JORGE BRANDÃO - ELISÂNGELA MAGALHÃES

ADAPTAÇÕES NA MATEMÁTICA PARA ENGENHARIAS COM BREVE ANÁLISE DE ERROS

EDITORA CRV

JORGE BRANDÃO

Professor adjunto da Universidade Federal do Ceará (UFC). Doutor em educação, mestre em engenharia civil e matemático (tudo pela UFC). Atualmente ministra disciplinas de matemática para engenharias e coordena grupo de pesquisa em métodos e técnicas de ensino em matemática e física para engenharias (CNPQ). Orientador de mestrado, doutorado e programa de pós-graduação em educaçã o da UFC.

ELISÂNGELA MAGALHÃES

Mestranda em educação pela UFC e psicopedagoga. Atua há mais de 15 anos com pessoas com necessidades educativas especiais, em particular, cegos.

EDITORA CRV

JORGE BRANDÃO - ELISÂNGELA MAGALHÃES

ADAPTAÇÕES NA MATEMÁTICA PARA ENGENHARIAS COM BREVE ANÁLISE DE ERROS

EDITORA CRV

Jorge Brandão
Elisângela Magalhães

ADAPTAÇÕES NA MATEMÁTICA PARA ENGENHARIAS COM BREVE ANÁLISE DE ERROS

EDITORA CRV
Curitiba - Brasil
2015

Editor-chefe: Railson Moura
Diagramação e Capa: Editora CRV
Revisão: Os Autores

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

B819a

Brandão, Jorge
Adaptações na matemática para engenharias com breve análise de erros / Jorge Brandão, Elisângela Magalhães. - 1. ed. - Curitiba, PR: CRV, 2015.
98 p.

Inclui bibliografia
ISBN 978-85-444-0180-4

1. Física matemática. 2. Matemática na engenharia. I. Magalhães, Elisângela. II. Título.

14-15621 CDD: 530.15
CDU: 51-7:62

03/09/2014 09/09/2014

Foi feito o depósito legal conf. Lei 10.994 de 14/12/2004
2015

Editora CRV
Tel.: (41) 3039-6418
www.editoracrv.com.br
E-mail: sac@editoracrv.com.br

SUMÁRIO

INICIANDO...

Saber operações numéricas é base para desenvolver uma matemática bem estruturada. Por exemplo:

Sabemos que $-1 = (-1)^3$, pois $(-1).(-1).(-1) = -1$.

Podemos reescrever $(-1)^3$ como $(-1)^{6/2}$, haja vista $3 = 6/2$.

De $a^{b/c}$ ser interpretada como a raiz de ordem "c" de "a" elevado a "b", segue-se que $(-1)^{6/2}$ é a raiz quadrada de "menus um" elevado à sexta potência.

Como $(-1)^6 = 1$, ficamos com a raiz quadrada de um.

Ora, raiz quadrada de um é um, daí, $-1 = 1$?

Em símbolos:

$$-1 \underbrace{=}_{i} (-1)^3 \underbrace{=}_{ii} (-1)^{\frac{6}{2}} \underbrace{=}_{iii} \sqrt{(-1)^6} \underbrace{=}_{iv} \sqrt{1} \underbrace{=}_{v} 1$$

Logo, como $1 \neq -1$, segue-se que há um erro. Onde?

Desta feita, este material objetiva utilizar de forma coerente operações envolvendo limites, derivadas e integrais.

Resumindo...

Como há um erro na "justificativa" de $-1 = 1$, segue-se que é necessário compreender as operações numéricas atreladas. Mesmo artifício vale para aplicações: como garantir que o cálculo está certo ou que erro cometido foi prejudicial ao todo do problema.

Deste modo, apresentamos esse livro como suporte (material de apoio): contém ***algumas*** aplicações seguidas das discussões dos principais erros observados, analisados por um matemático e por uma psicopedagoga.

Para tanto, recomendamos a leitura do artigo a seguir:

UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO PARA ALUNOS DE ENGENHARIAS: novas estratégias e velhos erros

Introdução

Vários livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável, como Stewart (2010) e Thomas (2009) entre outros, seguem a seguinte sequência didática: Introdução ao Cálculo (ou revisão de funções), Limites; Derivadas (regras e aplicações) e Integrais (indefinidas, definidas, regras e aplicações). Por qual motivo?

Poucos pesquisadores respondem de maneira satisfatória o questionamento anterior. A resposta mais frequentemente indicada é o amadurecimento dos conteúdos. Com efeito, algumas aplicações das integrais incluem o comprimento de arco que envolve derivação. Vale ressaltar que muitas integrais são concebidas como antiderivadas. Uma derivada é um tipo particular de limite. Assim, segue-se a sequência.

Por sua vez, observa-se na resolução de provas de alguns discentes que podem errar questões de derivação e, no entanto, acertar de maneira consciente questões de integração. É por causa do dito *amadurecimento* ou é mero acaso? Assim sendo, este trabalho objetiva *analisar*, mesmo que de maneira sucinta, se a modificação na forma de apresentação de conteúdos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável implica em uma não aprendizagem dos mesmos.

A experiência realizada e atividades propostas

A forma de investigação foi a resolução escrita de avaliações realizadas durante um ano letivo. Com efeito, a disciplina que sofreu a modificação é anual na Universidade Federal do Ceará. É conhecida como Cálculo Fundamental e tem carga horária de 128 h/aula. Os encontros eram realizados duas vezes por semana com duas horas aula cada um.

A turma observada durante o ano de 2012 foi de alunos da Engenharia Química, com um total de 82 discentes matriculados. Não obstante os encontros em sala de aula, foi criada uma página no *facebook* para uma maior interação entre os estudantes. Alguns discentes também recorriam a aulas de exercícios com monitores em horários extras à sala de aula.

Sendo avaliações escritas, conforme Cury (2007), tornou-se necessária uma visão geral de cada prova para caracterizar os tipos de soluções em totalmente corretas, parcialmente corretas ou incorretas. Como pequeno diferencial nesse trabalho, além de analisar cada prova individualmente, comparava-a com as demais provas do grupo.

Com efeito, segundo McDonald (2003), cometem-se menos erros em correções de provas se todas as provas forem corrigidas em sequência de questões. Isto é, corrigir a primeira questão de todas as provas, depois a segunda questão e assim sucessivamente. Em seus estudos, ele observou variação de até um ponto por questão, em uma escala de zero a dez, quando as correções eram comparadas.

Entendendo: um professor aplica uma prova. Corrige todas as questões da prova do aluno 01, depois todas do aluno 02 e assim sucessivamente. Todavia, o docente não registra as correções da prova na prova, faz apenas anotações em um gabarito à parte. Após 08 dias, o mesmo docente vai corrigir as mesmas provas, sendo questão por questão conforme parágrafo anterior. Após correção, compara com gabarito.

Assim sendo, as correções das avaliações com a turma da Engenharia Química seguiram a ideia proposta por McDonald (2003). Não obstante, as resoluções tiveram, a partir das propostas de Cury (2007), até cinco caracterizações: Completamente satisfatórias (mais de 96% da questão); Bem satisfatórias (de 76% a 95% da questão); Satisfatórias (de 51% a 75% da questão); Parcialmente satisfatórias (de 26% a 50% da questão) e Insatisfatórias (menos de 25% da questão).

Como saber a porcentagem de uma questão? A partir das etapas ou partes que compõe uma resolução correta de cada questão. Repare no uso do artigo indefinido *uma*. Por conseguinte, uma mesma questão pode ter para alunos distintos a caracterização Parcialmente satisfatória ou Completamente satisfatória dependendo da ideia apresentada em dada resolução. No próximo tópico serão apresentados alguns exemplos.

Todavia, por se tratar de um relato, os resultados obtidos com a turma de observação das estratégias serão comparados com resultados de outras turmas de mesmo curso e mesma disciplina nos moldes tradicionais. Vale ressaltar: resultados atrelados aos tipos de erros e não às notas médias obtidas pelas turmas.

Percurso metodológico

As primeiras aulas contemplaram aplicações de integrais definidas sem, no entanto, especificar que os problemas envolviam tais conteúdos. A ideia inicial foi calcular a área compreendida entre os eixos x e y e a curva $y = 9 - x^2$. O método dos trapézios foi utilizado.

Em seguida utilizou-se a ideia de dividir em partes iguais o intervalo [0, 3] (aqui há uma sequencia do exemplo apresentado no parágrafo anterior, em sala, vários outros exemplos foram refeitos). Sempre questionando o corpo discente o que ocorria com o aumento na quantidade de intervalos e consequente tamanho de cada um. Cálculo de trabalho e centro de massa também foram inseridos, com resolução aproximada.

Foi preparada a noção de limite. O ε e o δ foram apresentados focando também o significado de cada letra, respectivamente, erro cometido (no eixo dos y) diante de um desvio na variação no eixo dos x. Vale ressaltar que pequenas atividades concretas, tais como um discente vendado e usando uma bengala longa percorrendo um dado percurso para tentar vivenciar ε e δ.

Fornecida a ideia formal (definição de limites com respectivas operações), novamente foram utilizadas aplicações. Por exemplo, se no movimento harmônico simples (logo, há movimentos que não são harmônicos ou não são simples, argumentaram alguns discentes com base nas palavras utilizadas), v(t) = sen(t) representa a velocidade, então para uma pequena variação do tempo caímos no limite fundamental da trigonometria.

Com efeito, $\lim_{t\to 0}[v(t) - v(0)]/[t - 0] = \lim_{t\to 0}[\text{sen}t - \text{sen}0]/t = \lim_{t\to 0}(\text{sen}t/t)$. Ou seja, dentro de um contexto são apresentados os limites mais utilizados. Vale ressaltar que as palavras fazem sentido. Isto é, é limite fundamental da trigonometria porque os demais limites que envolvem funções trigonométricas e resultam em 0/0 são resolvidos direta ou indiretamente por ele (comparar com a relação fundamental da trigonometria).

Após o conteúdo regras de derivação, onde cada regra era argumentada e debatida de maneira formal. Em seguida, foram apresentadas as regras de L'Hopital. Observou-se que muitos discentes faziam uso indiscriminadamente.

Por se tratar de um relato, apresentam-se algumas questões com as respectivas categorias de análise dos erros. A descrição de cada uma delas é uma forma de interpretar a atuação do discente na resolução da questão, tentando compreender os possíveis motivos dos erros. Não será abordada a pontuação de cada questão.

Primeira questão para analisar, prova com 78 discentes participantes, tem o enunciado abaixo (32 acertaram a questão):

Texto de Apoio: Uma maneira de calcular aproximadamente a área de uma região compreendida abaixo da função contínua y = f(x), acima do eixo dos x e limitada lateralmente pelas retas x = a e x = b é dividir o intervalo [a, b] em n partes iguais e confeccionar trapézios. Sendo $\Delta x = (b - a)/n$, $a = x_0$, $b = x_n$ então, sabemos que pelo referido método, a área é cerca de:

$$(\Delta x/2) \times \{f(x_0) + 2.[f(x_1) + ... + f(x_{n-1})] + f(x_n)\}.$$

Aplicação: Qual a área aproximada da região limitada no primeiro quadrante abaixo da curva $y = 4 - x^2$. Use n = 5.

Principais erros observados:

a) O conteúdo do texto de apoio foi abordado durante duas aulas consecutivas. Foi apresentado na prova com o intuito de auxiliar discentes. Todavia, alguns discentes não fizeram a questão argumentando não entender o enunciado.

Com efeito, em prova não é permitida consulta ao docente, sendo indicado aos discentes que ler e interpretar cada questão faz parte da avaliação. *Erro de compreensão do enunciado. 15 alunos não a fizeram.*

b) Uso indevido da expressão. Não identificaram os x_i. Com efeito, pelo contexto discentes deveriam obter $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, $x_3 = x_2 + \Delta x$, reorganizando, deveriam chegar em $x_i = x_0 + i.\Delta x$. Fizeram o cálculo como sendo um único trapézio: $[f(0) + f(2)] \times 5/2$. *Erro consiste em forçar a fórmula, isto é, por causa da palavra trapézio, desconsideraram fórmula dada, tentando ganhar alguma pontuação da questão. Oito alunos seguiram essa linha de raciocínio.*

c) Uso indevido da expressão. Alguns identificaram os x_i. Com efeito, pelo contexto chegaram em $x_i = x_0 + i.\Delta x$. Erro: somaram os $f(x_i)$, esquecendo que os intermediários são multiplicados por dois. Outros de maneira coerente chagaram em $\{f(x_0) + 2.[f(x_1) + ... + f(x_{n-1})] + f(x_n)\}$. Esqueceram de multiplicar por $(\Delta x/2)$. *Erro menos grotesco. Falta de atenção! 23 discentes se enquadram nessa observação.*

Segunda questão para analisar, mesma prova com 78 discentes participantes, tem o enunciado abaixo (27 acertaram a questão):

Texto de Apoio: Quando uma partícula está se movendo com uma função deslocamento s(x) a velocidade instantânea é dada por $\lim_{h\to 0}[s(x + h) - s(x)]/h$.

Aplicação: A função $s(x) = \cos(2\pi x + \pi/3)$ representa o deslocamento de uma partícula. Qual sua velocidade instantânea?

Principais erros observados:

a) O conteúdo do texto de apoio foi abordado durante as aulas. Foi apresentado na prova com o intuito de auxiliar discentes. Todavia, alguns discentes não fizeram a questão argumentando não entender o enunciado. Com efeito, em prova não é permitida consulta ao docente, sendo indicado aos discentes que ler e interpretar cada questão faz parte da avaliação. *Erro de compreensão do enunciado. 22 alunos não a fizeram. Vale ressaltar que os 15 da questão anterior aqui se enquadram.*

b) Aplicação da regra de L'Hopital, pois argumentaram ser um limite com a forma indeterminada 0/0. Todavia, não derivaram coerentemente a função s(x) – esqueceram da regra da função composta. *Erro na aplicação das regras de derivação. 17 discentes cometeram o referido erro.*

c) Desenvolveram a função, usando o cosseno da soma: $\cos(2\pi x + \pi/3) = \cos(2\pi x).\cos(\pi/3) - \text{sen}(2\pi x).\text{sen}(\pi/3)$, substituíram os valores dos seno e do cosseno de $\pi/3$. Todavia, após usarem o fato de que o limite de uma soma é a soma dos limites, não concluíram os cálculos. *Erro consiste em não saber usar as consequências do limite fundamental da trigonometria. 12 discentes direta ou indiretamente se enquadram nesse tipo de erro.*

Terceira questão para analisar, segunda prova com 72 discentes participantes, tem o enunciado abaixo (24 acertaram a questão):

Texto de Apoio: Dizemos que uma função contínua em um intervalo (c, d) tem um mínimo local em m se sua derivada f' é negativa em (c, m) e positiva em (m, d). Por sua vez, se sua derivada f' é positiva em (c, m) e negativa em (m, d), então tem um máximo local. Sabemos que, pelo teste da derivada segunda, se $f'(m) = 0$ e $f''(m)$ existe, e é diferente de zero, então teremos mínimo local em m se $f''(m) > 0$ e máximo local em m se $f''(m) < 0$.

Aplicação: Dentre todos os triângulos inscritos em uma semicircunferência, qual o de menor área?

Principais erros observados:

a) O conteúdo do texto de apoio foi abordado durante as aulas. Foi apresentado, inclusive, problema parecido: retângulo inscrito em semicircunferência. Alguns discentes resolveram o problema considerando retângulo em vez de triângulo. Todavia, erraram ou na confecção da função ou na derivação. *Erro de interpretação do enunciado. 12 discentes observados.*

b) Erro associado à confecção da função área.Não usaram o fato de um triângulo inscrito em uma semicircunferência ser retângulo. Fizeram como um triângulo sendo isósceles. *Erro relacionado com a falta de conhecimentos prévios, no caso, triângulo inscrito em uma semicircunferência ser retângulo. 13 discentes o cometeram.*

c) Usaram o fato de um triângulo inscrito em uma semicircunferência ser retângulo. Por sua vez, erraram na derivada da função área. *Erro associado às regras de derivação. Nove alunos cometeram.*

d) Fizeram tudo coerentemente, exceto verificar que o valor encontrado minimiza a área. *Erro cometido por 14 discentes.*

Quarta questão para analisar, segunda prova com os mesmos 72 discentes participantes, tem o enunciado abaixo (41 acertaram a questão):

Texto de Apoio: Seja C uma constante. Sabemos que $\int \cos x dx = \text{sen} x + C$ porque ao derivarmos sen$x$ + C obtemos o cos$x$. Também sabemos que $\int dx/(1 + x^2) = \text{arctg}x + C$ pelo mesmo motivo. Quando há uma função composta, fazemos uma mudança de variável. Por exemplo, $\int e^{ax}dx = e^{ax}/a + C$, com $a \neq 0$.

