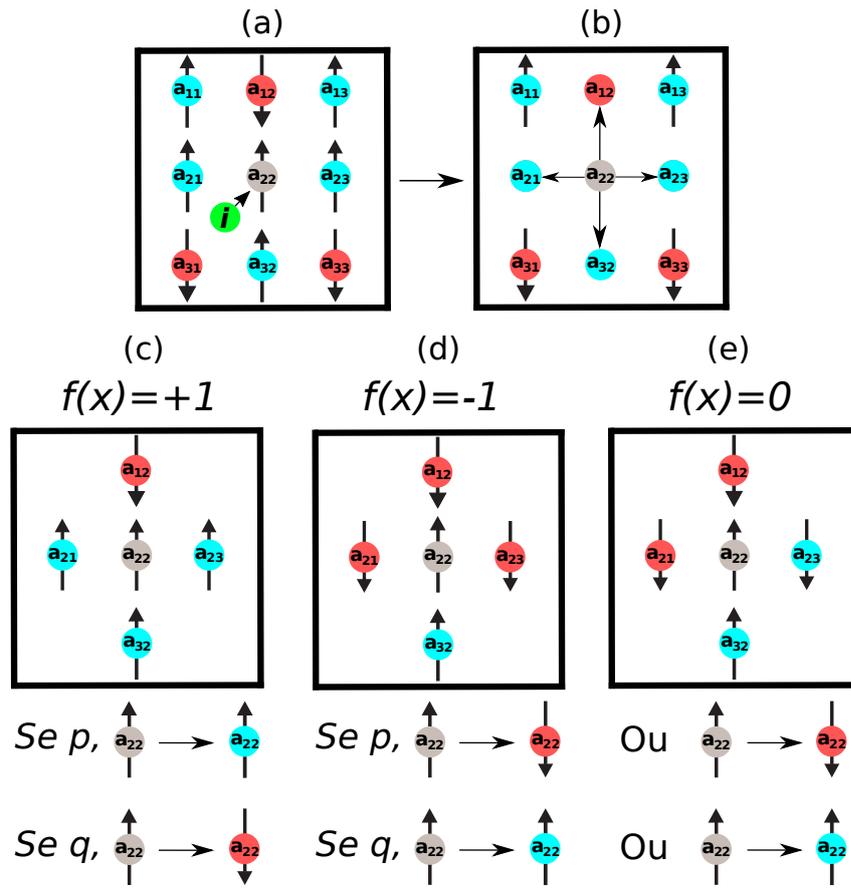


Figura 2.3: Diagrama do modelo do votante majoritário. O sistema apresenta simetria *up-down* onde os sítios com estado σ_i estão representados em azul (*up*) e vermelho (*down*).

ou q de virar com a maioria ou minoria, respectivamente, e em caso de empate sorteamos com igual probabilidade entre os estados que estão empatados.

As Figuras 2.4 e 2.5 mostram resultados obtidos por simulação numérica para a magnetização média e variância da magnetização no modelo do votante majoritário para primeiros vizinhos do sítio i para $S = 2$.

A Figura 2.4 foi obtida usando como referência o modelo proposto por Oliveira (1992) [22] na qual temos a magnetização média que é importante pois representa o parâmetro de ordem do sistema, assumindo valor nulo na fase desordenada (maior simetria) e valor não nulo na fase ordenada (menor simetria). A magnetização traz uma informação a respeito do estado do sistema, ou seja, com magnetização máxima, significa que os indivíduos da rede atingiram o consenso macroscópico e com magnetização nula, não existe um consenso. Para calculá-la (com estados *up-down*) é necessário a seguinte relação

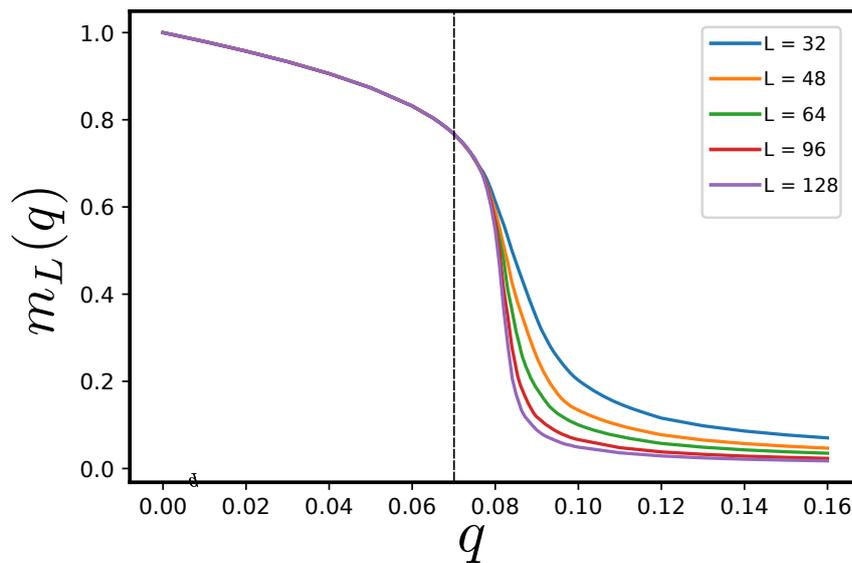


Figura 2.4: Magnetização média como função do ruído q para o modelo do votante majoritário em redes quadradas obtidas por simulação numérica para vários valores de L indicados. A linha tracejada indica o valor crítico $q_c = 0,075$.

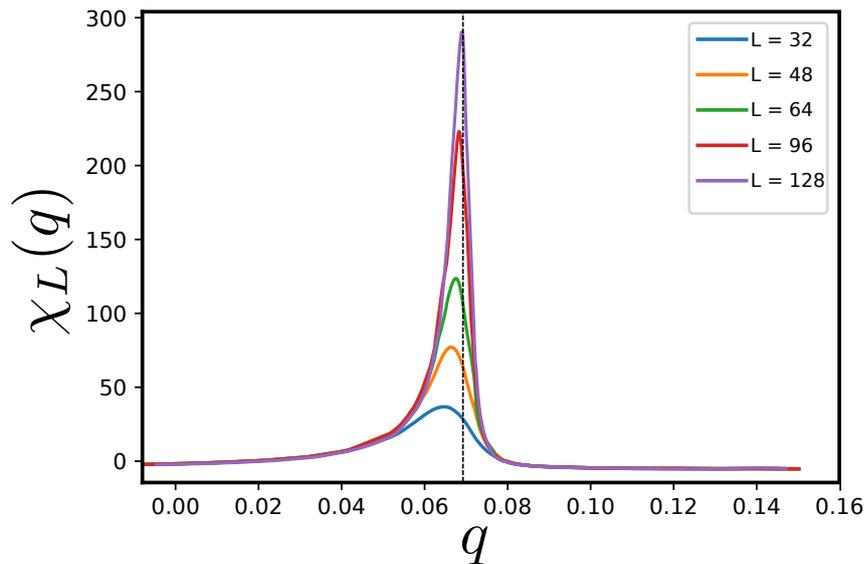


Figura 2.5: Suscetibilidade magnética χ como função de q para o modelo do votante majoritário em redes quadradas obtidas por simulação numérica para vários valores de L indicados. A linha tracejada indica o valor crítico $q_c = 0,075$.

$$m_{\{\sigma\}} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N \sigma_n \right|, \quad (2.3)$$

que é a média da soma sobre os estados da configuração $\{\sigma\}$ e temos o valor absoluto pois o sistema apresenta simetria *up-down* e podem existir os estados com magnetização máxima $+1$ e mínima -1 . A variância da magnetização (susceptibilidade magnética) (Figura 2.5) é

outro parâmetro importante pois para o caso de transições de segunda ordem é divergente no ponto crítico e é descrita da seguinte forma

$$\chi = N [\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2]. \quad (2.4)$$

No regime estacionário, e de forma análoga ao que acontece com o modelo de Glauber-Ising, o modelo do votante majoritário exhibe uma transição de fase em duas ou mais dimensões [21]. Para pequenos valores de q , o modelo apresenta uma fase ferromagnética caracterizada pela presença de uma maioria de indivíduos com uma determinada opinião. Acima do valor crítico q_c , o modelo apresenta um estado paramagnético com um número igual, em média, de indivíduos à favor e contra.

Os resultados de simulações numéricas do modelo do votante majoritário na rede quadrada indicam que o comportamento crítico é o mesmo de Glauber-Ising, o que nos leva à afirmação que estão na mesma classe universalidade [31]. Contudo, o modelo de Glauber-Ising é reversível no estado estacionário, no entanto o modelo do votante não é. A semelhança entre o comportamento crítico dos dois modelos deve-se ao fato que ambos possuem simetria de inversão, ou seja, $P\{\sigma\} = P\{-\sigma\}$.

A ausência de reversibilidade microscópica no modelo do votante majoritário pode ser vista da seguinte forma. Podemos partir de uma sequência de estados que possam ser percorridos na ordem direta e na ordem reversa. Se a probabilidade de ocorrência da sequência direta for igual da sequência reversa, para qualquer sequência, então o modelo apresenta reversibilidade microscópica. Caso contrário, então o modelo não apresenta reversibilidade microscópica [21].

Vamos considerar a sequência de quatro estados A , B , C e D , como mostrado abaixo. Apenas os sítios centrais são modificados quando se passa de um estado para o outro, enquanto os outros sítios permanecem invariantes [21].

$$A = \begin{bmatrix} & + & + & \\ + & + & + & - \\ & + & + & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} & + & + & \\ + & + & - & - \\ & + & + & \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & + & + & \\ + & - & - & - \\ & + & + & \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} & + & + & \\ + & - & + & - \\ & + & + & \end{bmatrix}$$

De acordo com as probabilidades de transição, a probabilidade de ocorrência de trajetória

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ é dada por

$$(q) \left(\frac{1}{2} \right) (p)(q)P(A) = \frac{1}{2}pq^2P(A), \quad (2.5)$$

em que $P(A)$ é a probabilidade do estado A no regime estacionário, e a de reversa $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ é dada por

$$(p)(q) \left(\frac{1}{2} \right) (p)P(A) = \frac{1}{2}p^2qP(A). \quad (2.6)$$

A partir desta demonstração e comparando as duas expressões, vemos que elas são diferentes e, por tanto, a reversibilidade microscópica não é observada. Ou seja, o modelo possui regras locais irreversíveis, que não obedecem ao balanço detalhado [21].

Contudo, o modelo do votante possui duas propriedades fundamentais. A primeira é que o modelo possui simetria de inversão. Invertendo todas as variáveis, isto é, executando a transformação $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$, vemos que a taxa de inversão (equação (2.2)) permanece invariante. A segunda propriedade é que esta taxa possui dois estados absorventes em $q = 0$. Um deles é tal que $\sigma_i = 1$ e o outro é $\sigma_i = -1$, ambos para todos os sítios. Um estado absorvente é aquele que pode ser atingido a partir de outros estados, mas as transições dele para outros estados são proibidas. Uma vez que o sistema tenha atingido um estado absorvente, o sistema não sai. Ou seja, nesse momento a taxa de inversão será nula. Um estado absorvente corresponde ao consenso do sistema e será sempre atingido para uma ou duas dimensões. Quando temos três ou mais dimensões o consenso não pode ocorrer, já que nesses casos há outros estados estacionários além dos absorventes [21].

2.3 O modelo de interesse: sistemas fracamente e fortemente desordenados

A simulação do modelo do votante definido pela equação (2.1) é realizada pela discretização temporal, transformando o processo markoviano em tempo contínuo numa cadeia de Markov. Para ser considerado um processo markoviano é necessário que uma probabilidade condicional de um evento qualquer ocorrer, com determinado valor num determinado instante de tempo, seja dependente apenas do valor que ela tenha tomado num instante de tempo anterior, ou seja, um processo estocástico markoviano fica completamente definido pela probabilidade transição e pela configuração inicial [21].

Com essa finalidade, discretizamos o tempo em Δt e escrevemos a taxa de transição

na forma

$$p_i(\sigma) = \frac{1}{\alpha} w_i(\sigma), \quad (2.7)$$

em que α é o parâmetro que define a escala temporal e escolhido tal que $0 \leq p_i \leq 1$, o que é sempre possível. A probabilidade condicional $T(\sigma^i, \sigma) = (\alpha/\Delta t)p_i(\sigma)$ relativa à transição de $\sigma \rightarrow \sigma^i$ é construída escolhendo $\Delta t = \alpha N$, o que nos conduz à formula

$$T(\sigma^i, \sigma) = \frac{1}{N} p_i(\alpha), \quad (2.8)$$

em que

$$\sigma^i = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N), \quad (2.9)$$

que representa a configuração global do sistema. O processo markoviano é realizado de acordo com a fórmula (2.8), interpretada como o produto de duas probabilidades correspondentes a processos independentes da seguinte maneira: a) a cada intervalo de tempo, escolhemos um sítio aleatoriamente, o que ocorre com probabilidade $1/N$; b) o estado do sítio escolhido se modifica com probabilidade p_i [21].

A matriz $T(\sigma^i, \sigma)$ apresenta duas propriedades fundamentais uma delas é que

$$T(\sigma^i, \sigma) \geq 0, \quad (2.10)$$

ou seja, deve ter elementos não nulos pois $T(\sigma^i, \sigma)$ representa uma probabilidade condicional e

$$\sum_{\sigma^i} T(\sigma^i, \sigma) = 1, \quad (2.11)$$

pois ela deve está normalizada. Ou seja, os elementos da matriz T devem ser não negativos e a soma dos elementos de uma coluna qualquer deve ser igual a unidade.

Em simulações numéricas é conveniente definir uma unidade de tempo, que denominados passo de Monte Carlo, como sendo igual ao intervalo de tempo decorrido em N escolhas de sítios. Portanto, um passo de Monte Carlo é igual a $\Delta t/N = \alpha$. Essa definição é apropriada para comparar resultados de simulações de sistemas provenientes de sistemas de tamanhos distintos pois dessa definição decorre que em n passos de Monte Carlo cada sítio terá sido escolhido n vezes em média, independente do tamanho do sistema.

