



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

JONAS COSTA FERREIRA DA SILVA

UM ESTUDO DE REDES COM FLUXOS RAMIFICADOS ARCO-DISJUNTOS

**FORTALEZA
2019**

JONAS COSTA FERREIRA DA SILVA

UM ESTUDO DE REDES COM FLUXOS RAMIFICADOS ARCO-DISJUNTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Teoria dos grafos.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Karolinna Maia de Oliveira

Coorientadora: Profa. Dra. Cláudia Linhares Sales

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S58e Silva, Jonas Costa Ferreira da.

Um estudo de redes com fluxos ramificados arco-disjuntos / Jonas Costa Ferreira da Silva. – 2019.
51 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2019.

Orientação: Profa. Dra. Ana Karolinna Maia de Oliveira.
Coorientação: Profa. Dra. Cláudia Linhares Sales.

1. Fluxos arco-disjuntos. 2. Fluxo em redes. 3. Digrafos. 4. Teoria dos grafos. I. Título.

CDD 005

JONAS COSTA FERREIRA DA SILVA

UM ESTUDO DE REDES COM FLUXOS RAMIFICADOS ARCO-DISJUNTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Teoria dos grafos.

Aprovada em: 11 de Março de 2019

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ana Karolinna Maia de
Oliveira (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Cláudia Linhares Sales (Coorientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Raphael Carlos Santos Machado
O Centro Federal de Educação Tecnológica Celso
Suckow da Fonseca (Cefet/RJ)

AGRADECIMENTOS

A Deus, Autor e Razão de todas as coisas.

À minha família, de maneira especial aos meus pais, João Mendonça e Cássia, pelo amor com que sempre cuidaram de mim e por sempre me apoiarem. Agradeço também às minhas irmãs, Jocássia e Jéssica, pela amizade e incentivo incondicionais.

À minha orientadora, Karolinna Maia, pela paciência, dedicação e confiança que depositou em mim. Obrigado por toda a experiência que você compartilhou comigo, pela compreensão e humildade com que você me orientou. Quando eu crescer, quero ser um bom orientador assim como você é. Agradeço também ao pequeno Igor, que embora não saiba, cedeu um pouco do seu tempo com a mãe para esta dissertação.

À minha co-orientadora, Cláudia Linhares, por ter me ajudado tanto neste último semestre, por me colocar pra cima quando os prazos me colocavam pra baixo e pelas sinceras críticas às minhas figuras.

Ao meu colega, Raul Wayne, pela colaboração na pesquisa, por me ensinar a usar o TikZ e pelas dicas de como preparar uma boa apresentação.

À Micaele, minha belíssima namorada, que apesar da distância, sempre me incentiva e acredita em mim, bem mais do que eu mesmo. Amo você!

Agradeço também, a todos os professores que fizeram parte desta minha etapa de formação, em especial, o prof. Manoel Campêlo, pela humildade, disposição e desejo (talvez exagerado) de nos fazer aprender.

Aos meus colegas de laboratório, em especial: Jhonata, Sergio, Mardson, Arthur Araruna, Ernando e Rafael, pela amizade e por toda ajuda prestada.

Aos meus amigos João Paulo e Joéliton, e irmãos do grupo de oração Philia, pela amizade e intercessão.

E à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal Ensino Superior, pelo financiamento da pesquisa de mestrado via bolsa de estudos.

“Comece fazendo o que é necessário, então faça o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível.”

(São Francisco de Assis)

RESUMO

Redes e fluxos são utilizados na modelagem de problemas de diversos domínios como: roteamento, circuitos elétricos, redes de computadores até a generalização de problemas de caminhos em digrafos.

No conceito de fluxos arco-disjuntos, introduzido por (BANG-JENSEN; BESSY, 2014), não estamos interessados apenas em encontrar um fluxo viável em uma rede, mas sim múltiplos fluxos viáveis que sejam arco-disjuntos entre si. Essa generalização permitiu a modelagem de novos problemas utilizando os conceitos familiares de fluxo, desde problemas polinomiais, como aquele de decidir se um multigrafo direcionado possui k ramificações arco-disjuntas, a problemas \mathcal{NP} -completos, como o problema de decidir sobre a existência de caminhos arco-disjuntos entre vértices pré-determinados.

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre fluxos arco-disjuntos com enfoque em fluxos ramificados, que são fluxos que possuem um vértice fonte que envia fluxo para todos os demais vértices, de modo que cada um dos demais retenha uma unidade de fluxo. Tendo como parâmetro a função de capacidade da rede, estudamos também a complexidade do problema de encontrar fluxos ramificados arco-disjuntos. A partir de resultados de (EDMONDS, 1973) e (BANG-JENSEN *et al.*, 2016), propomos uma conjectura que caracteriza (ainda com base na função de capacidade) as redes que possuem múltiplos fluxos ramificados arco-disjuntos e mostramos alguns casos em que ela é válida.

Palavras-chave: Fluxo em redes. Fluxos arco-disjuntos. Digrafos. Teoria dos grafos.

ABSTRACT

Network flows constitute a very useful tool for modeling problems of different areas such as: routing, electrical circuits, computer networks and even path problems on digraphs.

The arc-disjoint flows problem was introduced by (BANG-JENSEN; BESSY, 2014) and it is a generalization of the classical flow problem in which we are interested in deciding whether a network admits multiple arc-disjoint feasible flows. On this generalized version, is possible to model new problems using flow tools, from polynomial ones, such as the problem of finding multiple arc-disjoint out-branchings, to \mathcal{NP} -complete ones, such as the problem of deciding whether exists arc-disjoint paths between prescribed pairs of vertices.

In this work, we study the arc-disjoint flow problem with focus on branching flows, which are flows where a vertex sends a unit of flow to all the other vertices. Considering the network capacity function as parameter we studied the complexity of finding two arc-disjoint branching flows. Based on results of (EDMONDS, 1973) and (BANG-JENSEN *et al.*, 2016) we proposed a conjecture to characterize (also based on the capacity function) the networks which admit multiple arc-disjoint branching flows and we also showed some cases where it holds.

Keywords: Network flows. Arc-disjoint flows. Digraphs. Graph Theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de digrafo D .	13
Figura 2 – Exemplo de multidigrafo D .	14
Figura 3 – Digrafo D e subdigrafos H e H' .	16
Figura 4 – Um grafo direcionado H .	17
Figura 5 – Digrafo D e seu digrafo representativo $CF(D)$. As áreas em cinza demarcam as componentes fortes de D .	18
Figura 6 – Uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l, u)$ com fluxo x . Ao lado de cada arco vw está a representação $(l(vw), u(vw)) x(vw)$ e o número dentro de cada vértice é o balanço deste vértice segundo o fluxo x . Os arcos com fluxo positivo estão destacados em negrito.	24
Figura 7 – Exemplo de ramificação em um digrafo D com raiz s . Os arcos da ramificação estão destacados em negrito e a raiz s também foi destacada.	35
Figura 8 – Rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv 2)$ e fluxo s -ramificado com valor indicado ao lado de cada arco.	36
Figura 9 – Exemplo de construção de \mathcal{N} quando $C_1 = (v_1 * \bar{v}_2 * v_3)$.	39
Figura 10 – Exemplo de construção dos caminhos P_1^V, P_2^V, P_1^F e P_2^F quando $\{\bar{x}_1, x_2, x_3, x_\ell\} \subseteq X^F$. Os arcos de P_1^V são os de menor espessura, já os de P_1^F , estão destacados em negrito. Os arcos em forma de mola e tracejados são, respectivamente, os arcos de P_2^F e P_2^V . Os vértices em X^F estão com a borda em negrito.	40
Figura 11 – Exemplo de construção de \mathcal{N}' quando $C_1 = (v_1 * \bar{v}_2 * v_3)$.	42
Figura 12 – Exemplo de construção da demonstração original do Teorema 17. O único arco de X_i para W_i representa todos os possíveis arcos de X_i para W_i . De maneira similar, o único arco de X_ℓ para t representa os arcos $\bar{x}_\ell t$ e $x_\ell t$.	43
Figura 13 – Distribuição de complexidade do problema segundo a capacidade. Cada ponto $2 \leq \lambda \leq n - 1$ do seguimento de reta define um valor de capacidade para o qual é considerado o problema de decidir sobre a existência de 2 fluxos ramificados arco-disjuntos em redes do tipo $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv \lambda)$, onde k é constante e n é o número de vértices da rede.	44
Figura 14 – Ilustração dos conjuntos W, Y, Z . Os arcos marcados com um “ \times ” indicam onde não pode haver arcos.	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	CONCEITOS BÁSICOS	13
2.1	Definições e Terminologia	13
2.2	Problemas de decisão e classes de problemas	19
2.2.1	<i>Problemas Tratáveis com Parâmetro Fixo (TPF)</i>	21
2.2.2	<i>Hipótese de Tempo Exponencial (HTE)</i>	21
3	REDES E FLUXOS	23
3.1	Definições e notação	23
3.2	Redução entre diferentes modelos de fluxo	24
3.2.1	<i>Eliminação dos limites inferiores</i>	24
3.2.2	<i>Fluxos com exatamente uma fonte e um sumidouro</i>	25
3.2.3	<i>Circulações</i>	26
3.3	Decomposição de fluxo	27
3.4	O problema de fluxo máximo	28
4	FLUXOS ARCO-DISJUNTOS	31
4.1	Fluxos arco-disjuntos em redes de capacidade no máximo 2	31
4.2	(s,t)-fluxos arco-disjuntos em redes acíclicas	33
5	RAMIFICAÇÕES E FLUXOS RAMIFICADOS	35
5.1	Fluxos ramificados: complexidade com base na função de capacidade	36
5.2	O caso da capacidade $u \equiv f(n)$	38
5.3	Uma condição necessária e suficiente	44
5.4	Fluxos ramificados em redes sem arcos paralelos	48
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	49
	REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