Idem para $\int (ax + b)^n dx = (ax + b)^{n+1}/a.(n + 1) + C$, se $n \neq -1$ e $\int dx/(ax + b) = (1/a).\ln|ax + b| + C$.

Aplicação:

Uma partícula tem uma velocidade $v(x) = -\pi \text{sen}(\pi x + \pi/4)$. Qual a função deslocamento? Dado que $s(1/4) = 0$.

Principais erros observados:

a) Má compreensão do enunciado ocasionando a não resolução do problema. *Erro cometido por seis discentes.*

b) Erro associado à integração sem considerar que há composição na função. *Erro de integração. 16 discentes cometeram.*

c) Integraram coerentemente, mas não fizeram uso da informação $s(1/4) = 0$. Todos desconsideraram a constante. *Erro de compreensão do que seja uma integral indefinida. Nove discentes se enquadram nesse erro.*

Conclusões e sugestões

Todas as provas objeto de estudo consistiam de texto base com intuito de fornecer informação aos discentes dos conteúdos que deveriam ser utilizados em determinada situação. Ou seja, ler e interpretar cada questão faz parte da avaliação. Mesmo usando as sugestões de McDonald (2003), não foi percebida uma grande diferença de notas nas duas observações em cada prova.

Em relação à mudança no conteúdo, isto é, antecipar assuntos como método dos trapézios para cálculo de áreas, se comparado com outras turmas anteriores, observou-se que as dificuldades de compreensão das fórmulas são equivalentes. Idem para aplicações das regras de l'Hopital. Usam indiscriminadamente sem observar o quando usar.

Se os erros observados são parecidos, por qual motivo modificar a sequência didática? Este questionamento, apresentado no início deste trabalho, tem um aspecto positivo: as aplicações ou os motivos do desenvolver determinados conteúdos são argumentados de maneira participativa.

Fica, como consideração final, a necessidade de refazer a mudança didática com outras turmas de engenharias para ter mais subsídios para melhor analisar os erros. Não obstante, observar turmas de Cálculo Avançado, que é a disciplina seguinte ao Cálculo Fundamental, para tentar perceber se de fato ocorreu uma aprendizagem, independentemente da sequência seguida.

REFERÊNCIAS

CURY, H. N. **Análise de erros:**o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
McDONALD, B. C. (Org.). **Esboços em Avaliação Educacional.** Fortaleza: Editora da UFC, 2003.
STWART, J. Cálculo. 1v. – 6.ed. – São Paulo: Cengage, 2010.
THOMAS, G. Cálculo. 1v. – 11.ed. – São Paulo: Addison Wesley, 2009.

1ª PARTE

LIMITES

Felicidade começa com FE. Onde depositamos a nossa?

Imagine que um trecho de uma montanha russa seja aproximado pela função f(t) = sen(t), onde t é o tempo e f(t) é a distância percorrida. A velocidade, entre dois instantes consecutivos t_2 e t_1 é: $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$.

Se $\Delta t = t_2 - t_1$ então $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{f(\Delta t+t_1)-f(t_1)}{\Delta t}$. Se $\Delta t \approx 0$ temos que $\frac{f(\Delta t+t_1)-f(t_1)}{\Delta t} \approx \frac{0}{0}$. Melhorando a escrita, se $t_1 = 0$, então $f(t_1) = \text{sen}(0) = 0$ e temos: $\frac{sen\Delta t}{\Delta t} \approx \frac{0}{0}$.

Paremos momentaneamente com esta função.

Complete as tabelas dadas em relação à função $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}$.

Note que x não pode ser igual a um senão zera o denominador. Todavia, x = 1 também zera o numerador. E 0/0 é forma indeterminada.

E o que são formas indeterminadas? São expressões que podem assumir quaisquer valores. Por exemplo, sabemos que 12/4 = 3 porque 12 = 4 × 3. Bem, se 0/0 = n, segue-se que o zero do numerador será o produto do zero do denominador pelo n. Assim, 0 = 0.n. Todavia, qualquer número multiplicado por zero dá... ZERO!

Assim, vamos considerar valores próximos de um para as tabelas dadas. Entretanto, se $x \neq 1$, segue-se que ou $x < 1$ ou que $x > 1$. Logo, vamos nos aproximar por ambos os lados.

Valores próximos de 1, sendo menores que este.				
X	0,5	0,9	0,95	0,99
F(x)				

Para facilitar, a expressão $2x^2 - 5x + 3$ pode ser reescrita como $(x - 1)(2x - 3)$... (escrever em função das raízes!)

Valores próximos de 1, sendo maiores que este.				
X	1,5	1,1	1,05	1,01
F(x)				

Perceba que:
Se x = 0,5, então a diferença 1 – x será igual a "0,5".
Se x = 0,9, então a diferença 1 – x será igual a "0,1".
Se x = 0,95, então a diferença 1 – x será igual a "0,05".
Se x = 0,99, então a diferença 1 – x será igual a "0,01".

Também...
Se x = 1,5, então a diferença 1 – x será igual a "– 0,5".
Se x = 1,1, então a diferença 1 – x será igual a "– 0,1".
Se x = 1,05, então a diferença 1 – x será igual a "– 0,05".
Se x = 1,01, então a diferença 1 – x será igual a "– 0,01".

Vamos recordar a função módulo. A interpretação geométrica dela é a distância da origem até x. Assim sendo, é conveniente reescrever: $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Traduzindo... a importância do módulo é deixar tudo positivo (O que se entende por este *tudo*? Reflita).

Note que:

- $|1 - x| = 0,5$ se x = 1,5 ou se x = 0,5.
- $|1 - x| = 0,1$ se x = 1,1 ou se x = 0,9.
- $|1 - x| = 0,05$ se x = 1,05 ou se x = 0,95.
- $|1 - x| = 0,01$ se x = 1,01 ou se x = 0,99.

Conclusão: quanto mais próximo x estiver de "1", mais próximo de "0" está | 1 – x |.

Além disso, percebe-se que f(x) está muito próximo de "– 1" à medida que x está próximo de "1".

Seguindo ideia anterior... |–3 – f(x)| está muito próximo de "0" à medida que x se aproxima de "1".

Em termos de símbolos: $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x+3}{x-1} = -1$.

Leia: "limite da função ... quando x se aproxima de '1' é igual a '–1' ".

Obs.: só existe o limite no ponto se existirem e forem iguais os limites laterais. Limites laterais? Sim, é o ato de aproximar-se de $x = a$ por valores pela direita (ou maiores que a) ou pela esquerda (ou menores que a).

Em símbolos:

Limite pela direita: $\lim_{x\to a^+} f(x)$

Limite pela esquerda: $\lim_{x\to a^-} f(x)$

Traduzindo... estamos tão próximos do valor indicado que, se substituirmos a variável pelo valor indicado o erro entre o valor aproximado e o valor real praticamente é zero. Logo, basta substituir a variável pelo valor indicado.

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 2}(3x+4) = 3\cdot 2+4 = 10$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} =$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 10$$

b) $\lim_{u\to -3} \dfrac{u^2+6u+9}{2u+6} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim_{u\to -3} \dfrac{u^2+6u+9}{2u+6}$

$$= \lim_{u\to -3} \frac{(u+3)^2}{2(u+3)} = \lim_{u\to -3} \frac{(u+3)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Agora é sua vez:

c) $\lim_{x\to\pi}(1+senx)$

d) $\lim_{v\to 0}(1-senv)$

Solução:

Basta trocar a variável pelo valor a qual tende. Logo, (a) 1 + senπ = 1 + 0 = 1 e (b) 1, pois sen(0) = 0.

Interessante...

Assim como podemos ter pessoas com mesmo peso e alturas distintas, segue-se que podemos ter funções distintas com mesmo valor no cálculo de um limite.

Foi o que ocorreu com as funções da questão anterior. Considere, dada a expressão do item (a), u = x – π, a diferença entre a variável e o valor a qual ela tende. Por conseguinte, 1 + senx = 1 + sen(u + π) = 1 + (sen(u)cos(π) + sen(π)cos(u)) = 1 – sen(u), que é a expressão do item (b), se trocarmos u por v.

Isto ocorre com outras funções. Seja f(x) = 2x + 3. Se x → 4, então f(x) → 11. g(u) = 2u + 11 tende para 11 quando u → 0. Com efeito, a função g(u) é obtida por meio da relação u = x – 4. Mais adiante faremos uso desta ideia.

Definição de continuidade:

Dizemos que uma função é contínua em x = a quando: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. E é contínua em um intervalo quando é contínua em todos os pontos desse.

1) Encontre os valores das constantes a e/ou b, para que a função dada seja contínua em (–∞, + ∞):

a) $f(x)=\begin{cases} a^2+x \text{ se } x<-1; \\ x^2+2 \text{ se } x\geq -1 \end{cases}$

b) $h(x)=\begin{cases} x-a \text{ se } x\leq -2; \\ ax^2+b \text{ se } -2<x<2; \\ b-x \text{ se x} \geq 2 \end{cases}$

Resposta:
Façamos o item (b).
Se $x \to -2^-$, então o limite pela esquerda fica $-2 - a$.
Se $x \to -2^+$, então o limite pela direita fica $4a + b$.
Assim, $4a + b = -a - 2$.
Se $x \to 2^-$, então o limite pela esquerda fica $4a + b$.
Se $x \to 2^+$, então o limite pela direita fica $b - 2$.
Assim, $4a + b = b - 2$.
Daí, $a = -1/2$ e $b = 5/2$.

2) A população (em milhares) de uma colônia de bactérias, t minutos após a introdução de uma toxina é dada pela função: $f(t) = \begin{cases} t^2 + 7, & t < 5 \\ -8t + 72, & t \geq 5 \end{cases}$

Explique por que a população deve ser de 10000 bactérias em algum momento entre t = 1 e t = 7.

Resp.: Porque é contínua a função, basta fazer $t \to 5^-$ e depois $t \to 5^+$

ERRO: Um dos principais erros observados nesta aplicação é o fato de não considerar f(t) = 10. Com efeito, unidades de milhares.

Nos exercícios abaixo, verifique se a função dada é contínua no valor indicado:

3) $h(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } & x < 0 \\ 1 \text{ se } & x \geq 0 \end{cases}, c = 0;$

4) $m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ se } & x \neq 2 \\ 3 \text{ se } & x = 2 \end{cases}, c = 2;$

Respostas:
Devemos verificar se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Na questão 3)
Quando $x \to 0^-$ temos que $f(x) \to -1$, pois é constante a função.
Quando $x \to 0^+$ temos que $f(x) \to 1$, pois é constante a função.

Sendo diferentes os limites laterais, não existe o limite no ponto. Por conseguinte, a função não é contínua em x = 0.

ERRO: Discentes confundem o "se" com o "que". Isto é, tentam verificar o que não está coerente.

Na questão 4)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=$$
$$\lim_{x\to 2}(x+2)=4\neq f(2)=3$$

Logo, não é contínua em x = 2. Caso a função fosse redefinida em x = 2, para f(x) = 4, então seria contínua neste valor.

ERRO: Não lembrar dos produtos notáveis, no caso, o quadrado da diferença: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Limites infinitos e no infinito

Considere a função y = 1/x. Com x diferente de zero. Ela tem grande importância porque qualquer polinômio pode ser reescrito em termos dela.

Por exemplo: $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$.

Vamos colocar em evidência o x^3. Isto é, dividir o membro direito da igualdade por x^3 (e multiplicar por ele mesmo, desde que $x \neq 0$).

Assim,

$$p(x)=x^3\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}\right)=x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$
$$=x^3\left(1+3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

Vamos completar as tabelas:

Quando x decresce indefinidamente, isto é, $x \to -\infty$

X	-10^{10}	-10^{100}	$-10^{1.000}$	$-10^{100.000}$
Y = 1/x				

Quando x cresce indefinidamente, isto é, $x \to \infty$

X	10^{10}	10^{100}	$10^{1.000}$	$10^{100.000}$
Y = 1/x				

Quando x se aproxima de zero por valores menores que zero, isto é, $x \to 0^-$

X	-10^{-10}	-10^{-100}	$-10^{-1.000}$	$-10^{-100.000}$
Y = 1/x				

Quando x se aproxima de zero por valores maiores que zero, isto é, $x \to 0^+$

X	10^{-10}	10^{-100}	$10^{-1.000}$	$10^{-100.000}$
Y = 1/x				

Percebemos que...

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Algumas considerações sobre o "infinito":

$$\infty \cdot n = \begin{cases} \infty, & n>0 \\ -\infty, & n<0 \end{cases}$$

$$\infty^n = \begin{cases} \infty, & n>0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$

$$\infty \pm n = \infty$$

Por quê? Discuta com seus colegas... antes, compare com a seguinte ideia: se alguém não vive 130 anos, viverá 130 + 10? 130 × 10? 130^{10}?

Resultado importante: (*) $\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ se a constante k for diferente de zero e n > 0.

Exemplos resolvidos...:

1) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{5x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-1+\frac{1}{x^2}}{5} = \frac{-1+0}{5} = \frac{-1}{5}$$

2) $$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Dicas:

(1) Quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, basta dividir tudo pelo x^n, onde n é o maior expoente de x (ou da variável que aparece).

(2) Quando $x \to a^-$, lembrar que $x < a \to x - a < 0$.

(3) Idem caso $x \to a^+$.

3) Para que valores de a e b tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{ax^2+bx+3} = 1?$$

Solução:

Primeiramente, vamos supor $a \neq 0$. Por quê? Para garantir que o grau do denominador seja '2'.

Assim sendo, vamos dividir numerador e denominador por x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{ax^2+bx+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x+1}{x^2}}{\frac{ax^2+bx+3}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{a+\frac{b}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{0}{a} = 0$$

Como é dito no enunciado que o limite é igual a '1', segue-se que supor a ≠ 0 não é verdadeiro. Logo, a = 0.
Mesmo raciocínio... supor b ≠ 0.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{bx+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{bx+3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{b+\frac{3}{x}}$$

$$= \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = 1 \Rightarrow b = 2$$

Resp.: a = 0 e b = 2.

ERRO: Não considerar a hipótese. Ou seja: (1) a variável tende para "infinito" e a função é um quociente de polinômios. Logo, resposta é (2) zero se grau do denominador for maior que grau do numerador, (3) ± infinito se grau do denominador for menor que grau do numerador e (4) será uma constante não nula se forem iguais. (5) "1" é constante não nula, logo graus iguais...

4) Um importante resultado sobre limites é o teorema do confronto, ou do sanduíche. A ideia básica é que, em um intervalo,
Se f(x) < g(x) < h(x) e $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$
Então $\lim_{x\to a} g(x) = L$

Mesmo que esta função g(x) não seja uma função usual ou conhecida.

Use este resultado para calcular $\lim_{x\to\infty} g(x)$ sabendo que, para todo $x > 1$, $(x-1)^2 < (x^2-1)g(x) < (x+1)^2$.

Solução:

Como $x > 1 \rightarrow x^2 > 1 \rightarrow x^2 - 1 > 0$. Assim, vamos dividir ambos os membros da desigualdade por $x^2 - 1$.

Assim,

$$\frac{(x-1)^2}{x^2-1} < g(x) < \frac{(x+1)^2}{x^2-1} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} < g(x) < \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x-1}{x+1} < g(x) < \frac{x+1}{x-1}$$

Seja f(x) a função à esquerda e h(x) a função à direita de g(x). Note que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = 1$. *Chegamos neste resultado dividindo tanto o numerador quanto o denominador de cada uma das funções por x e utilizando o resultado (*). Logo, o limite procurado é 1.*

ERRO: Má compreensão do enunciado!

<u>Limites de funções trigonométricas</u>

Observou-se que os limites que envolvem funções trigonométricas passam pelo: $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$

Tal limite é considerado o <u>limite fundamental da trigonometria.</u> Pesquise o motivo deste resultado.

Exemplos:

a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{tgx}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{senx/\cos x}{x} \stackrel{(2)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} \stackrel{(4)}{=} 1\cdot\frac{1}{1} = 1$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \stackrel{(5)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} \stackrel{(6)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \stackrel{(7)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{x^2(1+\cos x)} \stackrel{(8)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{senx}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} \stackrel{(9)}{=} 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Entendendo as "passagens":
Já que dá 0/0, escrever a tg(x) como a razão entre sen(x) e cos(x).
Foi utilizada a divisão de frações.
Organizamos expressão para aparecer sen(x)/x.
Quando $x \to 0$ temos que $\cos(x) \to 1$.
De $sen^2x + cos^2x = 1$, temos que $sen^2x = 1 - cos^2x = (1 - cosx)(1 + cosx)$, pois $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Ideia anterior.
Substituição prevista em (5).
Fizemos aparecer sen(x)/x
Idem (4).