2.4 Distribuição hiperbólica

Sabe-se que os decaimentos em leis de potência, sejam em função do espaço ou do tempo, aparecem em pontos críticos de transições de fase de segunda ordem. Essas transições são também chamadas de transições de fase contínuas. Estas são caracterizadas por uma suscetibilidade divergente que seguem leis de potência próximo à criticalidade [32]. A função de distribuição de probabilidade $P(q)$ do número q é tomada como uma lei de potência,

$$P(q) \propto \frac{1}{q^\alpha}. \quad (2.12)$$

Para um caso particular vamos considerar $\alpha = 1$. Isso significa que temos uma distribuição de ruído $P(q)$ na forma hiperbólica tal que

$$P(q) \propto \frac{1}{q}. \quad (2.13)$$

Para a distribuição ser normalizável vamos considerar $q_{min} = \exp(-\beta)$ e $q_{max} = 1$, logo temos os limites de integração e podemos calcular a seguinte integral,

$$1 = \int_{q_{min}}^{q_{max}} P(q) dq \quad (2.14)$$

$$1 = \int_{q_{min}}^{q_{max}} \left[C \frac{1}{q} \right] dq = C \ln q \Big|_{q_{min}}^{q_{max}} \quad (2.15)$$

$$1 = C(0 - \ln q_{min}) = -C \ln q_{min} = -C \ln [\exp(-\beta)] \Rightarrow 1 = \beta C, \quad (2.16)$$

onde C é a constante de proporcionalidade que normaliza a distribuição hiperbólica no dado intervalo. Além disso, por conveniência, se considerarmos a transformação fundamental das leis de probabilidade obtemos

$$|P(q')dq'| = |P(r')dr'|. \quad (2.17)$$

Podemos supor que $P(r')$ seja uma distribuição uniforme, isto é, $P(r') = 1$. Dessa forma temos

$$\int_{q_{min}}^q \left[\frac{1}{\beta q'} \right] dq' = \int_0^r dr' \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\beta} \ln q' \Big|_{q_{min}}^q = r, \quad (2.19)$$

lembrando que $q_{min} = \exp(-\beta)$,

$$\ln q - \ln [\exp(-\beta)] = \beta r, \quad (2.20)$$

obtemos a expressão para o ruído

$$q = \exp[\beta(r - 1)], \quad (2.21)$$

onde dado um valor aleatório r distribuído uniformemente no intervalo $[0, 1]$, assim teremos um outro valor aleatório q distribuído em lei de potência, com o expoente $\alpha = 1$, temos uma distribuição hiperbólica. O grau de desordem do sistema é controlado pelo parâmetro $\beta > 0$, posto que esse parâmetro governa a largura da distribuição de ruídos. Um parâmetro de controle é uma medida do grau de ordem entre os limites de um sistema de transição de fase. Na Figura 2.6 é possível verificar como se comporta a distribuição $P(q, \beta)$ em função da desordem do sistema e do parâmetro de controle.

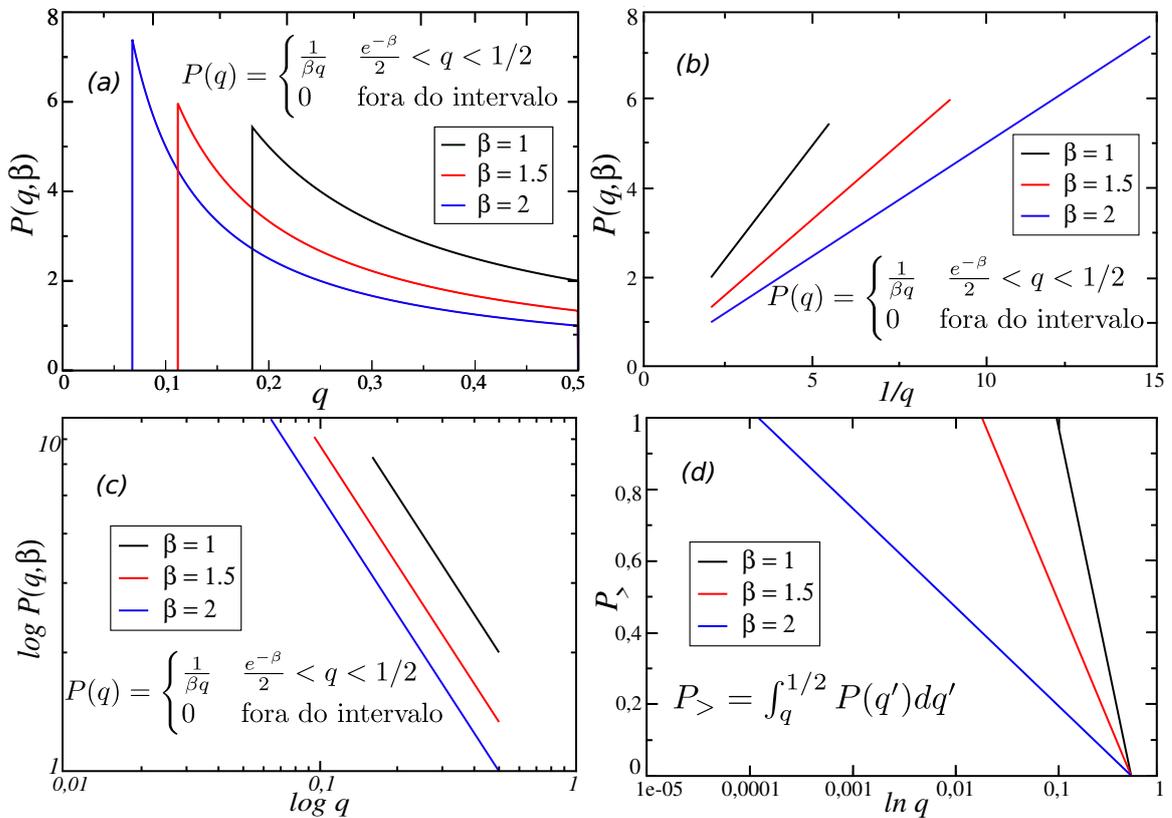


Figura 2.6: Distribuição de $P(q, \beta)$ em função do ruído q para diferentes valores de β . O parâmetro de controle β controla largura da distribuição de ruídos como mostrado acima para diferentes valores.

Na Figura 2.6a, temos a distribuição $P(q, \beta)$ para diferentes valores de β , à medida que aumentamos esse parâmetro, a distribuição do ruídos q se torna mais espaçada e fica menos provável encontrar sítios com ruídos altos. Na Figura 2.6b, temos o caráter linear da distribuição $P(q, \beta)$ em função do $1/q$ dada a mesma região de intervalo que Figura 2.6a. Na Figura 2.6c temos o gráfico na escala log-log com ambas as curvas com a mesma inclinação e na Figura 2.6d temos a distribuição cumulativa $P_{>}$ que representa

a probabilidade de encontrar um dado sítio com o ruído maior que o ruído para β fixado, ou seja, à medida que β cresce, menor é a probabilidade de encontrar um sítio com ruído alto.

A adoção deste intervalo $q \in [0, 0.5]$ tem motivação no caráter das transições de fase muitas que vezes envolvem quebra espontânea de simetria, e estas também possibilitam dois ordenamentos como ferromagnético e antiferromagnético, considerando o intervalo de $q \in [0, 1]$, que será discutido na Metodologia (capítulo 3). No modelo do votante partindo de um intervalo do ruído $q \in [0, 0.5]$ temos um alinhamento ferromagnético onde no estado ordenado todos os spins têm a mesma orientação. Mas para o ruído $q \in [0.5, 1]$ temos um caso de um alinhamento antiferromagnético e os spins alternam a orientação entre *up* e *down*. Essa orientação influencia na forma como calculamos a magnetização do sistema. Quando consideramos o regime ferromagnético calculamos a densidade da magnetização (para simetria *up-down*) da seguinte forma

$$\langle m \rangle = \frac{|\sum_i \sigma_i|}{N}, \quad (2.22)$$

onde σ_i é o estado do i -ésimo sítio, o valor absoluto na equação (2.22) garante que o valor da densidade da magnetização estará limitado entre 0 e 1. Já para o regime antiferromagnético temos

$$\langle m \rangle = \frac{|\sum_{i(\text{par})} \sigma_i - \sum_{i(\text{impar})} \sigma_i|}{N}, \quad (2.23)$$

sendo feita a soma sobre os sítios pares e ímpares separadamente, pois esses se alinham alternadamente para baixo e para cima o que tornaria a magnetização nula no estado ordenado. Para evitar esse conflito, podemos delimitar que o ruído será $q \in [0, 0.5]$ com a expressão $q = \frac{1}{2} \exp[\beta(r - 1)]$ que pode ser substituída na seção (3.2) e a discutiremos mais detalhes no capítulo 3.

2.5 Expoentes críticos

As diversas grandezas que caracterizam um sistema que exhibe um ponto crítico, como magnetização e suscetibilidade, se comportam em torno desse ponto de acordo com leis de potência e são caracterizadas por expoentes críticos característicos. Esses expoentes caracterizam a classe de universalidade e assumem seus valores a partir de propriedades termodinâmicas em sistemas que ocorrem as transições de fase [26, 33, 34].

Essa igualdade entre expoentes de sistemas distintos é uma manifestação do *princípio da universalidade do comportamento crítico* como previsto pela conjectura de Grinstein

(1985) [31]. De acordo com esse princípio, o comportamento crítico de um número pequeno de propriedades depende exclusivamente da dimensionalidade do sistema, da dimensionalidade do parâmetro de ordem e da simetria. Ou seja, todos os sistemas que têm essas propriedades devem possuir os mesmos expoentes críticos independente de qual seja a natureza física do sistema. O conjunto desses sistemas forma a classe de universalidade. Deve-se acrescentar ainda que as propriedades universais não dependem dos detalhes da interação microscópica, desde que ela seja de curto alcance, ou dos detalhes da taxa de inversão, desde que ela envolva sítios que se encontrem dentro de uma pequena vizinhança.

Os expoentes críticos são interessantes também, devido ao fato que sistemas distintos podem apresentar os mesmos expoentes críticos e assim, pertencerem a uma mesma classe de universalidade como o modelo de Ising e o modelo do votante majoritário, por exemplo.

Nesse último, é definido um parâmetro adimensional, denominado ruído q do sistema, com a finalidade de relacionar algumas grandezas como será visto posteriormente, a partir disso, façamos a seguinte relação

$$\varepsilon = q - q_c, \quad (2.24)$$

que é uma medida da distância da variável q ao ponto crítico que tem valor fixo. Assim, o expoente crítico associado a uma função termodinâmica $f(\varepsilon)$ é definido como

$$\lambda_e \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln |f(\varepsilon)|}{\ln |\varepsilon|} \quad (2.25)$$

desde que o limite exista. A forma mais usual de explicitar a relação da função com o expoente crítico associado é

$$f(\varepsilon) \sim |\varepsilon|^{\lambda_e}, \quad (2.26)$$

na qual a relação é válida apenas no limite $|\varepsilon| \rightarrow 0$, ou seja, quando o sistema encontra-se próximo do ponto crítico.

Dessa forma, vamos relacionar a magnetização do sistema (parâmetro de ordem) com seu respectivo expoente crítico

$$m \sim |\varepsilon|^{\beta_e}, \quad (2.27)$$

da mesma forma, a suscetibilidade magnética no ponto crítico obedece à seguinte relação

$$\chi \sim |\varepsilon|^{-\gamma_e}. \quad (2.28)$$

Para sistemas de tamanho finito, as funções termodinâmicas apresentam uma dependência com o tamanho do sistema. Essa relação é caracterizada pelo comprimento de correlação do sistema, que também diverge na transição de fase, é dado por

$$\xi \sim |\varepsilon|^{\nu_e}. \quad (2.29)$$

Esta dependência é uma consequência da divergência do comprimento de correlação e está limitada pelo tamanho finito do sistema. Logo, na região crítica temos

$$\xi \sim L \sim |\varepsilon|^{-\nu_e}, \quad (2.30)$$

de forma que

$$|\varepsilon| \sim L^{-1/\nu_e}, \quad (2.31)$$

podemos explicitar a dependência de $|\varepsilon|$ com L para a magnetização (equação (2.27)) e para a suscetibilidade (equação (2.28)), obtemos as relações:

$$m_L \sim L^{\beta_e/\nu_e} \quad (2.32)$$

e

$$\chi_L \sim L^{\gamma_e/\nu_e}. \quad (2.33)$$

As razões β_e/ν_e e γ_e/ν_e determinam a dependência da magnetização e da suscetibilidade com o tamanho do sistema próximo ao ponto crítico. Determinando o valor da magnetização e da suscetibilidade no ponto crítico para sistemas de diferentes tamanhos, podemos utilizar as equações (2.32) e (2.33) para estimar os expoentes β_e/ν_e e γ_e/ν_e . Por exemplo, nos resultados numéricos mostrados nas Figuras 2.4 e 2.5 podem ser utilizados o $\ln m$ e $\ln \chi$, no ponto crítico, como função do $\ln L$, no qual através da inclinação da retas serão obtidos β_e/ν_e e γ_e/ν_e , respectivamente. Esse método é conhecido como escala de tamanho finito (*finite-size scaling*).

O cumulante de quarta ordem de Binder é definido de forma que o expoente crítico associado é igual a zero [35], $U \sim L^0$. Assim, em $|\varepsilon| = 0$, o valor do cumulante é independente do tamanho do sistema tratado

$$U_L(q = q_c) = U(q = q_c) = U^*. \quad (2.34)$$

utilizamos esta propriedade de Binder para obter o valor do parâmetro crítico no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$), ou seja, para um sistema de tamanho infinito. O valor de q_c é

o valor de q onde as curvas U_L se encontram.

De forma mais rigorosa, pode ser mostrado que no limite $|\varepsilon| \rightarrow 0$ [22], temos

$$m_L(q) = L^{-\beta_e/\nu_e} \tilde{m}(L^{1/\nu_e} \varepsilon), \quad (2.35)$$

$$\chi_L(q) = L^{\gamma_e/\nu_e} \tilde{\chi}(L^{1/\nu_e} \varepsilon), \quad (2.36)$$

e

$$U_L(q) = \tilde{U}(L^{1/\nu_e} \varepsilon), \quad (2.37)$$

onde \tilde{m} , $\tilde{\chi}$ e \tilde{U} são funções universais de escala. Das relações acima, é possível obter uma relação entre os expoentes críticos β_e/ν_e e γ_e/ν_e ,

$$2\frac{\beta_e}{\nu_e} + \frac{\gamma_e}{\nu_e} = D, \quad (2.38)$$

onde D é a dimensão efetiva do sistema. A equação (2.38) é conhecida como relação de hiper-escala.

2.6 O método Monte Carlo

A ideia do método Monte Carlo é muito mais antiga que o computador. O nome Monte Carlo é relativamente recente, foi cunhado por Nicholas Metropolis em 1949, mas sob o antigo nome de amostragem estatística. O método tem uma história que remonta ao século passado, quando cálculos numéricos foram realizados manualmente a lápis e papel e talvez uma regra de slides. Monte Carlo foi originalmente utilizado para estimar integrais que não poderiam ser calculadas por outros meios. Integrais sobre funções mal comportadas e integrais em espaços de alta dimensão são duas áreas nas quais o método tradicionalmente se mostrou eficiente e, de fato, ainda é uma técnica importante para problemas desses tipos [36].

No contexto da mecânica estatística, a ideia básica por trás da simulação de Monte Carlo é simular as flutuações térmicas aleatórias do sistema de um estado para outro estado ao longo de um experimento. Para nossos propósitos, é mais conveniente considerar o cálculo de um valor esperado como uma média de tempo sobre os estados pelos quais um sistema passa.

Em um cálculo de Monte Carlo, simulamos diretamente esse processo, criando um

sistema modelo em nosso computador e o fazemos passar por uma variedade de estados de tal forma que a probabilidade de ele estar em qualquer estado particular μ , em um dado momento t é igual ao peso $w_\mu(t)$ que esse estado teria em um sistema real.

Para conseguir isso, temos que escolher uma dinâmica para nossa simulação, uma regra para mudar de um estado para outro durante a simulação, que resulta em cada estado aparecendo exatamente com a probabilidade apropriada a ele. A ideia essencial é tentarmos simular os processos físicos que dão origem à equação principal,

$$\frac{dw_\mu}{dt} = \sum_\nu [w_\nu(t)R(\nu \rightarrow \mu) - w_\mu(t)R(\mu \rightarrow \nu)]. \quad (2.39)$$

O primeiro termo no lado direito desta equação representa a taxa devido ao sistema está passando por transições para o estado μ , o segundo termo é a taxa na qual ele está passando por transições μ para outros estados. As probabilidades $w_\mu(t)$ também devem obedecer à regra da soma

$$\sum_\mu w_\mu(t) = 1 \quad (2.40)$$

para todo t , já que o sistema deve estar sempre em algum estado. A solução da equação (2.39), sujeita à restrição equação (2.40), nos diz como os pesos w_μ variam ao longo do tempo.

