UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSE EDUARDO MOURA GARCEZ

COHOMOLOGIA DO ESPAÇO PROJETIVO E A CARACTERIZAÇÃO DOS FIBRADOS SOBRE $\mathbb{P}^1$

FORTALEZA
2013

JOSE EDUARDO MOURA GARCEZ

COHOMOLOGIA DO ESPAÇO PROJETIVO E A CARACTERIZAÇÃO DOS FIBRADOS SOBRE $\mathbb{P}^1$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Algébrica.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G197c Garcez, Jose Eduardo Moura.
Cohomologia do Espaço Projetivo e a Caracterização dos Fibrados sobre P^1 / Jose Eduardo Moura Garcez. – 2013.
47 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013.
Orientação: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

1. Feixes. 2. Fibrados. 3. Cohomologia do Espaço Projetivo. 4. Teorema de Grothendieck. I. Título.
CDD 510

JOSE EDUARDO MOURA GARCEZ

COHOMOLOGIA DO ESPAÇO PROJETIVO E A CARACTERIZAÇÃO DOS FIBRADOS SOBRE $\mathbb{P}^1$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Algébrica.

Aprovada em: 31 / 10 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof Dr. Francisco Luiz Rocha Pimentel
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Thelmo Pontes de Araujo
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, que sempre me deu tudo que precisei em todas as etapas dessa jornada.

À Raquel, que esteve ao meu lado nos momentos bons e ruins.

Ao meu orientador José Alberto Duarte Maia, pela orientação, pela paciência e por todas as aulas extras que foram essenciais para a construção desse trabalho.

Ao professor Thelmo de Araujo por ter despertado em mim o interesse pela Álgebra.

Aos meus colegas de pós-graduação que estiveram presentes em discussões matemáticas, debates, xícaras de café, aulas e seminários: Anderson, Breno, Diego, Edson, João Nunes, Leo, Marlon, Rafael Diógenes e Rui. Em especial Gilson, Roger e Renan, que embarcaram comigo nessa aventura que é estudar Geometria Algébrica.

Ao corpo docente da pós-graduação em matemática da UFC pelos conhecimentos repassados e dedicação na pesquisa e no ensino da matemática.

À Andrea e a Jessyca pela competência e agilidade.

À FUNCAP pelo apoio financeiro.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é provar o teorema de Grothendieck que caracteriza os fibrados em $\mathbb{P}^1$. O teorema diz que se E é um fibrado em $\mathbb{P}^1$, então o feixe associado $\mathcal{E}$ é do tipo $\mathcal{O}(a_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_r)$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$ e essa decomposição é única. Usaremos o caminhos trilhado em TEIXIDOR (Massachusetts 2002). Para isso, visitamos alguns resultados de feixes coerentes e de cohomologia do espaço projetivo.No primeiro capítulo, introduzimos resultados de Álgebra Comutativa que serão usados no decorrer do texto e provamos um lema de Grothendieck que nos ajuda, no capítulo seguinte, a provar um teorema de finitude para feixes coerentes.No segundo, desenvolvemos a parte inicial da teoria de feixes coerentes e mostramos que numa variedade completa sobre um corpo k, o espaço vetorial das seções globais de um feixe coerente tem dimensão finita.Na terceira parte, falamos sobre a cohomologia de feixes com o objetivo de estudar a cohomologia do espaço projetivo, via cohomologia de Čech. Em particular, para feixes do tipo $\mathcal{O}(n),\ n \in \mathbb{Z}$ e feixes coerentes, quando $\mathcal{O}_X(1)$ é um feixe invertível muito amplo.No último capítulo, mostramos que todo fibrado corresponde a um feixe localmente livre, introduzimos os funtores e e Ext e provamos o teorema principal.

Palavras-chave: Feixes. Fibrados. Cohomologia do espaço projetivo. Teorema de Grothendieck.

ABSTRACT

This work's main objective is to prove a theorem by Grothendieck which characterizes vector bundles over $\mathbb{P}^1$. The theorem states that if E is a vector bundle over $\mathbb{P}^1$, than the associated sheaf $\mathcal{E}$ is of type $\mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) ... \oplus \mathcal{O}(a_r)$, with $a_i \in \mathbb{Z}$ and this decomposition is unique.We will follow the road used by TEIXIDOR (Massachusetts 2002). In order to be able to do that, we'll visit some results on coherent sheaves and cohomology of the projective space. On the first chapter, some commutative algebra results are introduced and used as we move foward to prove a lemma by Grothendieck which heps us to prove a theorem about finiteness of coherent sheaves. On the second, we develop the initial part of coherent sheaves theory and show that on a complete variaty over a field k, the space of global sections of a coherent sheaf has finite dimension. On the third part we talk about sheaf cohomology aiming to study the cohomology of the projective space via Čech cohomology. In particular, for sheaves of type $\mathcal{O}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ and coherent sheaves when $\mathcal{O}_X(1)$ is a very ample sheaf. In the last chapter we show that every vector bundle corresponds to a locally free sheaf, we introduce the functor e and Ext and prove the main theorem.

Keywords: Sheaves. Vector Bundles. Cohomology of the projective space. Grothendieck's theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dominar os conceitos iniciais de álgebra comutativa é o primeiro obstáculo a ser conquistado no estudo de geometria algébrica. Por esse motivo começamos esse trabalho cobrindo muitos dos principais resultados básicos sobre anéis comutativos com unidade. Tal caminho, apesar de trabalhoso, é natural e talvez inevitável.

Temos como objetivo dar uma caracterização para fibrados sobre $\mathbb{P}^1$. Mais precisamente, seja E um fribrado sobre $\mathbb{P}^1$, obtemos um feixe localmente livre associado que denotamos por $\mathcal{E}$ e provaremos que

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_r)$$

e que essa decomposição é única, a menos da ordem dos a_i.

Como muitos resultados de classificação, a abordagem utilizada será a cohomológica, o que nos coloca na posição de expor essa teoria de maneira sucinta, correndo o risco de dificultar a leitura do texto. Caso sinta necessidade, convidamos o leitor a acompanhar essa parte via uma referência mais robusta, como HARTSHORNE (c1977. 496p.). Também devemos alertar que usaremos a dualidade de Serre sem adiciona-la no texto. Essa escolha foi feita para evitar que sua complexidade mudasse o foco do trabalho.

2 UM POUCO DE ÁLGEBRA COMUTATIVA E O LEMA DA LIBERDADE GENÉRICA DE GROTHENDIECK

Para nós, A e R serão sempre anéis, M será sempre um A- módulo e todos os anéis mencionados serão comutativos com unidade. A maior parte do que segue será feito nos moldes de ATIYAH (c1969. 128p.).

2.1 Anéis de Frações e Localização de Anéis

Definição 2.1. *Seja $S \subset A$ um subconjunto. Diremos que S é um conjunto multiplicativo se:*

$$1 \in S$$

$$e$$

$$a,\ b \in S \Rightarrow ab \in S$$

Definição 2.2. *Seja $S \subset A$ um conjunto multiplicativo. Defina uma relação em $A \times S$ pondo $(a, s) \sim (b, t)$ se existe $u \in S$ tal que $uat = ubs$. É claro que isso define uma relação de equivalência. Denote por $S^{-1}A$ o conjunto dessas classes de equivalência e por $\frac{a}{s}$ a classe (a, s).*

Defina as operações $\frac{a}{s}.\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$ e $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta+sb}{st}$.

É facil ver que, definido assim, $S^{-1}A$ será um anel comutativo com unidade, chamado de anel de frações de A com respeito a S.

Note que $S^{-1}A$ nasce munido de um homomorfismo de anéis

$$\varphi_S : A \to S^{-1}A, \quad a \mapsto \frac{a}{1}$$

De modo análogo podemos definir $S^{-1}M$.

Exemplo 2.1. *Sejam A um domínio e K seu corpo de frações. Note que $K = S^{-1}A$, onde $S = A - \{0\}$.*

Exemplo 2.2. *Seja $P \subset A$ um ideal primo. Note que $S = A - P$ é multiplicativo e denote $S^{-1}A = A_P$ $(S^{-1}M = M_P)$. Chamamos A_P (M_P) de localização de A em P (M em P).*

Exemplo 2.3. *Seja $S = \{1, f, f^2, f^3, ..., f^n, ...\}$, então denotamos $S^{-1}A = A_f$ $(S^{-1}M = M_f)$. Chamamos A_f (M_f) de localização de A em f (M em f).*

Teorema 2.1. *Seja $S \subset A$ conjunto multiplicativo. Então $S^{-1}A$ é o exemplo universal de uma A- álgebra em que todos os elementos de S se tornam unidades. De fato, dado um mapa de anéis $\psi : A \to A'$, então $\psi(S) \subset U(A')$ se, e somente se, existe um mapa de anéis $\rho : S^{-1}A \to A'$ tal que $\rho \circ \varphi_S = \psi$*

Demonstração. Primeiro suponha que ρ existe. Seja $s \in S$. Então $\psi(s) = \rho(s/1)$. Portanto, $\psi(s)\rho(1/s) = \rho(s/1.1/s) = 1$. Logo, $\psi(S) \subset U(A')$.

Agora, note que ρ é determinada por ψ do seguinte modo:

$$\rho(x/s) = \rho(x/1)\rho(1/s) = \psi(x)\psi(s)^{-1}.$$

Reciprocamente, suponha $\psi(S) \subset U(A')$. Faça $\rho(x/s) = \psi(s)^{-1}\psi(x)$. Note que ρ está bem definida, pois, se $x/s = y/t$, então existe $u \in S$ tal que $xtu = ysu$. Logo,

$$\psi(x)\psi(t)\psi(u) = \psi(y)\psi(s)\psi(u).$$

Como $\psi(u)$ é unidade, então $\psi(x)\psi(t) = \psi(y)\psi(s)$. Multiplicando por $\psi(t)^{-1}\psi(s)^{-1}$ nos dois lados, temos $\psi(x)\psi(s)^{-1} = \psi(y)\psi(t)^{-1}$. Logo, ρ está bem definida. É claro que $\psi = \rho \circ \varphi_S$. □

Teorema 2.2. *Sejam $S \subset A$ conjunto multiplicativo e M um A- módulo. Então $S^{-1}M$ é o exemplo universal de um $S^{-1}A$- módulo munido de um mapa A- linear de M.*

Demonstração. A prova é similar à anterior: Dado um mapa A- linear $\psi : M \to N$, onde N é um $S^{-1}A$- módulo, é fácil provar que ψ se fatora unicamente via o mapa $S^{-1}A$- linear $\rho : S^{-1}M \to N$ definido por $\rho(m/s) = 1/s.\psi(m)$. □

Teorema 2.3. *Existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $S^{-1}A$ e os ideais primos de A que não intersectam S.*

Proposição 2.1. *Sejam $S \subset A$ e $T' \subset S^{-1}A$ conjuntos multiplicativos. Se $T = \varphi_S^{-1}(T')$ e $S \subset T$. Então*

$$T'^{-1}(S^{-1}A) = T^{-1}A$$

Demonstração. Vamos mostrar que $T'^{-1}(S^{-1}A)$ possui a propriedade universal de $T^{-1}A$. É claro que $\varphi_{T'}\varphi_S(T) \subset U(T'^{-1}(S^{-1}A))$. Agora, seja $\psi : A \to A'$ um mapa que satisfaz $\psi(T) = U(A')$. Mostraremos que ψ se fatora unicamente via $T'^{-1}(S^{-1}A)$.

Como $\psi(S) \subset U(A')$, então ψ se fatora via $\rho : S^{-1}A \to A'$. Note que, dado $r \in T'$, $r = x/s$, temos $x/1 = s/.r \in T'$, pois $S \subset T$. Assim, $x \in T$. Portanto, $\rho(r) = \psi(x).\rho(1/s) \in U(A')$. Então ρ se fatora via $\rho' : T'^{-1}(S^{-1}A) \to A'$, onde $\psi = \rho' \circ (\varphi_{T'} \circ \varphi_S)$ e ρ' é unica (pois ρ é única). Logo, pela propriedade universal, o resultado segue. □

Corolário 2.1. *Sejam $S, T \subset A$ conjuntos multiplicativos tais que $S \subset T$. Se $T' = \varphi_S(T)$, então*

$$T^{-1}A = T'^{-1}(S^{-1}A) = T^{-1}(S^{-1}A)$$

Demonstração. De modo similar ao que foi feito acima, prova-se que $T'^{-1}(S^{-1}A) = T^{-1}A$. Como $T^{-1}(S^{-1}A)$ é o exemplo universal de uma $S^{-1}A$- álgebra em que os elementos de T viram unidades, temos $T^{-1}(S^{-1}A) = T'^{-1}(S^{-1}A)$. □

Proposição 2.2. *Sejam $S, T \subset A$ conjuntos multiplicativos tais que $S \subset T$. Se $T' = \varphi_S(T)$, então*

$$T^{-1}M = T^{-1}(S^{-1}M) = T'^{-1}(S^{-1}M)$$

Demonstração. Vamos mostrar que ambos $T'^{-1}(S^{-1}M)$ e $T^{-1}(S^{-1}M)$ possuem a propriedade universal de $T^{-1}M$. Seja $\psi : M \to N$ um mapa A- linear, onde N é um $T^{-1}A$-módulo. Então, a multiplicação $\mu_S : N \to N$ é bijetiva para todo $s \in T$, e assim, para todo $s \in S$. Como a estrutura de $S^{-1}A$ é única, ψ fatora via um $S^{-1}A$- homomorfismo $\rho : S^{-1}M \to N$.

De maneira similar, ρ fatora, via um mapa $T^{-1}A$- linear único $\rho' : T^{-1}(S^{-1}M) \to N$. Logo, $\psi = \rho' \circ \varphi_T \circ \varphi S$. Também temos que ρ fatora via o mapa $T'^{-1}(S^{-1}A)$- linear $\rho_1' : T'^{-1}(S^{-1}M) \to N$ e $\psi = \rho_1' \circ \varphi_{T'} \circ \varphi_S$ com ρ_1' única. □

Proposição 2.3. *Seja $S \subset A$ conjunto multiplicativo e X uma variável. Então $(S^{-1}A)[X] = S^{-1}(A[X])$.*

Demonstração. Mostraremos que $(S^{-1}A)[X]$ e $S^{-1}(A[X])$ possuem a mesma propriedade universal: um mapa $\psi : A \to A'$ se fatora unicamente pelos dois se satisfizer $\psi(S) \subset U(A')$ e se existe $x \in A'$ tal que teremos necessariamente $X \mapsto x$.

Primeiro, se $\psi(S) \subset U(A')$, então existe um único mapa A- linear $S^{-1}A \to A'$ e, pela propriedade universal de anéis de polinômios, uma única $(S^{-1}A)[X] \to A'$ tal que $X \mapsto x$.