Exercícios:
1) Usando as ideias dos exemplos, calcule:
a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{tg(x)}$
b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

Resp.:
a) "1". Com efeito, tg(x) = sen(x)/cos(x)
Daí, x/tg(x) = x/[sen(x)/cos(x)]
Organizando pela divisão de frações…

ERRO: limite é válido para x/sen(x). Infelizmente, há discentes que só seguem uma linha de raciocínio.

b) *Já que temos um limite o qual dá 0/0 e envolve função trigonométrica, segue-se que devemos fazer aparecer sen(x)/x – eis a principal causa de **ERRO**. Operar limite trigonométrico sem uso do limite fundamental...*
Da relação fundamental da trigonometria, $sen^2x + cos^2x = 1$, segue-se que $sen^2x = 1 - cos^2x$. pelos produtos notáveis, já que $1 = 1^2$, temos: $sen^2x = (1 - cosx)(1 + cosx)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}.\frac{1+cosx}{1+cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x(1+cosx)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}.\frac{senx}{1+cosx} = 1.\frac{0}{1+1} = 0$$

2) Fazendo a mudança u = x – a, onde 'a' é o valor a qual tende o limite, resolva os itens (b) e (c) conforme o exemplo (a). Repare que em cada caso temos 0/0:

a) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-senx}{x} \Rightarrow u = x-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = u+\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$sen(x) = sen(u+\frac{\pi}{2})$$

$$sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a) \Rightarrow$$

$$sen(u+\frac{\pi}{2}) = sen(u)\cos(\frac{\pi}{2}) + sen(\frac{\pi}{2})\cos(u) = \cos(u)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-senx}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u+\frac{\pi}{2}} = \frac{1-1}{0+\frac{\pi}{2}} = 0$$

Observação: $\frac{0}{0}$ é forma indeterminada. Assim sendo, se no cálculo de limites obter tal expressão, você deve retirar um ou ambos os zeros. Como? Bem...

Se função do tipo p(x)/q(x), SEM envolver trigonométricas, dividir numerador e denominador por x – a, onde "a" é o valor o qual a variável x está tendendo.

Se função do tipo p(x)/q(x), COM funções trigonométricas, usar o limite fundamental da trigonometria: $\lim_{u\to 0} \frac{senu}{u} = 1$.

Alguns resultados úteis:

- $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$
- $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$
- $\lim_{u\to 0} \frac{\cos u - 1}{u} = 0$
- $\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$

  Obs.: Se a variável não tender para zero mude de variável... em vez de "x → a" faça "u → 0" considerando "u = x – a", que equivale a "x = u + a"

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}\pm\infty & ,n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & ,n=m\\ 0 & ,n<m\end{cases}$$

com $p(x) = a_n x^n + ... + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + ... + b_0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$$

O número de EULER:

Definimos $e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ sendo n um número natural. Este resultado pode ser estendido para qualquer número real x.

Uma das utilidades do número e, $e = \lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x$, é a relação com a Matemática Financeira. Isto é, $\mathbf{M = C(1 + i)^n}$ representa o montante M após n períodos que um capital C, investido a uma taxa i, relativa a este período n (se o período é mensal, a taxa é mensal, se o período é diário, a taxa é diária, etc.).

Quando a capitalização é contínua, temos $\mathbf{M = C.e^{in}}$. Para chegar neste valor, procede-se da seguinte maneira, sendo n anual e i taxa anual.

- Se *n* for mensal, o novo período é multiplicado por 12 e a taxa correspondente é dividida por 12.
- Passando a considerar n diário, o novo n será n × 12 × 30, e a taxa, que está dividida por 12, i/12, fica dividida por 30, ou seja, i/(12 × 30).
- Passando a considerar valores a cada minuto, a cada segundo, etc. temos M = $C(1+\frac{i}{k})^{nk}$.

Calcule o limite quando k tende para o infinito da função M e verifique que $\mathbf{M = C.e^{in}}$

Sugestão:

Uma forma "genérica" do número 'e' é obtida mudando de variável. Seja y = 1/x. Assim, x → ±∞ implica que y → 0. Por conseguinte,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Logo, em $C(1+\frac{i}{k})^{nk}$ *sendo que* $k\to\infty$*, seja* $y = i/k$.

Daí, $\lim_{k\to\infty} C(1+\frac{i}{k})^{nk} = C.\lim_{k\to\infty}(1+\frac{i}{k})^{nk} =$

$$C.\lim_{y\to 0}(1+y)^{n\cdot\frac{i}{y}} = C.\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{in} = C.e^{in}$$

Exercícios: Determine:

a) $\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}$ *resp.:* e

b) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x$ *resp.:* e^3

c) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^x$ *resp.:* e^2

Sugestão: em (x + 1)/(x – 1), divida numerador e denominador por x...

Para fixar... $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$.

Com efeito, sendo u = k/x, temos x = k/u e x → ∞ implica em u → 0.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{k}{x})^x = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{k}{u}}$$

$$= \lim_{u\to 0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^k = e^k$$

Lembrar, que 1 – 3/x, por exemplo, pode ser reescrito como 1 + (–3)/x – que é **ERRO** frequente!

Aplicação: Durante uma epidemia de dengue, o número de pessoas que adoeceram, num certo bairro, após t dias é dado por

$$L(t) = \frac{100.000}{1+19.900e^{-0,8t}}$$

Determine a quantidade máxima de indivíduos atingidos pela doença.

Resp.: 100.000

Limites importantes: $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty \end{cases}$

Para percebê-los, complete as tabelas, lembrando que ln(x) = $\log^x_e$ (logaritmo de x na base e), bem como $\ln(e^k) = k$

Primeiro para $x \to \infty$

X	e^1	e^{25}	$e^{2.500}$	$e^{25.000.000}$
Ln(x)	*Ln(e¹) = 1*			

Agora, faça para $x \to 0^+$

X	e^{-1}	e^{-50}	$e^{-5.000}$	$e^{-5.000.000}$
Ln(x)				

Um resultado importante: $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$, com efeito, se $u = e^h - 1$, temos $e^h = u + 1$, de onde $h = \ln(u + 1)$.

Note que $h \to 0$ implica $u \to 0$ também (por quê?).

Daí,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \overset{(i)}{=} \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(u+1)} \overset{(ii)}{=} \lim_{u\to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(u+1)}{u}} \overset{(iii)}{=}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{\dfrac{1}{u}\cdot \ln(u+1)} \overset{(iv)}{=}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{1/u}} \overset{(v)}{=} \frac{1}{\ln \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

2ª PARTE

DERIVADAS

Desejo a cada um de vocês a matemática da vida, a qual consiste em somar ótimas amizades, diminuindo as más preocupações, multiplicando os bons momentos vividos com amigos e familiares, dividindo amor e compreensão. DEUS seja a potência no coração de cada um de nós.

Definição:

Regras de derivação:

1) Se $f(x) = c \cdot x^n$, então $f'(x) = cn \cdot x^{n-1}$
Ex.: $f(x) = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} = 6x^2$

2) Se $f(x) = g(h(x))$, então $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h(x)$.
Ex.: $f(x) = (ax + b)^n$, neste caso, a função de "dentro" ou $h(x)$ é $ax + b$ e a de "fora" ou $g(x)$ é u^n (a de fora é obtida 'pondo a mão' sobre o que está dentro dos parênteses). Assim, $g(u) = u^n \rightarrow g'(u) = nu^{n-1}$ e $g'(h(x)) = n[h(x)]^{n-1} = n(ax + b)^{n-1}$. E quem é $h'(x)$? Bem, vamos lembrar a definição de derivada...

$$h'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{[a(x+t)+b] - [ax+b]}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{ax + at + b - ax - b}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{at}{t} = \lim_{t \to 0} a = a$$

Por fim, $g'(h(x)) = an(ax + b)^{n-1}$

Ex. numérico: $[(8x + 11)^9]' = 8.9.(8x + 11)^{9-1} = 72(8x + 9)^8$

3) Se $f(x) = \text{sen}x$, então $f\,'(x) = \cos x$
4) Se $f(x) = \cos x$, então $f\,'(x) = - \text{sen}x$
5) Se $f(x) = \text{tg}x$, então $f\,'(x) = \sec^2 x$
6) Se $f(x) = \text{cotg}x$, então $f\,'(x) = - \text{cosec}^2 x$
7) Se $f(x) = \sec x$, então $f\,'(x) = \sec x \cdot \text{tg}x$
8) Se $f(x) = \text{cosec}x$, então $f\,'(x) = - \text{cosec}x \cdot \text{cotg}x$
9) Se $f(x) = \ln x$, então $f\,'(x) = 1/x$
10) Se $f(x) = g(x) \pm h(x)$, então $f\,'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
11) Se $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, então $f\,'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
12) Se $f(x) = g(x)/h(x)$, então $f\,'(x) = [g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)]/ [h(x)]^2$

Deduzindo algumas das regras de derivação:

***Derivada do produto: **f(x) = g(x).h(x)**

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} \overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{g(x+u)h(x+u)-g(x)h(x)}{u} \overset{(2)}{=}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{g(x+u)h(x+u)+[g(x)h(x+u)-g(x)h(x+u)]-g(x)h(x)}{u} \overset{(3)}{=}$$

$$\lim_{u\to 0}\left[\frac{g(x+u)h(x+u)-g(x)h(x+u)}{u}+\frac{g(x)h(x+u)-g(x)h(x)}{u}\right] \overset{(4)}{=}$$

$$\lim_{u\to 0}\left[\frac{g(x+u)-g(x)}{u}h(x+u)+\frac{h(x+u)-g(x)}{u}g(x)\right] \overset{(5)}{=}$$

$$g'(x).h(x)+g(x).h'(x)$$

***Derivada de **f(x) = sen(x)**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}\overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(h)+sen(h)\cos(x)-sen(x)}{h}$$

$$\overset{(2)}{=}\lim_{h\to 0}[sen(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{sen(h)}{h}]\overset{(3)}{=}$$

$$sen(x).0+\cos(x).1=\cos(x)$$

***Derivada de **f(x) = e^x**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\overset{(2)}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}e^x\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

***Derivada de **f(x) = ln(x)**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}\overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})\overset{(2)}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{1}{x}h)\overset{(3)}{=}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{1}{x}h)^{\frac{1}{h}}\overset{(4)}{=}\ln e^{\frac{1}{x}}=1/x$$

EXERCÍCIOS (com respostas mais adiante...)

1) Derive, após obter as funções:

a) Considere um círculo de raio igual a x cm, se um quadrado está inscrito neste círculo, determine a área A do quadrado em função de x. Faça um esboço do seu gráfico.

b) Dado um pedaço de papelão quadrado com 12 cm de lado, tira-se de cada canto do papelão, quadrados com *x* cm de lados e os bordos são dobrados de modo que forme uma caixa sem tampa. Determine o volume V da caixa em função de *x*, indicando o domínio e a imagem.

2) Uma das aplicações das derivadas é a obtenção da equação de retas tangentes a determinadas curvas em um ponto. Obter a equação da reta tangente a cada uma das curvas abaixo no ponto P indicado:

a) $y = x^2 + 2x + 1$, P(1, 4)

b) $y = x/(x^2 + 1)$, P(0, 0)

c) $y^2 + x^2 = 1$, P(1, 0)

d) $x^2 - y^2 = 1$, P(-1, 0)

e) $y = tg(1 - x^2)$, em $x = 1$

f) $y = \ln(x^2 + 1)$, em $x = 1$

Obs.:

Derivação implícita:

Se $f(x) = [g(x)]^n \rightarrow f'(x) = n[g(x)]^{n-1}.g'(x)$

Assim, se $y = f(x)$, então $(y^3)' = 3y^2.y'$.

Você usará esta ideia nos itens (c) e (d).

3) Em Economia, a função custo marginal é a derivada da função custo total associada à produção de um bem, e na qual x representa a quantidade produzida. Determinar a função custo marginal em relação às seguintes funções custo total (CT):

a) $CT = 2x + 100$

b) $CT = (4x + 24)^{1/2} + 30$

4) Uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação de movimento, $s = 5 - 4\cos^2 t$, onde s metros é a distância orientada da partícula desde a origem em t segundos. Se v (m/s) e a (m/s²) são, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula, encontre v e a. Lembre-se: $v = ds/dt$ e $a = dv/dt$.

Respostas:
(entender e refazer organizando ideias formalmente)

1ª. Questão

a) Ao inscrever um quadrado em uma circunferência, a diagonal do quadrado será o diâmetro da circunferência. Assim, se k indicar o lado do quadrado, sua diagonal será $k\sqrt{2}$. E o diâmetro é 2x. Como queremos a área, $A = k^2$. Ora, $k\sqrt{2} = 2x \rightarrow 2k^2 = 4x^2 \rightarrow \boldsymbol{k^2 = 2x^2} \rightarrow A = 2x^2 \rightarrow A' = 4x$.

ERRO: Confundir "inscrição" com "circunscrição" de figuras.

b) Em relação ao volume, $0 < x < 6$, pois não faz sentido medida negativa (para esta aplicação!). Daí, como o volume de uma caixa é o produto das medidas (largura x altura x comprimento), temos $V = x.(12 - 2x).(12 - 2x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$. Portanto, V' será igual a $144 - 96x + 12x^2$.

ERRO: Não determinar o domínio de maneira satisfatória.

2ª. Questão

A equação da reta tangente em (x_p, y_p) é dada por $y - y_p = f'(x_p).(x - x_p)$.

a) $y' = 2x + 2$. Daí, $f'(1) = 4 \rightarrow y - 4 = 4(x - 1) \rightarrow y = 4x$.

b) $y' = [(x)'.(x^2 + 1) - x.(x^2 + 1)']/(x^2 + 1)^2 = [1.(x^2 + 1) - x.(2x)]/(x^2 + 1)^2$ por conseguinte, $y' = (1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$. Daí, $f'(0) = 1 \rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \rightarrow y = x$.

c) $(x^2 + y^2)' = (1)' \rightarrow 2x + 2y.y' = 0 \rightarrow y' = -x/y$. Note que não existe y' quando y for0. A interpretação geométrica é uma reta perpendicular ao eixo x. No caso, x = 1.

d) $(x^2 - y^2)' = (1)' \to 2x - 2y.y' = 0 \to y' = x/y$. Note que não existe y' quando y for0. A interpretação geométrica é uma reta perpendicular ao eixo x. No caso, $x = -1$.

e) $y' = sec^2(1 - x^2).(-2x)$, lembrar da regra da cadeia. Em $x = 1$, temos que o valor da derivada será $f'(1) = sec^2(1 - 1^2).(-2.1) = sec^2(0).(-2) = -2$. Pois, como $sec(0) = 1/cos(0)$, temos que $sec(0) = 1/1 = 1$. E quem é o y_p? Ora, sendo $x = 1$, $f(1) = tg(1 - 1^2) = tg(0) = 0$. Por conseguinte, $y - 0 = 2(x - 1) \to y = 2x - 2$.

f) $y' = 2x/(x^2 + 1)$. Não esquecer que $(lnu)' = (1/u).u' = u'/u$. $f'(1) = 1$. Para o cálculo do y_p, $f(1) = ln(1 + 1^2) = ln2$. Assim, $y - ln2 = 1(x - 1) \to y = x - 1 + ln2$.

3ª. Questão

a) $(CT)' = 2$

b) $(CT)' = [(4x + 24)^{1/2}]' + (30)' = (1/2).(4x + 24)^{-½}.(4) = 2.(4x + 24)^{-½}$

4ª. Questão

A velocidade é: $s' = (5 - 4cos^2t)' = -4.2.(cost).sent = -4sen(2t)$, sendo usado o fato que $sen(2t) = 2.sent.cost$. E a aceleração é $v' = (-4).cos(2t).2 = -8cos(2t)$.

Atenção: $(cos^2x)' = (cosx.cosx)' = (cosx)'.(cosx) + (cosx).(cosx)' = 2.(cosx)'.cosx = - 2senx.cosx = -sen(2x)$

Ou, considere $f(x) = cos^2x = (cosx)^2$

Perceba que $f(x) = g(h(x))$,

Onde $g(\ ) = (\ )^2$ (ou $g(u) = u^2$, sendo "u" variável de apoio).

E $h(x) = cosx$.

Como $f'(x) = g'(h(x)).h'(x)$

Segue-se que $g'(u) = 2u \to g'(h(x)) = 2h(x) = 2cosx$.

