SOBRE O ENSINO DAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO COM APOIO NA VISUALIZAÇÃO: UM ESTUDO DE CASO

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@ifce.edu.br

Hermínio Borges Neto
Universidade Federal do Ceará
Hermínioo@ufc.com.br

Resumo:
Registra-se no *locus* acadêmico, um ensino de privilegia um conhecimento algorítmico-operatório. Neste sentido, no contexto de ensino do Cálculo, os conteúdos conhecidos como "técnicas de integração", são um exemplo *standard*. Por outro lado, quando exploramos em nossa mediação elementos de natureza tecnológica, propiciamos outras vias de apropriação de conhecimento. Com esta preocupação, desenvolvemos um estudo de caso, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado do Ceará, no ano de 2012, com o objetivo de fornecer situações-problema envolvendo as noções de técnicas de integração, como ênfase na visualização. Os dados foram coligidos a partir da produção de cinco alunos, do curso de licenciatura em Matemática. Os instrumentos de coleta foram protocolos escritos e entrevistas semiestruturadas ao decorrer das atividades. No rol dos resultados, sublinhamos: os alunos conseguem identificar o método de integração adequada a partir da visualização gráfico-geométrica; os alunos resgatam e empregam conceitos do Cálculo Diferencial para a formulação de conjecturas no contexto do Cálculo Integral.
Palavras-chave: Padrões gráficos; Técnicas de Integração; Ensino; Padrões algébricos

1. Sobre o ensino das técnicas de integração

De modo *standard*, deparamos nos principais livros didáticos de Cálculo (GUIDORIZZI, 2010; LEIHOLD, 1994; STEWART, 2001; SIMMONS, 1988), exercícios descritos da seguinte maneira: Resolver e/ou calcular as seguintes integrais indefinidas (a) $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$; (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$; (c) $\int \frac{(x^2+2x-1)dx}{2x^3+3x^2-2x}$; (d) $\int \cos^4(x)dx$; (e) $\int sen(2x)dx \Big/ \left[\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)}\right]$.

Cabem, entretanto, alguns questionamentos e, mesmo, críticas, no que se refere aos objetivos didáticos dos itens indicados há pouco. Primeiro, não registramos nenhuma menção ou apelo a qualquer elemento, quer seja ele de natureza gráfica ou geométrica, nessa categoria de atividade. De fato, de acordo com os dados dos problemas, a ação do aprendiz, é originada, de modo inicial, na identificação de padrões algébrico-analíticos, ou seja, da identificação/escolha de uma técnica adequada (ou indicada *a priori* pelo professor) de integração com vistas à descrição de uma família de primitivas.

No rol das "técnicas de integração" apresentadas pelos livros consultados, destacamos: integração simples, integração por partes, integração de frações racionais, integração por substituição trigonométrica, integração de funções trigonométricas e inversas, etc.. Daí, de acordo com um padrão algébrico específico, identificado nos itens acima, o sujeito emprega um procedimento analítico. Em seguida, obtém uma resposta ou uma expressão, correspondente à família das primitivas da função. Todavia, a investigação aí se encerra! Nada é mencionado sobre as condições de integrabilidade, sobre a continuidade da função integranda ou do comportamento de sua família de primitivas.

Segundo, a exploração predominante da noção de integral indefinida, pode estimular no aluno uma espécie de despreocupação com o caráter de não integrabilidade das funções integrandas que exibimos nos itens anteriores. Com efeito, ao concluir, por exemplo, que $\int \cos^4(x)dx = 3x/8 + 1/4\,sen(2x) + 1/16\,sen(4x) + K$, com $K \in IR$; o aluno pode ser instigado a investigar sobre as possibilidades de existência e do cálculo da integral definida $\int_a^b \cos^4(x)dx$, onde o intervalo $[a,b] \subset IR$. Em inúmeros casos, os cálculos numéricos podem ser fastidiosos. Não obstante, a integral do item (d) apresenta uma menor complexidade quando comparada, por exemplo, com a seguinte integral $\int sen(2x)dx \Big/ \left[\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)}\right]$, do item (e). Em ambas as situações, os livros didáticos de Cálculo perdem a oportunidade de explorar propriedades qualitativas, tal como a periodicidade, relacionada a ambas as funções presentes na integral, bem como condições de existência para suas primitivas.

Terceiro, a ênfase nos procedimentos algorítmicos relegam, para o segundo plano, as condições matemáticas exigidas, que garantem o caráter de consistência das operações matemáticas perpetradas ao decorrer de uma solução. Ademais, segundo Lima (2010, p. 132), no caso de uma função $f: I \to IR$ contínua neste intervalo, a condição em que f admite uma primitiva F no mesmo, é uma condição necessária e suficiente para que possamos descrever a integral indefinida. Em termos numéricos, é importante verificar e interpretar $F'(a) = f(a)$, para $a \in I$. Daí, podemos explorar a noção de que "o processo de passar f para F melhora, ou amacia as qualidades da função." (LIMA, 2010, p. 322).

Diante desses três elementos apontados, quando consideramos a integral do item (c) $\int \frac{(x^2+2x-1)dx}{2x^3+3x^2-2x}$, depreendemos que se trata do método de frações parciais. De modo padrão, em sua solução analítico-algébrica, desconsideramos seu comportamento nos pontos que representam as raízes da fração racional presente nessa integral. Mas, com o apoio gráfico da tecnologia, conseguimos transmitir e identificar, do ponto de vista topológico, as regiões da reta em que podemos avaliar a integral definida, e se a função possui imagem é limitada. E outras regiões aonde sua imagem é limitada e/ou ilimitada. Quando destacamos as representações gráficas, o sujeito tem a possibilidade de resgatar e readaptar, só que agora no contexto do Cálculo Integral, seus conhecimentos a respeito de retas assíntotas, estudados no primeiro ano acadêmico, ainda no contexto dos limites.

No caso, por exemplo, da integral (a) $\int dx/\left[2x^2+8x+20\right]$, contamos com uma função, cujo domínio é toda a reta real. Ademais, na fração $1/[2x^2+8x+20]$ não encontramos nenhum número real que anule o denominador. Daí, diferentemente do caso anterior, sua imagem deve ser sempre limitada (ver figura 1). Ademais, com o auxílio da tecnologia, podemos proporcionar uma situação de experimentação, na qual, o aprendiz pode verificar, com base no gráfico abaixo (figura 1), que $\forall a \in IR$, se tem $F'(a) = f(a)$, onde $F(x)$ é uma das primitivas da função $f(x) = 1/[2x^2+8x+20]$. Reparemos o padrão do comportamento geométrico das retas tangentes ao gráfico em cada ponto da função $F(x)$.