Escolhemos um conjunto de taxas $R(u \rightarrow v)$ para transições de um estado para outro, e as escolhemos de tal maneira que a solução de equilíbrio para a equação mestra correspondente é precisamente a distribuição de Boltzmann

$$p_\mu = \frac{1}{Z} \exp(-E_\mu/k_B T). \quad (2.41)$$

Aqui E_μ é a energia do estado μ e $k_B = 1,38 \times 10^{-23} JK^{-1}$ é a constante de Boltzmann. É convencional denotar a quantidade $(k_B T)^{-1}$ pelo símbolo β , mas aqui denotamos por β_B e Z é função de partição, cujo valor é dado por

$$Z = \sum_\mu \exp(-E_\mu/k_B T) = \sum_\mu \exp(\beta_B E_\mu), \quad (2.42)$$

podemos ver que Z é uma constante de normalização, e figura muito mais no desenvolvimento matemático da mecânica estatística do que uma simples constante de normalização pode ser esperada.

Partindo disso, nós utilizamos essas taxas (equação (2.39)) para escolher os estados pelos quais o nosso sistema simulado passa durante o curso de uma simulação e, a partir

desses estados, calculamos as quantidades observáveis nas quais estamos interessados.

A vantagem desta técnica é que precisamos apenas provar uma pequena fração dos estados do sistema para obter estimativas precisas de grandezas físicas. Por exemplo, não precisamos incluir todos os estados do sistema para obter um valor decente para a função de partição, como faríamos se a avaliássemos diretamente da equação (2.42).

A principal desvantagem da técnica é que existem erros estatísticos no cálculo devido a esse mesmo fato que não incluímos todos os estados em nosso cálculo, mas apenas uma pequena fração dos estados.

Em particular, isso significa que haverá ruído estatístico na função de partição. Tomar a derivada de uma função ruidosa é sempre problemático, de modo que o cálculo dos valores esperados das derivadas da função de partição geralmente não é uma boa maneira de proceder. Em vez disso, normalmente é melhor calcularmos os valores de interesse diretamente [36].

3 Metodologia

Este trabalho tem como objetivos propor uma variação do modelo do votante majoritário com uma distribuição hiperbólica para a taxa de hesitação q_i e verificar se esta satisfaz a classe de universalidade relativa ao número de estados $S = 2, 3, 4$. Com essas perspectivas, realizamos simulações de Monte Carlo em redes quadradas de tamanho linear L considerando condições de contorno periódicas. A fim de caracterizarmos o modelo, calculamos a magnetização $m_L(\beta)$, suscetibilidade $\chi_L(\beta)$ e cumulante de quarta ordem de Binder $U_L(\beta)$, para o ruído dado por $q_i = \frac{1}{2} \exp[\beta(r_i - 1)]$ com *cutoff* $q_i \in [e^{-\beta}/2, 1/2]$ em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96, 128, 256, 512, 1024$. Em nossas simulações para cada valor de ruído fixado, calculamos a média de 500 amostras e 8×10^4 passos de Monte Carlo, sendo que, de cada amostra foram eliminados os primeiros 25% dos passos totais com a finalidade de calcular as médias apenas quando o sistema atingir o estado estacionário. Próximo do ponto crítico consideramos 5×10^5 passos de Monte Carlo para as médias estatísticas, desconsiderando os 10^5 passos iniciais. Como condição inicial, consideramos o estado ordenado, com todos os sítios num mesmo estado e fixamos os valores de β com o intuito de encontrar o valor do parâmetro crítico β_c que evidencia a transição de fase ordem-desordem.

A fim de calcularmos o diagrama de fase e o comportamento crítico do modelo sobre o espaço de parâmetros, consideramos o cálculo da magnetização (parâmetro de ordem) m_L , da susceptibilidade χ_L e do cumulante de quarta ordem de Binder U_L , que são definidos respectivamente por

$$m_L(\beta) = \left\langle \langle m \rangle_{tempo} \right\rangle_{amostra}, \quad (3.1)$$

$$\chi_L(\beta) = \left\langle \langle m^2 \rangle_{tempo} - \langle m \rangle_{tempo}^2 \right\rangle_{amostra} \quad (3.2)$$

e

$$U_L(\beta) = 1 - \left\langle \frac{\langle m^4 \rangle_{tempo}}{3 \langle m^2 \rangle_{tempo}^2} \right\rangle_{amostra}, \quad (3.3)$$

onde os símbolos $\langle \dots \rangle_{tempo}$ e $\langle \dots \rangle_{amostra}$, correspondem, respectivamente, a médias temporais calculadas no estado estacionário e médias configuracionais sobre várias amostras. Nas equações acima m é definido em analogia a magnetização no modelo de Potts de S -estados. Temos o módulo do vetor magnetização $m = (m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_S^2)^{1/2}$, que tem componentes dadas por

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{S}{S-1}} \left[\frac{1}{N} \sum_i \delta(\alpha, \sigma_i) - \frac{1}{S} \right], \quad (3.4)$$

onde a soma é sobre todos os sítios da rede, $\delta(\alpha, \sigma_i)$ é a função delta de Kronecker, e o fator $\sqrt{S/(S-1)}$ introduzido a fim de normalizar o vetor magnetização.

Para o cálculo dos expoentes críticos do nosso modelo vamos utilizar o método *finite-size scaling* (escala de tamanho finito) descrito na seção (2.5). Deve ser levado em conta que esse método é utilizado quando conhecemos o valor do parâmetro de controle crítico do sistema aqui denotado por β_c , pois este método só é valido na região crítica onde o escalonamento das grandezas medidas como a magnetização (equação (3.1)) e suscetibilidade (equação (3.2)) seguem uma lei de potência.

3.1 Topologia da vizinhança

Nesse trabalho adotaremos a topologia da vizinhança de Von Neumann que está representado na Figura 3.1. Os primeiros vizinhos de Von Neumann consistem de quatro sítios ortogonais a um sítio central na rede quadrada (Figura 3.1a) e não podem ser feitas ligações com os sítios da diagonal. Quando aumentada a vizinhança em relação ao sítio central, com $r > 1$, nós teremos o formato de um losango e a dinâmica da quantidade de vizinhos segue conforme o número de Delannoy $D(d, r) - 1$, onde $d = 2$ que é a dimensão do sistema e r é a raio referente ao número do vizinho, ou seja, para segundos vizinho $r = 2$ [37]. Outra topologia possível para classificar os vizinhos é a vizinhança de Moore (Figura 3.1b). Nesta nós temos oito sítios adjacentes ao sítio central na rede quadrangular que estão a uma distância de raio 1 e a quantidade de vizinhos é dada por $(2r + 1)^2 - 1$ [38].

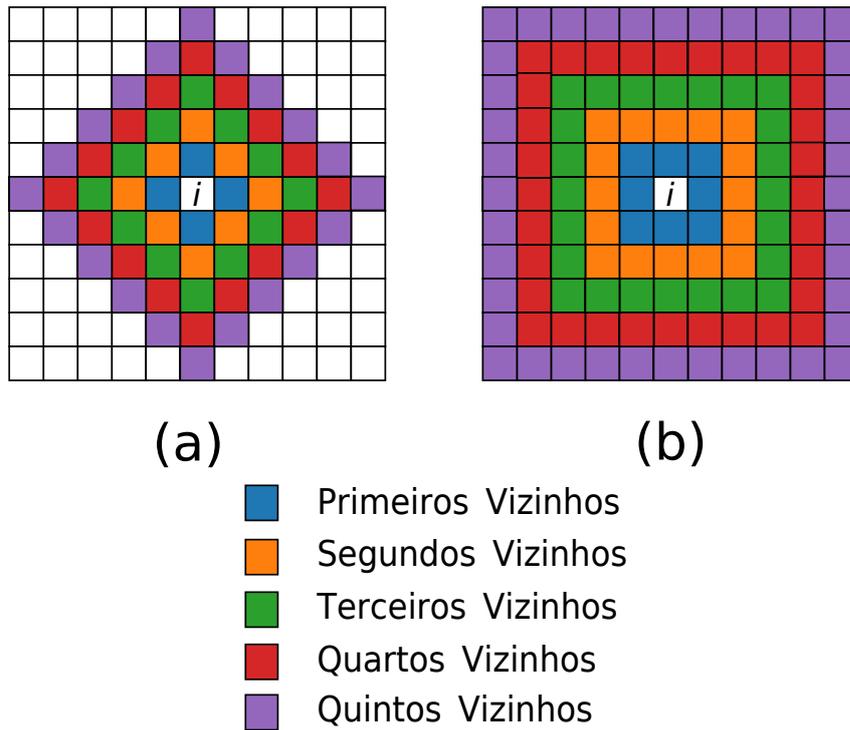


Figura 3.1: Vizinhança de Von Neumann e Moore.

3.2 Algoritmo para dinâmica do votante majoritário com ruído hiperbólico

Adotamos aqui o modelo de votante majoritário introduzido por Oliveira [22] e modificamos seu ruído de tal forma que este obedece à uma distribuição hiperbólica. Para as simulações foi utilizado o seguinte algoritmo:

1. A partir de uma dada condição inicial e fixando o número S de estados, o tamanho L da rede, o valor de β , considerado e o tamanho N_v da vizinhança, o sistema evolui no tempo de acordo com as seguintes condições:
 - (a) sorteamos com igual probabilidade um dado sítio i ;
 - (b) determinamos o estado majoritário dentre os N_v vizinhos mais próximos de i ;
 - (c) O sítio i seguirá o estado majoritário com probabilidade $(1 - q_i)$ ou tomará um outro estado com probabilidade q_i .

Em cada tentativa de atualização, diferentes configurações de empates envolvendo M estados majoritários podem ocorrer. No caso de empate entre todos os S estados possíveis, $M = S$, cada estado é escolhido com igual probabilidade $1/S$. Para o caso de empate entre M estados majoritários, tais que, $M = 2, \dots, (S - 1)$, os estados

majoritários são escolhidos com probabilidade $(1 - q_i)/M$ e os demais estados (não majoritários) são escolhidos com probabilidade $q_i/(S - M)$. Estas regras foram extraídas do estudo [29] onde se analisou o modelo do votante majoritário para 3 estados em redes aleatórias.

Esse algoritmo foi utilizado para gerar os gráficos discutidos nos resultados em função da variável β . Este parâmetro ajusta a desordem do sistema como será discutido no capítulo 4.

4 Resultados

O presente trabalho tem como proposta estudar transições de fase de não equilíbrio a partir do modelo do votante majoritário com o implemento de ruído descrito por uma distribuição hiperbólica $q_i = \frac{1}{2} \exp[\beta(r_i - 1)]$ com *cutoff* $q_i \in [e^{-\beta}/2, 1/2]$, incorporando assim regimes de baixa e alta desordem. Neste cenário, analisaremos os efeitos dos diferentes níveis de desordem sobre sistemas definidos por múltiplos estados e variando o alcance das interações. Desta forma, nosso espaço de parâmetros é definido em termos do número S de estados, pelo número N_v de vizinhos e pelo parâmetro β que controla o nível de desordem da distribuição de ruído. A análise é construída a partir de simulações de Monte Carlo em redes regulares quadradas de tamanho linear L . A dinâmica do modelo evolui conforme o algoritmo descrito no capítulo 3 e seção 3.2. Definimos o estado ordenado como condição inicial para nossas simulações.

As seções a seguir estão organizadas em termos do número de estados considerados.

4.1 Sistema de dois estados ($S = 2$)

Para $S = 2$ estados, a variável estocástica σ_i associada ao sítio i , assume valores -1 e 1. Na Figura 4.1 mostramos o sistema em termos de series temporais e instantâneos para três diferentes regimes, considerando uma rede de tamanho linear $L = 128$ e interação com primeiros vizinhos. Para $\beta = 8,0$, observamos o sistema na fase ordenada com magnetização não nula, baixas flutuações e há um estado majoritário (em vermelho) assumido pelos sítios. Este regime caracteriza a fase ordenada. Para $\beta = 5,0$, temos a magnetização com valores muito baixos, grandes flutuações e grandes agregados de um mesmo estado ainda são evidentes. Este comportamento caracteriza a fase crítica. E para $\beta = 2,5$, temos um valor ainda menor para magnetização, baixas flutuações e os domínios para um dado estado são bastante diminutos. Desta forma não há um ordenamento macroscópico e o sistema está na fase desordenada. Podemos assim, perceber o efeito do parâmetro de controle β na desordem da magnetização mostrado à direita na Figura 4.1.

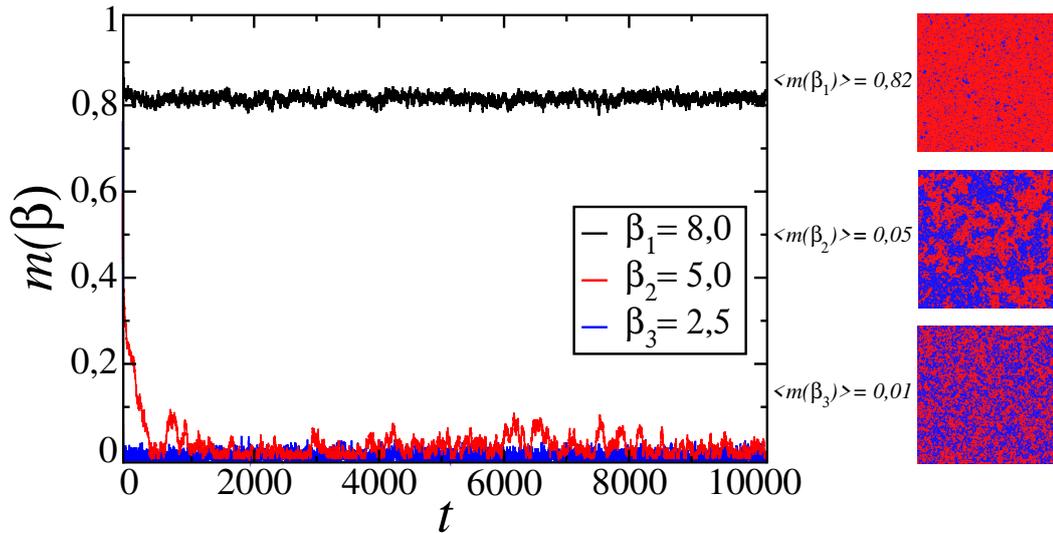


Figura 4.1: Magnetização $m(\beta)$ em função do passo de Monte Carlo t . Cada passo de Monte Carlo representa N sorteios na rede de tamanho linear $L = 128$, onde cada sítio tem em média uma chance de ser escolhido e após esses N sorteios, calculamos a magnetização do sistema. Calculamos a magnetização média $\langle m(\beta) \rangle$ como função de β na qual obtivemos as médias $\langle m(\beta_1) \rangle = 0,82$ onde há um estado majoritário definido, em $\langle m(\beta_2) \rangle = 0,05$ temos o sistema na região crítica com vários agregados e para $\langle m(\beta_3) \rangle = 0,01$ temos o sistema na fase desordenada.