Sendo $h'(x) = -senx$,

$(cos^2x) = -2cosx.senx$

Extremos (ou aplicações de máximos e mínimos)

Quando queremos um valor de máximo estamos interessados no valor $x = c$ tal que $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. Será de mínimo quando $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$.

Observação: Podemos ter pontos críticos tais que não exista $f'(x)$. Tais casos não serão aqui abordados, pois o intuito é a aplicação.

A função da derivada primeira é estar associada ao crescimento (intervalos onde $f'(x) > 0$) ou decrescimento (intervalos onde $f'(x) < 0$) de uma função.

A derivada segunda está relacionada com a concavidade: para cima "$\cup$" ($f''(x) > 0$) ou para baixo "$\cap$" ($f''(x) < 0$).

Atividades:

1) Com uma folha de papelão quadrada de lado 15 cm, cortando-se partes quadradas nos cantos e dobrando-as, deseja-se construir uma caixa aberta, do tipo de uma caixa de sapatos. O volume máximo que pode ter uma caixa assim construída é um valor...

2) A função $y = A\,\text{sen}(kx)$, com $A > 0$, e sua derivada segunda y'' satisfazem identicamente a igualdade $y'' + 4y = 0$. O valor da derivada primeira y', para $x = 0$, é 12. Calcular as constantes A e k.

3) Uma caixa d´água tem o formato de um cone circular reto invertido com 120 cm de diâmetro e 150 cm de altura. Uma torneira enche essa caixa à razão de 1000π mm^3/seg. Determinando a taxa de variação da altura no instante em que a água está a 90 cm de altura, obtemos um valor...

4) Um refrigerante é vendido em latas cilíndricas de volume 400ml. Calcular o raio da base de modo que o material gasto na embalagem seja o mínimo possível.

5) A altura de um cone circular reto é 15 cm e aumenta na razão de 0,2 cm/min. O raio da base é 10 cm. Qual a taxa de variação do volume quando a altura for de 20 cm?

RESPOSTAS

1ª. Questão

O volume, de domínio 0 < x < 7,5, pois não faz sentido medida negativa (para esta aplicação!). Daí, como o volume de uma caixa é o produto das medidas (largura x altura x comprimento), temos $V = x.(15-2x).(15-2x) = 225x - 60x^2 + 4x^3$. Portanto, V' será igual a $225 - 120x + 12x^2$.

Queremos x tal que v' = 0. Daí

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-120) \pm \sqrt{(-120)^2 - 4(12)(225)}}{2(12)} =$$

$$\frac{120 \pm 60}{24} = \begin{cases} 7,5 \\ 2,5 \end{cases}$$

Logo, x = 2,5 (pois 7,5 não pertence ao domínio da função)

ERRO: Trabalhar com valor fora do domínio.

2ª. Questão

Temos que y' = A.cos(kx).k = Ak.cos(kx). De y'(0) = 12, segue-se que 12 = Ak.cos(0). De onde Ak = 12.

Como A > 0, segue-se que k > 0. E quem é k? Usar a outrahipótese. Dado que y'' + 4y = 0 → $-Ak^2$sen(kx) + 4Asen(kx) = 0 → Asen(kx)$(4-k^2)$ = 0. Dado que k > 0, $k^2 = 4$, de onde <u>k = 2</u>. Daí, <u>A = 6</u>.

ERRO: Não usar todas as hipóteses.

3ª. Questão

Uma relação que será utilizada nesta e em outras questões é:
$\frac{R}{H} = \frac{R_{dado}}{H_{dado}}$.

Como $R_{dado} = 60$ e $H_{dado} = 150$, segue-se que R = 2H/5.

O volume do cone é: $\frac{\pi R^2 H}{3}$.

Para este caso, $V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi (\frac{2H}{5})^2 H}{3} = \frac{4\pi H^3}{75}$

Derivar ambas as variáveis em relação ao tempo.

$$(V)' = (\frac{4\pi H^3}{75})' \Rightarrow 1.V' = \frac{4\pi}{75} \cdot 3H^2 \cdot H' \Rightarrow$$

$$\pi = \frac{4\pi}{25}(90)^2 H' \Rightarrow H' = \frac{1}{1296} cm/seg$$

ERRO: Derivação implícita, sendo ambas as variáveis funções do tempo (taxa relacionada). A "essência" é derivar ambos os membros da igualdade normalmente, acrescentando a respectiva derivada.

4ª. Questão

$V = \pi R^2 H = 400$. A área total é $2A_{base} + A_{lateral}$. Daí, $A = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. Como queremos o raio, isolar H na expressão do volume. Assim, $H = 400/\pi R^2$.

Organizando, a área será $2\pi R^2 + 2\pi R(400/\pi R^2) = 2\pi R^2 + 800.R^{-1}$. Daí, queremos R tal que A' = 0.

Assim, $A' = 4\pi R - 800.R^{-2} = 0 \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 4$

ERRO: Fórmulas de área e volume.

5ª. Questão

Dado H' = 0,2 cm/min. Como $R_{dado} = 10$ e $H_{dado} = 15$, segue-se que R = 2H/3. Queremos V'. Derivar ambas as variáveis em relação ao tempo.

$$(V)' = (\frac{4\pi H^3}{27})' \Rightarrow 1.V' = \frac{4\pi}{27} \cdot 3H^2 \cdot H' \Rightarrow$$

$$V' = \frac{4\pi}{9}(20)^2(0,2) \Rightarrow V' = \frac{160\pi}{9} cm^3 / \min$$

ERRO: Mesmo da 3ª.

EXERCÍCIOS – PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Os ERROS estão inclusos nas argumentações das respostas.

1) Determine a altura do cone de maior volume que pode ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 2 cm em torno de um dos catetos.

2) Se a velocidade de uma onda de comprimento L, em águas profundas, é dada por:

$$v = M\sqrt{\frac{L}{B} + \frac{B}{L}}$$

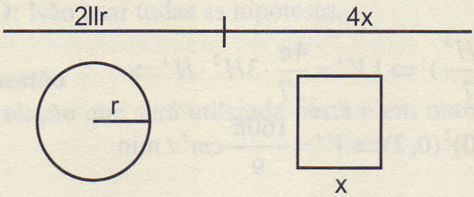
Onde M e B são constantes positivas, qual é o comprimento de onda que minimiza a velocidade?

3) A taxa aeróbica de uma pessoa com x anos de idade é dada por:

$$A(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

Sendo $x \geq 11$. Em que idade a pessoa tem capacidade aeróbica máxima?

4) Para se fazer uma circunferência e um quadrado cortou-se um fio de arame, com 100cm de comprimento, em dois bocados.



De que maneira deve ser cortado o fio de modo que a área total (círculo+quadrado) seja mínima?

5) Dentre os retângulos de perímetro dado, qual o de maior área?

RESPOSTAS

1ª. Questão

Sejam x e y os catetos, sendo x o raio e y a altura quando obtemos o cone via rotação em torno do cateto de lado y. Logo, $x^2 + y^2 = 4$. O volume do cone será $\pi x^2 y/3$.

Organizando, $V = \pi(4 - y^2)y/3 = (\pi/3)(4y - y^3) \rightarrow V' = (\pi/3).(4 - 3y^2)$. Queremos y tal que $V' = 0$.

De onde concluimos que $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2ª. Questão

$$v = M(\frac{1}{B}L + BL^{-1})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v' = M \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{B}L + BL^{-1})^{\frac{-1}{2}} \cdot (\frac{1}{B} - BL^{-2}) =$$

$$\frac{M \cdot (\frac{1}{B} - BL^{-2})}{2(\frac{1}{B}L + BL^{-1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$v' = 0 \Rightarrow \frac{1}{B} - BL^{-2} = 0 \Rightarrow L = B$$

3ª. Questão

$$A'(x) = 110 \cdot \frac{(\ln x - 2)' \cdot x - (\ln x - 2) \cdot (x)'}{x^2} =$$

$$110 \cdot \frac{(\frac{1}{x})x - (\ln x - 2) \cdot 1}{x^2} = 110 \cdot \frac{3 - \ln x}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 3 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3 \approx 21$$

Obs.: Não confundir lnx – 2 com ln(x – 2).

4ª. Questão

$A_{total} = \pi R^2 + x^2$. Pelo comprimento, $100 = 2\pi R + 4x$. Vamos isolar *x*.$x = 25 - \pi R/2$.

Daí, $A_{total} = \pi R^2 + x^2 = \pi R^2 + (25 - \pi R/2)^2$. Queremos R tal que $A' = 0$. Desta feita, derivando temos

$A' = 2\pi R + 2(25 - \pi R/2).(-\pi/2) = 2\pi R - \pi\,(25 - \pi R/2) = 0$

Portanto, $R = 50/(4 + \pi)$ que vale aproximadamente 7 (sete). E *x* fica em torne de 11,5.

5ª. Questão

Seja 2p o perímetro do retângulo. Daí, 2p = 2x + 2y (sendo x e y os lados do retângulo). Ou seja, $p = x + y \rightarrow y = p - x$ e $A = xy = x(p - x) = xp - x^2$. Queremos x tal que A' = 0. Por conseguinte, x = p/2.

REGRAS DE L'HOSPITAL

Se no cálculo de limites aparecer 0/0 ou ∞/∞, "basta" derivar numerador e denominador simultaneamente:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Caso particular... 0 x ∞. Neste caso, lembrar que 4 x 5 = 20. Também temos que 4 : (1/5) = 20. Ou seja, 1/(1/5) = 5. Isto é, ab = a/(1/b).

1) Usando L'Hopital, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+4x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{e^{3x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{senx}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$

2) Um circuito elétrico tem resistência de R ohms, uma indutância de L henrys e uma força eletromotriz de E volts. Considere E, R e L positivos. Se I amperes é a corrente no circuito t segundos após este ter sido ligado, então $I=\dfrac{E}{R}(1-e^{-Rt/L})$ calculando o limite de I quando R tende para ZERO pela direita, obtemos...

3) Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+n+n^2}{1+2+3+...+n}$

1ª. Questão

ERRO: Confundir regra com a regra do quociente.

Item (a)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1} \frac{2x}{2x+4} = -1$$

Item (b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3xe^{3x}} = 0$$

Item (c)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{senx} \Rightarrow y = x^{senx} \Rightarrow \ln y = senx.\ln x \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln y) = \lim_{x\to 0^+} senx.\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{senx}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\ln y) \overset{L'''Hopital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{sen^2 x}{(-\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{x} \cdot \frac{senx}{(-\cos x)} = 1 \cdot \frac{0}{(-1)} = 0$$

$$\Rightarrow \ln(\lim_{x\to 0^+} y) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$$

Item (d)

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x} \Rightarrow y=(x+e^x)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \ln(x+e^x)^{1/x} =$$
$$\frac{1}{x}\cdot \ln(x+e^x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(x+e^x) \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\ln y) = \ln(\lim_{x\to 0} y) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^2$$

2ª. Questão

ERRO: Exceto R, demais letras à direita são constantes.

$$\lim_{R\to 0^+} I = \lim_{R\to 0^+}\frac{E}{R}(1-e^{-Rt/L}) \overset{L'Hopital}{=}$$
$$\lim_{R\to 0^+}\frac{E\cdot(-e^{-Rt/L})\cdot(-t/L)}{1} = Et/L$$

3ª. Questão

Note que temos a soma dos termos de uma Progressão Aritmética: 1 + 2 + ... + n = (1 + n).n/2 = (n² + n)/2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n+n^2}{1+2+3+\ldots+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n+n^2}{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}} \overset{L''Hopital}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+\frac{1}{2}} \overset{L''Hopital}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1} = 2$$

Matemática = matema (raciocínio) + ática (atividade)

Funções Hiperbólicas

Motivação:

Se um campo eletrostático E agir em um dielétrico polar líquido ou gasoso, o momento de dipolo resultante P por unidade de volume é $P(E)=\frac{e^{E}+e^{-E}}{e^{E}-e^{-E}}-\frac{1}{E}$: O que acontece quando E se aproxima de zero (positivamente)?

Definição:

1. Seno Hiperbólico: $senh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$
2. Cosseno Hiperbólico: $\cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

Pela "motivação", temos a razão entre o cosh(x) e o senh(x) – basta dividir numerador e denominador por 2. Podemos definir como "cotangente hiperbólica" – idem às definições das trigonométricas.

APLIACAÇÕES:

1ª. QUESTÃO

Após determinar domínio de cada função, encontre as derivadas de:

a) arccosx *b) arccotgx*

c) argcoshx (ou $cosh^{-1}x$) *d) argsechx*

SOL.:

Item A

Se y = arccosx, então cosy = x e seu domínio é $0 \leq x \leq \pi$

Derivando implicitamente em relação à variável x, temos: –seny.y' = 1

Por conseguinte, $y'=-\frac{1}{seny}$

Todavia, a relação entre y e x é cosy = x.

Ora, da relação fundamental da trigonometria, $sen^2y + cos^2y = 1$, temos que

$$seny = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

Lembrar que a raiz negativa não estamos usando por ocasião do domínio.

Assim sendo, $y' = -\dfrac{1}{seny} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Item B

Para y = arccotgx. Segue-se que cotgy = x. Com 0 < x < π

Derivando implicitamente em relação à variável x, temos: $-\text{cosec}^2 y.y' = 1$

Da relação fundamental da trigonometria, $sen^2 y + cos^2 y = 1$, temos que, ao dividir ambos os membros da igualdade por $sen^2 y$, a relação: $1 + cotg^2 y = cosec^2 y$

Assim, $y' = -\dfrac{1}{cosecy} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Item C

Sendo y = argcoshx segue-se que coshy = x. Seu domínio é x > 1

Derivando implicitamente em relação à variável *x*, temos: senhy.y' = 1

Ora, a relação que há entre senhy e coshy é: $cosh^2 y - senh^2 y = 1$ (basta elevar ao quadrado cada função e fazer a diferença!)

Desta feita, $y' = \dfrac{1}{senhy} = \dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Item D

Dado que y = argsechx, segue-se que sechy = x.

Domínio: 0 < x < 1.

Derivando implicitamente em relação à variável *x*, temos: sechy.tghy.y' = 1

De $cosh^2 x - senh^2 x = 1$, temos, ao dividir ambos os membros da igualdade por $cosh^2 x$: $1 - tgh^2 x = sech^2 x$

$$y' = \frac{1}{sechy.tghy} = \frac{1}{sechy.\sqrt{1-sech^2 x}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

ERRO: Inobservância das definições. Ressalta-se também dificuldades nas operações... com feito, há necessidade de um "ciclo" no uso das relações trigonométricas (que são atreladas a um circulo trigonométrico. Ciclo = fechado!)

2ª. QUESTÃO

Se uma onda de comprimento L se move à velocidade v em um corpo de água com profundidade d, então

$$v=\sqrt{\frac{gL}{2\pi}tgh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

em que g é a aceleração da gravidade. Por qual motivo em águas profundas temos a aproximação: $v=\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$

SOL.:

Águas profundas... interpretar como d $\rightarrow \infty$ (**ERRO frequente** é esquecer esse detalhe!). Vamos, por conseguinte, calcular:

$$\lim_{d\to\infty} tgh(ad)$$

Onde "a" é uma constante positiva.

Ora, tal limite equivale a:

$$\lim_{d\to\infty} tgh(ad)=\lim_{d\to\infty}\frac{e^{ad}-e^{-ad}}{e^{ad}+e^{-ad}}$$

Nas "manipulações" de tghx, trocamos 'x' por 'ad'

Reorganizando, usando o fato de $a^{-b}=1/a^{b}$, temos:

$$\lim_{d\to\infty}\frac{e^{ad}-e^{-ad}}{e^{ad}+e^{-ad}}=\lim_{d\to\infty}\frac{e^{ad}-\frac{1}{e^{ad}}}{e^{ad}+\frac{1}{e^{ad}}}$$

Realizando a soma de frações:

$$\lim_{d\to\infty}\frac{e^{ad}-\frac{1}{e^{ad}}}{e^{ad}+\frac{1}{e^{ad}}}=\lim_{d\to\infty}\frac{\frac{e^{2ad}-1}{e^{ad}}}{\frac{e^{2ad}+1}{e^{ad}}}$$

Simplificando,

$$\lim_{d\to\infty}\frac{\dfrac{e^{2ad}-1}{e^{ad}}}{\dfrac{e^{2ad}+1}{e^{ad}}}=\lim_{d\to\infty}\frac{e^{2ad}-1}{e^{2ad}+1}$$

Agora, como temos uma indeterminação (infinito/infinito), usaremos L'Hopital

$$\lim_{d\to\infty}\frac{e^{2ad}-1}{e^{2ad}+1}\overset{L'Hop.}{=}\lim_{d\to\infty}\frac{2ae^{2ad}}{2ae^{2ad}}=1$$

Logo, segue-se resultado.