Por outro lado, pela propriedade universal de anéis de polimômios, existe única $A[X] \to A'$ tal que $X \mapsto x$ e como $\psi(S) \subset U(A')$, temos única $S^{-1}(A[X]) \to A'$. Logo, o resultado segue. □

Teorema 2.4. *Seja $\psi : M \to N$ um homomorfismo de módulos (ou de anéis). Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\psi : M \to N$ é sobrejetiva (ou injetiva)*
2. *$\psi_P : M_P \to N_P$ é sobrejetiva (ou injetiva) para todo primo P*
3. *$\psi_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ é sobrejetiva (ou injetiva) para todo maximal $\mathfrak{m}$*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ são triviais. Assuma 3 e suponha $M \neq 0$. Seja $0 \neq x \in M$ tal que $I = Ann(x) \neq 0$. Logo, existe $\mathfrak{m} \subset A$ ideal maximal tal que $\mathfrak{m} \supset I$. Assim, $x/1 \in M_\mathfrak{m} = 0$ implica $a \in A - \mathfrak{m}$ tal que $a \in I$. O que é um absurdo. □

2.2 Produto Tensorial

Definição 2.1. *Sejam M e N A-módulos. Seu produto tensorial, denotado por $M \otimes_A N$ ou apenas $M \otimes N$, é construído como o quociente do modulo livre $A^{\oplus(M \times N)}$ pelo submódulo gerado pelos seguintes elementos, onde (m, n) representa o elemento básico clássico $e_{(m,n)}$:*

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n) \;\; e \;\; (m, n + n') - (m, n) - (m, n'),$$

$$(xm, n) - x(m, n) \quad e \quad (m, xn) - x(m, n),$$

para todos $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ *e* $x \in A$

Teorema 2.5. *Sejam* M *e* N A- *módulos. Então* $\beta : M \times N \to M \otimes N$ *é o exemplo universal de um mapa bilinear com domínio* $M \times N$*; de fato,* β *induz, não apenas uma bijeção, mas o isomorfismo de módulos*

$$\theta : Hom_A(M \otimes N, P) \to Bil_A(M \times N, P)$$

Proposição 2.4. *Seja* M *um* A- *módulo. Então* $A \otimes_A M = M$

Demonstração. Defina $\beta : A \times M \to M$, $\beta(x, m) = xm$ que é claramente bilinear. Vamos mostrar que β satisfaz a propriedade universal. Dado um mapa bilinear $\alpha : A \times M \to P$, defina $\gamma : M \to P$, $\gamma(m) = \alpha(1, m)$. Então a bilinearidade de α nos dá a linearidade de γ. Temos também $\alpha = \gamma \circ \beta$, pois

$$\alpha(x, m) = x\alpha(1, m) = x\gamma(m) = \gamma(xm) = \gamma \circ \beta(x, m).$$

Além disso, a sobrejetividade de β nos dá que γ é única. Logo, pela propriedade universal, o resultado vale. $\square$

Proposição 2.5. *Sejam* A *um domínio,* $I \subset A$ *um ideal não nulo e* $K = Frac(A)$*. Então,* $I \otimes_A K = K$

Demonstração. Defina $\beta : I \times K \to K$, onde $\beta(x, y) = xy$ que é claramente bilinear. Dado um mapa bilinear $\alpha : I \times K \to P$, tome $0 \neq z \in I$ e defina o mapa A- linear $\gamma : K \to P$ pondo $\gamma(y) = \alpha(z, y/z)$. Logo, $\alpha = \gamma \circ \beta$, pois

$$\alpha(x, y) = \alpha(xz, y/z) = \alpha(z, xy/z) = \gamma(xy) = \gamma \circ \beta(x, y).$$

Como β é sobrejetiva, γ é única e, pela propriedade universal, o resultado vale. $\square$

Proposição 2.6. *Seja* B *uma* A- *álgebra e* $X_1, ..., X_n$ *variáveis. Então existe um isomorfismo de* B- *álgebras*

$$B \otimes A[X_1, ..., X_n] = B[X_1, ..., X_n]$$

Proposição 2.7. *Sejam* M *e* N A- *módulos e* $S \subset A$ *conjunto multiplicativo. Então*

$$S^{-1}(M \otimes_A N) = (S^{-1}M) \otimes_A N = S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N = S^{-1}M \otimes_A S^{-1}N$$

Demonstração. $\square$

2.3 Dependência Inteira e o Lema da Normalização de Noether

Definição 2.2. *Seja B uma A- álgebra. Um elemento $b \in B$ é dito inteiro sobre A se existe um inteiro positivo n e elementos $a_i \in A$ tais que*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0.$$

B é dito inteiro sobre A se todo elemento de B satisfizer a equação de dependência inteira.
Proposição 2.8. *Sejam B uma A- álgebra, n um inteiro positivo e $b \in B$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *b satisfaz uma equação de dependência inteira de grau n;*
2. *$A[x]$ é gerado como A- módulo por $1, x, ..., x^n$;*
3. *$A[x]$ esta contido em um subanel $C \subset B$ tal que C é um A- módulo finitamente gerado.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$: Seja $p(X)$ um polinômio de grau n tal que $p(x) = 0$. Para qualquer m, seja $M_m \subset A[x]$ o submódulo gerado por $1, x, ..., x^m$. Para $m \geq n$, temos que $x^m - x^{m-n}p(x) \in M_{m-1}$, ou seja, $x^m in M_{m-1}$. Então, por indução, temos que $M_{n-1} = A[x]$.

$2 \Rightarrow 3$: Basta tomar $C = A[x]$.

$3 \Rightarrow 1$: Primeiro note que C é faithful, pois $xM = 0 \Rightarrow x.1 = 0$. Agora, tome $\mu_x : M \to M$ a multiplicação por um elemento $x \in A$. Assim, obtemos um polinômio $p(x)$ tal que $p(x)M = 0$, ou seja, $p(x) = 0$. □

Corolário 2.2. *Sejam B uma A- álgebra e C uma B- álgebra. Se $c \in C$ é inteiro sobre B e B é inteiro sobre A, então c é inteiro sobre A.*

Demonstração. Basta usar o item 2 da proposição acima. □

Teorema 2.6. *Seja B uma A- álgebra. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *B é uma A- álgebra finitamente gerada e é inteiro sobre A;*
2. *$B = A[x_1, ..., x_n]$, com todos os x_i inteiros sobre A;*
3. *B é um A- módulo finitamente gerado.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$: É óbvio.

$2 \Rightarrow 3$: Basta notar que $A[x_1] \subset B$ é um A- módulo finitamente gerado. Como B é $A[x_1]$- módulo finitamente gerado, então o resultado segue.

$3 \Rightarrow 1$: Segue da proposição anterior. □

Lema 2.1. *Sejam $A \subset B$ extensão inteira de domínios. Então B é corpo se, e somente se, A também for.*

Demonstração. Suponha que B é um corpo. Então $x \in A \Rightarrow 1/x \in B$. Assim,

$$(1/x)^n + a_1(1/x)^{n-1} + ... + a_n = 0 \Rightarrow 1/x = -(a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1}) \in A.$$

Portanto A é um corpo.

Seja $y \in B$. Logo existe $y^n + a_1y^{n-1} + ... + a_n = 0$. Segue que

$$y(y^{n-1} + a_1y^{n-2} + ... + a_{n-1})1/ - a_n = 1.$$

Portanto B é um corpo. □

Definição 2.3. *Sejam B uma A- álgebra, $P \subset A$ e $Q \subset B$ ideias primos. Dizemos que Q está sobre P se Q contrai para P.*

Teorema 2.7. *Sejam $A \subset B$ extensão inteira de anéis, $P \subset A$, $Q \subset Q' \subset B$ ideais primos e $J \subset B$ um ideal.*

1. *Se Q_1 está sobre P, então Q_1 é maximal se, e somente se, P também o é.*
2. *(Incomparabilidade)Se Q_1 e Q_2 estão sobre P, então $Q_1 = Q_2$.*
3. *(Lying Over) Existe um ideal primo $Q \subset B$ que contrai para P.*
4. *(Going Up) Se $J \cap A \subset P$, então em (3) podemos tomar Q contendo J.*

Lema 2.2. *(Normalização de Noether) Provaremos abaixo uma versão um pouco mais geral da famosa normalização de Noether. Seguir o que foi feito em KLEIMAN (c2013. 439p.).*

Sejam k um corpo, $A = k[x_1, ..., x_n]$ uma k- álgebra finitamente gerada, e $I_1 \subset ... \subset I_r$ uma cadeia de ideais de A. Então existem elementos algebricamente independentes $t_1, ..., t_s \in A$ tais que

1. *$k[t_1, ..., t_s] \hookrightarrow A$ é uma extensão inteira e*
2. *para $i = 1, ..., r$, existe um h_i tal que $I_i \cap k[t_1, ..., t_s] = \langle t_1, ..., t_{h_i}\rangle$*

Se k é infinito, então os t_i podem ser tomados como combinações k- lineares dos x_i.

Demonstração. Seja $A' = k[X_1, ..., X_n]$ o anel de polinômios e $\varphi : A' \to A$ o mapa de k-álgebras tal que $\varphi(X_i) = x_i$. Faça $I'_0 = Ker\varphi$ e $I'_i = \varphi^{-1}(I_i)$. É suficiente provar o lema para A' e $I'_0 \subset ... \subset I'_r$, pois, se $t'_i \in A'$ e h'_i satisfazem as condições, então $t_i = \varphi(t'_{i+h'_0})$ e $h_i = h'_i - h'_0$ satisfazem para A e I_i. Portanto, reduzimos ao caso em que os x_i são algebricamente independentes.

Raciocinaremos por indução em r.

Primeiro, assuma $r = 1$ e $I_1 = t_1A$, para algum $t_1 \neq 0$. Note que $t_1 \notin K$, pois I_1 é um ideal próprio. Suponha que temos $t_2, ..., t_n \in A$ tal que x_1 é inteiro sobre $P := k[t_1, t_2, ..., t_n]$ e $P[x_1] = A$. Então, o Teorema 3.3 nos dá que a condição 1 é satisfeita.

Além disso, pela teoria de base transcendente, os elementos $t_1, ..., t_n$ serão algebricamente independentes. Agora tome $x \in I_1 \cap P$. Então $x = t_1x'$, onde $x' \in A \cap Frac(P)$. Também temos $A \cap Frac(P) = P$, pois P é normal. Portanto, $I_1 \cap P = t_1P$. Logo, vale também a condição 2.

Para achar $t_2, ..., t_n$, iremos escolher l_i e fazer $t_i = x_i - x_1^{l_i}$. Segue que $P[x_1] = A$. Agora suponha $t_1 = \sum a_{(j)}x_1^{j_1}...x_n^{j_n}$, $a_{(j)} \in k$ e $(j) = (j_1, ..., j_n)$. Lembre que $t_1 \notin k$, e veja que x_1 satisfaz a equação:

$$\sum a_{(j)} x_1^{j_1} (t_2 + x_1^{l_2})^{j_n} ... (t_n + x_1^{l_n})^{j_n} = t_1$$

Faça $e(j) = j_1 + l_2 j_2 + ... + l_n j_n$. Tome $l > max\{j_i\}$ e $l_i = l^i$. Então, os $e(j)$ são distintos. Seja $e(j') = max\{e(j) \ / \ a_{(j)} \neq 0\}$. Então $e(j') > 0$ e a equação acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$a_{(j')} x_1^{e(j')} + \sum_{e < e(j')} p_e x_1^e = 0$$

onde $p_e \in P$. Portanto x_1 é inteiro sobre P, como desejado.

Suponha k infinito. Iremos reordenar os x_i. Escolha $a_i \in k$ e faça $t_i := x_i - a_i x_1$. Segue que $P[x_1] = A$. Agora considere $t_1 = H_d + ... + H_0$, onde H_i é homogêneo de gra i em $x_1, ..., x_n$ e $H_d \neq 0$. Então $d > 0$, sempre que $t_1 \notin k$. Como k é infinito, podemos reordenar os x_i e tomar $a_i \in k$, onde $H_d(1, a_2, ..., a_n) \neq 0$. Então $H_d(1, a_2, ..., a_n)$ é o coeficiente de x_1^d em $H_d(1, t_2 + a_2 x_1, ..., t_n + a_n x_1)$. Assim, teremos a seguinte equação de dependência inteira para x_1:

$$H_d(x_1, t_2 + a_2 x_1, ..., t_n + a_n x_1) + ... + H_0(x_1, t_2 + a_2 x_1, ..., t_n + a_n x_1) + t_1 = 0$$

Agora, suponha $r = 1$ e que I_1 é arbitrário. Podemos assumir que $I_1 \neq 0$. Raciocinaremos por indução em n. O caso $n = 1$ segue do primeiro caso, pois $k[x_1]$ é DIP. Seja $t_1 \in A$ elemento não nulo. O primeiro caso nos dá que existem elementos $u_2, ..., u_n$ tais que $t_1, u_2, ... u_n$ são algebricamente independentes e satisfazem as condições 1 e 2 com respeito a A e a $t_1 A$. Por indução, existem $t_2, ..., t_n$ que satisfazem 1 e 2 com respeito a $k[u_2, ..., u_n]$ e a $I_1 \cap k[u_2, ..., u_n]$.

Faça $P := k[t_1, ..., t_n]$. Como A é um $k[t_1, u_2, ..., u_n]$- módulo finitamente gerado, e $k[t_1, u_2, ..., u_n]$ é um P- módulo finitamente gerado, então A será um P- módulo finitamente gerado. Então vale a condição 1, ou seja, $t_1, ..., t_n$ são algebricamente independentes. Além disso, teremos

$$I_1 \cap k[t_2, ..., t_n] = \langle t_2, ..., t_n \rangle$$

para algum h. Mas $t_1 \in I_1$. Então $I_1 \cap P \supset \langle t_1, t_2, ..., t_n \rangle$

Por outro lado, dado $x \in I_1 \cap P$. Seja $x = \sum_{i=0}^{d} f_i t_1^i$, onde $f_i \in k[t_2, ..., t_n]$. Como $t_1 \in I_1$, teremos $f_0 \in I_1 \cap k[t_2, ..., t_n] = \langle t_2, ..., t_n \rangle$. Logo, $x \in \langle t_1, t_2, ..., t_n \rangle$. Segue que $I_1 \cap P = \langle t_1, t_2, ..., t_n \rangle$. Portanto, a condição 2 vale para $r = 1$.

Finalmente, suponha que o Lema vale para $r - 1$. Sejam $u_1, ..., u_n \in A$ elementos algebricamente independentes que satisfazem as condições 1 e 2 para a sequência $I_1 \subset ... \subset I_{r-1}$, e faça $h := h_{r-1}$. Assim, teremos que existe $t_{h+1}, ..., h_n$ que satisfazem 1 e

2 para $k[u_{h+1},...,u_n]$ e para $I_r \cap k[u_{h+1},...,u_n]$. Então, para algum h_r, temos

$$I_r \cap k[t_{h+1},...,t_n] = \langle t_{h+1},...,t_{h_r}\rangle$$

Faça $t_i := u_i$, para $1 \leq i \leq h$. Tome $P := k[t_1,...,t_n]$. Então, por transitividade, teremos que A é um P- módulo finitamente gerado. Portanto vale a condição 1 e os t_i são algebricamente independentes sobre k.

Fixe i tal que $1 \leq i \leq r$ e tome $m := h_i$. Então $t_1,...,t_m \in I_i$. Dado $x \in I_i \cap P$, seja $x = \sum f_{(v)} t_1^{v_1}...t_m^{v_m}$, onde $f_{(v)} \in k[t_{m+1},...,t_n]$. Então, $f_0 \in I_i \cap k[t_{m+1},...,t_n]$. Teremos que essa interseção será igual a $\langle 0\rangle$. Com efeito, se $i \leq r-1$, teremos $I_i \cap k[u_{m+1},...,u_n] = \langle 0\rangle$. Se $i = r$, então $I_i \cap k[t_{m+1},...,t_n] = \langle t_{m+1},...,t_n\rangle = \langle 0\rangle$. Logo, $f_{(0)} = 0$. Portanto $x \in \langle t_1,...,t_{h_i}\rangle$, ou seja, $I_i \cap P \subset \langle t_1,...,t_{h_i}\rangle$. Portanto vale a igualdade e a condição 2 é satisfeita. □

2.4 Dimensão

Definição 2.4. *A dimensão (de Krull) de um anel A é definida como o supremo dos comprimentos das cadeias ascendentes de ideais primos de A:*

$$\dim(A) = \sup\{\ r \mid \textit{existe uma cadeia de ideais primos}\ \ P_0 \underset{\neq}{\subsetneq} ... \underset{\neq}{\subsetneq} P_r\ \ \textit{em}\ A\}.$$

Proposição 2.9. *Seja B/A uma extensão inteira de anéis. Então*

$$\dim(A) = \dim(B).$$

Demonstração. Seja $P_0 \underset{\neq}{\subsetneq} ... \underset{\neq}{\subsetneq} P_r$ uma cadeia de primos em A. Começando de P_0, pelo Lying Over e pelo Going Up, temos $Q_0 \underset{\neq}{\subsetneq} ... \underset{\neq}{\subsetneq} Q_r$. Logo, $\dim(A) \leq \dim(B)$. Dada uma cadeia de primos em B, a Incomparabilidade garante a outra desigualdade. □

Teorema 2.8. *Sejam k um corpo, R uma k- álgebra finitamente gerada que também é dominio, $K = Frac(R)$ e $d = tr.deg_k K$. Seja $P_0 \underset{\neq}{\subsetneq} ... \underset{\neq}{\subsetneq} P_r$ uma cadeia de primos de R. Então $r \leq d$, com igualdade se, e somente se, a cadeia não puder ser aumentada.*

Demonstração. O resultado segue como consequência do Teorema 3.5 e do Lema da Normalização de Noether. □

Corolário 2.3. *Sejam k um corpo e R uma k- álgebra finitamente gerada. Então,*

$$\dim(R) = tr.deg_k(Frac(R)).$$

2.5 Anéis e Módulos Noetherianos e Primos Associados

Definição 2.5. *Um anel A é dito Noetheriano se satisfizer uma das seguintes (e portanto todas) condições equivalentes:*

1. *Todo ideal de A é finitamente gerado;*
2. *Todo conjunto não vazio de ideais de A possui elemento maximal;*
3. *Toda cadeia ascendente de ideais de A é estacionária.*

Dizemos que um módulo é Noetheriano se seus submódulos satisfizerem as mesmas condições.

