Jorge Brandão
Elisângela Magalhães
Ivanice Bastos

ANTES DE P E B ESCREVEMOS...

INTRODUÇÃO AO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO ADAPTADO

EDITORA CRV

Jorge Brandão

É Doutor em Educação, Mestre em Engenharia Civil e Licenciado em Matemática. Atualmente é professor de Matemática para Engenharias da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Elisângela Magalhães

É Mestranda em Educação na UFC e psicopedagoga. Tem mais de 18 anos de experiência no ensino de pessoas com dificuldades de aprendizagem.

Ivanice Bastos

É Fonoaudióloga e atua com pessoas com necessidades educativas especiais a mais de 10 anos. É uma das poucas no Estado do Ceará a desenvolver trabalhos com pessoas surdocegas.

EDITORA CRV

Jorge Brandão
Elisângela Magalhães
Ivanice Bastos

ANTES DE P E B ESCREVEMOS...

INTRODUÇÃO AO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO ADAPTADO

EDITORA CRV

Jorge Brandão
Elisângela Magalhães
Ivanice Bastos

ANTES DE P E B ESCREVEMOS...

Introdução ao raciocínio matemático adaptado

EDITORA CRV
Curitiba - Brasil
2014

Editor-chefe: Railson Moura
Diagramação e Capa: Editora CRV
Revisão: Os Autores

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

B819a

Antes de p e b escrevemos... : introdução ao raciocínio matemático adaptado / Jorge Brandão, Elisângela Magalhães, Ivanice Bastos. - 1. ed. - Curitiba, PR: CRV, 2014.
96p.

Inclui bibliografia
ISBN 978-85-8042-951-0

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Lógica. I. Magalhães, Elisângela. II. Bastos, Ivanice. III. Título.
14-09513 CDD: 510
CDU: 51

10/02/2014 14/02/2014

2014

Editora CRV
Tel.: (41) 3039-6418
www.editoracrv.com.br
E-mail: sac@editoracrv.com.br

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Por qual motivo o título "antes de p e b..."

Inicialmente, caríssimos leitores, favor ler o seguinte texto:

Deficientes SIM – Ineficientes NÃO

Saiu no jornal *Diário do Nordeste* de 08/02/2003 uma reportagem sobre uma aluna deficiente visual a qual foi um dos vencedores de um concurso promovido por determinado *shopping* de Fortaleza (como prêmio foi visitar a Disneylândia). Já no *O Povo* de 12/02/2003, na parte de esportes, um jovem, cego há quatro anos, pretendia participar do *ironman*.

Você, caro leitor, prezada leitora, sabia que durante o século XVIII um dos maiores construtores de estradas era um comerciante deficiente visual? E que Ludwig van Bethoven estava surdo quando compôs uma de suas mais famosas sinfonias?

Foram citados apenas alguns exemplos de pessoas que, apesar de suas limitações, conseguiram (e conseguem) vencer determinadas dificuldades.

Estamos apresentando este pequeno texto com o objetivo de apresentar pessoas com deficiências como, antes de tudo, pessoas e como tais merecem o respeito e a atenção que você gostaria de receber. Afinal "trate cada um como você gostaria de ser tratado" (Jesus Cristo).

E de que forma um professor de Matemática deve trabalhar este campo do saber em sala de aula quando existem discentes com deficiência visual? Ora, analisando a expressão "estudante com deficiência visual", excluindo-se "deficiência visual" fica "estudante" e, por conseguinte, têm direitos e deveres iguais aos demais. Logo, o docente pode trabalhar conforme planejou sua atividade. É claro, com adequações.

A Matemática está associada aos números... então só há matemática se ocorrer a existência de números? Acompanhem, caríssimos leitores, o seguinte exemplo: Conjugar o verbo cantar.

Primeira pergunta natural a ser feita é: em qual tempo verbal? Pois bem, caso seja no presente do indicativo temos:

EU CANT O

TU CANT AS

...

Caso seja no pretérito perfeito, fica:

EU CANT EI

TU CANT ASTE

...

O verbo cantar é um verbo de primeira conjugação porque termina em AR. Além disso, é um verbo regular. Verbos regulares são verbos que não possuem alteração no radical, no caso CANT.

Percebam que há uma relação direta entre os sujeitos, que possuem suas características, e as desinências (terminações). A relação entre esses conjuntos, conjunto dos sujeitos e o conjunto das desinências, é dada pela existência do radical CANT.

Como os sujeitos influenciam (DOMINAM) as desinências, podemos indicar tal conjunto como o DOMÍNIO da função "conjugar o verbo cantar". As desinências refletem, reagem a este domínio, isto é, elas representam CONTRADOMÍNIO. Ao conjunto das desinências de um tempo verbal específico chamamos de IMAGEM...

Eis um exemplo de adequação.

Aprender matemática (e qualquer outra área do saber) consiste em aprender seus conceitos. Por exemplo: leite em pó é leite, se uma criança conceitua leite como líquido de cor branca que saem das mamas dos mamíferos?

Alguns matemáticos cegos e contribuições

Lev Semenovich Pontryagin (1908–1988) nasceu em Moscou em 1908 e ficou cego aos 14 anos em virtude de uma explosão. Foi auxiliado em seus estudos principalmente pelo apoio recebido de sua mãe, Tatyana Andreevna, que lia para Pontryagin.

Muito embora fosse leiga na Matemática, Tatyana descrevia com um *linguajar* próprio a partir das aparências dos símbolos matemáticos. Por exemplo: para indicar que um conjunto A está contido em um conjunto B, notação A c B, ela fazia referência do tipo A cauda B (BRANDÃO, 2010).

A importância da citação de Pontryagin não é só sua capacidade matemática. Seu esforço o tornou um brilhante professor nas áreas de Topologia e Equações Diferenciais. Destaca-se a participação de sua mãe como um apoio em seus estudos, "transcrevendo" textos.

Na Economia, no estudo da inflação ou no estudo das medidas e instrumentos para determinar a taxa de desemprego – fenômenos que sofrem variação só com o tempo, nas quais se usam as Equações Diferenciais Ordinárias, temos uma determinada influência dele.

Um segundo matemático relevante, cego enquanto jovem, Nicholas Saunderson (1682–1739) com aproximadamente um ano de idade perdeu a visão através de varíola, todavia, este ocorrido não o impediu de adquirir um conhecimento de latim e grego, bem como estudar matemática. Amigos liam para ele.

Destaca-se a máquina que ele desenvolveu. A mesma máquina era útil tanto para realização dos cálculos algébricos quanto para a descrição de figuras retilíneas, podendo ser comparada a um "pré-geoplano".

A máquina consistia em um quadrado, dividido em quatro partes iguais por meio de linhas perpendiculares aos lados, de modo que ele ofereça os nove pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. O quadrado é perfurado por nove orifícios capazes de receber alfinetes de duas espécies todos do mesmo comprimento e da mesma grossura, mas uns com a cabeça um pouco mais grossa do que outros.

Os alfinetes de cabeça grande situam-se sempre no centro do quadrado; os de cabeça pequena, sempre nos lados exceto em um único caso, o do zero. O zero é assinalado por um alfinete de cabeça grande, colocado no centro do pequeno quadrado, sem que haja qualquer outro alfinete nos lados. O algarismo "1" é representado por um alfinete de cabeça pequena, colocado no centro do quadrado, sem que haja qualquer outro alfinete nos lados.

Figura 1 – Adaptando números de Saunderson, da "carta para cegos" de Diderot, conforme Brandão (2010)

Algarismo	Representação	Algarismo	Representação
0	○ ○ ○ ○ ▣ ○ ○ ○ ○	5	○ ○ ○ ○ ▣ ○ ○ ○ ●
1	○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○	6	○ ○ ○ ○ ▣ ○ ○ ● ○
2	○ ● ○ ○ ▣ ○ ○ ○ ○	7	○ ○ ○ ○ ▣ ○ ● ○ ○
3	○ ○ ● ○ ▣ ○ ○ ○ ○	8	○ ○ ○ ● ▣ ○ ○ ○ ○
4	○ ○ ○ ○ ▣ ● ○ ○ ○	9	● ○ ○ ○ ▣ ○ ○ ○ ○

O • representa alfinete de cabeça pequena e ▣ indica alfinete de cabeça grande.

O algarismo "2" é indicado por um alfinete de cabeça grande, situado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, situado em um dos lados do ponto "1". O algarismo "3" é representado por um alfinete de cabeça grande, situado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, situado num dos lados do ponto "2".

Indica-se o algarismo "4" por um alfinete de cabeça grande, situado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, situado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, situado num dos lados do ponto “3”.

O algarismo “5”, por um alfinete de cabeça grande, situado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, colocado em um dos lados do ponto “4”. O algarismo “6” é representado por um alfinete de cabeça grande, situado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, situado num dos lados do ponto “5”.

O algarismo “7”, por um alfinete de cabeça grande, colocado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, colocado num dos lados do ponto “6”. O algarismo “8”, por um alfinete de cabeça grande, colocado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, colocado num dos lados do ponto “7”. E o algarismo “9”, por um alfinete de cabeça grande, colocado no centro do quadrado, e por um alfinete de cabeça pequena, colocado num dos lados do quadrado do ponto “8”.

O material apresentado por Saunderson pode ser considerado um precursor das celas Braille. Não obstante, a forma como confeccionava figuras planas, utilizando seu material ele estava introduzindo, de modo inconsciente, o hoje utilizado geoplano.

A gravura abaixo indica a representação de um trapézio segundo usos de Saunderson.

Figura 02 – Representação de um trapézio

$$
\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}
$$
$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}
$$

Os pontos pretos representam alfinetes e os zeros são espaços vazios. Entre colchetes tem-se uma “cela” do esquema de Saunderson. Com o tato ele caracterizava as figuras. Quando as figuras eram grandes ou com maior riquezas de detalhes, ele colocava apenas nos extremos (vértices) alfinetes e estes eram unidos por barbantes.

E um terceiro matemático cego é Bernard Morin. Ele nasceu em 1931 em Shangai, onde o seu pai trabalhava para um banco. Desenvolveu glaucoma bem cedo e foi levado para a França para tratamento médico. Voltou a Shangai, todavia, por ocasião do rompimento das retinas, ficou completamente cego aos seis anos de idade.

Depois que ficou cego, Morin retornou para a França sendo educado em escolas para cegos até a idade de quinze anos, quando entrou no ensino regular. Estudou sob Henri Cartan e se juntou ao Centre National de la Recherche Scientifique como pesquisador em 1957. Morin já era bem conhecido por sua eversão da esfera (Topologia Matemática) e tinha passado dois anos no Institute for Advanced Study na época em que concluiu a sua tese de Ph.D. teoria da singularidade em 1972.

As citações desses matemáticos servem para indicar que a Matemática pode ser apreendida por pessoas com necessidades especiais, e que a participação ativa da família e de amigos (e dos professores especialistas) é de grande importância para uma aprendizagem significativa.

Agora, respondendo o título: ***há pessoas que afirmam a existência de uma regra para escrever M antes de P e B. Se essa regra é verdadeira, segue-se que a frase 'Roberta não a aprova' deveria ser escrita 'RoMberta não a aMprova'.***

E por qual motivo a 'regra' foi popularizada? Uma rápida inspeção fonética conduz ao seguinte fato: P, B e M são as únicas bilabiais.

Desta feita, o objetivo principal desta obra, que é um recorte da tese Matemática e deficiência visual, com ampliação de estudo de casos com discentes cegos ou surdocegos resolvendo e comentando questões de seleção do Colégio Militar de Fortaleza (CMF)[1], é apresentar algumas estratégias utilizadas para a compreensão de conceitos geométricos e respectivas aplicações.

Livro está dividido em três partes: a PRIMEIRA trata de uma reorganização nas ideias apresentadas no método GEUmetria (BRANDÃO, 2004). Na SEGUNDA é apresentada a geometrografia plana, a qual trata de estratégias para resolver problemas geométricos.

1 O motivo das questões serem do CMF é o grau de dificuldade dessas provas. Com efeito, dentre os vestibulares mais difíceis do Brasil, ITA e IME, muitos cearenses logram aprovação.

Na TERCEIRA o conceito de surdocego bem como algumas aplicações para desenvolver o raciocínio lógico são contemplados. Vale ressaltar que as questões do CMF com respectivos comentários são nesta parte contempladas.

Deus ilumine nossos caminhos.

1ª PARTE
GEUMETRIA REVISITADO

Introdução

O trabalho docente é parte integrante do processo educativo mais geral, pelo qual os membros de uma sociedade são preparados para participação na vida social. Por falar em docente, sua formação profissional é realizada nos cursos de habilitação em nível de ensino médio e superior.

Em tais cursos a formação profissional é um processo pedagógico, intencional e organizado, de preparação teórico-científica e técnica do professor para dirigir competentemente o processo de ensino. A teoria e a prática são aspectos que devem ser articulados...

Falando-se em teoria e em prática docente, em poucos cursos é abordada a "problemática" dos alunos portadores de necessidades especiais. Pois, antes de serem vistos como especiais, são alunos, e como tais devem ser tratados, respeitados seus limites e exploradas suas potencialidades.

O aluno é sujeito atuante na construção de seu saber, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), (BRASIL, 1998).

O papel da escola é desenvolver a aprendizagem. Um dos frutos da atividade docente é o despertar da vontade, do querer aprender dos discentes (BRASIL, 1998). Em particular, sendo o aluno deficiente visual, sem outras deficiências conjuntas, uma das disciplinas em que mais sente dificuldades é a Matemática.

Além do acompanhamento do professor itinerante, os alunos deficientes visuais podem ter reforço de Braille e Matemática (sorobã), bem como atendimento de Orientação e Mobilidade. Sempre lembrando que o aluno deficiente visual é um aluno regularmente matriculado em uma dada escola...

Em várias escolas existe material concreto que pode ser utilizado na Matemática, como Tangram, blocos lógicos, entre outros. Mas, para o portador de deficiência visual, seu corpo é a melhor ferramenta para compreender várias expressões e conceitos matemáticos, principalmente na Geometria.

Por falar em Geometria, esta normalmente é apresentada no final dos livros de Matemática do Ensino Fundamental de 5ªa 8ª séries. Por conseguinte, muitas vezes ela não é devidamente trabalhada. Sem falar que existem professores que não estão ou não se sentem aptos para ensinar Geometria (conforme foi observado, ao ministrar aulas para professores do Projeto MAGISTER – UFC).

Quando professor da Escola de Ensino Fundamental e Médio Presidente Roosevelt (em Fortaleza), tive a oportunidade de trabalhar com alunos deficientes visuais. Até então, tinha como prática docente a ideia de que os alunos compreenderiam melhor a Matemática por meio de exercícios associados à realidade, feitos em quantidade. Com a presença deles (alunos deficientes visuais) passamos a resolver um único exercício de várias formas e com um ritmo diferenciado de linguagem.

No tocante à Orientação e Mobilidade, que não serve apenas para ensinar o deficiente visual a se locomover em público, o professor pode utilizar a orientação espacial do aluno junto com conceitos matemáticos (e físicos). Assim, apresentam-se os objetivos deste trabalho: apresentar a Geometria a partir da vivência do aluno, o qual passa a interagir com o saber adquirido.

Abordando a geometria

Sabendo que a interação da criança com o meio desempenha um papel ativo no processo de aprendizagem, segue-se que a atitude desenvolvida na criança durante os primeiros anos de escolarização determinará o seu crescimento intelectual e o futuro aproveitamento do seu potencial criador (BARBOSA, 2003).

Assim, para o ensino de Geometria, toma-se como base uma Geometria intuitiva, onde as crianças, a partir da Pré-Escola, devem realizar inúmeras experiências, tanto com o corpo quanto com objetos, visando o desenvolvimento do senso espacial. Principalmente crianças deficientes visuais.

Vale ressaltar, conforme Machado (1993), que os primeiros conhecimentos de natureza geométrica derivaram de resultados empíricos relacionados com medições de terras, construções arquitetônicas, determinação de áreas e volumes, como no Antigo Egito. Deste modo, é possível caracterizar o conhecimento geométrico através do *tetraedro epistemológico*[2], cujas fases se articulam como as de um tetraedro. As faces de tal tetraedro (associado às fases) são: a Percepção, a Construção, a Representação e a Concepção.

Percebemos para construir ou quando construímos, para representar ou quando representamos; concebemos o que pretendemos construir, com mediação das representações ou construímos uma representação para facilitar a percepção. Mesmo as concepções mais inovadoras têm como referência construções ou percepções realizadas outrora (SAMPAIO; CHAVES, 2003).

Geumetria

Inicialmente, vamos apresentar alguns conceitos. Tais conceitos podem ser encontrados mais formalmente nos livros das coleções: Matemática: temas e metas (MACHADO, 1997) e Matemática hoje é feita assim (BIGODE, 2000) ou outros livros de Matemática a que o leitor esteja mais acostumado.