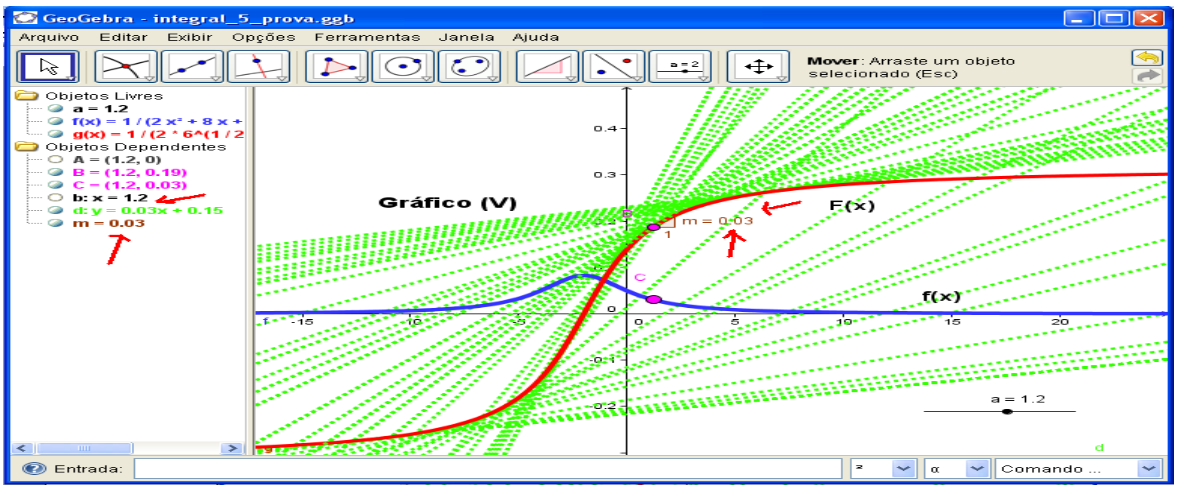


Figura 1. Descrição gráfico-geométrica da condição de aplicação do TFC

Na figura 1, evidenciamos que $F'(1,2) = f(1,2) = 0,03$, ou seja, geometricamente nos diz que o valor numérico da função integranda apresenta o mesmo valor numérico assumido pela derivada da primitiva $F(x)$ a qual, segundo os conhecimentos prévios, corresponde à declividade de uma reta tangente ao gráfico da função $F(x)$.

Para concluir esta seção introdutória, o exemplos de objetos e técnica matemática que buscamos investigar neste artigo constitui outro caso de objeto matemático, discutido no *locus* acadêmico, sob um viés estrito da algoritmização, do *pensamento algoritmico* (OTTE, 1991, p. 285). Nesta perspectiva, o solucionador do problema que envolve uma técnica de integração, não sabe, de antemão, se será bem sucedido ou falhará. É um conhecimento sem percepção, segundo a descrição fornecida por Otte (1991, p. 285).

Outra via, por exemplo, é indicada nos trabalhos de Alves (2012a; 2012b). Por meio de uma mediação imbuída de alguns dos seus pressupostos, temos a possibilidade de estimular o *insight*, a partir da inspeção/percepção de padrões gráfico-geométricos, relacionados tanto com cada categoria de integral indefinida e integral definida.

Esclarecidos esses últimos aspectos, indicamos nos parágrafos anteriores, uma problemática identificada no ensino do Cálculo Integral que restringe a ação do aprendiz a um conjunto de técnicas adequadas para cada tipo de integral. Não obstante, a partir de uma mediação amparada pelos recursos tecnológicos, levantamos as seguintes hipóteses:

Hipótese 1: para cada tipo de técnica de integração é possível descrever seus caracteres gráficos-geométricos, a partir do apoio computacional. Daí, não apenas os padrões algébrico-analíticos podem ser explorados em sua identificação e resolução;

Hipótese 2: a descrição gráfico-geométrica possibilita a exploração de concepções vinculadas ao Cálculo Diferencial no contexto do ensino do Cálculo Integral.

Hipótese 3: os alunos manifestam predileção por técnicas algoritmicas, de natureza algébrica, mobilizadas por regras de inferências lógicas, que automatizam as ações. Assim, com um contexto de entraves preocupantes indicados há pouco, seguindo-se da descrição das três hipóteses de trabalho anteriores, passaremos à apresentação do contexto específico, no qual, transcorreu nossa investigação, de caráter exploratório.