Uma *rede* $\mathcal{N} = (V, A, l, u)$ é definida por um digrafo $D = (V, A)$ e pelas funções de *limite inferior* $l : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ e *capacidade* $u : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ tais que $l(vw) \leq u(vw)$, para todo arco $vw \in A$. Um *fluxo* em \mathcal{N} é uma função $x : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Se x é um fluxo que respeita o limite inferior e a capacidade dos arcos, ou seja, se $l(vw) \leq x(vw) \leq u(vw)$ para todo arco $vw \in A$, dizemos que x é *viável*. O *balanço* de um vértice $v \in V$, com respeito ao fluxo x , é dado por $b_x(v) = \sum_{vt \in A} x(vt) - \sum_{sv \in A} x(sv)$. O vetor formado pelos balanços de todos os vértices da rede é o balanço do fluxo. Podemos utilizar o balanço de um fluxo para verificar propriedades ao seu respeito, por exemplo, verificar se tal fluxo é uma *circulação*, que é um fluxo onde todos os vértices tem balanço zero. Alternativamente, podemos considerar o balanço como um parâmetro a ser satisfeito e, neste caso, estaremos interessados em encontrar fluxos com esse balanço pré-determinado. Na verdade, o problema clássico de fluxo consiste em, dados uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l, u)$ e um vetor de balanço b , decidir se existe um fluxo viável x em \mathcal{N} tal que $b_x(v) = b(v)$ para todo $v \in V$. Como estamos interessados apenas em fluxos viáveis, vamos omitir o termo viável.

Fluxos são amplamente estudados, pois permitem, com certa elegância e simplicidade, a modelagem de problemas em diversas áreas de estudo, como transporte, logística e telecomunicações. Além disso, tanto a versão clássica quanto outras versões, como fluxo de custo mínimo e fluxo máximo, são problemas polinomiais. Por isso, no campo teórico, fluxos em redes também são utilizados para resolver polinomialmente diversos problemas em grafos e digrafos. Uma longa lista de resultados em fluxos é apresentada em (AHUJA, 1993).

Existem alguns problemas, que por lidarem com caminhos e ciclos em digrafos, se assemelham aos problemas típicos de fluxo, mas que não podem ser modelados como fluxo em sua forma tradicional. Um exemplo clássico é o problema de *k-caminhos arco-disjuntos*, onde recebemos como entrada um digrafo $D = (V, A)$ e os vértices $s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k$ e queremos decidir se existem k caminhos arco-disjuntos P_1, \dots, P_k tais que P_i é um (s_i, t_i) -caminho, para todo $i \in [k]$. O problema de *k-caminhos arco-disjuntos* foi provado ser \mathcal{NP} -completo por Fortune *et al.* (1980) para $k \geq 2$. Com o objetivo de obter uma estrutura mais geral e abranger esses casos, Bang-Jensen e Bessy (2014) introduziram o problema de fluxos arco-disjuntos. Formalmente, esse problema consiste em, dados uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u)$ e dois vetores de balanço b_1 e b_2 , decidir se existem fluxos arco-disjuntos x e y em \mathcal{N} , tais que, $b_x \equiv b_1$ e $b_y \equiv b_2$. Dois fluxos x e y , em \mathcal{N} , são *arco-disjuntos* se $x(vw) \cdot y(vw) = 0$, para todo arco $vw \in A$. Isso implica dizer

que os caminhos induzidos pelos arcos com valor positivo em x são arco-disjuntos dos caminhos induzidos pelos arcos positivos em y . A priori, o problema foi definido considerando apenas dois fluxos arco-disjuntos. Contudo, para modelar o problema de k -caminhos arco-disjuntos como um problema de fluxos arco-disjuntos é necessário considerar k fluxos arco-disjuntos entre si.

Outro problema que pode ser modelado com fluxos arco-disjuntos é de encontrar uma quantidade k de s -ramificações arco-disjuntas em um digrafo, que foi provado ser polinomial em (LOVÁSZ, 1976). Uma s -ramificação em um digrafo D é uma árvore geradora na qual existe um caminho direcionado da *raiz* s para todos os demais vértices de D .

O estudo de ramificações é relevante do ponto de vista prático e teórico devido às suas inúmeras aplicações. Por exemplo, considere uma rede de sensores que possui um nó central s que precisa enviar mensagens para os demais nós da rede. Considerando o digrafo D em que os vértices são os nós da rede e os arcos são os links de comunicação, podemos utilizar uma s -ramificação em D para selecionar quais links serão utilizados para rotear as mensagens. Essa estrutura pode não ser muito segura para esse tipo de aplicação, visto que a falha em um arco pode desconectar muitos vértices. Neste sentido, em (BANG-JENSEN; YEO, 2015; BANG-JENSEN *et al.*, 2016) são apresentados alguns parâmetros que podem ser usados para medir a qualidade de uma ramificação.

Um fluxo s -ramificado em uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u)$ é um fluxo x em que $b_x(s) = |V| - 1$ e $b_x(v) = -1$, para todo $v \neq s$. Bang-Jensen e Bessy (2014) mostraram que um digrafo $D = (V, A)$, com n vértices, possui k s -ramificações arco-disjuntas se, e somente se, a rede $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u \equiv n - 1)$ admite k fluxos s -ramificados arco-disjuntos, onde $u \equiv n - 1$ significa que todos os arcos tem capacidade $n - 1$. Quando consideramos redes em que a função de capacidade é estritamente menor que $n - 1$, não há uma equivalência entre ramificações e fluxos ramificados. Porém, essas redes fornecem um modelo mais adequado para aplicações como a rede de sensores mencionada anteriormente. Muitas vezes, não é possível ou ideal que uma grande de mensagens seja enviada pelo mesmo arco, por isso é interessante considerar casos em que $u \equiv \lambda$, para valores pequenos de λ .

Bang-Jensen *et al.* (2016) mostraram que determinar a existência de dois fluxos s -ramificados arco-disjuntos é \mathcal{NP} -completo em redes com função de capacidade $u \equiv k$, para um valor fixo $k \geq 2$. Neste trabalho, mostramos, com base na Hipótese de Tempo Exponencial (HTE), que não existe algoritmo polinomial para encontrar estes dois fluxos quando $u \equiv f(n)$.

Um resultado de (EDMONDS, 1973) dá uma condição que caracteriza quais são os digrafos que admitem k ramificações arco-disjuntas enraizadas em um vértice s . Estendemos a condição dada por Edmonds (1973) para incluir a noção de capacidade, e conjecturamos que a condição resultante é necessária e suficiente para caracterizar as redes $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u \equiv \lambda)$ que admitem k fluxos s -ramificados arco disjuntos. Além de propor essa conjectura, mostramos também alguns casos em que ela é válida.

Neste trabalho, também introduzimos uma versão mais restrita do problema de encontrar fluxos ramificados arco-disjuntos, onde consideramos apenas redes que não possuem arcos paralelos. Apresentamos algumas considerações iniciais acerca do problema restrito e mostramos três condições necessárias para o caso em que $u \equiv 2$.