Partindo dos conceitos primitivos de ponto, de reta e de plano, considere a planta de um mapa de certa cidade. Esta planta no papel pode ser considerada como plano. As ruas podem se caracterizar como retas, e locais específicos, tais como igrejas, escolas ou lojas comerciais seriam os pontos.

O aluno dentro de uma escola: o piso da escola é o plano, corredores correspondem às retas e cadeiras seriam pontos.

Axiomas (ou Postulados) são proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria.

Postulados sobre pontos e retas:

P1 - **A reta é infinita.**
Ex.: *Uma pessoa caminhando em uma rodovia, em linha reta.*

P2 - **Por um ponto podem ser traçadas infinitas retas.**
Ex.: *Você pode se deslocar para frente ou para trás indefinidamente e em todas as direções (só não vá se chocar numa parede!).*

2 Como tetraedro é uma pirâmide de base triangular e cada uma das quatro faces é um triângulo equilátero (lados de mesma medida), segue-se que as fases de percepção, construção, representação e concepção devem ser trabalhadas em conjunto, de maneira "homogênea".

P3 - **Por dois pontos distintos passa uma única reta.**
Ex.: *Se em uma rua há uma escola e uma igreja, considerando a escola e a igreja como pontos, a reta será a mencionada rua.*

P4 - **Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas semirretas.**
Ex.: *Considere que em um trecho retilíneo de uma avenida exista uma sorveteria. Desta para a direita (na avenida) temos uma semirreta, idem desta para a esquerda.*

- Postulado sobre o plano e o espaço:

P1 - **Por três pontos não colineares passa um único plano.**
Ex.: *Observar os vértices (as pontas) de um triângulo que pode ser formado com a bengala dobrável; um tripé...*

P2 - **O plano é infinito.**
Ex.: *Você pode tentar aumentar um mapa indefinidamente.*

P3 - Por uma reta podem ser traçados infinitos planos.
Ex.: *Abra um livro e considere cada página como sendo um plano. A reta seria a parte da capa, a qual sustenta as páginas.*

P4 - Toda reta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas semiplanos.
Ex.: *Dobre uma folha de papel ao meio, o local fincado (a dobradura) é a reta e as duas partes são os semiplanos.*

P5 - **Qualquer plano divide o espaço em duas regiões chamadas semiespaços.**
Ex.: *Seja uma porta um plano, os lados antes e depois da porta são os semiespaços.*

- Posições relativas entre retas:

No espaço, duas retas distintas podem ser *concorrentes, paralelas* ou *reversas.*

Concorrentes: quando estão no mesmo plano e possuem um ponto em comum.

Ex.: *no piso da sala de aula existem várias retas (divisórias entre as cerâmicas), por sua vez elas só se cruzam em um único ponto.*

Paralelas: são retas pertencentes ao mesmo plano que não possuem pontos em comum.

Ex.: *as linhas férreas (linhas do trem).*

Reversas: são retas que não possuem pontos em comum e não existe plano que as contenha simultaneamente.

Ex.: *as extremidades de duas paredes paralelas.*

- Caso particular:

Retas Perpendiculares: $r \perp s$. São retas concorrentes que formam um ângulo de 90° entre si (mais adiante falaremos sobre ângulos).

Ex.: *o lado e a base de uma porta.*

- Posições relativas entre retas e planos:

São três situações possíveis:

Reta contida no plano: quando possui dois pontos distintos no plano;

Ex: *os dois pontos seriam as extremidades de uma parede no piso e o piso seria o plano.*

Reta concorrente ou incidente no plano: quando uma reta fura um plano em um único ponto;

Ex.: *uma árvore ou um poste (reta) em um campo (plano).*

Reta paralela ao plano: quando uma reta não possui um ponto em comum com um determinado plano.

Ex.: *uma lâmpada fluorescente no teto (reta) e o piso (plano).*

Temos o seguinte postulado: se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a interseção é dada por uma única reta que passa por esse ponto. Exemplificando: *o encontro de duas paredes formando canto.*

E uma reta *r* será perpendicular a um plano a se, e somente se, *r* é perpendicular a todas as retas de a que passam pelo ponto de interseção de *r* e a.

Exemplificando: *ventiladores do tipo "tripé" e os seus "pés". O ventilador é a reta perpendicular ao piso e seus pés são retas perpendiculares ao ventilador (reta r).*

- Posições relativas entre planos:

São três as principais situações de posições entre planos:

Planos coincidentes ou iguais;

Planos concorrentes ou secantes: quando a interseção dos mesmos é uma reta.
Ex.: *o canto entre duas paredes;*

Planos paralelos: planos que não se interceptam.
Ex.: *duas paredes opostas (paralelas).*

Dizemos que dois planos são perpendiculares se, e só se, existe uma reta de um deles que é perpendicular ao outro.

Ângulos

Chamamos de ângulos a reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta. Exemplo: *A abertura entre o braço e o antebraço.*

Postulado do transporte de ângulos: dados um ângulo e uma semirreta de um plano existente sobre este plano, e num dos semi-planos que a semirreta permite determinar, uma única semirreta que forma com a semirreta inicialmente dada um ângulo congruente ao ângulo inicialmente descrito.

Exemplificando: *pegue um pedaço de papel. Caso você o coloque debaixo da cadeira, deixou de ser papel? É claro que não (embora esteja sujo!). É isso que significa esse postulado, você* *pode ter o mesmo ângulo em situações diferenciadas (lado esquerdo, abaixo, etc.).*

Agora, vamos tentar relacionar tais conceitos matemáticos com algumas técnicas de Orientação e Mobilidade (BRASIL, 2002):

T1 – Formação de Conceitos – Esquema Corporal:

Construir o conceito da imagem do próprio corpo pela inter-relação indivíduo-meio, identificando as partes do corpo que serão usadas no ensino das técnicas básicas de Mobilidade: a altura da cintura, cabeça para cima, pé direito, etc.

Geometricamente: Podemos inserir a ideia de ângulo: braço-cotovelo-antebraço. Destacamos também a ideia de interseção de reta e plano quando relacionamos um pé contido no piso (plano) e respectiva perna (reta).

T2 – Objetos Fixos:

Familiarizar-se com objetos fixos e suas características, como ruas, meio fio, pontes, casas, paradas de ônibus, entre outros que podem servir como referência.

Geometricamente: Relacionar alguns desses objetos referenciais como pontos (parada de ônibus, uma casa específica, etc.) contidos em uma reta (rua dada). Interseção de retas (encontro de ruas), bem como posições relativas de retas (ruas paralelas, perpendiculares, etc.).

T3 – Posição dos objetos no espaço:

Durante a instrução, o aluno é orientado a conhecer todos os objetos significativos de um determinado percurso, para que ele possa construir um mapa mental do trajeto percorrido.

Geometricamente: Relacionar alguns desses objetos referenciais como pontos (parada de ônibus, uma casa específica, etc.) contidos em uma reta (rua dada). Interseção de retas (encontro de ruas) bem como posições relativas de retas (ruas paralelas, perpendiculares, etc.). Determinadas paredes fornecem ideias de planos perpendiculares ao plano em que se anda. Uma ladeira já é um plano não perpendicular ao piso; analisar posições de paredes em relação a dados pontos referenciais...

T4 – Direções:

Utilização do sol, como indicador de direção, determinando sua posição em relação aos objetos. De acordo com o nível de compreensão, o aluno deve aprender o uso da bússola, o significado dos pontos cardeais e os termos: direita e esquerda, frente, atrás, para cima e para baixo.

Geometricamente: Além de ponto, de reta e de plano, podemos trabalhar paralelismo, perpendicularismo e ângulos. Com efeito, se um aluno tem a necessidade de virar para a direita, por exemplo, ele tem que saber que seus pés devem formar um ângulo reto, em relação ao percurso dado, e seu corpo deve acompanhar tal ângulo.

T5 – Contorno:

Ao encontrar um objeto no meio do caminho, o aluno deve contorná-lo, voltando ao mesmo caminho, sem perder a orientação.

Geometricamente: Paralelismo de retas e teorema de Tales[3]. Com efeito, estando um aluno a andar em uma calçada onde há um carro estacionado sobre ela (algo comum!), caso ele tenha dado dois passos após virar para a direita, ao virar para a esquerda (para andar em linha reta, paralelamente ao seu trajeto inicial) e contornar o carro, para retornar ao percurso antes do carro, deverá virar para a esquerda e dar pelo menos dois passos. Desta feita pode ser abordado o teorema de Tales no tocante ao tamanho dos passos necessários para o contorno de dado objeto.

3 O Teorema de Tales afirma que se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

T6 – Localização e alinhamento do som:

Determinar a origem do som somente pela informação auditiva. Através dessa informação, o aluno toma decisões importantes tais como: origem, direção e distância. Sendo conhecida a origem e a direção do som, o aluno pode, por exemplo, determinar uma corrente de tráfego e o ângulo a ser adotado para atravessar uma rua.

Geometricamente: Dados dois pontos (um aluno e um dado objeto que esteja produzindo um determinado som, como caixa de som de uma lanchonete, por exemplo) podemos traçar uma reta (percurso entre aluno e lanchonete) ou podemos formar uma outra reta (percurso realizado pelo aluno após virar para certo lado para afastar-se do objeto sonoro), dado um ponto (aluno) e ângulo entre retas (percurso que o aluno estava e novo percurso ao mudar de caminho).

Considerações finais

Este trabalho procura mostrar que, estando a Geometria presente no cotidiano dos estudantes, os profissionais que trabalham com deficientes visuais, podem ser facilitadores no processo de aprendizagem. Afinal, o aluno é sujeito atuante na construção de seu saber (BRASIL, 1998).

Vale ressaltar que a aprendizagem de qualquer conceito matemático fica facilitada quando este é relacionado a objetos concretos. Com efeito, quando professor da Escola de Ensino Fundamental e Médio Presidente Roosevelt, tive o apoio tanto de uma professora itinerante quanto dos próprios alunos deficientes visuais, quando ia abordar determinado assunto (por exemplo, comparar o gráfico da função do segundo grau – a parábola – com um gigolé ou tiara de plástico). Deste modo, todo e qualquer profissional que trabalha com deficientes visuais pode auxiliar a prática docente.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, P. M. *O Estudo da Geometria*. Revista Benjamin Constant, n° 23, pg 14 – 22, Rio de Janeiro: Agosto de 2003.

BIGODE, Antônio J. L. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2000.

BRASIL. MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais. Temas Transversais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. MEC. *Programa Nacional de apoio à educação de deficientes visuais: Orientação e Mobilidade – Projeto Ir e Vir*. Brasília: MEC/SEE, 2002.

MACHADO, Antonio dos S. *Matemática: temas e metas*. São Paulo: Atual, 1997.

MACHADO, Nilson J.*Matemática e língua materna*. São Paulo, Cortez: 1993.

SAMPAIO, Antonio L. e CHAVES, Sandra M. *Jogos e teoremas de Matemática*. Sobral – Ce, FACIB, 2003.

2^a PARTE

GEOMETROGRAFIA PLANA

1. Introdução

A representação gráfica das figuras geométricas no plano obedece a certas regras calcadas nos fundamentos teóricos da Geometria, como é óbvio. Geralmente tudo se prende na determinação de pontos, retas ou outro subconjunto do plano, satisfazendo certas condições impostas pelo problema. Os subconjuntos fundamentais do plano que atendem certas características especiais constituem os ***lugares geométricos*** planos e são, por assim dizer, a chave da solução da maioria dos problemas geometrográficos.

Visando algumas aplicações da construção de determinados lugares geométricos é que propomos este trabalho.

1.1 Lugares geométricos puntuais

A seguir são apresentados alguns lugares geométricos. Relembramos que na segunda parte deste tópico são fornecidos procedimentos para a construção de vários lugares geométricos (L.G.).

1.1.1 O universo considerado é o plano, denotado por E^2 cuja significação é Espaço Euclidiano de dimensão 2. Consideramos a linha reta como sendo o espaço de dimensão 1 e visto que duas retas concorrentes definem um plano é este espaço de dimensão 2, nele podendo estar contidos subconjuntos (subespaços) de dimensão zero (ponto) de dimensão um (linhas) e de dimensão dois (ângulos e figuras planas).

1.1.2 Lugar Geométrico I – ***circunferência de círculo*** – o lugar geométrico dos pontos do E^2 igualmente afastados de um ponto dado$\underline{O}$, também do E^2, é uma circunferência de centro em $\underline{O}$ e de raio igual à distância dada. Notaremos por C(O, r) onde $\underline{O}$ é o ponto centro e $\underline{r}$ o valor do raio. Caso utilizemos um sistema de eixos cartesianos no plano, podemos denotar

C((a,b), r) onde (a,b) é o par ordenado das coordenadas do centro O.

1.1.3 Lugar Geométrico II – o lugar geométrico dos pontos do E^2 que estão a uma dada distância de uma reta dada no E^2 compõe-se de duas retas paralelas à reta fornecida.

1.1.4 L.G. III – o lugar geométrico do terceiro vértice dos triângulos do E^2, que , tendo a mesma base, são equivalentes, é um par de retas paralelas à reta que contém a base comum a todos esses triângulos.

1.1.5 L.G. IV – No E^2 o lugar geométrico de todos os pontos cujas distâncias a dois pontos dados estão numa razão dada é uma circunferência.

1.1.6 L.G. V – O lugar geométrico dos pontos do E^2 igualmente afastados de um comprimento k, de uma circunferência dada em E^2, é um par de circunferências concêntricas à circunferência dada e cujos raios medem respectivamente r + k e r – k, sendo r o raio da circunferência dada.

2. Métodos de resolução

A resolução de um problema geométrico plano pode ser em três fases distintas:

1ª fase: Análise.

A análise de um problema consiste na pesquisa das relações existentes entre os dados e a solução, utilizando-se os conceitos e propriedades da geometria.

Esta investigação determina a escolha do método a utilizar para resolver a questão.

A análise é sempre facilitada quando se desenha uma figura da mesma natureza que a procurada, supondo-se o problema resolvido.

2ª fase: Construção.

A construção da figura compreende a sucessão de operações gráficas que conduz à obtenção da imagem final procurada.

Estas construções só podem ser traçadas com régua não graduada, compasso e esquadros (para facilitar o traçado de perpendiculares e paralelas). O uso de instrumentos de medida (a graduação na régua ou transferidor) é restrito à marcação de dados dos problemas.

3ª fase: Discussão.

Discutir um problema é estabelecer as condições a que os dados devem obedecer, de modo que admita solução.

Um problema geométrico que admite um número finito de soluções diz-se indeterminado e se não admite solução é impossível.

Quanto ao número de soluções a apresentar para cada problema, há a considerar dois tipos de problemas – os métricos (ou de grandezas) e os locais (ou de grandeza e posição). No primeiro caso, apresentam-se as figuras distintas e não congruentes; no segundo caso, apresentam-se as figuras distintas, ou não.

Métodos de resolução de um problema geométrico

A grande dificuldade da resolução de um problema geométrico consiste na escolha do método a empregar, porquanto, em contraposição ao método geral da Geometria Analítica, criaram-se os métodos de resolução particulares que resolvem problemas de modo natural e elegante.

Os mais aplicados métodos são: **Método Algébrico, Método das Transformações Pontuais e Método dos Lugares Geométricos.**

Nesta obra trataremos do método dos lugares geométricos.

1. *Noções de lugar geométrico* – lugar geométrico é um conjunto de pontos que possuem uma propriedade comum e exclusiva. Alguns lugares são estabelecidos por definição (*a circunferência*); outros são instituídos, demonstrando-se a propriedade direta e a contrária (*provando-se que todo ponto não pertencendo ao lugar não possui a propriedade*), ou ainda, fazendo-se recair em lugar já conhecido. Vale ressaltar que lugares geométricos no plano também podem ser linhas ou curvas.

2. *O método* – a resolução gráfica de um problema geométrico consiste na determinação de pontos. A determinação de um ponto do plano exige duas condições. Tais condições devem

ser independentes e compatíveis e surgem dos dados do problema. Se se impõe apenas uma condição, o problema fica indeterminado. A cada uma dessas condições faz-se corresponder um lugar geométrico.

3. Análise de um problema pelo método dos lugares geométricos:
- Supor o problema resolvido, traçando-se uma figura auxiliar da mesma natureza que a procurada;
- Identificar nesta figura auxiliar o ponto que permite a resolução que chamaremos de ponto-chave;
- Pesquisar as condições a que deve satisfazer o ponto-chave e a cada uma delas fazer corresponder, separadamente, um lugar geométrico;
- A eventual interseção desses lugares geométricos determinará o ponto-chave à resolução do problema.

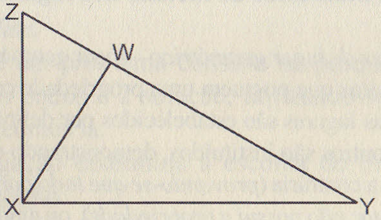
Exemplificando...