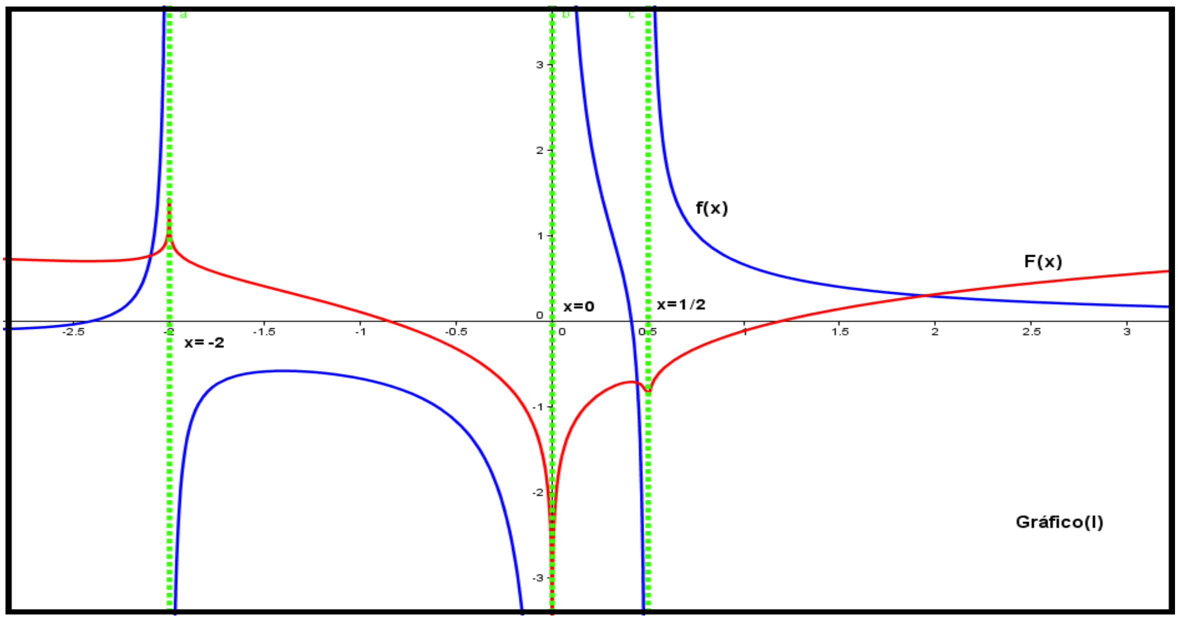
2. Metodologia e Procedimentos

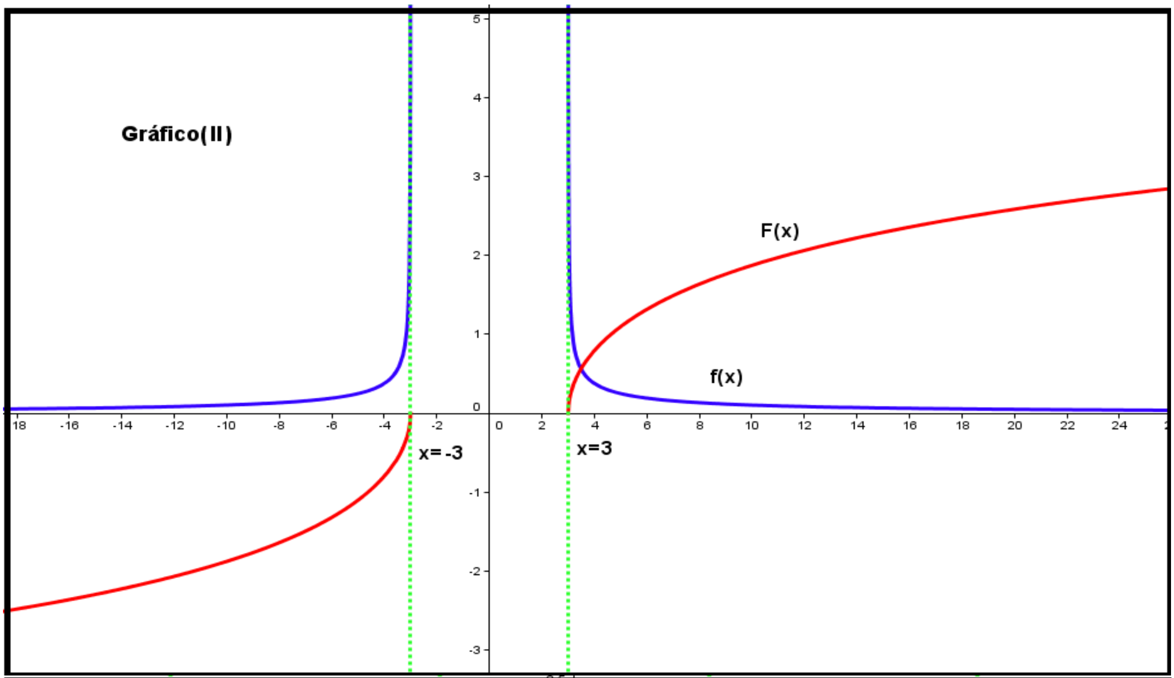
O estudo desenvolvido no segundo semestre de 2012, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE (campus Fortaleza) se apoiou em um *design* de investigação (PONTE, 1994, p. 4) de cunho qualitativo. Nesta modalidade, “a fonte direta de dados foi o ambiente natural e o investigador o instrumento principal.” (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 47). De caráter descritivo e exploratório, nossa investigação considerou dados oriundos de entrevistas semi-estruturadas realizadas ao decorrer de uma atividade, fotos, gravações de áudio (com o *software Cantasia*) e os protocolos das atividades produzidos por cinco sujeitos (alunos 1, 2, 3, 4 e 5). Cabe acrescentar que este grupo de (cinco) alunos cursava, há época, o 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática (em 2012) e, na disciplina Cálculo II, já detinham todo o conhecimento formal que os qualificava para a resolução da atividade que apresentaremos.

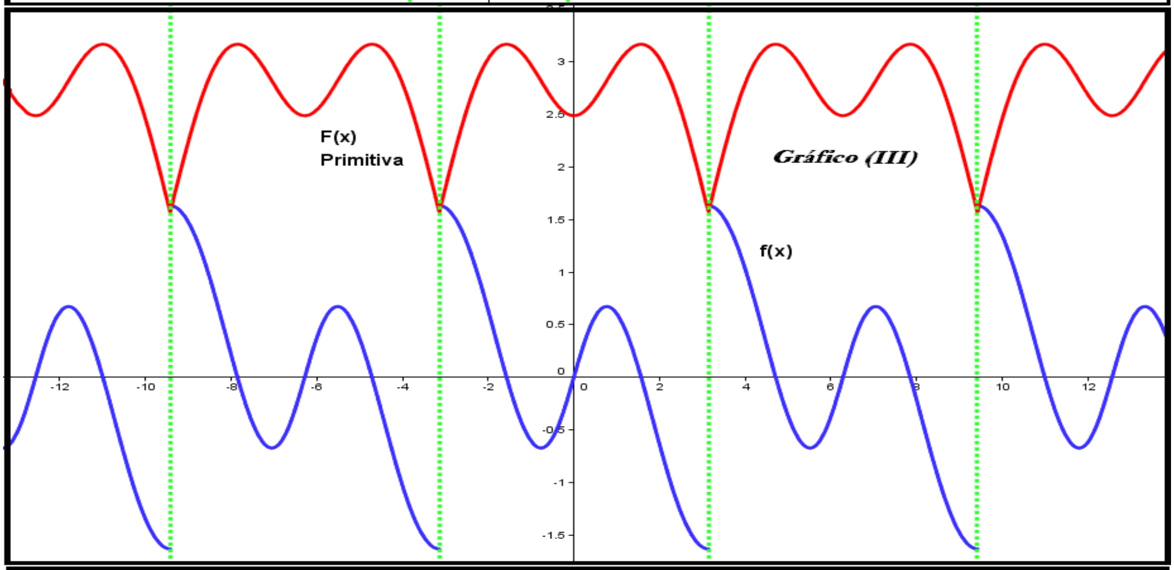
Tendo em vista, pois, do nosso interesse de compreender um determinado fenômeno, num contexto determinado e um assunto particular, o tipo de estudo escolhido foi o estudo de caso (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 89). Assim, diante de alguns entraves relatados e sintetizados a partir de uma análise preliminar em livros de Cálculo (já mencionados), estruturamos e concebemos algumas atividades que permitem um percurso investigativo negligenciado por esses autores, além de buscar a superação dos mesmos.

Com efeito, discutiremos apenas uma das atividades, diante dos limites de síntese deste escrito. Outrossim, os dados que passaremos a analisar referem-se apenas aos sujeitos 1, 2 e 3. O motivo é que os alunos 4 e 5 manifestaram dificuldades e resistência para a participação e desenvolvimento de atividades de cunho gráfico. Portanto, optaram em realizar apenas a segunda atividade (que envolveu a resolução analítica), mas que não discutimos aqui, tendo em vista os limites de síntese deste escrito. Vejamos a atividade 1.

Atividade 1: Considere os seguintes gráficos abaixo. Com base apenas na análise visual, responda os itens que estabelecemos na sequência. Em seguida, responda os itens.




Gráfico(II)
F(x)
f(x)
x= -3
x=3


F(x)
Primitiva
Gráfico (III)
f(x)