O restante do trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos básicos de digrafos, noções de complexidade e classes de problema. O Capítulo 3 é dedicado a alguns conceitos e resultados relacionados ao problema clássico de fluxo e no Capítulo 4 listamos os principais resultados de fluxos arco-disjuntos que foram obtidos tão logo o problema foi introduzido em (BANG-JENSEN; BESSY, 2014). No Capítulo 5 formalizamos, revisamos os resultados de (BANG-JENSEN; BESSY, 2014; BANG-JENSEN *et al.*, 2016) e apresentamos as nossas contribuições a respeito do problema de fluxos ramificados arco-disjuntos. No Capítulo 6 apresentamos as considerações finais acerca deste trabalho.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos que serão utilizados ao longo do texto. Adotamos a terminologia básica contida em (BANG-JENSEN; GUTIN, 2008), porém, algumas definições e conceitos foram adaptados aos problemas que serão abordados posteriormente. Aqui, assumimos que o leitor possui algum conhecimento prévio de teoria dos conjuntos, teoria dos grafos e algoritmos. As proposições e lemas que trazem a indicação “Exercício” são resultados que foram propostos como exercício em (BANG-JENSEN; GUTIN, 2008). As demonstrações aqui apresentadas para esses casos são nossas.

2.1 Definições e Terminologia

Um *grafo direcionado* (ou simplesmente *digrafo*) D é definido por um conjunto não vazio e finito $V(D)$, cujos elementos são chamados de *vértices*, e um conjunto finito de *arcos* $A(D)$, que são pares ordenados de vértices distintos do conjunto $V(D)$. Usamos a notação $D = (V, A)$, quando queremos explicitar que V e A são, respectivamente, os conjuntos de vértices e arcos do digrafo D . A *ordem* de um digrafo D é dada pela cardinalidade do seu conjunto de vértices, ou seja, se $|V(D)| = n$ dizemos que D é de ordem n . Por exemplo, o digrafo representado na Figura 1 é de ordem 4 e com $V(D) = \{a, b, c, d\}$ e $A(D) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (d, c)\}$.

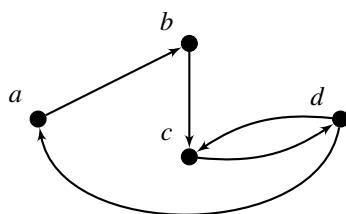


Figura 1 – Exemplo de digrafo D .

Dado um arco (u, v) , dizemos que os vértices u e v são os *extremos* (ou *extremidades*) deste arco e nomeamos u de *calda* e v de *cabeça* de (u, v) . Os extremos de um arco são ditos *adjacentes*, ou seja, u é adjacente a v e vice-versa¹. Dizemos ainda que o arco (u, v) *sai* de u e *entra* em v . Por simplicidade, utilizamos uv para denotar o arco (u, v) .

¹ Alguns autores utilizam a expressão “ u é adjacente a v ” para indicar a existência do arco (u, v) no digrafo, aqui esta mesma expressão implica a existência de (u, v) ou (v, u) (ou ambos), como é convencionado em (BANG-JENSEN; GUTIN, 2008).

Sejam X e Y subconjuntos de vértices de um digrafo D . Definimos

$$(X, Y)_D = \{uv \in A(D) : u \in X, v \in Y\},$$

isto é, $(X, Y)_D$ é o conjunto de arcos cuja a calda está em X e a cabeça em Y .

Por definição, é possível que existam em um digrafo D dois arcos distintos que possuem as mesmas extremidades, como os arcos cd e dc no digrafo da Figura 1. Por outro lado, não é permitido que dois arcos distintos tenham cabeça e calda iguais², pois não é permitida a repetição de elementos em $A(D)$. Se permitirmos que $A(D)$ seja um multiconjunto, então dizemos que D é um *multigrafo direcionado* (ou *multidigrafo*). Em multidigrafos, arcos idênticos são ditos *paralelos* e utilizamos $\mu(u, v)$ para denotar o número de arcos paralelos uv . Em particular, se $\mu(u, v) = 0$, então não existe arco uv em D . No exemplo da Figura 2 temos que $\mu(a, b) = 3$ e $\mu(b, a) = 0$. Observe que todo digrafo é um multidigrafo.

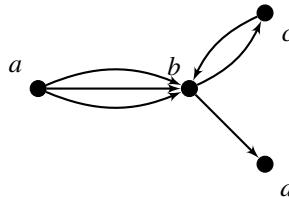


Figura 2 – Exemplo de multidigrafo D .

Para as próximas definições, considere $D = (V, A)$ como sendo um multidigrafo. Seja v um vértice de D . Denominamos *vizinhança de saída* de v o conjunto $N_D^+(v) = \{u \in V : vu \in A\}$ e de maneira similar $N_D^-(v) = \{w \in V : wv \in A\}$ é a *vizinhança de entrada* de v . Os vértices em $N_D^+(v)$ são *vizinhos de saída* e os que estão em $N_D^-(v)$ são *vizinhos de entrada* de v . A união das vizinhanças de entrada e saída forma a *vizinhança* de v em D , denotada por $N_D(v)$. Observe que a vizinhança de v é o conjunto dos seus vértices adjacentes. Dizemos que s é um *vértice universal* se ele é vizinho de entrada de todos os demais vértices, ou seja, $N_D^+(s) = V - s$. No multidigrafo apresentado na Figura 2, temos: $N_D^+(b) = \{c, d\}$, $N_D^-(b) = \{a, c\}$ e $N_D(b) = \{a, c, d\}$. Nesse exemplo não há vértice universal.

Podemos estender os conceitos de vizinhança para um subconjunto de vértices W da seguinte maneira:

$$N_D^+(W) = \bigcup_{w \in W} N_D^+(w) - W; N_D^-(W) = \bigcup_{w \in W} N_D^-(w) - W.$$

² Essa definição também não permite *loops*, que são arcos cuja cabeça e calda são iguais. Omitimos esse conceito pois nos problemas que serão apresentados aqui os *loops*, caso existam, podem ser desconsiderados.

Dessa forma, os vértices em $N_D^+(W)$ são aqueles que não estão em W e são vizinhos de saída de algum vértice em W . E de maneira similar, $N_D^-(W)$ são os vizinhos de entrada dos vértices de W , mas que não estão em W . Considerando ainda o multigrafo da Figura 2 temos: $N_D^+(\{b,c\}) = \{d\}$, $N_D^+(\{a,c\}) = \{b\}$, $N_D^+(\{a,b\}) = \{c,d\}$, $N_D^-(\{c,d\}) = \{b\}$ e $N_D^-(\{b,d\}) = \{a,c\}$.

Para um conjunto $W \subseteq V$, o seu *grau de saída* é denotado por $d_D^+(W)$ e é dado pelo número de arcos com calda em W e cabeça em $V - W$, ou seja, $d_D^+(W) = |(W, V - W)_D|$. Analogamente, o *grau de entrada* de W é dado por $d_D^-(W) = |(V - W, W)_D|$. Quando W possui um único vértice v , usamos apenas $d_D^+(v)$ e $d_D^-(v)$. Em particular, o grau de saída de um vértice v é o número de arcos dos quais v é calda. Na Figura 2 temos: $d_D^+(\{a,c\}) = 4$, $d_D^+(b) = 2$, $d_D^-(\{a,c\}) = 1$ e $d_D^-(b) = 4$. No caso em que D é um digrafo (quando não possui arcos paralelos), os graus de entrada e saída de um vértice são respectivamente os tamanhos de suas vizinhanças de entrada e saída.

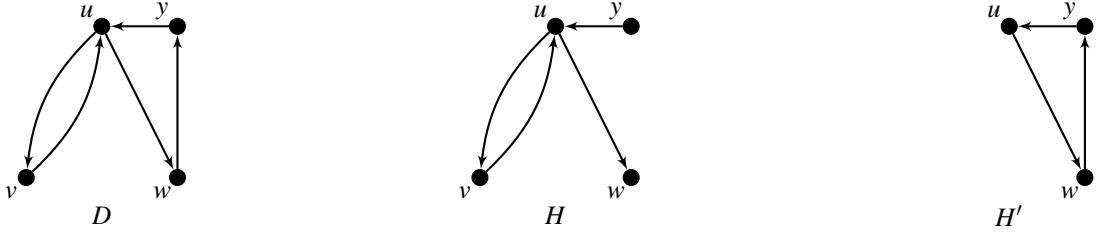
Habitualmente omitimos o subscrito dos símbolos de parâmetros (grau, vizinhança e outros) quando está claro a qual digrafo eles se referem.

Como todo arco possui uma calda (e uma cabeça), cada um contribui com uma unidade no grau de saída (e de entrada) de um vértice, por isso temos: $\sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v) = |A(D)|$, para todo multidigrafo D .