Considere o problema: dados dois segmentos de medidas a e b, obter o segmento de medida $(ab)^{1/2}$.

Para facilitar:
- Sejam AC = b e CB = a, considerando AB como diâmetro de uma semicircunferência.
- Seja CD perpendicular a AB, com D pertencendo a semicircunferência. CD é a medida desejada...

Por que CD é a medida desejada?

Do triângulo retângulo abaixo:



XW^2 = WY x WZ (o quadrado de altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa).

Sabendo-se que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo, segue-se que, na situação problema com o triângulo dado podemos ter: AC = YW; CB = ZW e CD = XW...

3. Construções

1) Traçar uma reta perpendicular a uma outra reta dada

1. Trace uma reta r qualquer. Coloque um dos lados de um esquadro em r e trace no outro lado uma reta s. Como os lados são perpendiculares, segue-se que r e s são perpendiculares.

* Caso você não tenha esquadros, faça o seguinte:

1. Trace uma reta qualquer r e marque um ponto A nesta reta.
2. Com o compasso em uma abertura qualquer com centro em A, marque os pontos B e C, à direita e à esquerda de A em r, respectivamente".
3. Com centro em B e raio (abertura do compasso) um pouco maior que o raio anterior, trace um arco acima e abaixo de r. Faça a mesma coisa com C, considerando o mesmo raio.
4. Unir as interseções dos arcos. Tal reta (de interseção) é perpendicular à reta r...

Justificativa: Chamando de D e E as interseções, construímos o losango BCDE, lembrando que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si.

2) Traçar uma reta paralela a uma outra reta dada

1. Trace uma reta r qualquer. Coloque um dos lados de um esquadro em r e trace no outro lado, com o outro esquadro tendo um de seus lados colocado junto ao primeiro esquadro, trace uma reta s no lado do segundo esquadro que não está "colado". Como os lados são perpendiculares, segue-se que r e s são paralelas.

* Sem esquadros...

2. Sejam A um ponto e r uma reta dada. Traçar um arco com centro em A e raio qualquer até interceptar r, no ponto B.
3. Com centro em B e mesmo raio anterior, obter C, em r.
4. Com centro em C, obter a distância de C até A (com o compasso). Com tal raio e centro em B marque um arco até interceptar o arco feito por A, em D.
5. A reta que passa pelos pontos A e D é paralela à reta r...

3) Traçar uma mediatriz a um segmento de reta <u>AB</u>

1. Com centro em A e raio menor que AB, faça arcos acima e abaixo de *AB*. Mesma coisa com centro em B e raio igual ao anterior.
2. A mediatriz é obtida com a união dos pontos de interseção dos arcos anteriores...

Justificativa: Construção de um losango.

4) Traçar uma perpendicular a um segmento de reta <u>AB</u>. No ponto A

1. Prolongue o segmento *AB* e repita os procedimentos da construção 01.

5) Construir segmentos de reta com medidas $2^{1/2}$; $3^{1/2}$...

1) Considere um segmento de reta *AB* com uma unidade de comprimento. Fazer o procedimento 4 para criar *AC* com mesma medida, o segmento *BC* terá medida raiz quadrada de dois...
2) Para obter raiz quadrada de três, seja *CD* com uma unidade, perpendicular a *BC* ...

Justificativa: O triângulo ABC, retângulo em A, é isósceles. Logo a hipotenusa tem medida $2^{1/2}$. O triângulo BCD, retângulo em C, tem catetos 1 e $2^{1/2}$, por conseguinte a hipotenusa mede $3^{1/2}$.

6) Dividir um segmento <u>AB</u> em n partes iguais

1. Traçamos uma reta qualquer AC;
2. Com o compasso, marcamos n intervalos de mesma medida;
3. Formamos a reta Bn. Basta traçar paralelas à reta Bn pelos pontos marcados anteriormente Onde tais retas passarem em AB, teremos as n divisões.

7) Construir um ângulo igual a outro ângulo dado

1. Seja AOB o ângulo dado. Com centro em O e raio AO qualquer, traçamos o arco AB.
2. Sejam CD = AO e DE = AB. Teremos âng. DCE = âng. AOB.

8) Dados dois segmentos de medidas a e b, obter o segmento de medida $(ab)^{1/2}$

1. Sejam AC = b e CB = a. considerando AB como diâmetro de uma semicircunferência.
2. Seja CD perpendicular a AB, com D pertencendo a semicircunferência. CD é a medida desejada...

Justificativa: Vide exemplo...

9) Construir um triângulo conhecendo um lado AB e os dois ângulos adjacentes *A* e *B*.

1. Tomamos o lado AB e construímos em A e B os ângulos dados. A interseção dos dois lados dá C.

10) Construir um triângulo conhecendo os lados AB e AC e o ângulo *A*.

1. Tomamos AB e construímos em A o ângulo dado e marcamos AC. Unimos B a C.

11) Construir um triângulo conhecendo seus lados

1. Tomamos o lado AB.
2. Com centro em A e raio AC traçamos um arco. Com centro em B e raio BC, traçamos outro arco.
3. A interseção dos arcos fornece o terceiro vértice.

12) Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a hipotenusa e um cateto

1. Construímos um ângulo reto A.
2. Seja AB o cateto dado. Com centro em B e raio igual à hipotenusa, obtemos o outro cateto.

13) Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a hipotenusa e um ângulo agudo

1. Construímos em B um ângulo agudo dado.
2. Seja BC a hipotenusa dada. Em C traçamos a perpendicular ao lado AB e obtemos A.

14) Construir um triângulo isósceles, conhecendo-se a base e o ângulo oposto à base

1. Seja BC a base dada. Construir o ângulo dado.
2. Traçamos a bissetriz do ângulo BCD e construímos em B um ângulo igual ao ângulo ACB e obtemos A. Para traçar bissetriz:
3. Com centro em O e raio OM, traçamos um arco MN.
4. Com centro em M e depois em N e mesmo raio, obtemos K. OK é a bissetriz...

15) Construir um trapézio conhecendo as duas bases e os outros dois lados

1. Sejam AB e CD os lados e AD e BC as bases maior e menor, respectivamente. Seja E em AD tal que AE = BC e construímos o triângulo CDE, com AB = CE.
2. Passar uma paralela a AD em C e marcar BC. Lembre-se que EC // AB ...

16) Construir um quadrado

1. Basta traçar por AB os segmentos perpendiculares e de mesma medida AC e BD. Unir C a D.

17) Construir um trapézio conhecendo as duas bases e as duas diagonais

1. Seja ABCD o trapézio pedido com bases AB e CD e diagonais AD e BC. Prolongue a base maior e seja DE = AB. Assim, basta construir um triângulo BCE cujos lados são a soma das duas bases e cada uma das diagonais dadas.

18) Construir uma circunferência dados três pontos não alinhados

1. Dados os pontos A, B e C, considere as mediatrizes de AB e BC. A interseção destas mediatrizes é o centro da circunferência...

19) De um ponto dado na circunferência, traçar a tangente a ela

1. Traçar uma perpendicular ao raio...

20) De um ponto dado, traçar as tangentes a uma circunferência dada

1. Unimos o ponto dado A ao centro da circunferência.
2. Traçamos a mediatriz de AO e com centro no ponto médio de AO e raio AO/2 obter B e C na circunferência. AB e AC são tangentes...

21) Dadas duas circunferências de raios R e R' e centros O e O', traçar suas tangentes comuns

21.1 Tangentes comuns exteriores:

1. Centro em O e raio R – R' traçamos uma circunferência auxiliar.
2. De O' traçamos as tangentes à circunferência auxiliar e obtemos B e C.
2. Unimos O a B e obtemos D. Com centro em D e raio BO', obtemos D'. Analogamente obtemos E eE'. As tangentes comuns exteriores são DD'e EE'.

21.2.`Tangentes comuns interiores:

1. Mesmos procedimentos anteriores considerando R + R'.

22) Traçar uma circunferência que passe por um ponto dado A e seja tangente a uma circunferência de centro O no ponto B

1. Traçar a mediatriz de AB e unimos O a B até encontrar a mediatriz em C, centro da outra circunferência...

23) Traçar uma circunferência que passe por dois pontos A e B e seja tangente a uma reta dada r

1. Seja C na reta e considere CB diâmetro de um círculo. Obs.: A, B e C estão alinhados;
2. Considere AD perpendicular a CB.
3. Com centro C e raio CD obtemos na reta os pontos E e E' que serão os pontos de tangências.
4. Traçamos por E e E' perpendiculares a r que irão encontrar a mediatriz de AB em O e O', centros de duas circunferências...

24) Traçar uma circunferência de raio R tangente a uma reta dada e a uma circunferência dada de centro O

1. Tomar AB perpendicular à reta dada t e AB igual ao raio dado R e traçamos por B a paralela a t.
2. Com centro em O e raio igual a soma do raio R e do raio da circunferência dada, traçamos uma circunferência que corta a paralela traçada de B nos pontos C e C', centros das circunferências...

25) Traçar com um raio dado R uma circunferência tangente a duas outras de centros O e O'e raios r e r', respectivamente

1. Basta lembrar que duas circunferências são tangentes quando a distância entre os centros é igual à diferença ou à soma dos raios, assim, considere O e O' com centros e com raios respectivamente: (R + r e R + r'); (R – r e R – r'); (R – r e R + r') ou (R + r e R – r'), a interseção de tais arcos fornece o centro da circunferência procurada....

26) Traçar circunferências tangentes entre si e inscritas num ângulo dado BAC

1. Ressalta-se que os centros das circunferências devem estar na bissetriz do ângulo. Daí traçar a primeira circunferência tangente aos lados do ângulo.

2. Seja D ponto de tangência da primeira com uma segunda circunferência. Considere DE perpendicular à bissetriz com E em um dos lados.
3. Com centro em E e raio ED obtemos F no lado onde se encontra E.
4. Traçar por F uma perpendicular ao lado até encontrar a bissetriz em G, centro da segunda circunferência...

27) Retificação de uma circunferência: caso I

1. Basta considerar em vez de π o número 22/7...

28) Retificação de uma circunferência: caso II

1. Atribuído a Spetch. Traçar um diâmetro AB e passar uma perpendicular r por A.
2. Considere AC = 2R, com C em r.
3. Dividir o raio AO em 05 partes iguais e fazer CD = R/5 e DF = 2R/5, com D e F em r.
4. Seja AE = OD, com E no prolongamento de AB. Traçar por E a paralela à reta OF até obter G em r. AG é aproximadamente o comprimento...

Justificativa: verifique, por semelhança de triângulos (AOF e AEG), que $AG = 2R.(13.\sqrt{146})/50$

29) Retificar um arco AB de circunferência menor que ou igual a 90°

1. Traçar o diâmetro AC e considerar CD = ¾.R, sendo R raio. Com D no prolongamento de AC.
2. Traçar por A a perpendicular r a AC.
3. Unimos D ao ponto B e obtemos E em r. AE é aproximadamente o arco...

30) Dividir um ângulo em um número n qualquer de partes iguais.

Retificar o arco AB do ângulo.

1. Dividir o segmento AE, da retificação, em n partes iguais e unimos os pontos de divisão ao ponto D. Onde interceptar o arco, ligue ao ponto O.

31) Dividir uma circunferência em n partes iguais (Bion)

1. Dividir o diâmetro AB em n partes iguais.
2. Com centro em A e depois em B e raio AB, obtemos C e D na interseção dos arcos feitos, respectivamente.
3. Unimos C e D aos pontos de divisão par (ou ímpar) de AB...

32) Polígonos estrelados

1. Dividir uma circunferência em n partes iguais.
2. Sejam V_i os pontos obtidos na circunferência em 31.3.
3. Unir os pontos de divisão pulando duas ou mais divisões nos sentidos horário e anti-horário, até o limite n/2.

33) Polígonos inscritos e circunscritos

1. Dividir uma circunferência em n partes iguais.
2. Sejam V_i os pontos obtidos na circunferência em 31.3.
3. Unindo os V_i temos polígonos inscritos e traçando tangentes a estes, temos circunscritos.

34) Concordância...

1. de uma reta e um arco no ponto A: traçar por A uma perpendicular à reta. Traçar a mediatriz de AB até encontrar a perpendicular...
2. de dois arcos: Unir o centro do primeiro arco com o ponto de concordância e traçar a mediatriz de dois pontos do outro arco até a união...
3. de duas retas r e s por meio de um arco: Basta considerar o centro do arco como o ponto de encontro das bissetrizes que r e s fazem com uma reta t...

Exercícios gerais de revisão

01) Verifique se é possível construir triângulos com as medidas:
a) 2, 3 e 4 b) 3, 4 e 5 c) 1, 2 e 4 d) 3, 5 e 8
Lembre-se: Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, então **$|a - b| < c < a + b$.**

02) "A distância de um navio até a praia". Seja o navio A, e BC a linha do litoral. Seja AB perpendicular à costa. Coloque-se um poste C. Prolongue-se BC, na extensão do seu comprimento, de sorte que BC = CD. A partir de D você vai para o interior, perpendicularmente a CD até ver o poste C exatamente entre você e o navio. Quando isto acontece no ponto E, basta medir DE na terra: esta é, por certo, a distância procurada.

Esses triângulos são semelhantes? O que podemos concluir se CD = BC/x?

03) Considere um triângulo ABC e O um ponto fora deste. Trace semirretas com origem em O, passando pelos vértices A, B e C do triângulo (escolha a posição dos mesmos). Sobre a semirreta *AO* marque o ponto A* tal que AO* = 2. AO. Sobre *OB* marque B*, tal que OB* = 2.OB. Sobre *OC* marque C* tal que OC* = 2.OC. É verdade que *AB // A*B*, AC // A*C* e BC // B*C**?

O que ocorre se $\dfrac{OA^*}{OA} = \dfrac{OB^*}{OB} = \dfrac{OC^*}{OC} = k$?

04) Desenhe um triângulo retângulo OAB, reto em B, com AO = 10. Trace segmentos paralelos ao lado *AB*, com extremidades sobre *AO e OB*. Meça os segmentos: OA_1, OA_2, ..., OB_1, OB_2, ...

a). Calcule as razões: AB/AO, A_1B_1/OA_1,...

b). Compare os triângulos OAB, OA_1B_1, ...

c). Com o auxílio de um transferidor e de uma régua, complete a tabela:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
12°.				37°.			
21°.				73°.			

05) É comum vermos alguns brincos com formatos de figuras geométricas. Ilustrar um brinco que tem a aparência de quatro circunferências tangentes em um único ponto e estando uma contida (dentro) da outra. *<u>Descreva</u> cada procedimento.*

06) É possível formar um polígono estrelado com 06 vértices? Justifique-se realizando os seguintes procedimentos:
Primeiro: dividir uma circunferência em 06 partes iguais com o auxílio de uma reta a qual passa por um dos pontos do diâmetro e
Segundo: considere os pontos ímpares para base dos vértices.

07) Em virtude de uma forte chuva, trecho de uma estrada foi destruído. Para contornar a região atingida, considere que foi feita uma estrada na forma de um arco de circunferência para ligar a estrada a uma estrada auxiliar, paralela à estrada onde ocorreu o problema. Depois, foi construída uma outra estrada na forma de arco de circunferência para retornar a estrada principal. Ilustre a situação. Não é necessário descrever cada procedimento.

08) Dividir um segmento AB em partes proporcionais aos números dados a, b e c.
Sugestão: Construção 06.

09) Dado o segmento cuja medida é x, determinar o segmento cuja medida é 1/x.
Sugestão: Construção 08.

10) Dados três segmentos cujas medidas são a, b e c, determinar o segmento cuja medida x satisfaça à proporção a : b :: c : x ou ax = bc.
Sugestão: Construção 06.

11) Construir ângulos de 45°, 60° e 30°.

Para as questões que se seguem, sugerimos "visualizar" o problema resolvido...

12) Por um ponto dado A traçar uma reta tal que a parte compreendida entre duas retas paralelas dadas seja igual a um comprimento dado.

13) Por um ponto dado A entre duas retas quaisquer r e s, traçar uma reta que as encontre nos pontos B e C de modo que A fique o ponto médio de BC.

14) Construir um triângulo retângulo conhecendo os raios r e R dos círculos inscrito e circunscrito, respectivamente.

15) Determinar o centro de um arco de circunferência dado.

16) Construir um triângulo equivalente a um quadrado dado:
a) o triângulo deve ser retângulo;
b) o triângulo deve ser equilátero.

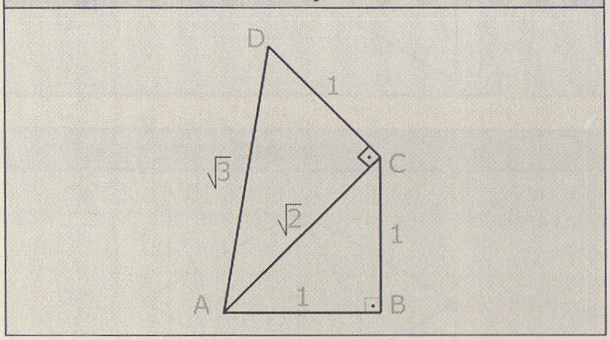
17) Construir um círculo equivalente à soma de dois círculos dados.