Proposição 2.10. *Seja A um anel Noetheriano, então um A- módulo M é Noetheriano se, e somente se, for finitamente gerado.*

Definição 2.6. *Sejam A um anel e M um A- módulo. Um ideal primo $P \subset A$ é dito associado a M se existe $m \in M$, não nulo, tal que $P = Ann(m)$. O conjunto dos primos associados de M é denotado por $Ass(M)$ ou $Ass_R(M)$*

Lema 2.3. *Sejam $P \subset A$ ideal primo e M um A- módulo. Então $P \in Ass(M)$ se, e somente se, existe uma injeção $A/P \hookrightarrow M$.*

Demonstração. Suponha que $P = Ann(m)$, onde $m \in M$. Defina o mapa $\phi : A \to M$, pondo $x \mapsto xm$. Esse mapa induz a injeção desejada.
Reciprocamente, suponha que existe a injeção $A/P \hookrightarrow M$, e seja m a imagem da unidade. Então $P = Ann(m)$, ou seja, $P \in Ass(M)$. □

Proposição 2.11. *Sejam A um anel Noetheriano e M um A- módulo. Então $M = 0$ se, e somente se, $Ass(M) = \emptyset$*

Demonstração. É claro que se $M = 0$, então $Ass(M) = \emptyset$.
Reciprocamente, suponha $M \neq 0$ e seja Σ o conjunto dos aniquiladores de elementos não nulos de M. Como A é Noetheriano, teremos que Σ possui elemento maximal J. Afirmo que J é um ideal primo, ou seja, $J \in Ass(M)$. Com efeito, temos que $J = Ann(m)$, onde $m \neq 0$. Logo, $1 \notin J$. Agora tome $a, b \in A$ tais que $ab \in J$, mas $b \notin J$. Então, $abm = 0$, mas $bm \neq 0$. Assim, $J \subset Ann(bm)$. Logo, por maximalidade, $J = Ann(bm)$. Mas $a \in Ann(bm) = J$, portanto J é primo. Segue que $J \in Ass(M) \neq \emptyset$. □

Teorema 2.9. *Sejam A um anel Noetheriano e M um A- módulo finitamente gerado. Então existe uma cadeia de submódulos*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

onde $M_i/M_{i-1} \simeq A/P_i$ para algum ideal primo P_i.

Demonstração. No caso em que $M = 0$, não há o que fazer.
Pela Proposição 5.1, M será Noetheriano. Seja Σ o conjunto dos submódulos de M que realizam a condição acima. Teremos que $\Sigma \neq \emptyset$, pois a Proposição 5.3 nos dá que

$Ass(M) \neq \emptyset$, portanto, pelo Lema 5.2, teremos $L \subset M$ tal que $L \simeq A/P$, para algum primo P. Logo, existe a cadeia $0 \subset N$, ou seja, $N \in \Sigma$. Como M é Noetheriano, Σ possui um elemento maximal N. Suponha $M/N \neq 0$. Então, denovo pela Proposição 5.3, existe $N'/N \subset M/N$ isomorfo a A/Q, para algum primo Q. Então $N \subsetneq N'$, o que contradiz a maximalidade de N. Portanto $N = M$. Logo tal cadeia existe. □

2.6 Sequências Exatas Separáveis

Definição 2.7. *Dizemos que uma sequência exata curta*

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \to 0$$

é separável (ou que ela cinde) se existe um isomorfismo $\varphi : N \to M \oplus P$ *tal que* $\varphi \circ \alpha = i_M$ *e* $\beta = \pi_P \circ \varphi$

Proposição 2.12. *Considere a sequência exata curta* $M \overset{\alpha}{\hookrightarrow} N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P$. *Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A sequência é separável*
2. *Existe uma retração* $\rho : N \to M$ *de* α.
3. *Existe uma seção* $\sigma : P \to N$ *de* β.

Definição 2.8. *Um módulo P é dito projetivo se, dado qualquer homomorfismo sobrejetivo* $\beta : M \twoheadrightarrow N$, *todo homomorfismo* $\alpha : P \to N$ *se levanta, ou seja, existirá* $\gamma : P \to M$ *tal que* $\alpha = \beta \circ \gamma$

Exemplo 2.4. *Todo módulo livre é projetivo.*
Com efeito, dados $\beta : M \twoheadrightarrow N$ *e* $\alpha : A^{\oplus\Lambda} \to N$, *sejam* $n_\lambda = \alpha(e_\lambda)$. *Para cada* λ, *tome* $m_\lambda \in M$ *tal que* $\beta(m_\lambda) = n_\lambda$ *e defina* $\gamma(e_\lambda) = m_\lambda$. *Estendendo por linearidade, temos* $\gamma : A^{\oplus\Lambda} \to M$ *tal que* $\alpha = \beta \circ \gamma$.

Corolário 2.4. *Se* $0 \to M \to N \to P \to 0$ *é uma sequência exata curta onde M e P são módulos livres, então N é um módulo livre.*

2.7 Lema da Liberdade Genérica de Grothendieck

O resultado a seguir tem importantes aplicações em geometria algébrica. A abordagem a seguir é resumida em EISENBUD (c1995. 785p.).

Lema 2.4. *Sejam A domínio Noetheriano, B uma A- álgebra finitamente gerada e M um B- módulo finitamente gerado. Então existe $f \in A$ tal que M_f é um A_f- módulo livre.*

Demonstração. Seja $K = Frac(A)$. Raciocinaremos por indução em $d = \dim(K \otimes_A B)$.

Inicialmente, suponha $K \otimes_A B = 0$ (Seria o caso em que $d = -1$). Como

$0 = K \otimes_A B = S^{-1}A \otimes_A B = S^{-1}(A \otimes_A B) = S^{-1}B$. Então existe $f \in A - \{0\} = S$ tal que $f.1_B = 0$. Logo, $f.M = 0$. Portanto $M_f = 0$ é um módulo livre.

Agora suponha que $\dim(K \otimes_A B) = d$ e que o resultado vale para toda A-álgebra finitamente gerada C *tal que* $\dim(K \otimes_A C) < d$ e todo C- módulo finitamente gerado N. Note que $K \otimes_A B$ é uma K- álgebra finitamente gerada, pois se $B = A[t_1, ..., t_r]$, então

$$K \otimes_A B = S^{-1}B = S^{-1}(A[t_1, ..., t_r]) = S^{-1}(\frac{A[T_1, ..., T_r]}{J}) = \frac{S^{-1}(A[t_1, ..., t_r])}{S^{-1}J}$$

$$= \frac{S^{-1}(A)[t_1, ..., t_r]}{S^{-1}J} = \frac{K[T_1, ..., T_r]}{J'} = K[t'_1, ..., t'_r].$$

Assim, pelo Lema da Normalização de Noether, existem $x_1, ..., x_d \in K \otimes_A B$ algebricamente independentes tais que $K[x_1, ..., x_d] \hookrightarrow K \otimes_A B$ é uma extensão inteira, ou seja, $K \otimes_A B$ é $K[x_1, ..., x_d]$- módulo finitamente gerado.

Afirmação 1: Existe $g \in A$ tal que M_g é $A_g[x_1, ..., x_d]$- módulo finitamente gerado.

Com efeito, primeiro note que a menos de multiplicarmos por um elemento de A, podemos supor $x_i \in B$, $\forall i$. De fato, $x_i \in K \otimes_A B = S^{-1}(A[t_1, ..., t_r])$. Assim, $x_i = \frac{\Sigma a_I t^I}{s_i}$, $a_I \in A$ e $s_i \in S = A - \{0\}$. Então, $s_i x_i \in B$. Além disso, $\{x_i\}$ algebricamente intependente $\Rightarrow$ $\{s_i x_i\}$ algebricamente independente $\Rightarrow K[x_1, ..., x_d] \simeq K[s_1 x_1, ..., s_d x_d]$. Portanto podemos supor que $x_i \in B$.

Como a extensão $K[x_1, ..., x_d] \hookrightarrow K \otimes_A B = K[t'_1, ..., t'_r]$ é inteira, então cada t'_i é zero de um polinômio mônico em $K[x_1, ..., x_d]$.
Seja $\sum_{j=1}^n h_j Z^j \in K[x_1, ..., x_d][Z]$ tal que $\sum_{j=1}^n h_j(t'_i)^j = 0$. Eliminando denominadores, temos $\sum_{j=1}^n h'_j(t'_i)^j = 0$, onde $h'_j \in A[x_1, ..., x_d]$. Seja c_i o coeficiente lider de $\sum_{j=1}^n h'_j Z^j$. Logo, cada t'_i possui um polinômio φ_i em $A[x_1, ..., x_d][Z]$ tal que c_i é o coeficiente lider de φ_i e $\varphi_i(t'_i) = 0$. Portanto, fazendo $g = \prod_{i=1}^r c_i$, teremos que B_g será inteiro (e portanto finitamente gerado) sobre $A_g[x_1, ..., x_d]$ (pois agora os polinomios da dependência inteira serão mônicos!). Como M_g é módulo finitamente gerado sobre B_g, então M_g será módulo finitamente gerado sobre $A_g[x_1, ..., x_d]$. O que prova a Afirmação.

Temos que A Noetheriano $\Rightarrow A_g \simeq \frac{A[T]}{\langle 1-gT \rangle}$ Noetheriano $\Rightarrow A_g[x_1, ..., x_d]$ Noeth. Como M_g é um $A_g[x_1, ..., x_d]$- módulo finitamente gerado, pelo teorema 5.4, existe uma cadeia

$$(0) = M'_0 \subset M'_1 \subset ... \subset M'_{n-1} \subset M'_n = M_g$$

tal que $M_i/M_{i-1} \simeq B'/Q_i$, onde $B' = A_g[x_1, ..., x_d]$ e Q_i é um ideal primo de B'.

Afirmação 2: Se $Q_i \neq (0)$, então $\dim(K \otimes_A \frac{B'}{Q_i}) < d$.

De fato,

$$K \otimes_A \frac{B'}{Q_i} = S^{-1}A \otimes_A \frac{A_g[x_1, ..., x_d]}{Q_i} = S^{-1}(A \otimes_A (\frac{A[x_1, ..., x_d]}{P_i})_g)$$

$$= S^{-1}((A \otimes_A \frac{A[x_1, ..., x_d]}{P_i})_g) = S^{-1}(A \otimes_A \frac{A[x_1, ..., x_d]}{P_i})$$

$$= S^{-1}(A) \otimes_A \frac{A[x_1, ..., x_d]}{P_i} = K \otimes_A \frac{A[x_1, ..., x_d]}{P_i}$$

Como $A[x_1, ..., x_d]$ é domínio, então $\dim(\frac{A[x_1,...,x_d]}{P_i}) < \dim(A[x_1, ..., x_d])$, pois P_i é o ideal primo que corresponde ao Q_i, e porisso é não nulo.
Faça $\frac{A[x_1,...,x_d]}{P_i} = A[x'_1, ..., x'_d]$. Se tivermos $\dim(K[x_1, ..., x_d]) = \dim(K[\tilde{x}'_1, ..., \tilde{x}'_d])$, onde $K[\tilde{x_1}', ..., \tilde{x_d}'] = \frac{S^{-1}(A)[x'_1,...,x'_d]}{S^{-1}P_i}$, teremos que os $\tilde{x_i}'$ serão algebricamente independentes sobre K. Logo, os x'_i também serão sobre A, o que implica em $\dim(\frac{A[x_1,...,x_d]}{P_i}) = \dim(A[x_1, ..., x_d])$ o que é um absurdo. Portanto a afirmação é verdadeira.

Assim, quando $Q_i \neq (0)$, pela indução, teremos que existe $f_i \in A$ tal que $(B'/Q_i)_{f_i}$ é livre sobre A_{f_i} Se $Q_i = (0)$, já temos que $B'/Q_i = B'$ é livre sobre A_g (a base é o conjunto dos monômios). Nesse caso, tome $f_i = g$.

Tome $f = \prod f_i$, denovo pelo teorema 5.4, teremos que existe uma cadeia $(0) = N_0 \subset N_1 \subset ... \subset N_{n-1} \subset N_n = M_f$, onde $N_i = (M_i)_f$. Logo, cada N_i/N_{i-1} é A_f livre.
Baseado nessa cadeia, podemos construir as sequências exatas

$$0 \to N_i \to N_{i+1} \to N_{i+1}/N_i \to 0.$$

Segue do Corolário 6.2 que todos os N_i serão A_f livres. Portanto, M_f é Af livre. $\square$

3 FEIXES COERENTES

Nesta seção, escolhemos uma abordagem um pouco mais didatica do que a normalmente apresentada em HARTSHORNE (c1977. 496p.). O que é feito aqui pode ser encontrado em IITAKA (c2011. 357p.).
Para nós, $(X, \mathcal{O})$ (ou simplesmente X) será sempre um esquema.

3.1 Feixes Quase- Coerentes

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{F}$ um feixe sobre X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um feixe de $\mathcal{O}$- módulos (ou apenas um $\mathcal{O}$- módulo) se, para cada aberto $\mathcal{U} \in X$, tivermos que $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ é um $\mathcal{O}(\mathcal{U})$-módulo.*
Definição 3.2. *Sejam $X = SpecA$ e M um A- módulo. Definimos o feixe associado a M, que denotaremos por $\widetilde{M}$, do seguinte modo:*

Para um aberto principal $X_f \subset X$, onde $f \in A$ fazemos

$$\widetilde{M}(X_f) = M_f$$

Teremos como consequência que

$$\widetilde{M}(X) = M$$

Para um aberto qualquer $\mathcal{U} \subset X$, fazemos

$$\widetilde{M}(\mathcal{U}) = \varprojlim_{X_f \subset \mathcal{U}} M_f$$

Para ver que $\widetilde{M}$ é de fato um feixe, note que, quando $X_g \subset X_f$, teremos $(g) \subset \sqrt{(g)} \subset \sqrt{(f)}$, ou seja, existem $k > 0$ e $a \in A$ tais que $g^k = af$. Assim, podemos definir a aplicação de restrição

$$\rho : M_f \to M_g; \quad \rho(\frac{m}{f^r}) = \frac{a^r m}{g^{kr}}$$

Veja que $\widetilde{M}(X_f)$ não depende de X_f, ou seja, se $X_f = X_g$, então $\widetilde{M}(X_f) = \widetilde{M}(X_g)$. Com efeito, temos que $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$. Assim, $f^m = ag$ e $g^n = bf$. Defina $F : M_f \to M_g$; $x/f^p \mapsto xb^p/g^{np}$ e $G : M_g \to M_f$; $x/g^p \mapsto xa^p/f^{mp}$. Se $x/f^p = y/f^k$, então existe f^t tal que $f^t(f^k x - f^p y) = 0$. Assim, $g^{tn}(b^p g^{nk} x - b^k g^{np} y) = 0$, ou seja, $xb^p/g^{np} = yb^k/g^{nk}$. Portanto, F está bem definida. Analogamente, G está bem definida. É claro que $F \circ G = Id$ e $G \circ F$. Também é claro que F e G são homomorfismos. Portanto, $M_f = M_g$.

Dados $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ abertos, como $\widetilde{M}(\mathcal{U}) = \varprojlim_{X_f \subset \mathcal{U}} \widetilde{M}(X_f)$, então os mapas ρ definem uma aplicação

$$\varphi : \widetilde{M}(\mathcal{U}) = \varprojlim_{X_f \subset \mathcal{U}} \widetilde{M}(X_f) \longrightarrow \varprojlim_{X_g \subset \mathcal{V}} \widetilde{M}(X_g) = \widetilde{M}(\mathcal{V}).$$

Também temos que, para todo $P \in SpecA$, vale $(\widetilde{M})_P = M_P$, ou seja, o talo no ponto P é isomorfo à localização do módulo M no primo P. Com efeito, mostraremos que M_P possui a propriedade universal do limite direto. Primeiro defina: $f \leq g \Leftrightarrow X_f \supset X_g$. Assim, $\mu_{fg} : M_f \to M_g,\ x/f^r \mapsto xb^r/g^{rm}$, onde $g^m = bf$. Note que $f.g \geq f, g$. Defina $v_f : M_f \to M_P,\ x/f \mapsto x/f$ pois $P \in X_f \Leftrightarrow f \notin P$. É claro que $v_g \circ \mu_{fg} = v_f,\ \forall f \leq g$.

Seja B anel tal que existem $\alpha_f : M_f \to B$ tais que $\alpha_f = \alpha_g \circ \mu_{fg},\ \forall f \leq g$.

Defina $\alpha : M_P \to B,\ x/s \mapsto \alpha_s(x/s)$. Mostraremos que α está bem definida. Seja $y/t = x/s$, ou seja, $s'(ys - xt) = 0$. Como $ts \geq t, s$, teremos que existe $r, d \in \mathbb{N}$ e $c, d \in A$ tal que $(st)^r = cs$ e $(st)^n = dt$. Note que $\mu_{s,ts}(x/s) = xc/(st)^r$ e $\mu_{t,ts}(y/t) = yd/(ts)^n$. Logo,

$$s't'((st)^r yd - (st)^n xc) = s't'(csyd - dtxc) = t'cds'(ys - tx) = 0$$

Logo, $\mu_{s,st}(x/s) = \mu_{t,ts}(y/t)$. Assim, $\alpha_s(x/s) = \alpha_{ts} \circ \mu_{s,ts}(x/s) = \alpha_{ts} \circ \mu_{s,ts}(y/t) = \alpha_t(y/t)$. Portanto, α está bem definida. É claro que $\alpha_f = \alpha \circ v_f$.