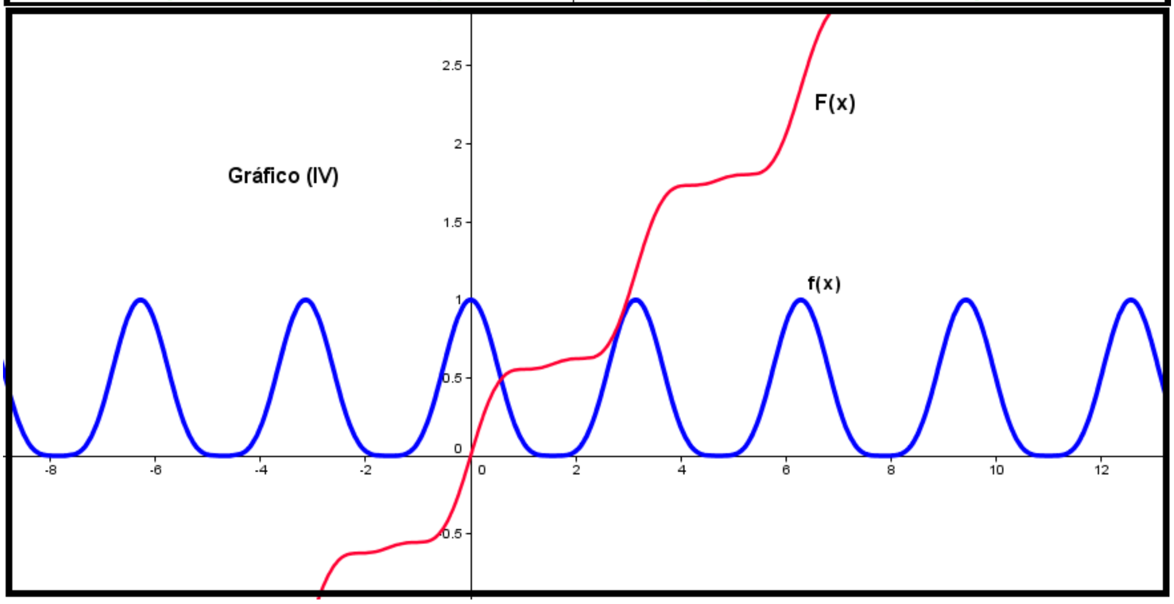
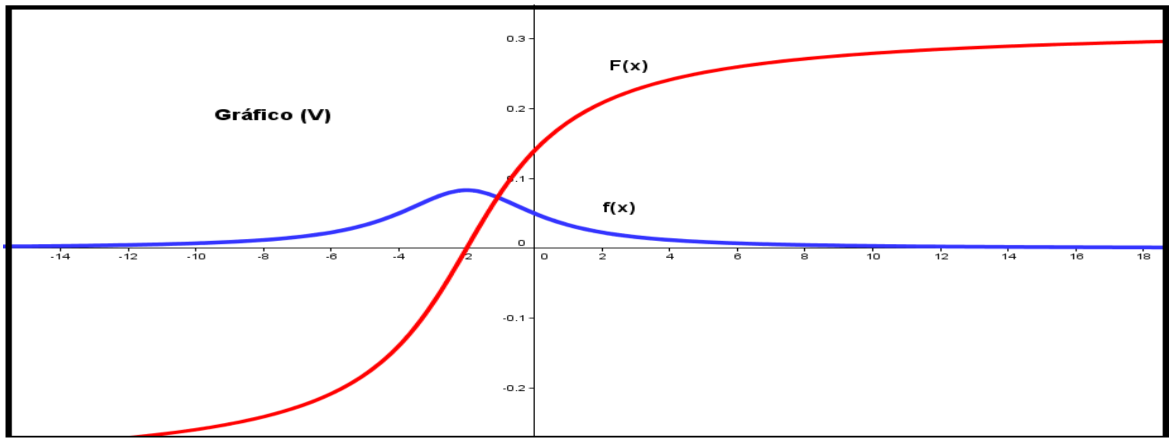


Gráfico (IV)
F(x)
f(x)



Fonte: Elaboração dos autores.

1º item: No gráfico (I) estamos lidando como uma função $f(x)$ integrável e limitada, para todo intervalo $[a,b] \subset IR$. Justifique sua resposta com base no gráfico.

2º item: No gráfico (II), a função integranda está definida em $-3 \le x \le 3$. Assim, sempre podemos estabelecer que $\int_{-3}^{3} f(x)dx = F(3) - F(-3)$. Justifique sua resposta.

3º item: Diferentemente dos gráficos (I) e (II), as propriedades e padrões gráfico-geométricas que divisamos no gráfico (III) não se repetem. Deste modo, não possuem um comportamento periódico, peculiar às funções trigonométricas. Justifique.

4º item: Nos gráficos (IV) e (V), tanto a função $f(x)$ bem como sua primitiva $F(x)$ são contínuas e diferenciáveis. Além disso, vale que $F'(x_0) = f(x_0)\ \forall x \in IR$. Justifique.

Na análise prévia dos itens propostos acima, sublinhamos os seguintes elementos que buscamos analisar/compreender: (i) o solucionador do problema identifica, apenas com a visualização, funções integrandas e suas primitivas que são limitadas/ilimitadas; (ii) o solucionador do problema identifica, apenas com a visualização, regiões (intervalos) em que podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo - TFC; (iii) o solucionador do problema interpreta/significa a condição suficiente para que possamos aplicar o TFC e determinar a área de região, limitada pelo gráfico da função; (iv) o solucionador do problema distingue/diferencia a integração de funções trigonométricas de outras funções, que não manifestam a periodicidade em seus gráficos; (v) o solucionador do problema identifica, apenas com a visualização, funções contínuas e diferenciáveis.

Por fim, somente após uma inspeção visual e perceptual de cada um dos gráficos acima, os sujeitos foram orientados a desenvolver e aplicar as inferências típicas do raciocínio lógico-dedutivo. Porém, suas estratégias analíticas de resolução efetiva não foram objeto de análise neste artigo. Tais dados são objeto de discussão em outro trabalho.

Acrescentamos, todavia, alguns argumentos relacionados a cada um dos gráficos. Com efeito, as relações corretas são: gráfico (I)-(c); gráfico (II)-(b); gráfico (III)-(e); gráfico (IV)-(d) e gráfico (V)-(a). Na próxima seção, apresentaremos trechos das entrevistas, parte extraída dos protocolos escritos na atividade 1. Discutiremos também a transcrição do áudio obtido por intermédio da atividade de *desktop*, que os alunos desenvolveram, ao consultar e manipular os gráficos fornecidos com o *software Geogebra*. Doravante, apresentaremos e analisaremos os dados coligidos em campo.

3. Apresentação e discussão dos dados

Com respeito ao item 1º, o aluno 1 declarou que "a função $f(x)$, gráfico (I), não é limitada e integrável em toda a reta, visto que seu comportamento assintótico em $x=-2, x=0, x=1/2$.". Neste trecho, o aluno 1 reconheceu a presença de três assíntotas verticais (gráfico I). Tais assíntotas indicaram ao aluno 1 que a imagem da função é ilimitada nas vizinhanças de cada ponto, descritos por $(-2,0)$, $(0,0)$ e $(1/2,0)$. Assim, com apoio na visualização, ele utilizou seus conhecimentos sobre assíntotas na identificação da região (intervalo), no qual não podemos descrever uma integral definida.

Em relação ao item 2º, a partir de uma análise visual da situação, o mesmo respondeu que "no gráfico (II), tanto $f(x)$ e $F(x)$ não estão definidas em $[-3,3]$, visto que existe um 'buraco' e que o intervalo $[-3,3]$ não pertence ao domínio dessas funções. Assim, calcular $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ nessa região seria impossível.". O aluno 1 mobilizou um conhecimento intuitivo e "metafórico" na identificação do domínio da função.

No item 3º, o aluno 1 identificou e declarou a periodicidade do gráfico (III) que exibimos. E, por fim, mencionou que "é verdade que os gráficos da função integranda e primitiva são suaves, o que caracteriza uma função diferenciável.". Tal ilação evidenciou que suas sentenças proposicionais foram elaboradas apenas na visualização e extraídas de propriedades percebidas no gráfico, que exibimos no documento e disponibilizamos no computador de modo concomitante à sua estratégia de entendimento da situação.

Com respeito ao aluno 2, indicamos o seguinte trecho de sua produção escrita (figura 2). Ficaram evidentes suas dificuldades relacionadas com a noção de retas assíntotas verticais, presentes apenas nos gráficos (I) e (II). Apesar em declarar que a função f do gráfico (I) era limitada, um pouco mais adiante (4ª linha), o aluno 2 infirmou tal propriedade, quando indicou que sua imagem tende para $+\infty$ ou $-\infty$. Na figura 2, podemos divisar seu discurso contraditório. Indicou ainda as regiões de integrabilidade.