Bibliografia consultada das construções

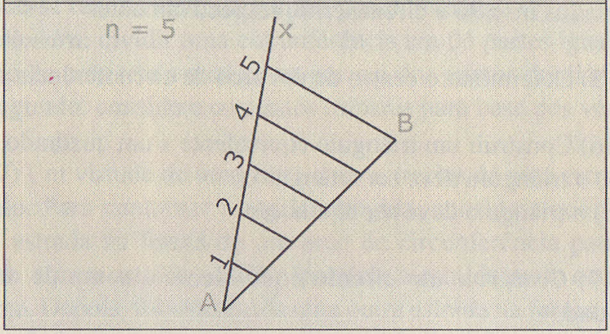
GIONGO, A. R. **Curso de Desenho Geométrico.** São Paulo: NOBEL editora, 1984.

Algumas construções:

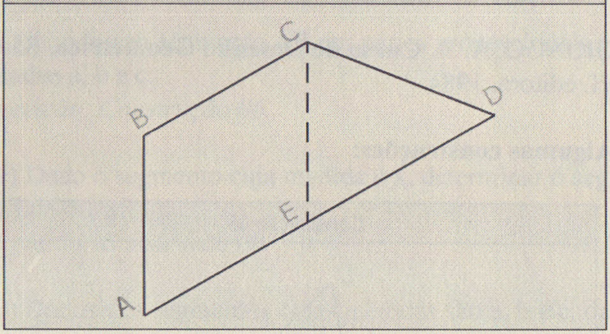
Construção 05



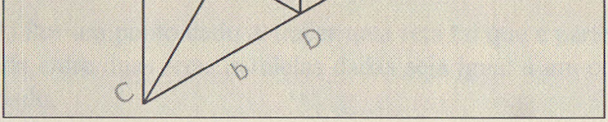
Construção 06



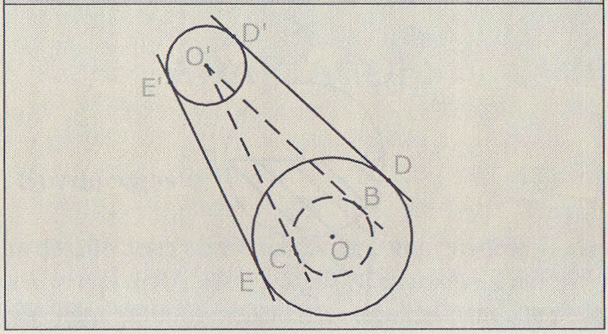
Construção 15



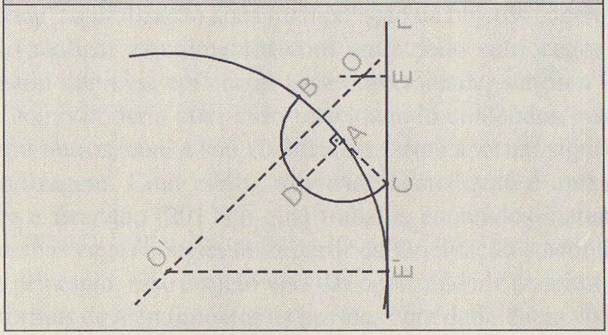
Construção 17



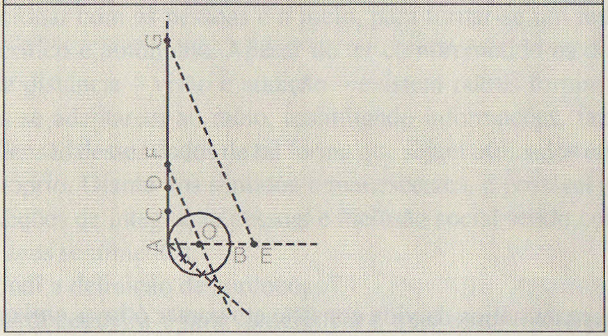
Construção 21



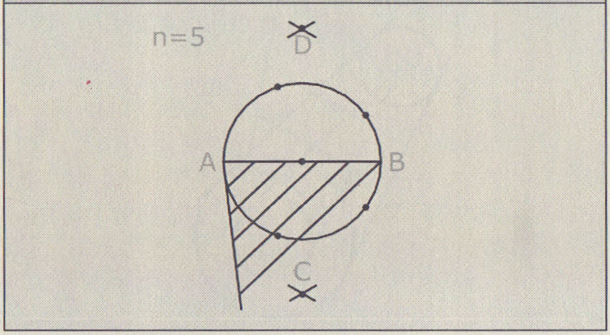
Construção 23



Construção 28



Construção 31



A matemática da vida consiste em somar ótimas amizades, diminuindo as más preocupações. Multiplicando os bons momentos vividos com família e amigos, dividindo amor e compreensão.

DEUS potencialize Sua Sabedoria em cada um de nós.

3ª PARTE

ADAPTAÇÕES

1. Surdocegos

Um desafio desta obra é funcionar como pós-tese *Matemática e deficiência visual* (BRANDÃO, 2010). Com efeito, é a principal referência brasileira. Assim sendo,adaptar técnicas para que pessoas surdocegas também tenham acesso ao conhecimento matemático, haja vista, adaptações para pessoas com cegueira congênita terem uma "facilidade": a oralização após manipulação de objetos concretos.

Ao realizar atendimentos com um sujeito surdocego, o qual manifestou interesse em cursar uma universidade, surgiu a indagação de como poderia auxiliá-lo relacionando conteúdos matemáticos, entre outros, com a sua vivência de forma a tornar significativa a aprendizagem. Com efeito, atividade semelhante é apresentada por Lira e Brandão (2013) o qual trabalha conteúdos matemáticos para pessoas cegas congênitas a partir da Orientação e Mobilidade.

A princípio, esse projeto visa dar oportunidade ao leitor conhecer as formas de atendimentos as pessoas com deficiência visual, em particular pessoa com surdocegueira. Saber das suas necessidades, desejos, potencialidades, limitações e a forma significativa de como se relacionar com as pessoas e o meio, para tornar-se um indivíduo ativo, crítico e autônomo. Apesar de ter comprometido os dois sentidos de distância – visão e audição – existem outras formas dessas pessoas se adaptarem ao meio, assimilando informações, fazendo a compreensão desses dados de tal forma que sejam utilizados em benefício próprio. Diante dos sentidos remanescentes, é possível ampliar as condições de integração pessoal e inclusão social sendo compartilhados seus sentimentos.

Qual a definição de surdocego?

Surdocegueira é uma deficiência a qual apresenta a perda da audição e visão, de modo que a comunicação das duas deficiências impossibilita o uso dos sentidos que auxiliam à distância (visão e audição), conforme Nascimento (2003). Não é somatória de deficiência, isto é, perda auditiva mais perda visual. É uma deficiência única, resultado da combinação dos dois tipos de perdas, tendo, por conseguinte, necessidades específicas.

E o que pode causar a surdocegueira?

Pode ser causada por três tipos: (1) Pré-Natais: problemas que ocorrem antes do nascimento, durante o período de gestação, onde as principais causas são: rubéola, toxoplasmose e sífilis congênita; (2) Peri-Natais: problemas que ocorrem durante o nascimento. Dentro deste grupo, a grande vilã é a anóxia de parto, ou seja, falta de oxigênio no cérebro, resultado, muitas vezes, de um trabalho de parto muito demorado. Ocorrendo, em muitos desses casos, a falta de oxigênio danifica o sistema auditivo e visual; (3) Pós-Natais: problemas que ocorrem após o nascimento. Dentro deste grupo destacamos a Meningite e a Síndrome de Usher.

Na educação do Surdocego é de grande valia à mútua colaboração entre a família, os profissionais da saúde e o educador. Com efeito, cabe ao educador do surdocego adotar algumas posturas firmes diante do seu aluno e diante de si mesmo, para que o trabalho seja bem-sucedido, a saber:

- Evitar expectativa exageradas, focando a alfabetização. Muitas vezes, a independência na rotina da vida diária já é o sucesso possível de ser alcançado;
- Permitir-se ser tocado. O aluno surdocego necessita utilizar o tato durante todo o tempo;
- Adaptar o ambiente físico da escola;
- Permitir que o Surdocego faça tudo que puder por si só, embora, por vezes, possa ser inconveniente para outros.

A metodologia desenvolvida por Van Dijk (1992) tem como principal objetivo o estabelecimento da comunicação com o Surdocego. Segundo ele, é necessário "entrar no mundo" do sujeito surdocego. Uma vez "dentro", tentar guiar esse indivíduo para o mundo da comunicação, mesmo que seja por uma intenção comunicativa, não importando o nível de comunicação atingida, e sim que esse nível seja o aproveitamento máximo de seu potencial comunicativo.

Para tanto, torna-se necessária a criação de uma rotina, onde cada atividade que compõe essa rotina tem um objeto, chamado de referência, e um sinal tátil. Exemplificando: realizar o sinal de comida com a apresentação de prato antes das refeições, realizar sinal de uso da máquina Perkins com a apresentação dela, entre outras. Ao final de cada atividade realizar o sinal de acabou. As apresentações dessas informações antecipam para a pessoa o que vai acontecer fornecendo-lhe um determinado controle do ambiente.

Vale ressaltar que toda e qualquer atividade precisa de objetos concretos, que apresentem essas atividades. Permitindo que o sujeito possa tatear, na ordem sequencial em que as atividades irão acontecer, avisando o momento de encerramento da atividade com o sinal de acabou, ou mediante a apresentação de uma caixa vazia que represente a inexistência de outras atividades.

No Instituto dos Cegos, a mais de vinte anos, visando o efetivo progresso no processo de desenvolvimento intelectual e cognitivo, são utilizadas quatro etapas que devem ser superadas por cada sujeito conforme seu desenvolvimento. Vale ressaltar que em muito se assemelham com os termos propostos por Stillman (1984), pois executávamos sem nos preocuparmos com nomenclaturas. A etapa inicial do trabalho é denominada Nutrição.

Nesse momento, o educador objetiva conquistar a confiança do sujeito. É um período delicado de observação e tentativas de aproximação. O sujeito precisa sentir-se acolhido e seguro nessa relação. Tudo isso irá propiciar a formação de vínculos afetivos. Nessa etapa nada é exigido. A postura símbolo dessa fase é o "colo".

O segundo momento é a Ressonância. Educador e educando atuam "ressoando" como se fosse um só individuo. As atividades de ressonância têm o objetivo de estimular o sujeito a interagir, compreender como suas ações podem interferir no meio, aumentar suas reações positivas com as pessoas, e assim iniciar o distanciamento do "eu" e do meio. Toda atenção e participação do sujeito dependem da sensibilidade do educador em perceber o interesse e as reações do educando, avaliando cada movimento, cada expressão, dando significado a cada uma delas.

Co – Atividade é o terceiro momento. Atuam ainda juntos, educador e educando, Por sua vez, a maior distância entre ambos propicia a melhor observação do ambiente e dos movimentos do educador. Nas atividades coativas pode-se introduzir maior variedade de movimentos e ações, incluindo a noção de ações sequenciais, sempre partindo do repertório do educando.

Por fim, tem-se a Imitação. Com o desenvolvimento das atividades co-ativas o sujeito começa a fazer referências, aumentando o distanciamento entre o seu "eu" e o meio. A postura símbolo dessa fase é o "frente a frente" tendo em vista que o docente fica em frente ao discente na maioria das repetições, visando o aprendizado.

A partir do acompanhamento participativo, sujeitos surdocegos podem, e devem, se envolver em atividades do cotidiano dos demais, como ir a uma praia, participar de gincanas escolares, dançar...

2. Adaptando atividades

Certa vez ao contar a história do "patinho feio" para um grupo de crianças, uma delas ficou admirada: "como um cisne (o patinho feio) nasce de uma pata?" e não parou por aí: "o lobo mau da chapeuzinho vermelho é o mesmo dos três porquinhos?". Se até as historinhas precisam ser modificadas, o que dizer da forma de ensinar...

Desta feita, durante muito tempo confundiu-se "ensinar" com "transmitir" e, nesse contexto, o aluno era um agente passivo da aprendizagem e o professor um simples transmissor nem sempre presente nas necessidades dos alunos. Acreditava-se que se aprendia pela repetição e que os alunos que não aprendiam eram os responsáveis por essa deficiência e, portanto mereciam o castigo da reprovação (POLYA, 1995).

Os educadores muitas vezes se perdem e não conseguem mais atrair a atenção de seus alunos e motivá-los. Se o educando mudou, o educador deve mudar também. A ideia de um ensino despertado pelo interesse do aluno acabou transformando o sentido do que se entende por material pedagógico e cada estudante, independentemente de sua idade, passou a ser um desafio à competência do professor.

Esta parte do livro visa apresentar algumas atividades estimulantes, úteis para discentes com e sem deficiência visual. Após cada atividade (ou conjunto de atividades), serão apresentadas questões com comentários das seleções do CMF (para ingresso no 6° ano).

2.1. Jogos Matemáticos

É no contexto de motivar os educandos que o jogo ganha um espaço como ferramenta ideal para a aprendizagem, na medida em que se propõe estímulo ao interesse do aluno. O jogo irá ajudá-lo a construir suas novas descobertas, desenvolver e enriquecer sua personalidade, além de ser, para o professor, um instrumento pedagógico que o leva à condição de condutor, estimulador e avaliador de uma aprendizagem realmente significativa para seu aluno (BICUDO, 1999).

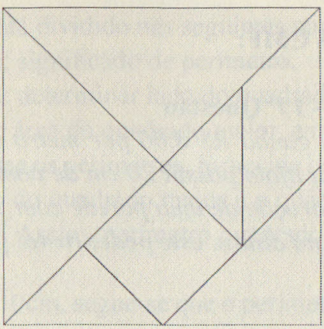
O TANGRAN (de 7 peças)

Criado na China há milhares de anos, esse jogo ultrapassa os limites de um quebra-cabeça tradicional, pois enquanto nos comuns o jogador inúmeras vezes faz a mesma figura, no tangran são inúmeras as figuras a serem construídas. Cerca de 1700 entre animais, plantas, figuras humanas, objetos, números e figuras geométricas.

Nas aulas de matemática, o Tangran constitui-se um rico material de apoio ao trabalho de alguns conteúdos específicos do currículo, tais como frações, áreas e polígonos, bem como no desenvolvimento de habilidades do pensamento como ver, trocar, desenhar, escrever sobre, interpretar esquemas, fazer, modificar, criar objetos e formas, imaginar, etc.

As regras desse jogo consistem em usar as sete peças (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo) em qualquer montagem, colocando-as lado a lado sem sobreposição, ou pelo menos encontradas pelo vértice. Partindo dessa construção e da criatividade mergulha-se no encantador mundo do conhecimento. Enfim, a magia milenar do Tangran é um exercício de geometria e imaginação...

Figura 03 – tangran de sete peças



ATIVIDADES

1. Silhuetas

Monte silhuetas (figuras) usando as sete peças do tangran. Que figuras você formou? Forme outras figuras

2. Construindo polígonos

i. Identifique cada um dos sete polígonos que formam o Tangran.
ii. Com o seu tangran forme um quadrado usando: (1) duas peças; (2) três peças; (3) quatro peças (compare sua solução com a de seus colegas. Todos usaram as mesmas peças?); (4) cinco peças; (5) sete peças.
iii. Construa um triângulo com: (1) duas peças; (2) três peças; (3) quatro peças (compare com seus colegas); (4) cinco peças; (5) Sete peças.
iv. Com relação ao trapézio, com quantas peças é possível construí-lo?
v. Construa um hexágono com sete peças.

3. Trabalhando frações e áreas

Em uma folha de papel desenhe o tangran construído (ou usar material concreto) e, tomando como base o triângulo menor, sobreponha-o às outras peças e responda:

a) Quantos triângulos pequenos cabem em um triângulo grande?
b) Quantos triângulos pequenos cabem em um médio?
c) Quantos triângulos pequenos cabem em um paralelogramo?
d) Quantos triângulos pequenos cabem em um quadrado?

QUESTÕES CMF:

Prova 2004 – 19ª Questão

Um pedreiro ganha R$ 8,00 por metro quadrado de parede que constrói. Cada tijolo possui 20 cm de comprimento por 20 cm de altura. Na construção de uma parede com 30 tijolos no comprimento e 20 tijolos na altura, este pedreiro vai ganhar...

SOLUÇÃO

O problema está dividido nas seguintes partes:

- Primeira: encontrar a área. No caso, em cm^2.
- Segunda: encontrar a área, em metros quadrados, da parede.
- Terceira: multiplicar o resultado por 8,00.

Sendo 30 tijolos no comprimento e 20 tijolos na altura, serão utilizados 30 x 20 = 600 tijolos. Como cada tijolo mede 20 cm por 20 cm, sua área é de 20 x 20 = 400 centímetros quadrados (cm^2).