Um vértice v de um multigrafo direcionado D é uma *fonte* quando não possui vizinhos de entrada ($d_D^-(v) = 0$) e, quando não possui vizinhos de saída ($d_D^+(v) = 0$), ele é um *sumidouro*. Na Figura 2 o vértice a é fonte, enquanto d é sumidouro.

Um digrafo H é *subdigrafo* de um digrafo D se $V(H) \subseteq V(D)$, $A(H) \subseteq A(D)$ e os extremos de todo arco de $A(H)$ estão em $V(H)$. Neste caso, dizemos que D é *superdigrafo* de H . Se $V(H) = V(D)$, dizemos que H é *subdigrafo gerador* de D . Na Figura 3, H é subdigrafo gerador de D . Se todo arco em $A(D)$ que possui ambos extremos em $V(H)$ também está em $A(H)$, dizemos que H é *induzido* por $V(H)$ (escrevemos $H = D[V(H)]$) e chamamos H de *subdigrafo induzido* de D . Na Figura 3, temos que H' é subgrafo induzido de D . Em particular, $H' = D[\{u, w, y\}]$, já H não é induzido por $\{u, v, w, y\}$, pois $(w, y) \notin A(H)$. Dado um subconjunto de arcos $A' \subseteq A$, o subdigrafo *arco-induzido* por A' é o digrafo $D[A'] = (V', A')$, onde V' é o conjunto de vértices de V que são extremos de pelo menos um arco de A' . Por exemplo, na Figura 3, temos que H' é o subdigrafo arco-induzido por $\{(u, w), (w, y), (y, u)\}$, ou seja, $D[\{(u, w), (w, y), (y, u)\}] = H'$.

Para um conjunto de vértices $S \subseteq V$, usamos abreviadamente $D - S$ para denotar o

Figura 3 – Digrafo D e subdigrafos H e H' .

subdigrafo induzido $D[V - S]$, ou seja, o subdigrafo de D que não possui os vértices de S nem os arcos que possuem algum extremo em S . Já para um conjunto de arcos $A' \subseteq A$, $D - A'$ denota o subdigrafo $D' = (V, A - A')$, isto é, o subdigrafo de D obtido pela eliminação dos arcos em A' .

Os conceitos anteriores podem ser estendidos para multidigrafos. Basta observar que neste caso $A(D)$ é um multiconjunto e portanto $A(H)$ também o será. Para evitar que a terminologia fique muito carregada, também utilizamos o termo *subdigrafo* quando nos referimos a ‘pedaços’ de um multidigrafo.

Para as próximas definições, considere D como sendo um multigrafo direcionado (multidigrafo). Um *passeio* em D é uma sequência alternada $W = v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k$, onde para $i \in [k], j \in [k-1]$ temos que $v_i \in V(D)$, $a_j \in A(D)$ e $a_j = (v_j, v_{j+1})$. Dizemos que W é um passeio *de* v_1 *para* v_k , ou ainda que é um (v_1, v_k) -*passeio*. Um passeio W é *fechado* quando $v_1 = v_k$, caso contrário dizemos que W é *aberto*. Usamos $V(W)$ e $A(W)$ para denotar os respectivos conjuntos de vértices e arcos de W ($\{v_i : i \in [k]\}$ e $\{a_j : j \in [k-1]\}$). Se W é aberto, então dizemos que v_1 é o seu vértice *initial*, que v_k é o seu vértice *final* e ambos são seus *extremos*. O *tamanho* de um passeio é dado pelo número de arcos que possui. Quando os arcos de W podem ser inferidos pelo contexto ou não são relevantes, denotamos W simplesmente por v_1, v_2, \dots, v_k .

Uma *trilha* é um passeio no qual não há repetição de arcos. Se os vértices de W são distintos, então W é um *caminho*. Se os vértices v_1, v_2, \dots, v_{k-1} são distintos, $v_1 = v_k$ e $k \geq 3$, então W é um *ciclo*. Como ciclos e caminhos são casos particulares de passeios, seus tamanhos também são dados pelo número de arcos. Utilizaremos (v, w) -*caminho* para denotar um caminho de v para w . Para ilustrar esses conceitos, considere a Figura 4. A sequência $v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_3, v_1$ (arcos estão implícitos) é um (v_1, v_1) -passeio fechado. A sequência $v_3, v_5, v_6, v_4, v_2, v_3$ é um ciclo de tamanho 5 e v_4, v_5, v_6, v_3, v_1 é um (v_4, v_1) -caminho de tamanho 4. Observe que estes exemplos também são trilhas.

Para um caminho ou um ciclo $W = v_1, v_2, \dots, v_k$ ($v_k = v_1$ caso W seja um ciclo) usamos a seguinte notação: $W[v_i, v_j] = v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j$. Se $v_i \neq v_j$, dizemos que $W[v_i, v_j]$ é

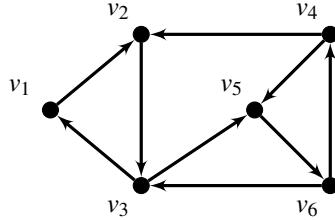


Figura 4 – Um grafo direcionado H .

segmento de caminho de W .

Proposição 1 (Bang-Jensen e Gutin (2008)). *Seja D um digrafo e seja v, w um par de vértices distintos de D . Se D possui um (v, w) -passeio W , então D possui um (v, w) -caminho P tal que $A(P) \subseteq A(W)$. Se D possui um (v, v) -passeio fechado W , então D também possui um ciclo C tal que $A(C) \subseteq A(W)$ e $v \in V(C)$.*

Um passeio W é um passeio *hamiltoniano* (ou de *Hamilton*) se $V(W) = V(D)$. Quando sabemos que W é um caminho (ou um ciclo) dizemos especificamente que W é um caminho (ou ciclo) hamiltoniano. Um digrafo D é *hamiltoniano* quando possui um ciclo hamiltoniano. Se D possui um caminho hamiltoniano dizemos que D é *roteável*. O digrafo H da Figura 4 é roteável, pois $v_5, v_6, v_4, v_2, v_3, v_1$ é um (v_5, v_1) -caminho de Hamilton. Uma trilha $W = v_1, v_2, \dots, v_k$ é uma trilha *euleriana* (ou de *Euler*) se $A(W) = A(D)$, $V(W) = V(D)$ e $v_1 = v_k$. Um multigrafo direcionado D é euleriano se possui uma trilha de Euler.

Em um digrafo D , um vértice w é *alcançável* a partir de um vértice v se D possui um (v, w) -passeio. Em particular, um vértice é alcançável a partir dele mesmo. Pela Proposição 1, w é alcançável a partir de v se, e somente se, existe um (v, w) -caminho em D . Um digrafo D é *fortemente conexo* (ou simplesmente *forte*) se, para todo par de vértices distintos v, w , existe um (v, w) -passeio e um (w, v) -passeio em D . Ou seja, D é fortemente conexo se todo vértice de D é alcançável a partir de todos os demais. Definimos um digrafo com um único vértice como sendo fortemente conexo.

Proposição 2 (Exercício). *Um digrafo D é fortemente conexo se, e somente se D contém um passeio hamiltoniano fechado.*

Demonstração. (\implies) Seja D um digrafo fortemente conexo e W passeio fechado com o maior número de vértices em D . Assumindo que W não é hamiltoniano, temos que existe um vértice $y \in V(D)$ que não está em W . Como D é fortemente conexo sabemos que existe um (x, y) passeio P e um (y, x) passeio Q em D , onde $x \in V(W)$. No entanto, se adicionarmos P e Q (que formam

um passeio fechado) a W obtemos um passeio fechado com pelo menos um vértice a mais que W . Contradição. Logo, W é hamiltoniano.

(\Leftarrow) Seja W um passeio hamiltoniano fechado em D e x, y um par de vértices qualquer. Uma vez que W é hamiltoniano, se partirmos de x e seguirmos os arcos (e vértices) de W eventualmente alcançaremos y e $W[x, y]$ é um (x, y) -passeio. Analogamente, como W é fechado continuamos o percurso em W partir de y alcançamos x e encontramos um (y, x) -passeio. Como x, y é um par de vértices qualquer então D é fortemente conexo. \square

Para as próximas definições, considere um digrafo forte $D = (V, A)$. O conjunto $S \subseteq V(D)$ é um *separador* se $D - S$ não é forte. Dizemos que D é *k-fortemente conexo* (ou *k-forte*) se não possui um separador com menos que k vértices e $|V| \geq k + 1$. Para um par s, t de vértices distintos, o conjunto $S \subseteq V$ é um (s, t) -separador se $D - S$ não possui (s, t) -caminhos. Um conjunto de arcos $X \subseteq A$ é um *corte* quando $D - A$ não é forte. Se todo corte de D tem pelo menos k arcos dizemos que D é *k-fortemente arco-conexo* (ou *k-arco-forte*).