3ª. QUESTÃO

Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{senhx}{e^x}$

SOL.:

Inicialmente, organizar a expressão

$$\lim_{x\to\infty}\frac{senhx}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}{e^x}$$

Reorganizando, usando o fato de $a^{-b}=1/a^b$, bem como realizando diferença de frações temos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}}{e^x}$$

Pela divisão de frações:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}}$$

Agora, como temos uma indeterminação (infinito/infinito), usaremos L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}} \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2.2e^{2x}}=\frac{1}{2}$$

Agora, como temos uma indeterminação (infinito/infinito), usaremos L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}\overset{L'Hop.}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2ae^{2ax}}{2ae^{2ax}}=1$$

Logo, segue-se resultado.

3ª. QUESTÃO

Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{senh} x}{e^{x}}$

SOL.

Inicialmente, organizar a expressão

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{senh} x}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}{e^{x}}$$

Reorganizando, usando o fato de $e^{-x} = 1/e^{x}$, bem como realizando diferença de frações temos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}}{e^{x}}$$

Pela divisão de frações:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}}$$

3ª PARTE

INTEGRAÇÃO

Apesar das dificuldades da vida,
Acredite no valor que você tem.
Somos amados por DEUS

Relembrando algumas regras de integração...
considerando integral como *anti*derivada

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int (ax+b)^n\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1 \\ \dfrac{1}{a} \cdot \ln|ax+b|, & n = -1 \end{cases} ; a \neq 0$$

$$\int sen(kx)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx)dx + C; k \neq 0$$

$$\int \cos(kx)dx = \frac{1}{k}sen(kx)dx + C; k \neq 0$$

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C; k \neq 0$$

Pela derivada de arctg(x)...

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C, a \neq 0$$

Pela derivada de argtgh(x)...

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}argtgh\left(\dfrac{x}{a}\right) + C, \\ \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C \end{cases} \quad a \neq 0$$

Alguns exercícios resolvidos

1ª. QUESTÃO

A velocidade de uma partícula em M.H.S. é dada por v(t) = 4π.cos(πt + π/6).

Qual é a equação horária, s(t), dado que s(0) = 2?

SOLUÇÃO:

V = ds/dt .: ds = v.dt .: s = ∫ 4π.cos(πt + π/6)dt =
4π.∫cos(πt + π/6)dt = 4π. (1/π).sen(πt + π/6) + C =
4sen(πt + π/6) + C.: s(0) = 2 .: 2 = 4sen(π/6) + C .: C = 0.

2ª. QUESTÃO

Calcule:

a) $\int (9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}})dt$

b) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x + \frac{\sqrt{x}}{3} \right) dx$

c) $\int \frac{senxdx}{\cos^2 x}$

d) $\int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t} \right) dt$

SOLUÇÃO:

a) $\int (9t^2 + t^{-3/2})dt = 9 \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{t^{-1/2}}{(-1/2)} + C = 3t^3 - 2t^{-1/2} + C$

b) $\int (x^{\frac{-1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3})dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{15} x^{\frac{5}{2}} + C$

c) $\cos^2 x = (\cos x)^2 \Rightarrow u = \cos x \Rightarrow$

$$du = -senxdx \Rightarrow \int \frac{senxdx}{\cos^2 x} = \int \frac{(-du)}{u^2} = \int -u^{-2}du$$

$$= -\frac{u^{-1}}{(-1)} + C = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C$$

d) $\int (\frac{1}{2}e^t + t^{\frac{1}{2}} + t^{-1})dt = \frac{1}{2}e^t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \ln t + C = \frac{1}{2}e^t + \frac{2t^{3/2}}{3} + \ln t + C$

MAIS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS.

ENTRETANTO, RECOMENDAMOS REFAZER EXRCÍCIOS ATÉ AQUI VISTOS PARA UM MELHOR ENTENDIMENTO.

PRINCIPAIS **ERROS** – REGRAS DE INTEGRAÇÃO

01. $\int (3x^2 - 2x - 1)dx$;

SOLUÇÃO:

Usaremos o fato da integral da soma (e/ou diferença) ser a soma (e/ou diferença) das integrais.

Assim, $\int 3x^2dx - \int 2xdx - \int dx$

Agora, usaremos o seguinte resultado: $\int c.f(x)dx = c. \int f(x)dx$, onde c é constante.

Por conseguinte, $3\int x^2dx - 2\int xdx - \int dx$.

Dado que $\int x^n dx = x^{n+1}/(n + 1) + C$, se $n \neq -1$,

Temos: $3.x^3/3 - 2.x^2/2 - x + C$ (todas as co–stantes juntas ainda formam constante...)

Resp.: $x^3 - x^2 - x + C$

02. $\int \left(x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 1\right) dx;$

SOLUÇÃO:

Fazendo uso das argumentações até aqui apresentadas, temos, não esquecendo que $x^n.x^p = x^{n+p}$:

$$\int \left(x^2.x^{2/3} - 1\right) dx = \int (x^{8/3} - 1) dx = \frac{x^{8/3+1}}{\frac{8}{3}+1} - x + C = \frac{3}{11} x^{11/3} - x + C$$

03. $\int (2x-3)^{19} dx;$

SOLUÇÃO:

Já que $[(ax + b)^p]' = p(ax + b)^{p-1}.a = ap(ax + b)^{p-1}$

Segue-se que = , onde a, b e p são números reais e "a" diferente de zero.

Com efeito, se u = ax + b. derivando ambos os membros da igualdade em relação à variável x, temos:

$$\int (ax+b)^p dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{p+1}}{p+1} + C, & se \quad p \neq -1 \\ \dfrac{1}{a}.\ln|ax+b| + C, & se \quad p = -1 \end{cases}$$

.du = adx, daí, $\int u^p(du/a) = (1/a). \int u^p du$ ... (integral conhecida! Retornar, após integrar, para variável x).

Assim, $\int (2x-3)^{19} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{20}}{20} + C$

04. $\int x\sqrt{1-2x^2}\, dx;$

SOLUÇÃO:

A ideia é imaginar a função "de dentro" da composição como nova variável.

Seja $v = 1 - 2x^2$.: $dv = -4xdx$, ou, de maneira equivalente, $xdx = -dv/4$

$$\int x\sqrt{1-2x^2}\, dx = \int (1-2x^2)^{1/2} xdx = \int v^{1/2}(-dv/4) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{v^{3/2}}{3/2} + C$$

Como a variável de partida é x... retornar para ela:

Assim: $-(1-2x^2)^{3/2}/6 + C$

05. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+4};$

SOLUÇÃO:

Notemos que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Daí, $\int(x-2)^{-2}dx = C + 1/(2-x)$

06. $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x-1}\,dx;$

SOLUÇÃO:

Inicialmente, desenvolver a soma:

$\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx + \int \sqrt{x-1}\,dx$

A integral à direita do "+" não oferece resistência, com efeito, é só escrever $(x-1)^{1/2}$

Para a da esquerda... Seja $u = x - 1$ a expressão "de dentro" da composição.

Derivando, $du = dx$ e $x = u + 1$.

Assim, $\int x(x-1)^{1/2}dx = \int(u+1)u^{1/2}du = \int u^{3/2}du + \int u^{1/2}du$...

07. $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{\sqrt[3]{1+x^3}};$

SOL.:

Seja $u = 1 + x^3$. Daí, derivando em relação à variável x, temos: $du = 3x^2dx$. Assim,

$$\int \frac{x^3.x^2dx}{(1+x^3)^{1/3}} = \int \frac{(u-1)du/3}{u^{1/3}} = \frac{1}{3}.\int u^{-\frac{1}{3}}(u-1)\,du = \frac{1}{3}.(\int u^{2/3}du - \int u^{-1/3}du)$$

Resolvendo as integrais e retornando para a variável x, temos:

$$\frac{(1+x^3)^{5/3}}{5} - \frac{(1+x^3)^{2/3}}{2} + C$$

08. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos^2 x};$

SOLUÇÃO:

Notemos que a integral equivale a $\int dx/\text{sen}^2x = \int \text{cosec}^2x\,dx = -\text{cotg}x + C$

09. $\int \frac{\text{sen}\, x}{1-\text{sen}^2 x} dx;$

SOLUÇÃO:

Reescrevendo, temos: $\int \text{senxdx}/\cos^2 x$

Opções:

- Seja v = cosx. Daí, dv = –senxdx. Por conseguinte, $\int -dv/v^2 = -\int v^{-2}dv = v^{-1} + C = \sec x + C$
- Reescrever:

  $$\int \frac{senx}{cosx}.\frac{1}{cosx}dx = \int tgx.secxdx = secx + C$$

10. $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

SOLUÇÃO:

Não esquecer! Visualizar a composição e tentar considerar uma variável de apoio (mudança de variável).

Assim sendo, seja m = $\sqrt{x}$ = $x^{1/2}$. Por conseguinte, dm = $\frac{1}{2}.x^{-1/2}dx$. Ou, de maneira equivalente, 2dm = $dx/x^{1/2}$.

Desta feita, a integral fica: $\int$sen(m).2dm = 2.(–cosm) + C = $-2\cos(x^{1/2}) + C$

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}};$

SOLUÇÃO:

Ou recordamos as derivadas das funções trigonométricas inversas para esta integral ou vamos recordar a técnica de integração conhecida como substituição trigonométrica:

Integrando	Faça	Pois	Não esquecendo que
$\sqrt{a^2u^2+b^2}$	.au = b.tgx	$.(au)^2 = b^2.tg^2x$ $.a^2u^2 + b^2 = b^2.sec^2x$	.du = (b/a).sec^2x.dx
$\sqrt{a^2u-b^2}$	.au = b.secx	$.(au)^2 = b^2.sec^2x$ $.a^2u^2 - b^2 = b^2.tg^2x$	.du = (b/a).secx.tgx.dx
$\sqrt{b^2-a^2u^2}$	.au = b.senx	$.(au)^2 = b^2.sen^2x$ $.b^2 - a^2u^2 = b^2.cos^2x$	.du = (b/a).sec^2x.dx

Assim, seja x = $\sqrt{3}$ de onde dz = $\sqrt{3}secz.tgz.dz$

Por conseguinte, $\sqrt{x^2-3} = \sqrt{3}.tgz$

Fazendo as devidas substituições na integral, temos:

$$\int \frac{\sqrt{3}secz.tgz.dz}{\sqrt{3}secz.\sqrt{3}tgz} = \frac{1}{\sqrt{3}}.z + C = \frac{\sqrt{3}}{3}.arcsec\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

SOLUÇÃO:

Notemos que $e^{2x} = (e^x)^2$. Assim, seja u = e^x, por conseguinte, du = e^xdx

Desta feita, $e^{2x} - 1 = u^2 - 1$.

Logo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{e^x dx}{e^x.\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{du}{u.\sqrt{u^2-1}} = arcsec\left(e^x\right) + C$$

Lembremos que k = k.1 = k.(u/u), desde que u não seja igual a zero. Assim, multiplicamos tanto o numerador quanto o denominador por e^x.

13. $\int \frac{dx}{x\ell n\, x}$;

SOLUÇÃO:

Dado que (lnx)' = 1/x, fazendo u = lnx, com du = dx/x, temos:
∫du/u = ln|u| + C = ln|lnx| + C

14. $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx;$

SOLUÇÃO:

Consideremos v = x^2. Assim, dv = 2xdx e temos $\int e^{-v}dv = -e^{-v} + C = -e^{-x^2} + C$

15. $\int \frac{\cosh e^{-x}}{e^x}dx;$

SOLUÇÃO:

Conforme observamos, há composição. Assim, seja $v = e^{-x}$
Por conseguinte, $dv = -e^{-x}dx = -dx/e^x$.
Logo, ficamos com: $\int \cosh v(-dv) = -\text{senh}(v) + C = -\text{senh}(e^{-x}) + C$

16. $\int \frac{dx}{x\,\text{senh}^2\,\ell nx};$

SOLUÇÃO:

Consideremos v = lnx (pois está "dentro" da composição).
Daí, dv = dx/x.
Assim, $\int dv/\text{senh}^2 v = \int \text{cosech}^2 v dv = -\text{cotgh}(v) + C = -\text{cotgh}(\ln x) + C$...
Neste caso, podemos até desenvolver um pouco mais!

17. $\int \frac{(2-\ell n^2 x)}{x(1+\ell nx)}dx;$

SOLUÇÃO:

Aparecendo lnx no integrando e x no denominador... fazemos z = lnx e dz = dx/x.

Assim a integral fica: $\int \frac{2-z^2}{1+z}dz$.

Estratégias:

- Dividir polinômios.
- Mexer com a expressão: notemos que $2 - z^2 = 1 + (1 - z^2) = 1 + (1 - z)(1 + z)$.

$$\frac{2-z^2}{1+z}=\frac{1+(1-z)(1+z)}{1+z}=\frac{1}{1+z}+1-z$$

Comparemos o resultado obtido em cada uma das estratégias... é o mesmo!

Assim, a integral resulta em $\ln|1 + z| + z - z^2/2 + C =$
$\ln|1 + \ln x| + \ln x - (\ln x)^2/2 + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt{x}}$;

SOLUÇÃO:

Como há raiz quadrada e raiz sexta e o m.m.c. entre "2" e "6" é "6", seja $x = z^6$. Por conseguinte, $dx = 6z^5dz$.

Daí,

$$\int \frac{6z^5dz}{\sqrt[6]{(z^6)^5}+\sqrt{z^6}}=\int \frac{6z^5dz}{z^5+z^3}=6\int \frac{z^2dz}{z^2+1}$$

$$=6\int\left(-1+\frac{1}{z^2+1}\right)dz=6(-z+arctgz)+C$$

Lembrando que fizemos divisão de polinômios, ou, de maneira equivalente, reescrevemos o numerador como $z^2 + 1 - 1$.

Voltando para a variável x... $6\left(arctg\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}\right)+C$

APLICAÇÕES:

1ª. QUESTÃO

A Lei de Newton para o resfriamento de um objeto diz que a taxa de a qual um corpo perde calor é proporcional à diferença entre a temperatura (T) e a temperatura do meio ambiente (T_m). Isto é,

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$$

Sendo k constante de proporcionalidade.

Quando um bolo é removido de um forno, sua temperatura é medida como 300°C. Após 3 minutos, é 200°C. Se a temperatura ambiente é de 30°C, após quanto tempo a temperatura do bolo será de 40°C?

Solução:

Resolvendo a equação temos:

$$\frac{dT}{T-T_m}=kdt \rightarrow \int \frac{dT}{T-T_m}=\int kdt$$

Entendendo:

** Inicialmente, isolamos as variáveis.*

** Em seguida, integramos ambos os membros da igualdade.*

Assim: $ln|\,T-T_m\,| = kt + C$ *ou, equivalentemente,*

Isto é, usamos a definição: $lna = b \rightarrow a = e^b$

Podemos desenvolver um pouco mais: $e^{kt+C} = e^{kt}.e^C$

Agora, é só substituir valores:

$T_m = 30$

Para $t = 0$, $T = 300$ *(lembrar: qual sua idade no ano de seu nascimento?)*

Para $t = 3$, $T = 200$

E, $t = 40 \rightarrow T = ?$

2ª. QUESTÃO

Suponha que a gramas de um elemento químico A sejam combinadas com b grama de um elemento químico B. se existirem M partes de A e N partes de B formadas no composto, e X(t) é o número de gramas do elemento químico C formado, então...

$$\frac{dX}{dt}=k(\alpha-X)(\beta-X)$$

Onde $\alpha = a(M + N)/M$ e $\beta = b(M + N)/N$ e k é constante.

Um composto C é formado quando dois elementos químicos A e B são combinados. Para cada grama de A, 4 gramas de B são utilizados. Em 10 minutos, 30 gramas de C são formados. Se inicialmente há 50 gramas de A e 32 gramas de B, determine a quantidade de C em um tempo t.

Solução:

Temos: $\frac{dx}{(\propto -x)(\beta-x)} = kdt$. *Supondo* $\alpha \neq \beta$, *pois se forem iguais, já sabemos resolver.*

A integral da direita da igualdade não oferece resistência.

Surge uma pergunta: é possível separar o produto como uma soma, porque, isoladamente, cada integral é conhecida?