Seja $\beta : M_P \to B$ tal que $\alpha_f = \beta \circ v_f$. Logo, $\beta(x/s) = \beta \circ v_s(a/s) = \alpha_s(a/s) = \alpha_s$. Logo, α é única e assim, M_P possui a propriedade universal. Portanto, $\varinjlim_{P \in X_f} \widetilde{M}(X_f) \simeq M_P$.

Mostraremos agora que, se $SpecA = X = \cup_{i \in I} X_{f_i}$ é uma cobertura de X tal que dados $i, j \in I$, $\rho_{i,ij}(s_i) = \rho_{j.ij}(s_j)$, então existe único $s \in \widetilde{M}(X)$, cuja imagem em $\widetilde{M}(X_{f_i})$ é s_i, $\forall i$. Com efeito, X quasi- compacto nos dá $\cup_{i=1}^n X_{f_i}$. Sejam $si = a_i/f_i^{n_i} \in M_{f_i}$ e $j = a_i/f_j^{n_j} \in M_{f_j}$. Como $Xf_if_j \subset X_{f_i}$ e $Xf_if_j \subset X_{f_j}$, então temos $(f_if_j)^{m_i} = d_if_i$ e $(f_if_j)^{m_j} = d_jf_j$. Também temos

$$\rho : M_{f_i} \to M_{f_if_j},\ x/f_i^r \mapsto d_i^r x/(f_if_j)^{r.m_i}$$

Por hipótese, temos que $d_{n_i}^r x/(f_if_j)^{\tilde{m}_i} = d_j^{n_j} x/(f_if_j)^{\tilde{m}_i}$
Seja $N = max\{n_i, \tilde{m}_i, \tilde{m}_j\}$. Assim, $s_i = x_i/f_i^{n_i} = x_i f_N^{N-n_i} = c_i/f^N{}_i$. Note que (*)$c_if_j^N/(f_if_j)^N = c_jf_i^N/(f_if_j)^N$. Como $X = \cup X_{f_i}$, então $\langle f_1, ..., f_n\rangle \Rightarrow \langle f_1^N, ..., .F_n^N\rangle$. Logo, $\sum h_if_i^N = 1.$. Agora tome $s_i = \sum c_ih_i$. Como as imagens de seções globais s são do tipo $s/1$, temos:

$$s/1 = \sum c_ih_if_j^N/f_j^N = \sum_{i \neq j} c_ih_i(f_if_j)^N/(f_if_j)^N + c_jh_jf_j^N/f_j^N$$

$$\stackrel{*}{=} \sum_{i \neq j} c_j h_i (f_i f_j)^N / (f_i f_j)^N + c_j h_j f_j^N / f_j^N = c_j / f_j^N = s_j$$

Unicidade: Seja $t \in M$; $t/1 = s_j$, $\forall j$. Dado $P \in SpecA = \cup X_{f_i}$, existe X_f contendo P. Daí, $s/1 - t/1 = 0 \in M_f$. Então $s - t/1 = 0 \in M_P, \forall P \in SpecA$. Portanto, $s - t = 0$.

Concluimos que $\widetilde{M}$ é um feixe.

Definição 3.3. *Um $\mathcal{O}$- módulo $\mathcal{F}$ é dito quase-coerente em $x \in X$ se existe um aberto $\mathcal{U} \in X$ e uma sequência exata*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{(J)} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{(I)} \twoheadrightarrow \mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \to 0$$

Onde I e J são conjuntos de índices.

Teorema 3.1. *Seja $X = SpecA$ e $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}$- módulo. Então as seguintes condiçõe são equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ é quase-coerente.*
2. *Existem $g_1, ..., g_s \in A$ tais que $X = \bigcup X_{g_i}$ e $\mathcal{F}|_{X_{g_i}} \simeq \widetilde{\mathcal{F}(X_{g_i})}$*
3. *Para todo $f \in A$, temos que:*
   (a) *Se $t \in \mathcal{F}(X)$ é tal que $t|_{X_f} = 0$, então $f^n t = 0$, para algum $n > 0$*
   (b) *Para todo $s \in \mathcal{F}(X_f)$, existe n tal que $f^n s$ é da forma $t|_{X_f}$, para algum $t \in \mathcal{F}(X)$*
4. *$\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$, para algum A- módulo M.*

Demonstração. $(1) \Rightarrow (2)$: Dado $x \in X$, existe um aberto que satisfaz a condição de quase- coerência. Como todo aberto é união de abertos principais, então existe $g \in A$ tal que

$$\mathcal{O}_{X_g}^{(J)} \stackrel{\Phi}{\to} \mathcal{O}_{X_g}^{(I)} \twoheadrightarrow \mathcal{F}|_{Xg} \to 0,$$

é exata para algum J e algum I. Daí, temos a sequêcia exata

$$A_g^{(J)} \stackrel{\phi}{\to} A_g^{(I)} \twoheadrightarrow Coker\phi \to 0$$

$\forall P \in X_g$, temos que $(A_g^{(J)})_P \stackrel{\phi}{\to} (A_g^{(I)})_P \twoheadrightarrow (Coker\phi)_P \to 0$ é exata. Logo, $A_P^{(J)} \stackrel{\phi}{\to} A_P^{(I)} \twoheadrightarrow (Coker\phi)_P \to 0$ é exata. Assim, $\mathcal{O}_{X_g}^{(J)} \stackrel{\Phi}{\to} \mathcal{O}_{X_g}^{(I)} \twoheadrightarrow Coker\Phi$ também será. Portanto, $\mathcal{F}|_{X_g} \simeq Coker\Phi \simeq \widetilde{Coker\phi} \simeq \widetilde{\mathcal{F}(X_g)}$. Como X é quase- compacto, então podemos tomar uma quantidade finita de g's.

$(2) \Rightarrow (3)$: Suponha $t|_{X_f} = 0$. Então,

$$t|_{X_{fg_i}} \in \mathcal{F}(X_{fg_i}) = \mathcal{F}|_{X_{g_i}}(X_{fg_i}) \simeq \widetilde{\mathcal{F}(X_{g_i})}(X_f) = \mathcal{F}(X_{g_i})_{\frac{f}{1}}$$

Logo, pela definição de localização de um módulo, existe $l > 0$ tal que $f^l t|_{X_{g_i}} = 0$. Mas os g_i são finitos, então podemos tomar l independente dos i's. Como $\mathcal{F}$ é um feixe e os X_{g_i} cobrem X, temos que $f^l t = 0$

Agora, seja $s \in \mathcal{F}(X_f)$. Considere o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F}(X_{g_i}) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathcal{F}(X) & & \longrightarrow & & \mathcal{F}(X_{fg_i}) \simeq \mathcal{F}(X_{g_i})_{\frac{f}{1}} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathcal{F}(X_f) & & \end{array}$$

Assim, $s|_{X_{fg_i}} = \frac{\frac{s'_i}{f^r}}{1}$, onde $s'_i \in \mathcal{F}(X_{g_i})$. Logo, como a quantidade de g_i é finita, existe $r > 0$, que não depende de i, tal que $f^r s|_{X_{fg_i}} = \frac{s'_i}{1}$. Como $\mathcal{F}$ é um feixe e os X_{g_i} cobrem X, temos que existe $t \in \mathcal{F}(X)$ tal que $t|_{X_{g_i}} = s'_i$. Pela comutatividade do diagrama, temos que $t|_{X_f} = f^r s$.

$(3) \Rightarrow (4)$: $\forall f \in A$, temos o mapa de restrição $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_f)$. Pela propriedade universal de M_f, temos o homomorfismo $\rho_f : \mathcal{F}(X)_f \to \mathcal{F}(X_f)$. Como ρ_f comuta com as restrições, teremos um mapa $\tilde{\rho} : \widetilde{\mathcal{F}(X)} \to \mathcal{F}$. As condições (a) e (b) nos dão que ρ_f é um isomorfismo para todo $f \in A$. Portanto, $\tilde{\rho}$ é um isomorfismo.

$(4) \Rightarrow (1)$: É evidente. $\square$

3.2 Definição e Propriedades

Definição 3.4. *Seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}$- módulo. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um feixe coerente se:*

1. *Para todo $x \in X$, existe aberto $\mathcal{U} \subset X$ contendo x tal que para algum inteiro $m > 0$ existe um mapa $\mathcal{O}^m_{\mathcal{U}} \twoheadrightarrow \mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$*
2. *Para todo aberto $\mathcal{V}$ e todo mapa $\theta : \mathcal{O}^n_{\mathcal{V}} \to \mathcal{F}|_{\mathcal{V}}$, $Ker(\theta)$ satisfaz a condição 1.*

Todo módulo coerente é um módulo quase- coerente, pois $\mathcal{F}$ coerente nos dá, pela condição 1

$$\mathcal{O}^n_{\mathcal{U}} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$$

E pela condição 2,

$$\mathcal{O}^m_{\mathcal{V}} \twoheadrightarrow Ker\theta \hookrightarrow \mathcal{O}^n_{\mathcal{V}} \twoheadrightarrow \mathcal{F}|_{\mathcal{V}} \to 0$$

Que nos dá a sequência exata da condição de quase- coerência.

Proposição 3.1. *Sejam A um anel Noetheriano, $X = SpecA$ e M um A- módulo finitamente gerado. Então $\widetilde{M}$ será um feixe coerente.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Tome um aberto X_f aberto contendo x.
Como A é Noetheriano, então $A_f \simeq A[X]/\langle 1 - fX \rangle$ tambem o é. Veja também que M finitamente gerado implica em M_f ser finitamente gerado. Logo, temos uma sobrejeção $A_f^m \twoheadrightarrow M_f$ para algum $m > 0$. Assim, para todo $P \in X_f$, temos $(A_f^m)_P \twoheadrightarrow (M_f)_P$. Mas

$$P \in X_f \Leftrightarrow f \notin P \Rightarrow (A_f^m)_P \simeq A_P^m \ e \ (M_f)_P \simeq M_P$$

Ou seja, temos a sobrejeção $A_P^m \twoheadrightarrow M_P$ para todo $P \in X_f$. Portanto, temos a sobrejeção $\mathcal{O}_{X_f}^m \twoheadrightarrow \widetilde{M}|_{X_f}$

Para verificar a condição 2, é suficiente olhar para uma aplicação $\theta : \mathcal{O}_{X_g}^n \to \widetilde{M}|_{X_g}$. Como A_f é Noetheriano, teremos que $Ker(\theta)$ será finitamente gerado. Agora basta repetir o que foi feito para a condição 1. □

Teorema 3.2. *Sejam A um anel Noetheriano, $X = SpecA$ e $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}$- módulo. Então $\mathcal{F}$ é coerente se, e somente se, $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$, para algum A- módulo finitamente gerado M.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{F}$ é coerente. Logo, existe uma cobertura $X = \cup X_{f_i}$, onde $\mathcal{F}(X_{f_i})$ é finitamente gerado. Como todo feixe coerente é um feixe quase- coerente, então, pelo Teorema 1.1, teremos $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$, para algum A- módulo M. Sejam $m_{i,j} \in M$ tais que $\{\frac{m_{i,j}}{f_i^{n_{i,j}}}\}$ gera $M_{f_i} = \mathcal{F}(X_{f_i})$. É fácil ver que $\{\frac{m_{i,j}}{1}\}$ também gera M_{f_i}. Dado qualquer ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, temos que $\{\frac{m_{i,j}}{1}\}$ gera $M_\mathfrak{m}$, pois $(M_{f_i})_\mathfrak{m} \simeq M_\mathfrak{m}$, para todo $f_i \notin \mathfrak{m}$. Assim, definindo $A^{\oplus\{i,j\}} \to M$, pondo $e_{i,j} \mapsto m_{i,j}$, temos $A_\mathfrak{m}^{\oplus\{i,j\}} \twoheadrightarrow M_\mathfrak{m}$, $\forall \mathfrak{m} \subset A$. Logo, $A^{\oplus\{i,j\}} \twoheadrightarrow M$ é sobrejeção. Portanto, M é finitamente gerado.

A recíproca já foi feita na Proposição 2.1.

□

Teorema 3.3. *Seja $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ uma sequência exata de $\mathcal{O}$- módulos. Se dois dos feixes $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ são coerentes, então todos são.*

Demonstração. Suponha $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ coerentes. Dado $x \in X$, existe um aberto $\mathcal{U} \subset X$ tal que $\theta : \mathcal{O}_\mathcal{U}^m \twoheadrightarrow \mathcal{G}|_\mathcal{U}$ é uma sobrejeção. Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathcal{O}^m & & & & \\ & & & & \downarrow\theta & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{F} & \overset{\alpha}{\rightarrowtail} & \mathcal{G} & \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{H} & \to & 0 \end{array}$$

Como $\mathcal{H}$ é coerente, então existe $n > 0$ tal que $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{n} \twoheadrightarrow Ker(\beta \circ \theta)|_{\mathcal{U}}$. Assim, temos

$$\mathcal{O}^{n} \twoheadrightarrow Ker(\beta \circ \theta) \overset{\theta|_{Ker(\beta\circ\theta)}}{\twoheadrightarrow} \alpha(\mathcal{F}) \overset{\alpha^{-1}}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F}$$

Portanto, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição 1 de feixe coerente.

Seja $\gamma : \mathcal{O}^{r} \to \mathcal{F}$ um mapa qualquer (restrito a um aberto qualquer). Assim,

$$\begin{array}{ccccc} Ker\gamma & \hookrightarrow & \mathcal{O}^{r} & & \\ & & \downarrow_{\gamma} & & \\ & & \mathcal{F} & \overset{\alpha}{\rightarrowtail} & \mathcal{G} \end{array}$$

Como $\mathcal{G}$ é coerente, existe $s > 0$ tal que $\mathcal{O}^{s} \twoheadrightarrow Ker(\alpha \circ \gamma) = Ker\gamma$ (restrito ao aberto escolhido). Portanto, $\mathcal{F}$, satisfaz a condição 2, ou seja, $\mathcal{F}$ é coerente.

Agora, suponha $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ coerentes. Logo, dado $x \in X$, existem $k > 0$ e um aberto $\mathcal{U} \in X$ tal que $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{k} \twoheadrightarrow \mathcal{G}|_{\mathcal{U}} \twoheadrightarrow \mathcal{H}|_{\mathcal{U}}$. Portanto, $\mathcal{H}$ satisfaz a condição 1.

Seja $\theta : \mathcal{O}^{n} \to \mathcal{H}$ um mapa qualquer (restrito a um aberto qualquer). Como todo módulo livre é um módulo projetivo (Exemplo 4), então podemos levantar θ, ou seja, existe $\rho : \mathcal{O}^{n} \to \mathcal{G}$ tal que $\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G} \\ & \nearrow & \downarrow_{\beta} \\ \mathcal{O}^{k} & \overset{\theta}{\to} & \mathcal{H} \end{array}$ comuta.

Como $\mathcal{F}$ é coerente, seja $\gamma : \mathcal{O}^{m} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ (restrito a um aberto contido no aberto tomado anteriormente). Assim, podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & Ker(\gamma+\rho) & \longrightarrow & Ker\theta & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{m} & \longrightarrow & \mathcal{O}^{m} \oplus \mathcal{O}^{n} & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow_{\gamma} & & \downarrow & & \downarrow_{\theta} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \overset{\alpha}{\longrightarrow} & \mathcal{G} & \overset{\beta}{\longrightarrow} & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Segue do Lema da Serpente que $Ker(\gamma + \rho) \twoheadrightarrow Ker\rho$ é sobrejetiva. Logo, a coerência de $\mathcal{G}$ nos dá que existe $r > 0$ e um mapa, tal que $\mathcal{O}^{r} \twoheadrightarrow Ker(\gamma + \rho) \twoheadrightarrow Ker\theta$ (em um aberto contido no aberto a que restringimos γ). Portanto $\mathcal{H}$ é coerente.

Finalmente, suponha $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ coerentes. Assim, dado um ponto em X, existem um aberto, $m, n > 0$ e mapas tal que, $\mathcal{O}^{m} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ e $\mathcal{O}^{n} \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ (restritos ao aberto). Pelo mesmo motivo do caso anterior, podemos levantar a segunda aplicação, ou seja, existe um mapa $\mathcal{O}^n \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ tal que $\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G} \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{O}^n & \rightarrow & \mathcal{H} \end{array}$ comuta. Daí, podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^m & \longrightarrow & \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n & \longrightarrow & \mathcal{O}^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Segue do Lema da Serpente que $\mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ é sobrejetiva. Logo, $\mathcal{G}$ satisfaz a condição 1.