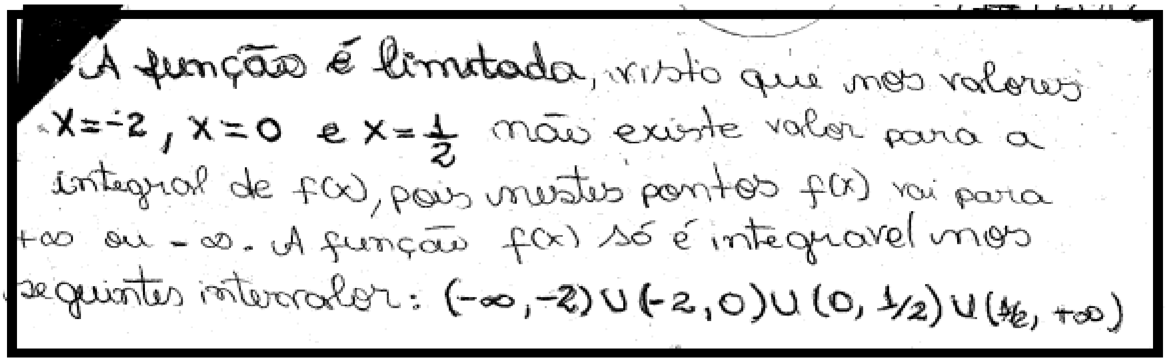


Figura 2. O aluno 2 interpretou o caráter limitado/ilimitado da função integranda do 1º item

Com respeito ao item 2º, o aluno 2 conseguiu divisar o trecho (vizinhança) em que não pode aplicar o TFC, dado o comportamento de seu gráfico. Um pouco mais adiante, reparemos que na 3 ª linha (figura 3), o aluno 2 extraiu as mesmas ilações, com a indicação dos intervalos escolhidos para a determinação de uma integral definida (apenas no interior deles). Na atividade do item 2º, forneceu o seguinte argumento (figura 3).

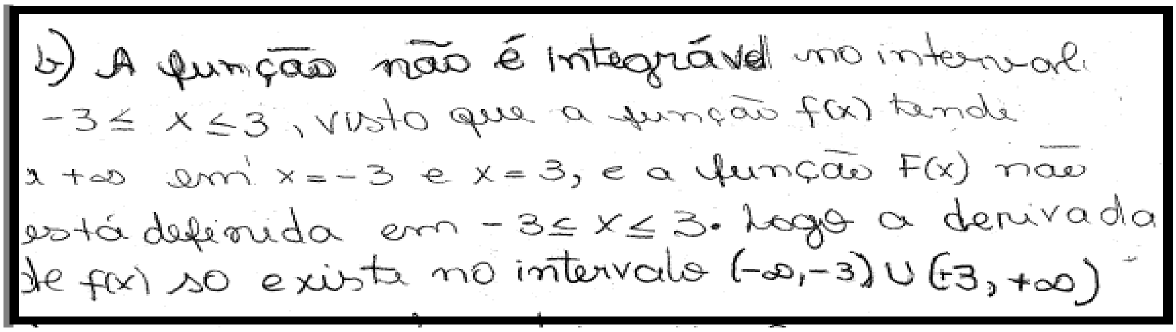


Figura 3. Com amparo na visualização, o aluno 2 identificou, na reta real, as regiões em que podemos e não podemos obter a integral definida em resposta ao item 2º

Na fig. 3 ainda, o aluno 2 extraiu, a partir dos gráficos III-IV, propriedades geométricas da função f e sua primitiva. A condição $F'(a) = f(a)$ foi analisada diretamente no computador. Ele registrou os intervalos onde contamos com tal condição, acrescentando ainda argumentação que mostramos na fig. 4 (item 3º).

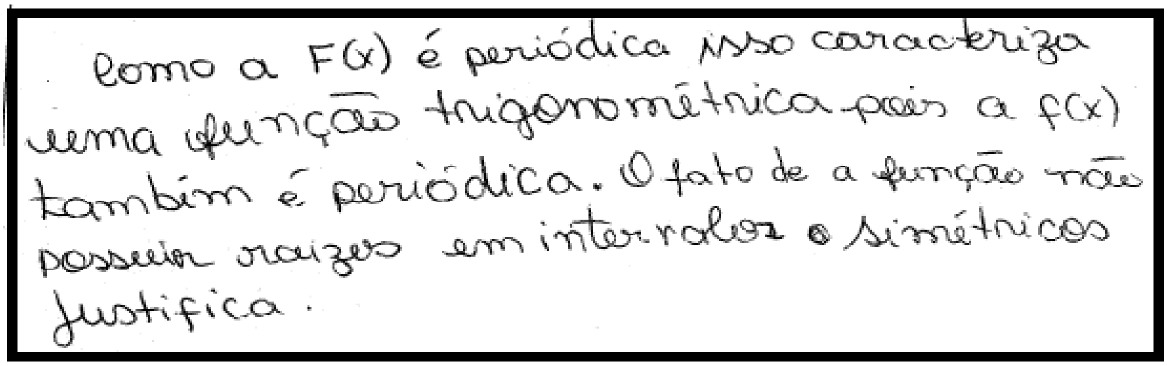
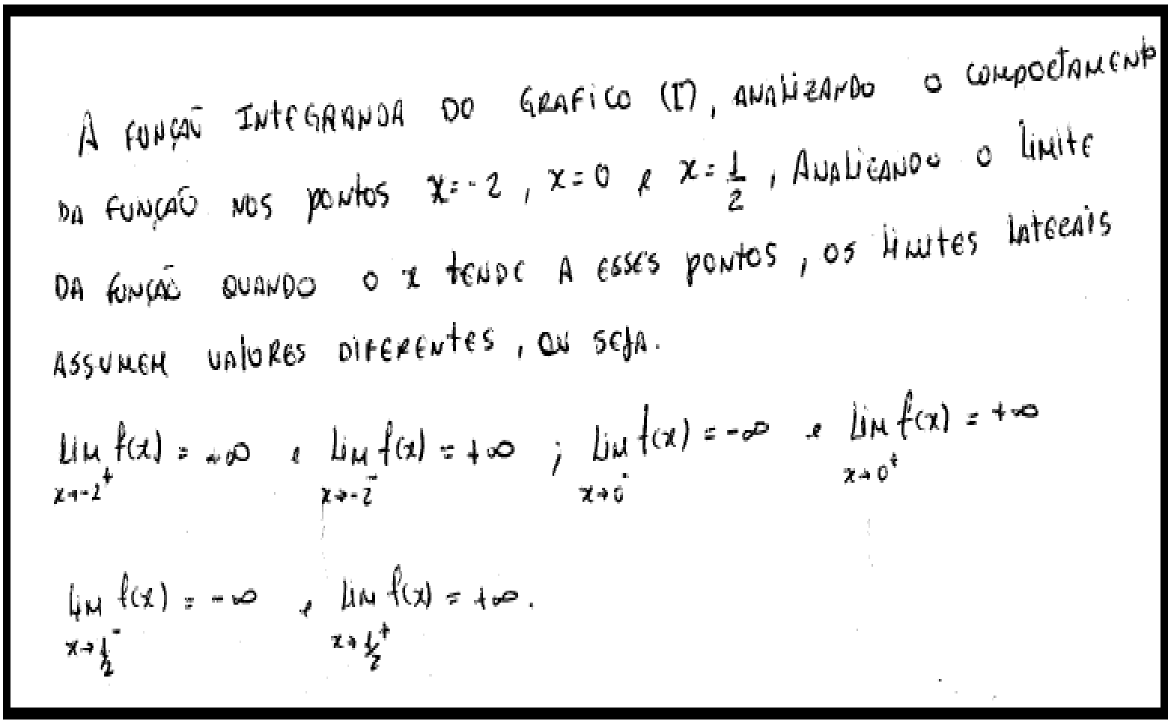


Figura 4. Na atividade do item 3º, O aluno 2 reconheceu os padrões geométricos característicos de funções trigonométricas e suas primitivas no gráfico III.

