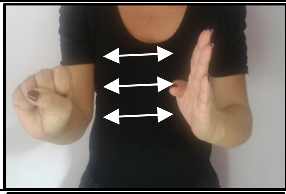
Sistema	
Teorema de Pitágoras	
Teorema de Talles	

Fonte: Pesquisa de campo, 2012.

❖❖❖

CONSTRUÇÕES ALGORÍTMICAS E DEMONSTRAÇÕES AXIOMÁTICAS

Luiza Maria Morais Lima,
Hermínio Borges Neto,
Ana Cláudia Mendonça Pinheiro
Faculdade Católica Rainha do Sertão
FCRS; Universidade Federal do Ceará – UFC
luiza@multimeios.ufc.br,
herminio@multimeios.ufc.br,
anaclaudia@multimeios.ufc.br

Resumo

Neste trabalho discutimos a utilização das provas matemáticas e demonstrações através de procedimentos construtivos e lógicos, no sentido de reforçar a compreensão do aluno e obter um aprendizado mais concreto e completo. Para isso, estudamos diferentes tipos de demonstração, tais como Demonstração Direta, Por Contraposição/Por Absurdo, Por Contradição, Por Indução e Exaustão, bem como os benefícios de suas aplicações durante as aulas de matemática e o uso de processos construtivos no processo de ensino e aprendizagem. Apresentamos alguns objetos matemáticos, analisando diferentes propostas de demonstrações e construções algorítmicas, que reforçam o experimento em sala de aula como ferramenta de ensino. Nosso objetivo é discutir a utilização das provas e demonstrações através de procedimentos construtivos e lógicos, no sentido de reforçar a compreensão do aluno no processo de aprendizagem na educação básica. Ao realizar demonstrações construtivas, os alunos podem experimentar, fazer conjecturas e dar um sentido ao conhecimento matemático antes de formalizá-lo.

Palavras-chave: Demonstrações, Processos Construtivos, Construções Algorítmicas, Algoritmos, Construções Geométricas.

Introdução

Atuando como professora de Matemática no ensino fundamental e médio há quase dez anos, percebi que muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos decorrem da maneira excessivamente técnica como ela vem sendo ensinada. Há, em nossas escolas, uma concepção de que a Matemática é constituída apenas por um conjunto de técnicas. Como consequência disso, o ensino de Matemática se volta para a transmissão mecânica dessas técnicas. O professor repassa os conteúdos, apelando apenas para o uso de regras, muitas vezes sem justificativa, forçando o aluno a absorver esse conhecimento pela mera repetição dessas regras.

Para levar a Matemática o mais próximo possível da realidade do aluno, o professor enfatiza aplicações e, muitas vezes, as demonstrações são deixadas de lado. Um dos objetivos da demonstração é convencer os estudantes, através da razão e da intuição, sobre a verdade de certas afirmações.

Para o racionalista René Descartes (2001), as demonstrações comumente utilizadas estão de acordo com esse método, onde um teorema é comprovado a partir de diversas afirmações já consideradas verdadeiras, os axiomas.

Por outro lado, se a demonstração for construída com o aluno, em seu nível de entendimento, a aprendizagem será mais eficaz. Vale ressaltar que nem sempre os conteúdos matemáticos têm aplicações reais, mas ainda assim não deixam de ter significado, e é muito importante que esse significado seja evidenciado e se relacione com o senso comum.

A Matemática estudada nas escolas é geralmente a matemática formalista, que consiste em uma ciência da dedução formal, dos axiomas para os teoremas. Os seus termos primitivos são indefinidos e as suas afirmações não têm conteúdo até a interpretarmos. Sendo assim, esse "objeto de ensino" deveria ser transmitido por quem pode oferecê-lo (professor) a quem não o possui (aluno) sem risco de que o conhecimento se modifique durante esse processo.

Segundo Lima (2013), a maioria dos professores considera os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que eles deveriam ser (re)construídos pelos alunos, de modo que os façam superar os obstáculos epistemológicos e minimizar as dificuldades conceituais. É importante que o professor conheça as etapas do conhecimento matemático, bem como as necessidades mentais e sociais que levaram o homem a produzir e utilizar esses conhecimentos, para que, em sala de aula, seus alunos possam reconstruí-los a sua maneira.

Alguns estudiosos como John Dewey (1859-1952) em seu livro Psicologia do Número (1895), vêm difundindo uma reação contra o formalismo (um ensino da matemática voltado para o uso de exemplos). Para mudar essa realidade, deve haver uma mudança de postura do educador, que deve romper os pré-conceitos a respeito da superestimação do conhecimento matemático e, principalmente, resgatar o caráter investigativo da Matemática, fazendo com que suas ideias sejam exploradas e desenvolvidas pelo aluno a partir dos seus conhecimentos prévios.