Sim, com efeito, podemos usar: $\dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} \equiv \dfrac{p}{x-\alpha} + \dfrac{q}{x-\beta}$

Onde p e q são constantes. Por quê? Pois, se fossem polinômios com grau maior ou igual a um, poderíamos dividir e, ao usar a identidade de polinômios, seus coeficientes seriam identicamente nulos.

Ah! De (a – b) = -(b – a), reescrevemos:

(a – x)(b – x) = [-(x – a)][-(x – b)] = (x – a)(x – b)... só para facilitar uso de sinais.

Pela soma de frações: $\dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} \equiv \dfrac{p(x-\beta)+q(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$

Denominadores são idênticos, logo, numeradores também devem ser:

$1 \equiv (p+q)x + (-p\beta - q\alpha)$

Lembrar que $0X + 1 = 1$.

Assim,

Coeficientes de "x": $0 = p + q$ *(eq1)*

Coeficientes de "x^0" (ou termos independentes):

$1 = -p\beta - q\alpha$ *(eq2)*

De (eq1): $p = -q$

Substituindo em (eq2): $1 = -(-q)\beta - q\alpha \rightarrow 1 = q(\beta - \alpha)$

Por fim, $q = \dfrac{1}{\beta-\alpha}$ *e* $p = -\dfrac{1}{\beta-\alpha}$

Assim, $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{\beta-\alpha}}{x-\beta} - \frac{\frac{1}{\beta-\alpha}}{x-\alpha} \right) dx$

Passando para fora da integral a constante e usando resultados dos logaritmos, a saber: lnA – lnB = lnA/B, temos:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx = \frac{1}{\beta-\alpha}.\ln\left|\frac{x-\beta}{x-\alpha}\right|$$

Agora é só igualar e resolver o problema.

3ª. QUESTÃO

Experimentos mostraram que a taxa à qual um elemento radioativo decai (medindo o número de núcleos que se transformaram por unidade de tempo) é proporcional ao número y(t) de núcleos radioativos presentes no instante t. A constante de proporcionalidade é chamada de constante de decaimento.

a) Escreva e resolva uma equação diferencial que descreva o decaimento radioativo, considerando a condição inicial $y(0) = y_0$.

b) Meia vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que metade dos núcleos radioativos inicialmente presentes em uma amostra tenha decaído. As pessoas que fazem datação por carbono 14 usam um valor de 5.700 anos para sua meia vida Determine a idade de uma amostra em que 10% dos núcleos radioativos originais presentes já decaíram.

Solução:

Pelo enunciado:

$\frac{dy}{dt} \sim y \rightarrow \frac{dy}{dt} = ky$, sendo k constante de proporcionalidade (no caso, é negativa porque está diminuindo a quantidade...).

Isolando variáveis e resolvendo, chegamos em (compare com primeira aplicação): $\ln|y| = kt + C \rightarrow y = e^{kt}.e^{C}$. Para t = 0... $y(0) = e^{0}.e^{C}$.: $y_0 = e^{C}$.

Para item (b):

Meia-vida: $y = \frac{1}{2}.y_0$.: $y = y_0 . e^{kt} \rightarrow \frac{1}{2}.y_0 = y_0 . e^{5700.k}$

Daí, é com vocês... (com efeito: $5700k = \ln 1/2 = - \ln 2$...)

4ª. QUESTÃO

Astrônomos usam uma técnica chamada estereografia estelar para determinar a densidade de estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) observada, que pode ser analisada a partir de fotografia. Suponha que em um aglomerado esférico de raio R a densidade de estrelas dependa somente da distância x do centro do aglomerado. Se a densidade estelar aparente for dada por y(a), onde "a" é a distância planar observada do centro do aglomerado e f(x) é a densidade real, então pode ser mostrado que:

$$y(a)=\int_a^R \frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,f(x)\,dx$$

Ache a densidade aparente se a densidade real for $f(x) = (R - x)^2/2$.

Solução:
ERRO: NÃO CONSIDERAR INTEGRAL IMPRÓRIA

Queremos: $\int_a^R \frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}.\frac{(R-x)^2}{2}dx$. *Notem que é uma integral imprópria. Com efeito, o domínio tem que satisfazer:* $x^2 - a^2 > 0$. *Ou seja,* $x < -a$ *(desconsiderado!) ou* $x > a$

Desta feita:

$$y(a)=\lim_{b\to a^+}\int_b^R \frac{x(R-x)^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

Inicialmente, resolver a integral indefinida.

Estratégias: ou desenvolver o produto notável e, em seguida, usar o fato de que a integral da soma é a soma das integrais, ou substituição trigonométrica. Lembrando que, por ser integral definida, as constantes em cada caso serão desconsideradas (Por quê?)

Neste segundo caso, seja $x = a.sect$.
Daí, $x^2 - a^2 = a^2sec^2t - a^2 = a^2(sec^2t - 1) = a^2.tg^2t$.
E, $dx = a.sect.tgt.dt$
Por conseguinte,

$$\int \frac{x(R-x)^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int \frac{a.sect.(R-a.sect)^2}{a.tgt}.a.sect.tgt.dt$$

Simplificando e desenvolvendo, temos:

$$a\int \sec^2 t.\left(R^2-2a.sect+a^2.sec^2t\right)dt$$

Usando o fato de que a integral da soma é a soma das integrais, e, para melhor compreensão , isolando cada integral a ser calculada, temos:

Caso I: $aR^2\int sec^2\,tdt = aR^2 \cdot tgt$

Caso II: $-2a^2.\int \sec^3 tdt = -2a^2.\frac{1}{2}.\left(sect.tgt+\ln|sect+tgt|\right)$

Caso III: $a^3.\int \sec^2 t.\sec^2 t dt = a^3.\int (1+tg^2 t).\sec^2 t dt$

Neste caso, usamos o fato de uma das sec^2t ser $1 + tg^2t$, pelo motivo de conhecermos a derivada de tgt.

Daí, $a^3\left(\int \sec^2 t dt + \int (tgt)^2.\sec^2 t dt\right) = a^3.\left(tgt + \frac{tg^3 t}{3}\right)$

Fizemos a seguinte substituição "mental" $u = tgt$.: $du = sec^2tdt$, ficando com a integral de u^2...

Agora, retornar para variável x:

Como $x = a.sect$, temos $sect. = x/a$ e, de $sec^2t = 1 + tg^2t$, temos, considerando a raiz positiva (por quê?):

$$tgt = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

Logo, cada caso fica:

Caso I: $aR^2.\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = R^2.\sqrt{x^2 - a^2}$

Caso II: $-a^2.\left(\frac{x.\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} + \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right|\right)$

Caso III:

$$a^3.\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.\left(1 + \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)^2}{3}\right) = a^2.\sqrt{x^2 - a^2}\left(1 + \frac{x^2 - a^2}{3a^2}\right)$$

Optamos por não desenvolver mais, antes de aplicar limites de integração, por crermos que fica mais fácil a visualização de alguns "cortes"!

De $\int_b^R g(x)dx = h(R) - h(b), com\, h'(x) = g(x)$, *bem como, fazendo b aproximar-se de a por valores maiores que a, isto é "*$b \to a^+$*" temos que* $b^2 - a^2 \to 0$. *Não esquecendo que* $\ln 1 = 0$. *Por conseguinte,*

$$\sqrt{R^2 - a^2}.\left(R^2 - R + a^2 + \frac{R^2 - a^2}{3}\right) - a^2.\ln\left|\frac{R + \sqrt{R^2 - a^2}}{a}\right|$$

Ou seja, reorganizando:

$$\sqrt{R^2 - a^2}.\left(\frac{4R^2 - 3R + 2a^2}{3}\right) - a^2.\ln\left|\frac{R + \sqrt{R^2 - a^2}}{a}\right|$$

As aplicações servem para introduzir as Equações Diferenciais. Faremos uma breve introdução

4ª PARTE

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

<u>Definição:</u>

Uma equação que contenha as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é dita ser uma **Equação Diferencial.**

<u>Definição II:</u>

A ordem de uma EDO corresponde à ordem da mais alta derivada da equação.

Exemplos:

As equações exemplificadas são de primeira ordem

Uma equação de segunda ordem: $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5.\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=7$.

Note que aparece o expoente "3"... mas ele está atrelado à derivada primeira.

Em símbolos, podemos EXPRESSAR uma equação diferencial ordinária de ordem k com uma variável independente pela forma geral:

$F(x, y, y', ..., y^{(k)}) = 0$

Obs.: Uma EDO é dita LINEAR se F for linear em y, y', ..., $y^{(k)}$

Traduzindo... podemos escrever a equação do tipo:

$$a_k(x)\frac{d^ky}{dx^k}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Onde $a_i(x)$ é uma função.

Definição III:

Solução de uma EDO – qualquer função h, definida em um intervalo I e possuindo ao menos k derivadas contínuas em I, que quando substituídas em uma EDO de ordem k reduz a equação a uma identidade, é dita ser *solução* da equação no intervalo.

Obs.: O intervalo tem que estar bem definido.

Exemplos:

1) Y = xe^xé solução da equação y'' – 2y' + y = 0.

2) (Deflexão de vigas) Da física, podemos encontrar a seguinte equação diferencial (um caso bem particular)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Uma solução desta equação é y = cosh(x).

Definição IV:

Uma EDO de primeira ordem da forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ é dita uma **equação linear** na variável dependente y.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Obs.: quando g(x) = 0, a equação é dita ser **homogênea.**

Forma padrão. Dividindo-se ambos os membros por $a_1(x)$ a equação fica:

Solução da EDO linear.

Como estamos em um curso introdutório, em vez de fornecer uma "fórmula pronta", vamos argumentar sua construção.

Vamos "pensar" por etapas:

ETAPA 1

Se Q(x) = 0, então ficamos com dy/dx = –P(x)y.

Separando as variáveis, dy/y = –P(x)dx.

Por conseguinte, integrando ambos os membros da igualdade, ln|y| = –∫P(x)dx + cte.

Ou seja, (de onde saiu este C?)

ETAPA 2

Se P(x) = 0, então dy/dx = Q(x).

Organizando, dy = Q(x)dx.

Daí, y = ∫Q(x)dx + cte

ETAPA 3

Juntar as ideias... ou melhor, as etapas anteriores. Com efeito, lembram da definição de solução de EDO (vide aula anterior!).

Tentativas e erros...

Se $y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)\,dx$ será que esta é uma solução?

Testar, isto é, derivar e substituir na equação:

$$y' = \left[e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)\,dx \right]'$$

Pela derivada do produto,

$$y' = \left[e^{-\int P(x)dx} \right]' . \int Q(x)\,dx + e^{-\int P(x)dx} . \left[\int Q(x)\,dx \right]'$$

Não esquecendo que $(e^u)' = e^u.u'$

$$y' = e^{-\int P(x)dx} . \left[-P(x) \right] . \int Q(x)\,dx + e^{-\int P(x)dx} . Q(x)$$

Notamos que NÃO SERVE...

ETAPA4

Fazendo uma "inspeção" notamos que uma escolha mais apropriada é:

$$e^{\int P(x)dx} . y = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx + C$$

Será? Testar.

Mas, qual a motivação? Conforme etapa anterior, apareceu a exponencial no lado esquerdo da igualdade. Caso há tivéssemos no lado direito da igualdade, a expressão seria simplificada. E por qual motivo temos o sinal trocado no expoente? (Pensem um pouco mais...)

Testando,

$$e^{\int P(x)dx}P(x).y+e^{\int P(x)dx}.y'=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Lembrando, à esquerda da igualdade tínhamos um produto. Logo, derivada do produto (se estão com dificuldades, recomendo rever regras de derivação e integração).

Simplificando, chegamos na equação linear.

Aplicações:

1) ***Resolver a equação*** $y'+y=x$
2) ***Sendo*** $x>0$***, determine solução geral de*** $x.y'-4y=x^6e^x$

Definição V:

Uma EDO de primeira ordem é dita ser de Bernoulli quando pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

Repare que para n = 0 ou n = 1 já sabemos resolver (ou não?)

E como resolver nos outros casos?

Já sabemos que para resolver algumas integrais uma estratégia é fazer mudança de variável. Desta feita, seja $u = y^{1-n}$, com n diferente de 0 e 1. Por quê? Conforme historiadores da matemática, tentativas e erros consolidaram a estratégia a ser utilizada.

Mas, prestem atenção aos expoentes de y... são "n" e "1"...

Com efeito, derivando ambos os membros da equação $u = y^{1-n}$ em relação a variável x, temos:

$$\frac{du}{dx}=(1-n).y^{(1-n)-1}.\frac{dy}{dx}$$

Organizando a escrita:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-n)y^{-n}}.\frac{du}{dx}$$

Substituindo na equação

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

Temos:

$$\frac{y^n}{1-n}.\frac{du}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade pelo inverso do coeficiente de du/dx e fazendo a substituição $u = y^{1-n}$ chegamos em:

$$\frac{du}{dx}+\frac{1-n}{y^n}.P(x)y=\frac{1-n}{y^n}.Q(x)y^n$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{1-n}{y^{n-1}}.P(x)=(1-n)Q(x)$$

$$\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

Exemplos:

$Y' - 2xy = xy^3$

$Y' = 4x^{-1}y + xy^{1/2}$

Solução:

EDO'S EXATAS

Definição VI:

Uma EDO de primeira ordem do tipo $M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0$ é dita EXATA se existir uma função u(x, y) tal que $M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$ e $N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$.

Quando saber que uma EDO é exata? Enunciarei *parcialmente* um teorema cujo enunciado completo e respectiva demonstração devem ser debatidos: $M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ é EXATA se .

E como resolver?

Pensar "ao contrário"!

De $u_x = M(x,y)$, vamos integrar ambos os membros da igualdade em relação à variável x. Assim, $u = \int M(x,y)dx + g(y)$.

Por que apareceu g(y)? Porque ao derivar em relação à variável x, y "se comporta" como constante.

Agora, derivar em relação a y a igualdade $u = \int M(x,y)dx + g(y)$, lembrando da hipótese... $u_y = N(x,y)$.

Vamos aos exemplos para fixar melhor a ideia!

3) $$\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\frac{dy}{dx} = 0$$

4) $(x^3 + y^3) + 3xy^2.y' = 0$

Obs.: Como resolver $\mathbf{M(x, y) + N(x, y).y' = 0}$ se não for exata?

<u>Definição VII:</u>

Uma $f: A \subset R^2 \rightarrow R$ é homogênea de grau n se para todo k real $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in A$.

Exemplos:

$\mathbf{F(x, y) = x^2 + 3xy + y^2}$ é de grau "2". Com efeito, $F(kx, ky) = (kx)^2 + 3.(kx)(ky) + (ky)^2 = k^2(x^2 + 3xy + y^2)$

$\mathbf{F(x, y) = sen(xy)}$ NÃO é homogênea. Pois, $sen(kxky) = sen(k^2xy) \neq k^2 sen(xy)$.

Considere que M e N sejam homogêneas com mesmo grau, na equação diferencial

$M(x, y) + N(x, y).y' = 0$

Assim, $y' = -M(x,y)/N(x,y)$.

Obs.: Tem um resultado das funções homogêneas que argumenta o seguinte: Se f(x, y) é homogênea de grau n. Considere (x, y) no domínio da função e x nãonulo. Seja k = 1/x. Assim,

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x^n} f(x, y)$$

Com base nessa observação:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=-\frac{\dfrac{M(x,y)}{x^n}}{\dfrac{N(x,y)}{x^n}}=-\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}$$

Ou seja, a equação está dependendo do quociente y/x. Sim, e daí? – você pode indagar!

Ora, podemos fazer uma mudança de variáveis... vide exemplos:

Ex7 - Resolver $x^2 + 3xy + y^2 - x^2y' = 0$.

Ex8 - Obter a solução geral de $x^2y - y^3.y' = 0$

Extraclasse

As EDOs abaixo são separáveis, encontre a solução geral:

a) $Y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

b) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$

Resolva:

a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

b) $\frac{ds}{dt}+s\cos(t)=\frac{1}{2}sen(2t)$

Determine a solução de:

a) $Y' + xy = x^3y^3$

b) $Y - y'.\cos x = y^2\cos x(1 - sen x)$

Verifique se a EDO é exata e encontre a solução geral.

a) $(y^3 - x)y' = y$

b) $(x - 4y)y' + y - 3x^2 = 0$

Verifique se a EDO é: (i) exata, (ii) homogênea, e (iii) encontre a solução geral, sendo ou não exata:

a) $X + 4y + 2x.y' = 0$

b) $X^2 + y^2 + (2xy + y^2)y' = 0$

Definição VIII:

Uma equação diferencial do tipo ay" + by' + cy = 0, com a $\neq$ 0, é dita ser homogênea.

Inicialmente a, b e c são constantes.