Para a Figura 4.1, os valores de β foram escolhidos acima e abaixo ponto crítico a fim de caracterizarmos a dependência da magnetização em relação ao parâmetro de controle. Percebemos que abaixo do valor crítico, em $\beta = 2,5$ e $5,0$, a magnetização tende a ser nula, porém quando fixamos um valor de β superior ao crítico, em $\beta = 8,0$, o sistema tende ao ordenamento ferromagnético e o valor da magnetização não é nulo, de maneira progressiva, para valores de β acima do valor crítico a magnetização tende ao seu máximo.

Na Figura 4.2 destacamos três instantâneos do modelo para $S = 2$ estados. Na primeira coluna encontramos o sistema no estado desordenado onde dois estados (azul e vermelho) coexistem sem consenso macroscópico. Na coluna central, encontramos o sistema no regime de transição onde existem agregados e há equilíbrio entre as fases ordenada e desordenada, esse equilíbrio terá seu fim ao atingir o ponto crítico. Após o ponto crítico, temos o estado ordenado que é caracterizado por uma consenso entre a comunidade de sítios.

Na Figura 4.3 exibimos a dependência do parâmetro de ordem $m_L(\beta)$ como função de β , obtida através de simulações de Monte Carlo para diferentes tamanhos de sistema. Cada curva nesta figura sugere que o sistema descreve uma transição de fase contínua, do tipo ordem-desordem, em um particular valor de $\beta = \beta_c(L)$, denominado de parâmetro de controle crítico. Observe ainda que o consenso tende a surgir à medida que β aumenta.

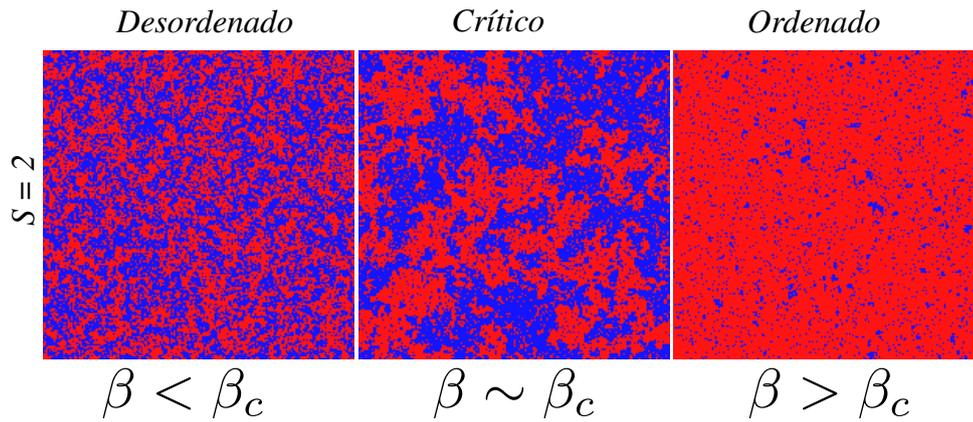


Figura 4.2: Instantâneos do modelo do votante majoritário para $S = 2$ estados. A fase desordenada representa a ausência de consenso macroscópico que é caracterizada por baixos valores de β . A região crítica possui agregados devido ao sistema está passando pelo regime de transição de fase que ao atingir o ponto crítico, o sistema apresentará uma transição do tipo ordem-desordem. O estado ordenado representa um consenso entre a comunidade de sítios cujo sistema apresenta uma opinião majoritária (vermelha).

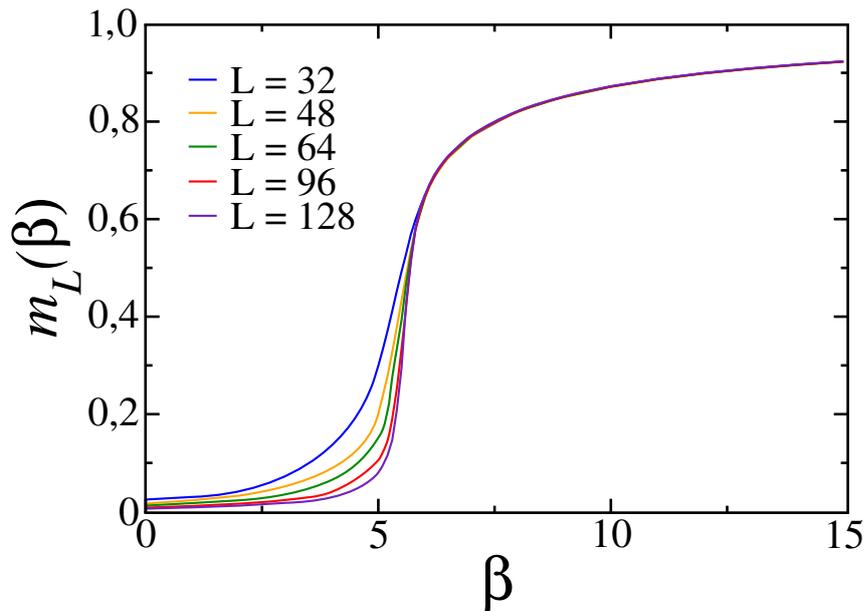


Figura 4.3: Magnetização $m_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Temos um consenso macroscópico à medida que β aumenta.

Quando o valor de β está acima do valor crítico temos um ordenamento ferromagnético que equivale à maioria dos sítios com a mesma opinião majoritária, ou seja, representa um acordo entre a comunidade. Quando β está baixo do ponto crítico, temos um ordenamento paramagnético e o sistema apresenta magnetização nula, ou seja, representa um desacordo entre a comunidade de indivíduos.

A Figura 4.4 mostra a suscetibilidade $\chi_L(\beta)$ em função de β para vários valores de L . Observamos que com o aumento do tamanho do sistema as flutuações crescem (aumento

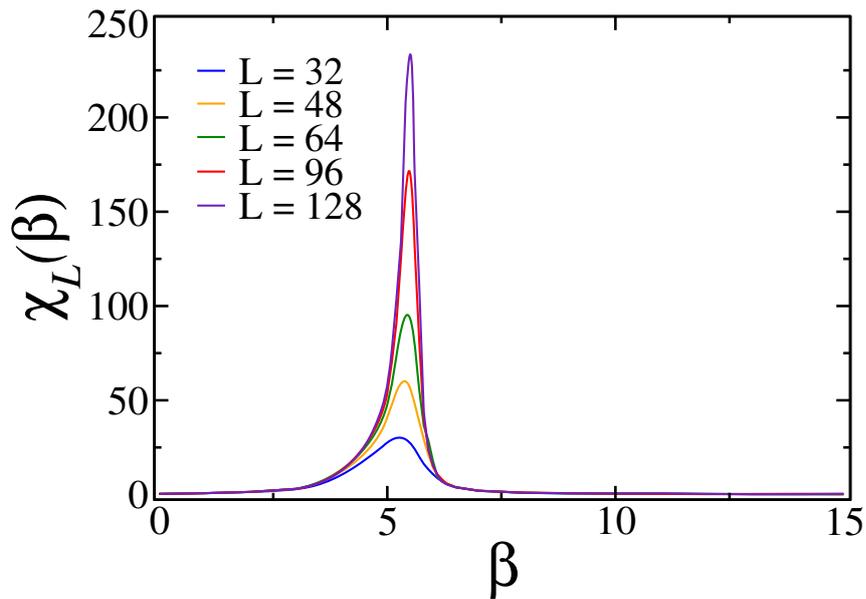


Figura 4.4: Suscetibilidade $\chi_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Temos uma suscetibilidade divergente próxima do ponto crítico.

do máximo da suscetibilidade) e o ponto onde ocorre este máximo se desloca levemente para direita.

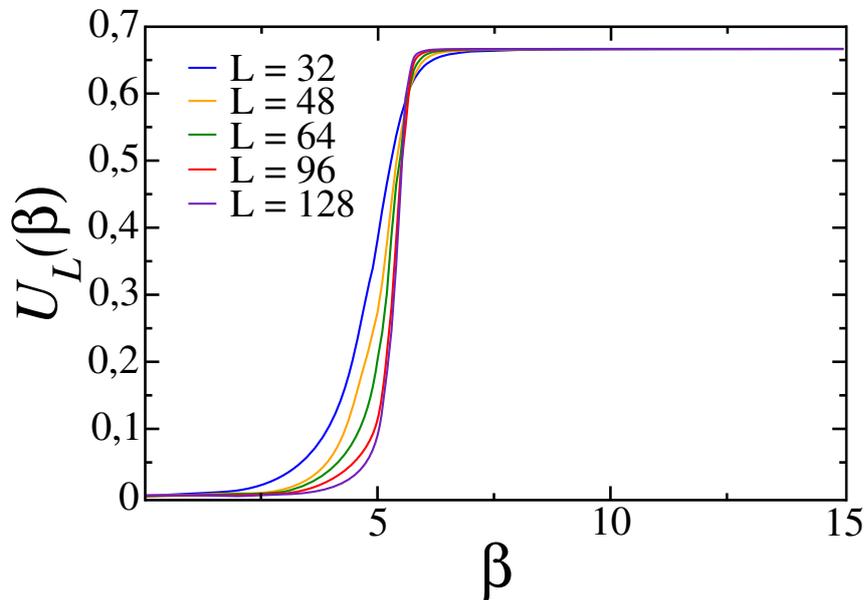


Figura 4.5: Cumulante de quarta ordem de Binder $U_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . As curvas se cruzam na estimativa do valor crítico.

A Figura 4.5 mostra o cumulante de quarta ordem de Binder $U_L(\beta)$ em função de β para vários tamanhos de rede. O cumulante tem sua interseção no ponto crítico. As curvas representam diferentes valores de L que à medida que este aumenta, temos uma inclinação vertical mais próxima ao ponto crítico, ou seja, no limite de $L \rightarrow \infty$, a inclinação da curva

será sobre o ponto crítico. Utilizamos também o cumulante para a construção do diagrama de fase (seção 4.1.2), este relaciona o tamanho da vizinhança e o parâmetro com a mesma finalidade.

4.1.1 Escala de tamanho finito $S = 2$

A análise de escala tamanho finito (*finite-size scaling*) é um método para calcularmos estimativas para os expoentes críticos β_e/ν_e , γ_e/ν_e , a partir da dependência das grandezas de interesse com o tamanho L do sistema.

Para a magnetização temos

$$\log_{10} [m_L(\beta_c)] = \frac{\beta_e}{\nu_e} \log_{10} L + \log_{10} [\tilde{m}(0)], \quad (4.1)$$

onde o gráfico de $\log_{10} [m_L(\beta_c)]$ versus $\log_{10} [L]$ é uma reta com coeficiente linear igual ao logaritmo da função universal $\tilde{m}(0)$ e o coeficiente angular igual ao expoente β_e/ν_e [26].

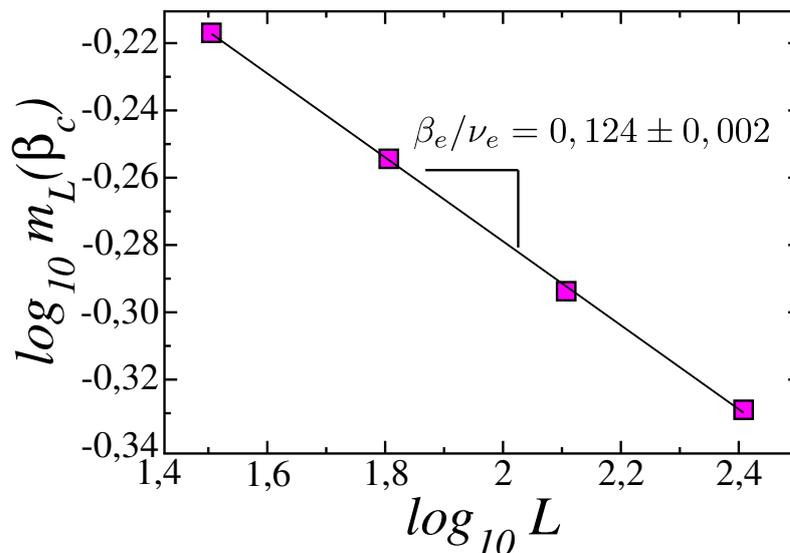


Figura 4.6: Estimativa para o expoente β_e/ν_e em sistemas de dois estados. Magnetização calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $m_L \sim L^{-\beta_e/\nu_e}$, com $\beta_e/\nu_e = 0,124 \pm 0,002$.

Na Figura 4.6 calculamos o logaritmo da magnetização $\log_{10} m_L(\beta_c)$ em função do logaritmo do tamanho linear $\log_{10} L$, para um sistema de dois estados. É possível inferir que esse sistema faz parte da classe de universalidade de Ising denotada pelo valor do expoente $\beta_e/\nu_e = 0,124 \pm 0,002$, que está na margem de erro para o valor teórico $\beta_e/\nu_e = 0,125$ [12].

Para a suscetibilidade magnética, a obtenção do expoente γ_e/ν_e é análogo ao descrito

pela magnetização, logo temos

$$\log_{10} [\chi_L(\beta_c)] = \frac{\gamma_e}{\nu_e} \log_{10} [L] + \log_{10} [\tilde{\chi}(0)], \quad (4.2)$$

onde $\log_{10} [\chi_L(\beta_c)]$ versus $\log_{10} [L]$ fornece o coeficiente angular $\tilde{\chi}(0)$ e o coeficiente angular γ_e/ν_e [26].

Na Figura 4.7 calculamos o logaritmo da suscetibilidade magnética $\log_{10} \chi_L(\beta_c)$ em função do logaritmo do tamanho linear $\log_{10} L$, para um sistema de dois estados. Nós obtemos o valor estimado do expoente $\gamma_e/\nu_e = 1,70 \pm 0,08$.

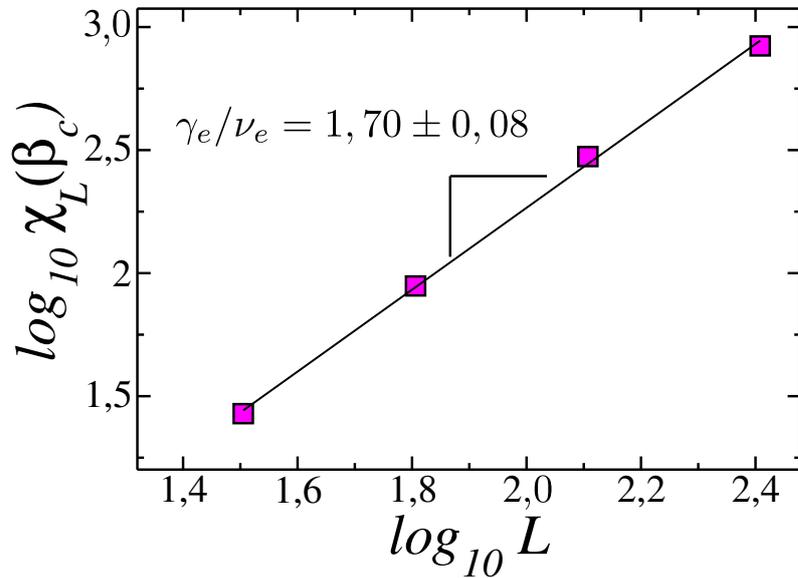


Figura 4.7: Estimativa para o expoente γ_e/ν_e em sistemas de dois estados. Suscetibilidade magnética calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $\chi_L \sim L^{\gamma_e/\nu_e}$, com $\gamma_e/\nu_e = 1,70 \pm 0,08$.