Uma *componente forte* de um digrafo D é um subdigrafo maximal induzido de D que é forte. Se D_1, D_2, \dots, D_t são todas as componentes fortes de D , então $V(D_1) \cup \dots \cup V(D_t) = V(D)$ (lembrando que um digrafo com um único vértice é forte). Além disso, $V(D_i) \cap V(D_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, pois do contrário todos os vértices em $V(D_i) \cup V(D_j)$ seriam alcançáveis dois a dois e deveriam estar na mesma componente forte. Chamamos $V(D_1) \cup \dots \cup V(D_t)$ de *decomposição forte* de D . O *digrafo representativo* das componentes fortes de D denotado por $CF(D)$ é definido como $V(CF(D)) = \{v_i : i \in [t]\}$ e $A(CF(D)) = \{v_i v_j : (V(D_i), V(D_j))_D \neq \emptyset\}$, isto é, existe um arco $v_i v_j$ em $A(CF(D))$ quando existe um arco wz em $A(D)$, onde $w \in D_i$ e $z \in D_j$. Na Figura 5, temos um exemplo de digrafo representativo.

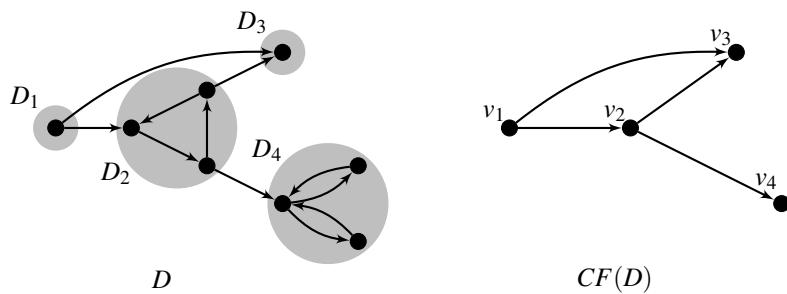


Figura 5 – Digrafo D e seu digrafo representativo $CF(D)$. As áreas em cinza demarcam as componentes fortes de D .

O *grafo subjacente* $UG(D)$ de um multidigrafo $D = (V, A)$ é o grafo simples $G = (V, E)$ em que $E = \{\{v, w\} : vw \in A \text{ ou } wv \in A\}$. Dizemos que D é uma *árvore* se o seu grafo

subjacente $UG(D)$ é uma árvore.

2.2 Problemas de decisão e classes de problemas

Considere um par de funções $f(n)$ e $g(n)$. Dizemos que $f(n) = O(g(n))$ se existem constantes c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$. Similarmente, se existem constantes c e n_0 tais que, para todo $n \geq n_0$, vale $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ dizemos que $f(n) = \Omega(g(n))$. Quando $f(n) = O(g(n))$, dizemos que g é *limite superior* de f e, quando $f(n) = \Omega(g(n))$, g é *limite inferior* de f . Se g é ao mesmo tempo limite superior e inferior de f , utilizamos $f(n) = \theta(g(n))$ para indicar que g e f são de *mesma ordem*.

Um dos principais critérios que é utilizado na análise de um algoritmo é a sua *complexidade de tempo*, que aqui chamaremos apenas de *complexidade*. Essa medida deve refletir de alguma maneira o tempo de execução do algoritmo em um computador. Como não é possível universalizar o tempo de execução de um algoritmo (devido às diferenças de velocidades entre os computadores), calculamos a complexidade de tempo de um algoritmo contando o número de operações básicas (tais como somas, produtos, atribuições *etc*) que são realizadas sobre uma entrada de tamanho n . Em outras palavras, para um algoritmo \mathcal{A} , encontramos uma *função de complexidade* f que computa o número de “passos” que \mathcal{A} executa quando recebe uma entrada de tamanho n . Um algoritmo \mathcal{A} com função de complexidade f é de *ordem* (ou de *complexidade*) $O(g(n))$ se $f(n) = O(g(n))$.

Em geral, os algoritmos que serão abordados aqui recebem como entrada multidígrafos (ver Seção 2.1) e o seu tamanho é medido pelo número de vértices e arcos, que tipicamente denotamos por n e m , respectivamente. Um algoritmo de complexidade $O(p(n,m))$, onde p é um polinômio em n e m , é dito polinomial.

Um *problema de decisão* é um problema que requer uma resposta do tipo ‘sim’ ou ‘não’ como solução. Nesse sentido, um *problema* consiste em uma família de instâncias. Por exemplo, considere o *problema de números pares*, que consiste em: dado um inteiro x decidir se x é par ou não, ou ainda, decidir se x pertence à ‘família’ dos números pares. Neste exemplo, todo inteiro z é uma *instância* para o problema e em particular z é uma *instância ‘sim’* se z é par e uma *instância ‘não’* caso contrário. Dizemos que um algoritmo \mathcal{A} *resolve* um problema de decisão \mathcal{S} se, para toda instância x de \mathcal{S} , \mathcal{A} produz uma resposta no conjunto {‘sim’, ‘não’} e, além disso, \mathcal{A} responde ‘sim’ para a instância x se, e somente se, x é uma instância ‘sim’ de \mathcal{S} . A partir dessa noção, podemos classificar os problemas de acordo a complexidade dos

algoritmos que os resolvem (caso existam).

Um problema de decisão \mathcal{S} pertence à classe \mathcal{P} se, e somente se, existe um algoritmo polinomial \mathcal{A} que o resolve. Uma vez que \mathcal{A} é polinomial, segue que ele produz uma resposta em no máximo $p(|x|)$ passos, onde $|x|$ é o tamanho da entrada e p é um polinômio fixo.

Um problema de decisão \mathcal{S} pertence à classe \mathcal{NP} se, para toda instância ‘sim’ de \mathcal{S} , existe um verificador, chamado de *certificado*, com tamanho polinomial (no tamanho da instância) e que pode ser utilizado, por um algoritmo polinomial, para checar que aquela é de fato uma instância ‘sim’. O certificado depende da instância em questão, mas ele precisa ter a mesma estrutura para todas as instâncias do problema. Para exemplificar, considere o *problema de particionamento numérico*, que consiste em: dado um conjunto de inteiros $N = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ tal que $\sum_{i \in [r]} a_i = 2K$, para algum inteiro K , decidir se é possível partitionar o conjunto N em duas partes de modo que a soma dos elementos de cada parte seja K . Observe que isso equivale a determinar a existência de um subconjunto $J \subset N$ que satisfaz $\sum_{a_j \in J} a_j = \sum_{a_i \in N - J} a_i = K$. Nesse caso, uma instância desse problema é um conjunto de inteiros N cuja soma dos elementos é $2K$. Um subconjunto $J \subset N$ cuja soma dos elementos seja K é um possível certificado que pode ser gerado caso N seja uma instância ‘sim’. Para verificar esse certificado basta somar os elementos de J e, ao constatar que a soma é K , provamos N é de fato uma instância ‘sim’.

Observe que, se um problema \mathcal{S} está em \mathcal{P} , ele também está em \mathcal{NP} , pois podemos usar qualquer instância ‘sim’ de \mathcal{S} como certificado, entregando-a como entrada de algum algoritmo polinomial que resolve \mathcal{S} . O contrário, porém, pode não ser verdade, pois, a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, existem problemas que estão em \mathcal{NP} mas não estão em \mathcal{P} . Uma boa parte dos resultados de complexidade se baseiam na hipótese $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ e, embora muitos pesquisadores tenham se dedicado a prová-la ou refutá-la, essa conjectura permanece em aberto até hoje.

Dado um par de problemas de decisão \mathcal{S}, \mathcal{T} , dizemos que \mathcal{S} se *reduz polinomialmente* a \mathcal{T} (denotado por $\mathcal{S} \leq_{\mathcal{P}} \mathcal{T}$) se existe um algoritmo polinomial \mathcal{A} que converte uma instância x de \mathcal{S} em uma instância $\mathcal{A}(x)$ de \mathcal{T} , de modo que $\mathcal{A}(x)$ tem a mesma resposta que x . Ou seja, x é uma instância ‘sim’ de \mathcal{S} se, e somente se, $\mathcal{A}(x)$ é uma instância ‘sim’ de \mathcal{T} (observe que isso implica que se x é instância ‘não’, $\mathcal{A}(x)$ também é instância ‘não’ e vice-versa). Neste caso, podemos dizer que \mathcal{S} não é mais difícil que \mathcal{T} .