Obs.: Em se tratando das soluções, tem um teorema o qual aborda o *princípio da superposição das equações homogêneas (trataremos o caso de segunda ordem)*. Consiste em:

- Considere y_1 e y_2 soluções em um intervalo I. Então $y = k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$ é também solução no intervalo, sendo k_1 e k_2 constantes.

Qual a motivação do teorema?

No Cálculo, muitas vezes a diferenciação é denotada por D. Por exemplo: dy/dx = Dy.

D é denominado *operador diferencial,* pois ele transforma uma função diferencial em outra função. Por exemplo:

$D(x^3 - \text{sen}x) = 3x^2 - \cos x$.

E daí?

Facilidade de notação: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y$ e, em geral, $\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$.

Da Álgebra Linear, o operador diferencial é uma transformação linear. Isto é,

$$L\{af(x) + bg(x)\} = aL(f(x)) + bL(g(x))$$

Como resolver?

Comparando com $az^2 + bz + c = 0$, pois é parecida (guardadas as devidas proporções...), será que é possível exibir ou realizar uma mudança de variável que faça aparecer a expressão do segundo grau?

Deve ser uma mudança que depois possamos realizar uma simplificação. Trigonométricas são interessantes, mas a exponencial é bem mais! Com efeito, se $y = e^{zx}$ notamos que:

- $Y' = z.\ e^{zx}$
- $Y'' = z^2.\ e^{zx}$

Substituindo e simplificando, encontramos $az^2 + bz + c = 0$ (faça as contas!)

Seja $\Delta = b^2 -- 4ac$. Temos três casos, sendo z_1 e z_2 as raízes:

$\Delta > 0$.: duas raízes reais e distintas. Logo $y = k_1e^{z_1x} + k_2e^{z_2x}$

$\Delta = 0$.: raízes reais e iguais. Logo $y = k_1e^{z_1x} + k_2xe^{z_1x}$

$\Delta < 0$.: raízes complexas. Logo $y = k_1e^{z_1x} + k_2e^{z_2x}$ – nota, optar por escrever na forma trigonométrica (vide exemplos)

Justificando o caso das raízes iguais.

- Assim, $y' = z_1k_1e^{z_1x} + k_2(e^{z_1x} + x.z_1e^{z_1x})$ – lembre-se, derivada de um produto. Organizando, fica: $y' = e^{z_1x}(z_1k_1 + k_2 + k_2.x.z_1)$
- $y'' = z_1e^{z_1x}\left(z_1k_1 + k_2 + k_2.x.z_1\right) + e^{z_1x}.k_2.z_1$
  $= z_1.e^{z_1x}\left(z_1k_1 + 2k_2 + k_2.x.z_1\right)$

Substituindo as derivadas (lembrando que o caso particular y" = 0 já sabemos resolver... ou não?) em ay" + by' + cy = 0

Fica:

$$az_1.e^{z_1x}\left(z_1k_1 + 2k_2 + k_2.x.z_1\right)a + be^{z_1x}(z_1k_1 + k_2 + k_2.x.z_1) + c(k_1e^{z_1x} + k_2xe^{z_1x}) = 0$$

Repare que, simplificando, ficamos com:

$$az\left(z_1k_1 + 2k_2 + k_2.x.z_1\right) + b(z_1k_1 + k_2 + k_2.x.z_1) + ck_1 + ck_2x = 0$$

Organizando em função de cada constante...

$k_1[a(z_1)^2 + bz_1 + c] + k_2[2az_1 + ax(z_1)^2 + b + bxz_1 + cx] = 0$

Como $a(z_1)^2 + bz_1 + c = 0$ (por qual motivo?) então, reorganizando o que "sobrou":

$k_2[2az_1 + ax(z_1)^2 + b + bxz_1 + cx]$

$k_2\{2az_1 + b + x[a(z_1)^2 + bz_1 + c]\} = 0.$

Assim, ficamos só com $2az_1 + b = 0$ (Por quê?).

Concluímos... com efeito, $z_1 = -b/2a$ representa...

Exemplos:

1) **Resolver 4y" + 4y' + 17y = 0**
2) **Na Física, problemas como quedas de corpos com resistência do ar ou deslizamento de correntes, geram equações diferenciais de segunda ordem. Resolver a equação y" + k²y = 0, sendo k real, deixando-a na forma trigonométrica.**

OBS.: Rápida inspeção... soluções são ki e – ki (comprovem!)
Sabemos da disciplina de números complexos que a fórmula de Euler fornece:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$

Sendo a + ib número complexo, segue-se que

$$y = k_1 e^{(a+ib)x} + k_2 e^{(a-ib)x}$$

Pelas propriedades das potências, e^{ax} pode ser posto "em evidência" (por quê?)
Assim,

$e^{ibx} = \cos(bx) + i\text{sen}(bx)$

E, $e^{(-ibx)} = \cos(-bx) + i\text{sen}(-bx) = \cos(bx) - i\text{sen}(bx)$

Usando o fato de cos(–t) = cost e sem(–t) = –sent (lembram?)
Em busca de soluções, podemos somar e depois subtrair ambos os membros da igualdade. Temos (façam as contas):

$$\cos(bx) = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} \text{ e } i.sen(bx) = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2}$$

Lembram as funções hiperbólicas...
Fazendo fechamento das ideias:

$$y = k_1 e^{(a+ib)x} + k_2 e^{(a-ib)x} = e^{ax}(k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx})$$

$$y = e^{ax}[k_1 \cos(bx) + k_2 sen(bx)]$$

Finalmente, resolvendo nosso problema, a = 0 e b = k...

OBS2.: Para resolver uma equação diferencial linear não homogênea (de segunda ordem) do tipo **ay" + by' + cy = g(x)** temos que analisar cada caso particular de g(x). Todavia, temos dois procedimentos a seguir para o caso da solução geral (em um intervalo):

1. Determinar uma função complementar Yc (resolver como se fosse homogênea)
2. Determinar qualquer solução particular Yp. A solução geral será Y = Yp + Yc

Cada exemplo a seguir apresenta uma dica a ser utilizada. Não estamos "esgotando" todas as estratégias... lembrem-se: estamos em um curso introdutório voltado para licenciatura!

Exemplo 1
G(x) é POLINÔMIO

Encontre a solução geral de
$y'' + y' - 12y = 2x^2 - 3x + 4$

A ideia inicial é resolver equação homogênea.
Ou seja, $y'' + y' - 12y = 0$.
Fazendo $y = e^{kx}$ segue-se que $k^2 + k - 12 = 0$ e as raízes são $k = 3$ e $k = -4$
Por conseguinte, $Yc = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}$

Segundo procedimento...
Como g(x) é um polinômio do segundo grau, vamos considerar uma solução particular que esteja também nessa forma.
Ou seja, $Yp = Ax^2 + Bx + C$.
Nosso foco é a determinação de cada constante A, B e C.
Desta feita,
$Y'p = 2Ax + B$
$Y''p = 2A$
Substituindo na equação diferencial, trocar y por Yp, y' por Y'p e y'' por Y''p, e usar polinômios idênticos:
$(2A) + (2Ax + B) - 12(Ax^2 + Bx + C) \equiv 2x^2 - 3x + 4$
$(-12A)x^2 + (2A - 12B)x + (2A + B - 12C) = 2x^2 - 3x + 4$

Grau "2" $\rightarrow -12A = 2 \therefore A = -1/6$
Grau "1" $\rightarrow 2A - 12B = -3 \therefore B = 2/9$
Grau "0" $\rightarrow 2A + B - 12C = 4 \therefore C = -37/108$

Logo, solução geral é (derive e verifique!):

$$Y' = c_1e^{-4x} + c_2e^{3x} - \frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9} - \frac{37}{108}$$

Agora é sua vez: $y'' - 4y = x^2$

Exemplo 2
G(X) É TRIGONOMÉTRICA DO TIPO SEN(KX) OU COS(KX)

Encontre a solução geral de $y'' - y' + 12y = \cos(2x)$

Passo inicial: solução da equação homogênea.

Fazendo $y = e^{kx}$ segue-se que $k^2 - k + 12 = 0$ e as raízes são $k = \frac{1 \pm i\sqrt{47}}{2}$

Daí, $Yc = C_1 e^{\frac{1+i\sqrt{47}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1-i\sqrt{47}}{2}x}$

Nota... escreva na forma trigonométrica...

$$Yc = e^{\frac{1}{2}x}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}x\right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{47}}{2}x\right)\right]$$

Passo II: Como g(x) é uma função trigonométrica, considerar uma solução particular que esteja também nessa forma. Todavia, como derivação de cosseno gera seno (a menos de um sinal) e derivação de seno gera cosseno, somos estimulados a imaginar Yp = Msen(2x) + Ncos(2x).
Nosso foco é a determinação de cada constante M e N.
Desta feita,
Y'p = 2Mcos(2x) – 2Nsen(2x)
Y"p = -4Msen(2x) – 4Ncos(2x)

Substituindo na equação diferencial, isto é, trocar y por Yp, y' por Y'p e y" por Y"p, temos:
[Msen(2x) + Ncos(2x)] – [2Mcos(2x) – 2Nsen(2x)] + 12[–4Msen(2x) – 4Ncos(2x)] = cos(2x)

DETALHE! Entenda como "identidade"

Como assim? Queremos comparar coeficientes tanto de sen(2x) quanto de cos(2x) em cada membro da igualdade.
À esquerda: (–47M + 2N)sen(2x) + (–2M - 46N)cos(2x)
À direita: cos(2x) = 0.sen(2x) + 1.cos(2x)

Desta feita:
"coeficiente de sen(2x)" → –47M + 2N = 0
"coeficiente de cos(2x)" → –2M + 46N = 1

Resolvendo...
Finalizando... y = Yp + Yc

Agora é sua vez: $y'' - 4y' = 12\text{sen}(7x)$

Exemplo 3
G(X) É EXPONENCIAL **Encontre a solução geral de $y'' + 5y' - 6y = e^x$**

Fica para vocês o Yc
Desta vez... para Yp imaginar a própria exponencial não convém.
Por quê? Porque ela já é escolha natural para homogêneas.
Com efeito, se $Yp = ke^x$
Temos:
$Y'p = Y''p = Yp$
Substituindo, $ke^x + 5\,ke^x - 6\,ke^x = e^x \therefore 0k = 1$ (absurdo!)

E agora?

Como g(x) é uma função exponencial, podemos atrelar
uma polinomial. Com efeito, se $Yp = kxe^x$ temos:
$Y'p = kxe^x + ke^x$
$Y''p = kxe^x + 2ke^x$

(Dúvidas? Façam as contas... Lembrem-se derivada de um produto!)

Substituindo na equação diferencial, isto é, trocar y
por Yp, y' por Y'p e y'' por Y''p, temos:

$(kxe^x + 2ke^x) + 5(kxe^x + ke^x) - 6\,kxe^x = e^x$
Organizando: $7ke^x = e^x$
O que vocês perceberam?

DETALHE! Entenda como "identidade"

Assim, $k = 1/7$
Finalizando... $y = Yp + Yc$

Agora é sua vez: $4y'' - y = e^{2x}$

Exemplo 4 G(X) É produto de EXPONENCIAL com POLINOMIAL

Encontre a solução geral de $y'' + 5y' + 6y = xe^x$

Fica novamente para vocês o Yc (Não é a mesma do exemplo 3!)
Para Yp imaginar kx^2ex. Vamos testar?
Motivo: no exemplo anterior, quando tínhamos apenas a exponencial a solução obtida foi o produto da exponencial por um polinômio de grau um.
Ora, como agora temos um polinômio de grau um, testar um de grau dois.
Temos:
$Yp = kx^2ex$
$Y'p = 2kxex + kx^2ex = kex(2x + x^2)$
$Y''p = kex(2x + x^2) + kex(2 + 2x) = kex(x^2 + 4x + 2)$

(Dúvidas? Façam as contas... Lembrem-se derivada de um produto!)

Substituindo na equação diferencial, isto é, trocar y por Yp, y' por Y'p e y'' por Y''p, temos:

$kex(x^2 + 4x + 2) + 5\,kex(2x + x^2) + 6\,kx^2ex = xex$
(lembrar – como se fosse identidade!)
Organizando:
$12kx^2ex + 14kxex + 2kex = 0x^2ex + xex + 0ex$
Equivale a $12kx^2 + 14kx + 2k$ idêntico a $0x^2 + x + 0$.
O que vocês perceberam? Chegamos em um absurdo! ($k = 1/14$ e $k = 0$???)

E agora?
Bem, pensar em equação completa do segundo grau.

Seja $Yp = (kx^2 + bx + c)ex$ temos:
$Y'p = (kx^2 + bx + c)ex + (2kx + b)ex = ex[k\,x^2 + (b + 2k)x + c]$
$Y''p = ex[k\,x^2 + (b + 2k)x + c] + ex(2kx + b + 2k)$

Substituindo na equação diferencial, isto é, trocar y por Yp, y' por Y'p e y'' por Y''p, temos:

$ex[k\,x^2 + (b + 4k)x + c + b + 2k] + 5\,ex[k\,x^2 + (b + 2k)x + c] + 6(kx^2 + bx + c)ex = xex$

Organizando os polinômios (idênticos)
grau "2" $\rightarrow$ $12k = 0 \therefore k = 0$
grau "1" $\rightarrow$ $12b + 10k = 1 \therefore b = 1/12$
grau "0" $\rightarrow$ $12c + b + 2k = 0 \therefore c = -1/144$

continua...

continuação...

Exemplo 4 G(X) É produto de EXPONENCIAL com POLINOMIAL	**Encontre a solução geral de y'' + 5y' + 6y = xe^x**

Assim, $Yp = e^x\left(\frac{x}{12} - \frac{1}{144}\right)$

Finalizando... y = Yp + Yc

DETALHE...
Como o coeficiente de x^2 resultou em 0, será que testar
Yp = (px + q)ex – resulta na mesma solução?
Daí,
Y'p = ex(px + q) + pex = ex(px + p + q)
Y''p = ex(px + p + q) + exp = ex(px + q + 2p)

Substituindo:
ex(px + q + 2p) + 5 ex(px + p + q) + 6(px + q)ex=xex

Organizando e comparando graus...
grau "1" $\rightarrow$ 12p = 1 .: p = 1/12
grau "0" $\rightarrow$ 7p + 12q = 0 .: q = -7/144

Deu diferente...
Será?
Qual nosso foco?

Detalhe, resolver a seguinte integral: $\int$tgx.sec²xdx por dois métodos:
1. Fazer u = tgx
2. Fazer v = secx.

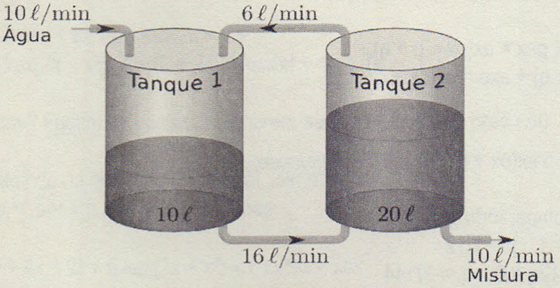
São diferentes os resultados?
No primeiro caso, se u = tgx .: du = sec²xdx
Daí, $\int$ tgx.sec²xdx = $\int$udu= u²/2+C= tg²x/2+C
No segundo caso, se v = secx .: dv = secx.tgx.dx
Assim, $\int tgx.sec^2xdx = \int secx.tgx.secxdx = \int vdv = \frac{v^2}{2} + D = \frac{\sec^2 x}{2} + D$

São diferentes?
Como sec²x = 1 + tg²x...
Concluir.

Novamente: foco nas argumentações!
O que vocês perceberam em cada caso?
Agora é sua vez: y'' – 2y' + 5y = xe^{2x}

SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A figura abaixo indica a seguinte situação: Em certa indústria, dois tanques estão conectados. No instante de tempo t = 0 (início de observação), o *Tanque 1 tem 10 litros de água pura* e o *Tanque* 2 possui 20 litros de uma mistura com 15 kg de sal. Água pura é constantemente bombeada para dentro do Tanque 1 a uma taxa de *10 litros por minuto, as misturas salinas são trocadas entre os dois* tanques, conforme figura, e a mistura escoa do Tanque 2 a uma taxa de 10 litros por minuto. Encontre a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo *t*.



Fonte: http://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/sourceforge/pngtest.php

Solução:

Percebam que a quantidade de líquido que entra em cada tanque é igual à quantidade que sai, 16 l/min, por conseguinte o volume de mistura em cada tanque permanece constante. Então o Tanque 1 contém sempre 10 litros de mistura e o Tanque 2 contém sempre 20 litros de mistura.