O sistema educativo, implantado com a Logse[26] na década de 1990, apostava em estratégias como a de "aprender a aprender" ou a de "aprender a pensar", mas o sistema continuou sendo o formal, com aplicação de conceitos e demonstrações técnicas, por vezes sem fundamento concreto. Se a intuição é usada no "fazer matemática", por que não usá-la em sala de aula, quando estamos ensinando matemática?

Em sala de aula, percebe-se que o "fazer" (diferente do executar, do tarefeiro) torna a matemática mais natural. Sendo assim, quando os conceitos são apresentados de forma construtiva, utilizando o raciocínio e a dedução, o aluno consegue adquirir um melhor aprendizado. "Construir a Matemática", com o objetivo de ensiná-la, é uma necessidade, já que a falta de clareza com relação ao papel que ela deve desempenhar no corpo de conhecimentos sistematizados pode ser o principal responsável pelas dificuldades crônicas de que padece o seu ensino.

Diante do exposto acima, surgem os seguintes questionamentos: Como melhorar o ensino da Matemática na Educação Básica? Que importância tem o uso de demonstrações nas aulas de Matemática? Os alunos do ensino fundamental conseguem compreender os passos das demonstrações apresentadas pelos professores? A demonstração tem algum significado para o aluno? De que maneira o uso dessa ferramenta pode ser mais eficaz?

Sendo assim, este trabalho propõe discutir a utilização das provas e demonstrações através de procedimentos construtivos e lógicos, no sentido de reforçar a compreensão do aluno no processo de aprendizagem na educação básica.

[26] Ley Orgánica General del Sistema Educativo (Fonte: O Ensino da Matemáica – Fundamentos Teóricos e Bases Pedagógicas, 2006)

Demonstrações e Construções

No trabalho Proofs and Refutations, Imre Lakatos (1976) defende que a Matemática desenvolve-se a partir de um problema (situação-problema) e de uma conjectura (possibilidade de resposta), com teoria a tomar forma. Para Lakatos, demonstração não é um processo mecânico, que conduz à verdade numa cadeia inquebrável das hipóteses às conclusões. Significa, antes, um conjunto de explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível e mais convincente, além de um processo de desenvolvimento e descoberta.

A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1999) para o ensino fundamental e para o ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica, embora não haja, no Brasil, pesquisas em número suficiente sobre a compreensão de seus mecanismos utilizados na formação dos conceitos matemáticos.

Demonstração é uma prova aceita pela comunidade (no nosso caso, matemática), fundamentada em procedimentos, métodos ou explicações apresentadas numa sequência de enunciados, organizados conforme regras determinadas. Ou seja, a demonstração não é um processo intuitivo procurando uma "imediatice" cognitiva.

As demonstrações empregam lógica. Uma afirmação só deixa de ser considerada uma conjectura após ter uma demonstração usando dedução da lógica formal. No entanto, no ensino da matemática, muitas vezes realizamos demonstrações pelo uso de uma lógica considerada informal, por incluir alguma quantidade de linguagem natural, o que pode causar ambiguidades. Apesar do processo lógico, o professor tem que ter a noção do nível de conhecimento do aluno ou estágio de desenvolvimento, para que o entendimento da demonstração seja alcançado.

O processo de validação por meio de provas e demonstrações transformou a natureza do saber matemático em uma abordagem racional argumentativa que foi capaz de superar obstáculos postos pela limitação dos instrumentos de verificação e pela preservação das tradições. A demonstração, sobretudo, é uma abordagem racional sobre o conhecimento humano e a verdade.

Nas demonstrações axiomáticas usuais, são apresentadas regras de inferência, que são restrições sintáticas que uma prova deve obedecer, num sistema matemático formal, com estruturas especificadas. Essas demonstrações podem ser do tipo: Demonstração Direta, Por Contraposição/ Por Absurdo, Por Contradição, Por Indução e Exaustão. Mesmo formalizando o que está sendo estudado, o uso desse tipo de prova, para os alunos do ensino básico, não permite a ampliação do seu aprendizado, na perspectiva de habilidades e competências para esse nível (Lima, 2013).

No construtivismo, iniciado por Brouwer em 1908, não é a experiência, nem a lógica, que determina a aceitabilidade das ideias, mas sim a intuição. Ele defende que o pensamento matemático é, portanto, um processo de construção mental, que prossegue um número finito de passos e é independente da experiência (que pode muito bem ser considerada como a "repetição", tão usada nas aulas de Matemática).

Demonstração por algoritmo ou por construção é aquela que só garante a existência de certo objeto matemático através da sua construção. Já uma demonstração construtiva fornece um algoritmo para se obter o objeto matemático em questão, sem apelar para processos infinitos.