Daí, a área é 600 x 400 (quantidade de tijolos multiplicada pela área de cada tijolo), totalizando 240.000 cm^2. Todavia, o ganho do pedreiro é em metro quadrado (m^2). Dado que 1m = 100 cm, segue-se que $1m^2$ = (1m) x (1m) = (100cm) x (100cm) = 10.000 cm^2.

Por conseguinte, 240.000 cm^2 correspondem a 24 m^2 (valor obtido pela divisão de 240.000 por 10.000). Por fim, o ganho do pedreiro é: 24 x 8 = 192 **(R$ 192,00).**

Comentários:

- Erro frequente é o produto de todos os valores envolvidos desconsiderando as unidades.
- Outra dificuldade observada é considerar $1m^2$ como 100 cm^2. Justificativa: 100 = 10 x 10.

Prova 2008 – 18ª Questão (adaptada: *descrição das figuras*)

Há dois quadrados. O quadrado menor tem perímetro igual a 16 dm, o que corresponde a ¼ do perímetro do quadrado de maior lado. Qual a área, em cm^2, do quadrado de maior lado?

SOLUÇÃO

O problema está dividido nas seguintes partes:

- Primeira: significado de perímetro.
- Segunda: determinar lado do quadrado maior.
- Terceira: área do quadrado maior, em cm^2.

Da relação entre os perímetros, fornecida no enunciado, segue-se que o perímetro do quadrado maior é o quádruplo do perímetro do quadrado menor. Assim, perímetro quadrado maior é igual a 4 x (16 dm) = 64 dm.

Como 1dm = 10cm, segue-se que o perímetro é igual a 640 cm.

Perímetro *grosso modo* é o contorno. No caso, como o quadrado possui os quatro lados iguais, segue-se que a medida do lado é a quarta parte do perímetro. Ou seja: 640/4 = 160cm.

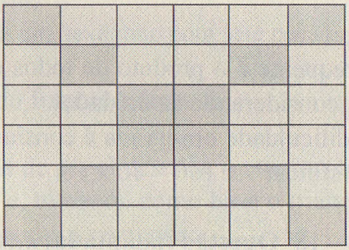
Por conseguinte, área = (160 cm) x (160 cm) = 25.600 cm^2.

Comentários:

- Erro frequente é o produto de todos os valores envolvidos desconsiderando as unidades.
- Outra dificuldade observada é considerar 1m^2 como 100 cm^2. Justificativa: 100 = 10 x 10.

Prova 2009 – 4ª Questão (adaptada: *descrição e confecção da figura em EVA, indicando as partes em negro com fitas adesivas*)

Em um tabuleiro, formado por 36 quadradinhos de lado 1 cm, a área e o perímetro correspondente a parte sombreada valem...



SOLUÇÃO

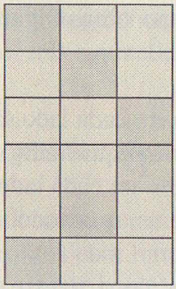
O problema está dividido nas seguintes partes:

- Primeira: área sombreada via contagem.
- Segunda: significado de perímetro. Determinar ou via contagem ou por partes (simetria).

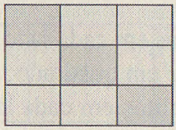
Por contagem direta, percebemos que há 12 quadradinhos. Como cada quadradinho tem lado 1 cm, a área é igual a (1 cm) x (1 cm) = 1 cm^2. Por conseguinte, **12 cm^2** é a área.

Detalhe: um discente percebeu que a figura é simétrica. De que forma? Ele dobrou ao meio tanto na altura quanto em relação à base o papel sombreado. Vide etapas a seguir:

Dobrando ao meio em relação à base:

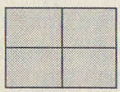


Dobrando ao meio em relação à altura:



Portanto, basta realizar contagem e multiplicar resultado por quatro. Desta feita, o perímetro da região é 3 (quantidade de quadradinhos) x 4 (perímetro de cada pequeno quadrado) = 12 cm. Sendo quatro regiões: 4 x (12 cm) = **48 cm.**

Comentários:
Erro frequentemente observado foi contagem das arestas da região central. Com efeito, é o perímetro de um quadrado de lado 2 cm:



2.2. JOGANDO COM PALITOS (Relato de experimento com discentes cegos)

Utilizamos varetas do material dourado e uma mesa com bordas grossas, de modo que facilitasse o uso das peças.

1) Formar quadrados com palitos...

Inicialmente confeccionamos alguns quadrados e fomos fazendo observações:

- Com um palito em cada lado são necessários quatro palitos para formar um quadrado;
- Com dois palitos em cada lado são necessários oito palitos para formar um quadrado.

Foi solicitado que o aluno fizesse quadrados com lados três palitos e depois com lados de medida quatro palitos. O aluno observou que:

- Com três palitos em cada lado são necessários doze palitos para formar um quadrado;
- Com quatro palitos em cada lado são necessários dezesseis palitos para formar um quadrado.

Com base no que ele estava formando, solicitamos que disses-se quantos palitos seriam necessários para confeccionar um quadrado com lado cinco, ele respondeu, rapidamente, que seriam necessários vinte palitos.

Em seguida, mesma pergunta anterior, caso os lados tivessem como medida seis palitos. Rapidamente respondeu vinte e quatro.

Evitando uma sequência aditiva, perguntamos caso o quadrado tivesse lado oito palitos, quantos palitos seriam necessários. Cerca de dez segundos, ele respondeu quarenta.

Indagamos como ele estava realizando tais contas e respondeu que, "como o quadrado tem os quatro lados iguais, então multiplico por quatro a quantidade de palitos que eu quero colocar nos lados".

2) Formar triângulos equiláteros com palitos...

Assim como na atividade de confecção de quadrados, fizemos as duas primeiras construções, com lado um e depois com lado dois palitos. Todavia, desta vez não fizemos observações iniciais.

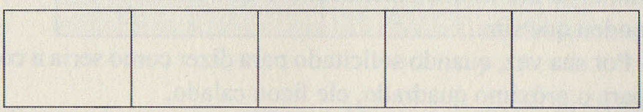
Foi solicitada a construção de um triângulo equilátero de lado três palitos, depois de lado quatro palitos. Em seguida, fazendo só contas de cabeça, triângulos do mesmo tipo com lados... cinco, sete e dez palitos.

Respondeu: "como o triângulo equilátero tem os três lados iguais, então multiplico por três a quantidade de palitos que eu quero colocar nos lados".

3) Formar fileira de quadrados com palitos...

Fizemos um quadrado com um palito de lado. Em seguida, acrescentamos mais três palitos para formar um segundo quadrado. Solicitamos que o aluno X fizesse o mesmo...

Figura 04 – fileira de quadrados



Pedimos que ele dissesse quantos palitos foram utilizados para compor a fileira com três quadrados, depois com quatro e depois com cinco. Ele contou e respondeu, respectivamente, 10, 13 e 16 palitos.

Solicitamos que fornecesse a quantidade de palitos para formar seis, sete e dez quadrados. Para os dois primeiros não demorou em responder: 19 e 22. Mas, para dez quadrados enfileirados, não soube responder.

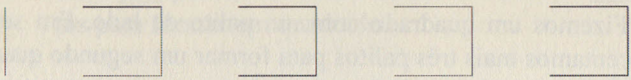
Indagamos como havia encontrado os valores 19 e 22. Segundo ele "basta somar três palitos, pois estou colocando três palitos".

Solicitamos que desconstruísse a figura e refizesse observando outra maneira de formar a figura. Desta vez ele conseguiu responder a quantidade de palitos para formar dez quadrados enfileirados, para tanto, foi fazendo contas com os dedos e dizendo em voz baixa com quantos quadrados ele estava:

- Com cinco quadrados eu tenho 16 palitos;
- Com seis quadrados, tenho 16 mais três que dá 19;
- Para sete quadrados... 19 mais três dá 22;
- Para ter oito quadrados... 22 mais três que dá 25;
- 25 mais três dá 28, e eu fico com nove quadrados;
- 31 palitos é a resposta, pois é 28 mais três.

Fizemos uma intervenção... segurando nas mãos dele separamos o primeiro quadrado como sendo um palito mais três palitos. Para o segundo quadrado, colocávamos mais três palitos, assim, para formar o segundo quadrado nós precisávamos de um palito mais dois grupos de três palitos.

Figura 05 – construção da fileira de quadrados



Para o terceiro quadrado, seriam necessários três grupos de três palitos e um palito que se encontrava no canto da mesa. Perguntamos se ele estava entendendo o que estávamos fazendo. Ele respondeu que sim.

Por sua vez, quando solicitado para dizer como seria a construção para o próximo quadrado, ele ficou calado.

Neste exemplo, a ideia prática é escrever o número de palitos, y, como sendo a expressão $y = 1 + 3n$, onde n é o número de quadrados.

2.3. Segredo das Matrizes

Considere a matriz quadrada[4] (dada em forma de tabela)

2	4	5	6
4	6	7	8
5	7	8	9
12	14	15	16

Escolha um número qualquer. Digamos o sete. Qual? O da terceira linha e segunda coluna.

Vamos anotar de lado este número e excluir a linha e a coluna correspondente (podem ser cobertas com tiras de papel, no caso de discentes cegos, eles podem colocar uma linha por cima).

4 Matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas.

2		5	6
4		7	8
12		15	16

Agora, escolha outro número. Considere o número <u>oito</u> que está na segunda linha e quarta coluna. Repetir procedimento de excluir a linha e a coluna onde o dito número se encontrava.

2		5	
12		15	

Temos agora quatro números. Vamos escolher o 15. Como ele se encontra na quarta linha e terceira coluna, vamos excluí-las.

2			

Sobrou o número dois, que é escolhido por falta de opções.

Quais foram os números selecionados? Foram 7, 8, 15 e 2, cuja soma é 32.

E o que há de interessante nisto? O interessante é que, independente da escolha feita, a soma será SEMPRE 32. Verifique!

E qual é o segredo?

Independentemente do tamanho da tabela, que tem que ser uma matriz quadrada, você escolhe números aleatoriamente, colocando fora da tabela, mas preservando sua posição (linha e coluna). Os elementos da tabela são obtidos pela soma dos elementos das linhas e colunas (de fora).

Neste exemplo, 2, 4, 5 e 6 ficaram para formar as colunas e 0, 2, 3 e 10 para formar as linhas, nesta ordem.

Em outras palavras, se a tabela que queremos formar é 4 x 4, imaginamos uma 5 x 5

Observe:

	2	4	5	6
0	0 + 2 = 2	0 + 4 = 4	0 + 5 = 5	0 + 6 = 6
2	2 + 2 = 4	2 + 4 = 6	2 + 5 = 7	2 + 6 = 8
3	3 + 2 = 5	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8	3 + 6 = 9
10	10 + 2 = 12	10 + 4 = 14	10 + 5 = 15	10 + 6 = 16

Outro exemplo: Suponha que um(a) amigo(a) seu vá fazer aniversário. Considere que ele(a) esteja comemorando seu 27º aniversário.

Vamos fazer uma tabela 3 x 3. Para tanto, devemos imaginar seis números cuja soma seja 27. Um exemplo é: 3 + 5 + 6 + 8 + 4 + 1 (obs.: a quantidade de números é 2n, sendo n a ordem – número de linhas ou colunas – da matriz).

Como queremos uma tabela 3 x 3, vamos construir uma "geratriz" de 4 x 4. Os números escolhidos são distribuídos aleatoriamente. Repare que não colocamos nenhum número na primeira linha e primeira coluna.

	3	5	6
8	8 + 3 = 11	8 + 5 = 13	8 + 6 = 14
4	4 + 3 = 7	4 + 5 = 9	4 + 6 = 10
1	1 + 3 = 4	1 + 5 = 6	1 + 6 = 7

Assim, a tabela que deve ser apresentada é:

11	13	14
7	9	10
4	6	7

Vamos testar que a soma é 27?

Inicialmente vamos escolher o número quatro. Onde ele está? Está na terceira linha e primeira coluna. Vamos excluí-las:

	13	14
	9	10

Agora, vamos escolher o número nove. Ele está na segunda linha e segunda coluna.

		14

Sobrou o 14.

Qual é a soma dos escolhidos? A soma é $4 + 9 + 14 = 27$.

Segredo das matrizes II

As tabelas, ou matrizes, que serão apresentadas, indicam um jogo. Antes, vale ressaltar que todo e qualquer número natural pode ser decomposto como somas de potências do número 2.

1. Lembremos que:

$1 = 2^0$;

$2 = 2^1$;

$4 = 2^2$;

$8 = 2^3$;

$16 = 2^4$.

E, generalizando, $2^n = 2 \times 2 \times ... \times 2$ (produto do 2 por ele mesmo n-vezes, sendo n um número natural).

2. Assim, para escrever um número natural qualquer como soma de potências de base 2, basta inicialmente observar qual a potência mais próxima do número, sendo menor que este. Acompanhe os exemplos:

a. Número 9, como $9 > 8$, vamos retirar este número. Assim, $9 - \underline{8} = 1$. Sendo $1 = 2^0$, segue-se que $9 = 1 + 8$ $(2^0 + 2^3)$.

b. Número 23. Temos que $2^5 = 32 > 23$. Como $2^4 = 16 < 23$, fazemos a diferença entre 23 e 16. $23 - \underline{16} = 7$. Agora, temos o número 7. Percebemos que $7 < 8$ ($= 2^3$), e $7 > 4$ ($= 2^2$). Daí, fazendo a diferença, $7 - \underline{4} = 3$. Notemos que $3 > 2$ ($= 2^1$). Realizamos a diferença entre 3 e 2, $3 - 2 = 1$. Assim, $23 = 16 + 4 + 2 + 1$ (soma dos números retirados).

Exemplos gerais:

a) $81 \Rightarrow 81 - 64 = 17 \Rightarrow 17 - 16 = 1$

$\Rightarrow 81 = 64 + 16 + 1$.

b) $62 \Rightarrow 62 - 32 = 30 \Rightarrow 30 - 16 = 14$

$\Rightarrow 14 - 8 = 6 \Rightarrow 6 - 4 = 2$

$\Rightarrow 62 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2$

Como podemos "explorar" matematicamente o segredo das matrizes II?

- Potências de base dois. Você, caro leitor ou prezada leitora, pode dar uma folha de papel para uma criança (ou pessoa) e pedir que dobre a folha ao meio. Vale lembrar que dobrar é igual a multiplicar. Realizando três dobras, por exemplo, teremos 2 x 2 x 2 = 8 retângulos.

Continue seguindo a "lei de formação". Para a terceira dobra, deixe o papel dobrado no tamanho do menor retângulo e dobre-o ao meio. Abrir e contar para verificar que existem oito retângulos. Observe que a área de cada retângulo pequeno é igual a área do papel (retângulo grande) dividida por $W = 2^n$, onde n é o número de dobras.

- Outra utilidade matemática desta brincadeira: *figuras semelhantes*. Perceba uma situação-problema: quantas cerâmicas de 20cm por 30cm são necessárias para cobrir um piso de 8m por 12m?
- Neste exemplo, o piso é como se fosse o papel. As cerâmicas podem ser comparadas às dobras. Assim, quantas dobras são necessárias?
- Da observação anterior, Área Papel (Área Piso) = Área retângulo pequeno (cerâmica) x W(número de cerâmicas). Logo,
- Número de cerâmicas =

$$\frac{\text{área piso}}{\text{área cerâmica}} = \frac{800x1200}{20x30} = 1600$$

- Lembre-se que 1 m = 100 cm... daí, 8m = 800cm e 12m = 1.200cm

Agora, observe as seguintes tabelas:

01	05	09
15	Tabela A	07
13	11	03

02	14	15
07	Tabela B	03
10	11	06

05	04	06
13	Tabela C	07
14	12	15

09	08	15
10	Tabela D	11
13	14	12

Vamos adivinhar números pensados? Nas tabelas acima estão dispostos números de 01 a 15. Escolha um número de, 01 a 15, e escreva em um pedaço de papel à parte (para garantir credibilidade!). Em quais tabelas se encontra o número? Observe atentamente...

Caso você diga que o número está nas tabelas C e D, o número em questão é o número 12. Caso esteja apenas em B, o número é o 02.

Qual o segredo?

Você lembra que todo e qualquer número natural pode ser decomposto em uma soma de potências de base dois... pois bem, neste caso, o maior número é 15 e 15 = 1 + 2 + 4 + 8 (quatro números e quatro tabelas).

01	05	09
15	Tabela A	07
13	11	03

02	14	15
07	Tabela B	03
10	11	06

04	05	06
13	Tabela C	07
14	12	15

08	09	15
10	Tabela D	11
13	14	12

Repare que estes números foram colocados no canto superior esquerdo de cada tabela. Mas você pode colocar em qualquer posição de sua preferência. Como é que as tabelas foram sendo completadas? Com raciocínio inverso às atividades anteriores...

