

Ortale, F. L. (2007). Caminhos para a formação do professor reflexivo. In: Maria Antonia Granville. (Org.). Teorias e Práticas na Formação de Professores. 1 ed. Campinas: Papyrus, 41-66.

Perrenoud, P. (1999). Construir as competências desde a escola. Porto Alegre: Artmed Editora.

Perrenoud, P. (1999). Avaliação entre duas lógicas: da excelência à regulação das aprendizagens. Porto Alegre: Artmed.



## **UM ESTUDO DO ENSINO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA COM O USO DA SEQUÊNCIA FEDATHI - UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA AS LICENCIATURAS**

Alessandro Mendonça Nasserála;  
Ana Cláudia Mendonça Pinheiro  
Universidade Federal do Ceará - UFC  
[nasserála.alessandro@gmail.com](mailto:nasserála.alessandro@gmail.com);  
[acmpinheiro@gmail.com](mailto:acmpinheiro@gmail.com)

### ***Resumo***

A Construção lógico-dedutiva das Integrais Impróprias podem apresentar dificuldades de generalização pelo licenciando, pois possuem bases de natureza complexa. Entretanto, a visualização proporciona elementos tácitos e intuitivos que colaboram na compreensão e verificação dos resultados. Esse estudo objetivou a discussão do ensino da Integral Imprópria com o uso da Sequência Fedathi baseando-se na resolução de problemas. O procedimento metodológico consistiu na preparação de uma sequência didática, aplicação e análise dos resultados. A fundamentação teórica encontra-se nos estudos de Guidorizzi (1998), Stewart (2011), relativos às noções de

Integrais Impróprias. Os resultados apontaram uma melhor compreensão e disposição dos participantes em enunciar o conceito de Integral Imprópria e sua aplicação em resolução de problemas. O uso do *software* colabora na visualização de conceitos relativamente complexos. Concluiu-se que a metodologia baseada na resolução de problemas e visualização através de *software* é um modelo mais acessível a ser incorporado na atividade docente do licenciando para o conteúdo de Integrais Impróprias.

*Palavras-chave:* Integral Imprópria; Sequência Fedathi; Geogebra.

### **1. Introdução**

O estudo da Integral Imprópria ou Generalizada é geralmente trabalhado num curso de Cálculo II, muitas vezes apenas utilizando o recurso do quadro, pincel e papel. Geralmente, não se tem uma preocupação em trabalhar uma Sequência Didática de ensino, o que pode vir a dificultar o aprendizado e até mesmo prejudicar o ensino deste conteúdo. Dessa forma, buscou-se efetivar uma parceria entre uma Sequência de Ensino e um *software* que pudesse auxiliar na visualização dessas Integrais Impróprias.

Sabe-se que as Integrais Impróprias são aplicadas em várias áreas de conhecimentos como a medicina, física, estatística entre outras. Porém, quando tratadas nos cursos de licenciaturas, principalmente na licenciatura de Matemática, muitas vezes não se tem o cuidado de proporcionar uma situação mais significativa para o aluno, essa dificuldade aliada à falta de atividades que visem à visualização geométrica, pode dificultar o ensino e a aprendizagem das Integrais Impróprias. O conteúdo pode perder algumas conjecturas por parte dos alunos que poderiam trazer contribuições significativas na construção do conhecimento.

Este trabalho foi idealizado após uma reflexão sobre estes problemas. Discutidos e vivenciados na disciplina de Didática da Matemática, no curso de pós-graduação da Universidade

Federal do Ceará – UFC. As reflexões apontaram para se idealizar uma proposta metodológica que contribuísse para alunos e professores das diversas licenciaturas que poderiam se deparar com o estudo das Integrais Impróprias. No intuito de atender a essas expectativas metodológicas. Foi realizada uma experiência usando o *software* Geogebra, livre e de fácil acesso, com a Sequência Fedathi que é objeto de estudos no Laboratório de Pesquisa Multimeios da UFC. Dessa forma, preparou-se uma sessão didática buscando como perspectiva uma aprendizagem significativa e construtiva para alunos; e organizada para os professores, possibilitando algumas análises e contribuições dos colegas presentes na disciplina.

## **2. A Utilização da Sequência Fedathi como aporte metodológico no Ensino da Integral Imprópria**

Na busca de uma melhor visualização de problemas recorrentes sobre o ensino das Integrais Impróprias, buscou-se uma parceria entre Sequência Fedathi e o *software* Geogebra.