Agora, seja $\sigma : \mathcal{O}^s \rightarrow \mathcal{G}$ um mapa qualquer (restrito a um aberto qualquer). Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & Ker\sigma & & & & \\ & & & \swarrow & \downarrow & & & & \\ & & Ker(\beta \circ \sigma) & \longrightarrow & \mathcal{O}^s & & & & \\ & & \downarrow\alpha^{-1}\circ\ \sigma & & \downarrow\sigma & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Note que o retângulo comuta, pois $\sigma(Ker(\beta \circ \sigma)) \subset \alpha(\mathcal{F})$. Logo, todo o diagrama comuta. Assim, como $Ker\sigma \subset Ker(\beta \circ \sigma)$ e α é injetiva, então

$$Ker\sigma = Ker(\sigma|_{Ker(\beta\circ\sigma)}) = Ker(\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \sigma) = Ker(\alpha^{-1} \circ \sigma).$$

Agora, afirmo que: Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{P}$, $\mathcal{O}$- módulos que satisfazem a condição 1 e 2, respectivamente. Então $Ker(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P})$ satisfaz a condição 1, para qualquer mapa $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}$. Com efeito, seja $k > 0$ tal que $\mu : \mathcal{O}^k \twoheadrightarrow \mathcal{L}$. Daí, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Ker(\eta \circ \mu) & \twoheadrightarrow & Ker\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}^k & \overset{\mu}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{L} \\ & \searrow & \swarrow\eta \\ & \mathcal{P} & \end{array}$$

Como $\mathcal{P}$ satisfaz a condição 2, então existe $s > 0$ tal que

$$\mathcal{O}^s \twoheadrightarrow Ker(\eta \circ \mu) \twoheadrightarrow Ker\eta.$$

O que prova a afirmação.

Mas, $(\alpha^{-1} \circ \sigma) : Ker(\beta \circ \sigma) \to \mathcal{F}$, então $Ker(\alpha^{-1} \circ \sigma) = Ker(\sigma)$ satisfaz a condição 1. Portanto, $\mathcal{G}$ satisfaz a condição 2 e será coerente. $\square$

Corolário 3.1. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}$- módulos coerentes. Então:*

1. *$Im\theta$, $Ker\theta$ e $Coker\theta$ são coerentes para todo mapa $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$*
2. *$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ é coerente e vale a recíproca.*
3. *$\mathcal{F} \oplus_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ e $Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ são coerentes.*

Lema 3.1. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito de esquemas Noetherianos. Se $\mathcal{F}$ é coerente sobre X, então $f_\star \mathcal{F}$ é coerente sobre Y.*

3.3 Finitude em Feixes Coerentes

Nesta seção iremos seguir as linhas de SHAFAREVICH (c1994. 270p.) para provar que, em certas condições, os espaços de seções de um feixe coerente é um espaço vetorial de dimensão finita.

Proposição 3.2. *Sejam X um esquema Noetheriano reduzido irredutível e $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X. Então, existe um aberto denso W tal que $\mathcal{F}|_W \simeq \mathcal{O}^n$, para algum $n > 0$.*

Demonstração. Como X é irredutível, todo aberto será denso e irredutível. Logo, podemos reduzir ao caso em que $X = SpecA$, onde $\mathcal{N}(A) = 0$. Então

$$X = SpecA = V(\mathcal{N}(A)) = V(0) \text{ irredutível } \Rightarrow \langle 0 \rangle \text{ primo, ou seja, } A \text{ é domínio.}$$

A coerência de $\mathcal{F}$ nos dá que $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$, para algum módulo finitamente gerado M.

Então, pelo Lema da Liberdade Genérica de Grothendieck, existe $f \in A$ tal que $A_f^n \simeq M_f = \widetilde{M}(X_f) \simeq \mathcal{F}(X_f)$, ou seja, $\mathcal{F}|_{X_f} \simeq \mathcal{O}_{X_f}^n$ $\square$

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}$- módulo. O suporte de $\mathcal{F}$ é o conjunto*

$$supp\mathcal{F} = \{x \in X \ / \ \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

Proposição 3.3. *Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente. Então $supp\mathcal{F}$ é um conjunto fechado de X.*

Demonstração. Mostraremos que se $\mathcal{F}_p = 0$, então existe um aberto $\mathcal{U}$, contendo x, tal que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} = 0$. Como $\mathcal{F}_p = (\mathcal{F}|_{\mathcal{V}})_p$, para qualquer aberto $\mathcal{V} \subset X$ contendo p, então tome $\mathcal{U} = SpecA$ aberto afim contendo p. Como $\mathcal{F}$ é coerente, então $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} = \widetilde{M}$, para algum A- módulo finitamente gerado M. Afirmo que

$$\mathcal{F}|_{\mathcal{U}'} = 0, \text{ onde } \mathcal{U}' = \mathcal{U} - V(Ann(M)).$$

Com efeito,

$$M_p \neq 0 \;\Leftrightarrow\; p \in V(Ann(M)), \text{ pois } M \text{ é finitamente gerado.}$$

Logo, $M_p = 0$, $\forall p \in \mathcal{U}'$, ou seja, $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}'} = 0$. □

Proposição 3.4. *Sejam X um esquema Noetheriano reduzido irredutível e $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X. Então, existem um feixe coerente $\mathcal{G}$ contendo um subfeixe livre $\mathcal{O}^r$ e um mapa $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tais que os feixes $Ker\varphi$ e $\mathcal{G}/\mathcal{O}^r$ possuem suporte distinto de X.*

Demonstração. Pela Proposição 3.1, temos que existe um aberto denso $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{F}|_{\mathcal{W}} \overset{f}{\simeq} \mathcal{O}^r_{\mathcal{W}}$, para algum $r > 0$. Dado um aberto $\mathcal{U} \subset X$, defina

$$\mathcal{G}(\mathcal{U}) := f_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}} \circ \rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}(\mathcal{F}(\mathcal{U})) + \rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}(\mathcal{O}^r(\mathcal{U}))$$

Sejam $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$. Considere os diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}(\mathcal{U}) & \overset{\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{F}}}{\longrightarrow} & \mathcal{F}(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) & \overset{f_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}}{\longrightarrow} & \mathcal{O}^r(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) \\
\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V},\mathcal{F}}\downarrow & & \downarrow\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W},\mathcal{F}} & & \downarrow\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W},\mathcal{O}^r} \\
\mathcal{F}(\mathcal{V}) & \overset{\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W},\mathcal{F}}}{\longrightarrow} & \mathcal{F}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W}) & \overset{f_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W}}}{\longrightarrow} & \mathcal{O}^r(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}^r(\mathcal{U}) & \overset{\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}}{\longrightarrow} & \mathcal{O}^r(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) \\
\downarrow\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} & & \downarrow\rho^{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W}} \\
\mathcal{O}^r(\mathcal{V}) & \overset{\rho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W}}}{\longrightarrow} & \mathcal{O}^r(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})
\end{array}$$

Logo, faz sentido definirmos $\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V},\mathcal{G}} := \rho^{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\cap\mathcal{W},\mathcal{O}^r}$. Assim, é fácil ver que $\mathcal{G}$ é um feixe de $\mathcal{O}$- módulos, com a operação

$$ax = \rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{O}}(a)x, \text{ onde } a \in \mathcal{O}(\mathcal{U}) \text{ e } x \in \mathcal{O}^r(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}).$$

Agora, mostraremos que $\mathcal{G}$ é coerente. Para isso, assumiremos que $X = SpecA$ e $\mathcal{W} = X_g$, para algum $g \in A$ e usaremos a condição 3 do Teorema 1.1. Como $\mathcal{F}$ e $\mathcal{O}^r$ são coerentes, temos que $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$ e $\mathcal{O}^r \simeq \widetilde{N}$, onde M e N são A- módulos finitamente gerados. É claro que $\mathcal{G}(X) = f_{X_g} \circ \rho^X_{X_g}(\mathcal{F}(X)) + \rho^X_{X_g}(\mathcal{O}^r(X))$ é finitamente gerado. Seja $f \in A$ e $t \in \mathcal{G}(X)$ tal que $\rho^X_{X_g,\mathcal{G}}(t) = 0$. Como $\rho^X_{X_g,\mathcal{G}}(t) = \rho^{X_g}_{X_{fg},\mathcal{O}^r}(t)$, então se $t = \frac{n}{g^r}$, teremos $\rho^{X_g}_{X_{fg},\mathcal{O}^r}(t) = \frac{b^r n}{(fg)^{kr}}$, onde $(fg)^k = bg$ (pois $X_{fg} \subset X_g$)

$$bg = (fg)^k \Rightarrow b = f^k g^{k-1}, \text{ pois estamos num domínio.}$$

Também temos que $\frac{b^r n}{(fg)^{kr}} = 0 \Leftrightarrow (fg)^s b^r n = 0$, para algum $s > 0$.
Tome $N = rk + s$. Assim,

$$f^N t = \frac{f^{rk} f^s n}{g^r} = \frac{f^{rk} g^{rk-r} g^s f^s n}{g^{rk+s}} = \frac{b^r (fg)^s n}{g^{rk+s}} = 0$$

Logo, a primeira parte da condição 3 do Teorema 1.1 é satisfeita.
Seja $u \in \mathcal{G}(X_f) = f_{X_{fg}} \circ \rho^{X_f}_{X_{fg}}(\mathcal{F}(X_f)) + \rho^{X_f}_{X_{fg}}(\mathcal{O}^r(X_f))$.
Como $X_{fg} \subset X_f$, então $af = (fg)^l$, $a \in A$ e $l > 0$. Logo, $a = f^{l-1}g^l$. Assim,

$$u = f_{X_{fg}}(\frac{a^r m}{(fg)^{lr}}) + \frac{a^s n}{(fg)^{ls}} = f_{X_{fg}}(\frac{f^{lr-r} g^{lr} m}{(fg)^{lr}}) + \frac{f^{ls-s} g^{ls} n}{(fg)^{ls}}$$

Suponha $s > r$, então

$$f^s u = f_{x_{fg}}(\frac{f^N (fg)^{lr} m}{(fg)^{lr}}) + \frac{n}{1}$$

Afirmo que $\rho^X_{X_f,\mathcal{G}}(f_{X_g}(\frac{f^N m}{1}) + \frac{n}{1}) = f_{X_{fg}}(\frac{f^N}{1}) + \frac{n}{1}$
De fato, $\rho^X_{X_f,\mathcal{G}} = \rho^{X_g}_{X_{fg},\mathcal{O}^r}$, então

$$\rho^X_{X_f,\mathcal{G}}(f_{X_g}(\frac{f^N m}{1}) + \frac{n}{1}) = \rho^{X_g}_{X_{fg},\mathcal{O}^r} \circ f_{X_g}(\frac{f^N m}{1}) + \rho^{X_g}_{X_{fg},\mathcal{O}^r}(\frac{n}{1})$$

$$= f_{X_{fg}} \circ \rho^{X_g}_{X_{fg},\mathcal{F}}(\frac{f^N m}{1}) + \frac{n}{1} = f_{X_{fg}}(\frac{f^N m}{1}) + \frac{n}{1}$$

Como $(f_{X_g}(\frac{f^N m}{1}) + \frac{n}{1}) \in \mathcal{G}(X)$, então a segunda parte da condição 3 do Teorema 1.1 é satisfeita. Portanto, $\mathcal{G}$ é coerente.

Afirmo que a aplicação de restrição $\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{O}^r}$ é uma inclusão. É suficiente provar para um aberto afim $\mathcal{U} = SpecA$. Considere o aberto principal $X_f \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Se $x \in Ker\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{O}^r}$, então existe $n > 0$; $f^n x = 0$. Como X é irredutível, então A não possui divisores de zero. Logo, $x = 0$. Portanto, $Ker\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{O}^r} = 0$. Assim, $\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{O}^r}$ nos permite identificar $\mathcal{O}^r$ com um subfeixe de $\mathcal{G}$.

Defina a aplicação $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, pondo $\varphi_{\mathcal{U}} = f_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}} \circ \rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{F}}$.
Se $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$, então

$$\mathcal{G}(\mathcal{U}) = f_{\mathcal{U}} \circ \rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\mathcal{U})) = f_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}(\mathcal{U})) = \mathcal{O}^r(\mathcal{U}) = \rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W},\mathcal{O}^r}(\mathcal{O}^r(\mathcal{U}))$$

Portanto, $f_{\mathcal{U}}$ é um isomorfismo e $\mathcal{G}(\mathcal{U}) = \mathcal{O}^r(\mathcal{U})$. Ou seja, $ker\varphi$ e $\mathcal{G}/\mathcal{O}^r$ são nulos em $\mathcal{W}$. Logo, seus suportes estão contidos em $X - \mathcal{W}$. □

Definição 3.6. *Como supp$\mathcal{F}$ é um conjunto fechado de X, então podemos definir o feixe $\overline{\mathcal{F}}$ em supp$\mathcal{F}$ pela condição $\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathcal{U}}) = \mathcal{F}(\mathcal{U})$, onde $\mathcal{U} \cap supp\mathcal{F} = \overline{\mathcal{U}}$*

Proposição 3.5. *Seja X um esquema Noetheriano e $\mathcal{F}$ um feixe coerente com suporte*

$Y \neq X$. Então existe uma cadeia de subfeixes

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{F}_m = 0$$

tal que os quocientes $\overline{\mathcal{F}}_i/\overline{\mathcal{F}}_{i+1}$ são $\mathcal{O}_Y$- módulos coerentes.

Demonstração. Seja $\mathcal{I}_Y$ o feixe de ideais associado ao subesquema reduzido Y. Note que se tivermos $\mathcal{I}_Y.\mathcal{F} = 0$, então $\overline{\mathcal{F}}$ será um feixe coerente de $\mathcal{O}_Y$- módulos. Com efeito, a igualdade nos dá que todos os $\mathcal{O}(\mathcal{U})$- módulos $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ serão módulos sobre $\mathcal{O}(\mathcal{U})/\mathcal{I}_Y(\mathcal{U}) = \mathcal{O}_Y(\overline{\mathcal{U}})$. Assim, se $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ em algum aberto afim $\mathcal{U} = SpecA$, então $I_Y.M = 0$, e M será um A/I_Y- módulo. Isso nos dá que $\overline{\mathcal{F}} = \widetilde{M}$.

Na verdade, mostraremos que existe $k > 0$, tal que $\mathcal{I}_Y^k.\mathcal{F} = 0$.

Seja $\mathcal{U} = SpecA$ o aberto afim tal que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} = \widetilde{M}$, onde M é um A- módulo finitamente gerado. Seja I_Y o ideal associado ao subconjunto $Y \cap \mathcal{U}$. Se $f \in I_Y$, então $X_f \subset \mathcal{U} - \mathcal{U} \cap Y$. Segue que, $\mathcal{F}|X_f = 0$, ou seja, $M_f = 0$. Logo, $f^{s(m)}m = 0, \forall m \in M$. Como M é finitamente gerado, existe $s > 0$ tal que $f^s M = 0$. Como I_Y é um ideal finitamente gerado, então $I_Y^l.M = 0$, para algum $l > 0$. Agora basta tomarmos uma cobertura finita de abertos afins de X, que teremos $\mathcal{I}_Y^k.\mathcal{F} = 0$, para algum $k > 0$.

Agora, faça $\mathcal{F}_i = \mathcal{I}_Y^i$, $i \in \{0, 1, ..., k\}$. É claro que o suporte de cada $\mathcal{F}_i$ está contido em Y. Como $\mathcal{I}_Y.(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}) = 0$, então os $\overline{\mathcal{F}_i}/\overline{\mathcal{F}}_{i+1}$ serão feixes coerentes de $\mathcal{O}_Y$-módulos. □

Proposição 3.6. *Sejam $\mathcal{F}$ um feixe coerente, X esquema Noetheriano reduzido, e seja $X = \bigcup X_i$ sua decomposição em compontentes irredutíveis. Então existem $\mathcal{F}_i$ coerentes sobre X e um mapa $\varphi : \mathcal{F} \to \oplus \mathcal{F}_i$ tais que $supp\mathcal{F}_i \subset X_i$, os feixes $\overline{\mathcal{F}}_i$ são coerentes em X_i e $supp(Ker\varphi) \subset \bigcup_{i \neq j} X_i \cap X_j$.*

Demonstração. Faça $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}/(\mathcal{I}_{X_i}.\mathcal{F})$, e sejam $\varphi_i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_i$ a projeção natural e $\varphi = \oplus\varphi_i$. Temos que $supp\mathcal{F}_i \subset X_i$ e que cada $\overline{\mathcal{F}}_i$ é um $\mathcal{O}_{X_i}$- módulo coerente, pois $\mathcal{I}_{X_i}.\mathcal{F}_i = 0$. Considere o aberto $\mathcal{U}_i = X_i - \bigcup_{i \neq j} X_i \cap X_j$.
Em $\mathcal{U}_i$ nós temos $\mathcal{I}_{X_j} = \mathcal{O}$, quando $j \neq i$ e $\mathcal{I}_{X_i} = 0$, onde $\mathcal{F}_j|_{\mathcal{U}_i} = 0$, para $j \neq i$ e $\mathcal{F}_i|_{\mathcal{U}_i} = \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i}$. Assim, temos $\varphi_j = 0$, para $j \neq i$ e $\varphi = \varphi_i$ é um isomorfismo. Portanto, $Ker\varphi|_{\bigcup \mathcal{U}_i} = 0$. □

Definição 3.7. *Para nós, uma variedade sobre um corpo k será um esquema reduzido do tipo finito sobre k.*

Definição 3.8. *Uma variedade X é dita completa se a projeção $\pi : X \times Y \to Y$ for uma aplicação fechada para toda variedade Y.*

Teorema 3.4. *Se X é uma variedade completa sobre um corpo k e $\mathcal{F}$ é um feixe coerente, então o k- espaço vetorial $\mathcal{F}(X)$ possui dimensão finita.*

Demonstração. Raciocinaremos por indução na dimensão de X. Se $\dim X = 0$, então X possui uma quantidade finita de pontos e $\mathcal{F}(X)$ será, por definição, um k- espaço vetorial de dimensão finita.