A partir das estimativas para β_c e para os expoentes críticos podemos construir curvas universais para o parâmetro de ordem e para a suscetibilidade. Tais curvas são obtidas a partir das equações (2.35) e (2.36). Somente com os corretos valores dos expoentes obteríamos um colapso satisfatório. Na Figura 4.8 exibimos o colapso de dados considerando os expoentes críticos calculados e considerando $\nu_e = 1$. Estes valores para os expoentes são os mesmos que descrevem o modelo de Ising. Desta forma, o modelo do votante majoritário para $S = 2$ e com distribuição de ruído hiperbólica tem sua transição de fase descrita pela classe de universalidade de Ising.

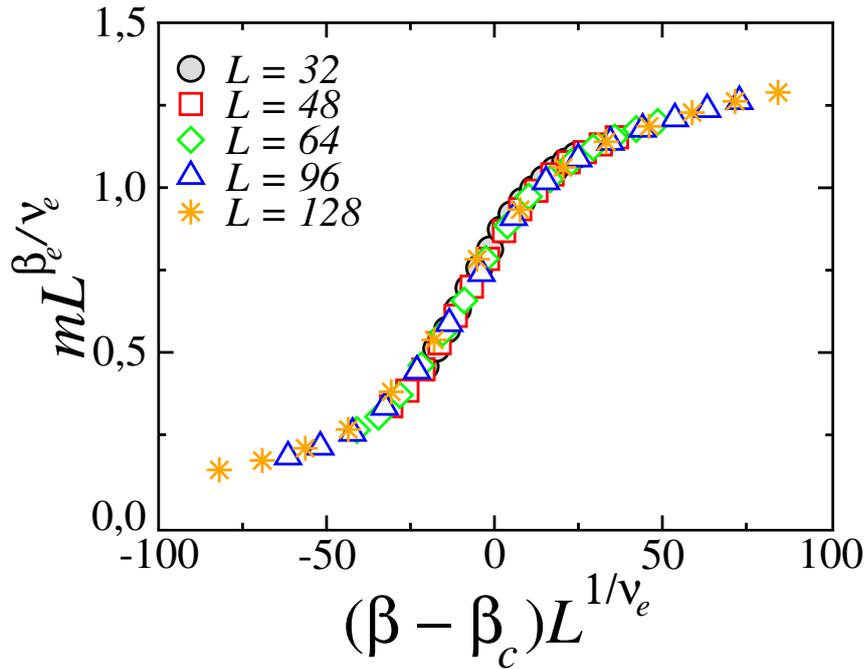


Figura 4.8: Colapso dos dados de magnetização m para $S = 2$ estados. Os pontos são obtidos a partir de simulações de Monte Carlo para cinco tamanhos diferentes de L como indicado. Tomamos os valores dos expoentes críticos $\beta_e = 1/8$ e $\nu_e = 1$.

4.1.2 Variação do tamanho da vizinhança e diagrama de fase

Como foi discutido no capítulo 3, podemos variar o número de vizinhos N_v de acordo com a nomenclatura de Von Neumann ou Moore. Aqui adotamos a variação da vizinhança de Von Neumann. Na Figura 4.9 mostramos a magnetização e suscetibilidade magnética em função de β para diferentes valores de N_v . Um aspecto interessante mostrado na Figura 4.9a é o deslocamento para a esquerda à medida que aumentamos o tamanho da vizinhança. Na curva mais à direita (azul) consideramos apenas os primeiros 4 vizinhos. A curva laranja (a segunda da direita para esquerda) representa os segundos vizinhos de Von Neumann e sucessivamente, temos de terceiros até quintos vizinhos. A suscetibilidade magnética apresenta uma informação a mais, além do valor finito que diverge na região crítica, à medida que o número de vizinhos aumenta, as flutuações do valor da suscetibilidade diminuem.

Tendo em vista que o valor crítico se modifica à medida que variamos o tamanho da vizinhança, é possível construir um diagrama de fase para o modelo. O diagrama de fases é uma representação gráfica dos estados físicos de um sistema sob diferentes condições dos parâmetros analisados.

No diagrama da Figura 4.10 temos no eixo das ordenadas o parâmetro de controle β

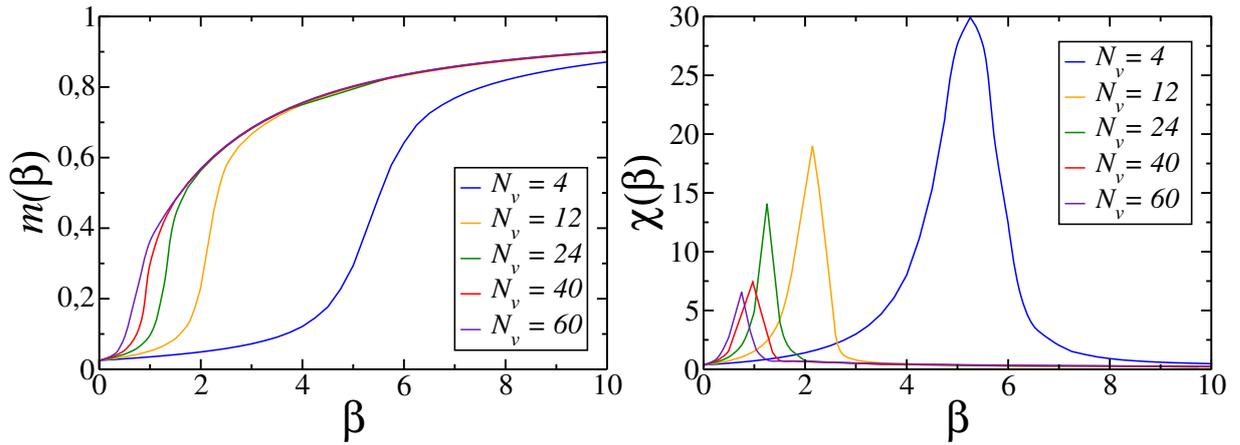


Figura 4.9: Magnetização e suscetibilidade magnética em função de β variando a vizinhança de Von Neumann.

e no eixo das abscissas os vizinhos mais próximos N_v , conforme cruzamos as linhas ou curvas no diagrama, ocorre uma mudança de fase do tipo ordem-desordem.

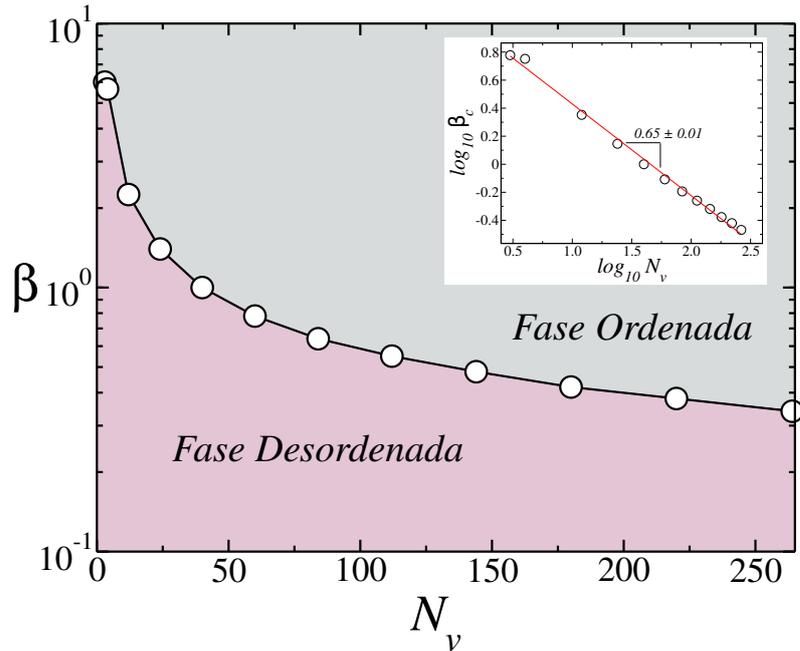


Figura 4.10: Diagrama de fase do parâmetro de controle em função do número de vizinhos para $S = 2$ estados. A relação entre β versus N_v (figura interna) é descrita por uma lei de potência com expoente $0,65 \pm 0,01$.

No diagrama da Figura 4.10, considerando o caso dos primeiros vizinhos $N_v = 4$, temos que os spins iniciam-se na fase desordenada (sem consenso) para valores abaixo de $\beta_c = 5,65 \pm 0,02$. Na região em que o valor do parâmetro crítico é atingido, o sistema opta pelo estado ordenado. À medida que o tamanho da vizinhança aumenta (eixo N_v), o valor necessário de β_c para permanecer no regime ferromagnético diminui (eixo β). Essa queda do valor crítico é descrito por uma lei de potência com ajuste indicado na figura.

Nas próximas seções descreveremos os resultados do modelo para $S > 2$.

4.2 Sistema de três estados ($S = 3$)

Para um sistema que pode admitir $S = 3$, convencionamos que os valores das variáveis estocásticas σ_i associadas ao sítio i podem assumir valores $\sigma_i = \{1, 2, 3\}$. De maneira análoga ao sistema de dois estados, calculamos as quantidades de interesse magnetização $m(\beta)$, suscetibilidade $\chi(\beta)$ e cumulante de quarta ordem de Binder $U(\beta)$ com a finalidade de descrever a relação dessas grandezas nos regimes de alta de baixa desordem. Na Figura 4.11 temos os instantâneos de configuração do sistema de $S = 3$.

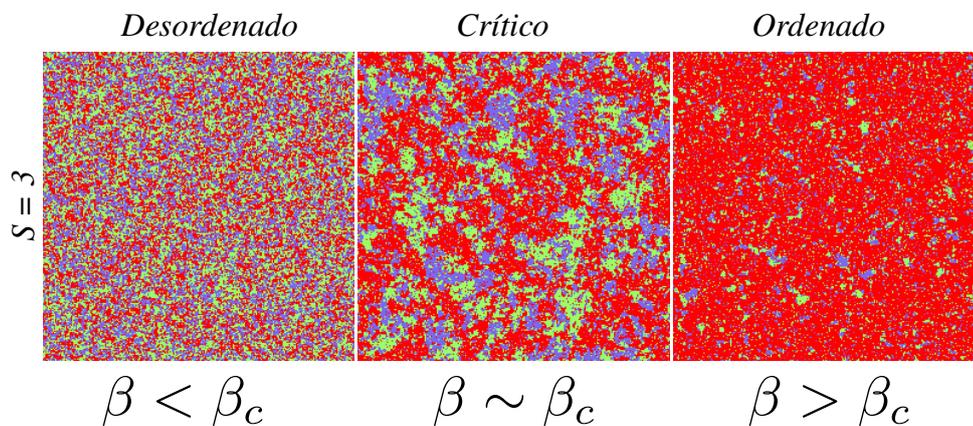


Figura 4.11: Instantâneos do modelo do votante majoritário para $S = 3$ estados. O estado desordenado é representado pelo ordenamento paramagnético e possui magnetização nula para valores do parâmetro de controle β abaixo do valor crítico. Na região crítica há agregados entre a comunidade de sítios e o sistema apresenta magnetização próxima de zero. A partir do ponto crítico, o sistema assume uma opinião majoritária e adquire o ordenamento ferromagnético com magnetização não nula.

Na primeira coluna temos o sistema em configuração desordenada, ou seja, não existe consenso entre a comunidade de sítios. Uma analogia para essa configuração é o ordenamento paramagnético que possui magnetização nula e os spins estão desordenados. A região crítica é onde ocorre a transição entre o ordenamento paramagnético e ferromagnético quando o parâmetro crítico é atingido, até aqui, percebemos a existência de agregados ou comunidades de sítios. A partir do ponto crítico, ocorre uma transição de fase ordem-desordem e o sistema opta por um estado majoritário com magnetização tendendo ao seu valor máximo.

4.2.1 Escala de tamanho finito $S = 3$

Utilizamos a análise de escala de tamanho finito (*fine-size scaling*) para calcularmos os expoentes críticos dada uma configuração $S = 3$ estados. Calculamos o logaritmo da magnetização $\log_{10} m_L(\beta)$ (Figura 4.12) e o logaritmo da suscetibilidade magnética $\log_{10} \chi_L(\beta)$ (Figura 4.13) em função do logaritmo do tamanho linear $\log_{10} L$, fixando $\beta = \beta_c$, com a finalidade de obter os expoentes β_e/ν_e e γ_e/ν_e determinados pelas equações (4.1) e (4.2), respectivamente.

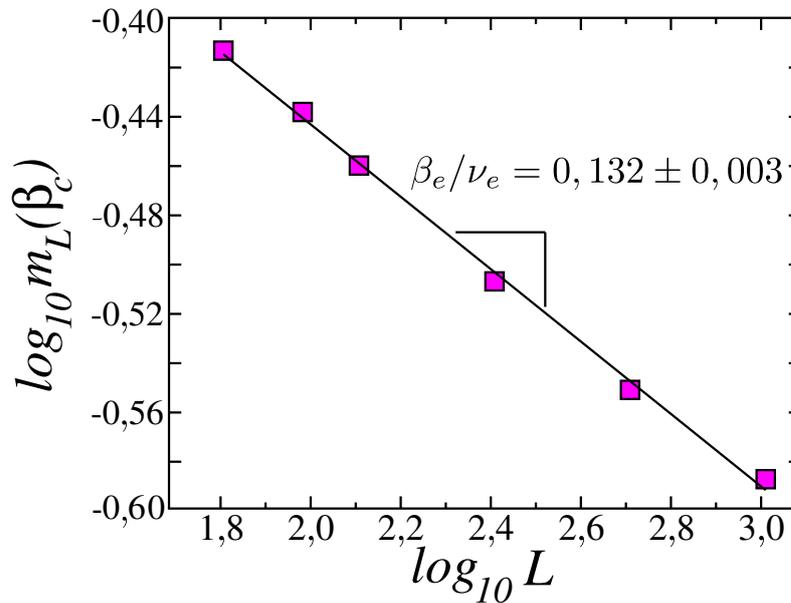


Figura 4.12: Estimativa para o expoente β_e/ν_e em sistemas de três estados. Magnetização calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $m_L \sim L^{-\beta_e/\nu_e}$, com $\beta_e/\nu_e = 0,132 \pm 0,003$.

Na Figura 4.12 calculamos o logaritmo da magnetização $\log_{10} m_L(\beta_c)$ em função do tamanho linear $\log_{10} L$ para um sistema de três estados em redes de tamanho linear $L = 64, 96, 128, 256$ e 512 . Obtemos a estimativa do expoente $\beta_e/\nu_e = 0,132 \pm 0,003$, no qual está na margem de erro para o valor teórico $\beta_e/\nu_e = 0,133$, dada a classe de universalidade de Potts para $S = 3$ com $\beta_e = 1/9$ e $\nu_e = 5/6$.

Para o cálculo do expoente associado à suscetibilidade magnética γ_e/ν_e , de maneira análoga, calculamos o logaritmo da suscetibilidade magnética $\log_{10} \chi_L(\beta_c)$ em função do logaritmo do tamanho linear $\log_{10} L$ e obtemos a estimativa do expoente $\gamma_e/\nu_e = 1,73 \pm 0,06$ que está de acordo com o valor teórico $\gamma_e/\nu_e = 1,733$, dada a classe de universalidade de Potts com $\gamma_e = 13/9$ e $\nu_e = 5/6$.