Diferentemente do método de ensino que privilegia a transmissão de conhecimento e em que a avaliação deste conhecimento é dada pela habilidade do aluno em reproduzi-lo, a demonstração construtiva tem como princípio construir o conhecimento a partir de percepções e ações do estudante, constantemente mediadas por estruturas mentais já construídas e/ou que vão se construindo ao longo do processo. A aprendizagem matemática, neste contexto, depende das ações que caracterizam o "fazer matemática": experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar.

Uso de demonstrações e construções algorítmicas no ensino da Matemática

Para ilustrar melhor o que o trabalho defende, vamos mostrar dois exemplos matemáticos onde a construção algorítmica pode ser utilizada e quais suas vantagens em relação ao processo axiomático.

A Geometria Analítica estuda a geometria por meio de coordenadas cartesianas e álgebra, onde é utilizado o raciocínio dedutivo, a partir de axiomas e teoremas da geometria euclidiana, para a obtenção de proposições verdadeiras. O estudo de parábolas, por exemplo, parte de deduções algébricas para se chegar a sua equação e assim estudar seus elementos.

Usando a construção algorítmica, podemos construir o conceito de parábola, passo a passo com o aluno, utilizando conhecimentos geométricos prévios, de acordo com seu nível intelectual. No exemplo a seguir, temos a construção da parábola usando o programa Geogebra, que nos permite fazer construções mais eficazes do que com régua e compasso.

Sejam a reta r que passa pelos pontos A e B e o ponto F, respectivamente, a diretriz e o foco da parábola. Utilizando sua definição, marcamos, um ponto C na reta r e traçamos por ele uma reta s, perpendicular à diretriz r, onde marcaremos o ponto P. Agora, precisamos definir em que posição o ponto P deve estar na reta s, de modo que sua d(P,C) = d(P,F). Para isso, traçamos um triângulo de vértices P, C e F isósceles, que garante a congruência dos lados PC e PF. Traçamos a mediatriz do segmento FC, a interseção dessa mediatriz com a reta s é o ponto P. Como estamos buscando todos os pontos onde a distância ao foco é a mesma distância à diretriz, estamos então buscando todos os triângulos isósceles que possuem o ponto P, o foco F e um ponto da reta r como vértices. Ao deslocarmos o ponto C, pela reta r, encontramos a parábola. Notemos que, por causa da representação numérica do software a parábola não é contínua, ou seja, não se trata realmente de uma parábola, mas apenas uma representação.

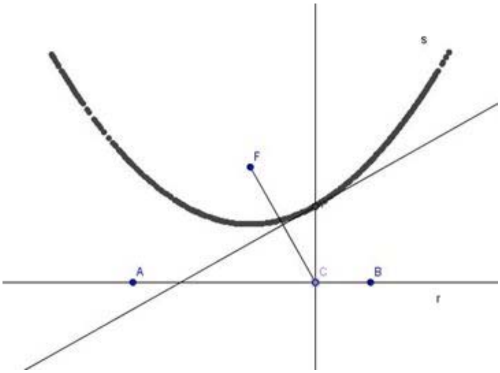


Figura 1. Parábola construída no Geogebra.

Através da construção algorítmica o aluno pode compreender melhor a definição da cônica, além de experimentar os conceitos geométricos sem precisar utilizar a álgebra, no primeiro momento. É claro que o uso das coordenadas se faz necessário, principalmente na resolução de problemas de Geometria Analítica, mas passar pelo processo de construção é importante para o desenvolvimento do raciocínio e o entendimento concreto da parábola. Além disso, a experimentação nessa construção permite responder perguntas como: O que aconteceria se o foco se aproximasse ou se afastasse da reta? O que aconteceria aos pontos se a reta diretriz mudasse de direção? Entre outras.

O que se deve levar em consideração é onde o aluno tem mais chance de aprendizado? Na dedução algébrica da equação da parábola ou na sua construção? No processo acima, o aprendizado é construído, partindo do experimento do aluno. No caso, usamos o software Geogebra, mas poderia ter sido feito também utilizando régua e compasso.

Outros tipos de demonstrações podem provar que existem pontos que formam essa parábola a partir da sua definição, mas não mostra como encontrá-los e como construí-la. Dessa forma, a construção algorítmica se faz necessária antes da demonstração algébrica, como uma introdução para o uso do cálculo algébrico, não menos importante.