Agora sejam X(t) quantidade de sal no Tanque 1 no instante *t* e Y(t) quantidade de sal no Tanque 2 no instante *t*. As taxas de variação instantânea da quantidade de sal em cada tanque são respectivamente x' = dx/dt e y' = dy/dt

Note que cada uma dessas taxas deve ser igual à diferença entre a taxa à qual o sal está entrando menos a taxa à qual o sal está saindo do respectivo tanque.

***** No Tanque 1, a taxa à qual o sal está entrando é igual a**

$$\left(6\ {}^{l}\!/_{\min}\right)\cdot\left(\frac{y}{20}\ {}^{kg}\!/_{l}\right)=\frac{3y}{10}\ {}^{kg}\!/_{\min}$$

Ao passo que a taxa à qual o sal está saindo é igual a

$$\left(16\ {}^{l}\!/_{\min}\right)\cdot\left(\frac{x}{10}\ {}^{kg}\!/_{l}\right)=\frac{8x}{5}\ {}^{kg}\!/_{\min}$$

Por conseguinte, em kg/min,

$$x' = \frac{3y}{10} - \frac{8x}{5}$$

***** No Tanque 2, a taxa à qual o sal está entrando é igual a**

$$\left(16\ {}^{l}\!/_{\min}\right)\cdot\left(\frac{x}{10}\ {}^{kg}\!/_{l}\right)=\frac{8x}{5}\ {}^{kg}\!/_{\min}$$

Enquanto que a taxa à qual o sal está saindo é igual a (16 = 10 + 6)

$$\left(16\ {}^{l}\!/_{\min}\right)\cdot\left(\frac{y}{20}\ {}^{kg}\!/_{l}\right)=\frac{4y}{5}\ {}^{kg}\!/_{\min}$$

Portanto, em kg/min,

$$y' = \frac{8x}{5} - \frac{4y}{5}$$

Como foram dados x(0) = 0 kg e y(0) = 15 kg, segue que as quantidades desejadas podem ser obtidas resolvendo-se o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{8x}{5} + \dfrac{3y}{10} \\ y' = \dfrac{8x}{5} - \dfrac{4y}{5} \end{cases}$$

Tal sistema pode ser resolvido usando autovalores... entretanto, optaremos por equações diferenciais.

Como assim? Autovalores?
Reparem que podemos gerar o sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 & 3/10 \\ 8/5 & -4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sendo U o vetor (a matriz coluna) das variáveis e A a matriz dos coeficientes temos: U' = AU. A qual muito recorda a equação diferencial u' = au... $u = u_o e^{ct}$

Derivando a primeira equação (em relação à variável t):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{8}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{3}{10}\frac{dy}{dt}$$

Em relação à segunda equação, y' = dy/dt = (8x – 4y)/5

Substituindo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{8}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{3}{10}\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{8}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{3}{10}\left(\frac{8x-4y}{5}\right)$$

Organizando,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{8}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{12}{25}x - \frac{6}{25}y$$

Como estamos escrevendo em função de x a equação, isolar y em $x' = \frac{3y}{10} - \frac{8x}{5}$

Ou seja,

$$y = \frac{10x' + 16x}{3}$$

Substituindo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{8}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{12}{25}x - \frac{6}{25}\left(\frac{10x' + 16x}{3}\right)$$

Daí,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{8}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{12}{25}x - \frac{4}{5}\frac{dx}{dt} - \frac{32}{25}x \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{12}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{4}{5}x = 0$$

Simplificando: **5x" + 12x' + 4x = 0**

Caímos em equação homogênea... cuja solução é:

$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-0,4t}$

Por conseguinte, de $y = \frac{10x' + 16x}{3}$

Temos:

$$y=\frac{1}{3}[10\left(-2C_1e^{-2t}-0,4C_2e^{-0,4t}\right)+16\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{-0,4t}\right)]$$

Enfim,

$$y=\frac{1}{3}\left(-4C_1e^{2t}+12C_2e^{-0,4t}\right)$$

Com base nas informações, sabemos encontrar as constantes...

$X(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0$

$Y(0) = 15 \rightarrow -4C_1 + 12C_2 = 45$ (de 3 x 15)

Percebemos que ficou "longa" a solução do sistema

Lembrando que, por enquanto, não faremos uso dos autovalores (e autovetores) da Álgebra Linear nem da estratégia das *Transformadas de Laplace* por se tratar de um curso introdutório.

Entretanto, lembrando que x' = Dx (recordar aulas passadas), x'' = D^2x.

Sabemos que a derivada de uma soma é a soma das derivadas bem como a derivada de uma constante é zero.

Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{8x}{5}+\dfrac{3y}{10} \\ y' = \dfrac{8x}{5}-\dfrac{4y}{5} \end{cases}$$

Usando notação do diferencial:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{8x}{5}+\dfrac{3y}{10} \\ y' = \dfrac{8x}{5}-\dfrac{4y}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' + \dfrac{8x}{5}-\dfrac{3y}{10}=0 \\ y' - \dfrac{8x}{5}+\dfrac{4y}{5}=0 \end{cases}$$

Equivale a:

$$\begin{cases} Dx+\dfrac{8x}{5}-\dfrac{3y}{10}=0 \\ -\dfrac{8x}{5}+Dy+\dfrac{4y}{5}=0 \end{cases}$$

Para "eliminar" y multiplicar a primeira equação por "D + 4/5" e a segunda equação por "3/10" – "coeficientes" de y. Estamos resolvendo sistema de EDOs como se fosse um sistema de equações algébricas – em seguida, somar equações:

$$\left[\left(D+\frac{8}{5}\right)\left(D+\frac{4}{5}\right)-\frac{8}{5}.\frac{3}{10}\right]x=0$$

ATENÇÃO! É EDO...

Desenvolvendo,

$$\left(D^2+\frac{12}{5}D+\frac{4}{5}\right)x=0$$

Que equivale a:

$$D^2x+\frac{12}{5}Dx+\frac{4}{5}x=0$$

O que percebem?

Equivale a **5x" + 12x' + 4x = 0**

Agora é a sua vez... resolva o sistema usando as duas ideias apresentadas: $\begin{cases} x' = 5x+3y \\ y' = 3x+5y \end{cases}$

Exemplo 2

Um modelo para a população de duas espécies de animais que interagem é:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(b-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = cxy \end{cases}$$

Onde a, b e c são constantes. Resolva para x e y em termos de t.

Solução:

Antes de tentar resolver, quais estratégias utilizar?

Reparem que a primeira equação independe de y. Será que podemos resolver?

Vamos tentar!

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(b-x\right) \to \frac{dx}{x(b-x)} = adt$$

Integrando ambos os membros da igualdade:

$$\int \frac{dx}{x(b-x)} = \int adt \to \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{b-x}\right| = at+k$$

$$\frac{x}{b-x} = e^{b(at+k)} = he^{abt}$$

Quem é h? Reflitam...

$$\frac{x}{b-x} = he^{abt} \to x = \left(b-x\right)he^{abt} \to x = \frac{bhe^{abt}}{1+he^{abt}}$$

Assim,

$$\frac{dy}{dt} = cxy = cy\frac{bhe^{abt}}{1+he^{abt}} \to \frac{dy}{y} = c\frac{bhe^{abt}}{1+he^{abt}}$$

Integrando,

$$\int \frac{dy}{y} = \int c\frac{bhe^{abt}}{1+he^{abt}} = cbh\int \frac{e^{abt}}{1+he^{abt}}$$

Lembrando... mudança de variáveis. Se u = 1 + he^{abt} segue-se que du = hba.e^{abt}dt...

Por fim,

$$\ln\left|y\right| = cbh.\frac{1}{abh}\ln\left|1+he^{abt}\right|+cte$$

Lembrando que cte pode ser lnS, com S constante.

Ajeitando,

$$\ln\left|y\right| = \frac{c}{a}\ln\left|1+he^{abt}\right|+lnS = \ln\left|1+he^{abt}\right|^{c/a}+lnS$$

Usando: A.lnB = $\ln B^A$

$$\ln\left|y\right| = \ln S.\left|1+he^{abt}\right|^{c/a}$$

Usando: lnA + lnB = ln(AB)

Concluam...

Será que o exemplo 2 pode ser resolvido via operador D?

O próximo exemplo mostra uma aplicação. Não será resolvido por enquanto. Alguém pode questionar: se não faz parte do objetivo, por qual motivo apresentar? Uma resposta é: *desafiar* nossos limites

Exemplo 3:

O modelo de presa-predador de Lotka-Volterra é um modelo de importância histórica na modelagem matemática de sistemas ecológicos. Mark Kot (2001), em seu livro *Elements of MathematicalEcology*, descreve que o modelo surgiu em meados da década de 1920 quando Umberto D´Ancona, biológo marinho italiano, desenvolveu uma análise estatística com dados sobre peixes vendidos nos mercados de Trieste, Fiume e Veneza entre 1910 e 1923. A pesca havia sido suspensa em parte do Mar Adriático durante a Primeira Guerra Mundial, de 1914 a 1918, e Umberto D´Ancona mostrou que houve aumento da frequência relativa de certas espécies e redução da frequência relativa de outras espécies .

Os dados mostravam que a frequência de predadores, como tubarões, aumentou durante os anos de guerra e posteriormente diminuíra com o aumento da pesca. A abundância relativa das presas, por outro lado, seguira um padrão inverso. Umberto D´Ancona estava noivo de LuisaVolterra, uma ecologista, filha de VitoVolterra, um famoso matemático. D´Ancona propôs, então, a questão a VitoVolterra, que escreveu um par simples de equações diferenciais para descrever o sistema. Se definirmos *N(t)* como o número (ou densidade) de presas e *P(t)* e número (ou densidade) de predadores, o sistema proposto por VitoVolterra apresenta a seguinte formulação

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - cN(t)P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = bN(t)P(t) - mP(t)$$

onde r, c, b e m são constantes positivas.

Como nos explica Kot, o termo *rN(t)* implica que as presas crescerão de modo exponencial na ausência de predadores. Por sua vez, o segundo termo da primeira equação, *-cN(t)P(t)*, está relacionado à redução das presas por ação dos predadores. Na segunda equação, o termo *bN(t)P(t)* indica que a perda de presas leva à produção de novos predadores, e *–mP(t)* indica que a população de predadores decai exponencialmente na ausência de presas.

Aplicação: resolver o sistema $\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = 3N - NP \\ \dfrac{dP}{dt} = 2NP - 5P \end{cases}$

Solução Parcial:

Transformadas de Laplace é uma das melhores ferramentas. Mais adiante veremos como proceder.

Vamos apenas manipular.

Derivar primeira equação:

N'' = 3N' – (N'P + NP') – *não esquecer da derivada do produto!*

N'' = (3 – P)N' + NP' = (3 – P)N' + N(2NP – 5P) – *da segunda equação, usando P'*

N'' = P(–N' + 2N² – 5N) + 3N' = 3N' + (–N' + 2N² - 5N).*(3N – N')/N – substituindo P da primeira equação.*

Organizando:

$$\frac{d^2N}{dt^2} = 3\frac{dN}{dt} + (2N^2 - 5N - \frac{dN}{dt}).(3 - \frac{1}{N}\frac{dN}{dt})$$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = 3\frac{dN}{dt} + 6N^2 - 2\frac{dN}{dt} - 15N + 5\frac{dN}{dt} - 3\frac{dN}{dt} - \frac{1}{N}\frac{d^2N}{dt^2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)\frac{d^2N}{dt^2} - 3\frac{dN}{dt} = 6N^2 - 15N$$

Extraclasse → Resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = 5x + 3y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = 3senx \\ y' = xy \end{cases}$

Saibam que a grande alegria da vida está
na alegria de viver a cada dia...
Principalmente sabendo que DEUS ama você.

O próximo exemplo mostra uma aplicação. Não será resolvido por enquanto. Alguém pode questionar, se não faz parte do objetivo, por qual motivo apresentar? Uma resposta é alargar nossos limites.

Exemplo 3.

O modelo de presa-predador de Lotka-Volterra é um modelo de importância histórica na modelagem matemática de sistemas ecológicos. Mark Kot (2001), em seu livro *Elements of Mathematical Ecology*, descreve que o modelo surgiu em meados da década de 1920 quando Umberto D'Ancona, biólogo marinho italiano, desenvolveu uma análise estatística com dados sobre peixes vendidos nos mercados de Trieste, Fiume e Veneza entre 1910 e 1923. A pesca havia sido suspensa em parte do Mar Adriático durante a Primeira Guerra Mundial, de 1914 a 1918, e Umberto D'Ancona mostrou que houve aumento da frequência relativa de certas espécies e redução da frequência relativa de outras espécies.

Os dados mostravam que a frequência de predadores, como tubarões, aumentou durante os anos de guerra e posteriormente diminuíra com o aumento da pesca. A abundância relativa das presas, por outro lado, seguira um padrão inverso. (Umberto D'Ancona estava noivo de Luisa Volterra, uma ecologista, filha de Vito Volterra, um famoso matemático. D'Ancona propôs, então, o problema a Vito Volterra, que escreveu um par simples de equações diferenciais para descrever o sistema. Se definirmos $N(t)$ como o número (ou densidade) de presas e $P(t)$ o número (ou densidade) de predadores, o sistema proposto por Vito Volterra apresenta a seguinte formulação

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - cN(t)P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = bN(t)P(t) - mP(t)$$

onde r, c, b e m são constantes positivas.

Como nos explica Kot, o termo $rN(t)$ implica que as presas crescerão de modo exponencial na ausência de predadores. Por sua vez, o segundo termo da primeira equação, $-cN(t)P(t)$, está relacionado à mortalidade das presas por ação dos predadores. Na segunda equação, o termo $bN(t)P(t)$ indica que a perda de presas leva à produção de novos predadores, e $-mP(t)$ indica que a população de predadores decai exponencialmente na ausência de presas.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, C. **Cálculo diferencial e integral I.** Fortaleza: Realce, 2007.

KOT, Mark. **Elements of Mathematical Ecology**. Cambridge, Cambridge University Press, 2001.

LIMA, E. L. **Curso de análise 1.** 13ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

STEWART, J. **Cálculo 1.** 6ª Ed. São Paulo: Cengage, 2010.

SOBRE OS AUTORES

Jorge Brandão

Professor adjunto Universidade Federal do Ceará (UFC). Doutor em Educação, mestre em Engenharia Civil e Matemático (tudo pela UFC). Atualmente ministra disciplinas de matemática para engenharias e coordena grupo de pesquisa em métodos e técnicas de ensino em matemática e física para engenharias (CNPQ). Orientador mestrado e doutorado programa de pós graduação em educação da UFC.

Elisângela Magalhães

Mestranda em Educação pela UFC e psicopedagoga. Atua a mais de 15 anos com pessoas com necessidades educativas especiais, em particular, cegos.

SOBRE O LIVRO
Tiragem: 1000
Formato: 14 x 21 cm
Mancha: 10 X 17 cm
Tipologia: Times New Roman 10,5/12/16/18
Arial 7,5/8/9
Papel: Pólen 80 g (miolo)
Royal Supremo 250 g (capa)

EDITORA CRV

ADAPTAÇÕES NA MATEMÁTICA PARA ENGENHARIAS COM BREVE ANÁLISE DE ERROS

Vários livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável, como Stewart (2010) e Thomas (2009) entre outros, seguem a seguinte sequência didática: Introdução ao Cálculo (ou revisão de funções), Limites; Derivadas (regras e aplicações) e Integrais (indefinidas, definidas, regras e aplicações). Por qual motivo? Este material, que tem como base experiências de inverter tópicos do Cálculo Diferencial e Integral com uma variável visando responder um questionamento: por qual motivo seguir sequência didática de livros adotados? Método dos trapézios para cálculo de uma área acima do eixo dos x e entre parábolas côncavas para baixo foi um ponto de partida, bem como algumas aplicações das integrais, como trabalho e centro de massa, usando o referido método. Não obstante algumas inversões didáticas, a razão de certas expressões, como o limite fundamental da trigonometria, eram apresentadas a partir de uma contextualização. Embora o uso de novas estratégias focando uma aprendizagem mais significativa, constatou-se que os mesmos erros no tradicional ensino de limites, derivadas e integrais foram observados.

Desta feita, várias questões e conteúdos são inseridos após "tentativa-e-erro" como uma forma de tornar com significado aquilo que está sendo ensinado. Tal estratégia contou com a visão de um matemático guiada por uma pessoa não matemática (psicopedagoga) que sempre questionava o motivo de dado resultado... eis um fruto de tais questionamentos: este livro.

ISBN 978-85-444-0180-4

9 788544 401804

EDITORA CRV