Na figura 4, exibimos parte das conclusões elaboradas para o item 3º. Sublinhamos o entendimento do caráter de periodicidade, tanto da função integranda, bem como para sua primitiva (gráficos (III) e (IV)). Sua produção foi pertinente à resposta dos itens 3º e 4º. O aluno 2 percebeu/interpretou as propriedades herdadas da função original, na medida em que empregamos o processo de integração e melhoramos as qualidades da função f .

No caso do aluno 3, quando questionado sobre o item 1º respondeu que "não é limitada, pois as retas possuem um comportamento assintótico em três pontos, onde a função tem comportamento para $\pm\infty$. Nesse caso, a função é ilimitada nas vizinhanças das assíntotas. Logo, não é integrável e limitada, para todo intervalo $[a,b]\subset IR$.". Neste trecho, o aluno identificou do ponto de vista topológico, a região na qual a função é ilimitada e que contraria a ideia de área de uma região limitada por uma função.

Na figura 5, o aluno 3 manifestou uma habilidade que, muitos alunos demonstram dificuldade e ineficiência. De fato, ao lidar diretamente com a simbologia que designa o limite $\lim_{x\to a} f(x)=L$, os alunos requisitam informações pertinentes à representação analítica da função. Não obstante, o aluno 3, com apoio apenas da visualização dos gráficos fornecidos, indicou matematicamente e calculou os limites, em cada ponto identificado como reta assíntota vertical. Toda sua ação foi impulsionada a partir da visualização dos gráficos descritos no documento e, aqui, comprovamos nossa 2ª hipótese de investigação.


A FUNÇÃÕ INTEGRANDA DO GRAFICO (I), ANALIZANDO O COMPOCTAMENTO DA FUNÇÃO NOS PONTOS $x=-2$, $x=0$ E $x=\frac{1}{2}$, ANALIZANDO O LIMITE DA FUNÇÃO QUANDO O x TENDE A ESSES PONTOS, OS LIMITES LATERAIS DA FUNÇÃO ASSUMEM VALORES DIFERENTES, OU SEJA.

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$.

Figura 5. O aluno 3 indicou as simbologias relacionadas com o limite e calculou apenas com base no gráfico. Comprovamos nossa 2ª hipótese de investigação.

Na figura 6, o aluno 3 desenvolveu uma atividade argumentativa, apoiado apenas na visualização. Reparemos na figura 6, que o mesmo determinou o domínio da função correspondente ao gráfico (II). Respondeu, pois, o item 2º sem recursos analíticos.

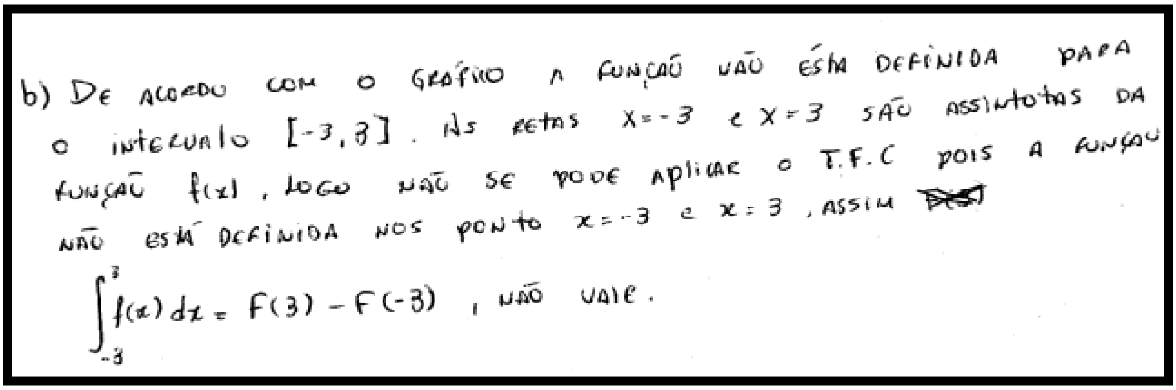

b) De acordo com o gráfico a função não está definida para
o intervalo [-3,3]. As retas x=-3 e x=3 são assintotas da
função f(x), logo não se pode aplicar o T.F.C pois a função
não está definida nos ponto x=-3 e x=3, assim
$\int_{-3}^{3} f(x)dx = F(3) - F(-3)$, não vale.

Figura 6. O aluno 3 forneceu conclusões apenas com base na visualização e percepção de propriedades gráfico-geométricas.

Ainda com respeito ao aluno 3. Na figura 6 ele realizou a identificação topológica da região (do intervalo) em que não se pode aplicar o TFC. Sobretudo, quando não se pode garantir a igualdade $\int_{-3}^{3} f(x)dx = F(3) - F(-3)$. Reparemos que no ensino desprovido de recursos tecnológicos, como o tipo de abordagem que deparamos nos livros de Cálculo, a ação do solucionador de problema, em vários casos, consiste em aplicar o TFC, e pouco se questiona sobre as situações em que não se garantem hipóteses suficientes, e que permitam sua aplicação. Na resolução do item 3º, exibimos, na figura 7 sua argumentação.

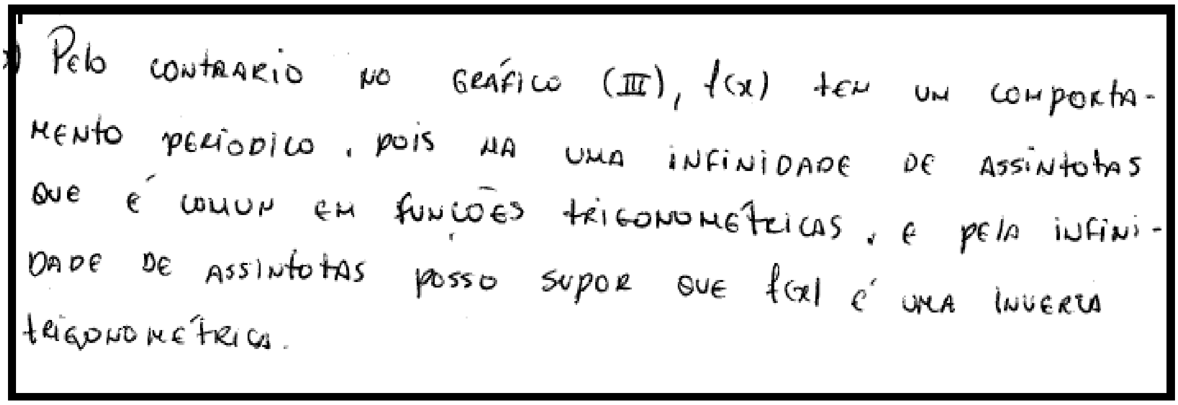

Pelo contrario no gráfico (III), f(x) tem um comporta-
mento periodico, pois ha uma infinidade de assintotas
que é comum em funções trigonometricas, e pela infini-
dade de assintotas posso supor que f(x) é uma inversa
trigonométrica.