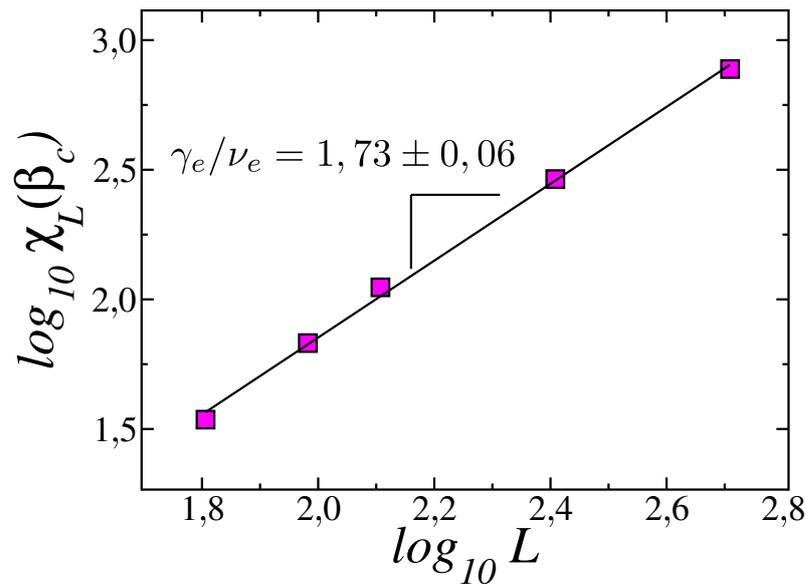


Figura 4.13: Estimativa para o expoente γ_e/ν_e em sistemas de três estados. Suscetibilidade magnética calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $\chi_L \sim L^{\gamma_e/\nu_e}$, com $\gamma_e/\nu_e = 1,73 \pm 0,06$.

4.2.2 Variação do tamanho da vizinhança e diagrama de fase

Um processo análogo à $S = 2$ ocorre em $S = 3$ com as grandezas físicas magnetização e suscetibilidade magnética quando aumentamos o alcance da vizinhança do sítio i . O valor de β_c necessário para a transição de fase diminui à medida que o tamanho da vizinhança aumenta como mostrado no diagrama de fase a seguir.

No diagrama de fase da Figura 4.14 temos os valores de β no eixo das ordenadas e no eixo das abscissas temos o número de vizinhos N_v . Os pontos no gráfico representam os valores de β_c necessário para a transição de fase para cada número de vizinhos indicado. À medida que o número de vizinhos aumenta, o valor crítico para a transição fica menor.

De maneira análoga à $S = 2$, encontramos um relação para $S = 3$ entre o tamanho da vizinhança N_v e o valor de β_c descrita por uma lei de potência com ajuste indicado na Figura 4.14.

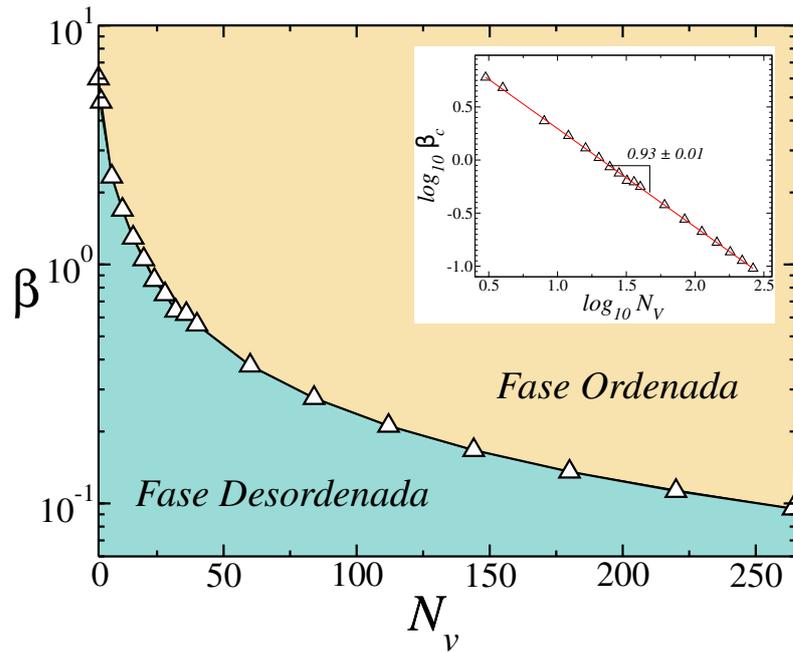


Figura 4.14: Diagrama de fase do parâmetro de controle em função do número de vizinhos para $S = 3$ estados. A relação entre β versus N_v (figura interna) é descrita por uma lei de potência com expoente $0,93 \pm 0,01$.

4.3 Sistema de quatro estados ($S = 4$)

Para um sistema que pode admitir $S = 4$ convencionamos que os valores das variáveis estocásticas σ_i podem assumir $\sigma_i = \{1, 2, 3, 4\}$. Para essa configuração que o número S de estados pode assumir, temos o limiar para transições de fase contínuas de primeira ordem e descontínuas de segunda ordem [28]. A partir disso, teremos transições descontínuas na magnetização, ou seja, na primeira derivada da energia livre. De maneira análoga ao modelo anterior com $S = 3$, temos um sistema que na fase desordenada 4 estados coexistem como mostrado na Figura 4.15.

Na primeira coluna da Figura 4.15 temos o regime de ordenamento paramagnético, o que caracteriza uma ausência de consenso entre a comunidade de sítios. Na região crítica, temos a presença de agregados com magnetização próxima de zero, e à direita temos regime de ordenamento ferromagnético após a transição ordem-desordem e magnetização não nula.

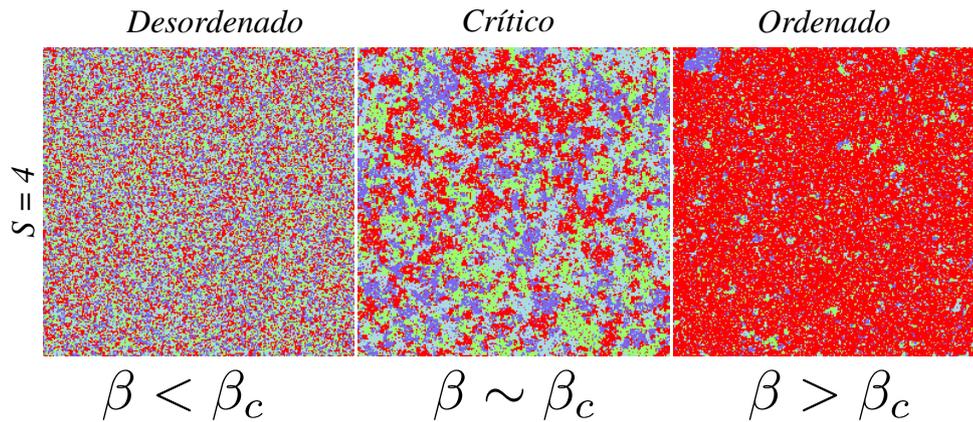


Figura 4.15: Instantâneos do modelo do votante majoritário para $S = 4$ estados. De maneira análoga à $S = 2$ e $S = 3$, na fase desordenada apresenta ordenamento paramagnético com magnetização nula. A região crítica possui agregados devido ao sistema está passando pelo regime de transição de fase que ao atingir o ponto crítico, o sistema apresentará uma transição do tipo ordem-desordem. O estado ordenado representa um consenso entre a comunidade de sítios, cujo sistema apresenta uma opinião majoritária (vermelha).

4.3.1 Escala de tamanho finito para $S = 4$

Como foi visto anteriormente, utilizamos a análise de escala de tamanho finito para calcular os expoentes críticos β_e/ν_e e γ_e/ν_e a partir da dependência dessas grandezas com o tamanho do linear L do sistema, dada uma configuração $S = 4$.

Para calcular o expoente crítico associado à magnetização β_e/ν_e calculamos o logaritmo da magnetização $\log_{10} m_L(\beta_c)$ em função do logaritmo do tamanho linear $\log_{10} L$ como mostrado na Figura 4.16.

Nós obtemos o valor $\beta_e/\nu_e = 0,125 \pm 0,005$ (Figura 4.16), dado pela equação (4.1), para o expoente crítico associado à magnetização que está de acordo com o valor teórico $\beta_e/\nu_e = 0,125$, dada a classe de universalidade de Potts para $S = 4$ com $\beta_e = 1/12$ e $\nu_e = 2/3$ de acordo com a literatura.

De forma similar, foi calculado o logaritmo da suscetibilidade magnética $\log_{10} \chi_L(\beta)$ em função do logaritmo do tamanho linear $\log_{10} L$ (Figura 4.17), tomando $\beta = \beta_c$, foi encontrado o expoente crítico associado à suscetibilidade magnética $\gamma_e/\nu_e = 1,75 \pm 0,08$, dada equação (4.2), que corresponde ao expoente crítico $\gamma_e/\nu_e = 1,75$ da classe de universalidade de Potts para $S = 4$ com $\gamma_e = 7/6$ e $\nu_e = 2/3$.

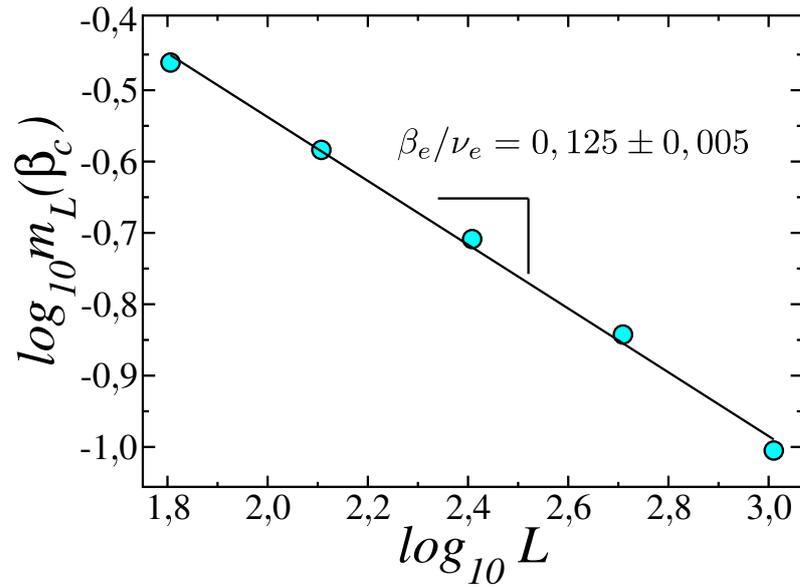


Figura 4.16: Estimativa para o expoente β_e/ν_e em sistemas de três estados. Magnetização calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $m_L \sim L^{-\beta_e/\nu_e}$, com $\beta_e/\nu_e = 0,125 \pm 0,005$.

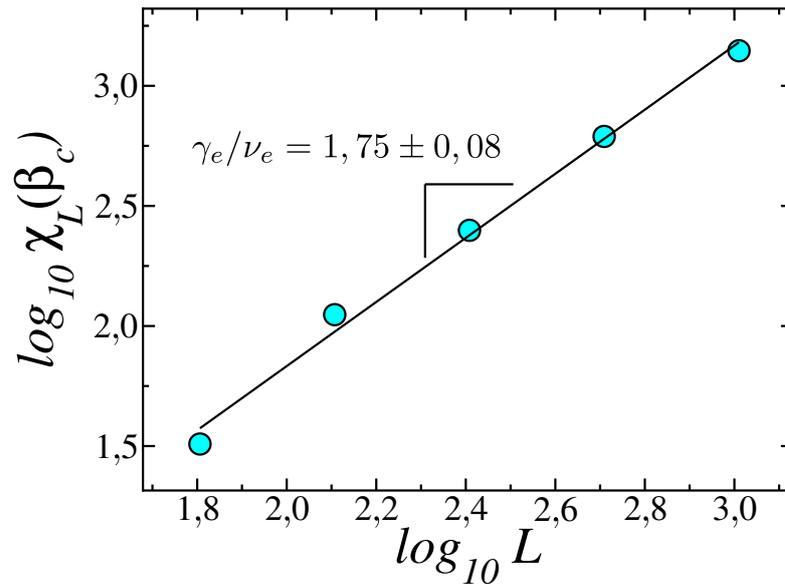


Figura 4.17: Estimativa para o expoente γ_e/ν_e em sistemas de quatro estados. Suscetibilidade magnética calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $\chi_L \sim L^{\gamma_e/\nu_e}$, com $\gamma_e/\nu_e = 1,75 \pm 0,08$.

4.3.2 Variação do tamanho da vizinhança e diagrama de fase

Para $S = 4$ estados, ainda é possível construir um diagrama de fase pois temos uma transição contínua na magnetização. De forma análoga, as grandezas físicas magnetização $m(\beta)$ e suscetibilidade magnética $\chi(\beta)$ modificam seus valores quando aumentamos o alcance da vizinhança do sítio i . Neste caso, novamente temos o valor de β_c necessário

para a transição de fase diminuindo à medida que a vizinhança aumenta como mostrado no diagrama de fase como mostrado na Figura 4.18.

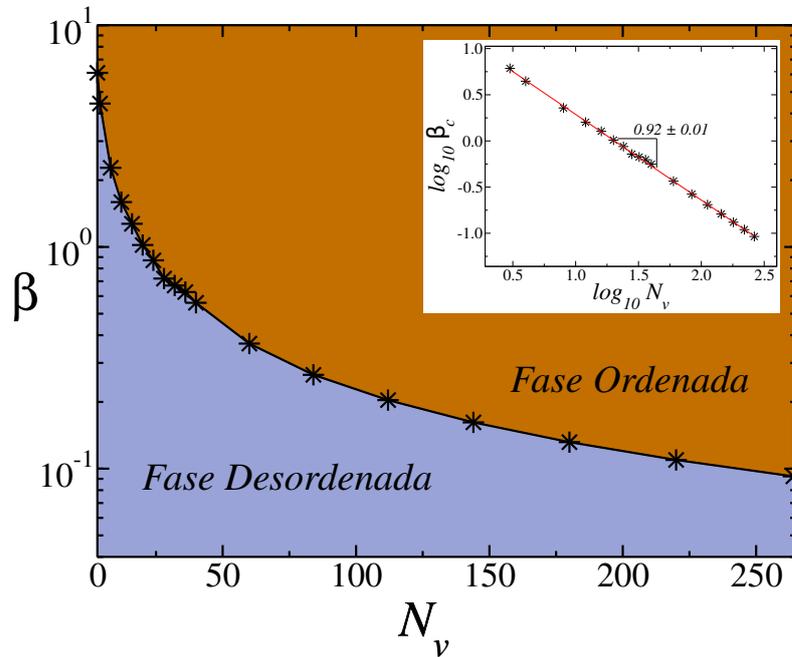


Figura 4.18: Diagrama de fase do parâmetro de controle em função do número de vizinhos para $S = 4$ estados. A relação entre β versus N_v (figura interna) é descrita por uma lei de potência com expoente $0,92 \pm 0,01$.