A Sequência Fedathi, segundo Souza (2010, p.83) de forma resumida evidencia que “propõe uma sequência metodológica para o ensino e pesquisa em Matemática, denominada Sequência Fedathi. O modelo pressupõe a realização de quatro fases sequenciais e interdependentes, denominadas: (F.1) Tomada de posição - apresentação do problema. Nesta etapa é feita abordagem inicial através de contextualização da situação-problema apresentada. (F.2) Maturação - compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. (F.3) Solução - representação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema. Nesta ocorre à discussão das soluções elaboradas pelos alunos, buscando identificar os possíveis erros e qual solução mais indicada para o problema. (F.4) Prova - formalização do modelo matemático a ser ensinado”.

Nesta pesquisa foram seguidos todos estes passos, porém antes da primeira fase (Tomada de Posição) foi necessário se fazer uma espécie de nivelamento, ao qual a Sequência Fedathi

chama de *plateau*. Pois, os alunos não estavam familiarizados com algumas definições e teoremas importantes que antecedem o estudo das Integrais Impróprias.

O *software* Geogebra aparece como importante parceiro na construção desse conhecimento, pois facilita a visualização conforme Alves (2011, p. 51) afirma que “a visualização de uma série de exemplos auxilia os estudantes na absorção de conceitos que podem ser difíceis de compreender em suas formulações matemáticas abstratas, especialmente nos primeiros dois anos do currículo universitário. A partir deste ponto de vista o uso do computador é prático e eficiente, e se o *software* conduz a uma interativa modificação dos dados, podemos facilmente mudar os parâmetros para um exemplo dado e realizar nova escolha”.

Abaixo o mapa conceitual do Geogebra e a Integral Imprópria, mostrando as possíveis intervenções do *software*.

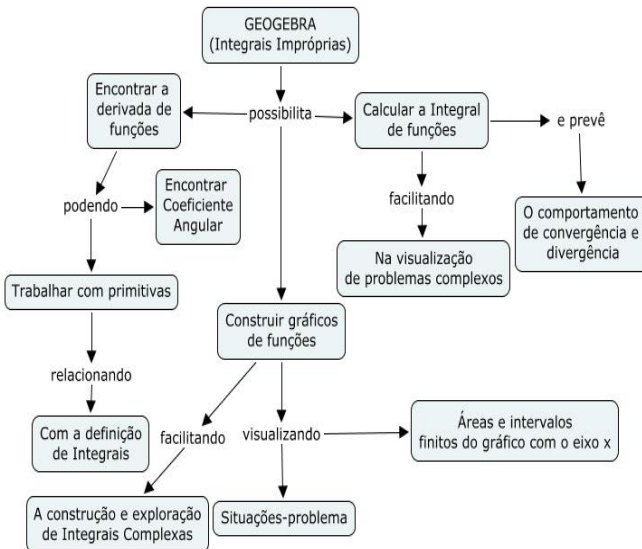


Figura 1. Mapa conceitual do Geogebra usando Integral Imprópria (Fonte: Pesquisa direta)

Na figura 1 acima, se pode observar um mapa conceitual do Geogebra mostrando como o mesmo pode ser uma ferramenta útil na construção do conhecimento de Integrais Impróprias, e como Geogebra possibilita resolver Integrais complexas e representar graficamente, possibilitando prevê o seu comportamento visualizando convergência e divergência. Isto se torna um importante auxílio para o conhecimento heurístico que pode ser desenvolvido em situações didáticas ou até mesmo jogos formulados pelo professor. Pois a Tomada de posição pode ser feita de diversas formas, ficando a critério do professor no momento do planejamento, que antecede ao trabalho proposto.

Foi escolhida apenas uma situação-problema que foi aplicada na turma de Didática da Matemática para ser apresentada aqui, a ideia foi usar a visualização como fonte de construção do conhecimento, porém conforme Alves (2011, p.51) afirma que “a visualização pode inegavelmente superar alguns entraves para a aprendizagem, mas também pode produzir outros. Ademais, a compreensão intuitiva ensinada pela visualização é necessária à compreensão, mas não é suficiente para a evolução de um raciocínio conceitual posterior relacionado ao mesmo objeto matemático”.

Não se pode apenas se basear na visualização para se atingir os objetivos esperados numa aula ou proposta de trabalho, dessa forma foram usados os pressupostos metodológicos da Sequência Fedathi para tentar superar eventuais entraves na aprendizagem.