Suponha que o resultado vale para toda variedade completa de dimensão menor que a de X.

Afirmo que o teorema vale para todo feixe $\mathcal{F}$ coerente sobre X tal que $supp\mathcal{F} \subset Y$, onde $Y \subsetneqq X$ é uma subvariedade fechada de X (ou seja, basta que tenhamos $supp\mathcal{F} \neq X$, pois o suporte é um conjunto fechado).

De fato, por definição, o feixe $\overline{\mathcal{F}}$ em Y é tal que $\mathcal{F}(X) = \overline{\mathcal{F}}(Y)$. Note que $\overline{\mathcal{F}}$ não é necessariamente coerente. Mas, pela Proposição 3.4, existe uma cadeia

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset ... \supset \mathcal{F}_m = 0$$

tal que os quocientes $\overline{\mathcal{F}_i}/\overline{\mathcal{F}}_{i+1}$ são coerentes sobre Y. Das sequências

$$0 \to \overline{\mathcal{F}}_{i+1} \to \overline{\mathcal{F}}_i \to \overline{\mathcal{F}}_i/\overline{\mathcal{F}}_{i+1} \to 0$$

concluímos que $\dim \mathcal{F}(X) = \dim \overline{\mathcal{F}}(Y) < \infty$. Logo, vale a afirmação.

Agora reduziremos o problema ao caso irredutível. Seja $X = \bigcup X_i$ sua decomposição em compontentes irredutíveis. Pela Proposição 3.5, existe um homomorfismo $\psi : \mathcal{F} \to \oplus\mathcal{F}_i$. Logo, basta provar que $(\oplus\mathcal{F}_i)(X)$ tem dimensão finita, pois $suppKer\psi \subset \bigcup_{i \neq j} X_i \cap X_j$. Mas $(\oplus\mathcal{F}_i)(X) = \oplus\overline{\mathcal{F}_i}(X_i)$. Como cada feixe $\overline{\mathcal{F}}_i$ será coerente sobre X_i, então basta provarmos para o caso de X irredutível.

Seja $\mathcal{G}$, o feixe coerente que existe graças à Proposição 3.3. Como X é uma variedade completa, então $\mathcal{O}(X) = k$. Logo, $\dim \mathcal{O}^r(X) = r$. Mas o $supp(\mathcal{G}/\mathcal{O}^r) \neq X$, então $\dim(\mathcal{G}/\mathcal{O}^r) < \infty$. Segue que $\dim \mathcal{G}(X) < \infty$. Por outro lado, o homomorfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dado pela Proposição 3.3 é tal que $ker\varphi \neq X$, ou seja, $\dim \mathcal{G}(X) < \infty$ e $\dim Ker\varphi(X) < \infty$. Portanto $\dim \mathcal{F}(X) < \infty$ $\square$

4 COHOMOLOGIA DO ESPAÇO PROJETIVO

4.1 Feixes $\mathcal{O}(n)$

Definição 4.1. *Um feixe de módulos $\mathcal{F}$ é dito localmente livre de posto r se existe uma cobertura $\bigcup U_i = X$ tal que $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^r$. Se $r = 1$, então dizemos que $\mathcal{F}$ é um feixe invertível.*

Lema 4.1. *Sejam $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre de posto r e $\mathcal{E}'$ um subfeixe de posto r'. Então existe um subfeixe $\hat{\mathcal{E}}'$ localmente livre de posto r', contendo $\mathcal{E}'$, tal que $\mathcal{E}/\hat{\mathcal{E}}'$ é localmente livre.*

Definição 4.2. *Seja S um anel graduado. Defina $ProjS$ como o conjunto de todos os ideais primos homogêneos de S que nao contém $S_+ = \oplus_{d>0} S_d$. Se I é um ideal homogêneo, defina $V(I) = \{P \in ProjS \mid P \supset I\}$. Logo, podemos definir uma topologia em $ProjS$, pois $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ e $V(\sum I_i) = \cap V(I_i)$. Defina $S_{(P)} = T^{-1}S$, onde T é o conjunto multiplicativo dos elementos homogêneos que não estão contidos em P. De maneira análoga ao que foi feito para esquemas afins, podemos construir o feixe de anéis $\tilde{S}$, que nos dará o esquema $(ProjS, \tilde{S})$. O talo será isomorfo a $S_{(P)}$. Os abertos $D_+(f) = \{P \in ProjS \mid f \notin P\}$ (com f homogêneo) cobrem $ProjS$ e $(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \simeq SpecS_{(f)}$*

Definição 4.3. *Seja S um anel graduado. Defina o anel graduado $S(n)$ do seguinte modo: $S(n)_d = S_{n+d}$. Análogamente, podemos definir o módulo $M(n)$.*

Definição 4.4. *Seja S um anel graduado e $X = ProjS$. Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, defina $\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{S(n)}$. O feixe $\mathcal{O}_X(1)$ é chamado de feixe tautológico. Para qualquer feixe de $\mathcal{O}_X$- módulos $\mathcal{F}$, defina $\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n)$.*

Proposição 4.1. *Seja S um anel graduado tal que S é gerado por S_1 como uma S_0-álgebra. Se $X = ProjS$, então valem:*

1. *O feixe $\mathcal{O}_X(n)$ é invertível;*
2. *Para todo S- módulo graduado M, teremos $\tilde{M}(n) = \widetilde{M(n)}$. Em particular, $\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(m) \simeq \mathcal{O}_X(n+m)$;*
3. *Sejam T outro anel graduado gerado por T_1 como T_0- álgebra e $\varphi : S \to T$ um homomorfismo que preserva grau. Se $U \subset Y = ProjT$ e $f : U \to X$ é o morfismo induzido por φ. Então $f^*(\mathcal{O}_X(n)) \simeq \mathcal{O}_Y(n)|_U$ e $f_*(\mathcal{O}_Y(n)|_U) \simeq (f_*\mathcal{O}_U)(n)$.*

Definição 4.5. *Sejam S um anel graduado, $X = ProjS$ e $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$- módulo. Definimos o módulo graduado associado a $\mathcal{F}$ como $\Gamma_\star(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$.*

Proposição 4.2. *Sejam A anel, $S = A[x_1, ..., x_r]$, $r \geq 1$ e $X = ProjS$. Então $\Gamma_\star(\mathcal{O}_X) \simeq S$.*

Lema 4.2. *Sejam X um esquema, $\mathcal{L}$ um feixe invertível e $f \in \mathcal{L}(X)$. Considere o aberto $X(f) = \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x\}$ e seja $\mathcal{F}$ um feixe quase- coerente. Então:*

1. *Suponha que X é quase- compacto e que $s \in \mathcal{F}(X)$ é tal que $s|_{X(f)} = 0$. Então, para algum $n > 0$, $f^n s = 0$, onde consideramos $f^n s$ como uma seção global de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.*
2. *Suponha também que X possui uma cobertura finita de abertos afins U_i tal que $\mathcal{L}|_{U_i}$ é livre e $U_i \cap U_j$ é quase- compacto para todo i, j. Dada uma seção $t \in \mathcal{F}(X(f))$, temos que, para algum $n > 0$, a seção $f^n t \in \Gamma(X(f), \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ se estende a uma seção global de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.*

Demonstração. Seja $(U_i = SpecA)$ uma cobertura finita de abertos afins de X tal que $\mathcal{L}|_{U_i} \overset{\psi}{\simeq} \mathcal{O}_X$. Como $\mathcal{F}$ é quase- coerente, então $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M}$, para algum A- módulo M. Então podemos considerar $s \in M$ e $g = \psi f \in A$. É fácil ver que $X(f) \cap U_i = X_g$. Como $s|_{X(f)} = 0$, então $g^n s = 0$, para algum $n > 0$. Usando o isomorfismo

$$id \times \psi^{\otimes n} : \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{F},$$

concluimos que $f^n s \in \Gamma(U_i, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ é zero. Como essa afirmação independe de ψ, a menos de tomar um n grande o suficiente, podemos supor que $f^n s = 0$ em $\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$.

Para provar 2, usamos o mesmo raciocínio feito no Teorema 1.1 do capítulo 2. □

Definição 4.6. *Se X é um esquema sobre A, um feixe invertível $\mathcal{L}$ é dito muito amplo com respeito a A, se existe uma imersão $i : X \to \mathbb{P}^r_A$ para algum r, tal que $i^*(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathcal{L}$. Dizemos que $j : X \to Z$ é uma imersão se der um isomorfismo de X com um subesquema aberto de um subesquema fechado de Z.*

Definição 4.7. *Dizemos que um feixe de $\mathcal{O}_X$- módulos $\mathcal{F}$ é gerado por seções globais se existe uma família de seções globais $\{s_i\}_{i\in I}$, $s_i \in \mathcal{F}(X)$ tal que, para cada $x \in X$, temos que $\mathcal{F}_x = \langle\{\frac{s_i}{1}\}\rangle$*

Teorema 4.1. *Sejam X um esquema projetivo sobre um anel Noetheriano A, $\mathcal{O}(1)$ um feixe invertível muito amplo e $\mathcal{F}$ um feixe coerente. Então existe um inteiro n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $\mathcal{F}(n)$ pode ser gerado por uma quantidade finita de seções globais.*

Demonstração. Seja $i : X \to \mathbb{P}^r_A$ uma imersão de X sobre um espaço projetivo sobre A tal que $i^*(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathcal{O}_X(1)$. Pelo Lema 2.5 do capítulo 2, $i_*\mathcal{F}$ é coerente. Também temos, pela Proposição 1.2, do capítulo 3, que $i_*(\mathcal{F}(n)) = (i_*\mathcal{F})(n)$ e que $\mathcal{F}(n)$ é gerado por seções globais se, e somente se, $i_*\mathcal{F}(n)$ também for. Assim, reduzimos ao caso em que $X = \mathbb{P}^r_A = ProjA[x_1, ..., x_r]$. Agora, cubra X coom os abertos $D_+(x_i)$, $i = 1, ..., r$. Como $\mathcal{F}$ é coerente, para cada i, existem módulos finitamente gerados M_i sobre $B_i = A[x_1/x_i, ..., x_r/x_i]$ tais que $\mathcal{F}|_{D_+(x_i)} = \widetilde{M_i}$. Para cada i, tome um conjunto finito de geradores $s_{ij} \in M_i$. Pelo Lema 1.4, existe $n > 0$ tal que $x_i^n s_{ij}$ se estende a uma seção global t_{ij} de $\mathcal{F}(n)$. Assim, podemos tomar n independente de i, j. Portanto, as seções

$t_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ geram o feixe $\mathcal{F}(n)$. □

Corolário 4.1. *Seja X projetivo sobre o anel Noetheriano A. Então qualquer feixe coerente $\mathcal{F}$ pode ser escrito como quociente de um feixe do tipo $\mathcal{O}(n_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(n_s)$.*

Demonstração. Como existe $n \in \mathbb{Z}_+$; $\mathcal{F}(n)$ é gerado por uma quantidade finita de seções globais, temos uma sobrejeção $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}(n)$. Tensorizando com $\mathcal{O}_X(-n)$, obtemos uma sobrejeção $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X(-n) \to \mathcal{F}$. □

4.2 Cohomologia de Feixes

Definição 4.8. *Um A- módulo M é dito injetivo se o functor $Hom(-, M)$ for exato. Uma resolução injetiva de M é um complexo I^*, junto com um mapa $\varepsilon : M \to I^0$ tais que a sequeência $0 \to M \to I^0 \to ...$ é exata.*

Proposição 4.3. *A categoria dos A- módulos possui injetivos suficientes, i.e., todo A-módulo é isomorfo à um submódulo de um A- módulo injetivo. Em particular, todo A-módulo possui uma resolução injetiva.*

Proposição 4.4. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado. Então a categoria dos $\mathcal{O}_X$- módulos possui injetivos suficientes.*

Definição 4.9. *Dado um $\mathcal{O}_X$- módulo $\mathcal{F}$, escolha uma resolução injetiva $\mathcal{I}^*$ para $\mathcal{F}$. Agora considere o complexo que teremos ao aplicarmos o funtor $\Gamma(X, -)$ à resolução injetiva escolhida. Defina $H^i(X, \mathcal{F}) := h^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^*))$*

Proposição 4.5. *Dada uma sequencia exata $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$, existe um mapa $\delta^i : H^i(X, \mathcal{H}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{F})$, $\forall i \geq 0$ tal que obtemos a sequência exata longa*

$$... \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{G}) \to H^i(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \to ...$$

Definição 4.10. *O feixe $\mathcal{F}$ é dito flasque se para toda inclusão $V \subset U$, o mapa de restrição $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ é sobrejetivo.*

Proposição 4.6. *Se $\mathcal{F}$ é um feixe flasque, então $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$, $\forall i > 0$.*

Proposição 4.7. *Seja X um espaço topológico Noetheriano e $(\mathcal{F}_\alpha)$ um sistema direto de feixes abelianos. Então, para todo $i \geq 0$, existe um isomorfismo natural $\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \to H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$.*

Corolário 4.2. *O funtor $H^i(X, -)$ preserva soma direta $\forall i \geq 0$.*

Lema 4.3. *Sejam $Y \subset X$ um fechado e $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos em Y. Então $H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F})$, onde $j : Y \to X$ é a inclusão e $j_*\mathcal{F}$ é a extensão de $\mathcal{F}$ por zero.*

Teorema 4.2. *Seja X um espaço topologico de dimensão r. Então para todo feixe de grupos abelianos $\mathcal{F}$ e todo $i > n$, temos $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Proposição 4.8. *Sejam A um anel Noetheriano, M um A- módulo injetivo e $X = SpecA$. Então o feixe $\widetilde{M}$ é flasque.*

Proposição 4.9. *Sejam A um anel Noetheriano e $X = SpecA$. Então, para todo feixe quase coerente $\mathcal{F}$, teremos $H^i(X, \mathcal{F}) = 0, \ \forall i > 0$.*

Demonstração. Dado $\mathcal{F}$, seja $M = \mathcal{F}(X)$. Agora, seja $0 \to M \to I^*$ uma resolução injetiva de M. Daí, temos uma sequencia exata de feixes
$0 \to \widetilde{M} \to \tilde{I}^*$. Mas $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ e, pela Proposição anterior, cada $\tilde{I}^*$ é flasque.
Ao aplicarmos o funtor das seções globais, retornaremos para a sequência exata inicial. Portanto, $H^0(X, \mathcal{F}) = M$ e $H^i(X, \mathcal{F}) = 0, \ \forall i > 0$. □

4.3 Cohomologia de Čech

Definição 4.11. *Sejam X um espaço topológico e $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ uma cobertura de abertos de X e $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos em X. Defina o complexo $C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ de grupos abelianos do seguinte modo: para cada $p \geq 0$, faça*

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \ldots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_p}).$$

Onde $U_{i_0, \ldots, i_p} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$. Logo, um elemento $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ é determinado por elementos $\alpha_{i_0, \ldots, i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_p})$, para cada $(i+1)$- upla $i_0 < \ldots < i_p$ de elementos de I. Definimos o mapa de cobordo $d : C^p \to C^{p+1}$ fazendo

$$d\alpha_{i_0, \ldots, i_p} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \ldots \hat{i}_k, \ldots, i_{p+1}}|_{U_{i_0, \ldots, i_{p+1}}}.$$

Aqui, $\hat{i}_k$ significa que omitimos i_k. Como $\alpha_{i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{p+1}}$ é um elemento de $\mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots i_p})$, restringimos a $U_{i_0, \ldots, i_p}$. É fácil ver que $d^2 = 0$.

Definição 4.12. *Sejam X um espaço topológico e $\mathfrak{U}$ uma cobertura de X por abertos. Para qualquer feixe de grupos abelianos $\mathcal{F}$ sobre X, definimos o p- ésimo grupo de cohomologia de Čech de $\mathcal{F}$, com respeito á cobertura $\mathfrak{U}$, como sendo*

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = h^p(C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F})).$$

Lema 4.4. *$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(X)$.*

Demonstração. Temos que $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = ker(d : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$. Se $\alpha \in C^0$ é dado por $\alpha_i \in \mathcal{F}(U_i)$, então para cara $i < j$, $d\alpha_{i,j} = \alpha_j - \alpha_i$. Logo, $d\alpha = 0$ nos dá que $\alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j}$. Assim, basta definir a aplicação $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to Kerd, \ \ \gamma \mapsto (\gamma|_{U_i})_{i \in I}$. A boa definição, assim como a sobrejetividade, seguem dos axiomas de feixe. □

Teorema 4.3. *Sejam X um esquema Noetheriano separável, $\mathfrak{U}$ uma cobertura afim de X e $\mathcal{F}$ um feixe quase- coerente. Então, para todo $p \geq 0$, $\check{H}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq H^p(X, \mathcal{F})$.*

4.4 Cohomologia do Espaço Projetivo

Teorema 4.4. *Sejam A um anel Noetheriano, $S = A[x_1, ..., x_r]$ e $X = ProjS = \mathbb{P}^r_A$, onde $r \geq 1$. Então:*

1. *o mapa natural $S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ é um isomorfismo de S- módulos graduados;*
2. *$H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0,$ para $0 < i < r,$ e todo $n \in \mathbb{Z}$;*
3. *$H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \simeq A$;*
4. *o mapa natural*

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \longrightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \simeq A$$

é uma correspondência perfeita de A- módulos livres finitamente gerados.