- Número 1, fica na tabela A;
- Número 2, fica na tabela B;
- Número 3 = 1 + 2, fica nas tabelas A e B;
- Número 4, fica na tabela C;
- Número 5 = 1 + 4, fica nas tabelas A e C;
- Número 6 = 2 + 4, fica nas tabelas B e C;
- ...
- Número 8, fica na tabela D;
- Número 16, fica na tabela E;
- Número 18 = 2 + 16, fica nas tabelas B e E;
- Número 21 = 1 + 4 + 16, fica nas tabelas A, C e E.

Está clara a ideia?

Em quais tabelas devemos colocar o número 13? Como 13 é igual a 1 + 4 +8, deve ser colocado nas tabelas A, C e D.

Caso queiramos números maiores, como devemos proceder? Bem, a próxima potência de base dois maior que 8 é 16, a próxima maior que 16 é 32, e assim sucessivamente. No caso de querermos seis tabelas, como $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. Fazemos seis tabelas e o número a ser escolhido deve estar entre 01 e 63.

Quantas linhas e colunas devemos ter? Bem, na tabela A devem ser colocados todos os números ímpares...

- Entre 01 e 31, incluindo os extremos, há 16 números. Daí optamos, por estética, em quatro linhas e quatro colunas. Podiam ter sido duas linhas e oito colunas (compare com jogo dos pontinhos para saber número de linhas e de colunas).
- Entre 01 e 63, incluindo os extremos, há quantos números? São eles, 01, 03, 05, ..., 59, 61 e 63. Logo, são 32 os números. Podemos formar tabelas com quatro linhas e oito colunas (ou uma escolha sua, tente...)

Assim, formamos "aleatoriamente"

Tabela A

01	13	23	19	43	35	49	33
05	07	15	03	51	57	45	55
27	09	21	17	63	37	59	53
11	29	31	25	39	61	47	41

Tabela B

02	03	27	15	46	55	35	54
11	10	22	31	58	38	50	59
30	26	23	19	42	62	51	34
14	07	06	18	63	47	39	43

Tabela C

04	15	23	14	36	45	55	52
29	12	05	28	37	61	38	60
07	30	06	22	62	53	44	54
21	20	31	13	47	63	39	46

Tabela D

08	29	24	14	40	44	45	46
27	25	11	12	41	58	59	47
10	31	28	26	42	62	60	56
30	15	13	09	43	63	61	57

Tabela E

16	27	22	25	48	55	56	63
24	20	30	21	49	54	57	62
31	28	18	29	50	53	58	61
19	23	26	17	51	52	59	60

Tabela F

32	35	40	38	33	45	42	41
37	34	44	39	46	43	47	36
50	51	54	55	58	59	61	62
49	52	53	56	57	60	48	63

Já não construiremos tabelas para uma escolha entre 01 e 123, incluindo os extremos. Todavia, ao fazer as sete tabelas, se uma pessoa disser que o número escolhido está nas tabelas A, C e G, garanto que o número em questão é 69. Com efeito...

- $A \Rightarrow 1 = 2^0$;
- $B \Rightarrow 2 = 2^1$;
- $C \Rightarrow 4 = 2^2$;

- $D \Rightarrow 8 = 2^3$;
- $E \Rightarrow 16 = 2^4$;
- $F \Rightarrow 32 = 2^5$;
- $G \Rightarrow 64 = 2^6$;

"Basta" somar... A (1) + C (4) + G (64) = 69.

Adaptações: ***Considerando 04 tabelas, os números de 01 a 15 podem ser associados as 15 primeiras letras do alfabeto. Daí, em vez de números usar cidades ou animais ou frutas.***

Ex.: Estou pensando em uma cidade a qual está nas tabelas A, B e D. Que cidade é esta?

A

Aracati	Goiânia	Kaloré	Eusébio
Cuiabá	Manaus	Itapipoca	Olinda

B

Beberibe	Natal	Juazeiro	Florianópolis
Olinda	Cuiabá	Goiânia	Kaloré

C

Diamantina	Manaus	Natal	Florianópolis
Eusébio	Limoeiro	Goiânia	Olinda

D

Hortolândia	Manaus	Juazeiro	Olinda
Itapipoca	Limoeiro	Kaloré	Natal

Resposta: Kaloré

Cidade do Estado do Paraná. Lembrar: A = 1, B = 2 e D = 8. Soma = 1 + 2 + 8 = 11.

Notar que podemos explorar assuntos atrelados à cidade: clima, população, etc.

Felicidade começa com FE

2.4 Sudoku

A tabela abaixo indica um "sudoku"

3	1	2		9	5		7	6
5		9	1		7		8	2
4		7	2	6	3	5		
9			7			2	4	
	2	8		1			9	3
	3		9	8	2		5	7
	4	5	6				3	1
1	7		3	5	8	9		4
8		3	4	2		7		5

Descrição: Preencha a grelha com os números de 1 a 9 em cada fila, coluna e quadrado 3x3.

Manual Sudoku Original: Preencha a grelha com os números de 1 a 9 de modo a que estes apareçam apenas uma única vez em cada fila, coluna e quadrado 3x3.

Adaptação: pode ser utilizado um quadro com quatro linhas e quatro colunas e usar figuras, tais como: ♥, ♠, ♦ e ♣ (ou figuras geométricas, como triângulos, retângulos, etc.)

♥			
	♠		♣
	♦		

O aluno pode tentar completar aleatoriamente ou pode, o qual é o objetivo do jogo, estabelecer estratégias.

Resolvendo...

Vamos iniciar com o "coração". Como ele está na primeira linha e primeira coluna[5], os possíveis locais são os indicados com X:

♥			
	♠	X	♣
	X	X	X
	♦	X	X

Perceba que são seis possíveis locais. Vamos "tentar" colocar na segunda linha e terceira coluna o ♥. Por quê? Porque, via observação da tabela, se o referido símbolo for colocado na terceira linha e terceira coluna chegaremos em uma incoerência, observe:

♥			
	♠		♣
		♥	
	♦		

Ficamos sem escolha, pois não podemos ter símbolos iguais em quadrados de mesma cor (ou minigrelhas).

Assim,

♥			
	♠	♥	♣
	♦		

Agora, com base na escolha anterior, as escolhas restringem-se a:

5 Preparando linguajar do discente para o assunto matrizes, o qual é apresentado no segundo ano do ensino médio.

♥			
	♠	♥	♣
	X		X
	♦		X

Vamos optar pela terceira linha e segunda coluna:

♥			
	♠	♥	♣
	♥		
	♦		

Assim, a última escolha é:

♥			
	♠	♥	♣
	♥		
	♦		♥

Repare que os outros símbolos saem "naturalmente".
Na segunda linha, está faltando o ♦.
Na segunda coluna, está faltando o ♣.

♥	♣		
♦	♠	♥	♣
	♥		
	♦		♥

Voltamos às escolhas. Para o ♦, as opções são:

♥	♣	X	X
♦	♠	♥	♣
	♥	X	X
	♦		♥

Daí, considere escolhida a posição da terceira linha e terceira coluna:

♥	♣		
♦	♠	♥	♣
	♥	♦	
	♦		♥

Logo, resta a posição: primeira linha e quarta coluna.

♥	♣		♦
♦	♠	♥	♣
	♥	♦	
	♦		♥

Assim como argumentado anteriormente, a quarta coluna pode ser completada, já que há uma única opção para o preenchimento com o símbolo ♠:

♥	♣		♦
♦	♠	♥	♣
	♥	♦	♠
	♦		♥

Daí, concluímos que a terceira linha fica completa com o símbolo ♣ e a primeira com ♠:

♥	♣	♠	♦
♦	♠	♥	♣
♣	♥	♦	♠
	♦		♥

Agora, é só completar com os símbolos que faltam: ♠ na primeira coluna e ♣ na terceira coluna:

♥	♣	♠	♦
♦	♠	♥	♣
♣	♥	♦	♠
♠	♦	♣	♥

Logo:

3	1	2	8	9	5	4	7	6
5	6	9	1	4	7	3	8	2
4	8	7	2	6	3	5	1	9
9	5	1	7	3	6	2	4	8
7	2	8	5	1	4	6	9	3
6	3	4	9	8	2	1	5	7
2	4	5	6	7	9	8	3	1
1	7	6	3	5	8	9	2	4
8	9	3	4	2	1	7	6	5

QUESTÕES CMF:

Prova 2002 – 11ª Questão

A quinta parte de 5^{555} é...

SOLUÇÃO

A ideia básica é trabalhar potências. A quinta parte é:

$$\frac{5^{555}}{5^{1}} = 5^{555-1} = 5^{554}$$

Comentários:

- Erros frequentemente observados: (1) dividir o expoente por 5, obtendo 5^{111}; (2) subtrair 5 do expoente: $5^{555-5} = 5^{550}$

Prova 2005 – 1ª Questão (adaptação: *utilizamos papel 60 kg – pode ser cartolina –e colamos barbantes tanto na horizontal quanto na vertical para indicar as "casas". Os valores foram indicados por cubinhos do material dourado)*

Na tabela abaixo, disponha em cada quadrado vazio um número de 0 a 8 de modo que a soma dos três números em cada fileira horizontal e em cada fileira vertical seja sempre igual a 9. Desse modo, qual a soma de todos os números que foram utilizados para completar a tabela?

		5
	3	
1		4

SOLUÇÃO

Temos duas estratégias: A primeira é a ideia básica de completar a partir da fileira que faltam menos números.

Iniciando com a terceira fileira da horizontal (ou 3ª linha) – pode ser a terceira fileira da vertical (ou 3ª coluna) – temos: 1 + 4 = 5. Como a soma é 9, segue-se que o número procurado é 4:

		5
	3	
1	4	4

Na 3ª coluna, a soma já é 9. Por conseguinte, o número procurado é 0:

		5
	3	0
1	4	4

Na 2ª coluna, a soma é 7. Assim sendo, o número procurado é 2:

	2	5
	3	0
1	4	4

Continuando com as ideias:

2	2	5
6	3	0
1	4	4

Logo, a soma é: 2 + 2 + 6 + 0 + 4 = **14**

A segunda estratégia: como cada fileira na horizontal ou na vertical tem soma 9, segue-se que nas três, ou na vertical ou na horizontal, a soma é 27. Já temos os números a, 3, 4 e 5, cuja soma é 13. Logo, a soma dos elementos restantes é igual a diferença entre 27 e 13. Ou seja: 27 – 13 = 14.

Comentários:

Praticamente não ocorreu erro. Alguns demoraram para resolver. Só um discente utilizou a segunda estratégia.

Prova 2006 – 11ª Questão (adaptação: *utilizamos cartolina e colamos barbantes tanto na horizontal quanto na vertical para indicar as "casas". Os valores foram indicados por cubinhos do material dourado).*

Há uma tabela de adição com quatro linhas e quatro colunas. Três números naturais estão representados por a, b e c. Cada um dos valores que estão na primeira linha são somados aos valores que estão na primeira coluna. Os números 7, 9 e 14 são alguns desses resultados obtidos (vide tabela). Determine a + b + c.

+	.a	.b	.c
.a			7
.b		14	9
.c	7	9	

SOLUÇÃO

Seguir a ideia apresentada. Isto é, com base na confecção da tabela, percebemos que a soma de b com ele mesmo é igual a 14.

Desta feita, b é igual a 7.

A soma de c com b é igual a 9. Sendo b = 7, segue-se que c = 2.

Por fim, da soma de a com c ser 7, concluímos que a = 5.

Logo, a + b + c = 5 + 7 + 2 = **14.**

Comentário: *Questão teve como principal dificuldade a sua interpretação.*

Prova 2008 – 12ª Questão (adaptação: *mesma anterior*).

A tabela abaixo deve ser completada utilizando somente os números 1, 2, 3 e 4, de tal modo que não haja números repetidos em uma fileira horizontal ou em uma fileira vertical. A soma dos números que faltam para preencher a tabela é...

1			3
	2	4	
	1	3	
2			4

SOLUÇÃO

Temos duas estratégias: A primeira é a ideia básica de completar a partir da fileira que faltam menos números, utilizando o número que mais se repete. Compare com sudoku.

Escolhendo o número 1, completaremos com X onde ele não pode ser colocado, conforme instruções (no caso de estudantes com deficiência visual, a tabela era coberta com tira de papel):

1	X	X	3
X	2	4	
X	1	3	X
2	X		4

Ficamos com duas opções. Que são justamente os locais a serem preenchidos:

1			3
	2	4	1
	1	3	
2		1	4

Agora, notamos que tanto a segunda linha, quanto as colunas "3" e "4" possuem três elementos cada uma. Falta um "3" na segunda linha, um "2" na terceira coluna e um "2" na quarta coluna:

1		2	3
3	2	4	1
	1	3	2
2		1	4

Seguindo ideia, basta completar os espaços em branco com os números que faltam:

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

Logo a soma é: 4 + 2 (1ª linha) + 3 + 1 (2ª linha) + 4 + 2 (3ª linha) + 3 + 1 (4ª linha) = **20**

Uma segunda estratégia é observar que a soma dos elementos de cada linha é 10. Logo, nas quatro linhas a soma é 40. A soma dos números que já estão dispostos é: 1 + 3 + 2 + 4 + 1 + 3 + 2 + 4 = 20. Logo, 40 – 20 = 20.

Comentário: *Questão não dificuldade, nem em sua interpretação. A maioria utilizou a segunda estratégia.*

Prova 2008 – 16ª Questão (adaptação: *mesma anterior*).

Os números naturais de 1 até 102 estão distribuídos em tabelas, conforme figura (descrição: tabelas conforme celas Braille tendo três linhas e duas colunas). Onde está localizado o número 83?

Tabela 1	
1	2
3	4
5	6

Tabela 2	
7	8
9	10
11	12

Tabela 3	
13	14
15	16
17	18

Tabela ?	
97	98
99	100
101	102

***Continuando descrição:

- 1ª linha e 1ª coluna: 1 na tabela "1"; 7 na tabela "2"; 13 na tabela "3"...
- 1ª linha e 2ª coluna: 2 na tabela "1"; 8 na tabela "2"; 14 na tabela "3"...
- 2ª linha e 1ª coluna: 3 na tabela "1"; 9 na tabela "2"; 15 na tabela "3"...
- 2ª linha e 2ª coluna: 4 na tabela "1"; 10 na tabela "2"; 16 na tabela "3"...
- 3ª linha e 1ª coluna: 5 na tabela "1"; 11 na tabela "2"; 17 na tabela "3"...
- 3ª linha e 2ª coluna: 6 na tabela "1"; 12 na tabela "2"; 18 na tabela "3"...

SOLUÇÃO

Inicialmente, observar a lei de (in)formação:

- 1ª linha e 1ª coluna: $7 = 6 + 1$; $13 = 2x6 + 1$...
- 1ª linha e 2ª coluna: $8 = 6 + 2$; $14 = 2x6 + 2$...

Não precisamos ver todas as posições. Pois, tendo como base a tabela "1", a posição de cada número é indicada pelo resto da divisão de qualquer número natural dado (maior que 6 e menor ou igual a 102) por 6.

Desta feita, 83 dividido por 6 tem quociente 13 resto 5 (isto é, $6 \times 13 + 5 = 78 + 5 = 83$). Logo, o 83 está na 3ª linha e 1ª coluna.

Comentário: *Só três discentes fizeram esta questão (dos nove que tentaram). Dois seguindo a ideia aqui apresentada e um por "construção" – fez todos os números!*

Prova 2012 – 12ª Questão (adaptação: *enunciado, excluindo tabela contemplando descrição*)

Os 1320 candidatos de um concurso foram distribuídos em salas com 30 candidatos cada uma. Essa distribuição foi feita seguindo a ordem crescente dos números de inscrição dos candidatos.

- Sala 01 – candidatos de inscrição 0001 a 0030;
- Sala 02 – candidatos de inscrição 0031 a 0060;
- Sala 03 – candidatos de inscrição 0061 a 0090.

Em qual sala está Jorge se seu número de inscrição foi 1023?

SOLUÇÃO

Percebemos que vamos dividir 1023 por 30. Motivo: quantidade de pessoas por sala. A sala onde se localiza Jorge é obtida adicionando 1 ao quociente.

Não está clara a ideia? Tentativas e erros:

- Inscrição 27 está na sala 1;
- Inscrição 52 está na sala 2, pois 52 = **1** x 30 + 22
- 78 está na sala 3, pois 78 = **2** x 30 + 18

Assim, realizando a divisão de 1023 por 32, temos 1023 = **34** x 30 + 3. Logo: sala 35.

Comentários: *discentes não apresentaram dificuldades em resolver a questão.*

2.5 O jogo dos quatro-quatro...

Podemos escrever de 0 a 9 usando quatro números 4 e os sinais:

- Da adição: +
- Da subtração: -
- Da multiplicação: *
- Da divisão: / e
- Parênteses: ( ).

Por exemplo,

$0 = 4 + 4 - 4 - 4$ ou $(4 - 4)/(4 + 4)$ ou também $(4 - 4)*4/4$.

Perceba que a mais de uma maneira de escrever um número inteiro dado (entre zero e nove, incluindo extremos).

A importância deste jogo está no uso coerente dos parênteses e das operações. Por exemplo, $4 + 4/4$ não é o mesmo que $(4 + 4)/4$.

No primeiro caso, inicialmente calculamos a divisão de 4 por 4 e o resultado é acrescentado de 4, perceba uso dos parênteses $(4 + 4/4 = 4 + 1 = 5)$.

No segundo caso, resolvemos primeiro os parênteses, $4 + 4 = 8$. O resultado é dividido por 4. Neste caso, a resposta é dois.

Antes de olhar *uma* resposta dada, quebre um pouco a cabeça...

- $1 = (4 + 4)/(4 + 4)$
- $2 = 4*4/(4 + 4)$
- $3 = (4 + 4 + 4)/4$
- $4 = 4 + (4 - 4)/4$
- $5 = (4*4 + 4)/4$
- $6 = (4 + 4)/4 + 4$
- $7 = 4 + 4 - 4/4$
- $8 = 4*4/4 + 4$
- $9 = 4 + 4 + 4/4$

Caríssimo leitor e prezada leitora, vocês podem fornecer de outra maneira os valores indicados?

2.6 Trabalhando com Papéis

Com auxílio de papéis queremos argumentar...

- $a/b + c/d = (ad + bc)/cd$;
- $a^2 + b^2 = c^2$.

Material necessário:

- 02 folhas de papel A4 ou ofício, limpo ou rabiscado.
- 01 régua e
- 01 lápis ou 01 caneta.

Faremos uso de uma linguagem mais popular. Pegando uma folha de papel, que tem o formato de um retângulo, vamos transformá-la em um quadrado.

Vamos seguir as seguintes instruções:

a) Sejam A, B , C e D os quatro vértices, sendo AB e CD os lados menores e BC e AD os lados maiores.
b) Pegar o vértice D e levar para o lado BC de modo que o lado DC fique sobre o lado BC.
c) Seja E em BC tal que CE = CD.
d) Pegar o vértice C e levar para o lado AD de modo que o lado DC fique sobre o lado AD.
e) Seja F em AD tal que DF = CD.
f) Com a régua alinhada passando pelos pontos E e F, cortar o papel.
g) FECD é um quadrado (por quê?).

Agora, vamos pegar o retângulo ABEF e vamos dividi-lo ao meio em relação ao lado BE.

Repare que os dois retângulos são idênticos.

<u>a/b + c/d = (ad + bc)/bd:</u>

Vamos tentar assimilar tal resultado via exemplos:½ + 1/3.

a) Pegar a primeira tira e dobrá-la ao meio (em relação ao maior lado).
b) Pegar a outra tira e dobrá-la em três partes iguais (em relação ao maior lado).
c) Note que as tiras estão de tamanhos diferentes.
d) Abrindo a primeira tira, vamos hachurear[6] uma das duas partes para caracterizar 1 de 2, isto é, identificar ½.
e) Abrindo a outra tira, vamos hachurear uma das três partes para caracterizar 1 de 3, isto é, identificar 1/3.
f) Voltar ambas as tiras para as dobras iniciais, isto é dobrar a primeira ao meio e a segunda em três partes iguais.
g) gPara que elas voltem a ficar do mesmo tamanho, aquela que foi dobrada ao meio será dobrada em três partes iguais e a que foi dobrada em três partes iguais será dobrada ao meio (sempre em relação ao maior lado).
h) Note que estão do mesmo tamanho. Abrindo ambas percebemos que em cada uma existem 6 dobras e que:
i) Onde tínhamos ½ agora temos 3 de 6, 3/6;

6 No caso de alunos cegos, podem usar fitas adesivas ou indicar com pontos em Braille.

j) Onde tínhamos 1/3 agora temos 2 de 6, 2/6.
k) Colocando as tiras de costas uma para a outra reparamos que, em um lado temos 3 e no outro temos 2, assim, temos 5 retângulos marcados de 6. Conclusão: ½ + 1/3 = 5/6.

Exemplo 2: ¾ + 1/5.
Pegar duas tiras idênticas e:
a) Pegar a primeira tira e dobrá-la em quatro partes iguais (em relação ao maior lado).
b) Pegar a outra tira e dobrá-la em cinco partes iguais (em relação ao maior lado).
c) Note que as tiras estão de tamanhos diferentes.
d) Abrindo a primeira tira, vamos hachurar três das quatro partes para caracterizar 3 de 4, isto é, identificar 3/4.
e) Abrindo a outra tira, vamos hachurar uma das cinco partes para caracterizar 1 de 5, isto é, identificar1/5.
f) Voltar ambas as tiras para as dobras iniciais, isto é dobrar a primeira quatro partes e a segunda em cinco partes iguais.
g) Para que elas voltem a ficar do mesmo tamanho, aquela que foi dobrada em quatro partes será dobrada em cinco partes iguais e a que foi dobrada em cincos partes iguais será dobrada em quatro partes iguais (sempre em relação ao maior lado).
h) Note que estão do mesmo tamanho. Abrindo ambas percebemos que em cada uma existem 20 dobras e que:
i) Onde tínhamos 3/4 agora temos 15 de 20, 15/20;
j) Onde tínhamos 1/5 agora temos 4 de 20, 4/20.
k) Colocando as tiras de costas uma para a outra reparamos que, em um lado temos 15 e no outro temos 4, assim, temos 19 retângulos marcados de 20. Conclusão: ¾ + 1/5 = 19/20.

Quais conclusões podem ser tiradas de tais procedimentos? Coincidem ou não com a soma de frações? (Deixar que os alunos cheguem com suas respectivas conclusões!)[7]

$\underline{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Com o auxílio de papel no formato de um quadrado, medir três dedos (ou dois) de cima para baixo (ou de baixo para cima, que é a

7 Dobrar é o mesmo que multiplicar.

mesma coisa!) E mesma medida da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda).

Marcando estas medidas e cortando o papel ficamos com quatro pedaços de papel: um pequeno quadrado, um quadrado grande e dois retângulos idênticos.

Se considerarmos a como a medida dos dedos e b como a medida que sobrou, reparamos que o quadrado, antes de ser cortado tem lados de medida a + b e a área, a qual é o produto da base pela altura (não custa lembrar!), é $(a + b)^2$.

Ora, como ela é a junção dos quatro pedaços de áreas:

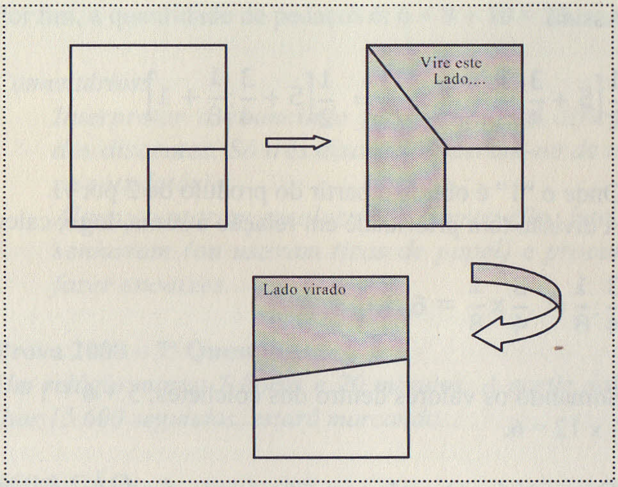
- Quadrado pequeno de lado a: área a^2;
- Quadrado grande de lado b: área b^2 e
- Retângulos de lados a e b: área ab, daí, 2ab (pois são dois).

Assim, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Procedimentos para justificar resultado de $a^2 - b^2$.

Façamos a leitura seguinte: quadrado de lado a menos quadrado de lado b (diferença entre os quadrados de a e de b). Desenhe um quadrado de lado a. Dentro deste, desenhe um quadrado de lado b (é claro que a > b). Recorte o quadrado de lado b. temos algo parecido com um "L". Dobre e recorte, conforme indicado na segunda figura. Vire uma delas e faça a junção no lado recortado.

Temos, então, um retângulo. Um dos lados tem medida a – b. O outro, por ser uma junção e juntar é igual a somar, tem medida a + b. Lembrando que há outras maneiras de se apresentar o resultado... Assim, a área do retângulo é dada por $(a - b)(a + b)$. Por conseguinte, temos $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.



Um exemplo numérico do uso da expressão... Calcular o produto de 58 por 62. Ora, 58 = 60 – 2 e 62 = 60 + 2, daí, 58 x 62 = (60 – 2)(60 + 2) = 60^2 - 2^2 = 3600 – 4 = 3596.

QUESTÕES CMF

Prova 2007 – 2ª Questão

Simplificar a expressão

$$\frac{1}{2}\left[5+\frac{3}{4}:\frac{1}{8}+2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]$$

SOLUÇÃO

Aqui se adequa o jogo dos 4-4. Isto é, seguir sequência: resolver inicialmente os parênteses:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1\times 2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\left[5+\frac{3}{4}:\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[5+\frac{3}{4}:\frac{1}{8}+1\right]$$

Onde o "1" é obtido a partir do produto de 2 por ½.
A divisão tem prioridade em relação à soma, logo, calculando

$$\frac{3}{4}:\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{1}=6$$

Somando os valores dentro dos colchetes: 5 + 6 + 1 = 12. Por fim, ½ x 12 = **6.**

***Comentário:** Questão sem dificuldade, desde que discente saiba operar com frações.*

Prova 2007 – 12ª Questão

João dispõe de três pedaços de barbante com medidas 36 cm, 54 cm e 60 cm. Ele deseja cortar esses pedaços de barbante em pedaços menores, todos com o mesmo tamanho. Qual a menor quantidade de pedaços de barbante que ele pode obter?

SOLUÇÃO

Interpretar a questão a partir das informações. Pedaços menores com mesmo tamanho, isto é, menores valores comuns aos números dados. Ou seja, divisores naturais de 36, 54 e 60.
Assim, uma ideia é descrever os divisores:

- Divisores 36 = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
- Divisores 54 = {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}
- Divisores 60 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

Deste modo, o maior divisor comum é: **6**.

Por conseguinte, a quantidade de pedaços é:

- Barbante com 36 cm → 36/6 = 6 pedaços.
- Barbante com 54 cm → 54/6 = 9 pedaços.
- Barbante com 60 cm → 60/6 = 10 pedaços.

Por fim, a quantidade de pedaços é: 6 + 9 + 10 = **25**.

Comentários:

- *Interpretar o enunciado foi a principal dificuldade dos discentes. Só três discentes fizeram-no de maneira satisfatória.*
- *Alguns tentaram resolver por construção. Isto é, desenhavam (ou usavam tiras de papel) e procuravam fazer encaixes.*

Prova 2008 – 7ª Questão

Um relógio marca 7 horas e 20 minutos. A partir daí, após trabalhar 15.600 segundos, estará marcando...

SOLUÇÃO

Para resolver este problema convém lembrar relação entre unidades de tempo:

- Uma hora equivale a 60 minutos.
- Um minuto equivale a 60 segundos.

Desta feita, 15.600 segundos correspondem a quantas horas e a quantos minutos?

Inicialmente, transformar em minutos. Por conseguinte, dividir 15.600 por 60. Assim, **260** minutos.

Todavia, da relação entre hora e minuto, dividir 260 por 60 (observe que não teremos uma divisão exata). O resto corresponde aos minutos. Efetuando a divisão, notamos que 260 = 4 x 60 + 20.

Ou seja, 4 horas e 20 minutos. Por fim, acrescentando este tempo às horas marcadas, temos: **11 horas e 40 minutos.**

Comentários: *discentes conseguiram resolver esta questão. A interpretação foi satisfatória.*

Prova 2009 – 9ª Questão

Ana pensou em um número, somou 2 e multiplicou o resultado por 5. Se o total encontrado foi de 30, qual número pensado por Ana?

SOLUÇÃO

Temos duas linhas de raciocínio. A primeira é pensar "ao contrário". Ou seja, quando vestimos uma farda, por exemplo, inicialmente vestimos a roupa de baixo (cueca ou calcinha) para depois vestir uma calça.

Qual é o ato contrário? Primeiro tirar a calça e, por fim, a roupa de baixo. Desta feita, o segundo ato foi multiplicar por 5 para obter 30. Assim, $30/5 = 6$.

Inicialmente somou 2. Portanto, $6 - 2 = 4$. Logo o número pensado foi **4**.

A segunda linha de raciocínio é imaginar Δ como o número procurado. Assim:

- Somar 2: $\Delta + 2$;
- Multiplicar por 5: $5 \times (\Delta + 2)$;
- Resultado 30: $5 \times (\Delta + 2) = 30$.
- Deste modo: $(\Delta + 2) = 30/5 = 6 \therefore \Delta = 6 - 2 = 4$

Comentários: *a segunda solução foi a mais utilizada. Todavia, houve quem errasse ao fazer, na multiplicação,* $5 \times \Delta + 2$. *Argumentavam que problema estava errado, pois 28 não é divisível por 5 (lembrar: números naturais!). Dois discentes fizeram a primeira estratégia.*

Prova 2009 – 19ª Questão

Um determinado remédio deve ser administrado (dado) três vezes ao dia, em doses de 5 ml cada vez, durante 20 dias. Se cada frasco contém 100 cm^3 de remédio, quantos frascos são necessários?

SOLUÇÃO

Convém observar a relação: $1\ cm^3 = 1\ ml$.

O remédio é dado três vezes ao dia. Por conseguinte, diariamente, são consumidos 15 ml. Sendo 20 a quantidade de dias, o total de ml que devem ser consumidos é: $20 \times 15 = 300$ ml.

Dado que cada frasco tem 100 ml, o total de frascos é $300/100 = 3$.

Comentários:

- A principal dificuldade foi lembrar a relação entre ml e cm^3. Como consequência, houve que multiplicasse o resultado final por 1.000.
- Dois desconsideraram as unidades e realizaram a conta seguinte: 100/(5 + 20) = 100/25 = 4.
- Dois fizeram completamente certa a questão.

Prova 2010 – 4ª Questão

O Sr. Francisco adquiriu um sítio de 120.000 m² de área e reservou 1/5 dessa área para a construção de sua casa e jardim. No restante da área do sítio, plantou milho, feijão e mandioca. A distribuição de terra para o plantio deu-se da seguinte maneira: 1/3 foi reservada para a plantação de milho e ½ para a plantação de feijão. Qual área (em m²) foi destinada à plantação de mandioca?

SOLUÇÃO

Um erro frequentemente observado foi somar as frações envolvidas:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{6+10+15}{30}=\frac{31}{30}$$

Daí, usaram 1/30 para o cálculo. Isto é: 120.000 x 1/30 = 4.000 m². Por qual motivo o raciocínio está errado? Inicialmente, temos uma fração imprópria. Em seguida, pelo próprio enunciado: "no restante"...

Assim, restante indica 4/5 de 120.000 m² = 96.000 m². Como a resposta é solicitada em m², podemos obtê-la da seguinte maneira:

- 1/3 de 96.000 m² = 32.000 m² (para milho);
- ½ de 96.000 m² = 48.000 m² (para feijão).

Já tem em uso 80.000 m². Logo, ainda há **16.000** metros quadrados para plantação de mandioca.

Comentários:

- Principal dificuldade apresentada por discentes foi a interpretação do enunciado.

- Alguns interpretaram as frações (1/3 e ½) em termos de 120.000 e não de 96.000.

Prova 2010 – 5ª Questão

Dona Salete comprou lâmpadas decorativas para o Natal. Ao ligar sua árvore de Natal observou que a lâmpada azul piscava de 8 em 8 segundos, enquanto que a lâmpada vermelha piscava de 10 em 10 segundos. Sabendo-se que elas piscaram juntas às 18 horas, 00 minuto e 00 segundo, determine quantas vezes elas piscaram no mesmo momento, no período das 17 horas, 59 minutos e 50 segundos às 21 horas, 00 minuto e 10 segundos, inclusive, dessa mesma noite. Suponha que tudo ocorreu dentro da normalidade e, portanto, não houve interrupção, queda ou pico de energia e nem a queima das lâmpadas.

SOLUÇÃO

Estratégias para este problema:

- Determinar intervalo de tempo em segundos, pois a variação entre as piscadas está em segundos.
- Interpretar o significado de piscarem juntas e, por conseguinte, resolver o problema.

Como piscaram juntas às 18 horas, 00 minuto e 00 segundo, então, em segundos, a variação do tempo até 21 horas, 00 minuto e 10 segundos é: 3 horas, 00 minuto e 10 segundos.

Já que uma hora corresponde a 60 minutos, as três horas correspondem a 180 minutos. Como cada minuto vale 60 segundos, temos, por conseguinte, 180 x 60 + 10 = 10.810 segundos.