Figura 7. O aluno 3 depreendeu uma interpretação correta do comportamento gráfico da função f e sua primitiva F na resposta do 3º item, gráfico III.

Ao ser questionado (sobre o item 4º), o aluno 3 acrescentou que:

> O gráfico (V) tem um comportamento de integração envolvendo funções fracionárias e não há periodicidade no gráfico das funções. Na função do quociente, onde o denominador cresce mais rápido do que o numerador e a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal [...] Nem toda função é integrável em todo $[a,b] \subset IR$, pois existem funções que admitem retas de comportamento assintótico. Os intervalos $[a,b] \subset IR$ que contém esses

> pontos, não podemos determinar a integral, afim de, avaliar a área limitada pelo gráfico e as retas $x=a$ e $x=b$. Mas aqui podemos avaliar a integral.

No excerto acima, identificamos a manifestação, por parte do aluno 3, da sensação (ou *feeling*) de natureza topológica, da adequação e escolha de intervalos fechados na reta, nos quais podemos contar ou não com o TFC. Sublinhamos a interpretação de crescimento/decrescimento da função integranda. Outrossim, esse sujeito se equivocou ao declarar a existência de uma quantidade infinita de assíntotas (fig. 7, linha 3), embora, no modelo de ensino que prioriza o padrão algébrico-analítico, as habilidades de visualização das propriedades gráfico-geométricas são negligenciadas.

Por fim, em consonância com o treinamento geralmente proporcionado aos alunos em disciplinas anteriores, os alunos tendem a manifestar certa predileção pelo quadro algébrico e, por outro lado, resistência ao quadro de representação geométrico-gráfico. Daí, diante da natureza do instrumento aplicado aos cinco sujeitos participantes, os alunos 4 e 5 não forneceram dados suficientes para que pudéssemos realizar qualquer tipo de análise de suas atividades com origem na visualização.

Neste sentido, na figura 8, apresentamos sua argumentação. De início, nas linhas 1 e 2, depreendemos que suas dificuldades são originadas em disciplinas anteriores que, sob a influência de uma abordagem questionável dos livros consultados, que priorizam a ação de fornecer a resposta e a algoritmização, em detrimento da interpretação e observação das condições (qualitativas) gráficas que permitem qualquer tipo de inferência ou ilação.

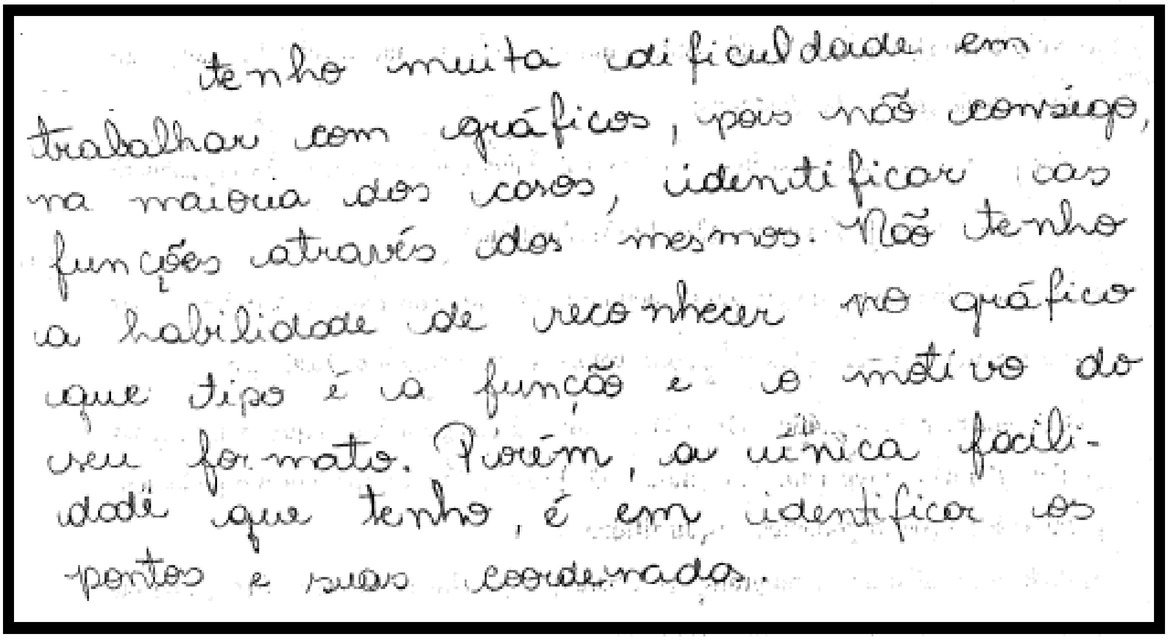

tenho muita dificuldade em
trabalhar com gráficos, pois não consigo,
na maioria dos casos, identificar as
funções através dos mesmos. Não tenho
a habilidade de reconhecer no gráfico
que tipo é a função e o motivo do
seu formato. Porém, a única facili-
dade que tenho, é em identificar os
pontos e suas coordenadas.

Figura 8. Os dados fornecidos pelo aluno 4 foram desconsiderados, diante do relato de sua enorme dificuldade de desenvolver tarefas que envolvem a visualização.

Concluindo nossa análise de dados, na figura 9, o excerto do escrito que exibimos em seguida, aponta que os hábitos acadêmicos vivenciados por este sujeito, dificultam ou, pelo menos, não promovem situações de aprendizado, erigidas a partir de um viés que busca estimular a percepção e a visualização de padrões gráficos-geométricos.

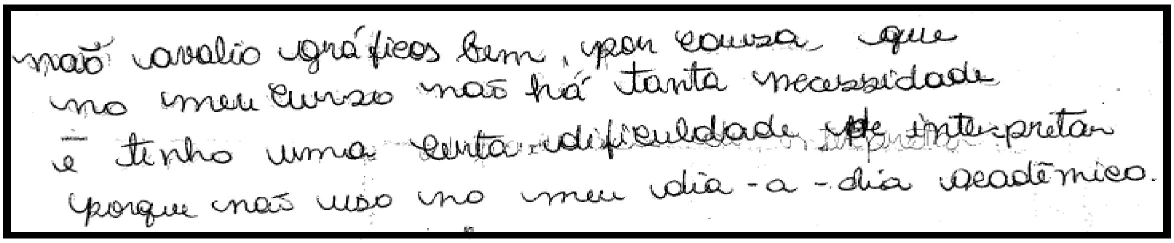

não avalio gráficos bem, por causa que
no meu curso não há tanta necessidade
e tinho uma certa dificuldade ~~de~~ de interpretar
porque não uso no meu dia-a-dia acadêmico.

Figura 9. Declaração do aluno 5, correspondente aos seus entraves pessoais com o contato direto e interpretação de gráficos no locus acadêmico.

Exibimos na fig. 10, um exemplo de dados coletados durante a análise da atividade. Abaixo, com o uso do *software Cantasia* (http://www.baixaki.com.br/download/camtasia-studio.htm), gravamos as atividades de *desktop* desenvolvidas pelo aluno 3. Sublinhamos sua inspeção do gráfico realizada (fig. 10, lado direito), com o escopo de adquirir um entendimento sobre o caráter limitado da imagem, na medida em que $x \to -\infty$. Sua atividade foi registrada antes da resolução analítica do item 3º.