Na Figura 4.18 temos o parâmetro de controle β em função do número de vizinhos N_v . A região de fase desordenada é menor que a região ordenada. Novamente temos uma relação característica entre o parâmetro de controle β e o número de vizinhos N_v que segue uma lei de potência com ajuste indicado na figura interna.

4.4 Análise da dinâmica annealing do modelo de dois estados ($S = 2$)

Nossas análises foram realizadas até agora com a distribuição de ruídos para cada sítio sendo a mesma para toda simulação, ou seja os ruídos estão “congelados” a cada passo de tempo. Essa versão é conhecida na literatura como *quenched* (temperado). Existe outra alternativa onde o ruído de cada sítio muda a cada passo de tempo. Essa é a versão *annealing* (recozido). Para encontrarmos o valor de β_c na versão *annealing* podemos fazer uso da distribuição cumulativa $P_{>}$ mostrado na Figura 2.6 e determinar os valores de β em função do ruído médio \bar{q} utilizando a densidade de probabilidade. Com essa perspectiva, temos uma relação entre o valor esperado \bar{q} e β , podemos assim, determinar o valor de β_c

a partir de $q_c = 0,075 \pm 0,001$ da seguinte forma,

$$\bar{q} = \int_{q_{min}}^{q_{max}} qP(q) dq, \quad (4.3)$$

a partir dessa relação teremos,

$$\bar{q} = \int_{e^{-\beta}/2}^{1/2} \frac{q}{\beta q} dq, \quad (4.4)$$

na qual teremos a solução no ponto crítico

$$q_c = \frac{1}{2\beta_c} [1 - e^{-\beta_c}], \quad (4.5)$$

essa relação nos fornece uma equação transcendental que possibilita a partir do valor de q_c determinar o novo parâmetro de controle crítico β_c . Na equação (4.3) admitimos o valor $q_{min} = e^{-\beta}/2$ e $q_{max} = 1/2$. Para determinar a solução da equação (4.5) traçamos as curvas $e^{-\beta}$ e $1 - 2q\beta$ cuja interseção entre essas evidencia o valor de β_c , quando fixado o valor de q_c que foi determinado por Oliveira (1992) [22].

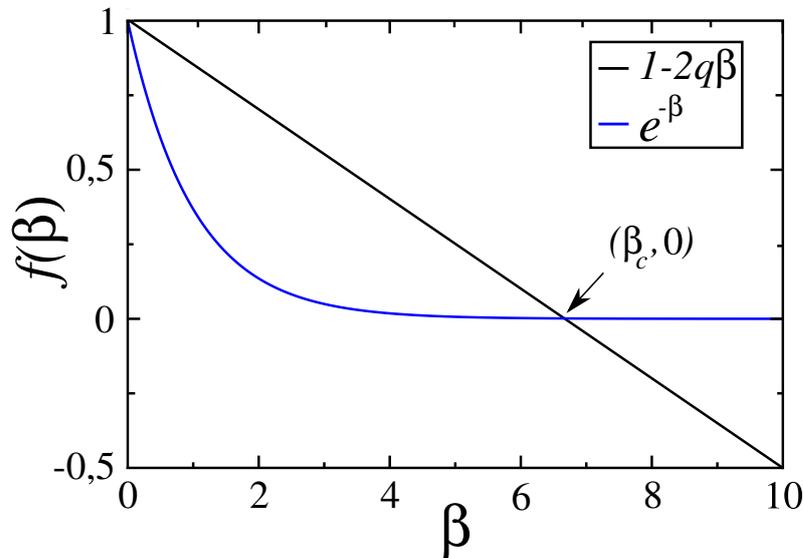


Figura 4.19: O valor de β_c é a coordenada das abscissas que é solução para a equação (4.5).

A Figura 4.19 apresenta o gráfico de $f(\beta)$ em função de β onde o ponto de interseção entre as curvas $e^{-\beta}$ e $1 - 2q\beta$ tem coordenada $(\beta_c, 0)$. Para essa versão, as grandezas de interesse como magnetização $m_L(\beta)$, suscetibilidade magnética $\chi_L(\beta)$ e cumulante de quarta ordem de Binder $U_L(\beta)$, apresentam ruídos que variam com o tempo, para cada passo de tempo t é sorteado um novo ruído distribuído de maneira hiperbólica e os resultados são mostrados a seguir.

Para o gráfico magnetização (parâmetro de ordem) em $S = 2$, temos a relação $\langle m \rangle =$

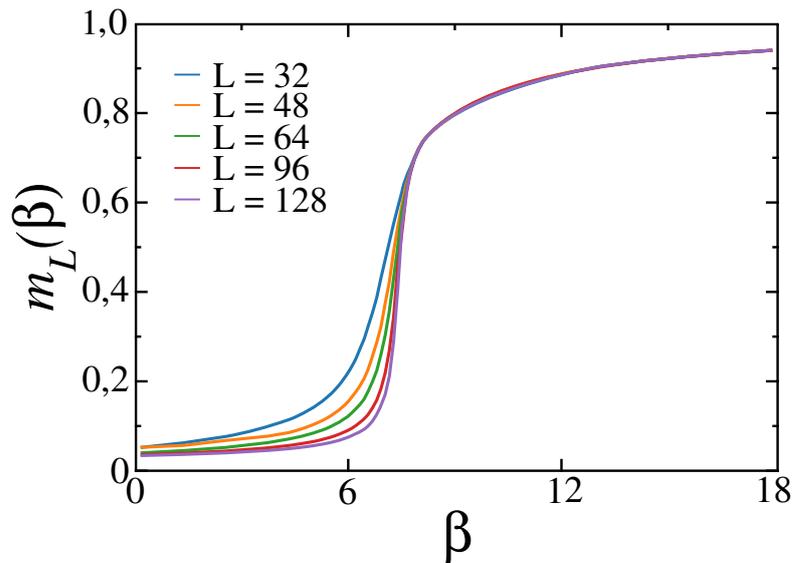


Figura 4.20: Magnetização $m_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Versão *annealing* com distribuição de ruídos variáveis com o tempo.

$\frac{1}{N} |\sum \sigma_i|$, onde σ_i é a variável estocástica associada ao estado do sítio i escolhido (Figura 4.20). Calculamos a soma dos estados de cada sítio e para cada sorteio, foi atribuído um ruído diferente seguindo a distribuição $q_i = \frac{1}{2} \exp[\beta(r_i - 1)]$ para o sítio i . A cada novo passo de tempo t , a distribuição de ruídos segue a relação hiperbólica de q_i e o ruído do sítio i depende exclusivamente do número aleatório $r_i \in [0, 1]$.

Para o gráfico da suscetibilidade magnética (Figura 4.21) calculamos a variância da magnetização $\chi_L = N [\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2]$, para vários valores de L . Observamos que com o aumento do tamanho do sistema as flutuações crescem (aumento do máximo da suscetibilidade) e o ponto onde ocorre este máximo se desloca levemente para direita.

Para a Figura 4.22, calculamos o cumulante de quarta ordem de Binder de quarta ordem $U_L = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3 \langle m^2 \rangle^2}$, a partir dos resultados obtidos da magnetização, com o intuito de evidenciar o valor de β crítico utilizando diferentes valores de L . Utilizamos também o cumulante para a construção do diagrama de fase (seção 4.4.2), este relaciona o tamanho da vizinhança e o parâmetro com a mesma finalidade.

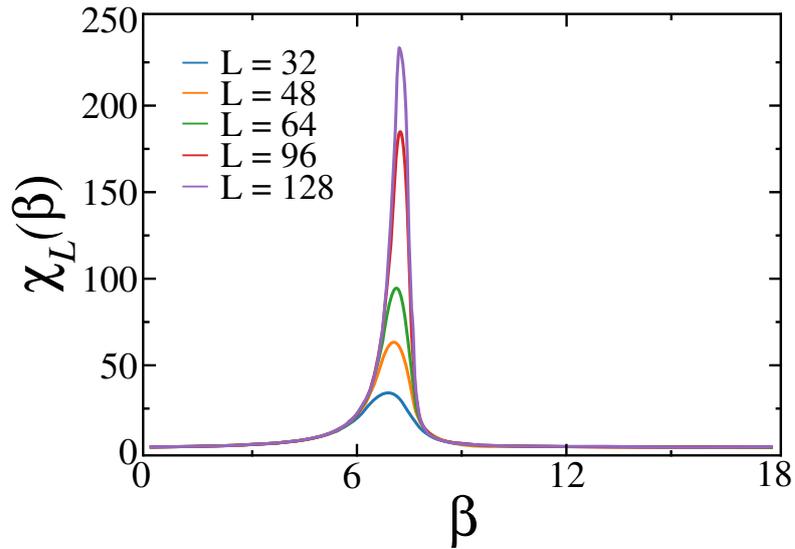


Figura 4.21: Suscetibilidade $\chi_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Temos uma suscetibilidade divergente próxima do ponto crítico. Versão *annealing* com distribuição de ruídos variáveis com o tempo.

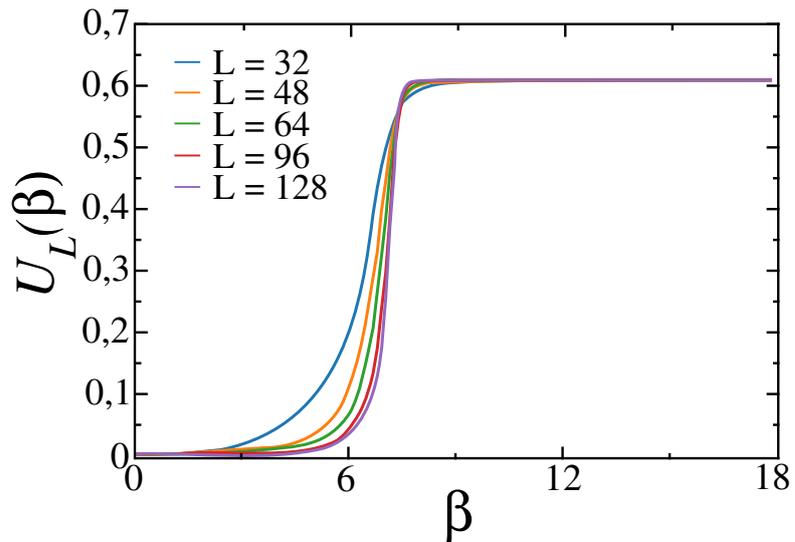


Figura 4.22: Cumulante de quarta ordem de Binder $U_L(\beta)$ em função de β em redes de tamanho $L = 32, 48, 64, 96$ e 128 . Versão *annealing* com distribuição de ruídos variáveis com o tempo.

4.4.1 Escala de tamanho finito e colapso de dados para $S = 2$

Utilizamos a análise de escala de tamanho finito (*fine-size scaling*) para calcularmos os expoentes críticos dada uma configuração $S = 2$ estados para a versão *annealing*. De maneira análoga à versão *quenched* (seção 4.1.1), calculamos o logaritmo da magnetização $\log_{10} m_L(\beta)$ (Figura 4.23) em função do logaritmo do tamanho linear $\log_{10} L$, fixando $\beta = \beta_c$.

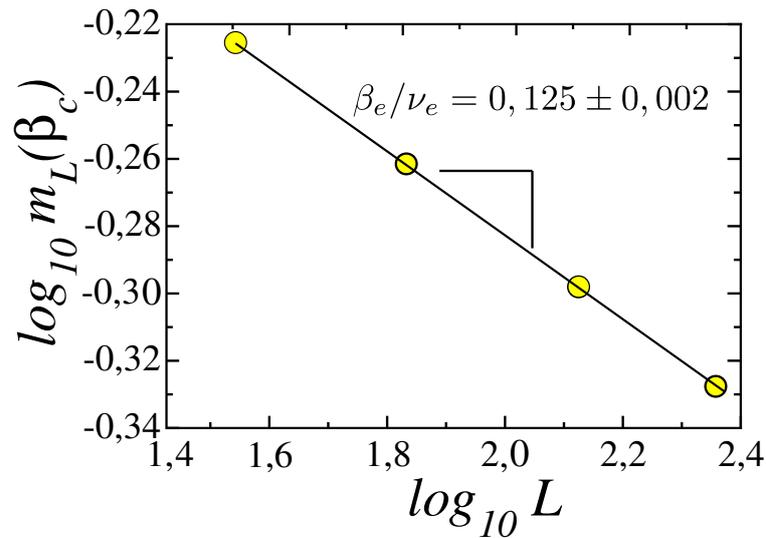


Figura 4.23: Estimativa para o expoente β_e/ν_e em sistemas de dois estados para a versão *annealing*. Magnetização calculada em $\beta = \beta_c$ para diferentes tamanhos de redes. A linha sólida representa a relação $m_L \sim L^{-\beta_e/\nu_e}$, com $\beta_e/\nu_e = 0,125 \pm 0,002$.

Na Figura 4.23 calculamos o logaritmo da magnetização $\log_{10} m_L(\beta_c)$ em função do tamanho linear $\log_{10} L$ para um sistema de dois estados em redes de tamanho linear L , utilizando a versão *annealing*. Obtemos a estimativa do expoente $\beta_e/\nu_e = 0,125 \pm 0,002$, que está em concordância com o valor teórico $\beta_e/\nu_e = 0,125$, expoente crítico do modelo de Ising no equilíbrio para $S = 2$ com $\beta_e = 1/8$ e $\nu_e = 1$.

Na Figura 4,24 exibimos o colapso de dados para a *versão annealing*, considerando os expoentes críticos calculados para o nosso modelo e considerando $\nu_e = 1$. Estes valores para os expoentes utilizados são os mesmos que descrevem o modelo de Ising com $\beta_e = 1/8$ e $\nu_e = 1$. Desta forma, o modelo do votante majoritário para $S = 2$ na versão *annealing* e com distribuição de ruído hiperbólica tem sua transição de fase descrita pela classe de universalidade de Ising.

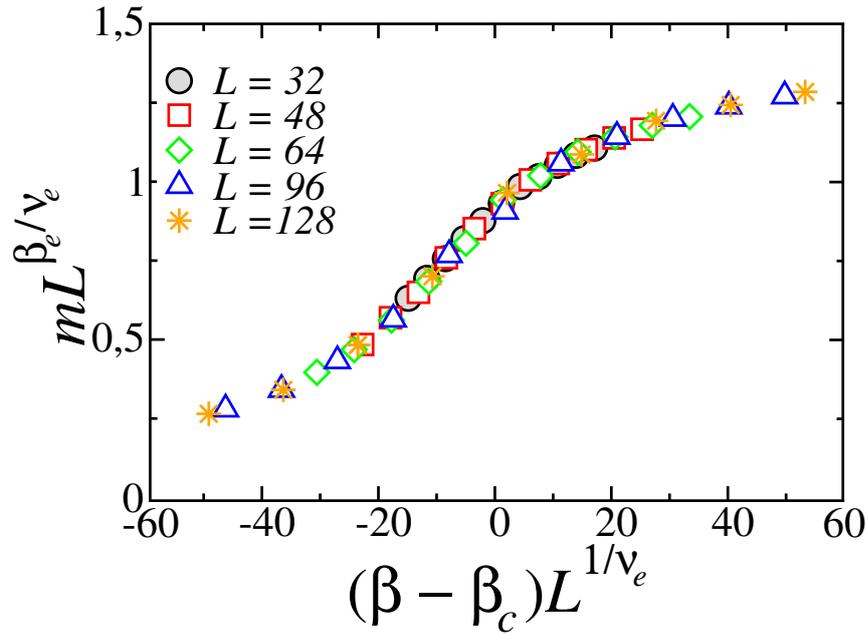


Figura 4.24: Colapso dos dados de magnetização m para $S = 2$ estados para a versão *annealing*. Os pontos são obtidos a partir de simulações de Monte Carlo para cinco tamanhos diferentes de L como indicado. Tomamos os valores dos expoentes críticos $\beta_e = 1/8$ e $\nu_e = 1$.