Outro caso estudado foi o Algoritmo da Divisão Euclidiana, que diz: Sejam a e b dois números inteiros com $b > 0$. Existem dois únicos números inteiros tais que: $a = bq + r$. Existem diversos tipos de demonstrações que podem ser utilizados nesse caso, como por Contradição:

Consideremos $a > b$ *e*, enquanto fizer sentido nos números naturais, os números:

$$a, a - b, a - 2b, \dots, a - n \cdot b, \dots$$

Pelo Princípio da Boa Ordenação (também conhecido por Princípio da Boa Ordem ou Princípio do Menor Inteiro, afirma que todo subconjunto não vazio do conjunto dos números inteiros possui um menor elemento), o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = a - q.b$. Se $b|a$ (b divide a), então $r = 0$ e nada mais temos a provar. Se, por outro lado, se b não divide a, então r ≠ b, e, portanto basta mostrar que não pode ocorrer $r > b$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$, tal que $r = c + b$. Consequentemente, sendo $r = c + b = a - q.b$, teríamos: $c = a - (q + 1).b \in S$, com $c < r$, contradição com o fato de r ser o menor elemento de S. Portanto, temos que $a = bq + r$, com r < b, o que prova a existência de q e r.

Esse tipo de demonstração não permite que um aluno do ensino básico entenda completamente o algoritmo da divisão, antes de formalizá-lo é preciso que ele compreenda a divisão como o processo de "quantas vezes uma quantidade cabe dentro de outra". O algoritmo que apresentaremos a seguir utiliza esse conceito.

Vamos considerar a divisão de a por b. Sendo $a > b$, então diminuímos b de a, repetidas vezes, até não ser mais possível. Fazendo algumas tentativas, encontramos o maior valor q, tal que $b.q < a$. Assim: $a = b.q + r$. Se $r < a$, a divisão está concluída, se não, repetimos o processo da subtração. Como a diferença diminui, depois de a – b repetições, o processo se exaure.

Só após ter trabalhado bastante o algoritmo das divisões sucessivas é que o aluno pode adquirir uma base suficiente para que seja introduzido o algoritmo tradicional da divisão, visando obter êxito no aprendizado deste. Neste processo, o aluno pode fazer os experimentos necessários a fim de melhorar a compreensão e adquirir maior segurança no desenvolvimento de todos os passos do algoritmo.

Considerações Finais

O bloqueio e o fracasso que muitos alunos apresentam em Matemática é preocupante, principalmente para nós que a lecionamos. Fazer com que o aluno seja capaz de não somente resolver questões, mas de entender todo o processo no conhecimento matemático deve ser um objetivo do professor.

Uma aula onde o aluno possa fazer experimentos e construções a partir dos conceitos matemáticos pode levá-lo ao êxito no processo de aprendizagem e dá-lo um novo sentido à disciplina de Matemática, buscando resultados positivos. As demonstrações e construções desenvolvem um importante papel no ensino da Matemática, mas cabe ao professor e aos seus conhecimentos prévios fazer com que esse trabalho dê certo, mediando e argumentando com a turma afim de alcançarem esses objetivos.

Segundo Borges Neto (2013), uma aula onde o aluno possa fazer experimentos e construções a partir dos conceitos matemáticos pode levá-lo ao êxito no processo de aprendizagem e dá-lo um novo sentido à disciplina de Matemática, buscando resultados positivos.

A demonstração matemática tem o seu papel, mas é preciso ressaltar que o aluno passe pela experiência de construção antes dessa demonstração. É na construção, no experimento que o aluno desenvolve o pensar matemático. É o professor que, através de um discurso questionador, incentivará os alunos a seguir os passos algorítmicos, justificar, explicar, e fundamentar as proposições matemáticas.

Referências

Balacheff, N. (1987) *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, n. 2, p. 147-176.

Balacheff, N. (1982). *Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques,* Grenoble, v. 3, n. 3, 261-304.

Borges Neto, Hermínio. (1999). O *Ensino de Matemática: Analisando o raciocínio matemático do mediador*. In: Revista Educação em Debate. Fortaleza: Imprensa Universitária, Ano 21 – V. 1, nº 37.

Borges Neto, Hermínio; Costa dos Santos, Maria José (Org). (2013) *Sequência Fedathi: Uma proposta para o ensino de Ciências e Matemática.* Edições UFC, Fortaleza, Brasil, p. 67-80.

Brasil, MEC. 1999. *Parâmetros Curriculares Nacionais 5ª a 8ª Série*. Online, http://www.mec.gov.br, 14/10/1999.

Descartes, René. (2001) *Discurso do Método*. São Paulo, Martins Fontes Editora.

Huete, Juan Carlos Sánchez; Bravo, José A. Fernández. (2006) *O Ensino da Matemática: Fundamentos Teóricos e Bases Pedagógicas*. Artmed Editora, Porto Alegre, Brasil. P. 15-22.

José Machado, Nilson. (1987) *Matemática e Realidade*. Cortez Editora, Autores Associados, São Paulo, Brasil.

Lakatos, Imre. (1976) *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University.

Maria Morais Lima, Luiza. (2013) *Construções Algorítmicas e Demonstrações Axiomáticas*. Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática