



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

SAULO GUILLERMO D'EDUARDO ARARIPE SOBREIRA MUNIZ

MODELAGEM E CONTROLE LPV DE UM HELICÓPTERO COM 6DOF

FORTALEZA

2019

SAULO GUILLERMO D'EDUARD ARARIPE SOBREIRA MUNIZ

MODELAGEM E CONTROLE LPV DE UM HELICÓPTERO COM 6DOF

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia de Controle e Automação

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira

Coorientador: Prof. Dr. Bismark Claire Torrico

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M936m Muniz, Saulo Guillermo D'Eduard Araripe Sobreira.
Modelagem e Controle LVP de um Helicóptero com 6DOF / Saulo Guillermo D'Eduard Araripe
Sobreira Muniz. – 2019.
125 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

Coorientação: Prof. Dr. Bismark Claire Torrico.

1. Asas Rotativas. 2. Estabilidade. 3. Modelo LPV. 4. Sistemas Adaptativos e de Aprendizagem. I.
Título.

CDD 621.3

SAULO GUILLERMO D'EDUARD ARARIPE SOBREIRA MUNIZ

MODELAGEM E CONTROLE LPV DE UM HELICÓPTERO COM 6DOF

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia de Controle e Automação

Aprovada em: 13 de Setembro de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Bismark Claire Torrico (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio da Silva Silveira
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Dedico este trabalho à minha esposa Gabrielle Arruda, à minha família e aos meus prezados professores. O reflexo do amor, paciência e conhecimento de vocês elucidaram o caminho até aqui.

“I could be bounded in a nutshell, and count myself a king of infinite space...”

(Hamlet - William Shakespeare)

RESUMO

Este trabalho visa atuar, com o auxílio de desigualdades matriciais, no controle de estabilidade para modelo de helicóptero com seis graus de liberdade. Deseja-se definir um ganho capaz de garantir a estabilidade do modelo e reduzir os distúrbios independente da condição na qual a aeronave esteja implicada. Um estudo é realizado em volta das condições de equilíbrio linearizadas para o modelo de Lynx ZD559, neste, a variável independente a ser controlada é a velocidade à frente da aeronave. Os ensaios obtidos de um controlador estacionário e um de variação linear objetivam elucidar a capacidade destes, e em especial a do último controlador, de atuar em todo o espectro de variação da velocidade ao apresentar uma dinâmica aceitável de transientes e rejeição de distúrbios. Os resultados apontam que em condições mais restritas de atuação, o controle linear de parâmetros variáveis foi o único capaz de estabilizar a planta nos limites estabelecidos, além de apresentar um transiente favorável em todo o espectro de velocidade quando comparado às demais técnicas de controle.

Palavras-chave: Asas Rotativas. Estabilidade. Modelo LPV. Sistemas Adaptativos e de Aprendizagem.

ABSTRACT

This work seeks to produce, with the aid of matrix inequalities, a stability control for a six degree of freedom nonlinear helicopter model. The objective is to define a gain capable of ensuring model stability and reducing disturbance regardless of the condition in which the aircraft is involved. A study is performed around the linearized equilibrium conditions for the Lynx ZD559 model, in which the independent controlled variable is the speed ahead of the aircraft. The tests obtained from a stationary controller and one with linear variation aim to elucidate their ability, and especially related to the last controller, to act on the full spectrum of velocity variation by presenting an acceptable transient dynamics and disturbance rejection. The results indicate that under more restricted operating conditions, the linear control of variable parameters was the only one capable of stabilizing the plant in the established limits, besides presenting a favorable transient across the speed spectrum when compared to the other control techniques.

Keywords: Rotorcraft. Stability. LPV Model. Adaptive and Learning Systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Principais componentes do helicóptero	13
Figura 2 – Escopo do Estudo	16
Figura 3 – Comandos do helicóptero	18
Figura 4 – Modelo 6DoF do helicóptero	20
Figura 5 – Respostas dinâmicas à perturbação	21
Figura 6 – Ângulos do helicóptero	26
Figura 7 – Eixos de rotação do helicóptero	28
Figura 8 – Orientações de voo à frente	32
Figura 9 – Orientações de voo em espiral	33
Figura 10 – Definindo as condições de equilíbrio	36
Figura 11 – Ganhos programados	41
Figura 12 – Comutação	42
Figura 13 – Interpolação	43
Figura 14 – Região Convexa	44
Figura 15 – Região de D-Estabilidade Vertical e Horizontal	47
Figura 16 – Região de D-Estabilidade Circular e Cônica	48
Figura 17 – Modelo do Sistema LPV	50
Figura 18 – Modelo do Sistema LPV com Realimentação de Estados	51
Figura 19 – Modelo do Sistema LPV com Realimentação de Estados	53
Figura 20 – Incógnitas, Parte 1	56
Figura 21 – Incógnitas, Parte 2	57
Figura 22 – Incógnitas, Parte 3	58
Figura 23 – Incógnitas, Parte 4	59
Figura 24 – Matriz A implementada em Projeto	59
Figura 25 – Matriz B implementada em Projeto	59
Figura 26 – Matriz A implementada em Projeto	60
Figura 27 – Matriz B implementada em Projeto	60
Figura 28 – Conjunto da Planta do Projeto	61
Figura 29 – Resposta ao impulso no ensaio.	63
Figura 30 – Controlador Inerte em 60 nós e Adaptativo LPV.	63
Figura 31 – Deslocamento instável em Controlador Inerte	64

Figura 32 – Rejeição de distúrbios.	65
Figura 33 – Deslocamento estável em Controlador LPV.	65
Figura 34 – Deslocamento estável em Controlador com Integrador	66
Figura 35 – Resposta ao degrau para sistema com integrador	67
Figura 36 – Resposta ao degrau de distúrbio para sistema com integrador	67
Figura 37 – Topologia do Projeto	68
Figura 38 – Entradas no Sistema sem Integrador	69
Figura 39 – Resposta em Malha Aberta ao Impulso	70
Figura 40 – Topologia do Projeto com Integrador	70
Figura 41 – Entradas no Sistema com Integrador	71
Figura 42 – Entrada e Resposta no Sistema sem Integrador Adaptativo	72
Figura 43 – Entrada e Resposta no Sistema sem Integrador Fixo à 60 nós	73
Figura 44 – Estados no Sistema sem Integrador	74
Figura 45 – Estados no Sistema com Integrador	74
Figura 46 – Entrada e Resposta no Sistema com Integrador Adaptativo	75
Figura 47 – Entrada e Resposta no Sistema com Integrador Fixo à 60 nós	76

LISTA DE SÍMBOLOS

<i>6DoF</i>	<i>Six Degrees of Freedom</i>
<i>AoA</i>	<i>Angle of Attack</i>
<i>CG</i>	Centro de Gravidade
<i>EOV</i>	Envelope Operacional de Vôo
<i>FBW</i>	<i>Fly-by-Wire</i>
<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequality</i>
<i>LPV</i>	<i>Linear Parameter-Varying</i>
<i>MIMO</i>	<i>Multiple Inputs and Multiple Outputs</i>
<i>SISO</i>	<i>Single Input and Single Output</i>
A, B, C, D	Matrizes do modelo da Planta no Espaço de Estado
A_{cl}, \dots, D_{cl}	Matrizes do modelo da Planta no Espaço de Estado em Malha Fechada
A_S, \dots, D_S	Matrizes do modelo da Planta no Espaço de Estado do Sistema Adotado
E, F	Matrizes do modelo de Distúrbio em Espaço de Estado
E_{cl}, F_{cl}	Matrizes do modelo de Distúrbio no Espaço de Estado em Malha Fechada
E_S, F_S	Matrizes do modelo de Distúrbio no Espaço de Estado do Sistema Adotado
β_e	Ângulo de escorregamento
γ_{fe}	Ângulo de trajetória de voo à frente
ψ, θ, ϕ	Ângulo de guinada, arfagem e rolagem
θ_0, θ_{0T}	Comando de Coletivo e Comando de Pedal
θ_{1c}, θ_{1s}	Comando de Cíclico Longitudinal e Cíclico Lateral
a_{pg}	Aceleração resultante em relação à aeronave
a_x, a_y, a_z	Componentes da aceleração
a_{xg}, a_{yg}, a_{zg}	Componentes da aceleração gravitacional
I_{xx}, \dots, I_{zz}	Momentos de Inércia na aeronave
i, j, k	Eixo de orientação com observador na aeronave

l_T	Distância do CG ao rotor de cauda
L, M, N	Momentos Aerodinâmicos Externos
L_e, M_e, N_e	Momentos Aerodinâmicos na Condição de Equilíbrio
Ma	Massa da Aeronave
p, q, r	Componentes de velocidade angular
P_e, Q_e, R_e	Ângulos na Condição de Equilíbrio
Q_R	Torque produzido pelo rotor principal
T_T	Empuxo produzido pelo rotor de cauda
v_{pg}	Vetor de velocidade em relação à aeronave
V_{fe}	Velocidade de vôo à frente
x, y, z	Componentes de velocidade linear
X, Y, Z	Forças Aerodinâmicas Externas
X_e, Y_e, Z_e	Forças Aerodinâmicas na Condição de Equilíbrio

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Motivação	15
1.2	Objetivos	16
1.3	Escopo do Estudo	16
1.4	Estrutura do Trabalho	17
2	MODELANDO A DINÂMICA DE VOO DO HELICÓPTERO	18
2.1	Controlando o helicóptero	19
2.2	Síntese do modelo de asas rotativas	19
2.2.1	<i>Condição de Equilíbrio</i>	21
2.2.2	<i>Condição de Estabilidade</i>	21
2.2.3	<i>Condição de Controle</i>	22
2.2.4	<i>Inferências redutivas</i>	22
2.3	Movimento inercial da aeronave	23
2.3.1	<i>Análise da dinâmica de voo</i>	24
2.3.2	<i>Coordenadas angulares da aeronave</i>	26
2.3.3	<i>Influência gravitacional</i>	28
2.3.4	<i>Linearização da dinâmica de voo</i>	29
2.4	Análise de Estabilidade para o Modelo 6DoF	34
2.5	Síntese	40
3	CONTROLE LINEAR DE PARÂMETROS VARIÁVEIS	41
3.1	Análise Convexa	44
3.2	Principais desigualdades matriciais	46
3.2.1	<i>Região de D-Estabilidade</i>	46
3.2.1.1	<i>Regiões Verticais e Horizontais</i>	47
3.2.1.2	<i>Regiões Circulares e Cônicas</i>	48
3.2.2	<i>Norma H_∞ e H_2</i>	49
3.3	Controle LPV	50
3.3.1	<i>Estabilização quadrática por realimentação de estados</i>	51
3.3.2	<i>Estabilização por erro de Estado Estacionário através de Controle com Integrador</i>	53

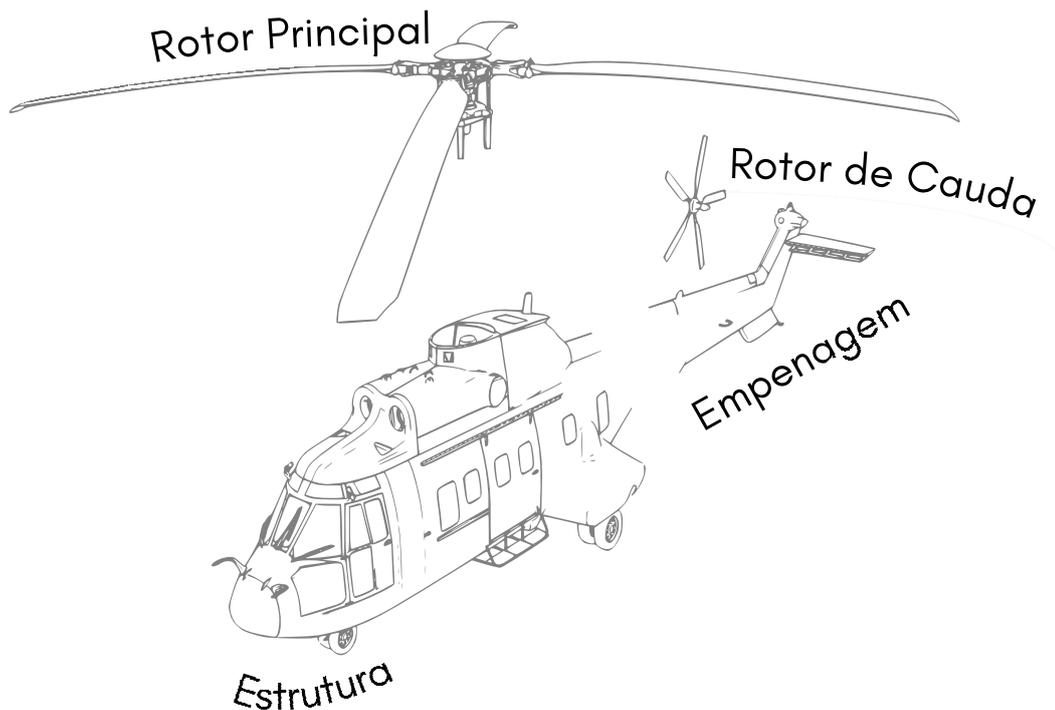
4	RESULTADOS	56
4.1	Compondo a planta do projeto	59
4.2	Ensaios	62
4.2.1	<i>Estudo de Estabilidade</i>	62
4.2.2	<i>Estudo de Rejeição ao Distúrbio</i>	64
4.2.3	<i>Estudo com Integrador</i>	66
4.3	Simulação da dinâmica do Controlador	68
4.3.1	<i>Resposta dinâmica LPV sem integrador</i>	72
4.3.2	<i>Resposta dinâmica LPV com integrador</i>	74
5	CONCLUSÃO	77
	REFERÊNCIAS	78
	APÊNDICES	80
	APÊNDICE A – Identificação do Modelo	80
	APÊNDICE B – Desenvolvimento do Controlador	100

1 INTRODUÇÃO

Uma aeronave de asas rotativas tradicional é um sistema mecânico normalmente considerado como sub-atuado, pois a quantidade de entradas independentes que controlam o processo de estabilização são menores que os graus de liberdade que o sistema possui. Consequentemente, o sistema resultante é: (1) particularmente instável e complexo, demandando atuação durante toda a operação; (2) controlado por comandos, em sua maioria, acoplados (variando em função da topologia de controle do helicóptero); (3) não linear e de elevada ordem.

Além disso, dentro das condições naturais de operação de um helicóptero, estes são tipicamente expostos à perturbações desestabilizadoras. Diferenças de pressão atmosférica provocam rajadas de vento estocásticas que, a depender do modo de voo (pairado, decolando, em voo de cruzeiro), requerem atuações essencialmente distintas dos controladores. Estes fatores mitigam a compreensão quanto à dinâmica de um helicóptero, um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas, do inglês *Multiple Inputs Multiple Outputs* (MIMO), que é variante no tempo, não linear e instável. Desta forma, destrinchar o problema em subsistemas para estudar as equações de movimento que o descrevem e minimizar à incertezas dos fenômenos permeiam a solução natural deste tipo de problema.

Figura 1 – Principais componentes do helicóptero



Para Johnson (2013) o comportamento do helicóptero é naturalmente dominado pelos rotores principais e de cauda, por isso um modelo matemático viável deve incorporar os importantes efeitos aerodinâmicos e estruturais, assim como outras influências dinâmicas oriundas destes subcomponentes, ou quaisquer outros elementos que por ventura influenciem de maneira relevante a resposta da aeronave aos comandos do piloto, ou aos distúrbios atmosféricos externos. Neste caso, o intuito principal do modelo deve ser o de reproduzir todas as nuances inerentes aos efeitos aerodinâmicos dentro do Envelope Operacional de Voo (EOV) da aeronave.

Yue e Postlethwaite (1990) mencionam como um helicóptero de controle não expandido (ou seja, um sistema em malha-aberta, com exceção da atuação do piloto) exibe reações incabíveis quando em voo pairado, pois as respostas ao coletivo, cíclico longitudinal, cíclico lateral e pedais são altamente acopladas e instáveis. Nestas condições, a carga de trabalho sobre o piloto é alta e atuar com precisão é difícil. Em Rasheed (2018) há a descrição de como é possível conceber um sistema de controle que seja capaz de reduzir significativamente a carga de trabalho do piloto em voo, o que permite que diferentes operações de resgate e busca sejam realizadas de forma eficaz e segura ao utilizar o helicóptero próximo aos limites do seu EOV, levando em consideração as demandas em manobras de decolagem vertical e pouso. A automação destes sistemas permite que o piloto se concentre nas atividades fim e melhore sua eficiência na execução destas, além de garantir uma segurança de voo superior. Onde esses benefícios nas qualidades de voo (*handling qualities* - é o nome dado ao conjunto total de características que tornam uma aeronave adequada, ou inadequada, para uma determinada tarefa de voo) se refletem na maioria dos helicópteros que implementam sistemas com tecnologia *Fly-by-Wire* (FBW).

Buscando estas vantagens, o modelo de controle para o sistema do helicóptero, mesmo o simplificado, deve ser robusto quanto às incertezas que o compõe e, logo, representa um desafio independente do método que seja implementado para o sistema de controle. Por esta razão, é habitual modelar o comportamento de um helicóptero como a combinação de subsistemas que interagem. Na Figura 1 destacam-se os principais elementos considerados: rotor principal, a fuselagem (ou estrutura), empenagem e rotor de cauda. Estes itens são analisados em função das forças e momentos resultantes, entretanto, outros elementos como a geratriz, o motor, os sistema de controle, também podem ser considerados em modelos mais complexos. De forma simplificada, o modelo a ser reproduzido (como visto na Figura 4) apresenta o diagrama de forças e momentos da aeronave referida a um sistema ortogonal com eixos alinhados ao corpo desta, estando estes fixados no Centro de Gravidade (CG), ou de massa.

Entretanto, Gerboni *et al.* (2014) menciona a dificuldade de implementar com precisão o modelo dos componentes embarcados no helicóptero sem ensaios em voo, o que acaba impactando na obtenção de parâmetros aerodinâmicos confiáveis, ou seja, os poucos modelos não-lineares de helicópteros desenvolvidos e testados em movimento não estão prontamente disponíveis ao público. Por isto, antes de imergir nos possíveis controladores capazes de atuar nesta planta tão complexa, será necessário expor objetivamente as reduções matemáticas inerentes às soluções de tais problemas, cuja solução habitual para esse tipo de problema é a linearização nas proximidades da condição de equilíbrio (em inglês *trim condition*). Esse método impõe algumas premissas que devem ser consideradas no modelo, estando estas expostas no Capítulo 2.

1.1 Motivação

Tendo em vista a dinâmica inerente ao modelo discutido no item anterior, opta-se por formular um controle linear de parâmetros variáveis, do inglês *Linear Parameter-Varying* (LPV). Esse tipo de modelo tende a representar sistemas lineares cujas formulações no espaço de estados dependem de parâmetros dinâmicos e alheios ao controle. Por isto, é comumente implementado em sistemas não-lineares que podem ser modelados como sistemas lineares parametrizados, tendo um, ou mais, parâmetros relacionando os estados da planta.

O intuito é proporcionar um sistema cujo controle seja adaptável, em função das condições de voo, e robusto o suficiente para atuar além das falhas inerentes ao modelo reduzido. Para Fergani *et al.* (2013) um controle LPV tende a apresentar ganhos significativos quando comparados aos controles invariantes ao permitir uma transição mais suave entre os pontos de operação. Isto pode refletir diretamente na qualidade de operação e manuseio da aeronave. Além disso, uma ampliação nas opções de controle, permite ao desenvolvedor do produto um acervo maior de soluções, ou seja, é possível que estes novos métodos possam, quando devidamente ampliados, permear envelopes operacionais e análises que ainda não são desenvolvidos junto à modelos linearizados. Por fim, um último fator notável é a redução do esforço de controle.

Em sistemas MIMO, como no caso do helicóptero e tendo em vista o alto nível de acoplamento, há inúmeras maneiras de passar do estado atual A , para o estado desejado B . Realizar essa tarefa com o menor custo possível é tarefa do controlador que poderá, através de uma redução nos esforços de controle, minimizar os desgastes da operação (como consumo, impacto físico no piloto, entre outros). Minimização dos esforços de controle são técnicas habitualmente implementadas em controladores LPV e tendem a apresentar resultados satisfatórios.

1.2 Objetivos

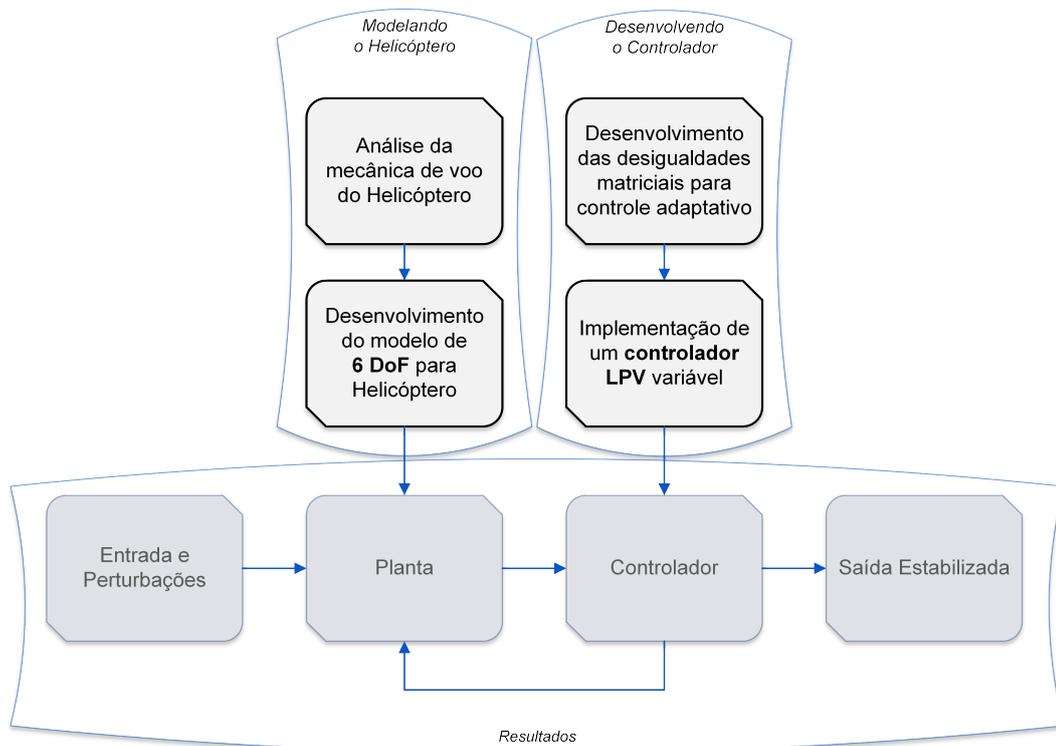
O objetivo central deste trabalho pode ser resumido em reproduzir um planta linearizada de um helicóptero que seja estabilizada por um controle LPV, entretanto outros objetivos complementares são igualmente importantes para o escopo deste trabalho:

1. Reproduzir os modelos matemáticos de estabilização do helicóptero e recriar as matrizes de espaço de estado em função da velocidade horizontal;
2. Desenvolver um controlador LPV estático e adaptável que estabilize o sistema por realimentação de estados;
3. Implementar o controlador junto à planta do helicóptero para estabilização e redução dos esforço de controle no sistema;
4. Avaliar ganhos em relação aos controladores não adaptáveis;

1.3 Escopo do Estudo

Com os objetivos do trabalho definidos, torna-se possível propor seu escopo indicando os procedimentos realizados e métodos implementados para que estes sejam obtidos.

Figura 2 – Escopo do Estudo



Fonte: o autor.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este capítulo, sendo o primeiro, buscou introduzir as demandas inerentes à estabilização de um helicóptero e sucintamente explorar a motivação para a criação de um controlador adaptável, assim como expor os objetivos, a estrutura e o escopo deste trabalho.

O segundo capítulo deste trabalho aborda as técnicas, modelos matemáticos e as premissas redutivas inerentes à modelagem linearizada em torno da condição de equilíbrio de um helicóptero. Pretende-se desenvolver simbolicamente os elementos necessários para definição da planta em espaço de estados e, ao fim, definir a variável externa que alimenta o controlador. Essa técnica impõe novas limitações à solução, que são abordadas ao longo do Capítulo 2 e assimiladas junto à planta - sendo este o resultado dos estudos deste capítulo.

O Capítulo 3 fará uma análise matemática sobre as desigualdades matriciais lineares, em inglês, *Linear Matrix Inequality* (LMI). Esse tipo de técnica é utilizada para definir o controlador, ao buscar estabelecer uma região convexa do problema com o intuito de otimizar os resultados no interior desta região. O capítulo aborda diferentes formas de controle da planta e deduz os modelos matemáticos que a definem, ao fim a topologia e estrutura do controlador são apreciados para a determinação de diferentes tipos de controlador - tendo estes como o produto das análises efetuadas neste capítulo.

O quarto capítulo deste trabalho angaria os resultados teóricos do Capítulo 2 e 3 com intenção, *a priori*, de reformular os modelos matemáticos para implementação computacional. Tendo o feito, o controlador LPV é comparado com o controlador a parâmetros fixos, sob condições diferenciadas, em simulações para explorar os possíveis resultados obtidos do sistema em malha fechada. Ao fim, uma análise entre os controladores é realizada e, junto a esta, sugestões para trabalhos futuros e assim como as limitações deste trabalho são apresentadas.

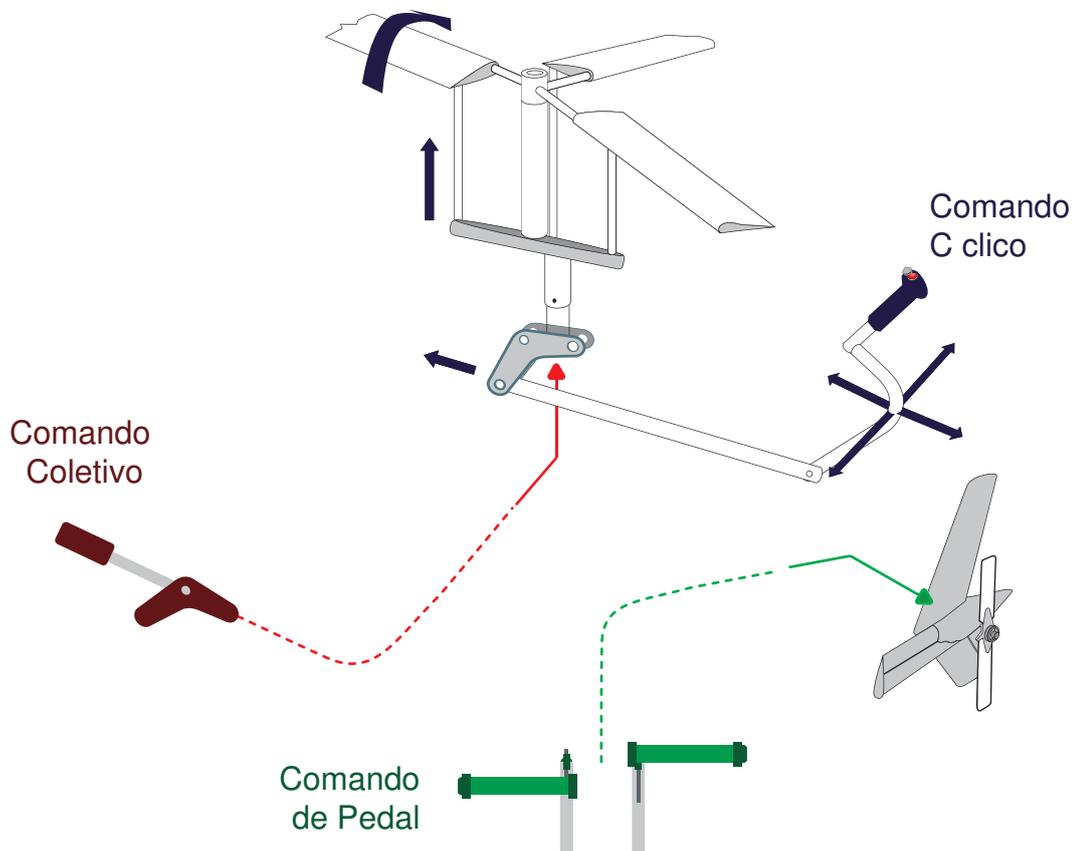
Por fim, no Capítulo 5, uma síntese dos resultados é apresentada com as conclusões mais relevantes. Em seguida, os objetivos apresentados no Capítulo 1 são verificados para sumarizar se foi possível a reprodução de uma planta linearizada de helicóptero estabilizada por um controlador LPV adaptativo.

2 MODELANDO A DINÂMICA DE VOO DO HELICÓPTERO

A despeito das técnicas de controle, o piloto deve atuar sobre as três dimensões e usar ambos os braços e ambas as pernas constantemente para manter o helicóptero estabilizado no ar. Pilotar um helicóptero exige um longo treinamento e habilidade, bem como atenção contínua durante todo o processo de voo. Coordenação, controle da intensidade, e percepção temporal são todos usados simultaneamente ao pilotar uma aeronave de asas rotativas.

Um helicóptero é uma aeronave que é sustentada e impulsionada por um ou mais rotores horizontais, cada rotor consistindo de duas ou mais pás. Este tipo de aeronave, como visto na Figura 3, deriva sua fonte de sustentação das pás do rotor que giram em torno do eixo de um mastro e por isso são classificados como aeronaves de asa rotativas, em contraposição às aeronaves de asas fixas. O sistema do rotor é a parte rotativa de um helicóptero que gera sustentação, onde a montagem tradicional é composta horizontalmente com um rotor principal, fornecendo sustentação verticalmente; e composta verticalmente por um rotor de cauda, para equilibrar o torque remanescente. Sendo esta a configuração a ser analisada neste trabalho.

Figura 3 – Comandos do helicóptero



Fonte: o autor.

2.1 Controlando o helicóptero

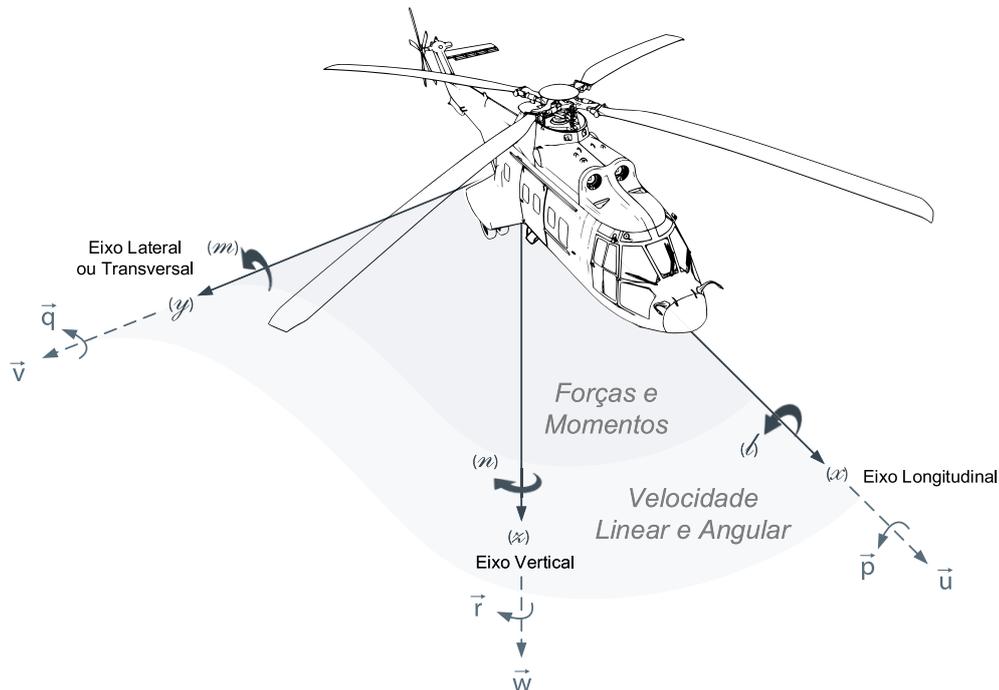
Um helicóptero tem quatro entradas de controle sob o comando do piloto para o voo: cíclico, coletivo, pedais e a manete de potência. O primeiro controle, o cíclico, é capaz variar o passo das pás do rotor ao longo do plano de rotação do rotor principal (isto é, cada revolução do rotor apresentará o passo de cada pá variando em função do cíclico) para desenvolver uma sustentação desigual. O resultado almejado envolve inclinar o disco do rotor em uma direção específica com o intuito de reorientar o helicóptero no sentido desejado. Neste caso, se o piloto empurrar o cíclico para a frente, o plano de rotação inclina junto com o disco do rotor, logo, a tração resultante é reorientada (podendo esta ser decomposta numa força de sustentação e uma força à frente) fazendo com que o rotor produza um impulso na mesma direção.

O controle de coletivo, muda o ângulo de inclinação de todas as pás do rotor principal coletivamente (ou seja, todas ao mesmo tempo) e independentemente de seus passos. Portanto, se uma entrada coletiva for feita, todas as lâminas mudam igualmente, aumentando ou diminuindo o total da sustentação e de impulso, e como resultado o helicóptero aumenta ou diminui sua altitude, ou sua velocidade em relação ao ar. Os pedais do helicóptero servem um propósito similar aos pedais da aeronave de asas fixas: orientar a seção dianteira da aeronave. Aplicação do pedal em um dado sentido muda o passo das pás do rotor de cauda, aumentando ou reduzindo o impulso produzido pelo rotor de cauda e, como este é responsável por equilibrar o torque remanescente, causa o nariz da aeronave a guinar na direção do pedal aplicado.

2.2 Síntese do modelo de asas rotativas

O estudo da mecânica de voo inclui fenômenos que, em sua maioria, envolvem exclusivamente modelos de baixa frequência. Por isto, os fenômenos analisados pela dinâmica de voo são habitualmente simplificados através de uma aproximação linear das equações de movimento que descrevem o helicóptero (PAVEL, 1996). Sendo assim, opta-se por desenvolver um modelo linear com seis graus de liberdade, do inglês *Six Degrees of Freedom* (6DoF), como base o projeto de controladores apresentados neste trabalho. Conforme se mostra na Figura 4, somente seis elementos são analisados: as três forças aerodinâmicas externas (X, Y, Z) e os três momentos aerodinâmicos externos (L, M, N), atuando sob os três eixos (x, y, z). Factualmente, o CG irá se mover durante as operações, mas supõe-se que o CG estará localizado na posição média para uma determinada condição de equilíbrio (ou condição de ajuste - *trim condition*).

Figura 4 – Modelo 6DoF do helicóptero



Fonte: o autor.

O modelo é mensurado a partir da influência dos subsistemas, conforme Figura 1. Como elucidado Gerboni *et al.* (2014), as saídas de cada subsistema são forças e torques que atuam diretamente na estrutura de referência, a partir da qual as acelerações lineares e rotacionais podem ser obtidas e, depois, os ângulos de Euler são calculados para definir a atitude do helicóptero.

Este modelo pressupõe que mudanças na atitude do rotor em relação à estrutura são pequenas comparadas às mudanças na atitude da estrutura. Logo, o modelo linear do helicóptero será resultado das equações não lineares que ditam os efeitos nos três eixos de direção e os três planos de rotação encontrados próximos à condição de ajuste. Por isto, o modelo considerará as forças e momentos aerodinâmicos do rotor através de contribuições da matriz 8x8 de derivada simplificada, o que ocorre em detrimento da contribuição dos efeitos dinâmicos do rotor. Outros efeitos relacionados à mecânica dos fluidos também são desconsiderados, pois são reflexo de fenômenos tridimensionais pontuais que não podem ser diretamente representados no modelo: ressonância solo, rolamento dinâmico, ressonância ar, anéis de vortex, entre outros.

Antes de apresentar o modelo 6DoF é necessário entender como os modelos matemáticos são produzidos e como a aerodinâmica da aeronave é compreendida. Segundo Seddon e Newman (2011), a mecânica do voo do helicóptero pode ser descrita em termos de três aspectos: equilíbrio, estabilidade e controle - em inglês *trim, stability and control*.

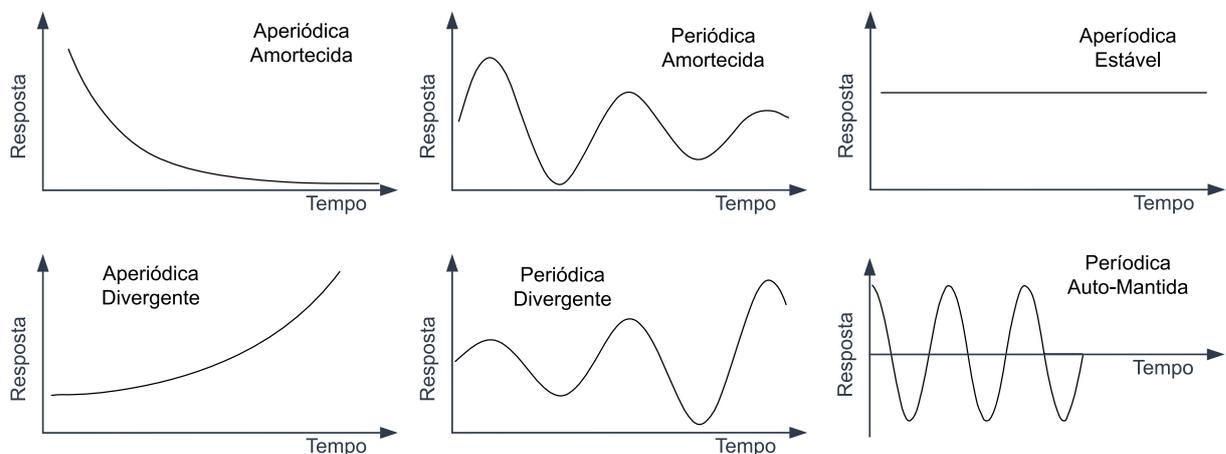
2.2.1 Condição de Equilíbrio

Durante a operação, a aeronave pode estar voltando, ascendendo ou pairando, em qualquer uma destas circunstâncias pode ocorrer grandes ângulos de incidência e derrapagem lateral, caso os componentes de momento sejam constantes com os controles fixos (sem atuação direta do piloto), então a aeronave está corretamente "*trimada*", ou seja, ela está ajustada. Logo, a condição de equilíbrio, também mencionada como condição de ajuste dos compensadores, está relacionada às posições padrões dos controladores que mantêm o helicóptero em equilíbrio. No estudo da estabilidade e controle, a definição de equilíbrio é fundamental para análise, tendo em vista que o estudo é realizado a partir desta condição de equilíbrio. Neste momento assume-se uma premissa a fim de simplificar o problema: a densidade do ar não se altera em função da altitude. Isso ocorre pois, durante uma transição vertical a alteração da densidade do ar exigirá correções contínuas nos controles, e estas alterações não serão adicionadas ao modelo.

2.2.2 Condição de Estabilidade

Durante a operação, o comportamento do helicóptero após uma perturbação, quando este se encontra dentro das condições de equilíbrio, permite que se avalie a resposta no domínio do tempo para que se caracterize a estabilidade da aeronave, conforme apresentado na Figura 5. Sucintamente, a estabilidade estática é definida pela tendência inicial (direção e intensidade) de retorno à posição de equilíbrio, enquanto a estabilidade dinâmica é referida à resposta de longo prazo, após a tendência inicial, sem que haja interferência do piloto (PROUTY, 1986).

Figura 5 – Respostas dinâmicas à perturbação



Fonte: o autor.

2.2.3 *Condição de Controle*

Geralmente, duas definições são usadas para representar a medida quantitativa relacionada ao controle: a sensibilidade do controle e capacidade de controle (VENKATESAN, 2014). Sobretudo, a condição de controle está relacionada à capacidade de produzir forças e momentos necessários para sustentar uma trajetória ou executar, ainda no EOV, uma manobra desejada independente de perturbações externas. Contudo, a primeira, sensibilidade de controle, está mais relacionada ao impulso inicial por unidade movimento dos comandos, enquanto a segunda definição, capacidade de controle, é definida como a medida do limite máximo do momento ou força que pode ser imputado à aeronave para uma determinada entrada de comando pelo piloto. Em suma, as características de controle referem-se à capacidade do helicóptero de responder às entradas de controle e assim passar de uma condição de voo para outra.

Apesar da resposta ao controle do piloto e às perturbações atmosféricas sejam, essencialmente, mais fidedignas em modelos não lineares, ainda é possível obter respostas relevantes a partir de aproximações lineares (PADFIELD, 2007). As características de estabilidade e controle do helicóptero são analisadas usando as equações dinâmicas de movimento do helicóptero, onde a fuselagem é tratada como um corpo rígido, um ponto de massa no espaço, submetido a uma manobra. Com isto, é possível observar que, para controlar devidamente o helicóptero, é necessário compreender a influência da mecânica de voo do helicóptero relacionada à estabilidade e ao equilíbrio, assim como as premissas redutivas assumidas.

2.2.4 *Inferências redutivas*

Para Venkatesan (2014) a análise da estabilidade e controle do helicóptero é um problema de dinâmica complicado envolvendo o acoplamento do movimento do rotor com os múltiplos graus de liberdade relacionados à fuselagem. Geralmente este problema é simplificado, ao assumir que a dinâmica com a qual as pás do rotor principal realizam o batimento - em inglês *blade flap dynamics* - é muito mais rápida do que a dinâmica da fuselagem. Matematicamente, este tipo de redução é nomeada de aproximação de baixa frequência, pois trata o fenômeno dos batimentos de maneira quasi-estática. Outros fatores a serem negligenciados são movimentos de avanço-atraso e de torção das pás do rotor principal. Por uma razão similar, esta aproximação é aceitável pois as cargas no cubo do rotor em estado estacionário, oriundas do batimento, são maiores em comparação com as cargas oriundas dos movimento avanço-atraso ou de torção.

2.3 Movimento inercial da aeronave

Devido às diferenças inerentes à aerodinâmica do helicóptero, a análise do movimento tende a ser dividida em pelo menos três momentos distintos: voo à frente, o voo de planeio e vertical. Assim que deixa o solo, o helicóptero em voo é basicamente influenciado por quatro forças aerodinâmicas: peso, sustentação, empuxo e arrasto.

- **Peso:** a massa combinada da própria aeronave, do combustível, da tripulação e passageiros, da bagagem e da carga, produz uma força peso considerável que é oposta à sustentação da aeronave, agindo verticalmente para baixo a partir do centro de gravidade da aeronave.
- **Sustentação:** o elemento mais expressivo nesse conjunto de forças é a sustentação, pois é a responsável por garantir a característica mais notável deste tipo de meio de transporte: transportar por via aérea. Sendo a decomposição da força de tração produzida pela aeronave, esta opõe-se à força descendente do peso, e é produzida pelo efeito dinâmico do ar que age no perfil das pás do rotor principal atuando verticalmente para cima através do centro de sustentação.
- **Empuxo:** componente da força de tração, a força de empuxo está em oposição à força de arrasto. Como regra geral, atua paralelamente ao eixo longitudinal.
- **Arrasto:** a força de arrasto, que se opõe ao empuxo, age no sentido do vento relativo como uma força retardante causada pela descontinuação do fluxo de ar por componentes da aeronave: fuselagem, pás do rotor, estabilizadores, e demais.

Essas forças serão implementadas junto às equações dinâmicas de movimento e, devido ao nível de acoplamento, são normalmente formuladas simbolicamente. A cinética do movimento de corpos rígidos e a divergência entre a definição da trajetória, e sua orientação, da aeronave em função do sistema de eixos na mesma e de um observador remoto impõe dois dos principais fatores que tornam este um problema complexo. Sendo assim, pode-se derivar as equações do movimento translacional e rotacional de um helicóptero assumido como sendo um corpo rígido, referindo-o a um sistema de eixos fixado no centro de massa da aeronave, conforme Figura 4. Estes serão influenciados pelos comandos da Figura 3, conforme a Seção 2.1 e pelas forças aqui descritas.

2.3.1 Análise da dinâmica de voo

A análise da dinâmica de voo requer o desenvolvimento das equações de movimento de um helicóptero. Conforme a Seção 2.2, o helicóptero será definido como um corpo rígido com três componentes de aceleração translacional e três componentes de aceleração angular definidos ao longo de um sistema de coordenadas. Sendo assim, haverá um total de seis graus de liberdade com seis equações correspondentes, sendo três equações de equilíbrio de força e três equações de equilíbrio de momentos. Além destas seis equações de equilíbrio, utilizar-se-á mais três equações relacionando as velocidades angulares instantâneas do helicóptero com a variação dos ângulos de orientação do helicóptero. Por conseguinte, as equações do movimento podem ser derivadas das equações das acelerações lineares e angulares para, respectivamente, as forças e momentos instantâneos. Assumindo que a massa de todo o sistema é constante, as equações são construídas selecionando um ponto arbitrário dentro da fuselagem, desviante do CG, e derivando a expressão para a aceleração absoluta no ponto especificado. Para Padfield (2007), a aceleração pode então ser integrada sob o volume total da fuselagem com intuito de se obter, através da derivada, a mudança no momento angular e, portanto, a inércia total. Um processo análogo permite obter a inércia correspondente ao momento através da aceleração angular.

Assumindo o helicóptero como referência, independente de seus translados, os eixos das coordenadas permanecem fixos ao ponto na fuselagem, o que, como apresentado na Seção 2.2.4, é uma aproximação tendo em vista que o movimento de batimento e avanço-atraso das pás do rotor principal fazem com que o centro de massa de toda a aeronave oscile, um efeito que pode ser negligenciado, tendo em vista que a massa das pás é tipicamente 5% da massa total do helicóptero (PADFIELD, 2007). Por conseguinte, considerando o centro de massa na origem do sistema de eixos, num ponto do espaço G, é possível compor a posição de um ponto P como:

$$P_G = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}, \quad \text{ou} \quad r_{pg} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (2.1)$$

Para Venkatesan (2014), tendo $\{x, y, z\}$ como representante dos três eixos e $\{i, j, k\}$ como, respectivamente, os vetores unitários ao longo dos três eixos, pode-se obter o ponto P em função da composição de $\{P_x, P_y, P_z\}$. Adicionalmente, é possível descrever a velocidade como:

$$\dot{r} = v_{pg} = (\dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}) + (x \dot{\mathbf{i}} + y \dot{\mathbf{j}} + z \dot{\mathbf{k}}) \quad (2.2)$$

Onde o segundo termo na Equação 2.2 aparece pois os eixos de referência $\{i, j, k\}$ estão se movendo junto com helicóptero. A derivada do sistema de coordenadas pode ser obtida

ao assumir pequenas variações no ângulo θ de cada eixo, ver Figura 6:

$$\partial \mathbf{i} = \mathbf{j} \partial \theta_z - \mathbf{k} \partial \theta_y \quad \implies \quad \dot{\mathbf{i}} = \mathbf{j} \frac{d\theta_z}{dt} - \mathbf{k} \frac{d\theta_y}{dy} = r\mathbf{j} - q\mathbf{k} \quad (2.3)$$

Ao definir a velocidade angular: $\boldsymbol{\omega}_G = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, em função do centro de massa em G, pode-se concluir que a velocidade dos eixos de referência é dada por: $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}_G \times \mathbf{i}$. Essa expressão algébrica permite inferir que a velocidade do ponto P pode ser expressa como:

$$\dot{r} = v_{pg} = \boldsymbol{\omega}_G \times r_p \quad (2.4)$$

Na forma expandida, a expressão da velocidade pode ser representada como:

$$v_{pg} = (qz - ry)\mathbf{i} + (rx - pz)\mathbf{j} + (py - qx)\mathbf{k} = u_{pg}\mathbf{i} + v_{pg}\mathbf{j} + w_{pg}\mathbf{k} \quad (2.5)$$

De forma equivalente, é possível concluir que a aceleração do ponto P em relação ao ponto G é dado por:

$$\dot{v}_{pg} = a_{pg} = (\dot{u}_{pg} - rv_{pg} + qw_{pg})\mathbf{i} + (\dot{v}_{pg} - pw_{pg} + ru_{pg})\mathbf{j} + (\dot{w}_{pg} - qu_{pg} + pv_{pg})\mathbf{k} \quad (2.6)$$

Obtêm-se assim a posição, a velocidade e a aceleração de quaisquer partículas em relação aos eixos fundamentais do helicóptero, com origem no ponto G. Ainda assim, é possível obter a velocidade e a aceleração em função de um referencial em terra pelas expressões:

$$v_p = (u + qz - ry)\mathbf{i} + (v + rx - pz)\mathbf{j} + (w + py - qx)\mathbf{k} \quad (2.7)$$

Por último, ao assumir: $a_p = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, pode-se concluir, analogamente, as seguinte componentes de aceleração:

$$a_x = (\dot{u} - rv + qw) - x(q^2 + r^2) + y(pq - \dot{r}) + z(pr + \dot{q}) \quad (2.8)$$

$$a_y = (\dot{v} - pw + ru) - y(p^2 + r^2) + y(qr - \dot{p}) + x(pq + \dot{r}) \quad (2.9)$$

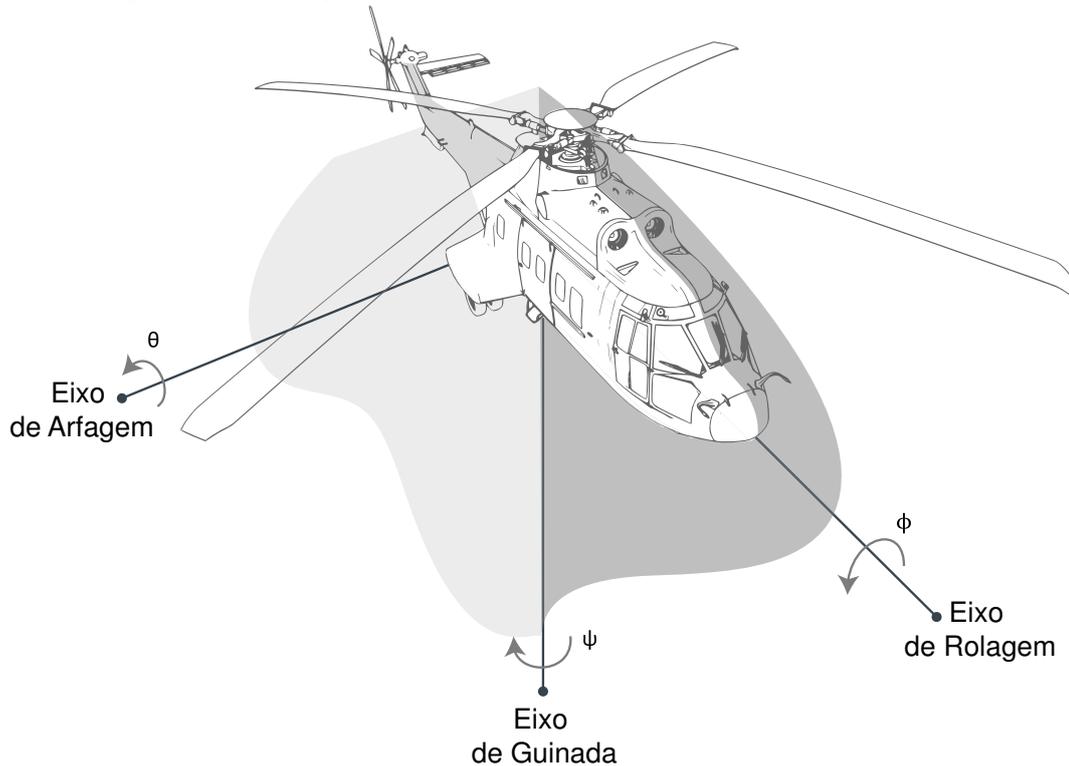
$$a_z = (\dot{w} - qu + pv) - z(p^2 + r^2) + y(pr - \dot{q}) + y(qr + \dot{p}) \quad (2.10)$$

As equações apresentadas em (VENKATESAN, 2014) tornam mais compreensível a formulação do modelo, tendo em vista que as equações de equilíbrio de força são tipicamente referenciadas ao sistema de coordenadas do helicóptero. No entanto, a componente referente à carga gravitacional possui uma referência associada ao observador em terra. Em razão disso, deve-se obter uma transformação de coordenadas entre o sistema estacionário, fixo à Terra, e o sistema rotativo fixado na aeronave. Esta relação, entre os dois eixos de referência, permitirá descrever também a atitude, ou orientação, da aeronave em relação ao sistema de eixos estacionários, o observador em terra.

2.3.2 Coordenadas angulares da aeronave

A atitude do helicóptero em relação à Terra é mensurado através de três ângulos, conhecidos como ângulo de Euler: guinada, ψ , arfagem, θ , e rolagem, ϕ - em inglês *yaw*, *pitch* and *roll* - conforme Figura 6.

Figura 6 – Ângulos do helicóptero



Fonte: o autor.

A transformação, que associa o sistema de coordenadas terrestre e o novo conjunto de coordenadas, pode ser descrita através do seguinte sistema linear (PADFIELD, 2007):

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ j_0 \\ k_0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

A Equação 2.12, apresentada a seguir, pode ser encontrada através da combinação de três transformações, eixo à eixo: (1) rotacionar o sistema de coordenadas fixados na Terra sobre o eixo z através do ângulo ψ no sentido anti-horário; (2) em seguida, deve-se rotacionar o sistema de coordenadas sobre o eixo y através do ângulo θ em sentido anti-horário; (3) finalmente, rotaciona-se o sistema de coordenadas terrestre sobre o eixo x através do ângulo ϕ no sentido anti-horário. Ao combinar todas as relações, a transformação final, representada por um valor Γ , pode relacionar diretamente o sistema em terra e o sistema da aeronave.

O resultado da combinação da Equação 2.11 pode ser descrita como:

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ j_0 \\ k_0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Tendo em vista que Γ é ortogonal, a expressão é comumente representada como:

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = [\Gamma] \begin{bmatrix} i_0 \\ j_0 \\ k_0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \Gamma' = \Gamma^{-1} \quad (2.13)$$

O sistema de coordenadas $\{i_0, j_0, k_0\}$ representa o referencial em terra. Definir os ângulos de rotação da aeronave também permite a formulação das equações que expressam a relação entre a velocidade angular instantânea do helicóptero, através da análise quanto à mudança dos ângulos de orientação $\{\psi, \theta, \phi\}$. Assim sendo, o vetor da velocidade angular instantânea é definido, em relação à aeronave, como:

$$\vec{w}_g = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \quad (2.14)$$

Podendo assim, ser o vetor de velocidade angular escrito em termos das derivadas dos ângulos de orientação $\{\phi, \theta, \psi\}$ em função do tempo. Usando as relações de transformação que compõe Γ pode-se escrever os componentes instantâneos de velocidade angular nos três eixos (ver Figura 6) em termos destes ângulos e de suas derivadas:

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta, \quad (2.15)$$

$$q = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta, \quad (2.16)$$

$$r = -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta \quad (2.17)$$

Ou, de maneira análoga, tem-se que a relação entre a variação dos ângulos de Euler do helicóptero e da velocidade angular da fuselagem pode ser escrita como:

$$\dot{\psi} = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} q + \frac{\cos \phi}{\cos \theta} r, \quad (2.18)$$

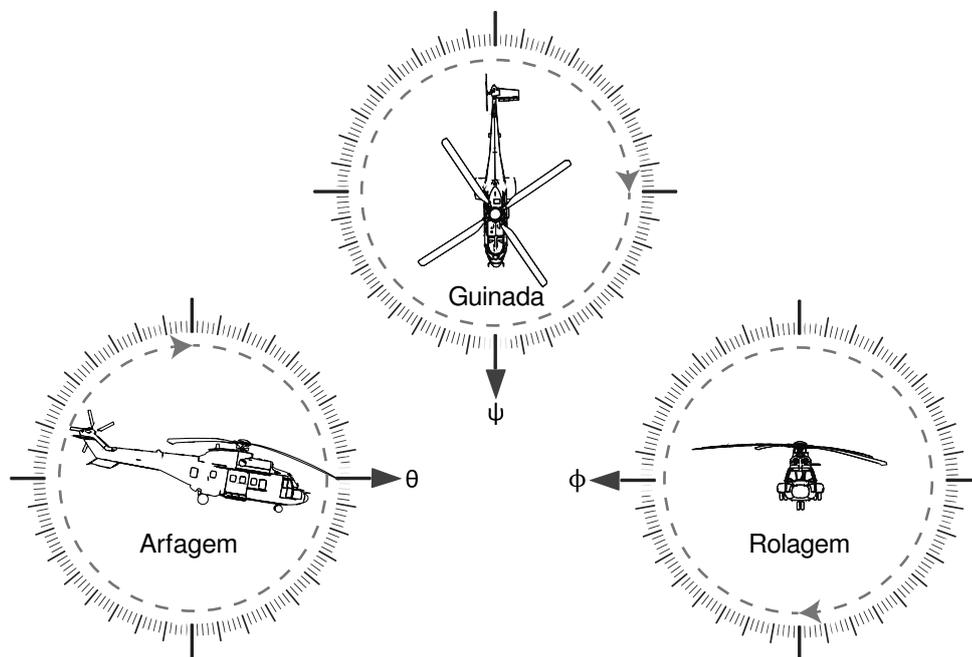
$$\dot{\theta} = \cos \phi q - \sin \phi r, \quad (2.19)$$

$$\dot{\phi} = p + \tan \theta \sin \phi q + \tan \theta \cos \phi r \quad (2.20)$$

2.3.3 Influência gravitacional

As três relações cinemáticas representadas nas Equações 2.18 à 2.20 correlacionam a variação nos ângulos de orientação do helicóptero e a velocidade angular instantânea do helicóptero, estando estas expostas em relação ao sistema referenciada à Terra. Contudo, há outro vínculo notório que deve ser associado à orientação da aeronave: a força gravitacional. Enquanto as forças aerodinâmicas são referenciadas junto à fuselagem da aeronave, as influências gravitacionais aparecem em função dos ângulos $\{\phi, \theta, \psi\}$.

Figura 7 – Eixos de rotação do helicóptero



Fonte: o autor.

As relações gravitacionais, juntamente com as presentes na Equação 2.13, são essenciais na análise da dinâmica proporcionada por componentes gravitacionais. Assume-se que a força gravitacional atua indiferentemente na vertical (conforme Figura 7 é visível que a guinada, ψ , não apresenta influência na força resultante, o que se refletirá nas equações) e que as componentes associadas à aeronave possam ser obtidas utilizando a matriz de transformação na Equação 2.13. Portanto, os componentes de aceleração gravitacional em relação $\{x, y, z\}$ da fuselagem podem ser escritos, como:

$$a_{xg} = -g \sin \theta, \quad (2.21)$$

$$a_{yg} = g \cos \theta \sin \phi, \quad (2.22)$$

$$a_{zg} = g \cos \theta \cos \phi \quad (2.23)$$

2.3.4 Linearização da dinâmica de voo

Assumindo M_A como a massa da aeronave e $\{X, Y, Z\}$ como componentes da força resultante, em relação à Terra, pode-se obter através das equações da Seção 2.3.1:

$$X = M_A[(\dot{u}_{pg} - rv_{pg} + qw_{pg}) + (g \sin \theta)], \quad (2.24)$$

$$Y = M_A[(\dot{v}_{pg} - pw_{pg} + ru_{pg}) - (g \cos \theta \sin \phi)], \quad (2.25)$$

$$Z = M_A[(\dot{w}_{pg} - qu_{pg} + pv_{pg}) - (g \cos \theta \cos \phi)] \quad (2.26)$$

A seguir, supõe-se que o vetor do momento externo, sobre o centro de massa do helicóptero, possa ser escrito na forma:

$$\vec{M} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k} \quad (2.27)$$

Por fim, conforme Venkatesan (2014) apresenta, as equações de momento podem ser simplificadas, pois: o valor numérico de I_{xz} é próximo ao valor de I_{xx} . Enquanto, todos os outros produtos cruzados de inércia poderam são assumidos como 0 (zero). Logo, as três equações de momento do helicóptero podem ser descritas como:

$$L = I_{xx}\dot{p} - I_{xz}(\dot{r} + pq) - qr(I_{yy} - I_{zz}), \quad (2.28)$$

$$M = I_{yy}\dot{q} - I_{xz}(r^2 - p^2) - rp(I_{zz} - I_{xx}), \quad (2.29)$$

$$N = I_{zz}\dot{r} - I_{xz}(\dot{p} - qr) - pq(I_{xx} - I_{yy}) \quad (2.30)$$

Esse conjunto de equações, junto com as presente na Seção 2.3.2, permitem a formulação de um modelo para estabilidade do helicóptero. Entretanto, como citado anteriormente, uma análise completa da dinâmica do voo inclui também os esforços das pás do rotor principal: modos de batimento, avanço-atraso e torção. No item 2.2.4 é elucidado superficialmente o porquê de modelos matemáticos, similares ao 6DoF, negligenciarem os efeitos de avanço-atraso e os modos de torção das pás do rotor principal. Contudo, apesar destas dinâmicas apresentarem contribuições relativamente menos significativas no contexto geral, a conicidade e o basculamento, em contrapartida, são dois eventos aerodinâmicos que também ocorrem nas pás do rotor principal e apresentam uma influência significativa (JOHNSON, 2013).

Para que um helicóptero gere elevação, as pás do rotor principal devem estar revolucionando. A rotação do sistema do rotor cria uma força centrífuga, com características inerciais, que tendem a expelir as pás do rotor do cubo do rotor principal. Esta força concede rigidez às pás

do rotor através da tensão e, por sua vez, a força para suportar o peso do helicóptero. Entretanto, ao desconsiderar as articulações de avanço-atraso presentes na raiz das pás do rotor, é possível observar que uma partícula elementar na raiz da pá se desloca a uma velocidade inferior a uma presente no extremo da pá, isso pois a primeira percorre uma circunferência menor em cada revolução. Sendo assim, pela teoria da quantidade de movimento os elementos na extremidade da pá produzem um sustentação maior, tendo em vista que este está associado à velocidade do aerofólio. O resultado destas duas forças é que as pás assumem um caminho cônico, em vez de permanecer no plano perpendicular ao mastro, em regime estacionário.

Para Padfield (2007), o amortecimento das frequências inerentes ao processo de batimento é alto, sendo assim, sua constante de tempo se encontra entre um quarto à metade do período de revolução do rotor. Por consequência, esta dinâmica perfaz seu transitório de maneira mais rápida do que dinâmica da fuselagem, ou seja, o rotor atinge o seu valor de estado estacionário, formando a conicidade, em pouco tempo. Destarte, a dinâmica do batimento está incluída no modelo da aeronave em forma quase-estática, o que elimina os graus de liberdade oriundos das pás do rotor principal. Na prática, isto é o equivalente a assumir que o sistema do rotor produz força e momento no cubo do rotor instantaneamente em resposta a qualquer perturbação, comando do piloto ou movimento da aeronave.

Realizar a análise juntamente com as equações dinâmicas apresentadas ao longo deste capítulo, mesmo sem avaliar transitórios e seus respectivos graus de liberdade, formam um sistema de equações não-lineares com elevado nível de acoplamento, tornando a solução destas complicada. O que resulta nos processos de linearização em volta da condição de equilíbrio, onde assume-se que cada sinais de saída $\{\phi, \theta, \psi, u, v, w, p, q, r\}$ e os sinais de controle $\{\theta_0, \theta_{1c}, \theta_{1s}, \theta_{0T}\}$, assim como as forças $\{X, Y, Z\}$ e os momentos $\{L, M, N\}$, são descritos por dois valores: um valor inerente à condição de ajuste do grau de liberdade (e.g.: θ_e , ângulo de arfagem de equilíbrio), e uma perturbação inerente à mesma (e.g.: $\tilde{\theta}_e$). Isto implica que forças e momentos podem ser descritas da seguinte forma:

$$X = X_e + X_{\theta_0} \tilde{\theta}_0 + X_{\theta_{1c}} \tilde{\theta}_{1c} + X_{\theta_{1s}} \tilde{\theta}_{1s} + X_{\theta_{0T}} \tilde{\theta}_{0T} + X_{\psi} \tilde{\psi} + X_{\phi} \tilde{\phi} + X_{\theta} \tilde{\theta} + X_u \tilde{u} + X_v \tilde{v} + X_w \tilde{w} + X_p \tilde{p} + X_q \tilde{q} + X_r \tilde{r} + X_{\dot{p}} \tilde{\dot{p}} + X_{\dot{q}} \tilde{\dot{q}} + X_{\dot{r}} \tilde{\dot{r}} \quad (2.31)$$

Os elementos $\{X_{\theta_0}, X_{\theta_{1c}}, X_{\theta_{1s}}, X_{\theta_{0T}}, \dots, X_{\dot{r}}\}$ representam a influência do grau de liberdade no respectivo momento, ou força — por exemplo, X_u reflete a componente da força no eixo x , resultante da velocidade u e é dado por:

$$X_u = \left[\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial \beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial \beta_{1c}} \frac{\partial \beta_{1c}}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial \beta_{1s}} \frac{\partial \beta_{1s}}{\partial u} \right] \quad (2.32)$$

Onde $\{\beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}\}$ são, respectivamente, o valor médio do ângulo de batimento, o cosseno do primeiro e o seno do primeiro harmônico. Usualmente, na Equação 2.31 os termos associados à $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\phi}$ são valores próximos à zero e, por isto, esses termos geralmente são negligenciados na expansão da série de Taylor. De maneira similar, os termos associados às acelerações $\{\dot{\tilde{p}}, \dot{\tilde{q}}, \dot{\tilde{r}}\}$ apresentam uma ordem de grandeza muito pequena em comparação com a inércia da aeronave, logo estes elementos são igualmente negligenciados. Enfim, esse mesmo processo é refletido para outros componentes de forças e momentos. Associando a parcela em equilíbrio como referência (e.g.: X_e) às perturbação simplificadas, e igualando-os separadamente a 0, dois conjuntos de equações são formados: um conjunto variante no tempo representa as perturbações linearizadas, um conjunto invariante de tempo corresponde ao estado de equilíbrio e compensação. Sendo a primeira associada às equações de estabilidade e, indiretamente, ao controle da aeronave, enquanto a segunda são equações algébricas não-lineares. Sendo as forças apresentadas como:

$$X_e = M_A[(q_e w_e - r_e v_e) + (g \sin \theta_e)], \quad (2.33)$$

$$Y_e = M_A[(r_e u_e - p_e w_e) - (g \cos \theta_e \sin \phi_e)], \quad (2.34)$$

$$Z_e = M_A[(p_e v_e - q_e u_e) - (g \cos \theta_e \cos \phi_e)] \quad (2.35)$$

E os momentos descritos como:

$$L_e = -I_{xz}(p_e q_e) - q_e r_e (I_{yy} - I_{zz}), \quad (2.36)$$

$$M_e = -I_{xz}(r_e^2 - p_e^2) - r_e p_e (I_{zz} - I_{xx}), \quad (2.37)$$

$$N_e = -I_{xz}(\dot{p}_e - q_e r_e) - p_e q_e (I_{xx} - I_{yy}) \quad (2.38)$$

E a variação dos ângulos representados como:

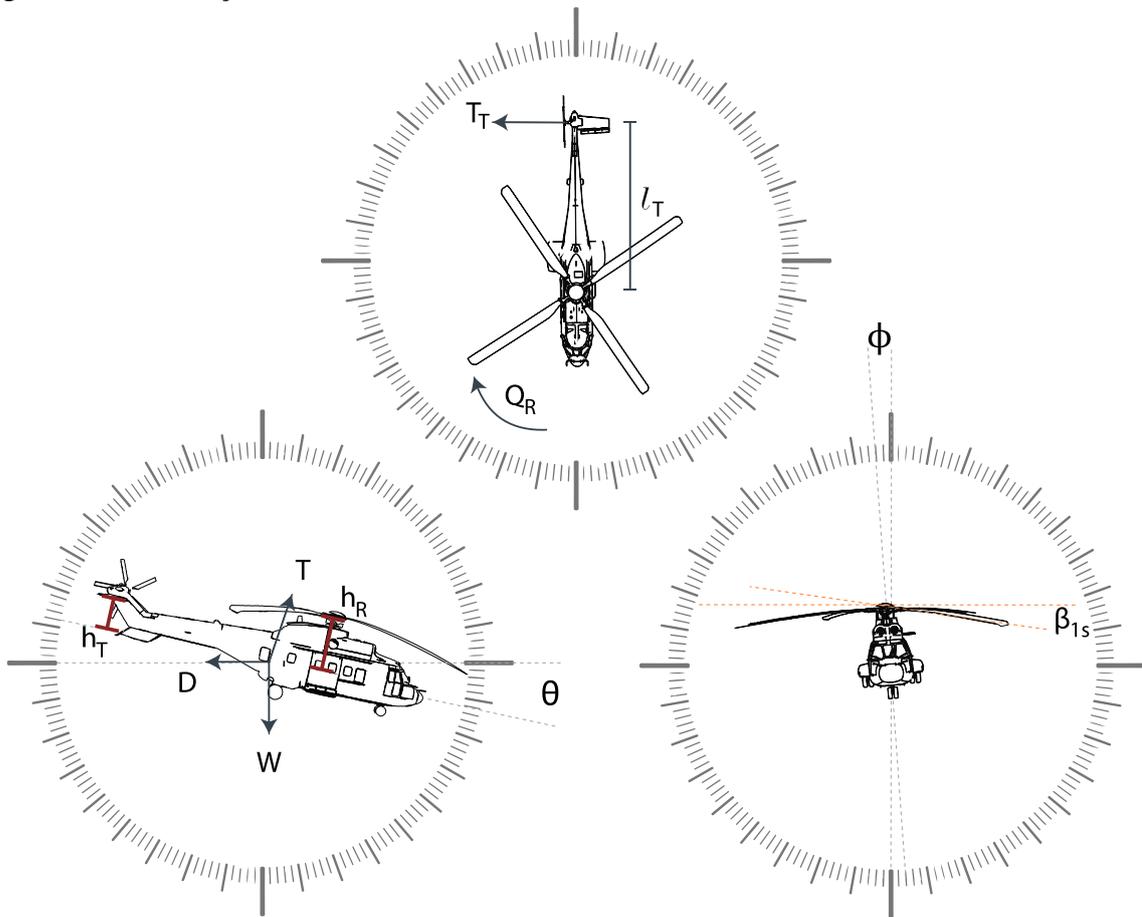
$$P_e = \dot{\psi}_e \sin \theta_e, \quad (2.39)$$

$$Q_e = \dot{\psi}_e \sin \phi_e \cos \theta_e, \quad (2.40)$$

$$R_e = \dot{\psi}_e \cos \phi_e \cos \theta_e \quad (2.41)$$

Usualmente, para determinar a condição de equilíbrio analisa-se dois movimentos: movimento retilíneo à frente e uma espiral descendente, ou ascendente. O primeiro caso consiste da análise de um helicóptero voando para a frente em percurso reto, nesta situação, assume-se que: o movimento é rígido, principalmente, pelo rotor principal, o de cauda e pelo arrasto na fuselagem; não há momentos sendo transmitidos à fuselagem em função do batimento; o centro de massa está localizado no centro do eixo; os ângulos de inclinação da aeronave são pequenos.

Figura 8 – Orientações de voo à frente



Fonte: o autor.

Conforme apresentado na Figura 8, pode-se assumir então:

$$\theta \approx D/T, \quad (2.42)$$

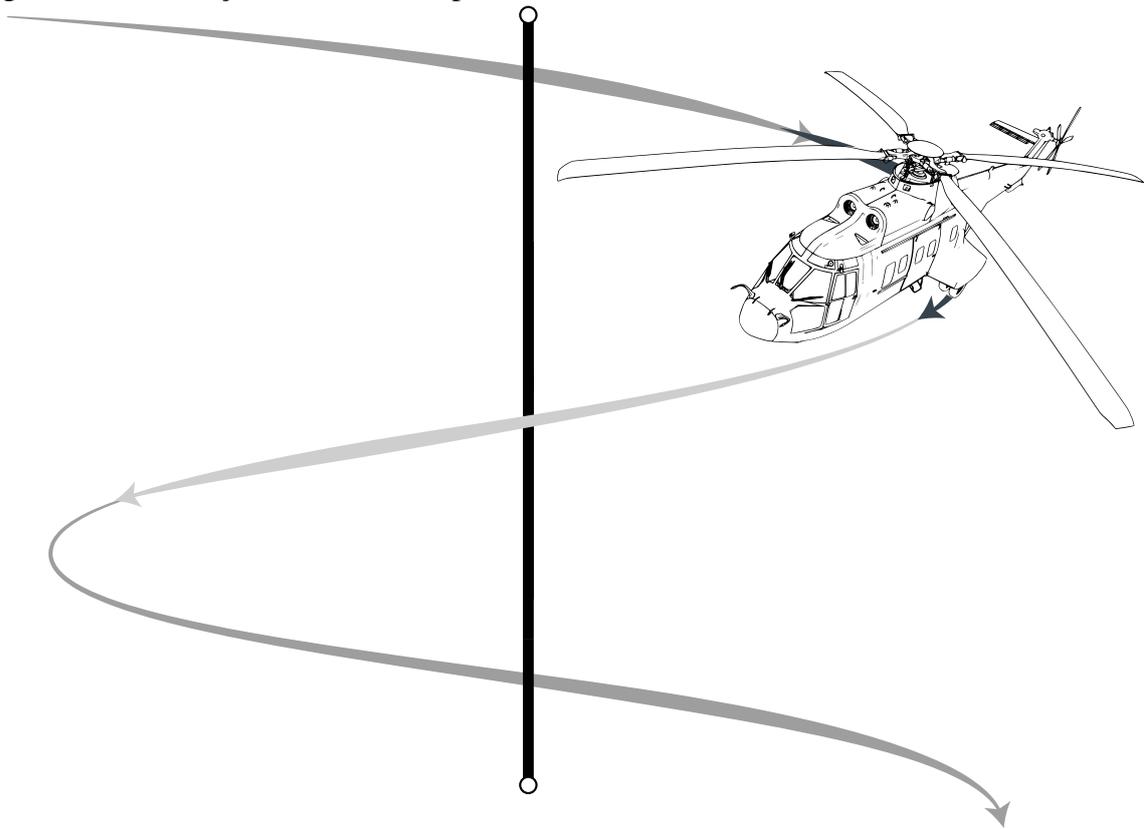
$$T_T \approx Q_R/l_T, \quad (2.43)$$

$$\beta_{1s} \approx h_T T_T / h_R T, \quad (2.44)$$

$$\phi \approx T_T / M_{ag} (1 - h_T / T_T) \quad (2.45)$$

Essas equações, que são mais confiáveis em pequenas velocidades à frente, relacionam: o empuxo produzido pelo rotor de cauda (T_T) e o torque do rotor principal (Q_R) em função da distância da cauda (l_T); a incidência do batimento lateral (β_{1s}) em função do equilíbrio entre o momento de rolagem do motor principal, a altura do plano de rotação do rotor principal (h_R), empuxo do rotor de cauda e a altura do rotor de cauda (h_T). Através da análise de equilíbrio de forças e momentos desta situação pode-se calcular os ângulos de controle necessários: no coletivo do rotor principal e nos pedais do rotor de cauda que produzem os empuxos necessários, assim como os cíclicos laterais que induzem a inclinação lateral do disco.

Figura 9 – Orientações de voo em espiral



Fonte: o autor.

Na segunda situação, em espiral, demonstrada na Figura 9, o eixo de rotação é sempre direcionado verticalmente, o que impõe que as componentes da força gravitacional sejam constantes e, conseqüentemente, que a variação para θ e ϕ sejam iguais à zero. A aeronave, que pode apresentar um escorregamento lateral, deve estar subindo, ou descendo, contanto que não haja variação na magnitude do vetor de velocidade, esta consideração promove as Equações entre 2.33 à 2.41. Padfield (2007) ainda elucida que, para este caso, onde não há rotação, as cargas aerodinâmicas aplicadas $\{X_e, Y_e, Z_e\}$ equilibram-se com as componentes da força gravitacional e com os momentos aplicados $\{L_e, M_e, N_e\}$. Enquanto que para uma rotação distinta de zero, as forças e momentos inerciais não nulos (força centrífuga, força Coriolis, momento giroscópico) estão incluídos na condição de equilíbrio.

Esta situação esclarece a complexidade de dois importantes pontos analisados: a cinemática de corpos rígidos e a necessidade de descrever a trajetória e a orientação do veículo em função do observador em coordenadas terrestres. Tendo identificado a condição de equilíbrio e formulado as equações que regem o movimento é possível elaborar a aproximação de primeira ordem ao assumir que as forças e momentos aplicados são funções de velocidades translacionais $\{u, v, w\}$, das velocidades angulares $\{p, q, r\}$ e dos comandos do piloto $\{\theta_0, \theta_{1s}, \theta_{1c}, \theta_{0T}\}$.

2.4 Análise de Estabilidade para o Modelo 6DoF

A modelagem matemática que considera unicamente seis graus de liberdade, modelo 6DoF, apresenta uma aproximação coerente com modelos de baixa frequência e análise das qualidades de voo. Como citado anteriormente, o cerne da hipótese é que a dinâmica do rotor, e do fluxo resultante, é muito mais rápida do que as respostas da fuselagem e, por isto, há tempo hábil deste atingir o seu estado estacionário típico no ínterim das constantes de tempo apresentadas pela aeronave. Ao avaliar as condições de equilíbrio do movimento em espiral apresentado no item anterior é possível observar 13 (treze) incógnitas típicas:

- Entradas de comando do piloto: $\{\theta_0, \theta_{1s}, \theta_{1c}, \theta_{0T}\}$
- Componentes da velocidade linear: $\{u_e, v_e, w_e\}$
- Componentes da velocidade angular: $\{p_e, q_e, r_e\}$
- Ângulos de orientação: $\{\theta_e, \phi_e\}$
- Velocidade de rotação: $\{\dot{\Psi}_e\}$

Neste modelo, as 13 (treze) incógnitas são necessárias para descrever o movimento. A combinação destas treze variáveis e as nove equações apresentadas nas Equações entre 2.33 à 2.41 impõe que, para definição da solução matemática, 4 (quatro) variáveis devem ser consideradas independentes e sejam previamente definidas. A prescrição das variáveis é um processo arbitrário, uma vez que qualquer valor pode ser definido para quatro variáveis contanto que as outras nove variáveis sejam definidas pela solução do sistema de equações. A solução clássica para esse modelo utiliza a definição prévia de quatro fatores:

- Velocidade do voo (V_{fe})
- Ângulo da trajetória de voo (γ_{fe})
- Velocidade de rotação ($\dot{\psi}$ ou Ω_e)
- Ângulo de escorregamento (β_e)

Tendo em vista que a maioria das variáveis articuladas para solucionar o problema não estão presentes nas equações, nem nas incógnitas, é preciso formular uma relação adequada entre estas e os dados iniciais. Onde o ângulo de incidência (α_e) e o ângulo de escorregamento (β_e) podem ser definidos como:

$$\alpha_e = \arctan\left(\frac{w_e}{u_e}\right), \quad (2.46)$$

$$\beta_e = \arcsin\left(\frac{v_e}{V_{fe}}\right) \quad (2.47)$$

Assumindo que o vetor velocidade (\vec{V}_{fe}) apresenta uma trajetória com ângulo (γ_{fe}) não nulo em relação ao observador na terra, têm-se que esta velocidade pode ser descrita como:

$$U_{ea} = V_{fe} \cos \gamma_{fe} \cos \mathcal{X}, \quad (2.48)$$

$$V_{ea} = V_{fe} \cos \gamma_{fe} \sin \mathcal{X}, \quad (2.49)$$

$$W_{ea} = V_{fe} \sin \gamma_{fe} \quad (2.50)$$

Onde o ângulo \mathcal{X} representa o ângulo entre o eixo x na Terra e a projeção do vetor velocidade no plano horizontal. Sumarizando, ao assumir que $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} - \psi_e$, e adotando as transformações da Equação 2.11 se tem:

$$u_e = V_{fe} (\cos \gamma_{fe} \cos \theta_e \cos \mathcal{X}_e - \sin \gamma_{fe} \sin \theta_e), \quad (2.51)$$

$$v_e = V_{fe} (\cos \gamma_{fe} \sin \phi_e \sin \theta_e \cos \mathcal{X}_e + \cos \gamma_{fe} \cos \phi_e \sin \mathcal{X}_e + \sin \gamma_{fe} \sin \phi_e \cos \theta_e), \quad (2.52)$$

$$w_e = V_{fe} (\cos \gamma_{fe} \cos \phi_e \sin \theta_e \cos \mathcal{X}_e - \cos \gamma_{fe} \sin \phi_e \sin \mathcal{X}_e + \sin \gamma_{fe} \cos \phi_e \cos \theta_e) \quad (2.53)$$

Este ângulo \mathcal{X}_e , comumente dominado de ângulo de rastreamento, apresenta uma relação com o ângulo de escorregamento β_e , podendo ser definido como:

$$\sin \mathcal{X}_e = \frac{K_2 K_3 \pm \sqrt{4K_2 K_3 - 4(K_3^2 - k_1^2)(K_2^2 + K_1^2)}}{2(K_2^2 + K_1^2)} \quad (2.54)$$

Onde os valores para K são descritos como:

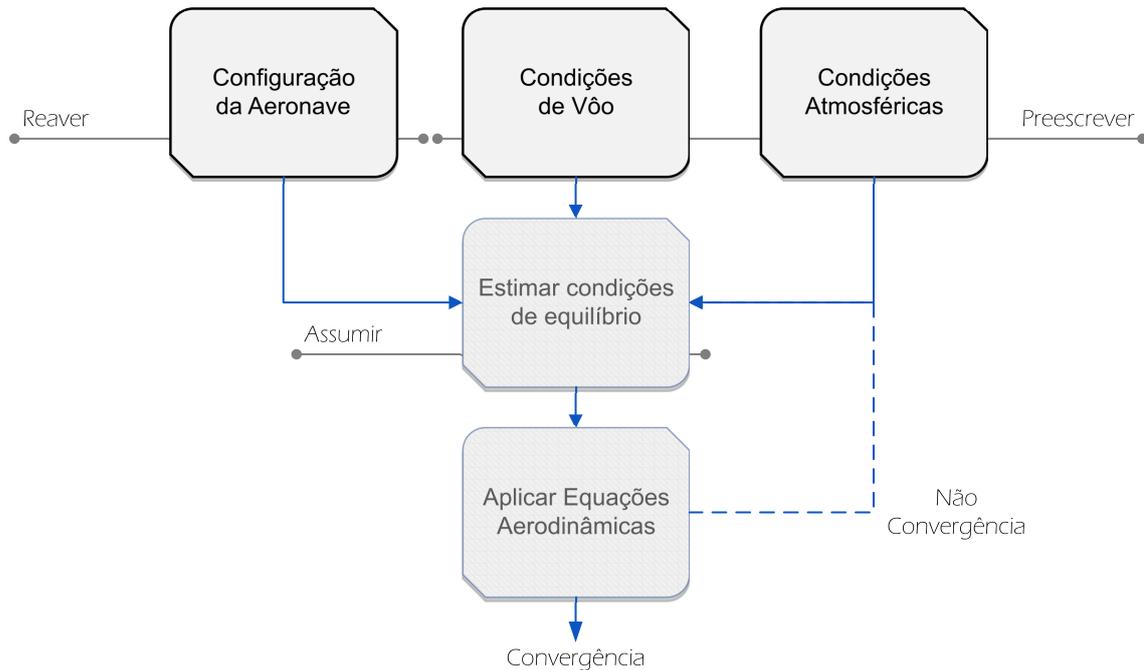
$$K_1 = \cos \gamma_{fe} \sin \phi_e \sin \theta_e, \quad (2.55)$$

$$K_2 = \cos \gamma_{fe} \cos \phi_e, \quad (2.56)$$

$$K_3 = \sin \beta_e - \sin \gamma_{fe} \sin \phi_e \cos \theta_e \quad (2.57)$$

Tendo em vista que o sistema apresentado nas equações de equilíbrio 2.33 à 2.38 não é linear, este tende a apresentar uma solução trivial de forma iterativa: um processo se inicia com os valores estimados para as incógnitas associadas à condição de equilíbrio, velocidade do rotor, ângulo de batimento e empuxo produzido pelo rotor principal e o de cauda e, em seguida, as equações aerodinâmicas são aplicadas para verificar convergência. Este processo definirá a planta do problema tratado neste trabalho, entretanto, não há necessidade de uma análise mais complexa, tendo em vista que há pacotes de software dedicados à análise e solução do processo de "trimagem" da aeronave similar à Figura 10, atendo assim, somente à solução produzida, que está relacionado à matriz da planta de controle, e ao significado das incógnitas.

Figura 10 – Definindo as condições de equilíbrio



Fonte: o autor.

1. Reaver os parâmetros conhecidos: configuração da aeronave e perfil aerodinâmico;
2. Prescrever as condições atmosféricas do ensaio;
3. Prescrever as condições de voo do modelo $\{V_{fe}, \gamma_{ge}, \Omega_e, \beta_e\}$;
4. Estimar os valores de equilíbrio para o comando do piloto $\{\theta_{0e}, \theta_{1se}, \theta_{1ce}, \theta_{0Te}\}$, para os ângulos de orientação $\{\theta_e, \phi_e\}$, empuxos e batimento da aeronave;
5. Encontrar o valor do ângulo de rastreo \mathcal{X}_e ;
6. Encontrar o valor das componentes de velocidade linear $\{u_e, v_e, w_e\}$ e de velocidade angular: $\{p_e, q_e, r_e\}$;
7. Encontrar o fluxo produzido pelo rotor;
8. Encontrar as cargas no cubo do rotor através da análise do perfil da pá do rotor;
9. Encontrar as cargas da fuselagens e das outras superfícies aerodinâmicas;
10. Encontrar o equilíbrio de forças e momentos da fuselagem;
11. Identificar os valores estimados para o comando do piloto $\{\theta_{0e}, \theta_{1se}, \theta_{1ce}, \theta_{0Te}\}$ e para os ângulos de orientação $\{\theta_e, \phi_e\}$;
12. Reiniciar as iterações a partir do passo 3, até a convergência. Quando houver a concordância entre os valores obtidos e assumidos estes valores serão estabelecidos como os valores de equilíbrio;

Finalmente, com a adição dessas 4 (quatro) novas prescrições é possível a identificação completa do sistema e a correlação das incógnitas através do processo iterativo. Sendo assim, a identificação de uma planta para estabilização do modelo de 6DoF deverá ser representada por uma matriz de 8 (oito) variáveis de estado: velocidade longitudinal, velocidade lateral, velocidade vertical, velocidade de rolagem, velocidade de arfagem, velocidade de guinada, atitude de rolagem e, por fim, atitude de arfagem. Notar que, neste caso, os dois últimos estados, relacionados à atitude da aeronave, só possuem significância devido à influência gravitacional e como reorientações na guinada (com observador em terra) não influenciam o vetor da força gravitacional, não há necessidade de incorporá-lo ao vetor \mathcal{E} de estados dado pela equação:

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \text{Velocidade} & \text{Velocidade} & \text{Velocidade} & \text{Velocidade} & \text{Velocidade} & \text{Velocidade} & \text{Atitude} & \text{Atitude} \\ \text{Longitudinal} & \text{Lateral} & \text{Vertical} & \text{de Rolagem} & \text{de Arfagem} & \text{de Guinada} & \text{de Rolagem} & \text{de Arfagem} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Inicialmente, analisar-se-á a matriz de entrada B . Esta correlaciona as 4 (quatro) entradas de comandos - coletivo (θ_0), cíclico longitudinal (θ_{1s}), cíclico lateral (θ_{1c}) e pedal (θ_{0T}) - com os 8 (oito) variáveis de estado do modelo 6DoF, formando assim uma matriz B com dimensões [8,4]:

$$B = \begin{bmatrix} X_{\theta_0}/M_a & X_{\theta_{1s}}/M_a & X_{\theta_{1c}}/M_a & X_{\theta_{0T}}/M_a \\ Y_{\theta_0}/M_a & Y_{\theta_{1s}}/M_a & Y_{\theta_{1c}}/M_a & Y_{\theta_{0T}}/M_a \\ Z_{\theta_0}/M_a & Z_{\theta_{1s}}/M_a & Z_{\theta_{1c}}/M_a & Z_{\theta_{0T}}/M_a \\ \frac{I_{zz}L_{\theta_0} + I_{xz}N_{\theta_0}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{zz}L_{\theta_{1c}} + I_{xz}N_{\theta_{1c}}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{zz}L_{\theta_{1s}} + I_{xz}N_{\theta_{1s}}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{zz}L_{\theta_{0T}} + I_{xz}N_{\theta_{0T}}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ M_{\theta_0}/I_{yy} & M_{\theta_{1s}}/I_{yy} & M_{\theta_{1c}}/I_{yy} & M_{\theta_{0T}}/I_{yy} \\ \frac{I_{xz}L_{\theta_0} + I_{xx}N_{\theta_0}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{xz}L_{\theta_{1c}} + I_{xx}N_{\theta_{1c}}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{xz}L_{\theta_{1s}} + I_{xx}N_{\theta_{1s}}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{xz}L_{\theta_{0T}} + I_{xx}N_{\theta_{0T}}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

A matriz apresenta duas de suas linhas nulas, o que decorre do fato da aeronave não ser capaz de manipular diretamente sua orientação no espaço, requerendo primeiramente a manipulação das forças e momentos na fuselagem. Além disso, o sistema do helicóptero apresenta um número de entradas inferior às variáveis de saída, tendo quatro comandos para manipular as oito variáveis de estado, o que esclarece a definição de sub-atuado para este modelo de aeronave de asas rotativas. Ademais, é notável que toda entrada de controle influi em todos os estados, elucidando o elevado nível de acoplamento. O próximo passo é desenvolver a matriz de estados (A), que indica como os estados são influenciados pela condição das variáveis de estado no instante anterior. Antes de apresentar a matriz, convém separá-la em três partes: variáveis de estado relacionados às forças, aos momentos e às atitudes.

A primeira componente da matriz de estados (A_{vl}) será a que representa os reflexos das forças lineares $\{x, y, z\}$ nos estados, podendo ser descrita como:

$$A_{vl} = \begin{bmatrix} X_u/M_a & (X_v/M_a + R_e) & (X_w/M_a - Q_e) \\ (Y_u/M_a - R_e) & Y_v/M_a & (Y_w/M_a + P_e) \\ (Z_u/M_a + Q_e) & (Z_v/M_a - P_e) & Z_w/M_a \\ \frac{I_{zz}L_u + I_{xz}N_u}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{zz}L_w + I_{xz}N_w}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{zz}L_v + I_{xz}N_v}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ M_u/I_{zz} & M_v/I_{zz} & M_w/I_{zz} \\ \frac{I_{xz}L_u + I_{zz}N_u}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{xz}L_w + I_{zz}N_w}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{xz}L_v + I_{zz}N_v}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Novamente, observa-se que a aplicação de forças é incapaz de alterar a atitude da aeronave, o que se reflete nas duas últimas linhas da matriz. Para encontrar os valores de cada elemento da matriz basta realizar a derivada descrita na Equação 2.32 nas Equações 2.33 à 2.38. A próxima componente da matriz de estados (A_{va}) será a representação dos reflexos dos momentos angulares $\{p, q, r\}$ nos estados, sendo esta descrita como:

$$A_{va} = \begin{bmatrix} X_p/M_a & (X_q/M_a - W_e) & (X_r/M_a + V_e) \\ (Y_p/M_a + W_e) & Y_q/M_a & (Y_r/M_a - U_e) \\ (Z_p/M_a - V_e) & (Z_q/M_a + U_e) & Z_r/M_a \\ \left(\frac{I_{zz}L_p + I_{xz}N_p}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} + k_1Q_e \right) & \left(\frac{I_{zz}L_q + I_{xz}N_q}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} + k_1P_e - k_2R_e \right) & \left(\frac{I_{zz}L_r + I_{xz}N_r}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} - k_2Q_e \right) \\ \frac{M_p}{I_{yy}} - 2P_eI_{xz}I_{yy} - R_e(I_{xx} - I_{zz})I_{yy} & \frac{M_q}{I_{yy}} & \frac{M_r}{I_{yy}} + 2R_eI_{xz}I_{yy} - P_e(I_{xx} - I_{zz})I_{yy} \\ \left(\frac{I_{xz}L_p + I_{zz}N_p}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} - k_3Q_e \right) & \left(\frac{I_{xz}L_q + I_{zz}N_q}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} - k_1R_e - k_3P_e \right) & \left(\frac{I_{xz}L_r + I_{zz}N_r}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} - k_1Q_e \right) \\ 1 & \sin \phi_e \tan \theta_e & \cos \phi_e \tan \theta_e \\ 0 & \cos \theta_e & -\sin \theta_e \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Tendo:

$$k_1 = \frac{I_{xz}(I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}, \quad (2.62)$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}(I_{zz} - I_{yy}) + I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}, \quad (2.63)$$

$$k_3 = \frac{I_{xx}(I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \quad (2.64)$$

Por fim, a terceira componente da matriz de estados reflete as mudanças provocada pela atitude da aeronave nos estados, sumariza a influência gravitacional, descrita como:

$$A_{at} = \begin{bmatrix} 0 & -g \cos \theta_e \\ g \cos \phi_e \cos \theta_e & -g \sin \phi_e \sin \theta_e \\ -g \sin \phi_e \cos \theta_e & -g \cos \phi_e \sin \theta_e \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \Omega_e \sec \theta_e \\ -\Omega_e \cos \theta_e & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Podendo-se finalmente descrever a matriz A como a combinação da influência das forças e momentos promovidos pelas velocidades lineares, angulares e atitudes, descrito por:

$$A = \begin{bmatrix} A_{vl} & A_{va} & A_{at} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

É notável que houve a omissão do ângulo ψ , tendo em visto que a direção do voo, no plano horizontal, não apresenta repercussão nas forças, momentos ou em efeitos aerodinâmicos. Finalmente, ao adotar que as derivadas sejam prescritas na forma normalizada: $X_u \equiv \frac{X_u}{M_a}$, é possível reescrevê-la como:

$$A = \begin{bmatrix} X_u & (X_v + R_e) & (X_w - Q_e) & X_p & (X_q - W_e) & (X_r + V_e) & 0 & -g \cos \theta_e \\ (Y_u - R_e) & Y_v & (Y_w + P_e) & (Y_p + W_e) & Y_q & (Y_r - U_e) & g \cos \phi_e \cos \theta_e & -g \sin \phi_e \sin \theta_e \\ (Z_u + Q_e) & (Z_v - P_e) & Z_w & (Z_p - V_e) & (Z_q + U_e) & Z_r & -g \sin \phi_e \cos \theta_e & -g \cos \phi_e \sin \theta_e \\ L'_u & L'_v & L'_w & (L'_p + k_1 Q_e) & (L'_q + K_1 P_e - k_2 R_e) & (L'_r - k_2 Q_e) & 0 & 0 \\ M_u & M_v & M_w & \sigma_1 & M_q & \sigma_2 & 0 & 0 \\ N'_u & N'_v & N'_w & (N'_p - k_3 Q_e) & (N'_q - k_1 R_e - k_3 P_e) & (N'_r - k_1 Q_e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin \phi_e \tan \theta_e & \cos \phi_e \tan \theta_e & 0 & \Omega_e \sec \theta_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_e & -\sin \theta_e & -\Omega_e \cos \theta_e & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

E a matriz B como:

$$B = \begin{bmatrix} X_{\theta_0} & X_{\theta_{1s}} & X_{\theta_{1c}} & X_{\theta_{0T}} \\ Y_{\theta_0} & Y_{\theta_{1s}} & Y_{\theta_{1c}} & Y_{\theta_{0T}} \\ Z_{\theta_0} & Z_{\theta_{1s}} & Z_{\theta_{1c}} & Z_{\theta_{0T}} \\ L_{\theta_0} & L_{\theta_{1s}} & L_{\theta_{1c}} & L_{\theta_{0T}} \\ M_{\theta_0} & M_{\theta_{1s}} & M_{\theta_{1c}} & M_{\theta_{0T}} \\ N_{\theta_0} & N_{\theta_{1s}} & N_{\theta_{1c}} & N_{\theta_{0T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

2.5 Síntese

As análises pertinentes ao item anterior, referentes à matriz de estabilidade, estão assimiladas no trabalho de Talbot *et al.* (1982) e Padfield (2007). Posto isso, este trabalho atuará sob as seguintes premissas:

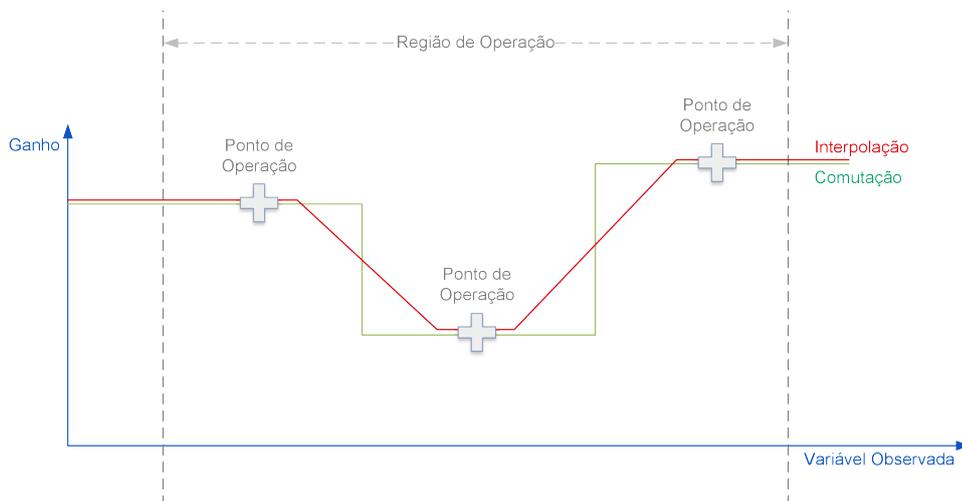
1. O rotor opera com velocidade rotacional constante, assim, equações de equilíbrio de forças e momentos podem ser deduzidas ao assumir que todo o sistema de forças atuando no helicóptero é conhecido;
2. O helicóptero é considerado como uma soma de subcomponentes de corpos rígidos (fuselagem, rotor, empenagens e estabilizadores). Logo, as contribuições de forças e os momentos de cada componente podem ser deduzidos no eixo da aeronave com o centro no CG;
3. A análise é baseada em suposições quasi-estáticas, o que significa que as mudanças nas componentes físicas ocorrem instantaneamente. As suposições feitas nas equações de equilíbrio do 6DoF são que a dinâmica do rotor e influxo de ordem superior é muito mais rápida do que os movimentos da fuselagem e tem tempo adequado para atingir o estado estacionário dentro dos modos de resposta do helicóptero. Portanto, as influências atuantes sobre o cubo do rotor são definidas como em estado estacionário e projetadas para o CG da aeronave, desconsiderando: oscilações oriundas das articulações de batimento, existência da articulação de avanço/atraso e torção e passeio do CG;
4. As equações de movimento do helicóptero são linearizadas em torno da condição de equilíbrio, já determinada, e as derivadas de estabilidade;
5. Assume-se que o plano x-z é o plano de simetria do helicóptero. Para estabilidade, o movimento no plano longitudinal e lateral é desacoplado. Uma premissa que só é considerada verdadeira quando a trajetória estudada ocorre com um plano de simetria longitudinal ou um plano de simetria lateral.
6. O ajuste e a análise de estabilidade estão associados a condições de voo estáveis e niveladas. A densidade do ar não se altera quando a aeronave ascende ou descende, pois, neste caso, as condições de equilíbrio seriam diferentes;
7. Os efeitos de estol e compressibilidade são desconsiderados por serem mais influentes em velocidades elevadas de voo a frente.

3 CONTROLE LINEAR DE PARÂMETROS VARIÁVEIS

Sistemas dinâmicos tendem à exigir controlares que atuam ativamente no sistema, para isto é necessário que este seja capaz de reaver informações oriundas da planta para atuação. Esse tipo de controle, por resposta dinâmica, em inglês *feedback control*, possui múltiplas soluções eficazes (quanto aos esforços de controles) e multivariáveis (quanto aos parâmetros observados) disponíveis e que satisfazem a estabilização majoritária dos sistemas.

Para isto, controladores por resposta dinâmica são normalmente projetados em vários pontos críticos de operação. Usando modelos linearizados do sistema dinâmico original, os controladores são arquitetados para atuar nas condições próximas destes pontos de equilíbrio e alternar em função de um, ou mais, parâmetros para operações em condições transitórias. A utilização de um conjunto de controladores lineares é um tipo de abordagem comum em sistemas não lineares, onde cada membro específico do conjunto fornece controle adequado para um ponto de operação diferente do sistema, ver Figura 11. E múltiplas variáveis observáveis são utilizadas para escalonar, em inglês *gain schedule variable*, e determinar na região de operação um controle linear apropriado.

Figura 11 – Ganhos programados

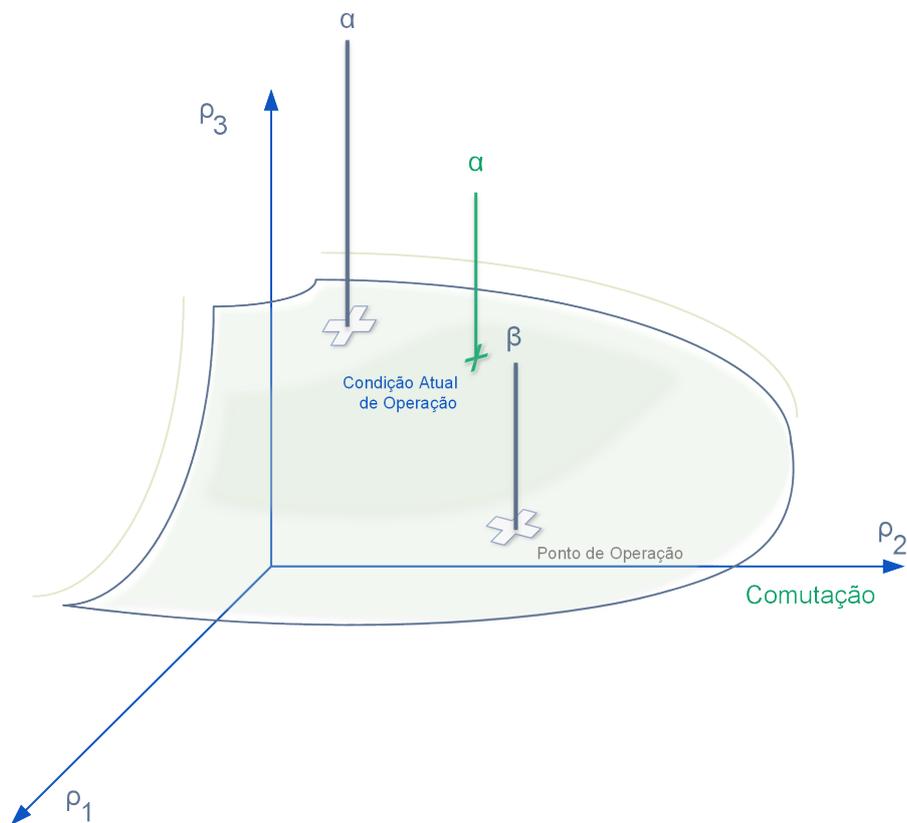


Fonte: o autor.

Esta técnica, que visa criar assim uma malha estável para uma determinada região do sistema não linear, possui como exemplo habitual para esta situação o controle de aeronaves. Neste caso, um conjunto de controladores é projetado em diferentes locais da malha em função de parâmetros relevantes como: o ângulo de ataque, que é o ângulo entre a superfície de sustentação da aeronave e a direção do seu movimento relativo ao ar, em inglês *Angle of Attack (AoA)*;

a velocidade do som (Mach); pressão dinâmica; entre outros. Em resumo, técnicas de ganho programado é uma abordagem em projetos de controle que concebe um controlador não linear para uma planta igualmente não linear, ao unir uma coleção de controladores lineares. Onde os controladores lineares são combinados em tempo real via comutação ou interpolação. São exatamente nestas condições, que o controle LPV irá se diferir dos demais controladores de ganhos programados - em relação aos seus transitórios.

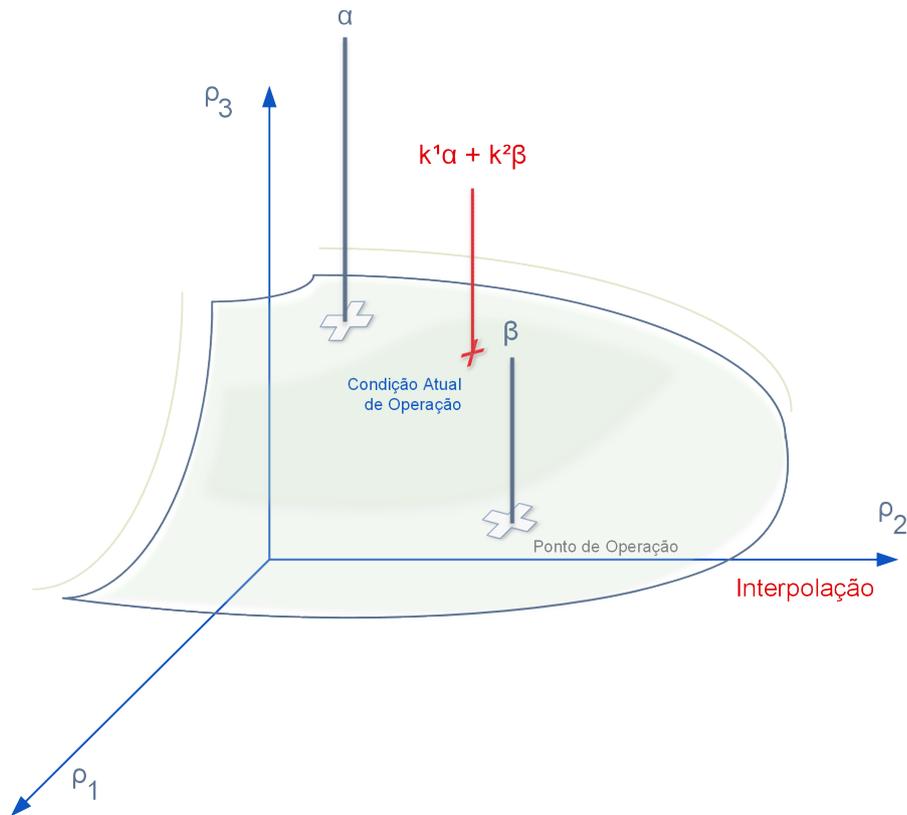
Figura 12 – Comutação



Fonte: o autor.

O controle tradicional escalonado utiliza normalmente técnicas de controle comutado. Para isto, este identifica a condição atual de operação da planta e define sua função de controle a partir do controlador linear no ponto crítico mais próximo e, caso as condições de operação mudem, o controle comuta para outro controlador linear cujo ponto crítico esteja mais próximo do novo ponto de operação. Esta operação irá se repetir dinamicamente, sempre alterando sua função de controle para um dos valores exatos dos controladores lineares. No exemplo presente na Figura 12 a condição de operação se encontra mais próxima do controlador ideal previsto em α logo, o controlador assumirá a função de controle pertinente à α .

Figura 13 – Interpolação



Fonte: o autor.

Técnicas atuais utilizam regularmente controle nebuloso, também conhecido como controle Fuzzy, para determinar a atuação do controlador. Nestes casos, o controlador final é definido proporcionalmente em função dos controladores próximos ao ponto de operação. Para isto, além da necessidade de definir os pontos críticos, torna-se necessário definir também as funções de pertinência, responsáveis por estabelecer as proporções entre os controladores lineares presentes em cada ponto crítico como no exemplo da Figura 13.

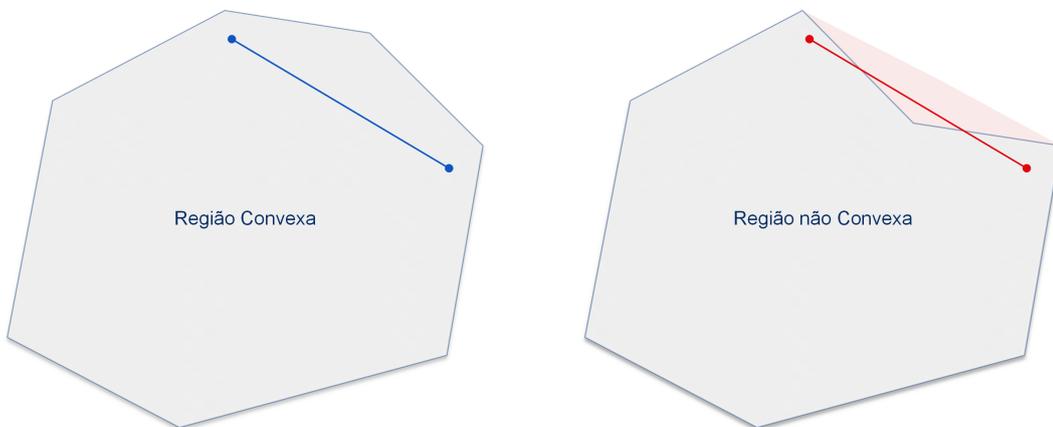
Para a formulação destes tipos de controladores é, portanto, importante a definição das pertinências e dos pontos críticos de operação. No exemplo do controle de aeronaves citados, alguns pontos críticos podem ser definidos em função: das velocidades características (velocidade de cruzeiro, velocidade para melhor razão de subida, entre outras); das condições de temperatura e pressão ao nível do mar e em altitude de cruzeiro; do AoA em cruzeiro, máximo e mínimo. Todavia, a configuração destes controladores multivariados tornam-se uma tarefa muito árdua, extensa e por vezes assumem um caráter empírico, diretamente vinculados ao projetista e à escolha dos pontos críticos. Determinar um controle eficaz similar ao do exemplo, com seis variáveis observáveis, é o equivalente a conhecer com exatidão um espaço de seis dimensões.

Em contrapartida, um novo arquétipo se apresenta nas técnicas lineares de parâmetros variáveis que sintetizam o controlador LPV matematicamente. Neste modelo, o controle LPV dispensa a definição dos pontos críticos de operação, ou mesmo das regras de pertinência. Sua formulação no espaço de estados requer apenas a determinação das regiões convexas de operação, definições muito similares ao EOV, e as funções que caracterizam a variação dos parâmetros. Para isto, o controle requer essas informações na forma de desigualdades matriciais lineares.

3.1 Análise Convexa

Um problema de otimização tradicional requer que o operador especifique seu conceito de decisão ótima. Para tal, é necessário quantificar a qualidade de uma decisão viável ao expressá-la em termos de uma única quantidade real comparativa. Torna-se imprescindível determinar uma função custo, ou função objetivo, que se deseje minimizar ou maximizar, a depender da interpretação da otimização. Conseqüentemente, é natural recorrer a um ramo de análise que forneça resultados ótimos dentro de uma região viável: análise convexa.

Figura 14 – Região Convexa



Fonte: o autor.

Um sistema é dito convexo quando, sendo este definido como contínuo, em um espaço vetorial linear seja capaz de satisfazer a seguinte equação:

$$\{x_1, x_2 \in \mathcal{C}\} \implies x \triangleq \{\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \mathcal{C}\} \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad (3.1)$$

Geometricamente, a equação impõe que para qualquer dois pontos de um conjunto convexo \mathcal{C} haverá um segmento de linha entre os dois pontos que também pertencerá ao conjunto \mathcal{C} , ver Figura 14. Caso isto seja verdade para qualquer ponto do sistema, será possível

implementar desigualdades matriciais, representados na forma estrita (a) e na forma não-estricta (b) pela equação a seguir:

$$(a) \quad F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (b) \quad F(x) \geq 0 \quad (3.2)$$

Onde $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes reais simétricas de dimensão n . As variáveis de decisão são incertezas reais escalares representadas por $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$. E a desigualdade apresentada impõe que $F(x)$ seja uma matriz positiva definida, ou seja, que apresente todos os autovalores positivos. De acordo com Boyd *et al.* (1994), a LMI presente na Equação 3.2 deve ter uma restrição convexa em x , ou seja, o conjunto $\{x | F(x) > 0\}$ deve ser convexo. Esta formulação para LMI pode representar uma grande diversidade de restrições convexas em x . Outra vantagem é que múltiplas LMI no formato $\{F^1(x), F^2(x), \dots, F^p(x)\}$ podem ser expressas como uma única LMI no formato:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F^1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F^2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^p(x) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Pode-se então concluir que um sistema de desigualdades matriciais lineares é um conjunto finito de desigualdades matriciais. De acordo com Mohammadpour e Scherer (2012), o uso de LMI para projeto de controladores LPV recebeu contribuições: (1) do desenvolvimento de métodos de análise e síntese baseados em sistemas lineares invariantes no tempo, do inglês *Linear Time-Invariant* (LTI); (2) da generalização desses resultados para os sistemas de LPV; (3) da ampla disponibilidade de softwares avançados de otimização convexa.

Essas condições permitem que problemas complexos de otimização sejam reduzidos à diversos problemas com características lineares. Para representar problemas neste formato, algumas técnicas podem ser exercidas: Complemento de Schur, Lema de Finsler, Lema da projeção, mudança de variáveis, entre outros. Simplifica-se uma grande variedade de problemas de otimização que surgem na teoria do sistema e controle para um padrão convexo ou quasiconvexo e como podem ser resolvidos numericamente de forma eficiente usando método de pontos interiores, a redução constitui uma solução para o problema original. Em contraste com a abordagem mais convencional que é de buscar analiticamente ou no domínio da frequência a solução para as desigualdades matriciais (MOHAMMADPOUR; SCHERER, 2012). Tornando assim as LMIs parte fundamental do controle LPV, sendo esta a linguagem por qual o controlador se orienta.

3.2 Principais desigualdades matriciais

Antes de introduzir o controle com parâmetros variáveis, torna-se necessário elucidar as desigualdades matriciais a serem implementadas, o que implica na definição da qualidade do controle ao estabelecer: o tempo de assentamento, o sobressinal máximo, o amortecimento do transiente e os esforços de controle. Um estudo futuro mais profundo pode associar essas definições com a saturação do sinal de controle e outras limitações da aeronave de asas rotativas.

As LMI devem ser capazes de alocar os polos do sistema em malha fechada de modo a satisfazer as condições prescritas pelo controle. Diversas técnicas de alocação de polos estão presentes na literatura e são amplamente analisadas. Neste trabalho, aborda-se três técnicas implementadas: região de D-Estabilidade, restrição por norma H_∞ e restrição por norma H_2 .

3.2.1 Região de D-Estabilidade

As regiões de D-estabilidade visam estabilizar as plantas em malha fechada ao deslocar os polos para regiões de maior estabilidade para a planta. Este tipo de técnica possibilita a restrição do tempo de assentamento e do sobressinal máximo, além de permitir amortecer o transiente. Para isso, técnicas que estabeleçam os polos em regiões limitadas por eixos verticais, horizontais, dentro de circunferências ou em setores cônicos são usuais. A região de D-estabilidade é definida pela desigualdade matricial na forma:

$$\mathcal{D} \triangleq \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha + \beta z + \beta' \bar{z} < 0\} \quad (3.4)$$

Assumindo α como simétrica e real, e β como real. A função característica $f_{\mathcal{D}}(z)$ é dada por:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \alpha + \beta z + \beta' \bar{z} < 0 \quad (3.5)$$

Notar que a função característica determina uma região LMI, sendo esta representada no plano complexo pela LMI em função de z e \bar{z} , o que torna estas regiões convexas. De acordo com Chilali e Gahinet (1996), a alocação de polos pode ser representada por uma região LMI em termos de uma matriz $m \times m$, uma contrapartida proposta no teorema de Gutman. Esta analogia pode ser introduzida pelo seguinte produto de Kronecker:

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) \triangleq \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta' \otimes (AX)' < 0, \quad X \succ 0 \quad (3.6)$$

Gerando assim, uma relação $(X, AX, XA^T) \longleftrightarrow (1, z, \bar{z})$.

3.2.1.1 Regiões Verticais e Horizontais

As primeiras regiões de interesse são as limitadas por linhas horizontais e verticais.

No caso horizontal, a região apresentada na Figura 15 apresenta $h_2 < \text{Im}(z) < h_1$, resultando em:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = h_1 > \text{Im}(z) \rightarrow h_1 - \frac{(z - \bar{z})}{2} > 0 \rightarrow 2h_1 - z + \bar{z} > 0 \quad (3.7)$$

$$f_{\mathcal{D}}(z) = h_2 < \text{Im}(z) \rightarrow h_2 - \frac{(z - \bar{z})}{2} < 0 \rightarrow 2h_2 - z + \bar{z} < 0 \quad (3.8)$$

Tendo em vista que $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$. Através da relação provida pelo produto de Kronecker:

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = 2h_1X - A_{\mathbb{S}}X + XA'_{\mathbb{S}} \succ 0 \quad (3.9)$$

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = 2h_2X - A_{\mathbb{S}}X + XA'_{\mathbb{S}} \prec 0 \quad (3.10)$$

Para as regiões com limitações verticais há uma limitação apresenta $v_1 < \text{Re}(z) < v_2$:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = v_1 < \text{Re}(z) \rightarrow v_1 - \frac{(z + \bar{z})}{2} < 0 \rightarrow 2v_1 - z - \bar{z} < 0 \quad (3.11)$$

$$f_{\mathcal{D}}(z) = v_2 > \text{Re}(z) \rightarrow v_2 - \frac{(z + \bar{z})}{2} > 0 \rightarrow 2v_2 - z - \bar{z} > 0 \quad (3.12)$$

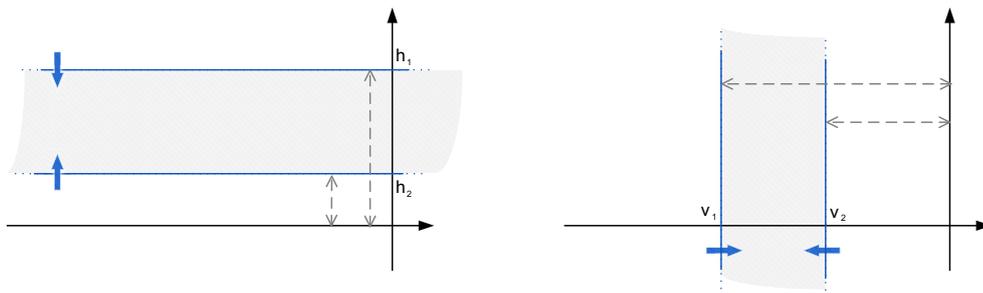
Tendo em vista que $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$. De maneira similar pode-se obter:

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = 2v_1X - A_{\mathbb{S}}X - XA'_{\mathbb{S}} \prec 0 \quad (3.13)$$

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = 2v_2X - A_{\mathbb{S}}X - XA'_{\mathbb{S}} \succ 0 \quad (3.14)$$

As Equações 3.27 e 3.28, assim como as Equações 3.13 e 3.14, são desigualdades matriciais comuns para a realocação de polos, e são implementadas usualmente em controles lineares de parâmetros variáveis, tendo $\{A_{\mathbb{S}}, B_{\mathbb{S}}, C_{\mathbb{S}}, D_{\mathbb{S}}\}$ como as matrizes de estado. Nesses casos, v_1 e v_2 adotam valores negativos, a fim de garantir a estabilidade.

Figura 15 – Região de D-Estabilidade Vertical e Horizontal



Fonte: o autor.

3.2.1.2 Regiões Circulares e Cônicas

Outras regiões de interesse são as limitadas por circunferências e cones, ver Figura 16. De maneira simplificada, a região circular pode ser representada por:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -r & q+z \\ q+\bar{z} & -r \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Enquanto a região cônica é representada por:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta (z + \bar{z}) & \cos \theta (z - \bar{z}) \\ \cos \theta (\bar{z} - z) & \sin \theta (\bar{z} + z) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

De forma equivalente ao item anterior, pode-se implementar a transformação apresentada na Equação 3.6, utilizando a relação $(X, AX, XA^T) \longleftrightarrow (1, z, \bar{z})$ para encontradas as regiões através das desigualdades matriciais:

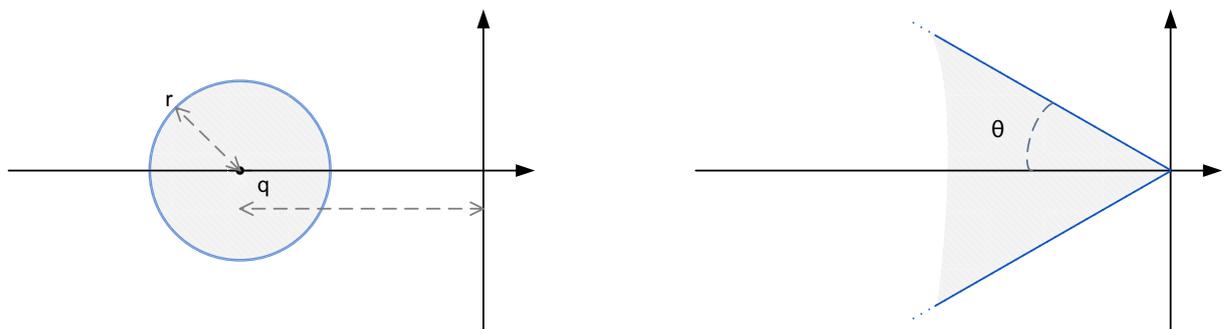
$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = \begin{bmatrix} -rX & qX + A_{\mathbb{S}}X \\ qX + XA'_{\mathbb{S}} & -rX \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.17)$$

Enquanto a região cônica é representada por:

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = \begin{bmatrix} \sin \theta (A_{\mathbb{S}}X + XA'_{\mathbb{S}}) & \cos \theta (A_{\mathbb{S}}X - XA'_{\mathbb{S}}) \\ \cos \theta (XA'_{\mathbb{S}} - A_{\mathbb{S}}X) & \sin \theta (A_{\mathbb{S}}X + XA'_{\mathbb{S}}) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.18)$$

Importante salientar que a matriz $A_{\mathbb{S}}$ apresentada nas equações $M_{\mathcal{D}}(A, X)$ é referente à matriz do espaço de estados de todo o sistema, incluindo planta e controlador. O que implica que essas derivações serão diferentes caso haja realimentação por saída, ou por estados, ou caso o controlador seja um ganho, ou matricial.

Figura 16 – Região de D-Estabilidade Circular e Cônica



Fonte: o autor.

3.2.2 Norma H_∞ e H_2

Conforme Skogestad (2005), o termo H , que é puramente matemático, faz alusão à expressão em inglês "*Hardy Space*", ou seja um conjunto de funções de transferência onde as normas " ∞ -norm" e "2-norm" são implementadas. Apresentando, em seguida, as normas H_2 e H_∞ como técnicas para quantificar e melhorar a performance da resposta do sistema, por meio da relação entre as entradas exógenas (w), entradas do sistema (u) e a saída do sistema (z_2 e z_∞). A norma H_∞ advém do valor máximo, ou valor de pico, da resposta em frequência, dada por:

$$\|f(s)\|_\infty \triangleq \max_w |f(jw)| \quad (3.19)$$

O objetivo principal é reduzir o pico, que se apresenta no domínio da frequência, das saídas da planta. De forma similar, o símbolo H_2 representa o "*Hardy Space*" das funções de transferência com limitação "2-norm", onde esta mensura a área descrita pela função de transferência:

$$\|f(s)\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(jw)|^2 \partial w \right)^{0.5} \quad (3.20)$$

Logo, pode-se resumir que o objetivo da H_∞ é minimizar o valor singular de pico da resposta, enquanto o H_2 busca minimizar todo o espectro de frequência, ou seja, reduzir o esforço total de controle. Resumidamente, pode-se apresentar o H_∞ na forma de LMI:

$$\begin{bmatrix} A_S X + X A'_S & B & X C'_S \\ B'_S & -\gamma I & D'_S \\ C_S X & D_S & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.21)$$

Enquanto, H_2 pode ser representado na forma de LMI:

$$\begin{bmatrix} Y & C_S X \\ X C'_S & X \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.22)$$

Similar ao apresentado na Seção 3.2.1, as matrizes representas nas Equações 3.21 e 3.35 são referente à matriz do espaço de estados de todo o sistema, e devem ser modificadas em função da topologia de controle aplicado. Estas conversão impõe alterações em todas as LMIs apresentadas até aqui, tendo em vista que haverá uma correlação entre a matriz de estado em malha aberta (A_{ol}), e a matriz de estados em malha fechada (A_{cl}).

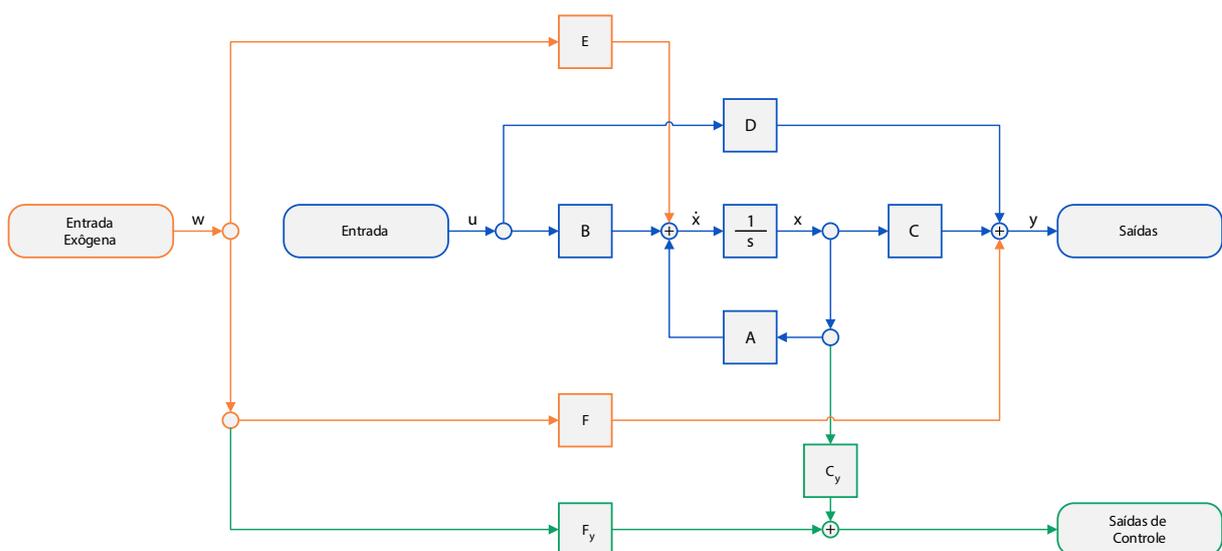
3.3 Controle LPV

Sistemas lineares com parâmetros variáveis são sistemas dinâmicos cuja definição matemática depende de parâmetros que se alteram ao decorrer do tempo. Estes parâmetros ρ são definidos como limitados a fim de assumirem valores dentro de um conjunto fechado e convexo, por vezes delineado como um polítopo compacto. Matematicamente, estes sistemas de LPV são regularmente descritos por equações na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) + E(\rho(t))w(t), \quad t \geq 0 \\ z(t) &= C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) + F(\rho(t))w(t), \\ y(t) &= C_y(\rho(t))x(t) + F_y(\rho(t))w(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Neste caso, o vetor x representa os estados da planta (e deverá apresentar oito dimensões), o vetor z traduz as saídas da planta (com um total de quatro dimensões), o vetor u exprime as entradas de controle da planta (neste caso haverá um vetor de quatro dimensões) e o vetor w representa as entradas, regularmente consideradas como entradas de distúrbio (possuindo quatro dimensões). Pelo sistema de equações apresentados na 3.23 é notável que assume-se que todas as matrizes no espaço de estados possam ser funções da variável de controle ρ , conforme apresentada no Capítulo 2 assumiu-se as matrizes A e B como função da variável de controle ρ .

Figura 17 – Modelo do Sistema LPV



Fonte: o autor.

3.3.1 Estabilização quadrática por realimentação de estados

A priori, dado o sistema LPV, busca-se identificar um controlador $K(\rho(t))$ que seja capaz de estabilizar a planta em todo espectro de velocidade. Neste item, analisa-se a possibilidade de estabilizar a planta através da realimentação de estado com base no vetor de estados apresentados no capítulo anterior, na Equação 2.58. Para facilitar a leitura, defini-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\triangleq A(\rho(t)), & \mathbf{B} &\triangleq B(\rho(t)), & \mathbf{C} &\triangleq C(\rho(t)), & \mathbf{D} &\triangleq D(\rho(t)) \\ \mathbf{E} &\triangleq E(\rho(t)), & \mathbf{F} &\triangleq F(\rho(t)), & \mathbf{K} &\triangleq K(\rho(t)) & \mathbf{Z} &\triangleq Z(\rho(t)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

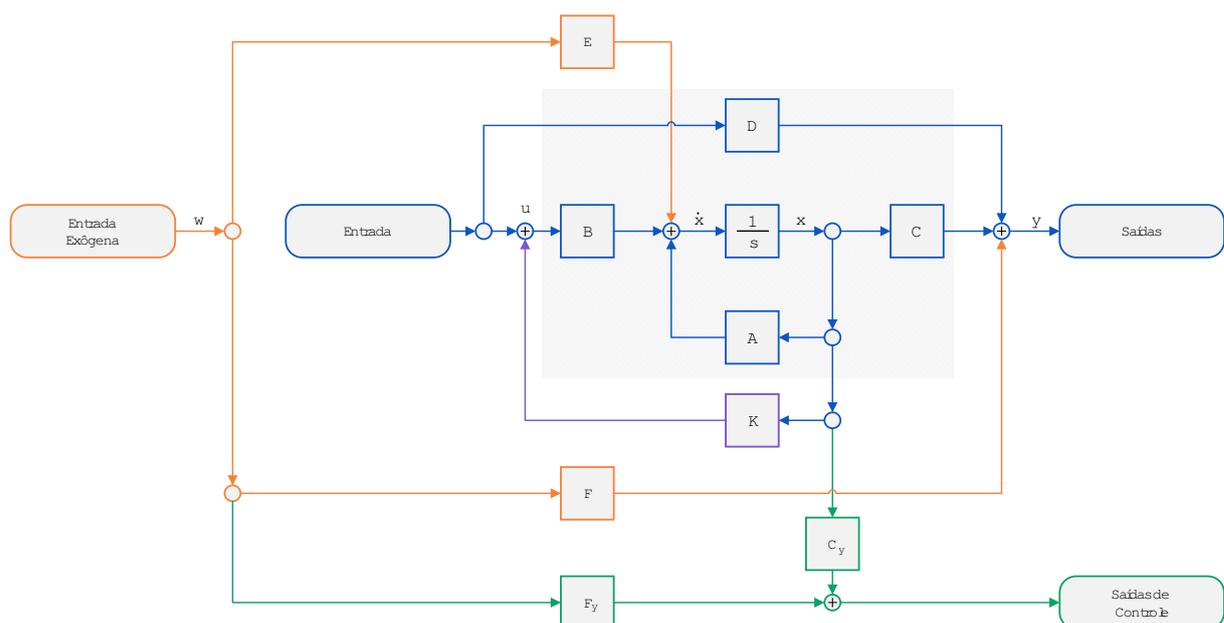
As diferenças matriciais apresentadas a seguir são uma expansão das equações expostas de D-estabilidade horizontal (Equação 3.27 e 3.28), vertical (Equação 3.13 e 3.14), circular (Equação 3.17), e das normas (Equação 3.21 e 3.35) para o sistema apresentado na Figura 17 com realimentação de estados. Neste caso, o sistema adota a topologia apresentada na Figura 18, e passa a diferir quanto ao sinal na entrada da planta, assumindo:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}x(t) + \mathbf{B}r(t) + \mathbf{E}w(t). \quad (3.25)$$

Para isto, torna-se necessário admitir que o sinal de controle é dado por:

$$u = r(t) + \mathbf{K}x(t) \quad \rightarrow \quad u = \mathbf{Z}\mathbf{X}^{-1}x(t), \quad t = 0 \quad (3.26)$$

Figura 18 – Modelo do Sistema LPV com Realimentação de Estados



Fonte: o autor.

De maneira sucinta, pode-se adotar $A_S = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})$. Ao assumir $Z = \mathbf{K}X$, ou seja, $\mathbf{K} = ZX^{-1}$, obtêm-se as equações para as regiões de d-estabilidade:

$$2h_1X - A_S X + X A_S' \succ 0 \quad \rightarrow \quad 2h_1X - \mathbf{A}X + X \mathbf{A}' - \mathbf{B}Z + \mathbf{Z}'\mathbf{B}' \succ 0 \quad (3.27)$$

$$2h_2X - A_S X + X A_S' \prec 0 \quad \rightarrow \quad 2h_2X - \mathbf{A}X + X \mathbf{A}' - \mathbf{B}Z + \mathbf{Z}'\mathbf{B}' \prec 0 \quad (3.28)$$

$$2v_1X - A_S X - X A_S' \prec 0 \quad \rightarrow \quad 2v_1X - \mathbf{A}X - X \mathbf{A}' - \mathbf{B}Z - \mathbf{Z}'\mathbf{B}' \prec 0 \quad (3.29)$$

$$2v_2X - A_S X - X A_S' \succ 0 \quad \rightarrow \quad 2v_2X - \mathbf{A}X - X \mathbf{A}' - \mathbf{B}Z - \mathbf{Z}'\mathbf{B}' \succ 0 \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + A_S X \\ qX + X A_S' & -rX \end{bmatrix} \prec 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -rX & qX + \mathbf{A}X + \mathbf{B}Z \\ qX + X \mathbf{A}' + \mathbf{Z}'\mathbf{B}' & -rX \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.31)$$

Conforme demonstrado por Briat (2015) o sistema LPV poderá ser estabilizado caso haja uma matriz $X \in \mathbb{S}_{>0}^n$ e uma função matricial $K : \delta_\rho \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$. Assim, temos a LMI:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}X + \mathbf{B}Z] + [\mathbf{A}X + \mathbf{B}Z]' & \mathbf{E} & [\mathbf{C}X + \mathbf{D}K]' \\ * & -\gamma I_p & \mathbf{F}' \\ * & * & -\gamma I_q \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.32)$$

Na Equação 3.32, a identidade I_p tem dimensão equivalente as entradas distúrbios do sistema, e a I_q apresenta uma ordem igual ao número de saídas da planta. A simbologia representado por asterisco (*) identifica que o elemento da matriz é equivalente à transposta correspondente do elemento simétrico. Por fim, a função $He(x)$ representa a Hermitiana da função, e pode ser representada por:

$$He[\mathbf{A}X + \mathbf{B}Z] = [\mathbf{A}X + \mathbf{B}Z] + [\mathbf{A}X + \mathbf{B}Z]' \quad (3.33)$$

Ou seja, a função de controle é, igualmente, uma matriz definida em função da variável de controle ρ . Este tipo de controle, produzido pela Equação 3.32, representa um controle quadrático por realimentação de estados com a restrição de ganho L_2 , pela norma H_∞ e alocação de polos no lado esquerdo a fim de estabilizar a planta. Em seu artigo, Chilali e Gahinet (1996) elucida como obter um controle similar, com norma H_∞ e H_2 , com alocação de pólos no plano esquerdo, que pode ser derivado da Equação 3.21:

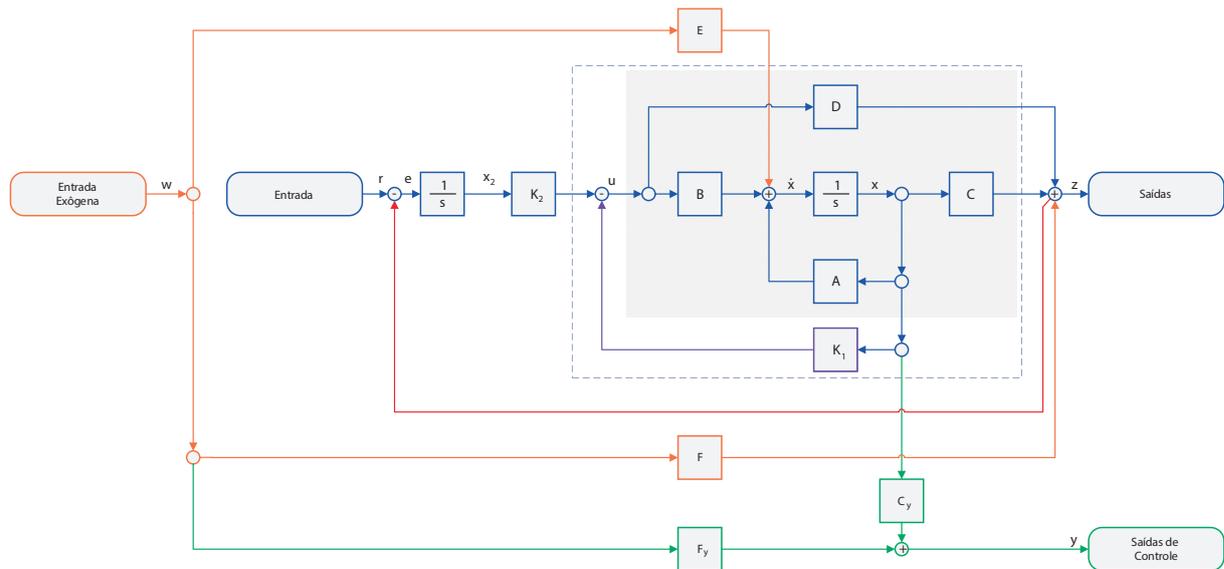
$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}X + \mathbf{B}Z] + [\mathbf{A}X + \mathbf{B}Z]' & \mathbf{E} & [\mathbf{C}X + \mathbf{D}K]' \\ * & I_p & \mathbf{F}' \\ * & * & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{C}X + \mathbf{D}Z \\ * & X \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.35)$$

3.3.2 Estabilização por erro de Estado Estacionário através de Controle com Integrador

De forma análoga ao item anterior, busca-se definir um controle que seja capaz de estabilizar a planta. Neste caso, a técnica de estabilização apresentada por Nise (2007) pode ser observada na figura a seguir:

Figura 19 – Modelo do Sistema LPV com Realimentação de Estados



Fonte: o autor.

O sistema, que apresenta dois integradores, pode ser inicialmente definido em função de $\dot{x}(t)$ e $\dot{x}_2(t)$ pelo seguinte sistemas de equações:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}w(t), \quad t \geq 0$$

$$\dot{x}_2(t) = r(t) - z(t) \tag{3.36}$$

$$z(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) + \mathbf{F}w(t)$$

Como a saída $z(t)$ é definida pelo sistema, pode-se obter a equação para o sistema da Figura 19 unicamente em função da entrada de controle, dos estados, da entrada exógena e da referência do sistema:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}w(t), \quad t \geq 0$$

$$\dot{x}_2(t) = r(t) - \mathbf{C}x(t) - \mathbf{D}u(t) - \mathbf{F}w(t) \tag{3.37}$$

$$z(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) + \mathbf{F}w(t)$$

Se admitido que o sinal de controle é dado neste caso por:

$$u = -\mathbf{K}_1x(t) + \mathbf{K}_2x_2(t) \quad \rightarrow \quad u = \mathbf{Z}X^{-1}x(t), \quad t = 0 \tag{3.38}$$

Para dar continuidade ao desenvolvimento do sistema em malha fechada, torna-se necessário apresentá-lo na forma matricial, podendo ser retrato pelo sistema de matrizes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{D} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{F} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ \begin{bmatrix} z(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{F} \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Onde a função de controle é dada por:

$$u(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Sendo assim, é possível substituir o sinal de controle $u(t)$ da Equação 3.40 na Equação 3.39 com intuito de definir o sistema equivalente em malha fechada representado pelas matrizes A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} , D_{cl} , E_{cl} e F_{cl} na topologia da Figura 17. Sendo este o sistema a ser estabilizado e implementado junto as desigualdade matriciais apresentadas anteriormente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1) & \mathbf{BK}_2 \\ (-\mathbf{C} + \mathbf{DK}_1) & -\mathbf{DK}_2 \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{F} \end{bmatrix}}_{E_{cl}} w(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{cl}} r(t) \\ \begin{bmatrix} z(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{C} + \mathbf{DK}_2) & \mathbf{DK}_2 \end{bmatrix}}_{C_{cl}} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{F_{cl}} w(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Finalmente, pode-se implementar as LMIs de d-estabilidade e de estabilização por norma H_2 e H_∞ para o sistema de malha fechada apresentada na Equação 3.41.

$$2h_1X - A_{\mathbb{S}}X + XA'_{\mathbb{S}} \succ 0 \quad \rightarrow \quad 2h_1X - (A_{cl}X) + (A_{cl}X)' \succ 0 \quad (3.42)$$

$$2h_2X - A_{\mathbb{S}}X + XA'_{\mathbb{S}} \prec 0 \quad \rightarrow \quad 2h_2X - (A_{cl}X) + (A_{cl}X)' \prec 0 \quad (3.43)$$

$$2v_1X - A_{\mathbb{S}}X - XA'_{\mathbb{S}} \prec 0 \quad \rightarrow \quad 2v_1X - (A_{cl}X) - (A_{cl}X)' \prec 0 \quad (3.44)$$

$$2v_2X - A_{\mathbb{S}}X - XA'_{\mathbb{S}} \succ 0 \quad \rightarrow \quad 2v_2X - (A_{cl}X) - (A_{cl}X)' \succ 0 \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + A_{\mathbb{S}}X \\ qX + XA'_{\mathbb{S}} & -rX \end{bmatrix} \prec 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -rX & qX + (A_{cl}X) \\ qX + (A_{cl}X)' & -rX \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.46)$$

Onde as desigualdades matriciais das normas H_2 e H_∞ são:

$$\begin{bmatrix} [A_{cl}X + B_{cl}Z] + [A_{cl}X + B_{cl}Z]' & E_{cl} & [C_{cl}X + D_{cl}Z]' \\ * & I_p & F'_{cl} \\ * & * & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} Y & C_{cl}X + D_{cl}Z \\ * & X \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.48)$$

Contudo é preciso definir o valor de $A_{cl}X$ e $C_{cl}X$, de forma a reaver valores conhecidos de Z , que produzam $Z = KX$, partindo do pressuposto que Z possa ser definido por:

$$Z_1 = K_1 * X_1 \quad (3.49)$$

$$Z_2 = K_2 * X_2 \quad (3.50)$$

A despeito da equação para substituição de variável ser similar a do item anterior, o controlador K não pode ser definido sem levar em consideração a matrix simétrica X :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X'_3 & X_2 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}, \quad X_3 = 0 \quad (3.51)$$

Esta prescrição dos valores, onde $X_3 = 0$, é dada para satisfazer a seguinte igualdade:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix}}_Z = \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}}_X \quad (3.52)$$

Como as Equações 3.49 e 3.50 foram satisfeitas pela formulação matricial em 3.53 é possível formar o controle K que possa ser definido futuramente pela equação:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}}_K = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix}}_Z \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}^{-1}}_{X^{-1}} \quad (3.53)$$

Ao fim, têm-se que $A_{cl}X$ e $C_{cl}X$ são definidos por:

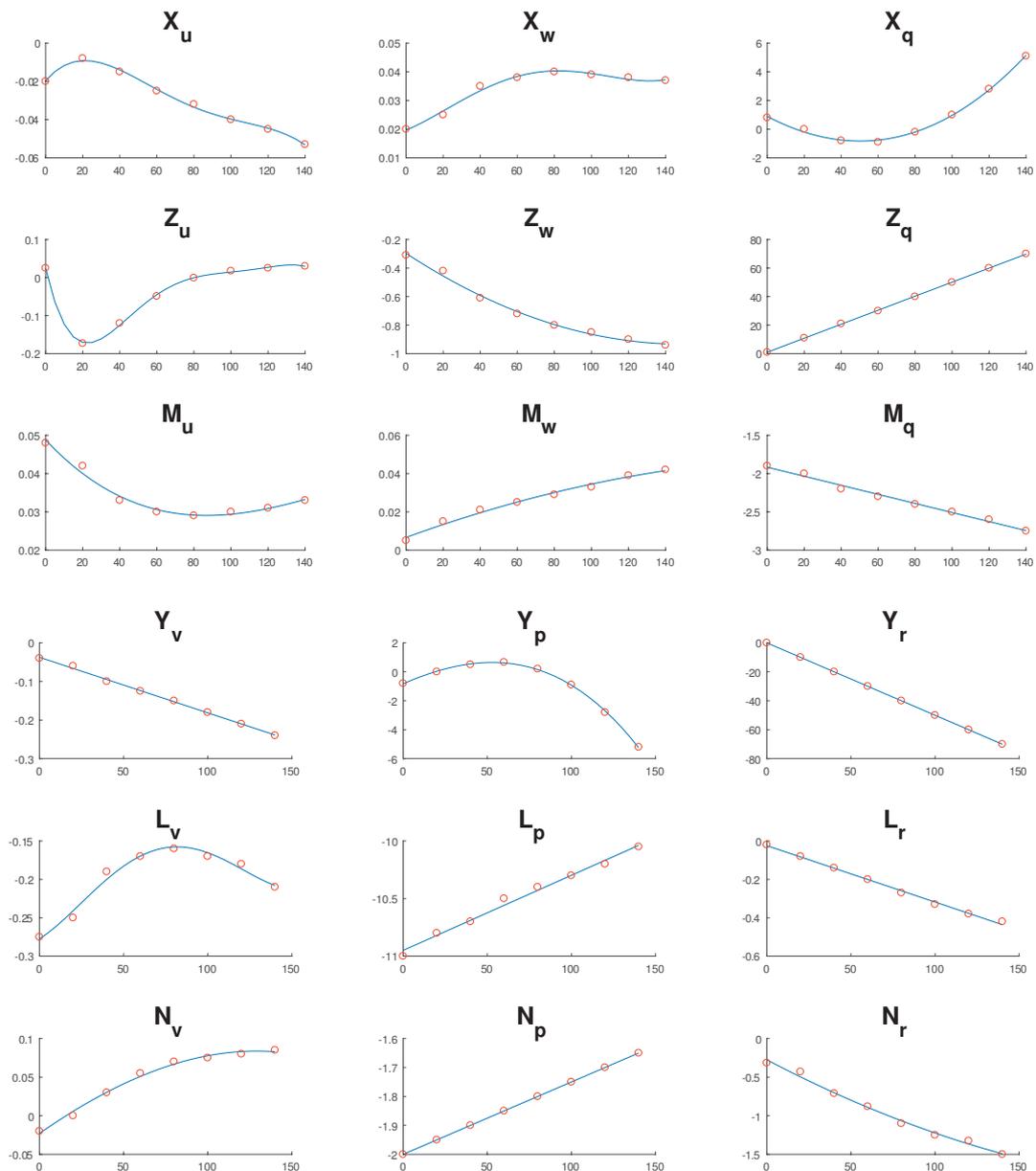
$$A_{cl}X = \overbrace{\begin{bmatrix} (A - BK_1) & BK_2 \\ (-C + DK_1) & -DK_2 \end{bmatrix}}^{A_{cl}} \overbrace{\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}}^X = \begin{bmatrix} (AX_1 - BZ_1) & BZ_2 \\ (-CX_1 + DZ_1) & -DZ_2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$C_{cl}X = \overbrace{\begin{bmatrix} (C + DK_1) & DK_2 \end{bmatrix}}^{C_{cl}} \overbrace{\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}}^X = \begin{bmatrix} (CX_1 - DZ_1) & DZ_2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

4 RESULTADOS

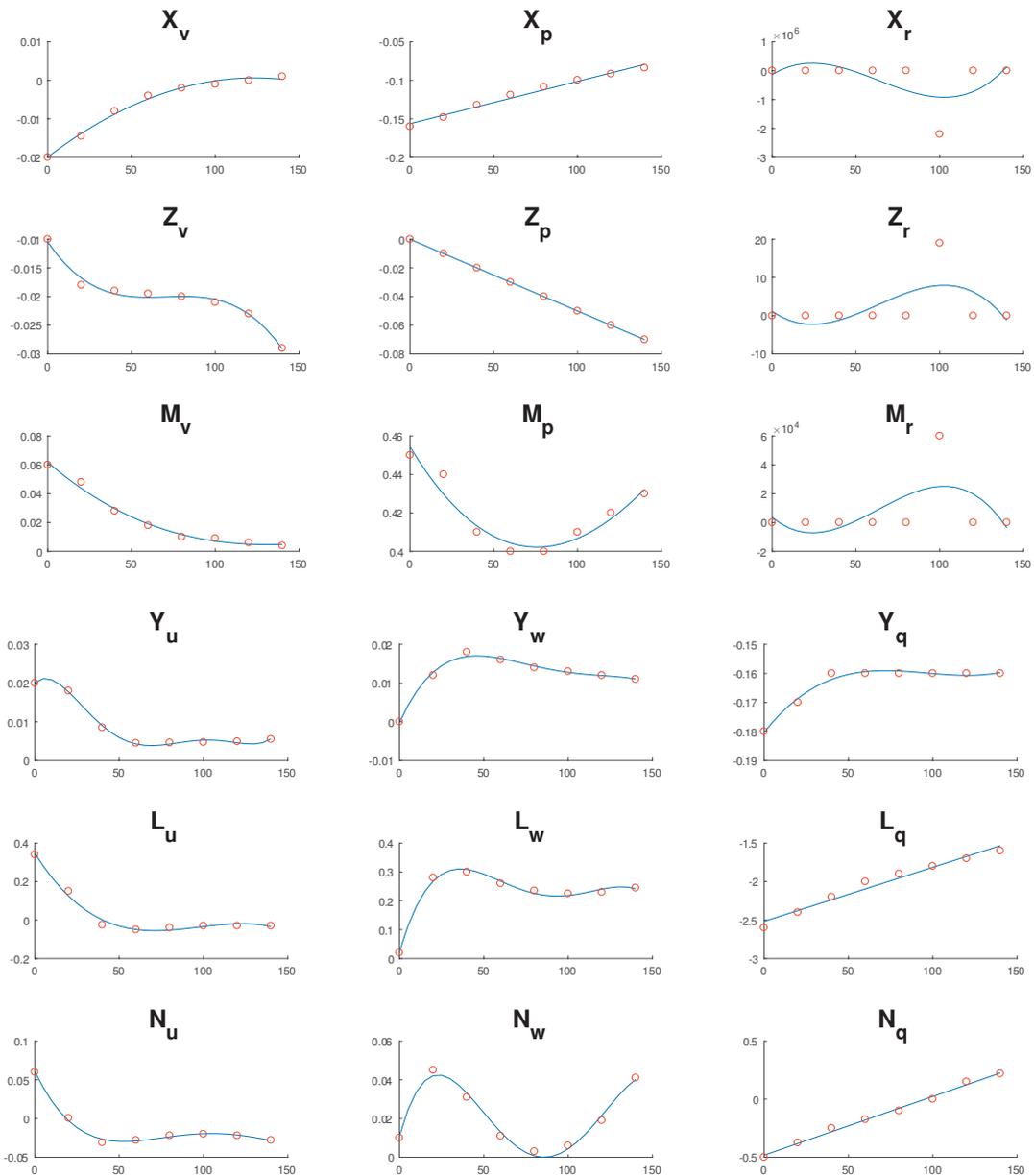
Antes de elaborar os ensaios, é importante salientar as prerrogativas intrínsecas à estes. Cada uma das incógnitas apresentadas, e desenvolvidas ao longo do Capítulo 2, estão representadas aqui em função da velocidade da aeronave. Cada variável apresentou uma amostra em velocidades padrões oscilando entre $\{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120\}$ nós, para concatená-las em uma única matriz e, assim, produzir uma desigualdade matricial com intuito de realizar a análise convexa apresentada no Capítulo 3, torna-se necessário realizar um regressão. Os dados, obtidos da obra de Padfield (2007), são retratos nas Figuras 21 à 23:

Figura 20 – Incógnitas, Parte 1



Fonte: o autor.

Figura 21 – Incógnitas, Parte 2



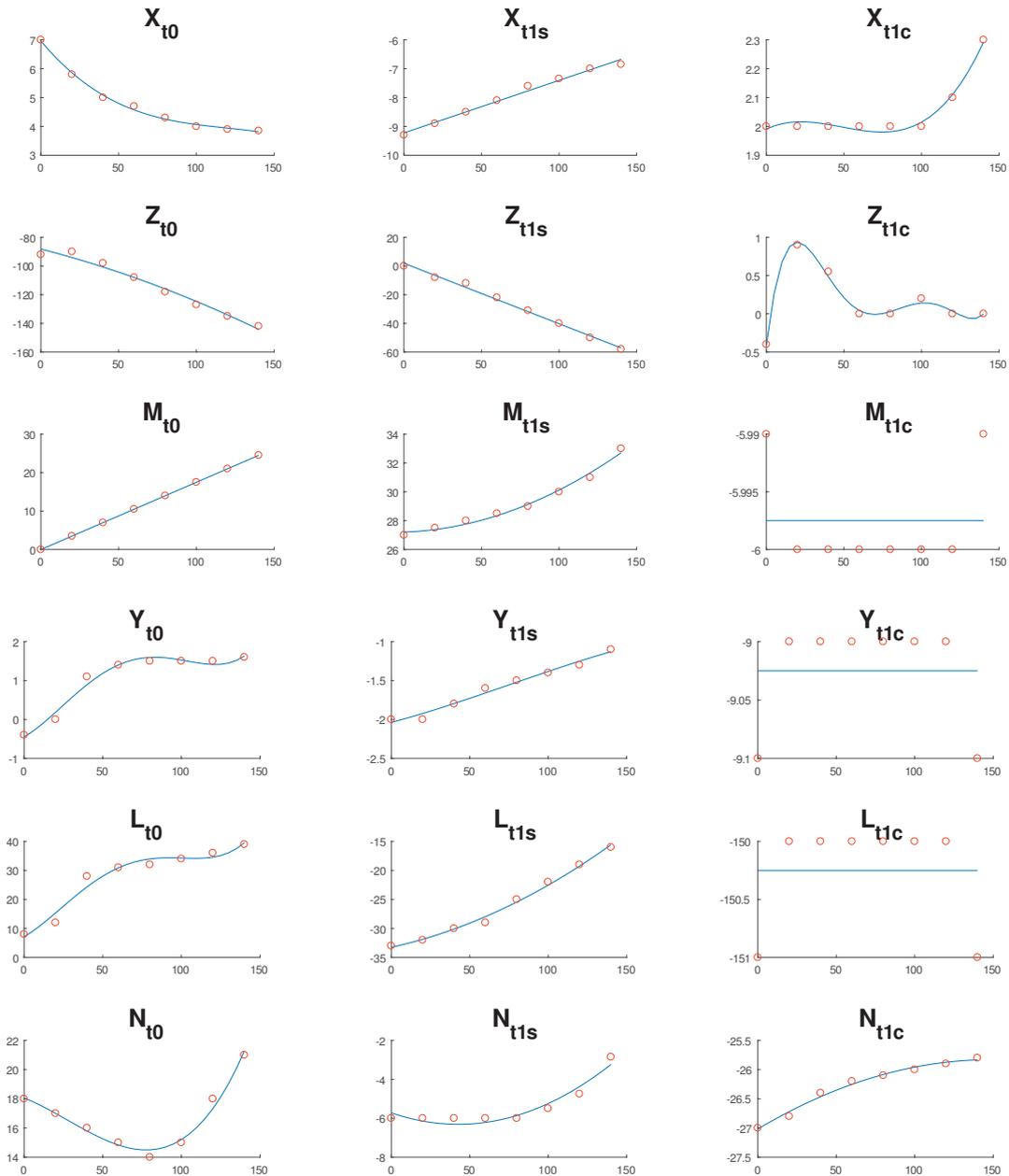
Fonte: o autor.

O ajuste de curva foi realizado com regressões de 2ª ordem até 5ª ordem - ver Apêndice A para informação quanto à regressão implementada em cada incógnita. As Figuras 20 à 23 apresentam as derivadas das forças normalizadas pela massa da aeronave (M_a) e as derivadas dos momentos normalizados pelos respectivos momentos de inércia, conforme matriz 2.67. Além disso, a seguinte aproximação foi considerada:

$$X_v \equiv X_v + R_e \quad (4.1)$$

A equação acima corrobora ao incluir as respectivas velocidades de equilíbrio, facilitando o desenvolvimento da matriz A e a obtenção da planta de controle em malha fechada.

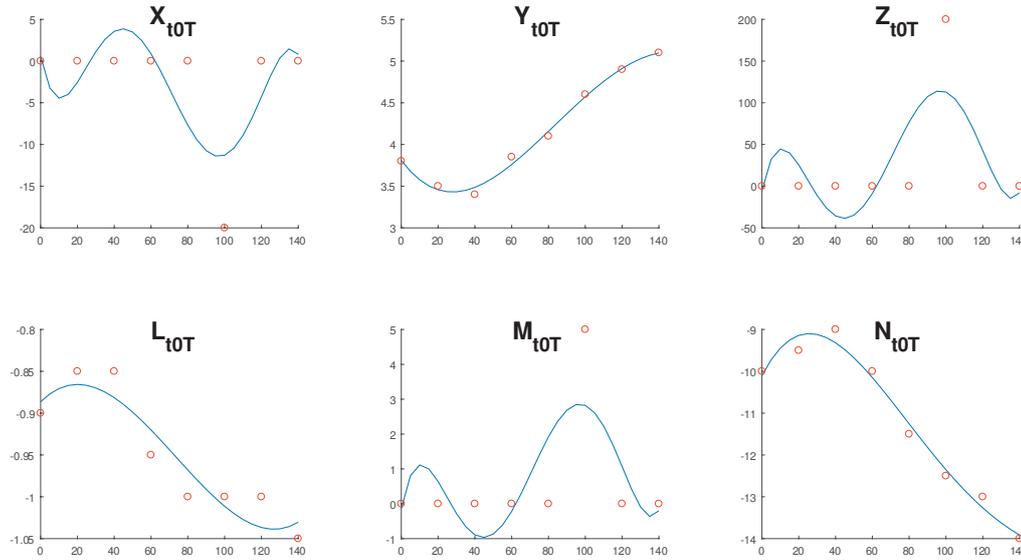
Figura 22 – Incógnitas, Parte 3



Fonte: o autor.

Outro detalhe notório ocorre nas incógnitas associadas à X_r , Z_r , M_r , $X_{\theta_{0T}}$, $Z_{\theta_{0T}}$ e a $M_{\theta_{0T}}$ que não estão apropriadamente definidas e, logo, a aproximação da curva não reflete devidamente o conjunto de pontos. Nesses casos há uma descontinuidade quando a velocidade se aproxima dos 185 m/s (100 nós). Matematicamente, a curva mais próxima para associar esses casos seria um impulso próximo da descontinuidade, todavia, tendo em visto que a causa do cisão não é apresentada pelo autor, optou-se por não adotar a solução do ajuste de curva para a planta do projeto, e zerar a influência da momento angular de guinada e dos pedais para as respectivas forças e momentos.

Figura 23 – Incógnitas, Parte 4



Fonte: o autor.

4.1 Compendo a planta do projeto

Através do Capítulo 2 e do item anterior é possível extrair os dados necessário para compor a planta do projeto e, em seguida, modelar a planta em ambiente virtual como apresentado na Figura 28. As matrizes implementadas no projeto adotaram $\omega_a = 0$, e, na condição de equilíbrio, a velocidade angular nula, $|(P_e, Q_e, R_e)| = 0$, e velocidade linear não nula, $(U_e, V_e, W_e) = (-0.9, 0, 0.3)$, obtendo, conforme o Apêndice B, as matrizes da figuras 26 e 27:

Figura 24 – Matriz A implementada em Projeto

$$\begin{bmatrix}
 X_u & R_e + X_v & X_w - Q_e & X_p & X_q - W_e & V_e + X_r & 0 & -g \cos(\Theta_e) \\
 Y'_u - R_e & Y_v & P_e + Y_w & W_e + Y_p & Y_q & Y_r - U_e & g \cos(\Phi_e) \cos(\Theta_e) & -g \sin(\Phi_e) \sin(\Theta_e) \\
 Q_e + Z_u & Z_v - P_e & Z_w & Z_p - V_e & U_e + Z_q & Z_r & -g \cos(\Theta_e) \sin(\Phi_e) & -g \cos(\Phi_e) \sin(\Theta_e) \\
 Li_u & Li_v & Li_w & Li_p + Q_e k_1 & Li_q + P_e k_1 - R_e k_2 & Li_r - Q_e k_2 & 0 & 0 \\
 M_u & M_v & M_w & M_p - \frac{2I_{xz}P_e - R_e(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}} & M_q & M_r + \frac{2I_{xz}R_e - P_e(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}} & 0 & 0 \\
 Ni_u & Ni_v & Ni_w & Ni_p + Q_e k_3 & Ni_q - P_e k_3 - R_e k_1 & Ni_r - Q_e k_1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \sin(\Phi_e) \tan(\Theta_e) & \cos(\Phi_e) \tan(\Theta_e) & 0 & \frac{\Omega_a}{\cos(\Theta_e)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\Phi_e) & -\sin(\Phi_e) & -\Omega_a \cos(\Theta_e) & 0
 \end{bmatrix}$$

Fonte: o autor.

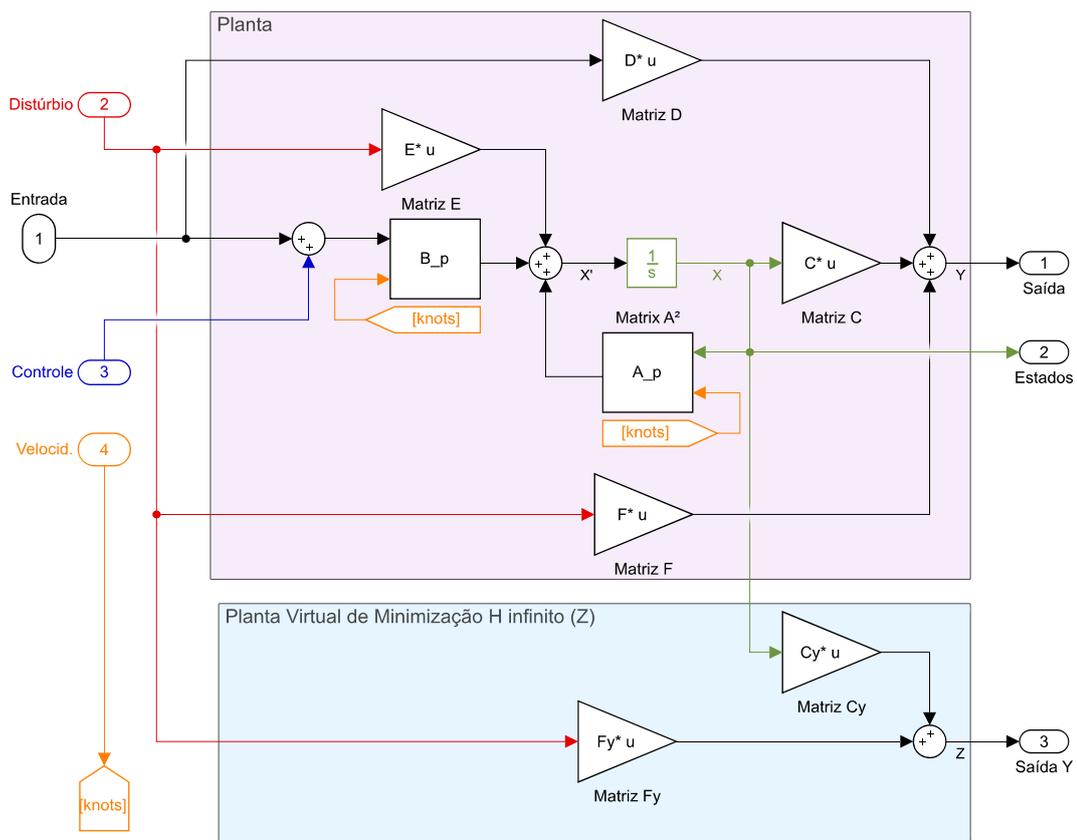
Figura 25 – Matriz B implementada em Projeto

$$\begin{bmatrix}
 X_{t0} & X_{t1s} & X_{t1c} & X_{t0T} \\
 Y_{t0} & Y_{t1s} & Y_{t1c} & Y_{t0T} \\
 Z_{t0} & Z_{t1s} & Z_{t1c} & Z_{t0T} \\
 L_{t0} & L_{t1s} & L_{t1c} & L_{t0T} \\
 M_{t0} & M_{t1s} & M_{t1c} & M_{t0T} \\
 N_{t0} & N_{t1s} & N_{t1c} & N_{t0T} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Fonte: o autor.

Tendo atribuído o valor às duas matrizes que regem os estados da planta, já é possível remontá-la no diagrama de espaço de estados e construir um controlador LPV por realimentação de estados. Conforme apresentado ao longo do Capítulo 3 uma planta pode ser construída em função da entrada de comando, distúrbios na entrada e no sinal de controle, sendo possível expor a lógica de seu funcionamento no MATLAB[®], da MathWorks, através da figura a seguir:

Figura 28 – Conjunto da Planta do Projeto



Fonte: o autor.

Tendo em vista que a planta opera em função da velocidade (ρ), o parâmetro observado pelo controlador, a ferramenta irá precisar que este sinal (*knots* - representado em laranja) atualize os valores das matrizes A e B em cada iteração, além de reaver o valor dos estados (x) para encaminhar à entrada do controlador. As matrizes C, D, F, C_y e D_y estão associadas às saídas e, por isto, não demanda a atualização por ρ , nem uma análise mais profunda para compreensão do controlador, o que não ocorreria no caso de realimentação pela saída. Em paralelo à planta, pode haver o processo de minimização distinto do H_∞ , é este resultado obtido que fora analisado na concepção do controlador, a fim de reduzir o esforço de controle.

4.2 Ensaios

Dois ensaios com objetivos distintos são introduzidos: o primeiro busca identificar a capacidade de estabilização do sistema planta-controlador dentro de uma região de D-Estabilidade ampla, enquanto o segundo ensaio visa estressar as limitações do controlador não adaptativo com regiões mais restritas de operação. Um terceiro ensaio fará a análise da resposta do sistema com estabilização através de controle com integrador, esta solução será comparada quanto à capacidade de reduzir a sensibilidade aos distúrbios. Um último ensaio apresentará a resposta do sistema dinamicamente, ou seja, com ρ oscilando durante a operação do controlador, o intuito é avaliar se os objetivos exposto neste trabalho são tangíveis durante a operação.

4.2.1 Estudo de Estabilidade

A primeira análise a ser feita diz respeito à resposta ao impulso e degrau nas entradas de controle da planta em malha fechada. Para isto, torna-se necessário implementar unicamente as normas H_∞ e H_2 :

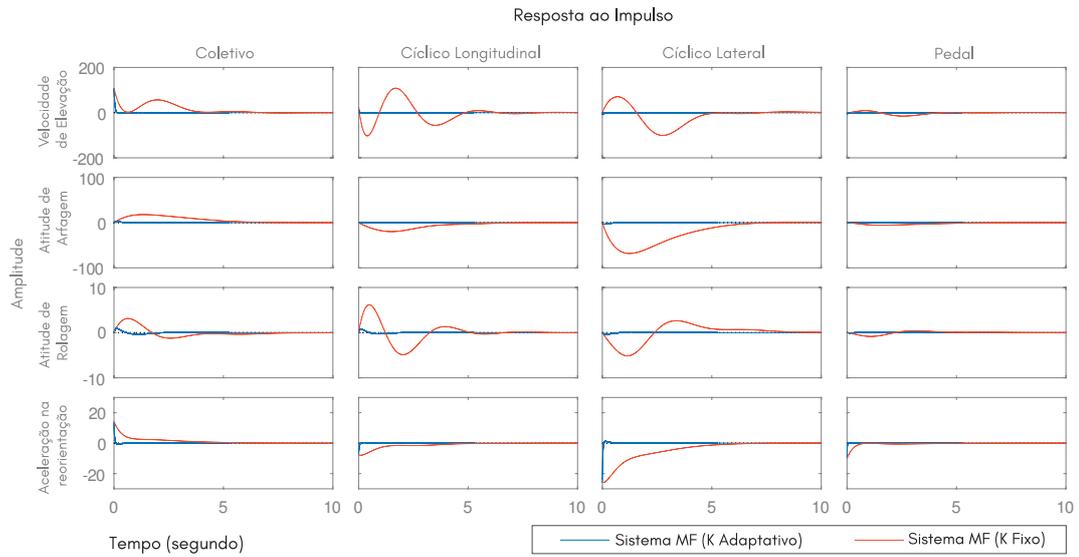
Tabela 1 – Dados do ensaio 01

Variável de Decisão	Valor
Controlador K	$\rho k_1 + k_0$
Norma H_∞ : γ	10
D-Est. Circular : q	-
D-Est. Circular : r	-
D-Est. Vertical : v_1	-200
D-Est. Vertical : v_2	-
D-Est. Horizontal : h_1	-
D-Est. Horizontal : h_2	-

Fonte: o autor.

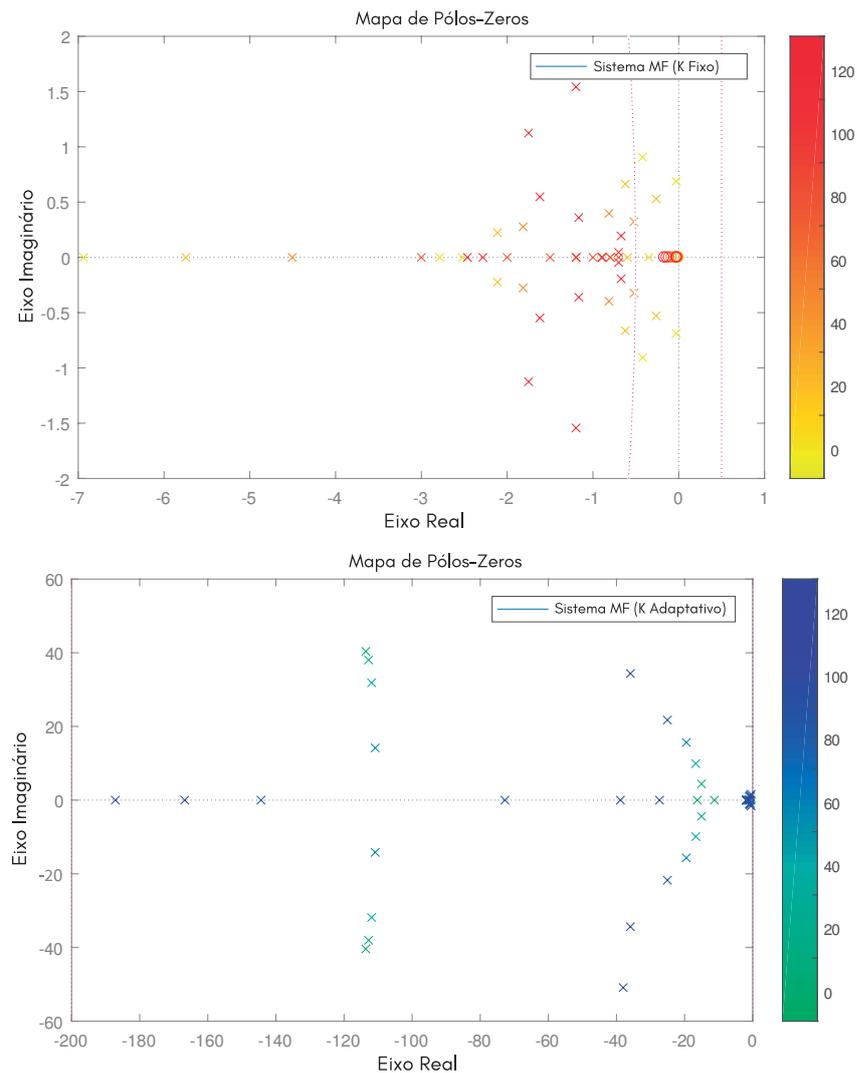
Nesta análise, não é necessário forçar a alocação de polos dentro de uma região de d-estabilidade pelas desigualdades matriciais lineares horizontais e verticais. *A priori*, deve-se avaliar se há uma solução dentro dos limites requeridos para estabilizar e se foi satisfeita em qualquer condição de velocidade. Com uma redução dos contornos do problema para um ρ entre 0 e 120, foi possível obter uma solução estabilizante dentro de todo o espectro de velocidade conforme Figura 30, que registra o passeio do polos enquanto a resposta ao impulso à 60 nós pode ser observado na Figura 29. Tendo em vista que a resposta do sistema é estável, uma nova análise é realizada com uma região de d-estabilidade mais concisa.

Figura 29 – Resposta ao impulso no ensaio.



Fonte: o autor.

Figura 30 – Controlador Inerte em 60 nós e Adaptativo LPV.



Fonte: o autor.

4.2.2 Estudo de Rejeição ao Distúrbio

Uma segunda análise, avaliando a resposta impulso nas entradas distúrbios, busca uma solução estável em todo o limite de operação e que satisfaçam as condições:

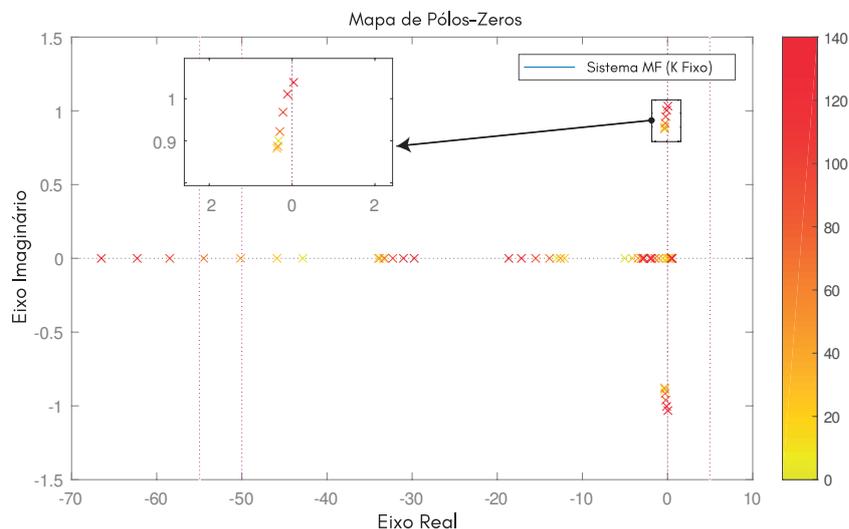
Tabela 2 – Dados do ensaio 02

Variável de Decisão		Valor
Controlador K		$\rho k_1 + k_0$
Norma H_∞	: γ	10
D-Est. Circular	: q	-25
D-Est. Circular	: r	30
D-Est. Vertical	: v_1	-50
D-Est. Vertical	: v_2	-
D-Est. Horizontal	: h_1	60
D-Est. Horizontal	: h_2	-

Fonte: o autor.

É possível observar pelo deslocamento de polos na Figura 31 que o controlador insensível à ρ projetado para operar a 60 nós foi incapaz de estabilizar em todo o espectro de velocidade. A medida que a velocidade chega a 120 nós, o controlador não é capaz de estabilizar adequadamente a planta, tornando-se instável.

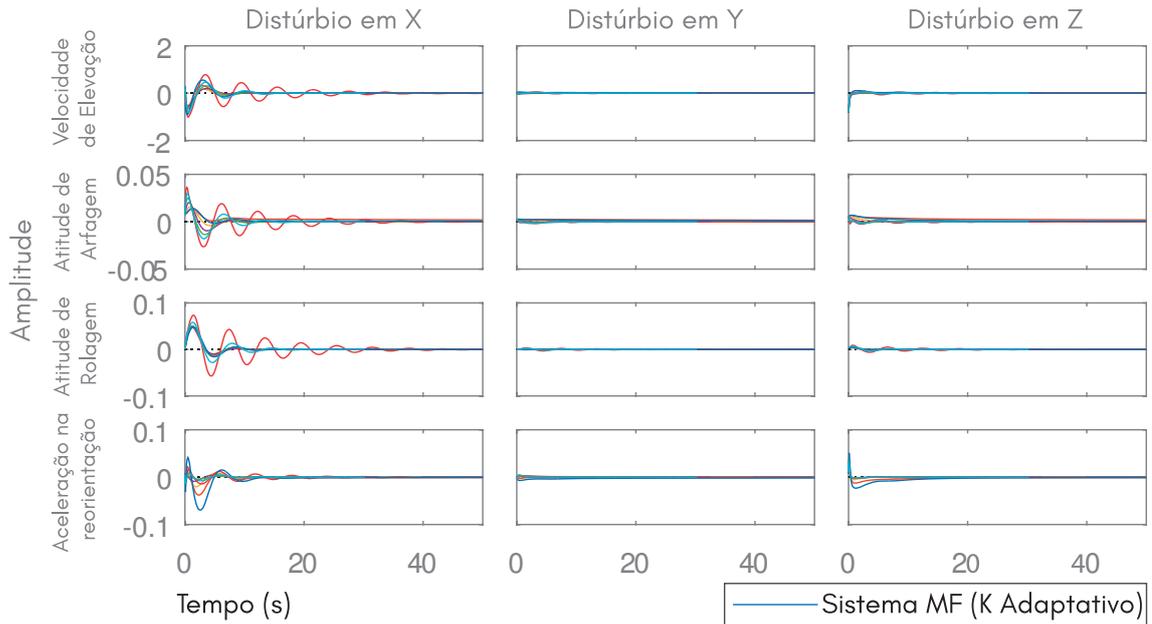
Figura 31 – Deslocamento instável em Controlador Inerte



Fonte: o autor.

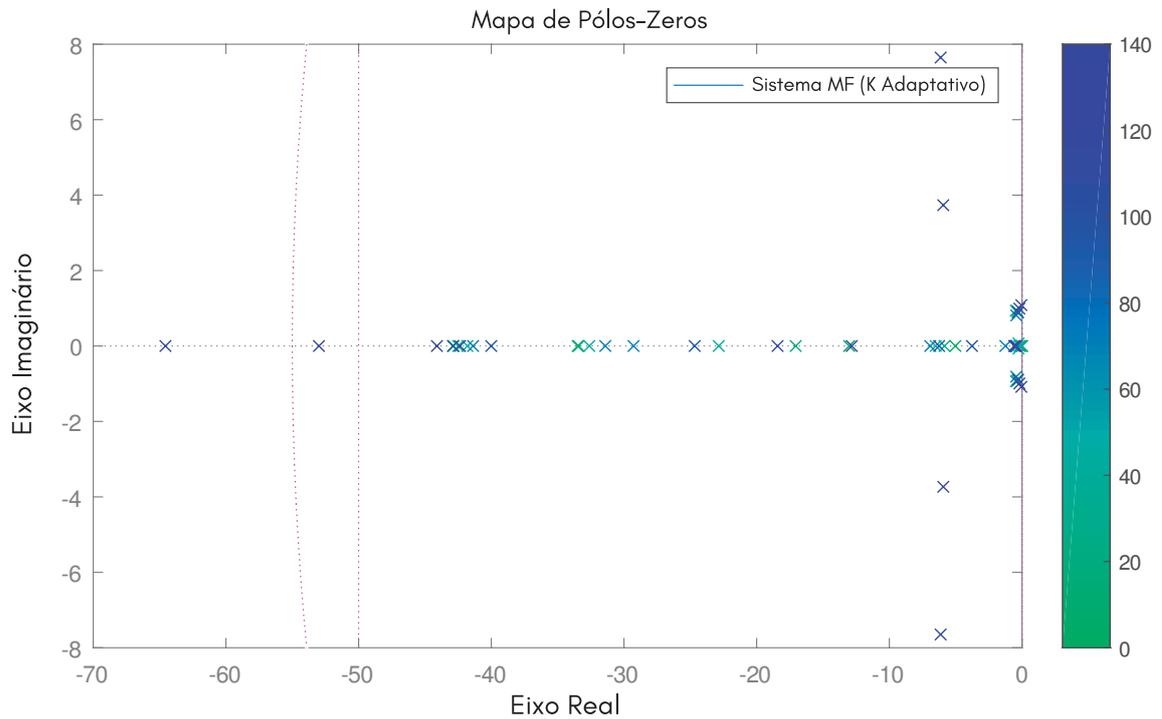
Em contrapartida, o controlador LPV foi capaz de garantir a estabilidade, ainda que os polos não tenham se mantido dentro da região de D-Estabilidade especificada em todo o espectro de velocidade imposta pelas LMIs. Essa limitação do controlador é intrínseca ao elevado nível de acoplamento da planta a ser controlada, exigindo que, eventualmente, um dos polos dentre as oito variáveis de estado acabe por oscilar para fora da região de d-estabilidade.

Figura 32 – Rejeição de distúrbios.



Fonte: o autor.

Figura 33 – Deslocamento estável em Controlador LPV.



Fonte: o autor.

Pela Figura 33, é possível constatar que o planta continua capaz de mitigar o distúrbio, nas três velocidades lineares, provocado por possíveis intempéries durante a operação.

4.2.3 Estudo com Integrador

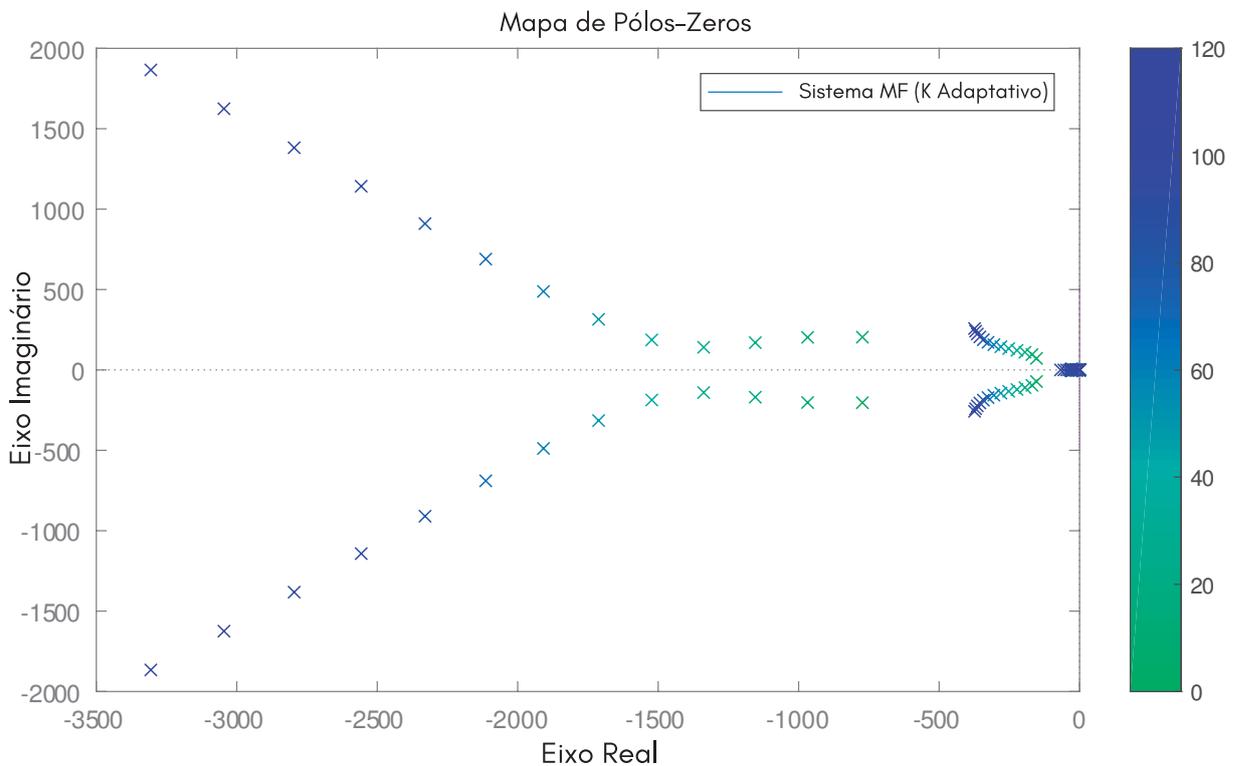
O terceiro ensaio visa introduzir a teoria apresentada no Item 3.3.2 ao realizar a estabilização com integração da Figura 19. Espera-se desta análise que a resposta, em todas as quatro saídas, se aproxime do valor de referência introduzida, graficamente representado por um valor unitário após o transiente. Neste ensaio, opta-se por definir os parâmetros das LMIs por:

Tabela 3 – Dados do ensaio 03

Variável de Decisão	Valor
Controlador K	$\rho k_1 + k_0$
Norma H_∞ : γ	$3.9 \cdot 10^{-6}$
D-Est. Circular : q	-
D-Est. Circular : r	-
D-Est. Vertical : v_1	-
D-Est. Vertical : v_2	-0.25
D-Est. Horizontal : h_1	-
D-Est. Horizontal : h_2	-

Fonte: o autor.

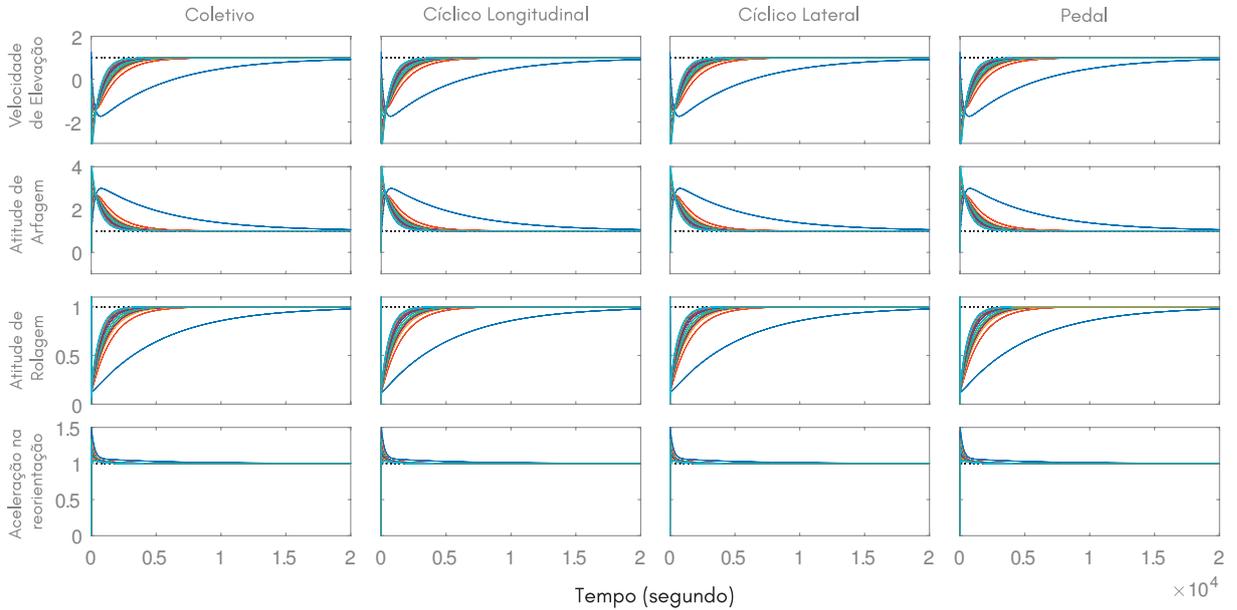
Figura 34 – Deslocamento estável em Controlador com Integrador



Pelos dados obtidos pelo mapa de Pólos-Zeros na Figura 34 é visível que o controlador \mathbf{K} calculado pelo conjunto de LMIs apresentadas nas Equações 3.42 à 3.48 foi capaz de estabilizar a planta em todo o espectro de velocidade.

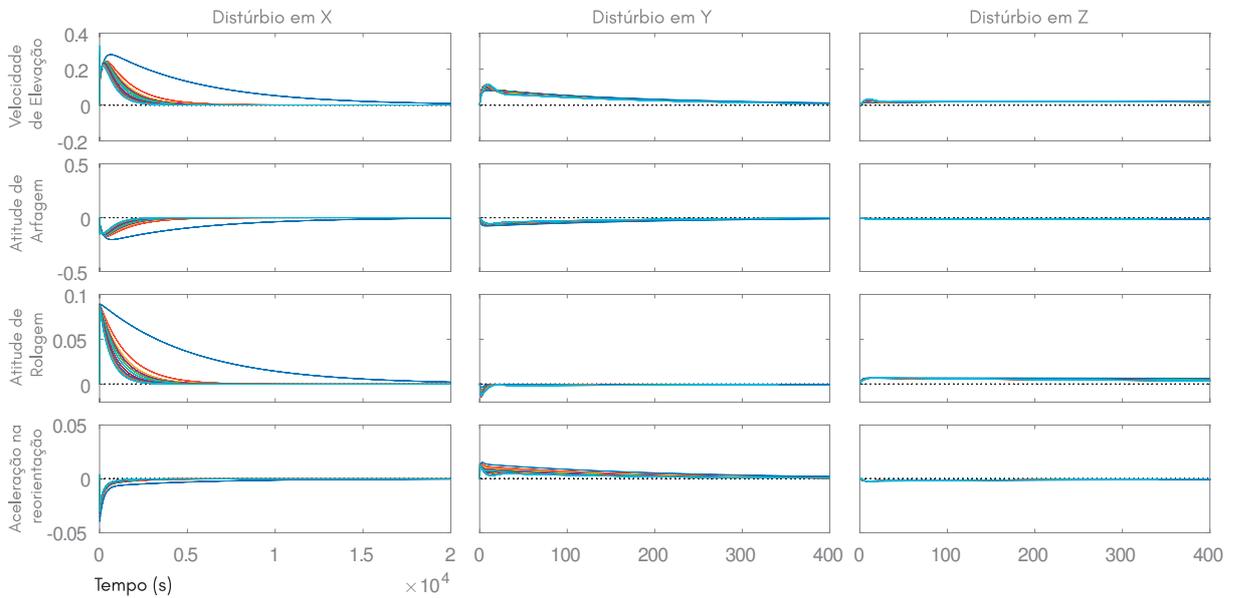
A seguir, os dados obtidos da resposta ao degrau na planta na entrada de controle e na entrada de distúrbio apresentados nas figuras 35 e 36:

Figura 35 – Resposta ao degrau para sistema com integrador



Fonte: o autor.

Figura 36 – Resposta ao degrau de distúrbio para sistema com integrador



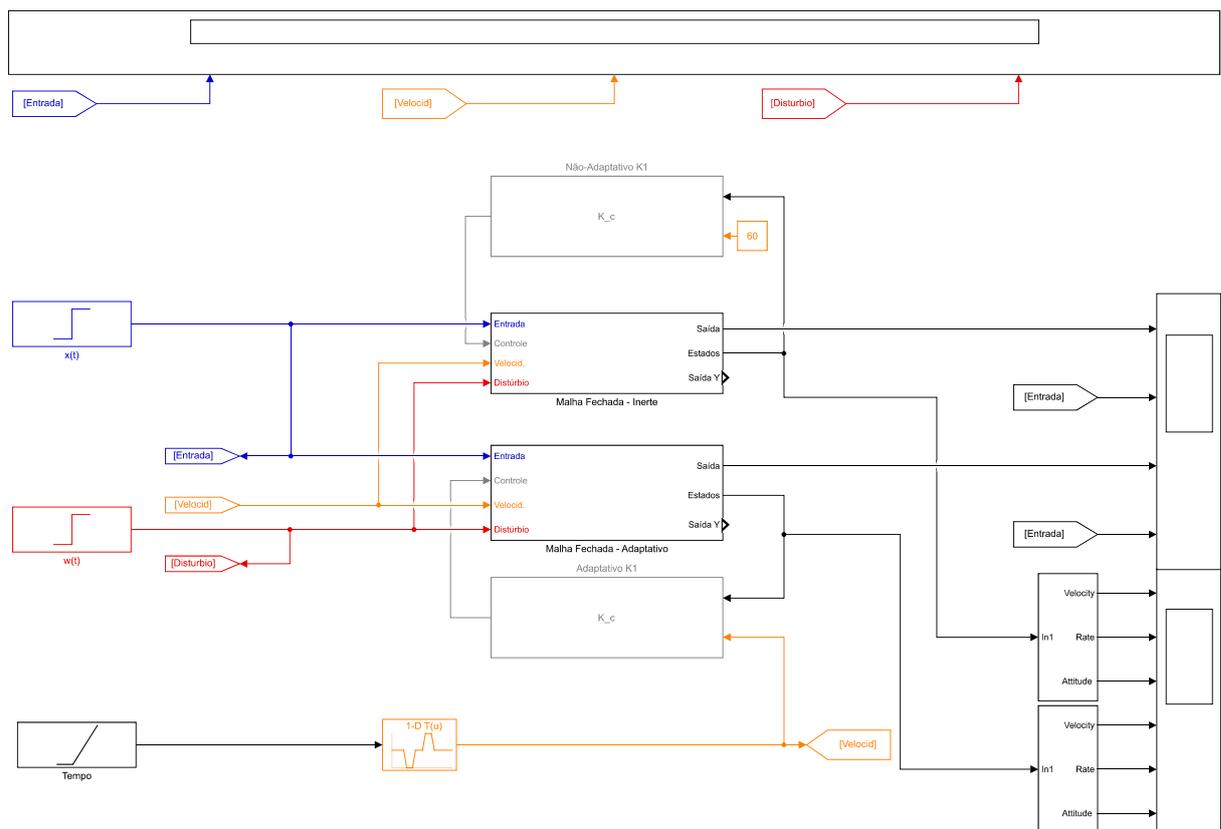
Fonte: o autor.

Como observado, o controlador foi igualmente capaz de estabilizar a planta, apesar de apresentar um tempo maior para entrar em regime permanente, e rejeitar os distúrbios em todo o espectro de velocidade da variável controlada.

4.3 Simulação da dinâmica do Controlador

Tendo em vista que a planta está propriamente dimensionada, é possível produzir o controlador (K) que seja capaz de estabilizar a planta naturalmente instável, em todo espectro de velocidade aqui estudado, além de reduzir o esforço de controle através das normas H_2 e H_∞ . Conforme os dois últimos ensaios, o intuito é identificar se houve melhoria com a aplicação de um controle adaptativo, para isso é necessário avaliar a resposta ao impulso, mas também a resposta dinâmica do sistema à entrada de controle ρ em condição variante. A topologia para formação do projeto envolve uma comparação entre o controle LPV estático (por apresentar uma matriz de ganhos) e adaptativo (por ser função de uma variável de controle ρ) com um controlador convencional de ganho estático. Na Figura 37, é possível observar os dois sistemas de controle, a inferior, sendo realimentada pelo controlador, e a superior, com um ganho estático.

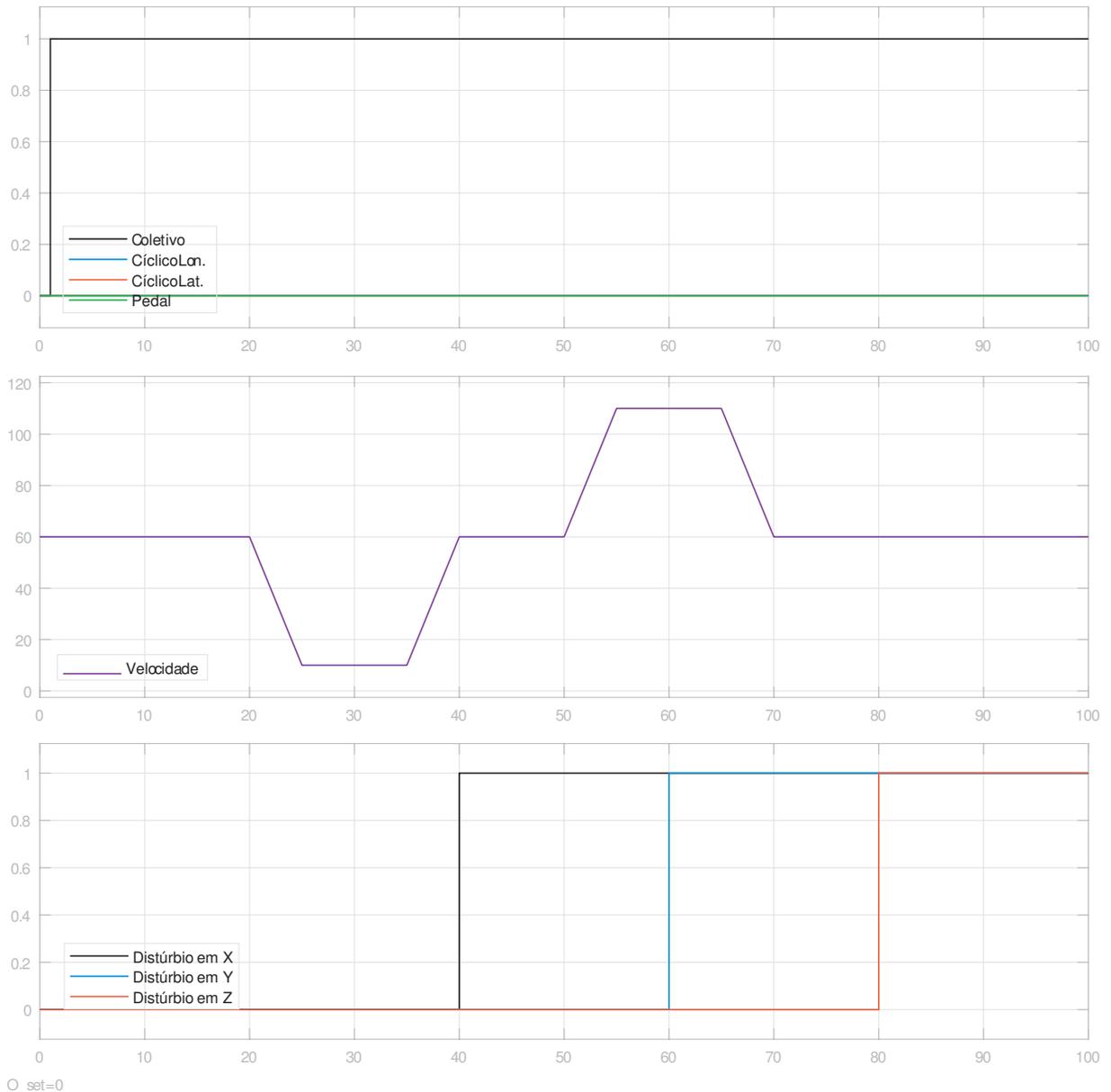
Figura 37 – Topologia do Projeto



Fonte: o autor.

A topologia apresentada na Figura 37 foi utilizada na análise referente ao desenvolvimento do Item 3.3.1, que utiliza um controlador com realimentação de estados. O sinais da entrada de comandos $r(t)$, da variável controlada ρ e das entradas distúrbios $w(t)$ é dado por:

Figura 38 – Entradas no Sistema sem Integrador

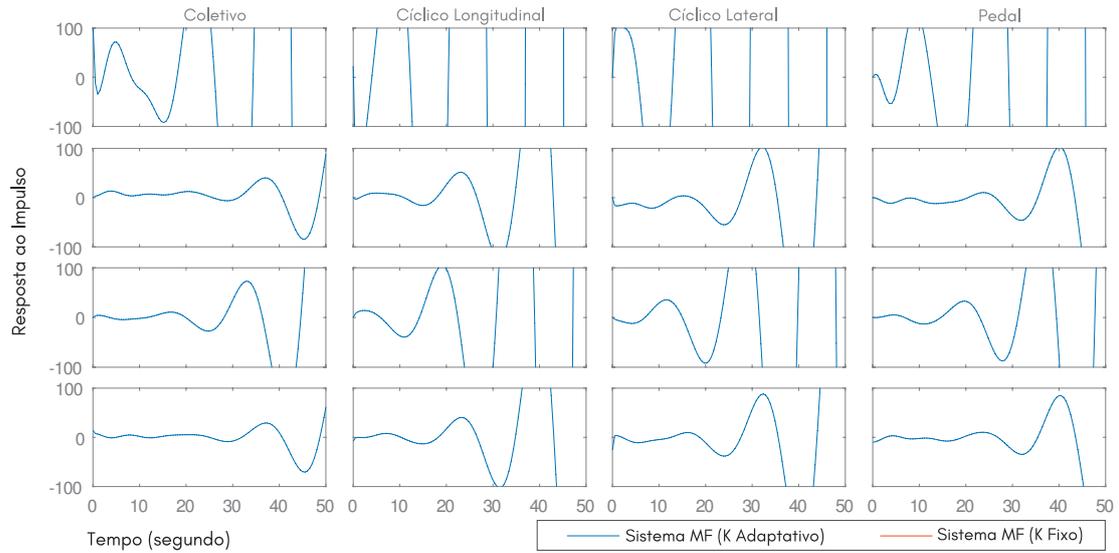


Fonte: o autor.

A simulação ocorre com um sinal de entrada do tipo degrau no coletivo da aeronave para $t = 1$. A variável de controle (ρ), que representa a velocidade de vôo a frente em relação à massa de ar (V_{fe}), é exposta na segunda seção, oscilando entre 10 e 110 nós. A terceira seção apresenta as entradas exôgenas que perturbam os estados com distúrbios nas velocidades lineares no eixo X , Y e Z .

Antes de dar continuidade às respostas deste sistema é importante observar a resposta em malha aberta do sistema. Conforme a Figura 39, é possível observar que a resposta do sistema é complementamente instável, tendo em vista que a resposta a um impulso em qualquer uma das entradas produz em todas as saídas uma sinal divergente.

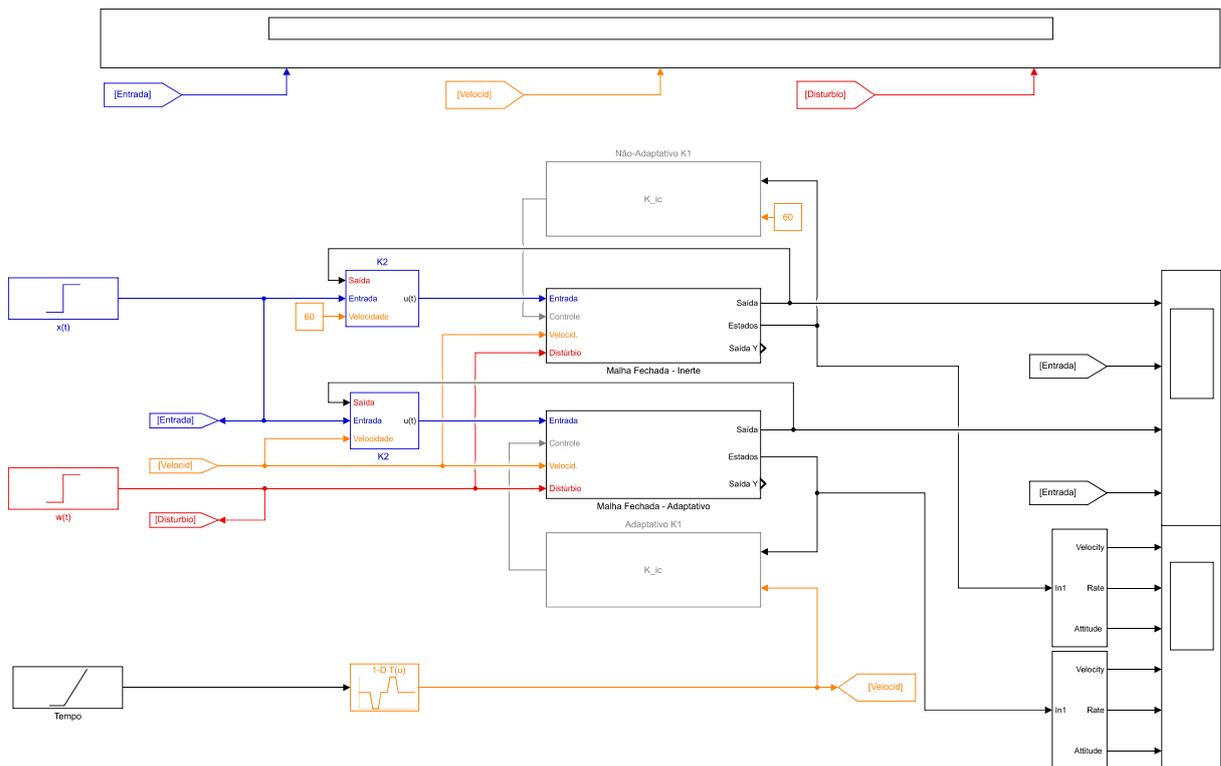
Figura 39 – Resposta em Malha Aberta ao Impulso



Fonte: o autor.