Demonstração. Considere o feixe quase-coerente $\mathcal{F} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$. Como cohomologia comuta com soma direta, entao a cohomologia de $\mathcal{F}$ será a soma direta das cohomologias dos feixes $\mathcal{O}(n)$.

Para cada $i = 0, ..., r$, seja $U_i = D_+(x_i)$. Assim, iremos calcular a cohomologia de *Čech* de $\mathcal{F}$ com respeito à cobertura $\mathfrak{U} = (U_i)$. Para qualquer conjunto de índices $i_0, ..., i_p$, faça $U_{i_0,...,i_p} = D_+(x_{i_0}...x_{i_p})$. Logo, $\mathcal{F}(U_{i_0,...,i_p}) \simeq S_{i_0,...,i_p}$, localização de S no elemento $x_{i_0}...x_{i_p}$. Além disso, a graduação do feixe $\mathcal{F}$ corresponde à graduação de S sobre o isomorfismo. Então, o complexo de *Čech* de $\mathcal{F}$ é dado por:

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) : \prod S_{x_{i_0}} \to \prod S_{x_{i_0}, x_{i_1}} \to ... \to S_{x_{i_0}...x_{i_r}},$$

Como $H^0(X, \mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$, então pelo Lema 3.1, vale 1.

Agora considere $H^r(X, \mathcal{F}) = Cokerd^{r-1}$, onde

$$d^{r-1} : \prod_k S_{x_{i_0}...\hat{x_{i_k}}...x_{i_r}} \to S_{x_{i_0}...x_{i_r}}$$

Pensaremos em $S_{x_{i_0}...x_{i_r}}$ como um A- módulo livre, cuja base é $x_{i_0}^{l_0}...x_{i_r}^{l_r}$, $l_i \in \mathbb{Z}$. A imagem de d^{r-1} será o submódulo livre gerado pelos elementos dessa base em que existe $i \in \{0, ..., r\}$; $l_i \geq 0$. Então, $H^r(X, \mathcal{F})$ será um módulo livre com base $\{x_{i_0}^{l_0}...x_{i_r}^{l_r} \mid l_i < 0, \ \forall i\}$. Além disso, os graus são determinados por $\sum l_i$. Como $x_{i_0}^{-1}...x_{i_p}^{-1}$ é o único monômio de grau $-r-1$, então $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-n))$ é um A- módulo livre de posto 1, o que prova 3.

Para provar 4, primeiro note que se $n < 0$, então (1) implica $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$, e $H^0(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) = 0$, pois $-n-r-1 > -r-1$ e não há monômios em $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \subset H^r(X, \mathcal{F}) = \langle\{x_{i_0}^{l_0}...x_{i_r}^{l_r} \mid l_i < 0, \ \forall i\}\rangle$ com esse grau. Logo, para $n < 0$, vale 4. Suponha $n \geq 0$. Assim, $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = \langle\{x_{i_0}^{m_0}...x_{i_r}^{m_r} \mid m_i \geq 0$ e $\sum m_i =$

$n\}\rangle$. A correspondência natural é dada por

$$(x_{i_0}^{m_0}...x_{i_r}^{m_r})(x_{i_0}^{l_0}...x_{i_r}^{l_r}) = x_{i_0}^{m_0+l_0}...x_{i_r}^{m_0+l_r},$$

onde $\sum l_i = -n - r - 1$ e o lado direto zera se algum $m_i + l_i \geq 0$.

Finalmente, para provar 2, raciocinaremos por indução em r. Se $r = 1$, não há o que fazer.Seja $r > 1$. Se localizarmos o complexo $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ no elemento x_r, teremos um complexo de *Čech* do feixe $\mathcal{F}|_{U_{x_r}}$, com respeito à cobertura $\{U_i \cap U_r \mid i = 1, ..., r\}$. Como as cohomologias são isomorfas, temos, pelo Teorema 3.3, que $H^i(X, \mathcal{F}|_{U_{x_r}}) = 0, \ \forall i > 0$. Assim, $H^i(X, \mathcal{F})_{x_r} = 0, \ \forall i > 0$. Em outras palavras, os elementos de $H^i(X, \mathcal{F}), \ \forall i > 0$, são aniquilados por alguma potência de x_r.

Agora mostraremos que para $0 < i < r$, a multiplicação por x_r induz uma bijeção de $H^i(X, \mathcal{F})$ em si mesmo. E portanto, $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$. Com efeito, considere a sequência exata de S- módulos graudados:

$$0 \to S(-1) \xrightarrow{x_r} S \to S/(x_r)$$

que nos dá a sequência exata de feixes

$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_H$$

onde H é o hiperplano $x_r = 0$. Como a soma direta é um funtor exato, teremos a sequência exata

$$0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_H$$

onde $\mathcal{F}_H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n)$. Daí teremos uma sequência exata longa

$$... \to H^i(X, \mathcal{F}(-\infty)) \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F}_H) \to ...$$

Mas $H^i(X, \mathcal{F}(-1)) = H^i(X, \mathcal{F})(-1)$ e $H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \to H^i(X, \mathcal{F})$ é a multiplicação por x_r.

Como H é isomorfo a $\mathbb{P}_A^{r-1}$ e, pelo Lema 2.6, $H^i(X, \mathcal{F}_H) = H^i(H, \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n))$, podemos aplicar a hipótese de indução em $\mathcal{F}_H$, ou seja, $H^i(X, \mathcal{F}_H) = 0$, para $0 < i < r-1$. Além disso, se $i = 0$, temos a sequência exata

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}(-1)) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F}_H),$$

pois $H^0(X, \mathcal{F}_H) = S/(x_r)$. Por outro lado, afirmo que a sequência abaixo exata

$$0 \to H^{r-1}(X, \mathcal{F}_H) \xrightarrow{\delta} H^r(X, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{x_r} H^r(X, \mathcal{F}) \to 0$$

De fato, como $H^r(X, \mathcal{F}) = \langle \{x_{i_0}^{l_0}...x_{i_r}^{l_r} \mid l_i < 0, \ \forall i\}$, é claro que x_r é sobrejetiva. Também temos que $Ker(x_r) = \langle\{x_{i_0}^{l_0}...x_{i_r}^{l_r} \mid l_i < 0,\ l_r = 1$ e $l_i < 0,\ i = 0, ..., r-1\}$. Mas $H^{r-1}(X, \mathcal{F}_H) = \langle\{x_{i_0}^{l_0}...x_{i_{r-1}}^{l_{r-1}} \mid l_i < 0,\ \forall i\}$ e δ é a divisão por x_r. Então a sequência é exata. Em particular, δ é injetiva. Como $H^i(X, \mathcal{F}_H) = 0,$ para $0 < i < r-1$, então x_r será bijeção para $0 < i < r$. Portanto, vale 2.

□

Teorema 4.5. *Sejam X um esquema projetivo sobre um anel Noetheriano A, e $\mathcal{O}_X(1)$ um feixe invertível muito amplo em X sobre $SpecA$. Se $\mathcal{F}$ é um feixe coerente sobre X, então:*

1. *para cada $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ é um A- módulo finitamente gerado;*
2. *existe um inteiro n_0, que depende de $\mathcal{F}$, tal que para cada $i > 0$ e cada $n \geq n_0$, $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$.*

Demonstração. Como $\mathcal{O}_X(1)$ é um feixe sobre X muito amplo com respeito a $SpecA$, então existe uma imersão $i : X \to \mathbb{P}_A^r$ de esquemas sobre A, para algum r, tal que $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$. Se $\mathcal{F}$ é coerente sobre X, então, pelo Lema 2.5 do capítulo 2, $i_*\mathcal{F}$ é coerente sobre $\mathbb{P}_A^r$ e a cohomologia será a mesma. Portanto, reduzimos ao caso em que $X = \mathbb{P}_A^r$.

Suponha $X = \mathbb{P}_A^r$. Note que 1 e 2 valem para qualquer feixe do tipo $\mathcal{O}_X(q)$. De fato, para $0 < i < r$, Teorema 4.1-2 nos dá que o módulo será nulo. Se $i > r$, a nulidade é garantida pelo Teorema 2.4. Se $i = 0$, então o Teorema 4.1-1 garante o resultado. É claro que o mesmo vale para somas diretas finitas de feixes desse tipo.

Para provar o teorema para feixes coerentes quaisquer, raciocinaremos por indução descendente em i. Pelo Corolário 1.6, temos que $\mathcal{F}$ é o quociente de um feixe do tipo $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X(q_i)$. Logo, temos uma sequência exata

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to 0$$

Portanto, $\mathcal{R}$ é um feixe coerente. Daí, temos uma sequência exata de A- módulos

$$... \to H^i(X, \mathcal{E}) \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{R}) \to ...$$

$H^{i+1}(X, \mathcal{R}))$ é finitamente gerado por hipótese de indução e $H^i(X, \mathcal{E}))$ é finitamente gerado pelo comentário feito acima. Como A é Noetheriano, então $H^i(X, \mathcal{F}))$ também será finitamente gerado. Portanto vale 1.

Para provar 2, usamos a sequência exata inicial para obter a sequência exata

$$... \to H^i(X, \mathcal{E}(n)) \to H^i(X, \mathcal{F}(n)) \to H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) \to ...$$

Agora, para $n \gg 0$ o módulo da esquerda será nulo, pois $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X(q_i)$. O módulo da direita também se anulará, por hipótese de indução. Basta repitirmos o processo para cada $0 < i \leq r$. Logo, o resultado segue.

$\square$

5 TEOREMA DE GROTHENDIECK

5.1 Fibrados

Definição 5.1. *Seja X uma variedade. Um fibrado vetorial de posto n sobre X é uma variedade E e um morfismo $f : E \to X$ tal que existem uma cobertura $\bigcup U_i = E$ e isomorfismos $\psi_i : f^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{A}^n$, onde para quaisquer i e j, temos $\psi = \psi_j \circ \psi_i^{-1} = (Id, \phi_{ij})$, onde $\phi_{ij} \in GL(n)$*

Definição 5.2. *Uma seção de um fibrado $\pi : E \to X$ sobre um aberto $U \subset X$ é um mapa $s : U \to E$, tal que $\pi \circ s = Id_U$. Se $U = X$, então a seção é dita global.*

Teorema 5.1. *Existe uma correspondência biunívoca entre Fibrados Vetoriais e Feixes Localmente Livres de posto finito.*

Demonstração. Dado um fibrado $\pi : E \to X$, defina o feixe $\mathcal{E}$ do seguinte modo: $\mathcal{E}(U)$ será o conjunto das seções de E sobre U. Logo, $\mathcal{E}$ possui um estrutura natural de $\mathcal{O}$-módulo. Além disso, se $V \subset U$, podemos definir o mapa $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(V)$ levando um seção em sua restrição. É fácil ver que $\mathcal{E}$ será um feixe.

Mostraremos agora que o feixe $\mathcal{E}$ é localmente livre. Seja $\{U_i\}$ a cobertura de X tal que $\phi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{A}^r$. Considere as seções canônicas

$$x_i : U_i \to U_i \times \mathbb{A}^r,\ p \mapsto (p, (0, ..., 1, ..., 0))$$

onde 1 está na i- ésima entrada. Então, cada seção s pode ser escrita como $s = f_1x_1 + ... + f_rx_r$, onde $f_i \in \mathcal{O}(U_i)^r$. Portanto,

$$\mathcal{E}(U_i) \to \mathcal{O}(U_i)^r,\ s \mapsto (f_1, ..., f_r)$$

nos dá um isomorfismo.

Reciprocamente, dado um feixe localmente livre $\mathcal{E}$, podemos definir um fibrado vetorial da seguinte maneira

$$E = \{(p, t) |\ p \in X,\ t \in \mathcal{E}_p/\mathcal{M}_p\mathcal{E}_p\}$$

Onde $\mathcal{M}_p$ é o anel maximal do anel local $\mathcal{O}_p$. O mapa $\pi : E \to X$ é a projeção na primeira coordenada.

Seja $\{U_i\}$ a cobertura que satisfaz $\mathcal{E}(U_i) \simeq \mathcal{O}(U_i)^r$. Como estamos sobre um corpo algebricamente fechado K, $\mathcal{O}_p/\mathcal{M}_p \simeq K$. Logo, $\mathcal{E}_p/\mathcal{M}_p\mathcal{E}_p \simeq \mathbb{A}^r$.

Seja $U_{ij} := U_i \cap U_j$. As transições em $\mathcal{E}(U_{ij})$ nos dão matrizes $A_{ij} : \mathcal{O}(U_{ij})^r \to \mathcal{O}(U_{ij})^r$. Então, nessa interseção temos $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = (Id, \phi_{ij})$, onde $(\phi_{ij})_p \in A_{ij}$ módulo $\mathcal{M}_p$. Como as A_{ij} são isomorfismos, então $(\phi_{ij})_p \in GL(r)$

Dado um mapa de feixes localmente livres, teremos, ao reduzirmos a módulo p em cada fibra, um mapa de fibrados. Reciprocamente, dado um mapa entre fibrados $E \to E'$ e uma seção $s : X \to E$, a composição $X \to E'$ também será uma seção. Portanto, os feixes localmente livres $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$, ao restringirmos a abertos, obtemos um morfismo $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}'(U)$ compatível com as restrições. $\square$

Definição 5.3. *Sejam X um esquema projetivo sobre um corpo k e $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X. Defina a característica de Euler de $\mathcal{F}$ como*

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim_k H^q(X, \mathcal{F}).$$

Definição 5.4. *O grau de um fibrado vetorial E de posto r é definido como grau de seu feixe localmente livre associado. O grau de um feixe localmente livre $\mathcal{E}$ é definido como $deg(\mathcal{E}) = \mathcal{X}(\mathcal{E}) - r\mathcal{X}(\mathcal{O})$.*

5.2 Extensões

Definição 5.5. *Uma extensão de um módulo M'' por um módulo M' é uma sequência exata*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Duas sequências desse tipo são ditas equivalentes se existe um isomorfismo $\varphi : M \to N$ tal que os diagramas a seguir comutam

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Denotamos por $e(M'', M')$ o conjunto das extensões de M'' por M' módulo essa equivalência.

Podemos definir o funtor covariante $e^{M'''} := e(M'', -))$: dado um mapa $\psi : M_1' \to M_2'$, defina $e^{M''}$ do seguinte modo. Dada uma extensão $0 \to M_1' \xrightarrow{i} M_1 \to M'' \to 0$, defina uma extensão de M'' por M_2' fazendo $M_2 = M_1 \times M_2 / \{(\psi(m_1'), i(m_1')) \mid m_1' \in M_1')\}$. Assim

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1' & \xrightarrow{i} & M_1 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_2' & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De modo similar, definimos um funtor contravariante $e(-, M')$: dado um mapa $\gamma : M_1'' \to M_2''$, defina $e_{M'} : e(M_2'', M') \to e(M_1'', M')$ do seguinte modo. Dada uma extensão $0 \to M' \to M_2 \xrightarrow{\pi} M_2'' \to 0$, defina a extensão de M_1'' por M' fazendo $M_1 = \{(m_2, m_1'') \in M_2 \times M_1'' \mid \gamma(m_1'') = \pi(m_2)\ \}$. Assim,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_1'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\pi} & M_2'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Definição 5.6. *Sejam P_* uma resolução projetiva de M e $d_n' : Hom(P_{n-1}, N) \to Hom(P_n, N)$. Defina o módulo $Ext^n(M, N) = Kerd_n'/Imd_{n+1}'$. Alternativamente, sejam I_* uma resolução injetiva de N e $d_n'' : Hom(M, I_n) \to Hom(M, I_{n+1})$, podemos definir $Ext^n(M, N) = Kerd_{n-1}''/Imd_n''$. Essas definições não dependem das resoluções escolhidas. Temos também que, dada uma sequência exata de módulos*

$$0 \to T' \to T \to T'' \to 0$$

obtemos duas sequências exatas longas

$0 \to Hom(M, T') \to Hom(M, T) \to Hom(M, T'') \to Ext^1(M, T') \to Ext^1(M, T) \to Ext^1(M, T'') \to Ext^2(M, T') \to ...$

e

$0 \to Hom(T'', N) \to Hom(T, N) \to Hom(T', N) \to Ext^1(T'', N) \to Ext^1(T, N) \to Ext^1(T, N) \to Ext^2(T'', N) \to ...$

Teorema 5.2. *Os elementos de $Ext^1(M'', M')$ correspondem biunívocamente aos elementos de $e(M'', M')$ módulo a relação de equivalência definida.*

Demonstração. Considere uma extensão de M'' por M' $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ e seja I_*' uma resolução injetiva de M'. Assim, usando a definição de módulos injetivos, podemos construir o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow Id & & \downarrow & & \downarrow\varphi & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & I_0' & \longrightarrow & I_1' & \longrightarrow & I_2' \end{array}$$

Então, φ determina um elemento de $Ext^1(M'', M')$.