Um problema \mathcal{T} é \mathcal{NP} -*difícil*, se todos os problemas da classe \mathcal{NP} se reduzem polinomialmente a \mathcal{T} . Se um problema é \mathcal{NP} -difícil e está na classe \mathcal{NP} , então este problema

é \mathcal{NP} -completo. Existem muitos problemas de decisão, inclusive problemas em digrafos, para os quais não existem algoritmos polinomiais conhecidos. Alguns desses problemas estão na classe \mathcal{NPC} , que é a classe dos problemas que são \mathcal{NP} -completo. Note que, para mostrar que um dado problema é \mathcal{NP} -difícil, é necessário provar que todos os demais problemas da classe \mathcal{NP} podem ser polinomialmente reduzidos a ele. Felizmente, reduções polinomiais são fechadas sob a composição, ou seja, dados os problemas \mathcal{S} , \mathcal{T} e \mathcal{U} , se $\mathcal{S} \leq_{\mathcal{P}} \mathcal{T}$ e $\mathcal{T} \leq_{\mathcal{P}} \mathcal{U}$, temos que $\mathcal{S} \leq_{\mathcal{P}} \mathcal{U}$. Levando em conta essa observação, para provar que um problema \mathcal{U} é \mathcal{NP} -difícil, podemos mostrar que algum problema \mathcal{NP} -completo se reduz polinomialmente a \mathcal{U} . Porém, para que seja possível utilizar esse “atalho”, é preciso que antes algum problema tenha sido estabelecido na classe \mathcal{NPC} . Isso foi feito por (COOK, 1971). Para mostrar que um problema está na classe \mathcal{NPC} são necessárias duas etapas: mostrar que esse problema está em \mathcal{NP} e que o mesmo é \mathcal{NP} -difícil.

2.2.1 Problemas Tratáveis com Parâmetro Fixo (TPF)

Um problema \mathcal{P} para o qual existe algoritmo de ordem $O(f(k)n^c)$, onde k é um parâmetro da entrada, f é uma função computável, n é o tamanho da entrada e c é uma constante é um problema *tratável com parâmetro fixo* (ou *TPF*) no parâmetro k . Observe que quando fixamos o valor de k , obtemos um algoritmo polinomial para \mathcal{P} .

2.2.2 Hipótese de Tempo Exponencial (HTE)

O 3-SAT é um problema \mathcal{NP} -completo que é muito utilizado em reduções polinomiais quando queremos mostrar que um novo problema está em \mathcal{NPC} . O 3-SAT é um caso especial do *SAT* (Problema de Satisfabilidade). Para formalizar esses problemas precisamos antes introduzir alguns conceitos.

Uma variável booleana x é uma variável que pode assumir os valores 0 e 1. A *soma* de variáveis booleanas $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ é definida como sendo 1 se pelo menos uma variável x_i tem valor 1 e caso contrário a soma é 0. A *negação* \bar{x} de uma variável booleana x é a variável que assume o valor $1 - x$, ou seja, assume o valor oposto a x . Seja X um conjunto de variáveis booleanas. Para todo $x \in X$ existem dois *literais*, sobre x , a saber, \bar{x} e o próprio x . Uma *cláusula* sobre um conjunto de variáveis X é uma soma de literais sobre variáveis de X . O *tamanho* de uma cláusula é dado pelo número de literais que contém. Por exemplo, se u, v, w são variáveis booleanas com valores 0, 1, 0 respectivamente, então $C = (u + \bar{v} + \bar{w})$ é uma cláusula de tamanho

3 com valor 1 e literais u, \bar{v} e \bar{w} . Uma atribuição de valores ao conjunto de variáveis X é chamada de *atribuição verdade*.

O *Problema de Satisfabilidade* (SAT) consiste em, dados $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ um conjunto de variáveis booleanas e C_1, C_2, \dots, C_r uma coleção de cláusulas sobre X , decidir se existe uma atribuição verdade T ao conjunto X tal que toda cláusula assuma valor 1. Isto é equivalente a responder se a expressão booleana $\mathcal{F} = C_1 * C_2 * \dots * C_r$ pode assumir valor 1. Quando isso é possível, dizemos que \mathcal{F} é *satisfatível*. Caso contrário, \mathcal{F} é *insatisfatível*. Aqui ‘ $*$ ’ representa o *produto* booleano, ou seja, $1 * 1 = 1$ e $1 * 0 = 0 * 1 = 0 * 0 = 0$. O problema SAT foi o primeiro problema que foi provado ser \mathcal{NP} -completo (COOK, 1971).

Para exemplificar essas definições, sejam $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $C_1 = (x_1 + x_2 + x_4)$, $C_2 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4)$ e $C_3 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$. Observe que $\mathcal{F} = C_1 * C_2 * C_3$ é satisfatível, pois pela atribuição verdade $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ temos que \mathcal{F} assume valor 1.

No exemplo anterior, todas as cláusulas tem tamanho 3, o que caracteriza uma instância do 3-SAT. Ou seja, o problema 3-SAT é um caso especial do SAT em que todas as cláusulas tem exatamente 3 literais. Apesar dessa restrição, o 3-SAT também é NP -completo.

Para alguns resultados que serão apresentados nos próximos capítulos, precisaremos de uma hipótese mais forte a cerca da complexidade do 3-SAT.

Hipótese de Tempo Exponencial (HTE): Existe um real positivo s tal que o 3-SAT não pode ser resolvido por um algoritmo de ordem $O(2^{sn}(n+m))$, onde n e m são, respectivamente, os números de variáveis e cláusulas (IMPAGLIAZZO *et al.*, 2001).

Basicamente, se a HTE for verdadeira, não existe algoritmo que resolva o problema 3-SAT com complexidade subexponencial no número de variáveis. Além disso, como consequência de um lema conhecido como *Sparsification Lemma* (IMPAGLIAZZO *et al.*, 2001), sabemos que o número de cláusulas é comparável ao número de variáveis. Isso nos permite dizer que, sob a HTE, o 3-SAT também não pode ser resolvido em tempo subexponencial quando consideramos o número de cláusulas.

Lema 1 ((IMPAGLIAZZO *et al.*, 2001)). *Se a HTE é verdadeira, então existe um real positivo s tal que o 3-SAT não pode ser resolvido por um algoritmo de ordem $O(2^{sm}(n+m))$, onde n e m são, respectivamente, os números de variáveis e cláusulas.*

É importante observar que a HTE também implica na inexistência de um algoritmo polinomial para o 3-SAT, ou seja, se HTE for verdadeira, temos que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

3 REDES E FLUXOS

Este capítulo é dedicado ao problema de fluxo clássico e apresenta alguns dos principais conceitos e resultados desse problema. Como no capítulo anterior, também adotamos (BANG-JENSEN; GUTIN, 2008) como texto base e por isso alguns lemas trazem a indicação “Exercício”.

3.1 Definições e notação

Uma *rede* é um grafo direcionado $D = (V, A)$ associado às funções de *limite inferior* $l : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ e *capacidade* $u : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$, de forma que a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$0 \leq l(vw) \leq u(vw), \quad \forall vw \in A.$$

Em alguns casos, adicionalmente, temos uma função $b : V \rightarrow \mathbb{Z}$, que atribui um valor inteiro a cada vértice e que chamamos de *vetor de balanço*. A respeito do vetor de balanço admitimos que:

$$\sum_{v \in V} b(v) = 0. \quad (3.1)$$

Utilizamos a notação $\mathcal{N} = (V, A, l, u, b)$ para identificar a rede formada pelo digrafo $D = (V, A)$ e pelos parâmetros l, u e b . Caso o vetor de balanço não seja especificado, omitimos o b da notação. Quando consideramos uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l, u, b)$, eventualmente podemos nos restringir ao digrafo $D = (V, A)$, que é obtido pela omissão dos demais parâmetros de \mathcal{N} .

Um *fluxo* na rede $\mathcal{N} = (V, A, l, u, b)$ é uma função $x : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$. O *balanço* do fluxo x é dado pela função $b_x : V \rightarrow \mathbb{Z}$, definida como segue:

$$b_x(v) = \sum_{vw \in A} x(vw) - \sum_{zv \in A} x(zv) \quad \forall v \in V. \quad (3.2)$$

Ou seja, $b_x(v)$ é a diferença entre o fluxo nos arcos que saem de v e o fluxo nos arcos que entram em v . Dizemos que um vértice v é *fonte* em um fluxo x se $b_x(v) > 0$. Por outro lado, se $b(v) < 0$, dizemos que v é *sumidouro*. Finalmente, se $b_x(v) = 0$, então v é *balanceado*.