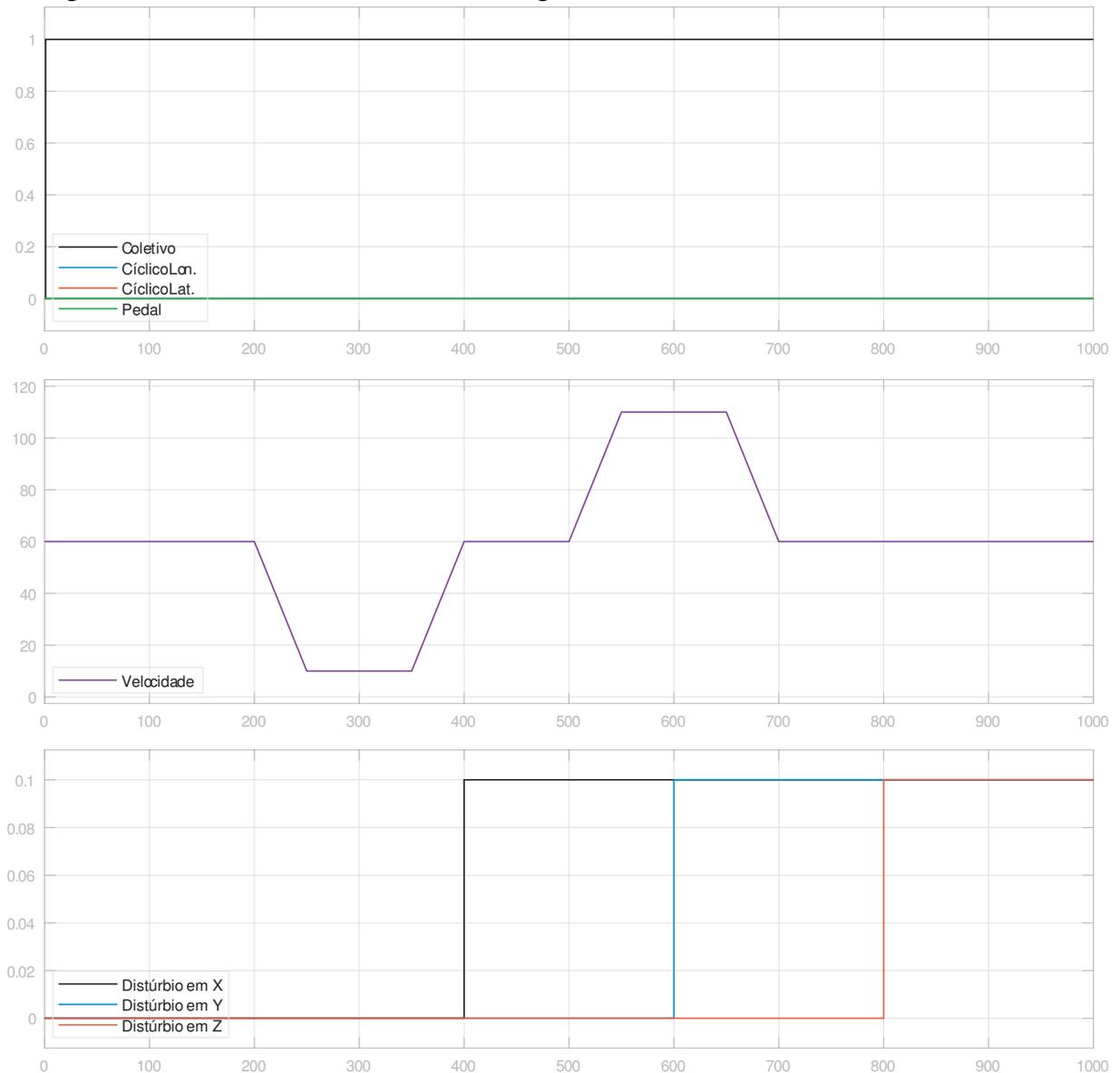
De forma análoga, deve-se constituir uma simulação para análise da Seção 3.3.2, que utiliza um controlador com realimentação de estados e um integrador para estabilização. A configuração desta simulação do sistema é demonstrado a seguir, com informações quanto à topologia do sistema, na Figura 40, e quanto aos dados nas entradas de comando, ρ e entradas de distúrbio do sistema, apresentados na Figura 38:

Figura 40 – Topologia do Projeto com Integrador



Fonte: o autor.

Figura 41 – Entradas no Sistema com Integrador



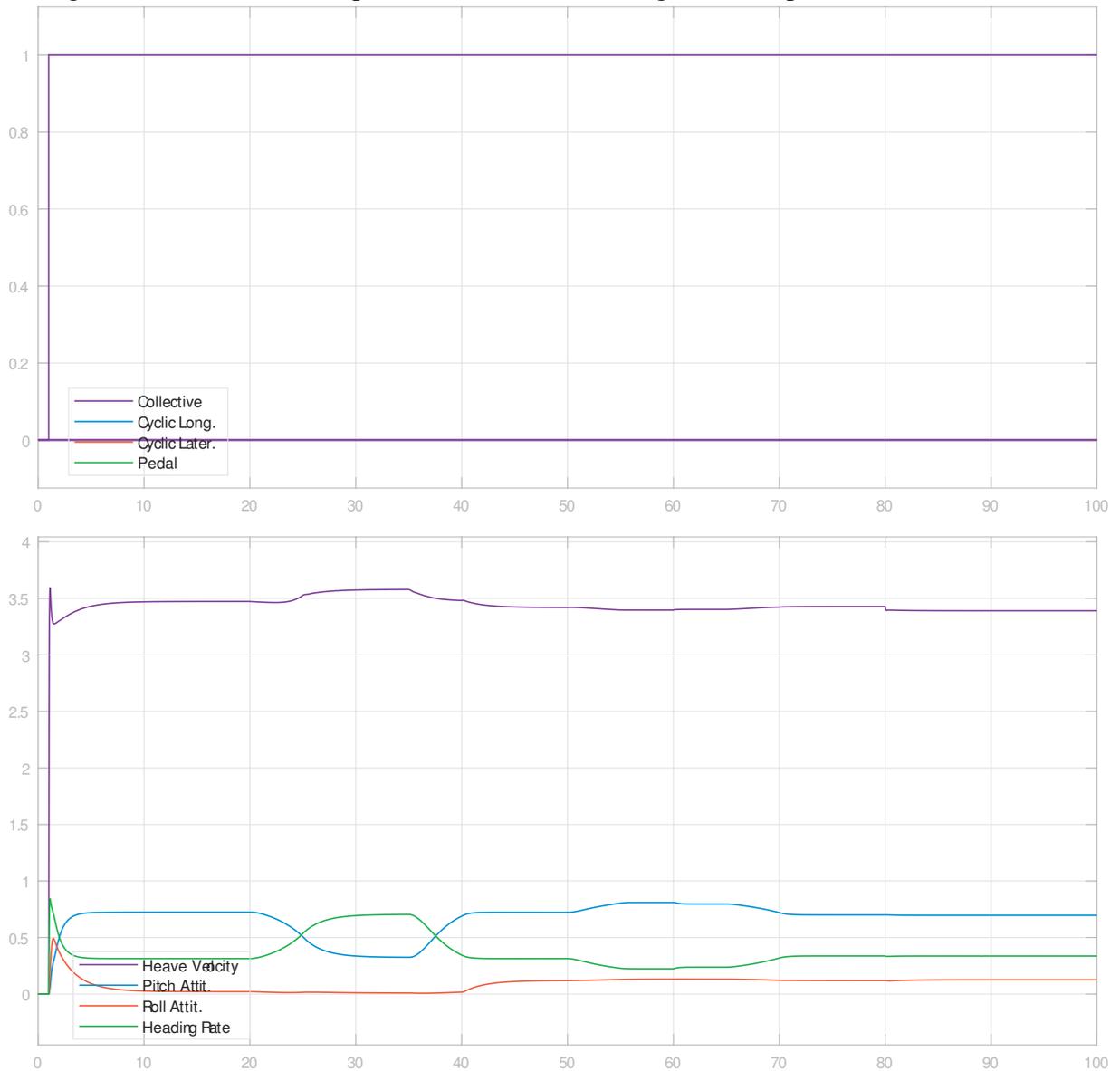
Fonte: o autor.

A simulação utilizada no sistema com integração é similar à simulação dada na Figura 38, entretanto, deve-se observar que a análise ocorre no ínterim de 1000s, em contrapartida aos 100s da simulação anterior, o escopo mais amplo desta simulação visa conter a correção do erro estacionário da planta. Além disso, a intensidade dos distúrbios é 10% do utilizado na simulação anterior. Ademais, o um sinal de entrada também é do tipo degrau no coletivo da aeronave para $t = 1$. A variável de controle (ρ), oscilando entre 10 e 110 nós. As respostas para estes ensaios está presente nas seções a seguir.

4.3.1 Resposta dinâmica LPV sem integrador

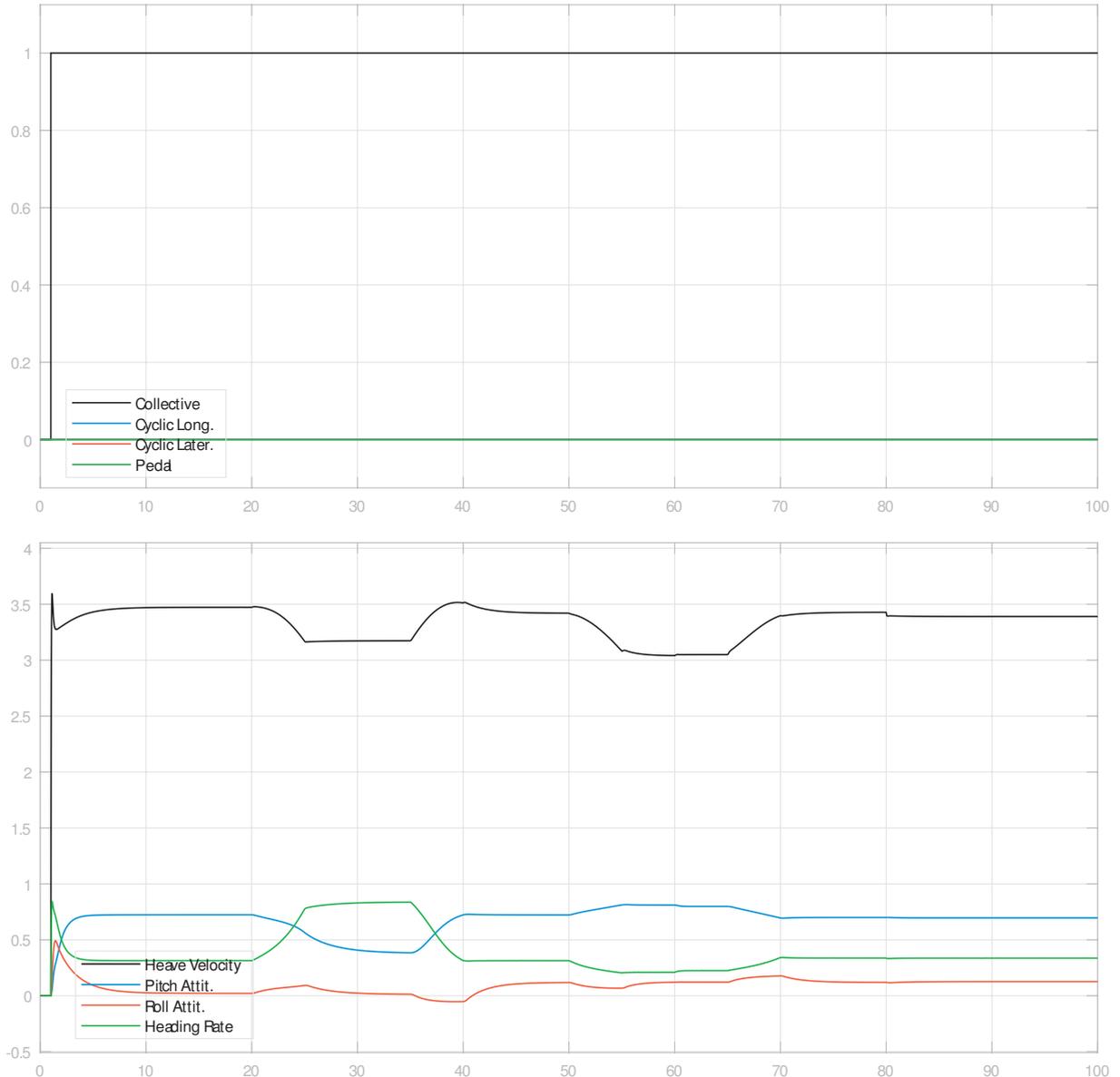
Como citado no Capítulo 3, as vantagens do sistema LPV tornam-se mais perceptíveis em um sistema dinâmico, sendo assim, opta-se por construir um experimento que vise identificar as saídas e os esforços, durante um processo de múltiplos sinais de entradas aplicados em condições em que a variável controlada, no caso a velocidade, esteja oscilando. *A priori*, avalia-se a resposta do sistema sem integração, o controlador adaptativo e o controlador fixo à 60 nós são comparados a seguir, onde a parte superior da imagem representa a resposta da planta controlada em malha fechada e a parte inferior apresenta o sinal de referência:

Figura 42 – Entrada e Resposta no Sistema sem Integrador Adaptativo



Fonte: o autor.

Figura 43 – Entrada e Resposta no Sistema sem Integrador Fixo à 60 nós

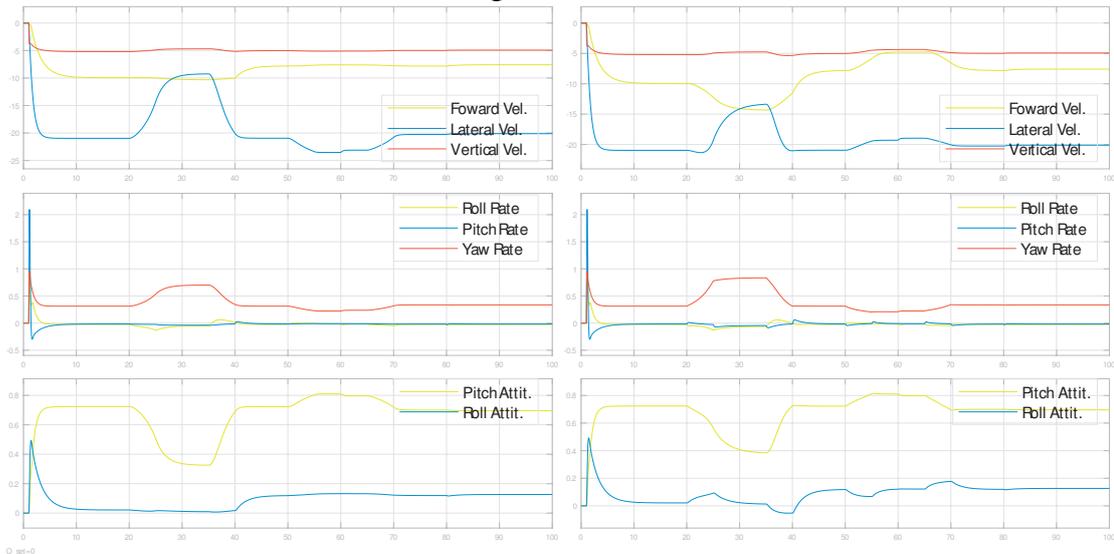


Fonte: o autor.

Tendo definido todas as condições iniciais e assumindo que os estados iniciam com valores zero, foi possível reproduzir o experimento. Desconsidera-se o tempo de assentamento da saída, o sobressinal produzido e a amplitude da resposta. Para isto é importante lembrar que não houve restrições matriciais para realocação dos polos que buscassem: minimizar o sobressinal nem reduzir o tempo de assentamento.

O experimento teve como objetivos da simulação a estabilização da planta em malha fechada, a redução do esforço de controle através da norma H_∞ e H_2 , além de, como principal objetivo, verificar se as respostas do sistema em regime permanente são constantes e sensíveis à V_{fe} , ou seja, operam em todo espectro da variável controlada ρ ainda que apresentem um erro de regime estacionário.

Figura 44 – Estados no Sistema sem Integrador

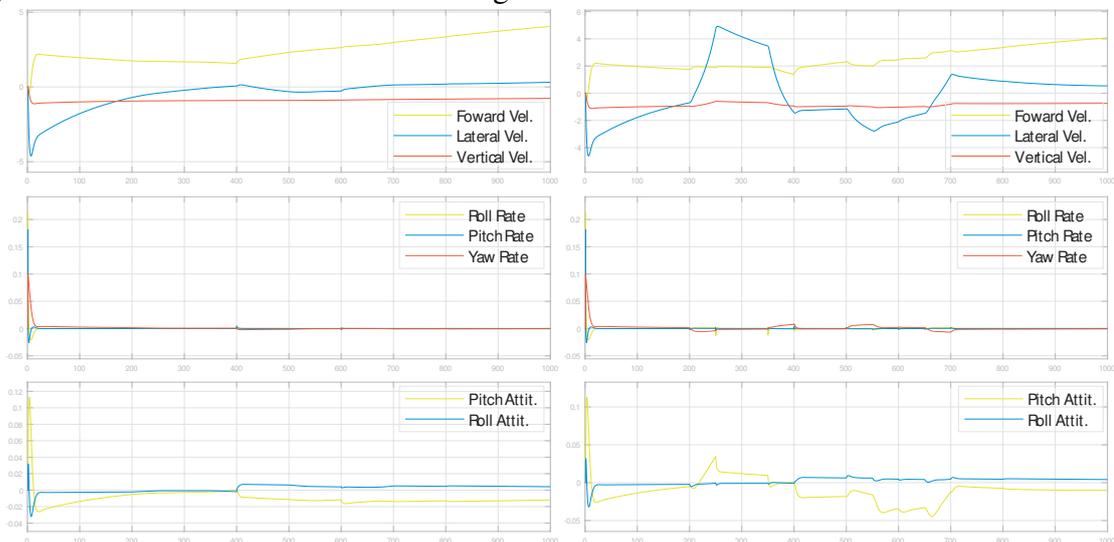


Fonte: o autor.

O resultado obtido está representado nas figuras 42 e 43, demonstrando como o controlador LPV apresentou uma variação menor após o regime estacionário. A oscilação da variável controlada foi corrigida adequadamente pelo sistema LPV, enquanto a resposta do controlador fixo oscilou em caráter permanente. Ambos os controladores apresentaram uma aceleração de guinada residual e foram quase insensíveis aos distúrbios introduzidos a partir de $t = 40$, apesar disso, é notável pela Figura 44 que o controlador Adaptativo, à esquerda, apresenta as correções mais suaves em comparação aos esforços da planta com controlador Fixo, à direita.

4.3.2 Resposta dinâmica LPV com integrador

Figura 45 – Estados no Sistema com Integrador

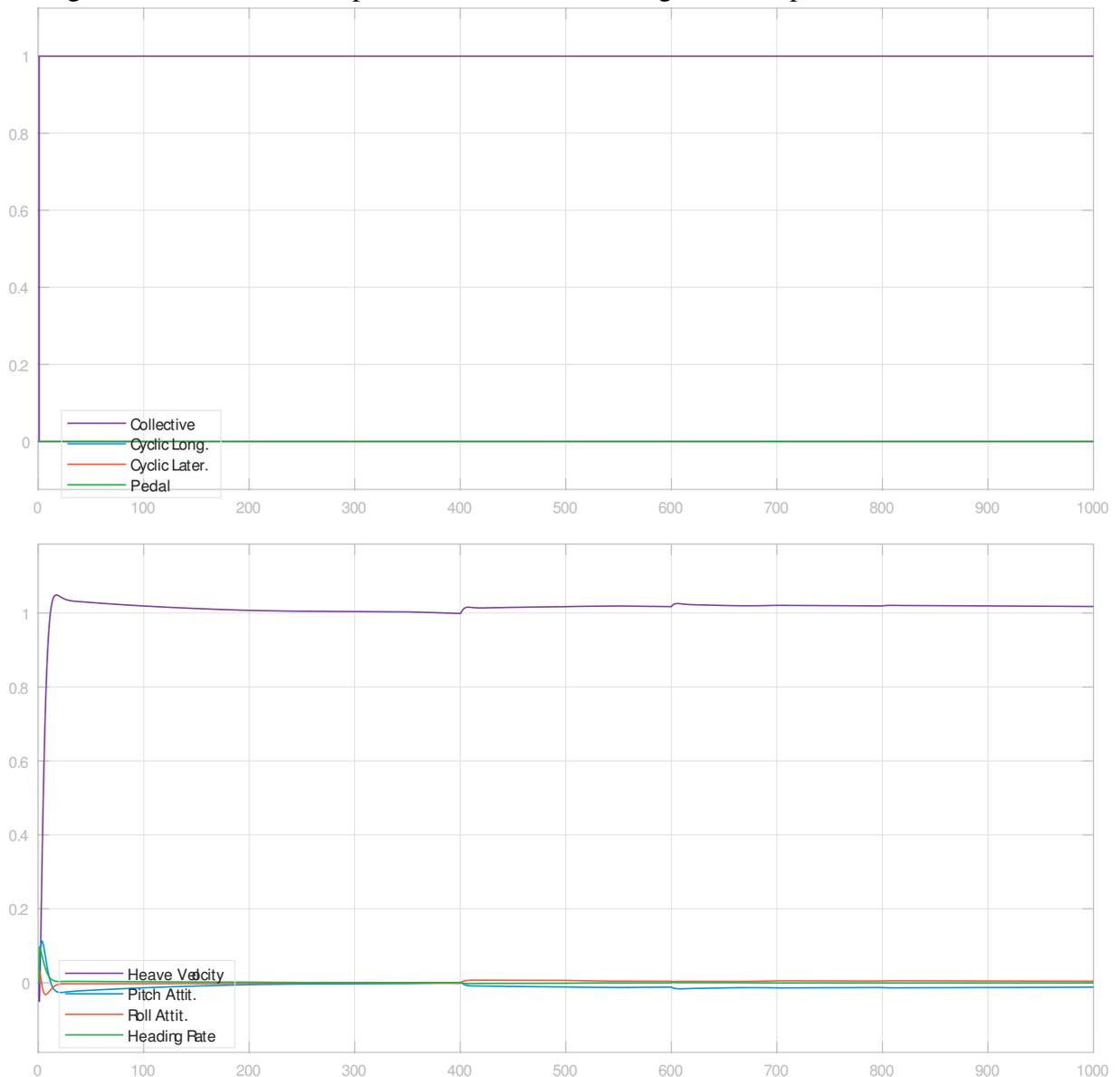


Fonte: o autor.

Antes de introduzir as respostas do sistema com integração em malha fechada é importante analisar as diferenças entre os esforços de controle do sistema com integração (Figura 45) e do sistema sem integração (Figura 44), onde o primeiro, dado o controle LPV, é capaz de suavizar melhor os transientes oriundos da modificação da variável de controle ρ .

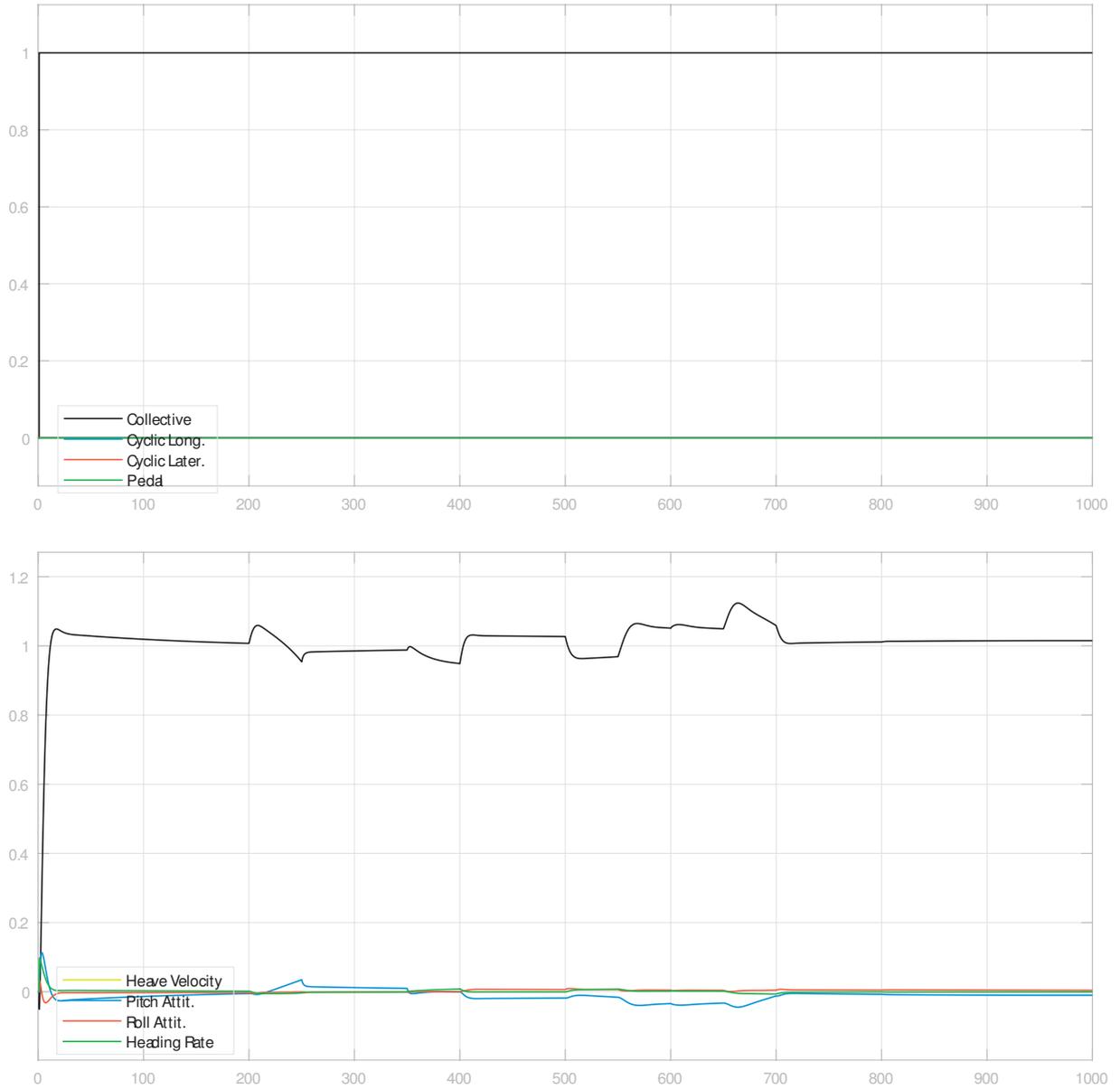
Para a análise do sistema com integração, de forma similar, os comandos do piloto, apresentados na Figura 41, são adicionados à perturbações na entrada dos estados. Estes distúrbios promovem uma resposta natural da aeronave à mudanças da velocidade relativa da massa de ar no qual a aeronave esta imersa, estas tendências inerentes ao modelo são suprimidas pelo controlador LPV e o Fixo, respectivamente, e o resultado desta interação é dado por:

Figura 46 – Entrada e Resposta no Sistema com Integrador Adaptativo



Fonte: o autor.

Figura 47 – Entrada e Resposta no Sistema com Integrador Fixo à 60 nós



Fonte: o autor.

Apesar de corrigir o erro em regime permanente, o sistema com controlador Fixo à 60 nós demonstra oscilações muito contundentes promovidas pela variação da variável de controle ρ e pelos distúrbios na entrada da planta, corrigidas, unicamente, pela função da integradora da planta que corrige o erro em regime permanente. Estas mesmas interferências são corrigidas de maneiras mais eficiente pelo controlador LPV, que é capaz de suavizar a resposta da planta independente das intempéries.

5 CONCLUSÃO

Tendo em vista os objetivos imposto no início do trabalho, conclui-se que foi possível constituir um controlador LPV adequado para a planta de um helicóptero com seis graus de liberdade, sendo este capaz de estabilizar a resposta do sistema. Para isto, desenvolveu-se o modelo matemático do sistema onde foi possível realizar a comparação do controlador LPV adaptativo com um controlador projetado para operar à 60 nós. A simulações confirmaram os resultados estimados pelas análises teóricas, tendo em vista que os resultados oriundos dos ensaios indicam que o controlador LPV, assim como o tradicional, foi capaz de estabilizar a planta subatuada de oitava ordem. Também, como esperado, os distúrbios no eixo X são mais significativos, devido a assimetria de velocidade presente no eixo. Contudo, quando condições restritas de operação são impostas, somente o controlador adaptativo foi capaz de operar em todo o espectro de forma estabilizada e, ainda nessas condições, houve a rejeição de distúrbio impostas pelas desigualdades matriciais.

As simulações também promoveram uma comparação entre duas topologias distintas: um controle LPV por realimentação de estados e um controlador LPV aumentado com integrador. Os resultados permitiram se verificar que o caso aumentado com integrador, apesar de anular o erro em regime permanente e suavizar o transiente dos estados, apresentou um assentamento mais lento e sendo mais sensível à entrada exôgena, quando comparado ao controlador inerte. Análises vindouras podem conter um ensaio com regiões mais restritas de operação e utilizando um controlador matricial no lugar do ganho; pode-se implementar outras variáveis de controle, como os ângulos de Euler e estudar a resposta dinâmica do controlador à oscilação destas; outras topologias para controle podem ser introduzidas para uma análise mais profunda dos transientes.

REFERÊNCIAS

- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. ISBN 0898714850.
- BRIAT, C. **Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems**. [s.n.], 2015. v. 3. ISBN 978-3-662-44049-0. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-44050-6>>.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996. ISSN 00189286.
- DOUMIATI, M.; SENAME, O.; MARTINEZ, J.; DUGARD, L.; POUSSOT-VASSAL, C. Gain-scheduled LPV/ H_∞ controller based on direct yaw moment and active steering for vehicle handling improvements. In: IEEE. **49TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC)**. Atlanta, 2010. p. 6427–6432.
- DOYLE, J.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P.; FRANCIS, B. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/29425/>>.
- FERGANI, S.; MENHOUR, L.; SENAME, O.; DUGARD, L.; NOVEL, B. Study and comparison of non linear and lpv control approaches for vehicle stability control. In: IEEE. **21ST MEDITERRANEAN CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION**. Crete, 2013. p. 303–310. ISBN 9781479909971.
- GERBONI, C. A.; GELUARDI, S.; OLIVARI, M.; NIEUWENHUIZEN, F. M. Development of a 6 DOF Nonlinear Helicopter Model For the MPI CyberMotion Simulator. **40th European Rotorcraft Forum**, p. 615–626, 2014.
- IWASAKI, T.; SKELTON, R. E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. **Automatica**, Elsevier, v. 30, n. 8, p. 1307–1317, 1994.
- JOHNSON, W. **Rotorcraft Aeromechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 944 p. ISBN 9781139235655. Disponível em: <<http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CBO9781139235655>>.
- LIND, R. Linear parameter-varying modeling and control of structural dynamics with aerothermoelastic effects. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 25, n. 4, p. 733–739, 2002.
- MOHAMMADPOUR, J.; SCHERER, C. W. **Control of linear parameter varying systems with applications**. Springer Science & Business Media, 2012. 1–547 p. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-1833-7>>.
- NISE, N. S. **Control Systems Engineering**. 6th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. 944 p. ISBN 0470547561.
- PADFIELD, G. D. Theoretical Modelling for Helicopter Flight Dynamics: Development and Validation. In: **PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL COUNCIL FOR THE AERONAUTICAL SCIENCES, ICAS-88-6.1**. Jerusalem: [s.n.], 1988. v. 3, p. 165–177.

PADFIELD, G. D. **Helicopter Flight Dynamics**. 2. ed. Blackwell Publishing Ltd, 2007. 642 p. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/9780470691847>>.

PAVEL, M. **Six Degrees of Freedom Linear Model for Helicopter Trim and Stability Calculation**. [S.l.], 1996. 88 p.

PROUTY, R. W. **Helicopter performance, stability, and control**. [S.l.: s.n.], 1986. 731 p. ISBN 0534063608, 9780534063603.

RAMANUJAM, R.; RAO, S.; ABHISHEK. Stability analysis of variable geometry helicopters. **ARF 2015 - 4th Asian-Australian Rotorcraft Forum**, 2015.

RASHEED, A. Modeling and controller design for helicopter dynamics. In: IEEE. **2017 INTERNATIONAL CONFERENCE ON OPEN SOURCE SYSTEMS & TECHNOLOGIES (ICOSST)**. Lahore, 2018. p. 1–9.

RITA, T. D. T. Model Helicopter Control. **IDMEC/IST**, Lisboa, p. 10.

SEDDON, J.; NEWMAN, S. **Basic Helicopter Aerodynamics**. [S.l.: s.n.], 2011. ISBN 9780470665015.

SKOGESTAD, S. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. [S.l.: s.n.], 2005. 512 p. ISBN 9780470011683.

TALBOT, P. D.; TINLING, B. E.; DECKER, W. A.; CHEN, R. T. N. **A Mathematical Model of a Single Main Rotor Helicopter for Piloted Simulation**. [S.l.], 1982. 55 p. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19830001781>>.

TIJANI, I. B.; AKMELIAWATI, R.; LEGOWO, A. System identification of parameterized state-space model of a small scale uav helicopter. In: **THE 20TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL THEORY OF NETWORKS AND SYSTEMS, 2012 (MTNS 2012)**. Melbourne: [s.n.], 2012.

VENKATESAN, C. **Fundamentals of Helicopter Dynamics**. 1st. ed. CRC Press, 2014. ISBN 9781466566354. Disponível em: <<https://www.taylorfrancis.com/books/9781466566354>>.

WAN, E. A.; BOGDANOV, A. A. Model predictive neural control with applications to a 6 dof helicopter model. In: IEEE. **PROCEEDINGS OF THE 2001 AMERICAN CONTROL CONFERENCE**. Arlington, 2001. v. 1, p. 488–493. ISBN 0780364953.

YUE, A.; POSTLETHWAITE, I. Improvement of helicopter handling qualities using h_{∞} -optimisation. **IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)**, v. 137, n. 3, p. 115–129, 1990. ISSN 0143-7054. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/50600>>.

ZHAI, G.; IKEDA, M.; FUJISAKI, Y. Decentralized H_{∞} controller design: A matrix inequality approach using a homotopy method. **Automatica**, Elsevier, v. 37, n. 4, p. 565–572, 2001.

ZHAI, G.; MURAO, S.; KOYAMA, N.; YOSHIDA, M. Low order h_{∞} controller design: An lmi approach. In: IEEE. **2003 EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC)**. Cambridge, 2003. p. 3070–3075.

APÊNDICE A - IDENTIFICAÇÃO DO MODELO

```

clc; clear all;

% Options.verbose = menu( 'Define if plots must appear:', ...
%                         'With Plots', ...
%                         'Without Plots');
Options.verbose = 1;

x = [0,20,40,60,80,100,120,140];
xx = [0:5:140];
syms rho
assume(rho, 'real');

```

DataBase

```

DATA.a_0 = 6; %[1/rad]
DATA.a_0T = 6; %[1/rad]
DATA.alpha_tp0 = -0.0175; %[rad]
DATA.beta_fn0 = -0.0524; %[rad]
DATA.c = 0.391; %[m]
DATA.g_T = 5.8;
DATA.h_R = 1.274; %[m]
DATA.h_T = 1.146; %[m]
DATA.I_beta = 678.14; %[kg m^2]
DATA.Ixx = 2767.10; %[kg m^2]
DATA.Ixz = 2034.80; %[kg m^2]
DATA.Iyy = 13904.50; %[kg m^2]
DATA.Izz = 12208.80; %[kg m^2]
DATA.K_beta = 166352; %[N m/rad]
DATA.l_fn = 7.48; %[m]
DATA.l_tp = 7.66; %[m]
DATA.l_T = 7.66; %[m]
DATA.M_a = 4313.7; %[kg]
DATA.N_b = 4;
DATA.R = 6.4; %[m]
DATA.R_t = 1.106; %[m]
DATA.S_fn = 1.107; %[m^2]
DATA.S_tp = 1.197; %[m^2]
DATA.s_T = 0.208;
DATA.x_cg = -0.0198;
DATA.delta_0 = 0.009;
DATA.delta_2 = 37.983;
DATA.delta_3 = -45; %[°]
DATA.delta_T0 = 0.008;
DATA.delta_T2 = 5.334;
DATA.gamma = 7.12;
DATA.gamma_s = 0.0698; %[rad]
DATA.lambda_beta_2 = 1.193;
DATA.theta_tw = -0.14; %[rad]
DATA.gamma_idle = 33.63; %[rad/s]

% Specify Flight Trim - Valor adotados pelo livro:
DATA.V_fe = 0; % Total velocity in trim [m/s, ft/s, knot]
DATA.Beta_e = 0; % Sideslip Angle
DATA.Gamma_fe = 0; % Flight Path Angle

```

```

DATA.Omega_a = 0; % Angular Velocity about the vertical Axis

% Guess Initial Values - Valores aproximados obtidos:
DATA.Phi_e = -0.0532;
DATA.Theta_e = 0.0737;
DATA.Psi_e = 0; % Não é usado
DATA.Lambda_0 = 0; % Não é usado
DATA.Lambda_0T = 0; % Não é usado
DATA.Beta_1s = 0; % Não é usado

```

First Page

```

% Xu
X_u = [-0.02 -0.008 -0.015 -0.025 -0.032 -0.04 -0.045 -0.053]';
[x,y,r,DATA.X_u] = Regression(x, X_u, 4, xx);
X_u = vpa(DATA.X_u' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_u))',2)

```

$$X_u = -1.0 \cdot 10^{-9} \rho^4 + 3.3 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 3.6 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 1.1 \cdot 10^{-3} \rho - 0.02$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,1); hold on; title("X_u")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```

```

% Xw
X_w = [0.02 0.025 0.035 0.038 0.04 0.039 0.038 0.037]';
[x,y,r,DATA.X_w] = Regression(x, X_w, 4, xx);
X_w = vpa(DATA.X_w' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_w))',2)

```

$$X_w = 3.6 \cdot 10^{-10} \rho^4 - 9.3 \cdot 10^{-8} \rho^3 + 5.1 \cdot 10^{-6} \rho^2 + 2.7 \cdot 10^{-4} \rho + 0.02$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,2); hold on; title("X_w")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```

```

% Xq
X_q = [0.8 0 -0.8 -0.9 -0.2 1 2.8 5.1]';
[x,y,r,DATA.X_q] = Regression(x, X_q, 3, xx);
X_q = vpa(DATA.X_q' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_q))',2)

```

$$X_q = 4.4 \cdot 10^{-7} \rho^3 + 6.4 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.067 \rho + 0.89$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,3); hold on; title("X_q")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```

```

% Zu
Z_u = [0.025 -0.173 -0.12 -0.049 -0.001 0.0175 0.025 0.03]';
[x,y,r,DATA.Z_u] = Regression(x, Z_u, 5, xx);
Z_u = vpa(DATA.Z_u' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_u))',2)

```

$$Z_u = -1.5 \cdot 10^{-10} \rho^5 + 6.4 \cdot 10^{-8} \rho^4 - 1.0 \cdot 10^{-5} \rho^3 + 7.7 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.021 \rho + 0.024$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,4); hold on; title("Z_u")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Zw
Z_w = [-0.31 -0.42 -0.61 -0.72 -0.8 -0.85 -0.9 -0.94]';
[x,y,r,DATA.Z_w] = Regression(x, Z_w, 2, xx);
Z_w = vpa(DATA.Z_w' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_w))',2)

```

$$Z_w = 2.8 \cdot 10^{-5} \rho^2 - 8.5 \cdot 10^{-3} \rho - 0.3$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,5); hold on; title("Z_w")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Zq
Z_q = [1 11 21 30 40 50 60 70]';
[x,y,r,DATA.Z_q] = Regression(x, Z_q, 1, xx);
Z_q = vpa(DATA.Z_q' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_q))',2)

```

$$Z_q = 0.49 \rho + 1.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,6); hold on; title("Z_q")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Mu
M_u = [0.048 0.042 0.033 0.03 0.029 0.03 0.031 0.033]';
[x,y,r,DATA.M_u] = Regression(x, M_u, 3, xx);
M_u = vpa(DATA.M_u' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_u))',2)

```

$$M_u = -8.2 \cdot 10^{-9} \rho^3 + 4.0 \cdot 10^{-6} \rho^2 - 5.2 \cdot 10^{-4} \rho + 0.049$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,7); hold on; title("M_u")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Mw
M_w = [0.005 0.015 0.021 0.025 0.029 0.033 0.039 0.042]';
[x,y,r,DATA.M_w] = Regression(x, M_w, 2, xx);
M_w = vpa(DATA.M_w' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_w))',2)

```

$$M_w = -7.3 \cdot 10^{-7} \rho^2 + 3.5 \cdot 10^{-4} \rho + 6.6 \cdot 10^{-3}$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,8); hold on; title("M_w")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Mq
M_q = [-1.9 -2 -2.2 -2.3 -2.4 -2.5 -2.6 -2.75]';
[x,y,r,DATA.M_q] = Regression(x, M_q, 1, xx);
M_q = vpa(DATA.M_q' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_q))',2)

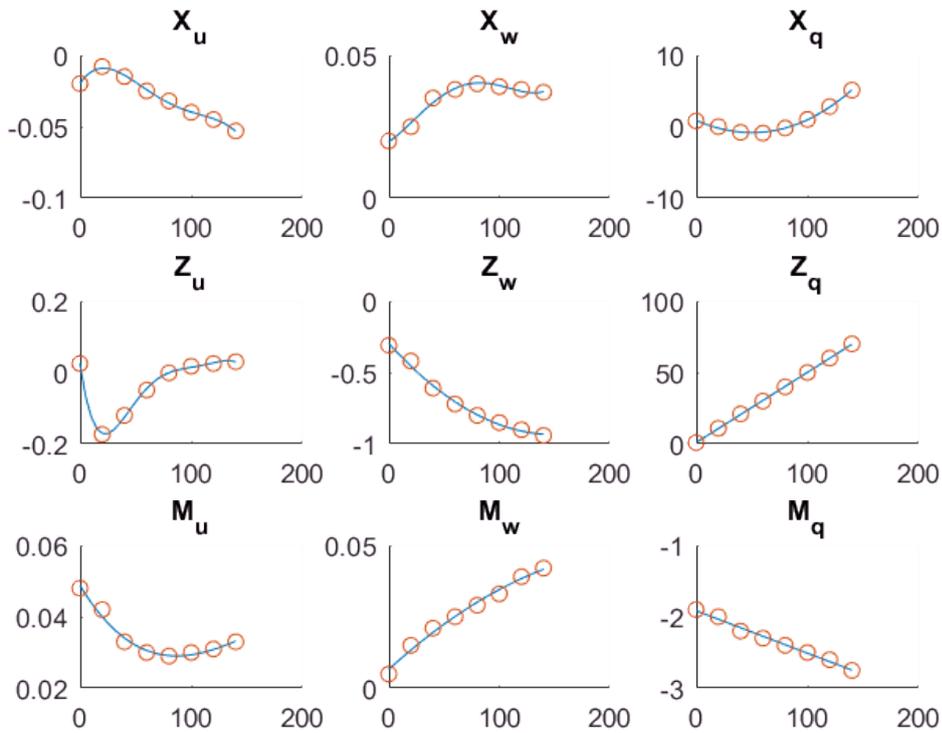
```

$$M_q = -5.9 \cdot 10^{-3} \rho - 1.9$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,9); hold on; title("M_q")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```



Second Page