Reciprocamente, dado um elemento de $Ext^1(M'', M')$, temos um mapa correspondente $M'' \to I_1'$ tal que a composição $M'' \to I_1' \to I_2'$ é nula. Logo, podemos construir o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & I'_0 & \xrightarrow{d_0} & I'_1 & \longrightarrow & I'_2
\end{array}$$

para $M = \{(i_0, m'') \in I'_0 \times M'' \mid d_0(i_0) = \varphi(m'')\}$. Então, a primeira linha é exata. □

Lema 5.1. *O elemento* $0 \in Ext^1(M'', M')$ *corresponde à extensão soma direta* $0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0$.

Demonstração. O elemento 0 corresponde ao mapa nulo $M' \to I_1$, onde I_* é uma resolução injetiva de M''. Para construir a extensão correspondente, devemos tomar $M = \{(i_0, m'') \mid d_0(i_0) = 0\} = \{(i_0, m'') \mid i_0 \in M'\} = M' \oplus M''$ □

Definição 5.7. *Dados dois feixes de* $\mathcal{O}$*- módulos* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$*, podemos definir os funtores* $Ext^i(-, \mathcal{G})$ *e* $Ext^i(\mathcal{F}, -)$*. Basta tomarmos a resolução injetiva de* $\mathcal{G}$*.*

Proposição 5.1. *Se* E'' *é localmente livre, então*

$$Ext^1(E'', E') \simeq H^1((E'')^* \otimes E').$$

Demonstração. Para quaisquer feixes E' e E'', podemos definir o mapa natural $(E'')^* \otimes E' = Hom(E'', \mathcal{O}) \otimes E' \to Hom(E'', E')$. Como E'' é um feixe localmente livre, então temos um isomorfismo. Então, o funtor derivado das funções globais $H^0((E'')^* \otimes -)$ coincide com o funtor derivado $Hom(E'', -)$. □

5.3 Divisores

Definição 5.8. *Um divisor primo de* Y *é um subesquema inteiro fechado de codimensão 1. Um divisor de Weil é um elemento do grupo livre* $DivX$ *gerado pelos divisores primos. Se* $D = \sum n_i Y_i$ *e* $n_i \geq 0$, $\forall i$*, dizemos que* D *é um divisor efetivo. Sejam* f *uma função racional não nula e* v_Y *a função de valoração. Defina* $(f) = \sum v_{Y_i}(f) Y_i$*. Dizemos que um divisor é principal se* $D = (f)$*. Dizemos que dois divisores* D *e* D' *são linearmente equivalentes se* $D - D' = (f)$*, para alguma função racional* f*. Denotaremos por* ClX *o quociente de* $DivX$ *por essa equivalência.*

Proposição 5.2. *Seja* $X = \mathbb{P}^n_k$*, para algum corpo* k*. Seja* H *o hiperplano definido por* $x_0 = 0$*. Então valem:*

1. *se* D *é qualquer divisor de grau* d*, então* $D \sim dH$*;*
2. *para qualquer* $f \in K^\star, deg(f) = 0$*;*
3. *a função grau nos dá um isomorfismo* $deg : ClX \to \mathbb{Z}$*.*

Demonstração. Seja $k[x_0, ..., x_n]$ o anel de coordenadas homogêneas de X. Se g é um elemento homogêneo de grau d, então podemos fatora-lo em polinômios irredutíveis $g = g_1^{n_1}...g_r^{n_r}$. Então g_i determina uma hipersuperfície Y_i de grau $d_i = \deg g_i$, e podemos definir o divisor de g como $(g) = \sum n_i Y_i$. Então, $\deg(g) = d$. Como uma função racionaç f é quociente g/h de polinômios homogêneos de mesmo grau, temos que $(f) = (g) - (h)$. Portanto, $\deg(f) = 0$.

Se D é um divisor qualquer de grau d, então $D = D_1 - D_2$, onde D_i é um divisor efetivo de grau d_i e $d_1 - d_2 = d$. Mas, $D_1 = (g_1)$ e $D_2 = (g_2)$, pois os primos de altura 1 em S são principais. Assim, basta tomarmos $f = \frac{g_1}{x_0^d g_2}$, que teremos $D - dH = (f)$.

O item 3 segue dos itens 1 e 2. □

Definição 5.9. *Seja $S(U) = \{s \in \mathcal{O}_X \mid s/1 \in (\mathcal{O}_X)_x$ não é divisor de zero $\forall\ x \in X\}$. Os anéis $S(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$ formam um pré-feixe. Denotaremos por $\mathcal{K}$ a feixificação desse pré-feixe.*

Seja $\mathcal{H}$ um feixe de anéis. Denotamos por $\mathcal{H}^\star$ o feixe de elementos invertíveis dos aneis de $\mathcal{H}$.

Definição 5.10. *Um divisor de Cartier é uma seção global do feixe $\mathcal{K}^\star/\mathcal{O}^\star$. Assim, um divisor de Cartier pode ser caracterizado por pares (U_i, f_i), onde U_i é um aberto e $f_i \in \mathcal{K}^\star(U_i)$ e $f_i/f_j \in \mathcal{O}^\star(U_i \cap U_j)$. Um divisor de Cartier é principal se estiver na imagem de $\Gamma(X, \mathcal{K}^\star) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^\star/\mathcal{O}^\star)$. Um divisor de Cartier é dito efetivo, se tivermos todos $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$*

Proposição 5.3. *Seja X é um esquema Noetheriano, inteiro e separável em que todos os anéis locais são DFU. Então DivX é isomorfo ao grupo dos divisores de Cartier. Além disso, há uma correspondência entre divisores principais.*

Definição 5.11. *Seja X um espaço anelado. Definimos PicX como o grupo de feixes invertíveis módulo isomorfismo, onde a operação é $\otimes$.*

Proposição 5.4. *Se X é um esquema inteiro, separável e localmente fatorial, então ClX $\simeq$ PicX.*

Demonstração. A aplicação que dá esse isomorfismo é definida do seguinte modo. Dado um divisor de Cartier $D = \{(U_i, f_i)\}$, defina $\mathcal{L}(D)$ como o submódulo de $\mathcal{K}$ gerado por f_i^{-1} em U_i. Essa aplicação induz um homomorfismo entre os grupos CaCL$X \to$ Pic$X$. □

Corolário 5.1. *Se $X = \mathbb{P}_k^n$, para algum corpo k. Então todo feixe invertível em X é isomorfo a $\mathcal{O}(l)$, para algum $l \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Pelas proposições anteriores, temos que Pic$X \simeq \mathbb{Z}$. Além disso, ClX é gerado pelo hiperplano que corresponde ao feixe invertível $\mathcal{O}_X(1)$. Portanto Pic$X$ é um grupo livre gerado por $\mathcal{O}_X(1)$, e qualquer feixe invertível $\mathcal{L}$ será isomorfo à $\mathcal{O}_X(l)$, para algum $l \in \mathbb{Z}$. □

Teorema 5.3. *Existe uma correspondência entre divisores de Cartier e feixes invertíveis.*

Demonstração. A cobertura (U_i), que satisfaz a condição de liberdade, será a mesma que representa o divisor de Cartier $\{(U_i, f_i)\}$.

$\square$

Definição 5.12. *Sejam C uma curva e $D = \sum n_P P$ um divisor efetivo. Defina um feixe no suporte de D pondo $\mathcal{F}_P = k^{n_P}$. Defina o feixe skyscraper C_D por extensão de $\mathcal{F}$ nos zeros fora de D, ou seja, se $T = \{P\}_{P \in suppD}$ e $i : T \to X$ é uma inclusão, definiremos $C_D = i_*(\mathcal{F})$.*

Lema 5.2. *Um fibrado em retas L corresponde a um divisor efetivo D, se e somente se, L possui uma seção. Nesse caso, existe uma sequência exata*

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{L} \to C_D \to 0,$$

e denotamos $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$.

Demonstração. Suponha que L corresponde a um divisor efetivo D. Tome a representação $\{(U_i, f_i)\}$ de L como um divisor de Cartier tal que f_i possui zeros em $U_i \cap D$, mas não possui polos em U_i. Logo, $\mathcal{L}(U_i) \simeq \mathcal{O}(U_i)$, onde $\mathcal{L}$ é o feixe invertível associado a L. Defina o mapa $\mathcal{O}(U_i) \to \mathcal{L}(U_i)$, pondo $1 \mapsto f_i \in \mathcal{O}(U_i) \simeq \mathcal{L}(U_i)$. Como f_i/f_j é invertível em $\mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, teremos um mapa global $\mathcal{O} \to \mathcal{L}$. Logo, L possui uma seção.

O mapa é injetivo, pois, por definição, f_i não é divisor de zero em $\mathcal{O}(U_i)$. Se $U_i \cap \mathrm{supp}D = \emptyset$, então f_i será invertível, e teremos um isomorfismo. Por construção, o Cokernel em um ponto P em D tem dimensão n_P. Portanto, $\mathcal{L}/\mathcal{O} = C_D$.

Reciprocamente, suponha que L possui uma seção e seja (U_i) a cobertura trivializante do fibrado. Localmente, a seção nos dá

$$\mathcal{O}(U_i) \to \mathcal{L}(U_i),\ 1 \mapsto f_i \in \mathcal{O}(U_i) \simeq \mathcal{L}(U_i),$$

onde f_i é uma função regular em U_i. Logo, essas são as representações locais da seção, e portanto, as funções de transição serão f_j/f_i. Segue que L corresponde a um divisor efetivo. $\square$

Lema 5.3. *Dado $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre de posto r, existe uma sequência exata*

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0,$$

onde $\mathcal{L}$ é um feixe invertível e $\mathcal{E}'$ é um feixe localmente livre de posto $r-1$.

Demonstração. Primeiro, mostraremos que se $\mathcal{O}(D)$ é um fibrado de grau positivo, então $\mathcal{E}(D) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(D)$ possui uma seção. Se $\mathcal{E}$ possui uma seção, é trivial. Caso contrário, escolha um divisor efetivo D tal que $r\deg D > \dim(H^1(\mathcal{E}))$. Ao tensorizarmos a sequência exata do lema anterior e tomarmos as cohomologias, teremos

$$0 \to H^0(\mathcal{E}) \to H^0(\mathcal{E}(\mathcal{D})) \to H^0(\mathcal{E}_D) \to H^1(\mathcal{E})$$

onde $\mathcal{E}_D = \mathcal{E} \otimes C_D$. Como $\mathcal{E}_D$ é um feixe skyscraper com suporte em D com fibras de dimensão r, temos que seu espaço de seções tem dimensão $r\deg D$. Assim, o último mapa da sequência não pode ser injetivo. Logo, a afirmação vale.

Obtemos assim, um mapa não nulo $\mathcal{O} \to \mathcal{E}(D)$, que nos dá um mapa não nulo $\mathcal{O}(-D) \to \mathcal{E}$ cuja imagem é um feixe localmente livre de posto 1. Se o Cokernel não for localmente livre, usando o lema 3.1, podemos obter um subfeixe de $\mathcal{E}$ localmente livre, contendo a imagem e com o Cokernel localmente livre. □

5.4 Teorema de Grothendieck

Teorema 5.4. *Teorema de Grothendieck: Todo fibrado em $\mathbb{P}^1$ é da forma $\mathcal{O}(a_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_r)$, $a_1 \geq ... \geq a_r$. E a decomposição é única.*

Demonstração. Raciocinaremos por indução em r. O caso $r = 1$ já foi feito na seção de Divisores. Assuma o resultado para todo fibrado de posto menor que r e seja E um fibrado de posto r. O lema acima nos dá fibrados E' e E'', de postos 1 e $r-1$, tais que

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$$

é exata. Escolha E' para ser o subfibrado de E de grau máximo. Da hipótese de indução, temos

$$0 \to \mathcal{O}(a_1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}(a_2) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_r) \to 0.$$

Como E corresponde a um elemento em $Ext^1(E'', E') = H^1((E'')^* \otimes E') = \bigoplus H^1(\mathcal{O}(a_1 - a_i))$, vamos provar que esse espaço vetorial é zero e, por consequência do Lema 4.1, a sequência cinde.

Pela dualidade de Serre, temos que $\dim(H^1\mathcal{O}(a)) = \dim(H^0(-2-a))$ e o último é zero se, e somente se, $-2-a < 0$.

Como $\mathcal{O}(a_1)$ é o subfibrado de grau máximo, então $E(-a-d) = 0$, $\forall d \geq 0$, pois $E(-a-d) = Hom(\mathcal{O}(a+d), E)$ e $H^0(Hom(\mathcal{O}(a+d), E) \neq 0$ nos daria um mapa injetivo de $\mathcal{O}(a+d)$ em E, contradizendo a maximalidade de a_1. A sequência exata anterior nos dá a sequência exata

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{E}(-1-a_1) \to \mathcal{O}(a_2 - a_1 - 1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_r - a_1 - 1) \to 0$$

Como $\dim(H^1(\mathcal{O}(-1)) = 0$, então $\dim(H^0(\mathcal{O}(a_2 - a_1 - 1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_r - a_1 - 1))) = 0$. Portanto, $a_i - a_1 - 1 < 0$. Logo, $a_i - a_1 - 2 < 0$.

Unicidade: Suponha que $\mathcal{O}(a_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_r) \simeq \mathcal{O}(b_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(b_r)$ e que $(a_1, ..., a_r) \neq (b_1, ..., b_r)$. Ordene-os de modo que $a_i = b_i, \forall i \in \{1, ..., k-1\}$, $a_j \neq b_j$, $a_j \geq a_{j+1}$ e $b_j \geq b_{j+1}$, $\forall j \in \{k, ..., r\}$. Se $a_k > b_k$, teremos no membro da esquerda
$H^0(E(-a_k)) = H^0(\mathcal{O}(a_1 - a_k)) \oplus ... \oplus H^0(\mathcal{O}(a_{k-1} - a_k)) \oplus H^0(\mathcal{O}) \oplus$ outros termos
E no membro da direita,
$H^0(E(-a_k)) = H^0(\mathcal{O}(a_1 - a_k)) \oplus ... \oplus H^0(\mathcal{O}(a_{k-1} - a_k))$. Absurdo. Logo temos a unicidade.

□

6 CONCLUSÃO

Na primeira parte trabalhamos com álgebra comutativa e provamos um lema que mais na frente ajudou a conectar a teoria de álgebra com a teoria de feixes. Esse resultado em feixes se torna apenas parcial quando obtemos um resultado mais forte sobre todos os grupos de cohomologia de um esquema projetivo na terceira parte do texto. Um proximo passo natural seria estudar até onde tais propriedades se preservam, em outras palavras, para quais esquemas X sobre k e quais feixes $\mathcal{F}$ continuamos tendo que $H^i(X, \mathcal{F})$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k.

Também provamos uma caracterização para fibrados sobre $\mathbb{P}^1$. Tal reultado não vale para um $\mathbb{P}^n$ qualquer. Utilizamos teoria de cohomologia do $\mathbb{P}^n$, o que aparentemente nos dá ferramentas para atacar o caso mais geral, mas, como pode ser observado no texto, fizemos uso da dualidade de Serre e Riemann-Roch, o que acarretaria em casos mais complexos quando trabalhamos num espaço projetivo de dimensão maior. Tal dificuldade indica que um próximo passo natural seria estudar a caracterização de fibrados sobre curvas específicas, pois desse modo evitaríamos os problemas técnicos supracitados.

REFERÊNCIAS

ATIYAH, Michael. Introduction To Commutative Algebra Massachusetts : Addison-Wesley publishing company. c1969. 128p.

EISENBUD, David. Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry New York : Springer. c1995. 785p.

HARTSHORNE, Robin. Algebraic geometry. New York : Springer-Verlag. c1977. 496p.

IITAKA, Shigeru. Algebraic Geometry: An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties New York : Springer. c2011. 357p.

KLEIMAN, Steve. A Term of Commutative Algebra Massachusetts : Worldwide Center of Mathematics, LLC. c2013. 439p.

SHAFAREVICH, Igor. Basic Algebraic Geometry 2: Schemes and Complex Manifolds New York : Springer-Verlag, v. 2. c1994. 270p.

TEIXIDOR, Montserrat. Vector Bundles on Curves. Massachusetts 2002.