4.4.2 Variação do tamanho da vizinhança e diagrama de fase ($S = 2$) estados

Como foi discutido anteriormente, podemos a partir da relação entre o número de vizinhos e o valor do parâmetro de controle crítico, construir o diagrama de fase que descreve o regime ordem-desordem. Essa relação entre o tamanho de vizinhança e o parâmetro de controle, fica evidente a partir dos gráficos da magnetização $m(\beta)$ e suscetibilidade magnética $\chi(\beta)$ como mostrado na Figura 4.25 que foram calculadas para a versão *annealing*.

Na Figura 4.25 mostramos a magnetização e suscetibilidade magnética em função de β para a vizinhança de Von Neumann. De maneira análoga à versão *quenched* (seção 4.1.2), temos o deslocamento da direita para a esquerda à medida que aumentamos o tamanho da vizinhança (de primeiros até quintos vizinhos). No primeiro gráfico temos a magnetização em função do parâmetro de controle β , variando o tamanho da vizinhança de Von Neumann. O termo primeiros vizinhos faz referência aos 4 vizinhos mais próximos de sítio central e com acréscimo do tamanho da vizinhança, segundos até quintos, os gráficos localizam-se cada vez mais deslocados para a esquerda. No segundo gráfico temos a suscetibilidade magnética para primeiros até quintos vizinhos, na sequência da esquerda para a direita com valores das flutuações diminuindo em relação crescimento da vizinhança.

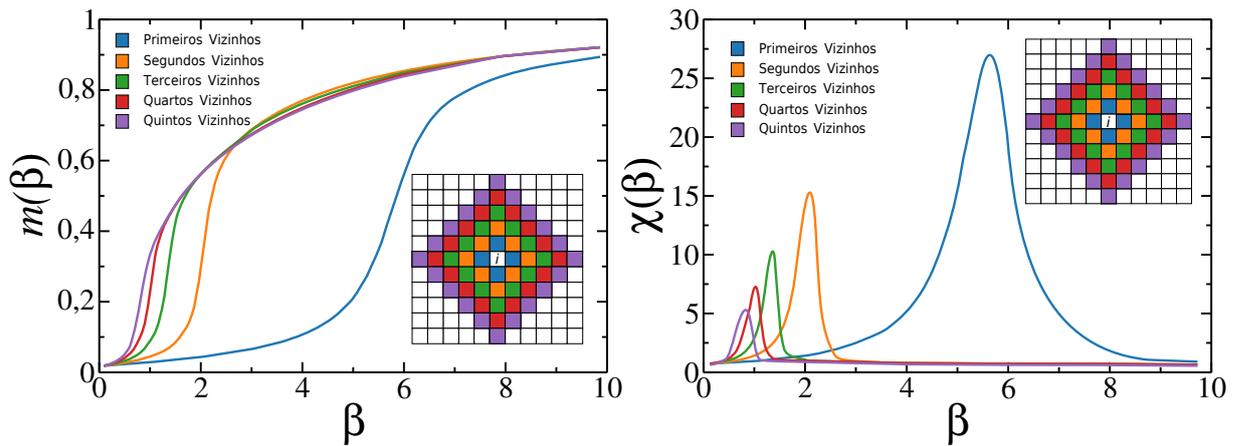


Figura 4.25: Magnetização e suscetibilidade magnética em função de β variando a vizinhança de Von Neumann. Versão *annealing* com distribuição de ruídos variáveis com o tempo.

Na figura 4.26 temos o diagrama de fase da transição ordem-desordem para a versão *annealing*. Temos que os spins iniciam-se na fase desordenada (sem consenso) para valores abaixo de β_c . Na região em que o valor do parâmetro crítico é atingido, o sistema opta pelo estado ordenado e ocorre uma transição de fase do tipo ordem-desordem. À medida que o tamanho da vizinhança aumenta (eixo N_v), o valor necessário de β_c para permanecer no regime ferromagnético diminui (eixo β). Essa queda do valor crítico é descrito por uma lei de potência com ajuste indicado na figura interna.

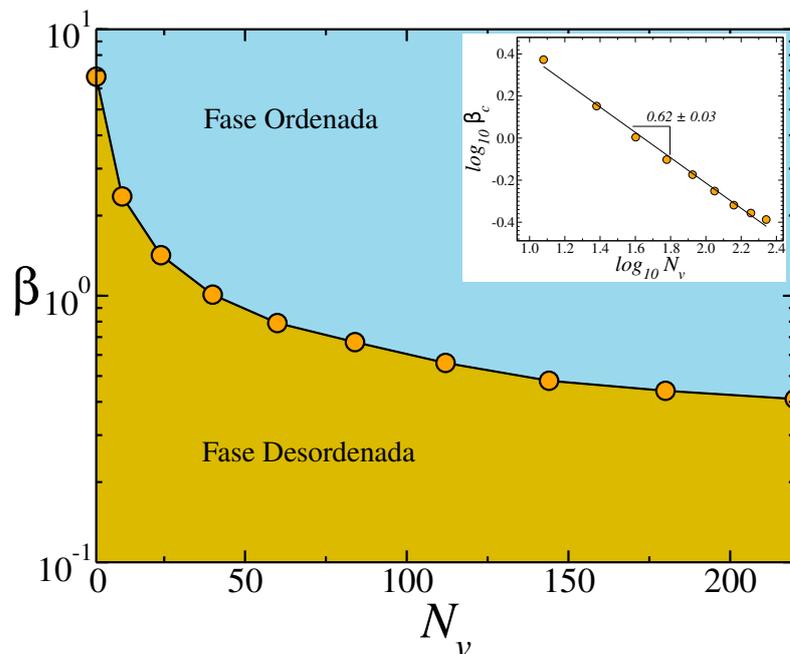


Figura 4.26: Diagrama de fase do parâmetro de controle em função do número de vizinhos para $S = 2$ estados para a versão *annealing*. A relação entre β versus N_v (figura interna) é descrita por uma lei de potência com expoente $0,62 \pm 0,03$.

5 Conclusão e perspectivas

Neste trabalho, através de simulações de Monte Carlo, estudamos o modelo do votante majoritário onde introduzimos uma distribuição hiperbólica para o parâmetro de ruído, considerando ainda sistemas para S estados, com $S = 2, 3$ e 4 , e variando o alcance das interações. O número de estados aqui analisados são aqueles para os quais o modelo descreveu transições de fase contínuas, do tipo ordem-desordem, para um dado valor de $\beta = \beta_c$. Observamos, a partir do cálculo do cumulante de quarta ordem de Binder, que para um dado valor de S , β_c é fortemente influenciado pelo número N_v de vizinhos de um dado sítio. Desta forma, construímos diagramas de fases no espaço de parâmetros definido por $N_v \times \beta$ e observamos uma relação funcional na forma $\beta_c \sim N_v^\delta$, com δ sendo em princípio dependente do número de estados. Precisamente, obtemos $\delta = 0,65 \pm 0,01$ para $S = 2$, $\delta = 0,93 \pm 0,01$ para $S = 3$, $\delta = 0,92 \pm 0,01$ para $S = 4$.

Através da análise de escala de tamanho finito, caracterizamos as transições de fase observadas. Assim, para $S = 2$ encontramos os valores $\beta_e/\nu_e = 0,124 \pm 0,002$ e $\gamma_e/\nu_e = 1,70 \pm 0,08$ que comparando com os valores $\nu_e = 1$, $\gamma_e = 7/4$ e $\beta_e = 1/8$ do modelo de Ising no equilíbrio, podemos afirmar que a transição é descrita pela classe de universalidade de Ising.

Para $S = 3$, encontramos os valores $\beta_e/\nu_e = 0,132 \pm 0,003$ e $\gamma_e/\nu_e = 1,73 \pm 0,06$, que correspondem aos expoentes crítico da classe de universalidade de Potts dado $S = 3$ com valores $\beta_e = 1/9$, $\gamma_e = 13/9$ e $\nu_e = 5/6$, e portanto, a transição é descrita pela classe de universalidade de Potts em $S = 3$.

Para $S = 4$, modelo de Potts com 4 estados, encontramos os valores $\beta_e/\nu_e = 0,125 \pm 0,005$ e $\gamma_e/\nu_e = 1,75 \pm 0,08$, cujos valores teóricos são $\beta_e = 1/12$, $\gamma_e = 7/6$ e $\nu_e = 2/3$, e podemos afirmar que a transição é descrita pela classe de universalidade de Potts.

Os resultados acima são para uma versão em que os ruídos são congelados (*quenched*) durante a simulação de uma dada amostra. Uma versão recozida (*annealing*) também foi estuda para sistemas com $S = 2$ estados. Observamos novamente transições contínuas

descritas pela classe de universalidade de Ising. Além disso, obtemos de forma analítica, uma relação entre o ruído médio e valor de β_c considerando interações de primeiros vizinhos.

Temos como perspectivas estudar o modelo do votante majoritário com a distribuição de hiperbólica de ruídos correlacionada. Até o presente momento, o ruído de um dado sítio é sorteado independentemente do ruído da sua vizinhança, desse modo, pretendemos verificar como a correlação entre a distribuição de ruídos pode modificar os cenários descritos para o nosso modelo.

Outra perspectiva é estudar o modelo do votante majoritário considerando o ruído distribuído hiperbolicamente para diferentes topologias, como em redes de Kleinberg [24, 25], em redes aleatórias [26], com diferentes configurações de vizinhos [27, 28] e para diferentes número de estados [29, 30], bem como em transições de fase descontínuas caracterizadas pelo número de estados $S > 4$.

Referências

- [1] CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of modern physics*, APS, v. 81, n. 2, p. 591, 2009.
- [2] CHAKRABARTI, B. K.; CHAKRABORTI, A.; CHATTERJEE, A. *Econophysics and sociophysics: trends and perspectives*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2007.
- [3] STAUFFER, D. et al. *Biology, sociology, geology by computational physicists*. [S.l.]: Elsevier, 2006.
- [4] LISSAMAN, P.; SHOLLENBERGER, C. A. Formation flight of birds. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 168, n. 3934, p. 1003–1005, 1970.
- [5] LI, L. et al. Chaos–order transition in foraging behavior of ants. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 111, n. 23, p. 8392–8397, 2014.
- [6] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006.
- [7] STANLEY, H. E. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. [S.l.]: Oxford University Press, New York, 1971.
- [8] BETTENCOURT, L. M. et al. Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 104, n. 17, p. 7301–7306, 2007.
- [9] MELO, H. P. M. et al. Statistical signs of social influence on suicides. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 4, p. 6239, 2014.
- [10] OLIVEIRA, E. A.; JR, J. S. A.; MAKSE, H. A. Large cities are less green. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 4, p. 4235, 2014.
- [11] RAMOS, M. et al. How does public opinion become extreme? *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 5, p. 10032, 2015.
- [12] ONSAGER, L. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, APS, v. 65, n. 3-4, p. 117, 1944.
- [13] OLIVEIRA, M. J. de. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35*. [S.l.]: EdUSP, 2001.
- [14] CLIFFORD, P.; SUDBURY, A. A model for spatial conflict. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 60, n. 3, p. 581–588, 1973.
- [15] HOLLEY, R. A.; LIGGETT, T. M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *The annals of probability*, JSTOR, p. 643–663, 1975.

- [16] LIGGETT, T. *Interacting particle systems Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. [S.l.]: New York: Springer, 1985.
- [17] WEIDLICH, W. The statistical description of polarization phenomena in society. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, Wiley Online Library, v. 24, n. 2, p. 251–266, 1971.
- [18] HELBING, D. A mathematical model for the behavior of pedestrians. *Behavioral science*, Wiley Online Library, v. 36, n. 4, p. 298–310, 1991.
- [19] WEIDLICH, W. Physics and social science—the approach of synergetics. *Physics reports*, Elsevier, v. 204, n. 1, p. 1–163, 1991.
- [20] WEIDLICH, W. *Sociodynamics: A systematic approach to mathematical modelling in the social sciences*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006.
- [21] TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*. [S.l.]: Edusp, 2001.
- [22] OLIVEIRA, M. J. de. Isotropic majority-vote model on a square lattice. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 66, n. 1-2, p. 273–281, 1992.
- [23] VILELA, A. L.; MOREIRA, F. B.; SOUZA, A. J. de. Majority-vote model with a bimodal distribution of noises. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 391, n. 24, p. 6456–6462, 2012.
- [24] KLEINBERG, J. M. Navigation in a small world. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 406, n. 6798, p. 845, 2000.
- [25] SAMPAIO-FILHO, C. et al. Majority-vote model on spatially embedded networks: Crossover from mean-field to ising universality classes. *Physical Review E*, APS, v. 93, n. 5, p. 052101, 2016.
- [26] PEREIRA, L. F. C. *Diagrama de fases e expoentes críticos do modelo do voto da maioria em grafos aleatórios*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2005.
- [27] SAMPAIO-FILHO, C.; MOREIRA, F. Block voter model: Phase diagram and critical behavior. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 5, p. 051133, 2011.
- [28] ARAÚJO, J. M. de; FILHO, C. I. S.; MOREIRA, F. G. Noise induced phase transition in the s-state block voter model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 508, p. 642–649, 2018.
- [29] MELO, D. F.; PEREIRA, L. F.; MOREIRA, F. The phase diagram and critical behavior of the three-state majority-vote model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2010, n. 11, p. P11032, 2010.
- [30] CHEN, H.; LI, G. Phase transitions in a multistate majority-vote model on complex networks. *Physical Review E*, APS, v. 97, n. 6, p. 062304, 2018.
- [31] GRINSTEIN, G.; JAYAPRAKASH, C.; HE, Y. Statistical mechanics of probabilistic cellular automata. *Physical review letters*, APS, v. 55, n. 23, p. 2527, 1985.

- [32] JAEGER, G. The ehrenfest classification of phase transitions: introduction and evolution. *Archive for history of exact sciences*, Springer, v. 53, n. 1, p. 51–81, 1998.
- [33] STANLEY, H. E. *Phase transitions and critical phenomena*. [S.l.]: Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [34] YEOMANS, J. M. *Statistical mechanics of phase transitions*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992.
- [35] BINDER, K. Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, Springer, v. 43, n. 2, p. 119–140, 1981.
- [36] NEWMAN, M.; BARKEMA, G. *Monte carlo methods in statistical physics chapter 1-4*. [S.l.]: Oxford University Press: New York, USA, 1999.
- [37] BREUKELAAR, R.; BÄCK, T. Using a genetic algorithm to evolve behavior in multi dimensional cellular automata: emergence of behavior. In: ACM. *Proceedings of the 7th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. [S.l.], 2005. p. 107–114.
- [38] KLOVE, T. et al. Permutation arrays under the chebyshev distance. *IEEE Transactions on Information Theory*, IEEE, v. 56, n. 6, p. 2611–2617, 2010.