```

figure;
% Yv
Y_v = [-0.04 -0.06 -0.1 -0.125 -0.15 -0.18 -0.21 -0.24]';
[x,y,r,DATA.Y_v] = Regression(x, Y_v, 1, xx);
Y_v = vpa(DATA.Y_v' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_v))',2)

```

$$Y_v = -1.4 \cdot 10^{-3} \rho - 0.037$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,1); hold on; title("Y_v")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Yp
Y_p = [-0.8 0 0.5 0.66 0.2 -0.9 -2.8 -5.2]';
[x,y,r,DATA.Y_p] = Regression(x, Y_p, 3, xx);

```

```
Y_p = vpa(DATA.Y_p' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_p))',2)
```

$$Y_p = -1.8 \cdot 10^{-6} \rho^3 - 3.4 \cdot 10^{-4} \rho^2 + 0.051 \rho - 0.83$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,2); hold on; title("Y_p")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Y_r
Y_r = [0 -10 -20 -30 -40 -50 -60 -70]';
[x,y,r,DATA.Y_r] = Regression(x, Y_r, 1, xx);
Y_r = vpa(DATA.Y_r' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_r))',2)
```

$$Y_r = -0.5 \rho - 1.9 \cdot 10^{-14}$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,3); hold on; title("Y_r")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% L_v
L_v = [-0.275 -0.25 -0.19 -0.17 -0.16 -0.17 -0.18 -0.21]';
[x,y,r,DATA.L_v] = Regression(x, L_v, 4, xx);
L_v = vpa(DATA.L_v' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_v))',2)
```

$$L_v = 1.8 \cdot 10^{-9} \rho^4 - 5.3 \cdot 10^{-7} \rho^3 + 3.2 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 1.4 \cdot 10^{-3} \rho - 0.28$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,4); hold on; title("L_v")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% L_p
L_p = [-11 -10.8 -10.7 -10.5 -10.4 -10.3 -10.2 -10.05]';
[x,y,r,DATA.L_p] = Regression(x, L_p, 1, xx);
L_p = vpa(DATA.L_p' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_p))',2)
```

$$L_p = 6.5 \cdot 10^{-3} \rho - 11.0$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,5); hold on; title("L_p")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% L_r
L_r = [-0.02 -0.08 -0.14 -0.2 -0.27 -0.33 -0.38 -0.42]';
[x,y,r,DATA.L_r] = Regression(x, L_r, 1, xx);
L_r = vpa(DATA.L_r' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_r))',2)
```

$$L_r = -2.9 \cdot 10^{-3} \rho - 0.024$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,6); hold on; title("L_r")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end
```

```

% N_v
N_v = [-0.02  0  0.03  0.055  0.07  0.075  0.08  0.085]';
[x,y,r,DATA.N_v] = Regression(x, N_v, 3, xx);
N_v = vpa(DATA.N_v' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_v))',2)

```

$$N_v = -7.9 \cdot 10^{-9} \rho^3 - 4.4 \cdot 10^{-6} \rho^2 + 1.5 \cdot 10^{-3} \rho - 0.023$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,7); hold on; title("N_v")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_p
N_p = [ -2 -1.95 -1.9 -1.85 -1.8 -1.75 -1.7 -1.65]';
[x,y,r,DATA.N_p] = Regression(x, N_p, 1, xx);
N_p = vpa(DATA.N_p' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_p))',2)

```

$$N_p = 2.5 \cdot 10^{-3} \rho - 2.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,8); hold on; title("N_p")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_r
N_r = [-0.316 -0.43 -0.71 -0.88 -1.1 -1.25 -1.325 -1.5]';
[x,y,r,DATA.N_r] = Regression(x, N_r, 2, xx);
N_r = vpa(DATA.N_r' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_r))',2)

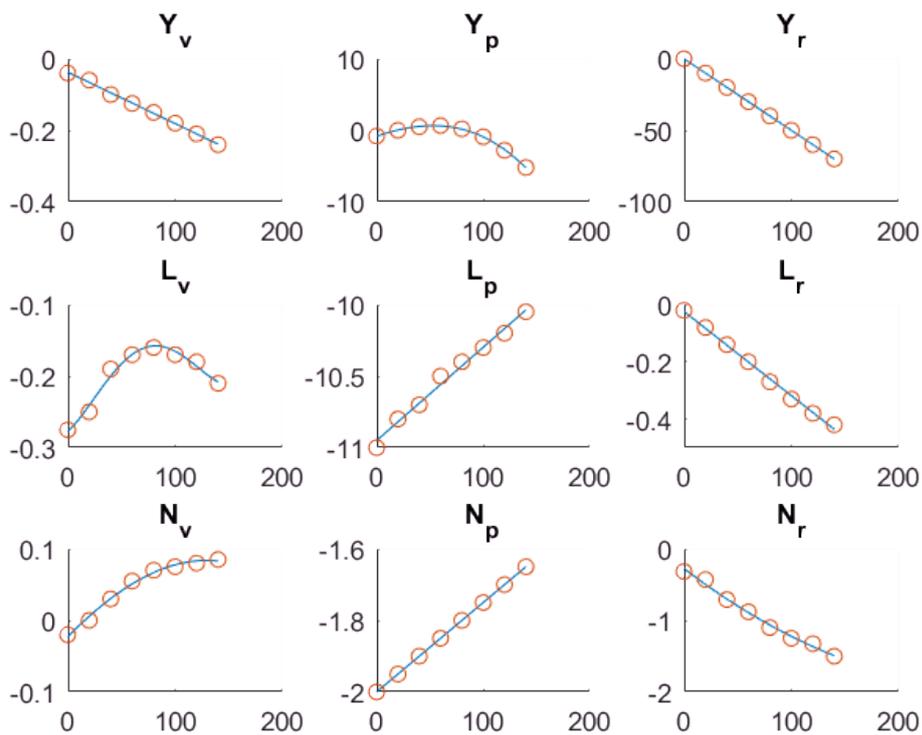
```

$$N_r = 2.0 \cdot 10^{-5} \rho^2 - 0.011 \rho - 0.28$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,9); hold on; title("N_r")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```



Third Page

```
figure;
% X_v
X_v = [-0.02 -0.0145 -0.008 -0.004 -0.002 -0.001 0 0.001]';
[x,y,r,DATA.X_v] = Regression(x, X_v, 2, xx);
X_v = vpa(DATA.X_v' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_v))',2)
```

$$X_v = -1.3 \cdot 10^{-6} \rho^2 + 3.3 \cdot 10^{-4} \rho - 0.02$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,1); hold on; title("X_v")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% X_p
X_p = [-0.16 -0.148 -0.1321 -0.119 -0.1086 -0.0997 -0.0916 -0.0838]';
[x,y,r,DATA.X_p] = Regression(x, X_p, 1, xx);
X_p = vpa(DATA.X_p' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_p))',2)
```

$$X_p = 5.5 \cdot 10^{-4} \rho - 0.16$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,2); hold on; title("X_p")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% X_r
X_r = [0 0 0 0 0 -2200000 0 0]';
```

```
[x,y,r,DATA.X_r] = Regression(x, X_r, 3, xx);
X_r = vpa(DATA.X_r' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_r))',2)
```

$$X_r = 4.9\rho^3 - 922.0\rho^2 + 3.6 \cdot 10^4\rho - 1.3 \cdot 10^5$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,3); hold on; title("X_r")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Z_v
Z_v = [-0.01 -0.018 -0.019 -0.0195 -0.02 -0.021 -0.023 -0.029]';
[x,y,r,DATA.Z_v] = Regression(x, Z_v, 3, xx);
Z_v = vpa(DATA.Z_v' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_v))',2)
```

$$Z_v = -2.9 \cdot 10^{-8}\rho^3 + 6.2 \cdot 10^{-6}\rho^2 - 4.3 \cdot 10^{-4}\rho - 0.01$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,4); hold on; title("Z_v")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Z_p
Z_p = [0 -0.01 -0.02 -0.03 -0.04 -0.05 -0.06 -0.07]';
[x,y,r,DATA.Z_p] = Regression(x, Z_p, 1, xx);
Z_p = vpa(DATA.Z_p' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_p))',2)
```

$$Z_p = -5.0 \cdot 10^{-4}\rho - 2.1 \cdot 10^{-17}$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,5); hold on; title("Z_p")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Z_r
Z_r = [0 0 0 0 0 19 0 0]';
[x,y,r,DATA.Z_r] = Regression(x, Z_r, 3, xx);
Z_r = vpa(DATA.Z_r' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_r))',2)
```

$$Z_r = -4.2 \cdot 10^{-5}\rho^3 + 8.0 \cdot 10^{-3}\rho^2 - 0.31\rho + 1.2$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,6); hold on; title("Z_r")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% M_v
M_v = [0.06 0.048 0.028 0.018 0.01 0.009 0.006 0.004]';
[x,y,r,DATA.M_v] = Regression(x, M_v, 3, xx);
M_v = vpa(DATA.M_v' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_v))',2)
```

$$M_v = -7.9 \cdot 10^{-9}\rho^3 + 5.4 \cdot 10^{-6}\rho^2 - 1.0 \cdot 10^{-3}\rho + 0.062$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,7); hold on; title("M_v")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end
```

```

% M_p
M_p = [0.45 0.44 0.41 0.4 0.4 0.41 0.42 0.43]';
[x,y,r,DATA.M_p] = Regression(x, M_p, 3, xx);
M_p = vpa(DATA.M_p' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_p))',2)

```

$$M_p = -1.3 \cdot 10^{-8} \rho^3 + 1.1 \cdot 10^{-5} \rho^2 - 1.4 \cdot 10^{-3} \rho + 0.45$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,8); hold on; title("M_p")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% M_r
M_r = [0 0 0 0 0 60000 0 0]';
[x,y,r,DATA.M_r] = Regression(x, M_r, 3, xx);
M_r = vpa(DATA.M_r' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_r))',2)

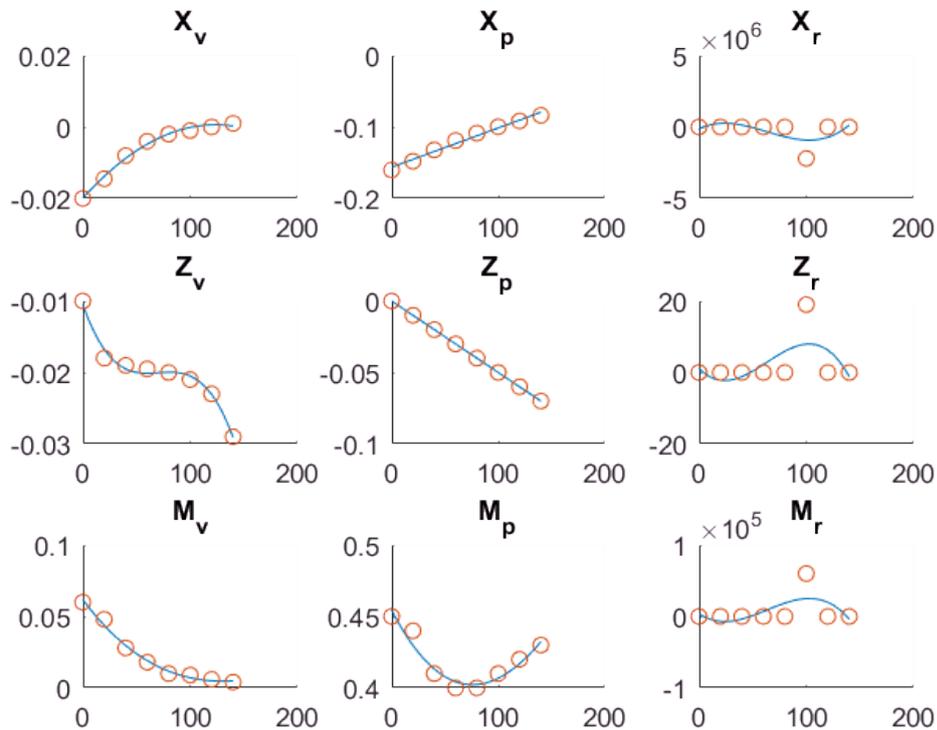
```

$$M_r = -0.13 \rho^3 + 25.0 \rho^2 - 999.0 \rho + 3.6 \cdot 10^3$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,9); hold on; title("M_r")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```



Fourth Page

```

figure;
% Y_u

```

```

Y_u = [0.02 0.018 0.0085 0.0045 0.0046 0.0047 0.0049 0.0055]';
[x,y,r,DATA.Y_u] = Regression(x, Y_u, 5, xx);
Y_u = vpa(DATA.Y_u' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_u))',2)

```

$$Y_u = 1.4 \cdot 10^{-11} \rho^5 - 5.2 \cdot 10^{-9} \rho^4 + 7.1 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 3.7 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 3.9 \cdot 10^{-4} \rho + 0.02$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,1); hold on; title("Y_u")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Y_w
Y_w = [0 0.012 0.018 0.016 0.014 0.013 0.012 0.011]';
[x,y,r,DATA.Y_w] = Regression(x, Y_w, 4, xx);
Y_w = vpa(DATA.Y_w' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_w))',2)

```

$$Y_w = -3.4 \cdot 10^{-10} \rho^4 + 1.3 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 1.8 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 9.7 \cdot 10^{-4} \rho - 2.0 \cdot 10^{-4}$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,2); hold on; title("Y_w")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Y_q
Y_q = [-0.18 -0.17 -0.16 -0.16 -0.16 -0.16 -0.16 -0.16]';
[x,y,r,DATA.Y_q] = Regression(x, Y_q, 3, xx);
Y_q = vpa(DATA.Y_q' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_q))',2)

```

$$Y_q = 2.8 \cdot 10^{-8} \rho^3 - 8.2 \cdot 10^{-6} \rho^2 + 7.4 \cdot 10^{-4} \rho - 0.18$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,3); hold on; title("Y_q")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% L_u
L_u = [0.34 0.15 -0.025 -0.05 -0.04 -0.03 -0.03 -0.03]';
[x,y,r,DATA.L_u] = Regression(x, L_u, 3, xx);
L_u = vpa(DATA.L_u' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_u))',2)

```

$$L_u = -5.3 \cdot 10^{-7} \rho^3 + 1.5 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.014 \rho + 0.35$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,4); hold on; title("L_u")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% L_w
L_w = [0.02 0.28 0.3 0.26 0.235 0.225 0.23 0.245]';
[x,y,r,DATA.L_w] = Regression(x, L_w, 4, xx);
L_w = vpa(DATA.L_w' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_w))',2)

```

$$L_w = -1.1 \cdot 10^{-8} \rho^4 + 3.9 \cdot 10^{-6} \rho^3 - 4.6 \cdot 10^{-4} \rho^2 + 0.02 \rho + 0.024$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,5); hold on; title("L_w")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```

```

end

% L_q
L_q = [-2.6 -2.4 -2.2 -2 -1.9 -1.8 -1.7 -1.6]';
[x,y,r,DATA.L_q] = Regression(x, L_q, 1, xx);
L_q = vpa(DATA.L_q' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_q))',2)

```

$$L_q = 7.0 \cdot 10^{-3} \rho - 2.5$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,6); hold on; title("L_q")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_u
N_u = [ 0.06 0.0005 -0.031 -0.028 -0.022 -0.02 -0.022 -0.028]';
[x,y,r,DATA.N_u] = Regression(x, N_u, 4, xx);
N_u = vpa(DATA.N_u' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_u))',2)

```

$$N_u = 1.2 \cdot 10^{-9} \rho^4 - 5.3 \cdot 10^{-7} \rho^3 + 7.8 \cdot 10^{-5} \rho^2 - 4.6 \cdot 10^{-3} \rho + 0.061$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,7); hold on; title("N_u")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_w
N_w = [0.01 0.045 0.031 0.011 0.003 0.006 0.019 0.041]';
[x,y,r,DATA.N_w] = Regression(x, N_w, 4, xx);
N_w = vpa(DATA.N_w' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_w))',2)

```

$$N_w = -2.7 \cdot 10^{-9} \rho^4 + 9.3 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 9.9 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 3.2 \cdot 10^{-3} \rho + 0.011$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,8); hold on; title("N_w")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_q
N_q = [-0.5 -0.375 -0.25 -0.175 -0.1 0 0.15 0.22]';
[x,y,r,DATA.N_q] = Regression(x, N_q, 1, xx);
N_q = vpa(DATA.N_q' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_q))',2)

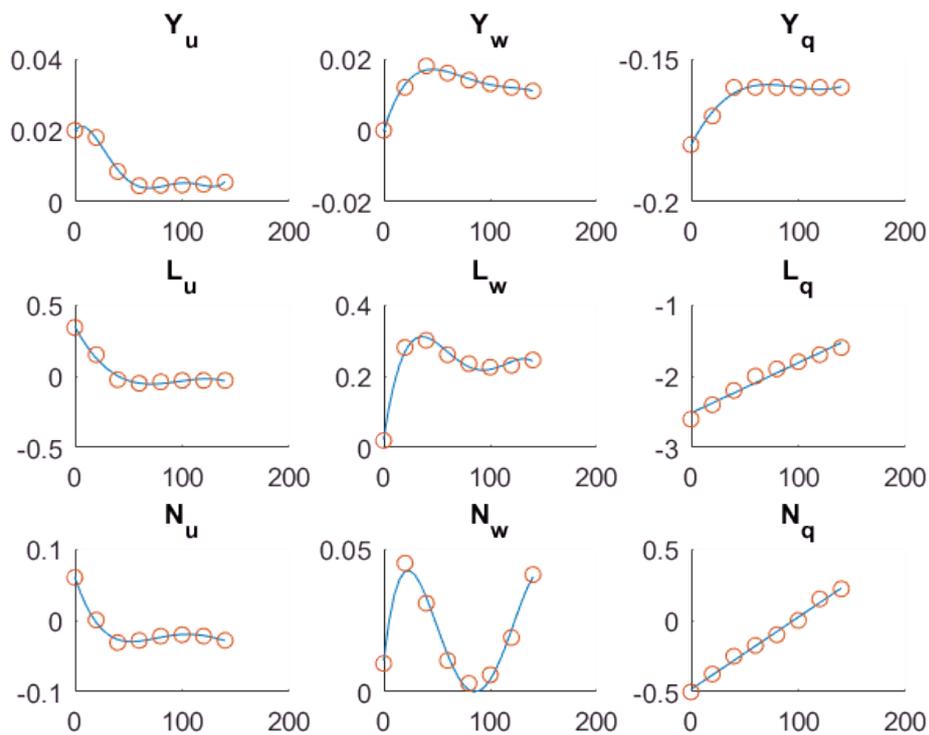
```

$$N_q = 5.1 \cdot 10^{-3} \rho - 0.48$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,9); hold on; title("N_q")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```



Fifth Page

```
figure;
% X_t0
X_t0 = [7 5.8 5 4.7 4.3 4 3.9 3.85]';
[x,y,r,DATA.X_t0] = Regression(x, X_t0, 3, xx);
X_t0 = vpa(DATA.X_t0' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_t0))',2)
```

$$X_{t0} = -1.4 \cdot 10^{-6} \rho^3 + 4.9 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.064 \rho + 7.0$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,1); hold on; title("X_{t0}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% X_t1s
X_t1s = [-9.3 -8.9 -8.5 -8.1 -7.6 -7.35 -7 -6.85]';
[x,y,r,DATA.X_t1s] = Regression(x, X_t1s, 1, xx);
X_t1s = vpa(DATA.X_t1s' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_t1s))',2)
```

$$X_{t1s} = 0.018 \rho - 9.2$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,2); hold on; title("X_{t1s}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% X_t1c
X_t1c = [2 2 2 2 2 2 2.1 2.3]';
```

```
[x,y,r,DATA.X_t1c] = Regression(x, X_t1c, 3, xx);
X_t1c = vpa(DATA.X_t1c' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_t1c))',2)
```

$$X_{t1c} = 5.1 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 7.3 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 2.5 \cdot 10^{-3} \rho + 2.0$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,3); hold on; title("X_{t1c}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Z_t0
Z_t0 = [-92 -90 -98 -108 -118 -127 -135 -142]';
[x,y,r,DATA.Z_t0] = Regression(x, Z_t0, 2, xx);
Z_t0 = vpa(DATA.Z_t0' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_t0))',2)
```

$$Z_{t0} = -8.6 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.28 \rho - 88.0$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,4); hold on; title("Z_{t0}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Z_t1s
Z_t1s = [0 -8 -12 -22 -31 -40 -50 -58]';
[x,y,r,DATA.Z_t1s] = Regression(x, Z_t1s, 1, xx);
Z_t1s = vpa(DATA.Z_t1s' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_t1s))',2)
```

$$Z_{t1s} = 1.9 - 0.42 \rho$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,5); hold on; title("Z_{t1s}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Z_t1c
Z_t1c = [-0.4 0.9 0.55 0 0 0.2 0 0]';
[x,y,r,DATA.Z_t1c] = Regression(x, Z_t1c, 5, xx);
Z_t1c = vpa(DATA.Z_t1c' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_t1c))',2)
```

$$Z_{t1c} = 1.8 \cdot 10^{-9} \rho^5 - 7.1 \cdot 10^{-7} \rho^4 + 1.1 \cdot 10^{-4} \rho^3 - 6.8 \cdot 10^{-3} \rho^2 + 0.17 \rho - 0.41$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,6); hold on; title("Z_{t1c}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% M_t0
M_t0 = [0 3.5 7 10.5 14 17.5 21 24.5]';
[x,y,r,DATA.M_t0] = Regression(x, M_t0, 1, xx);
M_t0 = vpa(DATA.M_t0' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_t0))',2)
```

$$M_{t0} = 0.17 \rho + 8.0 \cdot 10^{-15}$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,7); hold on; title("M_{t0}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end
```

```

% M_t1s
M_t1s = [27 27.5 28 28.5 29 30 31 33]';
[x,y,r,DATA.M_t1s] = Regression(x, M_t1s, 2, xx);
M_t1s = vpa(DATA.M_t1s' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_t1s))',2)

```

$$M_{t1s} = 2.5 \cdot 10^{-4} \rho^2 + 3.9 \cdot 10^{-3} \rho + 27.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,8); hold on; title("M_{t1s}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% M_t1c
M_t1c = [-5.99 -6 -6 -6 -6 -6 -6 -5.99]';
[x,y,r,DATA.M_t1c] = Regression(x, M_t1c, 1, xx);
M_t1c = vpa(DATA.M_t1c' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_t1c))',2)

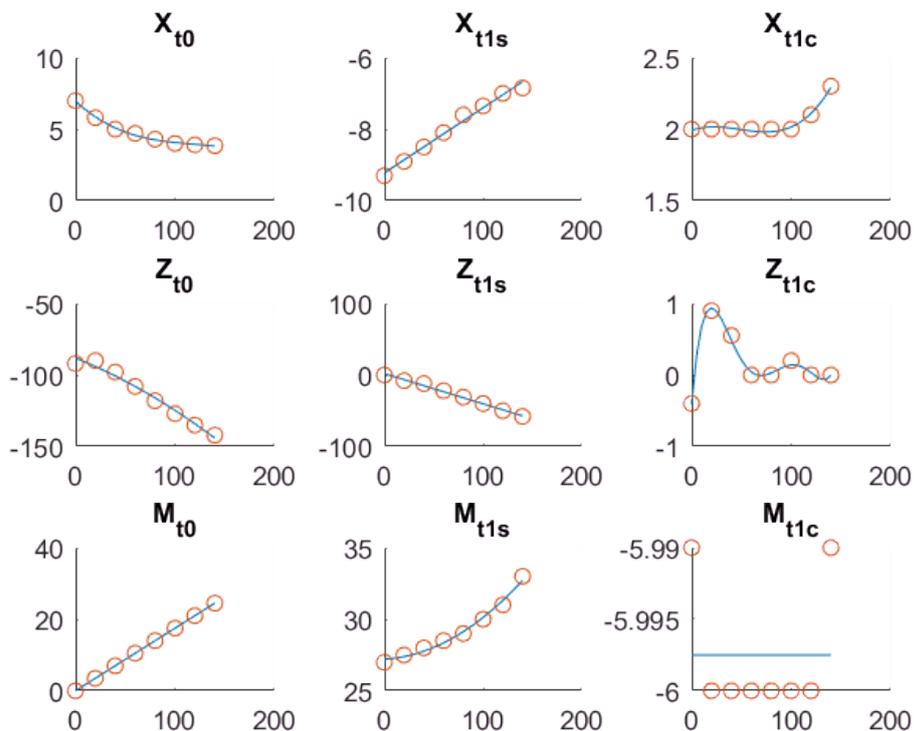
```

$$M_{t1c} = -3.4 \cdot 10^{-17} \rho - 6.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,9); hold on; title("M_{t1c}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```



Sixth Page

```

figure;
% Y_t0

```

```

Y_t0 = [-0.4 0 1.1 1.4 1.5 1.5 1.5 1.6]';
[x,y,r,DATA.Y_t0] = Regression(x, Y_t0, 4, xx);
Y_t0 = vpa(DATA.Y_t0' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_t0))',2)

```

$$Y_{t0} = 4.3 \cdot 10^{-8} \rho^4 - 1.1 \cdot 10^{-5} \rho^3 + 6.2 \cdot 10^{-4} \rho^2 + 0.023 \rho - 0.45$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,1); hold on; title("Y_{t0}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Y_t1s
Y_t1s = [-2 -2 -1.8 -1.6 -1.5 -1.4 -1.3 -1.1]';
[x,y,r,DATA.Y_t1s] = Regression(x, Y_t1s, 3, xx);
Y_t1s = vpa(DATA.Y_t1s' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_t1s))',2)

```

$$Y_{t1s} = -9.5 \cdot 10^{-8} \rho^3 + 2.1 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 5.4 \cdot 10^{-3} \rho - 2.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,2); hold on; title("Y_{t1s}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Y_t1c
Y_t1c = [-9.1 -9 -9 -9 -9 -9 -9 -9.1]';
[x,y,r,DATA.Y_t1c] = Regression(x, Y_t1c, 1, xx);
Y_t1c = vpa(DATA.Y_t1c' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_t1c))',2)

```

$$Y_{t1c} = -5.6 \cdot 10^{-17} \rho - 9.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,3); hold on; title("Y_{t1c}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% L_t0
L_t0 = [ 8 12 28 31 32 34 36 39]';
[x,y,r,DATA.L_t0] = Regression(x, L_t0, 4, xx);
L_t0 = vpa(DATA.L_t0' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_t0))',2)

```

$$L_{t0} = 5.1 \cdot 10^{-7} \rho^4 - 1.3 \cdot 10^{-4} \rho^3 + 7.1 \cdot 10^{-3} \rho^2 + 0.32 \rho + 7.1$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,4); hold on; title("L_{t0}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% L_t1s
L_t1s = [-33 -32 -30 -29 -25 -22 -19 -16]';
[x,y,r,DATA.L_t1s] = Regression(x, L_t1s, 2, xx);
L_t1s = vpa(DATA.L_t1s' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_t1s))',2)

```

$$L_{t1s} = 4.8 \cdot 10^{-4} \rho^2 + 0.06 \rho - 33.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,5); hold on; title("L_{t1s}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```

```

end

% L_t1c
L_t1c = [-151 -150 -150 -150 -150 -150 -150 -151]';
[x,y,r,DATA.L_t1c] = Regression(x, L_t1c, 1, xx);
L_t1c = vpa(DATA.L_t1c' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_t1c))',2)

```

$$L_{t1c} = -9.5 \cdot 10^{-16} \rho - 166.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,6); hold on; title("L_{t1c}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_t0
N_t0 = [18 17 16 15 14 15 18 21]';
[x,y,r,DATA.N_t0] = Regression(x, N_t0, 3, xx);
N_t0 = vpa(DATA.N_t0' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_t0))',2)

```

$$N_{t0} = 8.2 \cdot 10^{-6} \rho^3 - 6.8 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.042 \rho + 18.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,7); hold on; title("N_{t0}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_t1s
N_t1s = [-6 -6 -6 -6 -6 -5.5 -4.75 -2.85]';
[x,y,r,DATA.N_t1s] = Regression(x, N_t1s, 2, xx);
N_t1s = vpa(DATA.N_t1s' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_t1s))',2)

```

$$N_{t1s} = 3.2 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.028 \rho - 5.7$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,8); hold on; title("N_{t1s}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_t1c
N_t1c = [-27 -26.8 -26.4 -26.2 -26.1 -26 -25.9 -25.8]';
[x,y,r,DATA.N_t1c] = Regression(x, N_t1c, 2, xx);
N_t1c = vpa(DATA.N_t1c' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_t1c))',2)

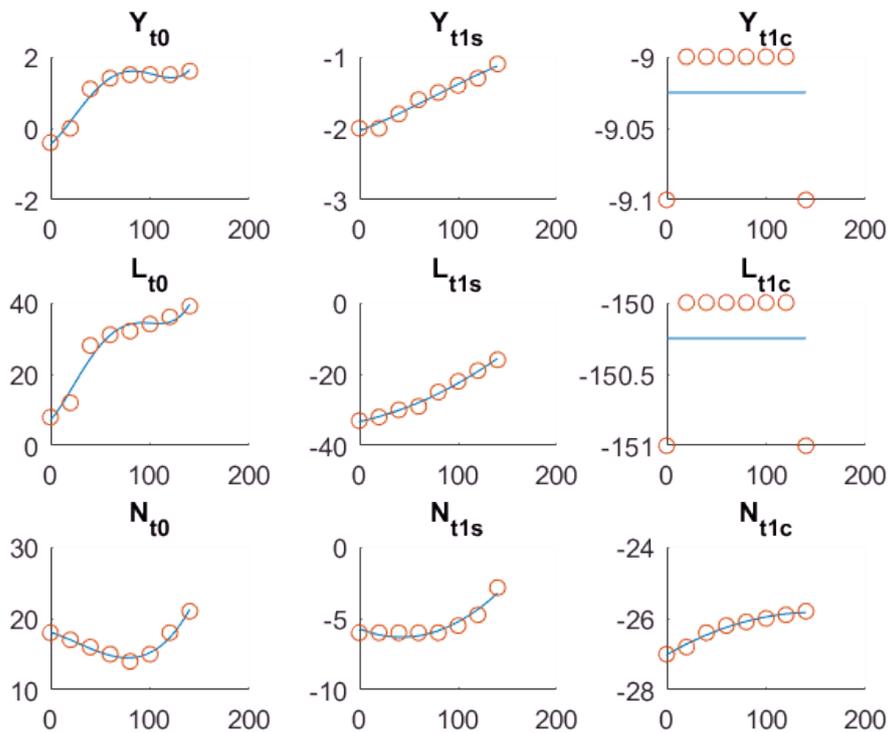
```

$$N_{t1c} = -5.4 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 0.016 \rho - 27.0$$

```

if Options.verbose == 1
    subplot(3,3,9); hold on; title("N_{t1c}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

```



Seventh Page

```
figure;
% X_t0T
X_t0T = [0 0 0 0 0 -20 0 0]';
[x,y,r,DATA.X_t0T] = Regression(x, X_t0T, 5, xx);
X_t0T = vpa(DATA.X_t0T' * ShortVanderS(rho, length(DATA.X_t0T))',2)
```

$$X_{t0T} = -3.4 \cdot 10^{-8} \rho^5 + 1.2 \cdot 10^{-5} \rho^4 - 1.5 \cdot 10^{-3} \rho^3 + 0.072 \rho^2 - 1.1 \rho + 0.56$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(2,3,1); hold on; title("X_{t0T}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Y_t0T
Y_t0T = [3.8 3.5 3.4 3.85 4.1 4.6 4.9 5.1]';
[x,y,r,DATA.Y_t0T] = Regression(x, Y_t0T, 4, xx);
Y_t0T = vpa(DATA.Y_t0T' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Y_t0T))',2)
```

$$Y_{t0T} = 3.8 \cdot 10^{-9} \rho^4 - 3.3 \cdot 10^{-6} \rho^3 + 6.6 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.03 \rho + 3.8$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(2,3,2); hold on; title("Y_{t0T}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% Z_t0T
Z_t0T = [0 0 0 0 0 200 0 0]';
```

```
[x,y,r,DATA.Z_t0T] = Regression(x, Z_t0T, 5, xx);
Z_t0T = vpa(DATA.Z_t0T' * ShortVanderS(rho, length(DATA.Z_t0T))',2)
```

$$Z_{t0T} = 3.4 \cdot 10^{-7} \rho^5 - 1.2 \cdot 10^{-4} \rho^4 + 0.015 \rho^3 - 0.72 \rho^2 + 11.0 \rho - 5.6$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(2,3,3); hold on; title("Z_{t0T}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% L_t0T
L_t0T = [-0.9 -0.85 -0.85 -0.95 -1 -1 -1 -1.05]';
[x,y,r,DATA.L_t0T] = Regression(x, L_t0T, 3, xx);
L_t0T = vpa(DATA.L_t0T' * ShortVanderS(rho, length(DATA.L_t0T))',2)
```

$$L_{t0T} = 2.8 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 6.3 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 2.2 \cdot 10^{-3} \rho - 0.89$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(2,3,4); hold on; title("L_{t0T}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% M_t0T
M_t0T = [0 0 0 0 0 5 0 0]';
[x,y,r,DATA.M_t0T] = Regression(x, M_t0T, 5, xx);
M_t0T = vpa(DATA.M_t0T' * ShortVanderS(rho, length(DATA.M_t0T))',2)
```

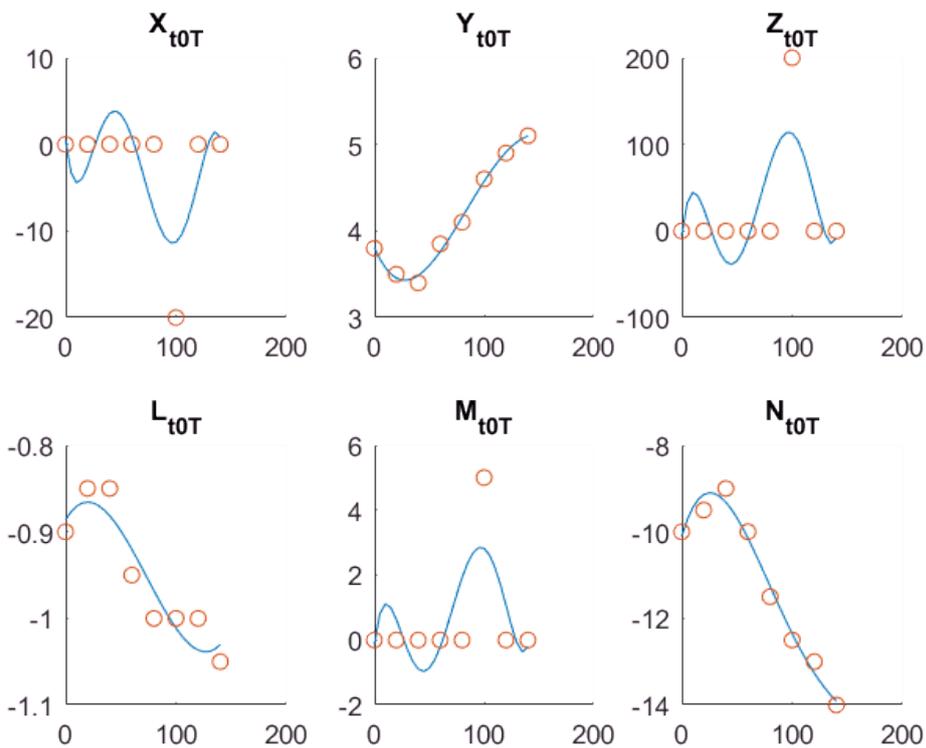
$$M_{t0T} = 8.5 \cdot 10^{-9} \rho^5 - 3.1 \cdot 10^{-6} \rho^4 + 3.8 \cdot 10^{-4} \rho^3 - 0.018 \rho^2 + 0.27 \rho - 0.14$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(2,3,5); hold on; title("M_{t0T}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end

% N_t0T
N_t0T = [-10 -9.5 -9 -10 -11.5 -12.5 -13 -14]';
[x,y,r,DATA.N_t0T] = Regression(x, N_t0T, 4, xx);
N_t0T = vpa(DATA.N_t0T' * ShortVanderS(rho, length(DATA.N_t0T))',2)
```

$$N_{t0T} = -2.7 \cdot 10^{-8} \rho^4 + 1.3 \cdot 10^{-5} \rho^3 - 2.1 \cdot 10^{-3} \rho^2 + 0.086 \rho - 10.0$$

```
if Options.verbose == 1
    subplot(2,3,6); hold on; title("N_{t0T}")
    plot(xx,r); scatter(x,y);
end
```



```
save('Lynx.mat', 'DATA')
```

```
function [x,y,result,coef] = Regression(x,y, ordem, x_demonstration)
    o = ShortVander(x,ordem+1);
    coef = pinv(o)*y;
    o = ShortVander(x_demonstration,ordem+1);
    result = o*coef;
end

function A = ShortVander(x, n)
    x = x(:); % Column vector
    A = ones(length(x), n);
    for i = 2:n
        A(:, i) = x .* A(:, i-1);
    end
end

function A = ShortVanderS(x, n)
    x = x(:); % Column vector
    A = [];
    for i = 0:n-1
        A = [A x^i];
    end
end
```

APÊNDICE B – DESENVOLVIMENTO DO CONTROLADOR

Design of Helicopter Stability Control

Helicopter Model

```
clc; clear all;  
disp('Understanding Helicopter Model')
```

Understanding Helicopter Model

```
% INPUTS1 (4)  
% Main Rotor Collective  
% Longitudinal Cyclic  
% Lateral Cyclic  
% Tail Rotor Collective  
  
% INPUTS2 (4)  
% Vx Turbulance  
% Vy Turbulance  
% Vz Turbulance  
% Wind Direction (?)  
  
% STATES (8)  
% Forward Velocity  
% Lateral Velocity  
% Vertical Velocity  
% Roll Rate  
% Pitch Rate  
% Yaw Rate  
% Pitch Attitude  
% Roll Attitude  
  
% OUTPUTS (6)  
% Heave Velocity1  
% Pitch Attitude1  
% Roll Attitude1
```

```

% Heading Rate1
% Body Axis Pitch2 (No Feedback ?)
% Roll Rate2 (No Feedback ?)

% a => state x state
% b => state x input
% c => output x state
% d => output x input

```

Stability Analysis

```

% Force/translational velocity [1/s]
% Normalized Derivative of the Force under the u,v,w velocity pertubations (Eq. 4.40)
syms X_u X_v X_w
syms Y_u Y_v Y_w
syms Z_u Z_v Z_w

% Force/angular velocity [m/s.rad]
% Normalized Derivative of the Moment under the p,q,e angular velocity pertubations (Eq. 4.40)
syms X_p X_q X_r
syms Y_p Y_q Y_r
syms Z_p Z_q Z_r

% Force/control [m/s2.rad]
% Normalized Derivative of the Force under the p,q,e control pertubations (Eq. 4.40)
syms X_t0 X_t1s X_t1c X_t0T
syms Y_t0 Y_t1s Y_t1c Y_t0T
syms Z_t0 Z_t1s Z_t1c Z_t0T

% Moment/translational velocity [rad/s.m]
% Normalized Derivative of the Force under the u,v,w velocity pertubations (Eq. 4.40)
syms L_u L_v L_w
syms N_u N_v N_w
syms M_u M_v M_w

% Moment/angular velocity [1/S]
% Normalized Derivative of the Moment under the p,q,e angular velocity pertubations (Eq. 4.40)

```

```

syms L_p L_q L_r
syms N_p N_q N_r
syms M_p M_q M_r

% Moment/control [1/s^2]
% Normalized Derivative of the Moment under the p,q,e control perturbations (Eq. 4.40)
syms L_t0 L_t1s L_t1c L_t0T
syms N_t0 N_t1s N_t1c N_t0T
syms M_t0 M_t1s M_t1c M_t0T

% Inertial influence (Eq. 4.47 - Eq. 4.48)
syms Ixx Ixy Ixz
syms Iyx Iyy Iyz
syms Izx Izy Izz

% Moment/translational velocity [rad/s.m]
% Normalized Derivative of the Force under the u,v,w velocity perturbations
syms Li_u Li_v Li_w
syms Ni_u Ni_v Ni_w
syms Mi_u Mi_v Mi_w

% Moment/angular velocity [1/S]
% Normalized Derivative of the Moment under the p,q,e angular velocity perturbations
syms Li_p Li_q Li_r
syms Ni_p Ni_q Ni_r
syms Mi_p Mi_q Mi_r

%The k constants in the inertia terms
syms k_1 k_2 k_3

% For a non-zero turn rate, the non-zero inertial forces and moments
% (centrifugal, Coriolis, gyroscopic) are included in the trim balance.

% Trim velocities in fuselage axes system (m/s, ft/s, knot)
syms U_e V_e W_e

% Trim angular velocities in fuselage axes system (rad/s) (Eq. 4.29 - Eq. 4.31)
syms P_e Q_e R_e