O embasamento teórico usado acerca do estudo de Integrais Impróprias foi retirado de Guidorizzi (1998) e Stewart (2011), fazendo algumas alterações se pode definir as Integrais Impróprias como sendo, definição 1 : Se  $\int_k^t f(x) dx$  existe para cada número  $k \geq a$ , então  $\int_k^\infty f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_k^x f(x) dx$  desde que o limite exista. De certa forma também se pode dizer que, Se  $\int_t^b f(x) dx$  existe para cada número  $t \leq b$ , então

$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$  desde que o limite exista. É importante salientar que as Integrais Impróprias  $\int_k^{\infty} f(x) dx$  e

$\int_{-\infty}^b f(x) dx$  são chamadas convergentes se os limites correspondentes existem e divergentes se os limites não existirem. Por analogia tem-se a definição 2: Se  $f$  é contínua em  $[a, b)$  e descontínua em  $b$ , então  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x) dx$  se esse limite existir. Como também se pode dizer que, se  $f$  é contínua em  $(a, b]$  e descontínua em  $a$ , então  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a} \int_t^b f(x) dx$  se esse limite existir. Usando estes conhecimentos prévios, a seguir uma atividade com o auxílio do Geogebra e com apoio na Sequência Fedathi.

O problema proposto foi o seguinte: Discuta a convergência ou divergência da  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  representada no gráfico abaixo.

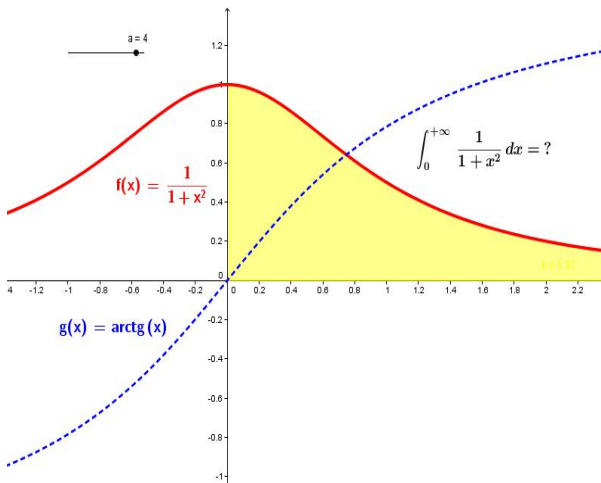


Figura 2. Tomada de Posição com auxílio do Geogebra (Fonte: Pesquisa direta)

Cumprido as três primeiras fases da Sequência Fedathi, aproveitando ao máximo às soluções que os alunos fomentaram ou construíram. Tem-se a seguir a formalização do problema da Figura 2, que é justamente o processo de finalização da situação didática.

Quando se visualiza um problema dessa natureza deve-se explorar ao máximo o *software* utilizado. Feito todas as possíveis observações, conversando com os alunos, desenvolvendo as conjecturas, fazendo perguntas. O professor deve começar a construir a formalização da questão proposta.

A ideia é usar a definição de Integral Imprópria aliada à visualização do gráfico (Figura 2) na busca de explorar o problema proposto. Na fase da prova, são necessários os cálculos algébricos para não perder o rigor matemático.

Então, para resolver a  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ , e feita às devidas conjecturas com os alunos, deve-se aplicar a definição de Integral Imprópria e observar o gráfico, então se tem que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} [tg^{-1} x]_0^t$ , logo se pode ver que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (tg^{-1} t - tg^{-1} 0) = \frac{\pi}{2}$ . Dessa forma, conclui-se que a Integral converge. Esses cálculos são resultados das mediações, intervenções e interações do professor para que o aluno a partir do gráfico proposto do Geogebra construa de forma mais significativa o conceito inicial proposto acerca das Integrais Impróprias, fato este importante para o sucesso da sessão didática.

### 3. Considerações Finais

A proposta didática ora apresentada foi preparada e aplicada para alunos da disciplina de Didática da Matemática. A coleta das informações foi por meio de questionários e discussões acerca do conteúdo das Integrais Impróprias. Concluiu-se que a metodologia Sequência Fedathi e a visualização através do *software* Geogebra apresentaram-se como um modelo didático eficaz e acessível e, portanto, se recomenda que seja

incorporada na atividade docente do licenciando na aprendizagem do conteúdo de Integrais Impróprias.

Desta forma, pode facilitar conjecturas acerca da situação didática proposta, além de propiciar uma melhor exploração do conteúdo em questão de forma mais dinâmica. Portanto, construir conhecimento através da visualização, pode levar o professor a atingir êxito em relação ao desenvolvimento de suas aulas.

### ***Referências***

Alves, Francisco R. V. (2011) Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do software Geogebra. In: Actas de La Conferencia Latinoamericana de Geogebra, p. 48-55. Acessado em novembro de 2013 no site: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/73.pdf>.

Guidorizzi, Hamilton Luiz.(2012) Cálculo, LTC, v. 1, São Paulo, Brasil, 585p.

Souza, M.J.A.(2010) Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediada por tecnologias digitais. Tese de doutorado em educação. Universidade Federal do Ceará. 231p.

Stewart, James.(2012) Cálculo, CENGAGE Learning, v. 1, São Paulo, Brasil, 535p.