Piscar juntos significa analisar os múltiplos comuns entre 8 e 10. Lembrando que:

- Múltiplos naturais de 8 = {0, 8, 16, 24, ...}
- Múltiplos naturais de 10 = {0, 10, 20, 30, ...}
- Múltiplos naturais comuns entre 8 e 10 = {0, 40, 80, 120, ...}

Desta feita, quantos múltiplos comuns de 8 e 10 estão de 0 e 10.810?

Dividindo 10.810 por 40, segue-se que 10.810 = 40 x **270** + 10.

Logo, piscaram juntas, no intervalo dado, **271** vezes.

Comentários:

- Discentes não apresentaram dificuldades na compreensão do problema. Sabiam que deveriam trabalhar com múltiplos comuns de 8 e de 10.
- Todavia, a maioria argumentou que a resposta era 270. Esquecendo-se que há a piscada inicial.

Prova 2010 – 9ª Questão

Determinado elevador tem capacidade para transportar 12 adultos ou então 18 crianças (desacompanhadas). Em um determinado dia, este elevador parou em um andar com 8 adultos em seu interior. Sabendo-se que, no andar, várias crianças o aguardavam para descer e que nenhum dos adultos saltou no referido andar, o número máximo de crianças que ainda podem entrar no elevador é...

SOLUÇÃO

Temos um problema que envolve proporcionalidade. 12 adultos correspondem a 18 crianças. Por conseguinte, 4 adultos (quantidade de adultos que faltam para lotar elevador) corresponde a quantidade de crianças.

Sendo 4 a terça parte de 12, segue-se que 6 é a terça parte de 18. Logo, ainda podem entrar 6 crianças.

Comentários:

- *Principal dificuldade foi realizar a proporção corretamente. Ou seja, a maioria dos discentes usou a proporção correspondente a 8 adultos, ou seja, 12 crianças.*
- *Exceto um, que argumentou conforme raciocínio descrito na solução, demais que acertaram usaram a relação matemática:*

$$\frac{12}{18} = \frac{4}{\Delta} \therefore \Delta = 12$$

Sendo 18 o total de crianças, a resposta é 18 – 12 = 6.

Prova 2010 – 13ª Questão (ada*ptação: leitura detalhada para melhor interpretação)*

Qual o valor da expressão abaixo?

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}+\frac{4}{8}$$

SOLUÇÃO

Iniciar da "última" fração. Com efeito, determinação de denominador. Em seguida repetir procedimento.

Assim,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}+\frac{5}{8}$$

Divisão de fração: 1/(3/2) = 1 x 2/3 = 2/3

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}+\frac{5}{8}$$

Calculando 1 + 2/3,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{3}}}+\frac{5}{8}$$

Dividindo 1 por 5/3,

$$\frac{1}{1+\frac{3}{5}}+\frac{5}{8}$$

Calculando 1 + 3/5,

$$\frac{\frac{1}{\frac{8}{5}}}{}+\frac{5}{8}$$

Dividindo 1 por 8/5,

$$\frac{5}{8}+\frac{5}{8}$$

Por fim, somando,

$$\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{10}{8}=1{,}25$$

Comentário: *a principal dificuldade da questão é sua escrita em Braille, pois fica muito extensa. Por conseguinte, a adaptação é leitura detalhada. Discentes a resolveram sem dificuldades nas manipulações envolvendo frações.*

Prova 2011 – 9ª Questão

Augusto comprou um álbum de figurinhas de jogadores que participaram de um torneio. O valor do álbum, sem nenhuma figurinha, foi R$ 5,00. O álbum tinha 600 figurinhas, sendo que 2/3 delas ele adquiriu gastando R$ 120,00. Como estava ficando difícil completar o álbum, ele resolveu solicitar as figurinhas restantes diretamente da editora que o publicou. A editora enviou pelos Correios todas as figurinhas solicitadas sem nenhuma repetição. Elas foram enviadas em pacotes com cinco unidades e, por cada pacote, foi cobrado R$ 1,75. Desse modo, quanto Augusto gastou desde a compra do álbum até completá-lo?

SOLUÇÃO

Quando o enunciado é muito longo, é interessante subdividir a solução, a partir das informações:

- Inicialmente: já gastou 5 reais. Logo tal valor deve ser acrescido.
- Já adquiriu 2/3 das 600 figurinhas. Ou seja, já tem 600 x 2/3 = 400 figurinhas. Pelas 400 figurinhas pagou 120. Juntando com álbum, já gastou 125 reais.
- Faltam 600 – 400 = 200 figurinhas. Serão mandadas pelos Correios em embalagens com cinco unidades. Logo serão 200/5 = 40 pacotes.
- Cada pacote custa R$ 1, 75. Logo, pelos 40 pacotes, 1,75 x 40 = 70 reais.
- Por fim: 70 + 125 = **195** reais.

Comentário: *principal dificuldade da questão está no tamanho de seu enunciado. Todos discentes lograram êxito, embora tenham feito com um tempo médio de seis minutos.*

Prova 2011 – 11ª Questão

Na escola que Alfredo estuda, o aluno tem que alcançar nota final maior ou igual a 6,0 para ser aprovado sem recuperação final. Essa nota final é a média aritmética das notas dos quatro bimestres. A média aritmética das notas de Alfredo dos três primeiros bimestre é 5,8. Para ser aprovado, sem a recuperação final, a nota de Alfredo no 4ª. Bimestre deve ser maior ou igual a...

SOLUÇÃO

Um erro frequente nessa questão foi o cálculo2 x 6 – 5,8 = 12 – 5,8 = 6,2. Por qual motivo? Sendo 6 a média de aprovação e tendo duas notas – a média e a prova do 4°. Bimestre – segue-se que discentes multiplicaram a média por dois e subtraíram da nota que Alfredo tinha.

Os poucos que a acertaram seguiram a seguinte ideia:

$$media = \frac{1^\circ Bimestre + 2^\circ Bimestre + 3^\circ Bimestre + 4^\circ Bimestre}{4}$$

Ou seja, nota 4º.bimestre = 4 x 6 – 3 x 5,8 – isto é, média 6 em quatro bimestres, implica 4 x 6, média 5,8 em três bimestres, implica 3 x 5,8.

Enfim, 24,0 – 17,4 = **6,6.**

Comentário: *principal dificuldade da questão está na interpretação de seu enunciado. Só dois discentes conseguiram resolver satisfatoriamente.*

Prova 2011 – 18ª Questão

No jardim da casa do professor Romualdo, uma torneira com defeito deixa pingar 40 gotas de água por minuto. O professor Bernardo dispôs-se a calcular a quantidade de água desperdiçada pela torneira em exatos cinco dias. Sabendo que cada gota de água equivale a 0,05 mililitros, qual a quantidade de água desperdiçada em litros durante os cinco dias?

SOLUÇÃO

Uma curiosidade natural das crianças com deficiência visual é saber como determinar o volume de uma gota. Uma estratégia foi contar a quantidade de gotas que caíram em um copo milimetrado, em Braille. Daí, bastou dividir o volume estabelecido pela quantidade de gotas. Cálculo foi repetido duas vezes para melhor exatidão.

Em relação ao problema, inicialmente determinar a quantidade de gotas em um dia. Como um dia tem 24 horas, e uma hora tem 60 minutos, segue-se que em um dia caem 24 x 60 x 40 =57.600 gotas.

Assim, em 5 dias caem 57.600 x 5 = 28.800 gotas. Dado que cada gota tem 0,05 ml, em ml, são gatos: 28.800 x 0,05 = 14.400 ml. Ou seja, **14,4** litros.

Comentário: *principal dificuldade da questão está no tamanho de seu enunciado. (cerca de 12 linhas em Braille). Todos discentes conseguiram êxito.*

Prova 2012 – 2ª Questão

Um grupo de amigos dispunha inicialmente de R$ 18,00 para comprar o material a ser utilizado em um trabalho escolar. No entanto, para comprar todo o material, eles precisavam de R$ 42,00. Eles dividiram igualmente a quantia que faltava, concluindo que cada um precisava dar mais R$ 6,00. Qual a quantidade de amigos do grupo?

SOLUÇÃO

Um erro observado foi a divisão de 42 por 6, totalizando 7 (que era uma das opções!). Todavia, desconsideraram os 18 reais bem como a palavra "faltava". Ou seja, eles tinham 18 reais e precisavam de 42 – 18 = 24.

Deste modo, 24/6 = 4.

Comentário: *a não leitura atenta do enunciado implicou no erro indicado. Em matemática, todas as informações dadas devem ser utilizadas.*

Prova 2012 – 14ª Questão

Um jardineiro, durante quatro dias, irá plantar grama em um jardim. Ele pretende plantar a grama da seguinte maneira: metade da área do jardim no primeiro dia. ¼ da área no segundo dia. 1/8 da área no terceiro dia e 1/16 da área no quarto dia. Ao final dos quatro dias, qual fração do jardim corresponde a área plantada com grama?

SOLUÇÃO

Problema sem dificuldades. Soma direta de frações,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{8+4+2+1}{16}=\frac{15}{16}$$

Comentários: um discente errou porque entendeu que o enunciado queria a área não plantada. Não obstante, demais acertaram.

Obs.: Lembrando que questões eram apresentadas após uso de material concreto. Duas questões eram resolvidas por encontro. A questão que apresentasse mais dificuldade era novamente abordada no encontro seguinte. Encontros semanais: dois dias com 90 minutos cada um.

Os três discentes que apresentaram desempenho superior a 75%, fizeram três questões da seleção de 2012 do nível do 1° ano do Ensino Médio. Todas elas foram realizadas no mesmo dia, após explicar produtos notáveis e relações métricas em um paralelepípedo retângulo.

2ª. QUESTÃO

A diferença entre os quadrados de dois números ímpares consecutivos é sempre divisível por...

SOLUÇÃO

Números ímpares possuem a "característica" $2n + 1$, com os naturais sendo $\{0, 1, 2, ...\}$. Logo, o próximo ímpar é $2n + 3$. Com efeito, se $n = 0$, temos 1 e 3. Sendo $n = 12$, temos 25 e 27.

Assim, a diferença entre os quadrados é:

$(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2$.

Desenvolvendo:

$[(2n)^2 + 2.(2n).3 + 3^2] - [(2n)^2 + 2.(2n).1 + 1^2]$

Organizando:

$4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1 = 8n + 8 = 8(n + 1)$

O qual é múltiplo de 8.

Comentários:

- *A primeira dificuldade apresentada por um dos discentes foi conceber os ímpares consecutivos de maneira algébrica. Com efeito, ele forneceu três pares de números ímpares consecutivos, desenvolveu a diferença entre os quadrados e concluiu que deve ser múltiplo de 8 (todavia, exemplo não é demonstração... serve de norte!)*
- *Outro entendeu os números $2n - 1$e $2n + 1$ – considerou naturais iniciando de 1 – todavia, errou nas manipulações:* $(2n - 1)^2 - (2n + 1)^2 = 2n^2 - 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 1 = 8n$ *(omitiu o sinal "-").*
- *Só um resolveu de maneira coerente. Iniciou com exemplos numéricos para, em seguida, usar notação algébrica.*

11ª. QUESTÃO

Área de um retângulo é 48 m². Sua diagonal mede 10 m. Qual seu perímetro?

SOLUÇÃO

Pelos conhecimentos prévios dos discentes, sejam x e y as medidas do retângulo. Como queremos o perímetro, vamos determinar $2x + 2y = 2(x + y)$.

Área = 48 → $xy = 48$

Diagonal = 10 → $(\text{diagonal})^2 = 10^2$ → $x^2 + y^2 = 100$

Organizando o sistema,

$$\begin{cases} xy = 48 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

Todos isolaram $y = 48/x$ e substituíram em $x^2 + y^2 = 100$. Não conseguiram resolver a equação biquadrada resultante.

Todavia, questões de concursos procuram otimizar o tempo. Ou seja, realizar alguma manipulação para lograr êxito mais rapidamente.

No caso, queremos $2(x + y)$. sabemos, dos produtos notáveis, que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Desta feita, podemos rever o sistema...

$$\begin{cases} 2xy = 96 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

Somando membro a membro: $x^2 + 2xy + y^2 = 196 \rightarrow (x + y)^2 = 196$.: (sendo medidas, não podem ser negativos!). Logox + y = 14 e 2(x + y) = 28 metros.

14ª. QUESTÃO

As dimensões de um paralelepípedo retângulo são, em centímetros, 2, x + 2 e x – 2. Se seu volume é 64 cm³, qual a soma de todas as áreas de todas as faces?

SOLUÇÃO

Volume = 2(x – 2)(x + 2) = 64
Desenvolvendo, $x^2 - 4 = 32$.: $x^2 = 36$.: x = 6.
Logo, as medidas são: 2, 4 e 8.
Áreas:

- Duas faces de 2 cm x 4 cm → 2 x (2 cm x 4 cm) = 16 cm²;
- Duas faces de 2 cm x 8 cm → 2 x (2 cm x 8 cm) = 32 cm²;
- Duas faces de 8 cm x 4 cm → 2 x (8 cm x 4 cm) = 64 cm².

Logo, área total = 112 cm².

Comentários: *todos discentes resolveram conforme indicado acima.*

REFERÊNCIAS

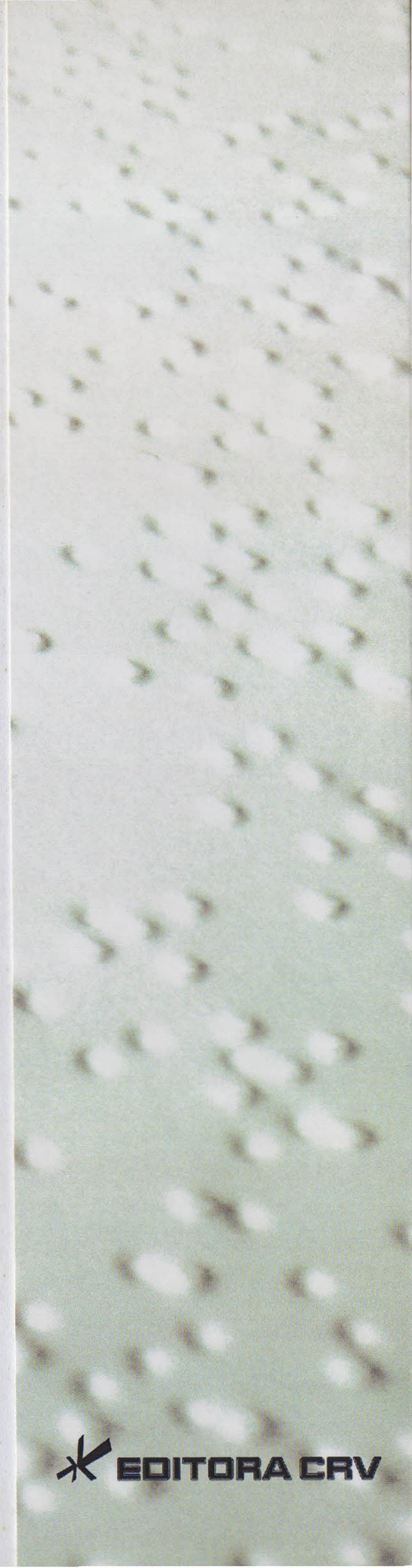
BICUDO, M. A. V. *Educação Matemática*. São Paulo: Moraes, 1999.

BRANDÃO, J. GEUmetria = EU + Geometria. In *Revista Benjamim Constant*. Rio de Janeiro. 28 ed. Agosto, 2004. Disponível em: <http://www.ibc.gov.br/?catid=4&itemid=70>. Acessado em 24/01/2014.

_____ *Matemática e deficiência visual*. Fortaleza: EdUFC, 2010 (tese de doutorado)

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SOBRE O LIVRO
Tiragem: 1000
Formato: 14 x 21 cm
Mancha: 10 X 17 cm
Tipologia: Times New Roman 10,5/12/16/18
Arial 7,5/8/9
Papel: Pólen 80 g (miolo)
Royal Supremo 250 g (capa)


EDITORA CRV

ANTES DE P E B ESCREVEMOS...

INTRODUÇÃO AO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO ADAPTADO

Há pessoas que afirmam a existência de uma regra para escrever M antes de P e B. Se essa regra é verdadeira, segue-se que a frase 'Roberta não a aprova' deveria ser escrita 'RoMberta não a aMprova'.

E por qual motivo a 'regra' foi popularizada? Uma rápida inspeção fonética conduz ao seguinte fato: P, B e M são as únicas bilabiais.

Desta feita, o objetivo principal desta obra, que é um recorte da tese Matemática e deficiência visual, com ampliação de estudo de casos com discentes cegos ou surdocegos resolvendo e comentando questões de seleção do Colégio Militar de Fortaleza (CMF), é apresentar algumas estratégias utilizadas para a compreensão de conceitos matemáticos e geométricos com respectivas aplicações.

ISBN 978-85-8042-951-0

9788580429510

EDITORA CRV