```

```

% Theta_e, Phi_e, Psi_e equilibrium or trim Euler angles (rad)
syms Theta_e Phi_e Psi_e

% Aircraft angular velocity in trim flight and Velocity in trim Flight (rad/s)
syms Omega_a V_fe

syms Beta_e Gamma_fe Lambda_0 Lambda_0T Beta_1s

% Value of gravity
syms g

MacroA = M_p-2*P_e*Ixz/Iyy-R_e*(Ixx-Izz)/Iyy;
MacroB = M_r+2*R_e*Ixz/Iyy-P_e*(Ixx-Izz)/Iyy;

disp('Generating Helicopter Model')

```

Generating Helicopter Model

```

a01 = [
    X_u          X_w-Q_e          X_q-W_e          -g*cos(Theta_e);
    Z_u + Q_e    Z_w          Z_q+U_e    -g*cos(Phi_e)*sin(Theta_e);
    M_u          M_w          M_q          0;
    0            0            cos(Phi_e)    0;
    Y_u-R_e      Y_w+P_e      Y_q          -g*sin(Phi_e)*sin(Theta_e);
    Li_u         Li_w         Li_q+k_1*P_e-k_2*R_e    0;
    0            0            sin(Phi_e)*tan(Theta_e)    Omega_a*sec(Theta_e);
    Ni_u         Ni_w         Ni_q-k_1*R_e-k_3*P_e    0];

a02 = [
    X_v+R_e      X_p          0            X_r+V_e;
    Z_v-P_e      Z_p-V_e    -g*sin(Phi_e)*cos(Theta_e)    Z_r;
    M_v          MacroA      0            MacroB;
    0            0          -Omega_a*cos(Theta_e)    -sin(Phi_e);
    Y_v          Y_p+W_e    g*cos(Phi_e)*cos(Theta_e)    Y_r-U_e;
    Li_v         Li_p+k_1*Q_e    0            Li_r-k_2*Q_e;
    0            1            0            cos(Phi_e)*tan(Theta_e);
    Ni_v         Ni_p+k_3*Q_e    0            Ni_r-k_1*Q_e];

```

a0=[a01 a02]

a0 =

$$\begin{pmatrix} X_u & X_w - Q_e & X_q - W_e & -g \cos(\theta_e) & R_e + X_v & X_p & 0 & V_e + X_r \\ Q_e + Z_u & Z_w & U_e + Z_q & -g \cos(\Phi_e) \sin(\theta_e) & Z_v - P_e & Z_p - V_e & -g \cos(\theta_e) \sin(\Phi_e) & Z_r \\ M_u & M_w & M_q & 0 & M_v & M_p - \frac{2 \text{Ixz} P_e}{\text{Iyy}} - \frac{R_e (\text{Ixx} - \text{Izz})}{\text{Iyy}} & 0 & M_r + \frac{2 \text{Ixz} R_e}{\text{Iyy}} - \frac{P_e (\text{Ixx} - \text{Izz})}{\text{Iyy}} \\ 0 & 0 & \cos(\Phi_e) & 0 & 0 & 0 & -\Omega_a \cos(\theta_e) & -\sin(\Phi_e) \\ Y_u - R_e & P_e + Y_w & Y_q & -g \sin(\Phi_e) \sin(\theta_e) & Y_v & W_e + Y_p & g \cos(\Phi_e) \cos(\theta_e) & Y_r - U_e \\ \text{Li}_u & \text{Li}_w & \text{Li}_q + P_e k_1 - R_e k_2 & 0 & \text{Li}_v & \text{Li}_p + Q_e k_1 & 0 & \text{Li}_r - Q_e k_2 \\ 0 & 0 & \sin(\Phi_e) \tan(\theta_e) & \frac{\Omega_a}{\cos(\theta_e)} & 0 & 1 & 0 & \cos(\Phi_e) \tan(\theta_e) \\ \text{Ni}_u & \text{Ni}_w & \text{Ni}_q - P_e k_3 - R_e k_1 & 0 & \text{Ni}_v & \text{Ni}_p + Q_e k_3 & 0 & \text{Ni}_r - Q_e k_1 \end{pmatrix}$$

a0= a0([1 5 2 6 3 8 7 4],[1 5 2 6 3 8 7 4])

a0 =

$$\begin{pmatrix} X_u & R_e + X_v & X_w - Q_e & X_p & X_q - W_e & V_e + X_r & 0 & -g \cos(\theta_e) \\ Y_u - R_e & Y_v & P_e + Y_w & W_e + Y_p & Y_q & Y_r - U_e & g \cos(\Phi_e) \cos(\theta_e) & -g \sin(\Phi_e) \sin(\theta_e) \\ Q_e + Z_u & Z_v - P_e & Z_w & Z_p - V_e & U_e + Z_q & Z_r & -g \cos(\theta_e) \sin(\Phi_e) & -g \cos(\Phi_e) \sin(\theta_e) \\ \text{Li}_u & \text{Li}_v & \text{Li}_w & \text{Li}_p + Q_e k_1 & \text{Li}_q + P_e k_1 - R_e k_2 & \text{Li}_r - Q_e k_2 & 0 & 0 \\ M_u & M_v & M_w & M_p - \frac{2 \text{Ixz} P_e}{\text{Iyy}} - \frac{R_e (\text{Ixx} - \text{Izz})}{\text{Iyy}} & M_q & M_r + \frac{2 \text{Ixz} R_e}{\text{Iyy}} - \frac{P_e (\text{Ixx} - \text{Izz})}{\text{Iyy}} & 0 & 0 \\ \text{Ni}_u & \text{Ni}_v & \text{Ni}_w & \text{Ni}_p + Q_e k_3 & \text{Ni}_q - P_e k_3 - R_e k_1 & \text{Ni}_r - Q_e k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin(\Phi_e) \tan(\theta_e) & \cos(\Phi_e) \tan(\theta_e) & 0 & \frac{\Omega_a}{\cos(\theta_e)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\Phi_e) & -\sin(\Phi_e) & -\Omega_a \cos(\theta_e) & 0 \end{pmatrix}$$

b0=[X_t0 X_t1s X_t1c X_t0T;
Z_t0 Z_t1s Z_t1c Z_t0T;

```

M_t0      M_t1s      M_t1c      M_t0T;
0          0          0          0;
Y_t0      Y_t1s      Y_t1c      Y_t0T;
L_t0      L_t1s      L_t1c      L_t0T;
0          0          0          0;
N_t0      N_t1s      N_t1c      N_t0T]

```

b0 =

$$\begin{pmatrix} X_{t0} & X_{t1s} & X_{t1c} & X_{t0T} \\ Z_{t0} & Z_{t1s} & Z_{t1c} & Z_{t0T} \\ M_{t0} & M_{t1s} & M_{t1c} & M_{t0T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{t0} & Y_{t1s} & Y_{t1c} & Y_{t0T} \\ L_{t0} & L_{t1s} & L_{t1c} & L_{t0T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{t0} & N_{t1s} & N_{t1c} & N_{t0T} \end{pmatrix}$$

```
b0=b0([1 5 2 6 3 8 7 4],:)
```

b0 =

$$\begin{pmatrix} X_{t0} & X_{t1s} & X_{t1c} & X_{t0T} \\ Y_{t0} & Y_{t1s} & Y_{t1c} & Y_{t0T} \\ Z_{t0} & Z_{t1s} & Z_{t1c} & Z_{t0T} \\ L_{t0} & L_{t1s} & L_{t1c} & L_{t0T} \\ M_{t0} & M_{t1s} & M_{t1c} & M_{t0T} \\ N_{t0} & N_{t1s} & N_{t1c} & N_{t0T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Defining the Helicopter Model

```

% The speed will define multiple elements in our matrix (rho = speed [knots])
syms rho
assume(rho, 'real');
Name = "Lynx";
Helicopter = load(strcat(Name, '.mat'));
X_u = subs(X_u, Helicopter.DATA.X_u' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_u))');
X_w = subs(X_w, Helicopter.DATA.X_w' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_w))');
X_q = subs(X_q, Helicopter.DATA.X_q' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_q))');
Z_u = subs(Z_u, Helicopter.DATA.Z_u' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_u))');
Z_w = subs(Z_w, Helicopter.DATA.Z_w' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_w))');
Z_q = subs(Z_q, Helicopter.DATA.Z_q' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_q))');
M_u = subs(M_u, Helicopter.DATA.M_u' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_u))');
M_w = subs(M_w, Helicopter.DATA.M_w' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_w))');
M_q = subs(M_q, Helicopter.DATA.M_q' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_q))');

X_v = subs(X_v, Helicopter.DATA.X_v' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_v))');
X_p = subs(X_p, Helicopter.DATA.X_p' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_p))');
X_r = subs(X_r, Helicopter.DATA.X_r' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_r))');
Z_v = subs(Z_v, Helicopter.DATA.Z_v' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_v))');
Z_p = subs(Z_p, Helicopter.DATA.Z_p' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_p))');
Z_r = subs(Z_r, Helicopter.DATA.Z_r' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_r))');
M_v = subs(M_v, Helicopter.DATA.M_v' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_v))');
M_p = subs(M_p, Helicopter.DATA.M_p' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_p))');
M_r = subs(M_r, Helicopter.DATA.M_r' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_r))');

X_t0 = subs(X_t0, Helicopter.DATA.X_t0' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_t0))');
X_t0T = subs(X_t0T, Helicopter.DATA.X_t0T' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_t0T))');
X_t1s = subs(X_t1s, Helicopter.DATA.X_t1s' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_t1s))');
X_t1c = subs(X_t1c, Helicopter.DATA.X_t1c' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.X_t1c))');
Z_t0 = subs(Z_t0, Helicopter.DATA.Z_t0' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_t0))');
Z_t0T = subs(Z_t0T, Helicopter.DATA.Z_t0T' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_t0T))');
Z_t1s = subs(Z_t1s, Helicopter.DATA.Z_t1s' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_t1s))');
Z_t1c = subs(Z_t1c, Helicopter.DATA.Z_t1c' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Z_t1c))');
M_t0 = subs(M_t0, Helicopter.DATA.M_t0' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_t0))');
M_t0T = subs(M_t0T, Helicopter.DATA.M_t0T' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_t0T))');
M_t1s = subs(M_t1s, Helicopter.DATA.M_t1s' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_t1s))');
M_t1c = subs(M_t1c, Helicopter.DATA.M_t1c' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.M_t1c))');

```

```

Y_u = subs(Y_u, Helicopter.DATA.Y_u' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_u))');
Y_w = subs(Y_w, Helicopter.DATA.Y_w' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_w))');
Y_q = subs(Y_q, Helicopter.DATA.Y_q' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_q))');
L_u = subs(L_u, Helicopter.DATA.L_u' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_u))');
L_w = subs(L_w, Helicopter.DATA.L_w' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_w))');
L_q = subs(L_q, Helicopter.DATA.L_q' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_q))');
N_u = subs(N_u, Helicopter.DATA.N_u' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_u))');
N_w = subs(N_w, Helicopter.DATA.N_w' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_w))');
N_q = subs(N_q, Helicopter.DATA.N_q' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_q))');

Y_v = subs(Y_v, Helicopter.DATA.Y_v' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_v))');
Y_p = subs(Y_p, Helicopter.DATA.Y_p' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_p))');
Y_r = subs(Y_r, Helicopter.DATA.Y_r' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_r))');
L_v = subs(L_v, Helicopter.DATA.L_v' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_v))');
L_p = subs(L_p, Helicopter.DATA.L_p' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_p))');
L_r = subs(L_r, Helicopter.DATA.L_r' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_r))');
N_v = subs(N_v, Helicopter.DATA.N_v' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_v))');
N_p = subs(N_p, Helicopter.DATA.N_p' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_p))');
N_r = subs(N_r, Helicopter.DATA.N_r' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_r))');

Y_t0 = subs(Y_t0, Helicopter.DATA.Y_t0' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_t0))');
Y_t0T = subs(Y_t0T, Helicopter.DATA.Y_t0T' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_t0T))');
Y_t1s = subs(Y_t1s, Helicopter.DATA.Y_t1s' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_t1s))');
Y_t1c = subs(Y_t1c, Helicopter.DATA.Y_t1c' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.Y_t1c))');
L_t0 = subs(L_t0, Helicopter.DATA.L_t0' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_t0))');
L_t0T = subs(L_t0T, Helicopter.DATA.L_t0T' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_t0T))');
L_t1s = subs(L_t1s, Helicopter.DATA.L_t1s' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_t1s))');
L_t1c = subs(L_t1c, Helicopter.DATA.L_t1c' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.L_t1c))');
N_t0 = subs(N_t0, Helicopter.DATA.N_t0' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_t0))');
N_t0T = subs(N_t0T, Helicopter.DATA.N_t0T' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_t0T))');
N_t1s = subs(N_t1s, Helicopter.DATA.N_t1s' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_t1s))');
N_t1c = subs(N_t1c, Helicopter.DATA.N_t1c' * ShortVander(rho, length(Helicopter.DATA.N_t1c))');

% Specify Flight Trim - Valor adotados pelo livro:
V_fe = subs(V_fe, Helicopter.DATA.V_fe); % Total velocity in trim [m/s, ft/s, knot]
Beta_e = subs(Beta_e, Helicopter.DATA.Beta_e); % Sideslip Angle
Gamma_fe = subs(Gamma_fe, Helicopter.DATA.Gamma_fe); % Flight Path Angle
Omega_a = subs(Omega_a, Helicopter.DATA.Omega_a); % Angular Velocity about the vertical Axis

```

```

% Guess Initial Values - Valores aproximados obtidos:
Phi_e = subs(Phi_e, Helicopter.DATA.Phi_e);
Theta_e = subs(Theta_e, Helicopter.DATA.Theta_e);
Psi_e = subs(Psi_e, Helicopter.DATA.Psi_e); % Não é usado
Lambda_0 = subs(Lambda_0, Helicopter.DATA.Lambda_0); % Não é usado
Lambda_0T = subs(Lambda_0T, Helicopter.DATA.Lambda_0T); % Não é usado
Beta_1s = subs(Beta_1s, Helicopter.DATA.Beta_1s); % Não é usado

% Inertial Moment
Ixx = subs(Ixx, Helicopter.DATA.Ixx );
Ixz = subs(Ixz, Helicopter.DATA.Ixz );
Iyy = subs(Iyy, Helicopter.DATA.Iyy );
Izz = subs(Izz, Helicopter.DATA.Izz );

% Replacing the errors on the graphics:
X_r = 0.00;
Z_r = 0.00;
M_r = 0.00;
X_t0T = 0.00;
Z_t0T = 0.00;
M_t0T = 0.00;

% Calculating other values:
k_1 = subs(k_1, Ixz*(Izz+Ixx-Iyy)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
k_2 = subs(k_2, (Izz*(Izz-Iyy)+Ixz^2)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
k_3 = subs(k_3, (Ixx*(Iyy-Ixx)-Ixz^2)/(Ixx*Izz-Ixz^2));

%Confirmar, muito estranho ter que multiplicar por Ixz
Li_u = subs(Li_u, (Izz*L_u*Ixz + Ixz*N_u*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Li_v = subs(Li_v, (Izz*L_v*Ixz + Ixz*N_v*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Li_w = subs(Li_w, (Izz*L_w*Ixz + Ixz*N_w*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Li_p = subs(Li_p, (Izz*L_p*Ixz + Ixz*N_p*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Li_q = subs(Li_q, (Izz*L_q*Ixz + Ixz*N_q*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Li_r = subs(Li_r, (Izz*L_r*Ixz + Ixz*N_r*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));

Ni_u = subs(Ni_u, (Ixz*L_u*Ixz + Ixx*N_u*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Ni_v = subs(Ni_v, (Ixz*L_v*Ixz + Ixx*N_v*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));

```

```

Ni_w = subs(Ni_w, (Ixz*L_w*Ixz + Ixx*N_w*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Ni_p = subs(Ni_p, (Ixz*L_p*Ixz + Ixx*N_p*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Ni_q = subs(Ni_q, (Ixz*L_q*Ixz + Ixx*N_q*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));
Ni_r = subs(Ni_r, (Ixz*L_r*Ixz + Ixx*N_r*Ixz)/(Ixx*Izz-Ixz^2));

P_e = subs(P_e, -Psi_e*sin(Theta_e));
Q_e = subs(Q_e, Psi_e*sin(Phi_e)*cos(Theta_e));
R_e = subs(R_e, Psi_e*cos(Phi_e)*cos(Theta_e));

k_x1 = sin(Phi_e)*sin(Theta_e)*cos(Gamma_fe);
k_x2 = cos(Phi_e)*cos(Gamma_fe);
k_x3 = sin(Beta_e)-sin(Phi_e)*cos(Theta_e)*sin(Gamma_fe);

k_x4 = -k_x2*k_x3/(k_x1^2+k_x2^2);
k_x5 = (k_x3^2-k_x1^2)/(k_x1^2+k_x2^2);

X__e = vpa(asin(-k_x4 + 0.5*(k_x4^2 - k_x5)^0.5));
X_e = vpa(asin(-k_x4 - 0.5*(k_x4^2 - k_x5)^0.5));

% NOT SURE DATA
Gamma_fe = 0.5;
V_fe = 0.1;
%%NOT SURE DATA

U_e = vpa(V_fe*(cos(Theta_e)*cos(Gamma_fe)*cos(X__e)-sin(Theta_e)*sin(Gamma_fe)));
V_e = vpa(V_fe*(cos(Phi_e)*cos(Gamma_fe)*sin(X_e)+sin(Phi_e)*(sin(Theta_e)*cos(Gamma_fe)*cos(X_e)+cos(Theta_e)*sin(Gamma_fe))));
W_e = vpa(V_fe*(-sin(Phi_e)*cos(Gamma_fe)*sin(X_e)+cos(Phi_e)*(sin(Theta_e)*cos(Gamma_fe)*cos(X_e)+cos(Theta_e)*sin(Gamma_fe))));

% NOT SURE CALCULATIONS
V_e = -X_r;
U_e = subs(U_e, -0.9); %Trim values weren't present
W_e = subs(W_e, 0.3); %Trim values weren't present
g = subs(g, 9.8);

disp('Generating Helicopter Matrix')

```

Generating Helicopter Matrix

```
HM_A = (vpa(subs(subs(a0)),3))
```

$$\text{HM_A} = \begin{pmatrix} -1.01 \cdot 10^{-9} \rho^4 + 3.29 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 3.61 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 0.00112 \rho - 0.0197 & -1.35 \cdot 10^{-6} \rho^2 + 3.33 \cdot 10^{-4} \rho - 0.0199 & \\ 1.37 \cdot 10^{-11} \rho^5 - 5.25 \cdot 10^{-9} \rho^4 + 7.09 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 3.74 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 3.88 \cdot 10^{-4} \rho + 0.0201 & -0.00144 \rho - 0.0375 & \\ -1.46 \cdot 10^{-10} \rho^5 + 6.41 \cdot 10^{-8} \rho^4 - 1.05 \cdot 10^{-5} \rho^3 + 7.67 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.0214 \rho + 0.0245 & -2.92 \cdot 10^{-8} \rho^3 + 6.18 \cdot 10^{-6} \rho^2 - 4.26 \cdot 10^{-4} \rho - 0.0105 & \\ 1.71 \cdot 10^{-10} \rho^4 - 5.2 \cdot 10^{-7} \rho^3 + 1.41 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.0124 \rho + 0.299 & 1.51 \cdot 10^{-9} \rho^4 - \sigma_1 + 2.61 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 0.00138 \rho - 0.236 & \\ -8.21 \cdot 10^{-9} \rho^3 + 4.04 \cdot 10^{-6} \rho^2 - 5.16 \cdot 10^{-4} \rho + 0.0488 & -7.89 \cdot 10^{-9} \rho^3 + 5.39 \cdot 10^{-6} \rho^2 - 0.00101 \rho + 0.0618 & \\ 2.32 \cdot 10^{-10} \rho^4 - 1.75 \cdot 10^{-7} \rho^3 + 3.65 \cdot 10^{-5} \rho^2 - 0.00282 \rho + 0.06 & 2.52 \cdot 10^{-10} \rho^4 - 7.5 \cdot 10^{-8} \rho^3 + 3.62 \cdot 10^{-6} \rho^2 + 4.84 \cdot 10^{-4} \rho - 0.04 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = 4.42 \cdot 10^{-7} \rho^3$$

```
HM_B = (vpa(subs(subs(b0)),3))
```

$$\text{HM_B} = \begin{pmatrix} -1.37 \cdot 10^{-6} \rho^3 + 4.91 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.0643 \rho + 6.96 & 0.0182 \rho - 9.23 & 5.05 \cdot 10^{-7} \rho^3 - 7.33 & \\ 4.26 \cdot 10^{-8} \rho^4 - 1.09 \cdot 10^{-5} \rho^3 + 6.25 \cdot 10^{-4} \rho^2 + 0.0233 \rho - 0.45 & -9.47 \cdot 10^{-8} \rho^3 + 2.14 \cdot 10^{-5} \rho^2 + 0.00536 \rho - 2.04 & -5.63 & \\ -8.63 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.279 \rho - 88.2 & 1.92 - 0.422 \rho & 1.76 \cdot 10^{-9} \rho^5 - 7.14 \cdot 10^{-7} \rho^4 + 1.0 & \\ 5.09 \cdot 10^{-7} \rho^4 - 1.26 \cdot 10^{-4} \rho^3 + 0.00707 \rho^2 + 0.317 \rho + 7.1 & 4.76 \cdot 10^{-4} \rho^2 + 0.0595 \rho - 33.2 & -9.45 & \\ 0.175 \rho + 8.04 \cdot 10^{-15} & 2.53 \cdot 10^{-4} \rho^2 + 0.00387 \rho + 27.2 & -3.4 & \\ 8.21 \cdot 10^{-6} \rho^3 - 6.82 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.0425 \rho + 18.1 & 3.24 \cdot 10^{-4} \rho^2 - 0.0277 \rho - 5.72 & -5.36 \cdot 10^{-5} & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

```
save(strcat(Name, '_var.mat'), 'HM_A', 'HM_B')
```

```
rho = subs(rho,0)
```

rho = 0

vpa(a0,3)

ans =

$$\begin{pmatrix}
 X_u & R_e + X_v & X_w - 1.0 Q_e & X_p & X_q - 1.0 W_e & V_e + X_r \\
 Y_u - 1.0 R_e & Y_v & P_e + Y_w & W_e + Y_p & Y_q & Y_r - 1.0 U_e \\
 Q_e + Z_u & Z_v - 1.0 P_e & Z_w & Z_p - 1.0 V_e & U_e + Z_q & Z_r \\
 Li_u & Li_v & Li_w & Li_p + Q_e k_1 & Li_q + P_e k_1 - 1.0 R_e k_2 & Li_r - 1.0 Q_e k_2 \\
 M_u & M_v & M_w & M_p - \frac{2.0 I_{xz} P_e}{I_{yy}} - \frac{1.0 R_e (I_{xx} - 1.0 I_{zz})}{I_{yy}} & M_q & M_r + \frac{2.0 I_{xz} R_e}{I_{yy}} - \frac{1.0 P_e (I_{xx} - 1.0 I_{zz})}{I_{yy}} \\
 Ni_u & Ni_v & Ni_w & Ni_p + Q_e k_3 & Ni_q - 1.0 P_e k_3 - 1.0 R_e k_1 & Ni_r - 1.0 Q_e k_1 \\
 0 & 0 & 0 & 1.0 & \sin(\Phi_e) \tan(\Theta_e) & \cos(\Phi_e) \tan(\Theta_e) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\Phi_e) & -1.0 \sin(\Phi_e)
 \end{pmatrix}$$

```

rho = 0; eigValues = [eig(double(vpa(subs(subs(a0)),5)))'];
rho = 20; eigValues = [eigValues; eig(double(vpa(subs(subs(a0)),5)))'];
rho = 40; eigValues = [eigValues; eig(double(vpa(subs(subs(a0)),5)))'];
rho = 60; eigValues = [eigValues; eig(double(vpa(subs(subs(a0)),5)))'];
rho = 80; eigValues = [eigValues; eig(double(vpa(subs(subs(a0)),5)))'];
rho = 100; eigValues = [eigValues; eig(double(vpa(subs(subs(a0)),5)))'];
rho = 120; eigValues = [eigValues; eig(double(vpa(subs(subs(a0)),5)))'];

```

a0 = double(vpa(subs(subs(a0)),3))

a0 =

```

-0.0445    0.0006    0.0374   -0.0904    2.6800    0    0    -9.7734
 0.0046   -0.2100    0.0119   -2.6390   -0.1607  -60.0840  9.7596  0.0384
 0.0270   -0.0231   -0.9089   -0.0600  60.0126    0    0.5197  -0.7206
-0.0190   -0.1445    0.2045   -8.7588   -1.3855   -0.5067    0    0
 0.0309    0.0050    0.0383    0.4169   -2.6274    0    0    0
-0.0067   -0.0102    0.0377   -1.7431   -0.2103   -0.3121    0    0
 0    0    0    1.0000   -0.0039  0.0737    0    0
 0    0    0    0    0.9986  0.0532    0    0

```

```
b0 = double(vpa(subs(subs(b0)),3))
```

```

b0 =
 3.9422   -7.0393    2.1102    0
 1.4134   -1.2509   -9.0250    4.9112
-134.0952 -48.7262    0.0337    0
 34.5574  -19.2500  -150.2500  -1.0367
 21.0000   31.3155   -5.9975    0
 17.3290   -4.3708  -25.8738  -13.2643
 0    0    0    0
 0    0    0    0

```

Generating the Helicopter Model System

```

c0 = [
 0.0595  -0.9968    0    0    0.05329    0    0    0;    % Heave Velocity1
 0    0    0    0    0    0    1.0    0;    % Pitch Attitude1
 0    0    0    1    0    0    0    0;    % Roll Attitude1
 0    0  -0.05348    0    0    0    0    1.0;    % Heading Rate1
 0    0    1.0    0    0    0    0    0;    % Body Axis Pitch2 (No Feedback ?)
 0    0    0    0    0    1.0    0    0;    % Roll Rate2 (No Feedback ?)
];

d0 = zeros(6,4);

sys = ss(double(a0),double(b0),c0,d0);

```

Generating Weights for Hinf

```
disp('Generating Weights')
```

Generating Weights

```
% Calculando Peso 1

n11=0.5*[1 12];
d11=[1 0.012];

n12=0.89*[1 2.81];
d12=[1 0.005];

n13=0.89*[1 2.81];
d13=[1 0.005];

n14=0.5*[1 10];
d14=[1 0.01];

n15=2*[1 0];
d15=[1 8.5 18];

n16=2*[1 0];
d16=[1 8.5 18];

[aw11,bw11,cw11,dw11]=tf2ss(n11,d11);
[aw12,bw12,cw12,dw12]=tf2ss(n12,d12);
[aw13,bw13,cw13,dw13]=tf2ss(n13,d13);
[aw14,bw14,cw14,dw14]=tf2ss(n14,d14);
[aw15,bw15,cw15,dw15]=tf2ss(n15,d15);
[aw16,bw16,cw16,dw16]=tf2ss(n16,d16);

% Diagonalizando

aw1=daug(aw11,aw12,aw13,aw14,aw15,aw16);
bw1=daug(bw11,bw12,bw13,bw14,bw15,bw16);
cw1=daug(cw11,cw12,cw13,cw14,cw15,cw16);
dw1=daug(dw11,dw12,dw13,dw14,dw15,dw16);
```

```

% Calculando Peso 2

n21=0.5*[1 0.0001];
d21=[1 10];

n22=0.5*[1 0.0001];
d22=[1 10];

n23=0.5*[1 0.0001];
d23=[1 10];

n24=0.5*[1 0.0001];
d24=[1 10];

[aw21,bw21,cw21,dw21]=tf2ss(n21,d21);
[aw22,bw22,cw22,dw22]=tf2ss(n22,d22);
[aw23,bw23,cw23,dw23]=tf2ss(n23,d23);
[aw24,bw24,cw24,dw24]=tf2ss(n24,d24);

aw2=daug(aw21,aw22,aw23,aw24);
bw2=daug(bw21,bw22,bw23,bw24);
cw2=daug(cw21,cw22,cw23,cw24);
dw2=daug(dw21,dw22,dw23,dw24);

% Calculando Peso 3

aw3=[];bw3=[];cw3=[];
cw3=zeros(6,0);
dw3=daug(1,1,1,1,0.1,0.1);

% Tamanhos

[n,n]=size(a0) % Matriz A [Estados Estados]

n = 8
n = 8

```

```
[p,m]=size(d0) % Matriz D [Saída Entrada]
```

```
p = 6  
m = 4
```

```
[n1,n1]=size(aw1) % Peso 1
```

```
n1 = 8  
n1 = 8
```

```
[n2,n2]=size(aw2) % Peso 2
```

```
n2 = 4  
n2 = 4
```

```
[n3,n3]=size(aw3) % Peso 3
```

```
n3 = 0  
n3 = 0
```

Amplifying C Matrix

```
% Output Scaling from  
% "Improvement of helicopter handling qualities using H $\infty$  optimisation"  
  
% C correlates the outputs with the states  
% The effect of these scalings is such that a unit step input on each  
% of the pilot inceptors would result in the responses given in Table 3.  
  
%scaleyue = daug(0.1, 5, 2, 2, 2, 5);  
scaleyue = daug(10, 0.5, 0.2, 0.5, 0.2, 0.5);  
  
% Heave velocity: 10 ft/s  
% Roll rate: 0.5 rad/s  
% Pitch rate: 0.2 rad/s  
% Heading rate: 0.5 rad/s
```

```
% Pitch Attitude: 0.2 rads  
% Roll Attitude: 0.5 rads
```

```
c0sc = scaleyue*c0;
```

Design Method

```
ki=menu('Select the Design Method', ...  
        'H-infinity Mixed Sensitivity Design', ...  
        'Disturbance Rejection Design');  
  
if ki==1  
  
    disp('**Standard H-infinity Mixed Sensitivity Design - No Extra Disturbance')  
  
    A=[ a0 zeros(n,n1+n2+n3);  
        -bw1*c0sc aw1 zeros(n1,n2) bw1*cw3;  
        zeros(n2,n+n1) aw2 zeros(n2,n3);  
        zeros(n3,n+n1+n2) aw3];  
  
    B1=[zeros(n,p);  
        bw1*dw3;  
        zeros(n2,p);  
        bw3];  
  
    B2=[ b0;  
        -bw1*d0;  
        bw2;  
        zeros(n3,m)];  
  
    C1=[-dw1*c0sc cw1 zeros(p,n2) dw1*cw3;  
        zeros(m,n+n1) cw2 zeros(m,n3);  
        c0sc zeros(p,n1+n2+n3)];  
  
    C2=[-c0sc zeros(p,n1+n2) cw3];
```

```

D11=[dw1*dw3;
      zeros(m,p);
      zeros(p,p)];

D12=[dw1*d0;
      dw2;
      d0];

D21=dw3;

D22=-d0;

else

Bg=a0(:,(6:8));
disp('***** multiplying Bg by 30')
Bg=Bg.*30;
[bg1,bg2]=size(Bg);

disp('Forming Standard Plant Configuration')

A=[ a0 zeros(n,n1+n2+n3);
    -bw1*c0sc aw1 zeros(n1,n2) bw1*cw3;
    zeros(n2,n+n1) aw2 zeros(n2,n3);
    zeros(n3,n+n1+n2) aw3];

% B1 é expandido
B1=[zeros(n,p) Bg;
     bw1*dw3 zeros(bg1,bg2);
     zeros(n2,p) zeros(n2,bg2);
     bw3 zeros(n3,bg2)];

B2=[ b0;
     -bw1*d0;
     bw2;
     zeros(n3,m)];

C1=[-dw1*c0sc cw1 zeros(p,n2) dw1*cw3;

```

```

zeros(m,n+n1) cw2 zeros(m,n3);
c0sc zeros(p,n1+n2+n3)];

C2=[-c0sc zeros(p,n1+n2) cw3];

D11=[dw1*dw3 zeros(p,bg2);
zeros(m,p) zeros(m,bg2);
zeros(p,p) zeros(p,bg2)];

D12=[dw1*d0;
dw2;
d0];

D21=[dw3 zeros(p,bg2)];

D22=-d0;

```

end

***** multiplying Bg by 30

Forming Standard Plant Configuration

Warning: This concatenation operation includes an empty array with an incorrect number of columns.

Concatenation including empty arrays will require all arrays to have the same number of columns in a future release.

Finding the Solution

```
disp('H-infinity solving with gamma of 4')
```

H-infinity solving with gamma of 4

```
tol=0.2;
gmin=4;
gmax=600;
```

```
% Packing state-space data into a SYSTEM matrix
```

```
p=ss(A,[B1 B2],[C1;C2],[D11 D12;D21 D22]);
```

```
% H-infinity controller synthesis [Plant Output Input ... Method]  
[k,g,gfin,ax,ay,hamx,hamy]=hinfsyn(p,6,4,gmin,gmax,tol,2);
```

```
Test bounds:      4.0000 < gamma <= 600.0000
```

gamma	hamx_eig	xinf_eig	hamy_eig	yinf_eig	nrho_xy	p/f
600.000	2.7e-03	4.9e-06	4.1e-04	-5.5e-16	0.0003	p
302.000	1.2e-16#	*****	4.1e-04	-5.4e-17	*****	f
451.000	1.4e-15#	*****	4.1e-04	-2.8e-16	*****	f
525.500	1.5e-03	5.2e-06	4.1e-04	-7.9e-15	0.0005	p
488.250	9.4e-16#	*****	4.1e-04	-1.2e-15	*****	f
506.875	7.4e-04	5.4e-06	4.1e-04	-3.6e-16	0.0005	p
497.563	1.0e-15#	*****	4.1e-04	-3.0e-16	*****	f
502.219	2.9e-04	5.5e-06	4.1e-04	-9.0e-14	0.0005	p
499.891	7.1e-16#	*****	4.1e-04	-1.4e-16	*****	f
501.055	9.5e-16#	*****	4.1e-04	-8.9e-14	*****	f
501.637	1.6e-04	5.5e-06	4.1e-04	-8.6e-16	0.0005	p
501.346	8.1e-16#	*****	4.1e-04	-5.1e-14	*****	f
501.491	1.1e-04	5.6e-06	4.1e-04	-2.8e-16	0.0005	p

```
Gamma value achieved: 501.4912
```

```
[ak,bk,ck,dk]=ssdata(k);
```

```
% Combine Original Output Scaling With Controller  
bk=bk*scaleyue;
```

```
% Cascade Controller With Original Plant  
[as,bs,cs,ds]=series(ak,bk,ck,dk,a0,b0,c0,d0);
```

```
% Closed Loop System  
[ac,bc,cc,dc]=feedback(as,bs,cs,ds,2);
```

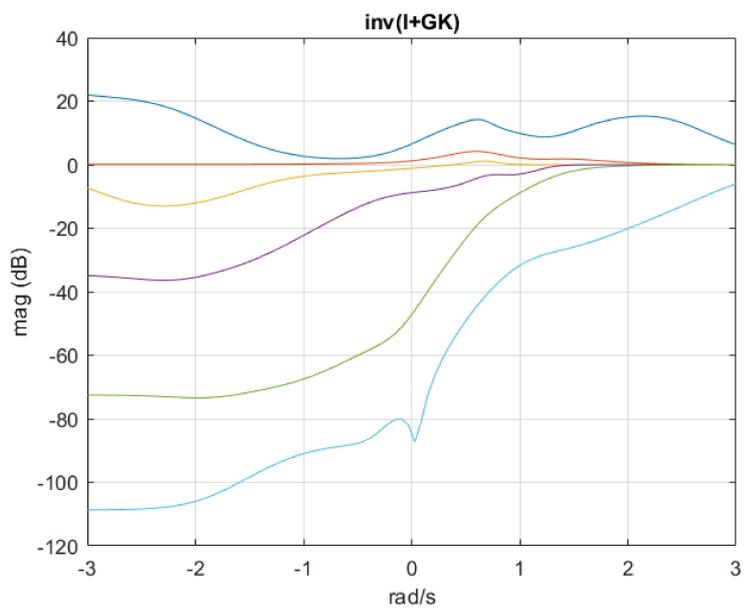
```
% Sensitivity: S = inv(I+GK), and KS  
[asen,bsen,csen,dsen]=feedback(as,bs,cs,ds,1);  
[acs,bcs,ccs,dcs]=series(asen,bsen,csen,dsen,ak,bk,ck,dk);
```

Singular Values for Frequency Response Evaluation

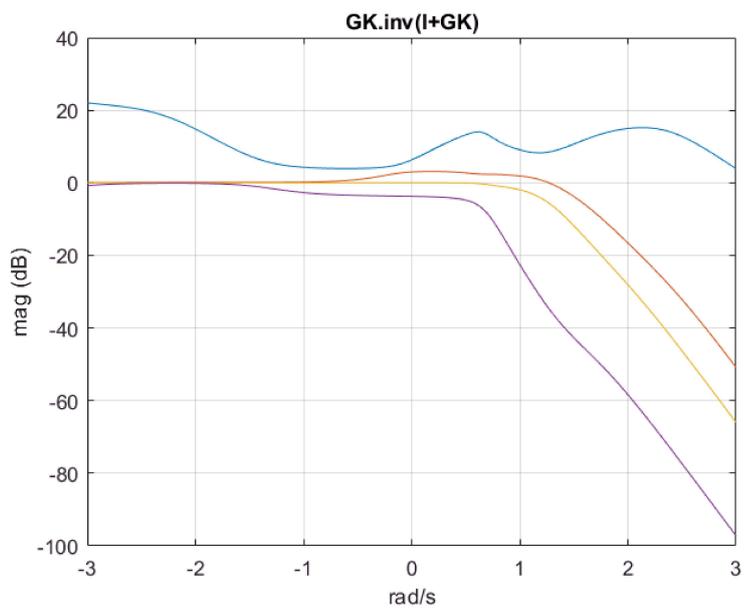
```
w=logspace(-3,3,100);
svrob=sigma(ac,bc,cc,dc,w);
svrob=svrob((1:4),:);
svsen=sigma(asen,bsen,csen,dsen,w);
svgsr=sigma(acs,bcs,ccs,dcs,w);

subplot(111);clf;

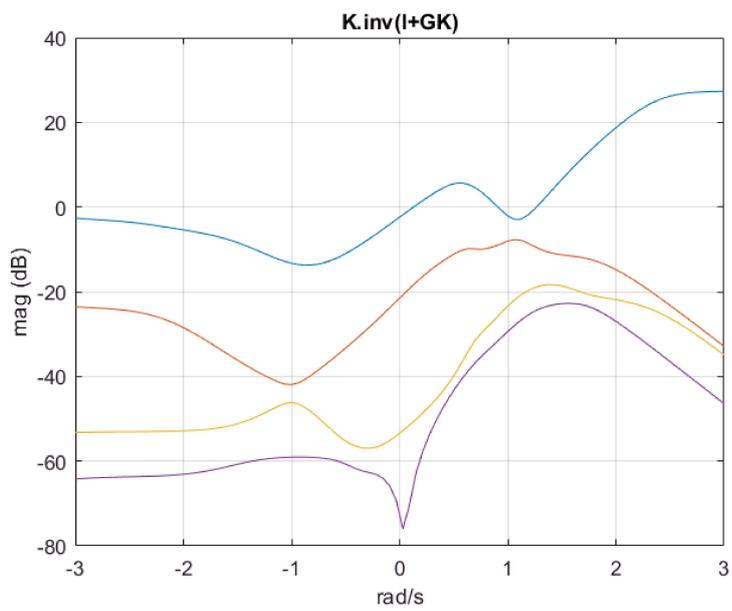
%Figure 12.3 (a) or 12.5 (a)
figure(1)
plot(log10(w),db(svsen));
    grid
    title('inv(I+GK)')
    ylabel('mag (dB)')
    xlabel('rad/s')
```



```
figure(2)
plot(log10(w),db(svrob));
grid
title('GK.inv(I+GK)')
ylabel('mag (dB)')
xlabel('rad/s')
```



```
%Figure 12.3 (b) or 12.5 (b)
figure(3)
plot(log10(w),db(svgsr));
    grid
    title('K.inv(I+GK)')
    ylabel('mag (dB)')
    xlabel('rad/s')
```



```
function A = ShortVander(x, n)
    x = x(:); % Column vector
    A = [];
    for i = 0:n-1
        A = [A x^i];
    end
    % A = sym('aux',[length(x), n]);
```

```
% A(:,1) = 1;
% for i = 2:n
%     A(:, i) = x .* A(:, i-1);
% end
end

function A = Adding(a, b)
a = a(:); % Column vector
b = b(:); % Column vector
dif = length(a) - length(b);
if dif > 0
    A = a + [b;zeros(dif,1)];
else
    A = b + [a;zeros(-dif,1)];
end
end
```