Um fluxo x na rede $\mathcal{N} = (V, A, l, u, b)$ é *viável* se $l(vw) \leq x(vw) \leq u(vw)$ para todo arco $vw \in A$ e $b_x(v) = b(v)$ para todo vértice $v \in V$. Caso o vetor de balanço não seja especificado, basta que x satisfaça a primeira restrição. Decidir se uma rede admite um fluxo viável é o que chamamos de *problema de fluxo clássico*. A Figura 6 ilustra esses conceitos.

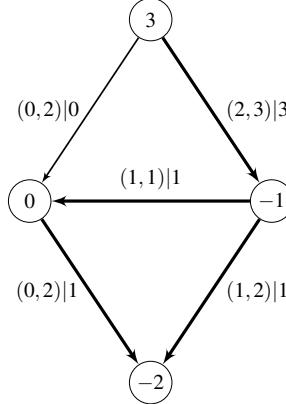


Figura 6 – Uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l, u)$ com fluxo x . Ao lado de cada arco vw está a representação $(l(vw), u(vw))|x(vw)$ e o número dentro de cada vértice é o balanço deste vértice segundo o fluxo x . Os arcos com fluxo positivo estão destacados em negrito.

Dois fluxos x e y em uma mesma rede $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u, b)$ são *arco-disjuntos*, se $x(vw) \cdot y(vw) = 0$ para todo arco $vw \in A$, isto é, cada arco só possui valor positivo em no máximo um dos fluxos.

3.2 Redução entre diferentes modelos de fluxo

Nesta seção, veremos que é possível restringir consideravelmente as definições de rede sem perder capacidade de modelagem. Dessa forma, podemos considerar e demonstrar resultados sobre esses modelos de fluxo mais simples sem perder generalidade.

3.2.1 Eliminação dos limites inferiores

Iniciamos mostrando que podemos considerar apenas redes com a função de limite inferior $l \equiv 0$.

Lema 2 (Exercício). *Seja $\mathcal{N} = (V, A, l, u, b)$ uma rede.*

- Suponha que para o arco $vw \in A$ temos $l(vw) > 0$. Seja então \mathcal{N}' a rede obtida a partir das seguintes modificações em \mathcal{N} : $b(v) := b(v) - l(vw)$, $b(w) := b(w) + l(vw)$, $u(vw) := u(vw) - l(vw)$ e $l(vw) := 0$. Então, todo fluxo viável x em \mathcal{N} possui um fluxo correspondente x' em \mathcal{N}' que também é viável, e vice-versa.*
- Existe uma rede $\mathcal{N}_{l \equiv 0}$, que possui todos os limites inferiores iguais a zero, na qual, para todo fluxo viável x em \mathcal{N} , existe um fluxo viável x' equivalente em \mathcal{N}' , e vice versa.*

Demonstração. (a) Sejam $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ e x conforme o enunciado. Construímos x' a partir de x da

seguinte maneira: $x'(yz) = x(yz)$ para todo arco $yz \in A \setminus \{vw\}$ e $x'(vw) = x(vw) - l(vw)$. Dessa forma, o balanço do vértice v no fluxo x' será decrementado de $l(vw)$ unidades, ao passo que o balanço de w é incrementado de $l(vw)$ unidades em relação ao fluxo x . Essa alteração também não viola a capacidade do arco vw em \mathcal{N}' , logo x' é viável em \mathcal{N}' . Construímos x a partir de x' fazendo $x(vw) = x'(vw) + l(vw)$ e mantendo o mesmo fluxo nos demais arcos.

Como podemos eliminar os limites inferiores um arco por vez, (b) segue de sucessivas aplicações de (a). \square

É importante observar que podemos construir $\mathcal{N}_{l \equiv 0}$ em tempo $O(n+m)$, pois realizamos um número constante de operações para cada arco com limite superior positivo.

3.2.2 Fluxos com exatamente uma fonte e um sumidouro

Sejam s, t dois vértices distintos de uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u)$. Um (s, t) -fluxo é um fluxo x tal que para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, tem-se:

$$b_x(v) = \begin{cases} k & \text{se } v = s \\ -k & \text{se } v = t \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na definição acima, dizemos que $|x| = k$ é o *valor* do fluxo x .

Seja $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u)$ uma rede com vértices destacados s e t , e seja k o maior valor tal que \mathcal{N} possui um (s, t) -fluxo viável x de valor k . Dizemos que x é um (s, t) -fluxo *máximo* em \mathcal{N} . Se os vértices s e t são, respectivamente, a única fonte e o único sumidouro da rede, dizemos que x é um *fluxo máximo* de \mathcal{N} . Encontrar um (s, t) -fluxo máximo em uma rede é o problema conhecido como *problema de fluxo máximo*. Esse problema pode ser resolvido em tempo polinomial e será abordado na Seção 3.4.

No resultado a seguir, veremos que podemos ‘reduzir’ múltiplas fontes a uma só criando um vértice fonte especial e o conectando com as antigas fontes. Realizando um processo similar com os sumidouros, obtemos uma rede equivalente que possui apenas uma fonte e um sumidouro.

Lema 3 (Exercício). *Seja $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u, b)$ uma rede. Considere os conjuntos de vértices $P = \{v \in V : b(v) > 0\}$ e $Q = \{v \in V : b(v) < 0\}$. Definimos um inteiro $M = \sum_{p \in P} b(p)$ (que é o mesmo que $-\sum_{q \in Q} b(q)$) e uma rede $\mathcal{N}_{st} = (V \cup \{s, t\}, A', l' \equiv 0, u', b')$ da seguinte maneira:*

- (a) $A' = A \cup \{sp : p \in P\} \cup \{qt : q \in Q\}$,
- (b) $u'_{ij} = u_{ij}$ para todo $ij \in A$, $u'_{sp} = b(p)$ para todo $p \in P$ e $u'_{qt} = -b(q)$ para todo $q \in Q$,
- (c) $b'(v) = 0$ para todo $v \in V$, $b'(s) = M$ e $b'(t) = -M$.

Então, todo fluxo viável x em \mathcal{N} corresponde a um fluxo viável x' em \mathcal{N}_{st} , e vice versa.

Demonstração. Dado um fluxo viável x em \mathcal{N} , construímos x' da seguinte maneira: $x'(ij) = x(ij)$, para todo arco $ij \in A$; $x'(sp) = b(p)$, para todo $p \in P$; e $x'(qt) = b(q)$, para todo $q \in Q$. Observe que, no fluxo x' , os vértices em P tem balanço zero, assim como os vértices em Q . Dessa forma, os únicos vértices com balanço não nulo são s e t , e ainda, $b_{x'}(s) = \sum_{p \in P} b(p) = M$ e $b_{x'}(t) = \sum_{q \in Q} b(q) = -M$. Com isso, temos que x' é um fluxo viável em \mathcal{N}_{st} . Para construir x a partir de x' realizamos o processo inverso. \square

Observe que, no lema anterior, caso exista um fluxo viável x' com $|x'| = M$, este será um fluxo máximo em \mathcal{N}_{st} . Por isso, o Lema 3 relaciona o problema de decidir se uma rede possui um fluxo viável ao problema de fluxo máximo.

3.2.3 Circulações

Uma *circulação* é um fluxo x em que $b_x(v) = 0$ para todo $v \in V$. Até agora, vimos que, como consequência dos Lemas 2 e 3, todo modelo geral de fluxo possui um modelo equivalente em uma rede com $l \equiv 0$ e com apenas uma fonte e um sumidouro. Com base nesses lemas, o próximo resultado mostra que qualquer modelo geral de fluxo também pode ser construído utilizando, as aparentemente mais restritas, circulações. Vale ressaltar que, neste caso, não podemos excluir completamente os limites inferiores.