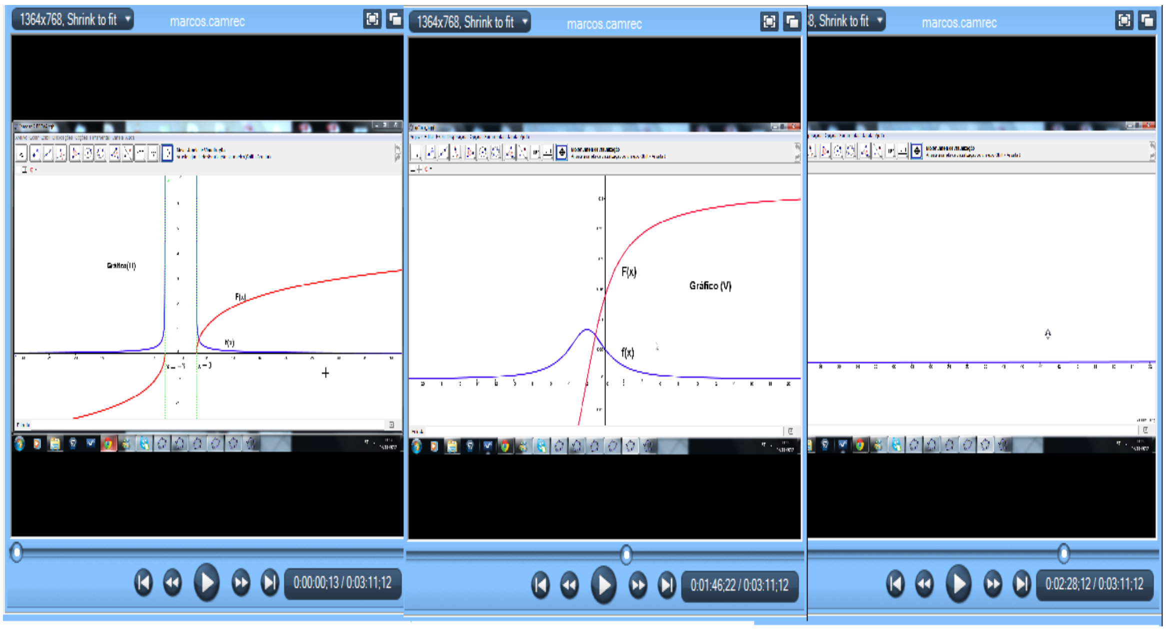


Figura 10. Análise das estratégias do aluno 3 durante a resolução da atividade. Estudo dos gráficos III-V.

4. Considerações finais

As atividades no ensino do Cálculo, estruturadas a partir de uma preocupação pedagógica, voltada não apenas para aplicação de regras de inferências lógicas, mas também, com atenção especial para a visualização e percepção de propriedades topológicas e padrões gráficos, detém a possibilidade de estimular um *insight*, como conseqüência do alcance, por parte do aluno, de um *plateau* elevado de entendimento (ALVES, 2012a).

Neste estudo de caso, não damos atenção a segunda parte das atividades que envolvem a resolução analítica efetiva das integrais propostas nos itens (a), (b), (c), (d) e (e). Por outro lado, colhemos o material produzido por três participantes da investigação, com origem na visualização, reconhecimento e descrição de propriedades do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral extraídas nos gráficos (I), (II), (III), (IV) e (V).

Averiguamos nessa amostra de sujeitos, a terceira hipótese de trabalho, visto que, os alunos 4 e 5, manifestaram resistência, como conseqüência de sua insegurança pessoal, em situações que foram colocados em contato com os gráficos. Dado o caráter não compulsório da atividade 1, os mesmos desenvolveram apenas as técnicas analíticas apreendidas nos livros didáticos de Cálculo estudados pelos mesmos.

A segunda hipótese de trabalho foi verificada também, na medida em que, a partir da exploração dos gráficos que propomos, de modo particular, os alunos 1, 2 e 3, identificaram propriedades oriundas do Cálculo Diferencial, tais como: o caráter de continuidade exigido na descrição de integral de Riemann e o caráter de diferenciabilidade das funções integrandas e de suas primitivas, a identificação de retas assintotas.

Registramos em suas argumentações o reaparecimento de ideias vinculadas ao Cálculo Diferencial, como a noção de limite e diferenciabilidade. Neste sentido, alguns trabalhos (ORTON, 1983, p. 6) apontam e descrevem esse fenômeno específico. Apesar de se tratar de um trabalho da década de 80, ainda preserva grande atualidade, na medida em que, seu autor, questiona e critica a abordagem do processo de integração, “introduzido antes como regra, ou apenas como o processo de antidiferenciação”. (Idem, 1983, p. 10). Essa possibilidade foi por nós contemplada na descrição da hipótese 3.

Concordamos com esse autor ao advertir que “regras desprovidas de razões não podem ser justificadas” (ORTON, 1983, p. 10). Neste sentido, a atividade proposta neste estudo de caso, foi originada a partir de integrais que não detinham um nível mais elevado de complexidade. Em todo caso, diferentemente do estudo de Orton, que se ateve aos erros na etapa resolutiva de certas integrais, nosso olhar se restringiu à identificação visual de padrões gráficos e geométricos, intrínsecos a cada tipo de “técnica de integração”.

Ademais, nas sentenças proposicionais elaboradas pelos sujeitos, conseguimos divisar/discernir as razões, motivos e explicações, acrescidas por cada aprendiz, o que indicou seu entendimento idiossincrásico sobre esse tema específico. Tal mobilização de conhecimentos prepara o terreno para o *insight* (ALVES, 2012a; 2012b) que deve apoiar a escolha da técnica de integração adequada. Por fim, os elementos apontados aqui nos proporcionam envidar esforços didáticos e metodológicos, no sentido de uma melhor compreensão e significação da aprendizagem das referidas técnicas em sala de aula.

5. Referências

ALVES, F. R. V. Insight: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do Cálculo. **Vydia Educação**. v. 32, nº2, 2012a, p. 149-161. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/10.pdf> Acessado em: 02 jan. 2013.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a construção de gráficos no Cálculo: experiência num curso de Licenciatura em Matemática. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012b, Petrópolis, **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2012b, p. 1-21. Disponível em: <http://sipem-sbem.lematec.net/CD/?page=publications&subpage=gts&language=br>. Acessado em: 29 dez. 2012.

BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora. 1994.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de Cálculo**. v. 1, Rio de Janeiro: LTC, 2010.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v. 1, 3ª edição, Editora: Harbra, 1994.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. v. 1, Rio de Janeiro: SBM. 2010.

ORTON, A. Students' understanding of integration. **Educational Studies in Mathematics**. 14, p. 1-18, 1983.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo**. São Paulo: Editora UNESP, 1991. 322p.

PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. **Quadrante**. 3-1, p. 3-18. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt%5C94-Ponte(Quadrante-Estudo%20caso).pdf>. Acessado em: 29 dez. 2012.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Editora McGrawHill, 1988, 846p.

STEWART, J. **Cálculo**, v. 1, 4ª edição, São Paulo: Pioneira, 2001.