Lema 4 (Exercício). *Seja $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u, b)$ uma rede na qual $b(v) = 0$, para todo $v \in V \setminus \{s, t\}$, $b(s) = M$ e $b(t) = -M$, para vértices distintos $s, t \in V$. Seja $\mathcal{N}^* = (V, A \cup \{ts\}, l', u')$ a rede que é obtida, a partir de \mathcal{N} , pela adição do arco ts com $l'(ts) = u'(ts) = M$, sem alteração do limite inferior e da capacidade nos arcos originais de \mathcal{N} , e sem impor restrições no balanço de \mathcal{N}^* . Então, todo (s, t) -fluxo viável x em \mathcal{N} corresponde a uma circulação viável x' em \mathcal{N}^* , e vice versa.*

Demonstração. Sejam x um (s, t) -fluxo viável em \mathcal{N} e x' um fluxo em \mathcal{N}^* dado por: $x'(ts) = M$ e $x'(vw) = x(vw)$, para todo arco $vw \in A$. Em x , temos que $b_x(s) = M$ e $b_x(t) = -M$. Logo, o balanço desses vértices em x' é zero, pois temos M unidades de fluxo saindo de t e entrando em

s através do arco ts . Além disso, temos que $b_{x'}(v) = b_x(v) = 0$ para todo $v \in V \setminus \{s, t\}$, visto que não houve alteração de fluxo nos arcos em torno desses vértices. Logo x' é uma circulação, e é viável pois respeita o limite inferior e capacidade de todos os arcos. Para provar o contrário, basta construirmos o (s, t) -fluxo viável a partir de uma circulação viável x' em \mathcal{N}^* pela simples remoção do arco ts . \square

3.3 Decomposição de fluxo

Nesta seção, veremos que todo fluxo em uma rede pode ser decomposto em um pequeno número de ‘fluxos elementares’ na mesma rede. Ao longo desta seção, consideraremos uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u)$ com n vértices e m arcos. Note que $D = (V, A)$ é o digrafo base de \mathcal{N} , e por caminho ou ciclo em \mathcal{N} queremos dizer caminho ou ciclo em D .

Um *fluxo caminho* sobre um caminho P em \mathcal{N} é um fluxo f_P tal que, para algum inteiro k , $f_P(vw) = k$, se vw é um arco de P , e $f_P(vw) = 0$, caso contrário. Isto é, se consideramos o subgrafo arco-induzido pelos arcos com valor positivo em f_P , obtemos o caminho P . Definimos um *fluxo ciclo* f_C de maneira análoga para um ciclo C em \mathcal{N} . A *soma* de dois fluxos x e y , que denotamos por $[x + y]$, é o fluxo resultante da soma dos valores de x e y em cada arco, ou seja, $[x + y](vw) = x(vw) + y(vw), \forall vw \in A$.

Nos problemas que serão abordados nos próximos capítulos, supomos que não existem fluxos ciclos. Isto significa que, dados um fluxo x e um ciclo C em \mathcal{N} , o valor de x é nulo em pelo menos um arco de C . Observe que a adição ou subtração de um fluxo ciclo f_C não altera o balanço dos vértice em $V(C)$. Fazemos tal suposição para considerar apenas a parte do fluxo que é relevante para o seu balanço, e podemos fazê-la devido ao resultado do Teorema 1.

Teorema 1 (Ford e Fulkerson (1962)). *Todo fluxo x em \mathcal{N} pode ser representado pela soma de fluxos caminhos $f_{P_1}, f_{P_2}, \dots, f_{P_\alpha}$ e fluxos ciclos $f_{C_1}, f_{C_2}, \dots, f_{C_\beta}$ de modo que:*

- (a) *Todo caminho P_i conecta um vértice fonte a um vértice sumidouro, para todo $i \in [\alpha]$.*
- (b) $\alpha + \beta \leq n + m$ e $\beta \leq m$.

Demonstração. Seja x um fluxo não nulo em \mathcal{N} . Primeiro suponha que $b_x(v_0) > 0$, para algum $v_0 \in V$. Uma vez que $b_x(v_0) > 0$, segue de (3.2) que existe algum arco que sai de v_0 , digamos v_0v_1 , tal que $x(v_0v_1) > 0$. Se $b_x(v_1) < 0$, encontramos um caminho de v_0 para o sumidouro v_1 . Caso contrário, temos que $b_x(v_1) \geq 0$ e como $x(v_0v_1) > 0$, sabemos por (3.2) que deve existir algum arco v_1v_2 com $b_x(v_1v_2) > 0$. Repetindo esse processo, ou encontramos um caminho P de v_0

para um vértice sumidouro v_k , ou alcançamos algum vértice que já foi examinado anteriormente (já que D é finito). No último caso, encontramos um ciclo $C = v_r, v_{r+1}, \dots, v_{p-1}, v_p, v_r$. Observe que durante as etapas, examinamos apenas arcos com valor positivo em x , logo x é positivo nos arcos de P ou de C . O próximo passo é modificar o fluxo x :

- (i) Se foi encontrado um caminho P de v_0 para v_k , então definimos:

$\delta = \min\{x(v_i v_{i+1}) : v_i v_{i+1} \in A(P)\} > 0$ e $\mu = \min\{b_x(v_0), -b_x(v_k), \delta\} > 0$. Tomamos f_P como um fluxo caminho de valor μ sobre P . Agora, atualizamos x subtraindo μ unidades de fluxo nos arcos de P .

- (ii) Do contrário, encontramos um ciclo C . Nesse caso, temos que $\mu = \min\{x(v_i v_{i+1}) : v_i v_{i+1} \in A(C)\} > 0$. Tomamos f_C com um fluxo ciclo de valor μ em torno C . Decrementamos μ unidades de x nos arcos de C .

Se, após as alterações acima, não há nenhum arco com valor positivo em x , terminamos. Se não for o caso, repetimos o processo acima. Caso antes de x se tornar nulo ($x \equiv 0$), todos os vértices ficarem balanceados com respeito ao x atual ($b_x(v) = 0$), escolhemos um v_0 tal que exista um arco $v_0 v_1$ com fluxo positivo, e partir desse ponto apenas ciclos serão extraídos pela rotina acima.

Como em cada iteração, ou um vértice se torna balanceado com respeito ao x atual, ou um arco perde todo o seu fluxo, o número total de iterações é no máximo $n + m$. Temos então que (a) e a primeira parte de (b) seguem da descrição acima. A segunda parte de (b) segue do fato de que a cada fluxo ciclo extraído, pelo menos um arco perde todo o seu fluxo. \square

Com base na demonstração anterior é possível construir um algoritmo polinomial para encontrar uma decomposição em fluxos. Utilizando busca em profundidade para encontrar o próximo fluxo a ser extraído, esse algoritmo tem complexidade $O(m^2)$.

O seguinte corolário é um resultado imediato do Teorema 1.

Corolário 1 ((FORD; FULKERSON, 1962)). *Dada uma rede \mathcal{N} , toda circulação em \mathcal{N} pode ser decomposta em no máximo m fluxos ciclos.*

3.4 O problema de fluxo máximo

Nesta seção, vamos considerar uma rede $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u)$ com n vértices e m arcos, onde D é o digrafo base de \mathcal{N} . No problema de fluxo máximo, dado um par de vértices s, t de \mathcal{N} , estamos interessados em descobrir qual a maior quantidade de fluxo que podemos

enviar de s para t em \mathcal{N} . Isto é o mesmo que determinar o maior valor k tal que \mathcal{N} admite um (s,t) -fluxo viável x com $|x| = k$.

Como resultado dos Lemas 2 e 3, podemos converter o problema de encontrar um fluxo viável em uma rede qualquer no problema de encontrar um fluxo máximo em uma rede com todos os limites inferiores iguais a zero e com apenas uma fonte s e um sumidouro t . Isso implica que podemos utilizar algoritmos do problema de fluxo máximo em outros problemas de fluxo. Além disso, o problema de fluxo máximo também possui uma relação interessante com cortes em redes.

Um (s,t) -corte é um conjunto de arcos na forma $(S, \bar{S})_D$, onde $s \in S$, $t \in \bar{S}$, $S \cup \bar{S} = V$ e $S \cap \bar{S} = \emptyset$. Observe que se removermos os arcos de um (s,t) -corte, também eliminamos todos os possíveis (s,t) -caminhos do digrafo. Usamos $u(S, \bar{S})$ para denotar a *capacidade* de um (s,t) -corte $(S, \bar{S})_D$ que é dada pela soma das capacidades dos arcos com calda em S e cabeça em \bar{S} . Um (s,t) -corte $(S, \bar{S})_D$ é *mínimo* se $u(S, \bar{S}) \leq u(S', \bar{S}')$, para todo (s,t) -corte $(S', \bar{S}')_D$. O problema de determinar a capacidade do corte mínimo de uma rede está diretamente relacionado com o problema de fluxo máximo, como mostra resultado a seguir, que é conhecido como teorema do fluxo máximo e corte mínimo.

Teorema 2 (Ford e Fulkerson (1962)). *Seja $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u)$ uma rede com fonte s e sumidouro t . Então, para todo (s,t) -fluxo viável x em \mathcal{N} , as duas assertivas a seguir são equivalentes:*

- (a) *O fluxo x é um (s,t) -fluxo máximo.*
- (b) *Existe um (s,t) -corte mínimo $(S, \bar{S})_D$ tal que $|x| = u(S, \bar{S})$.*

Ao definir redes no início deste capítulo, declaramos os parâmetros l, u e b como funções inteiras (ou inteiras positivas). Também estabelecemos um fluxo como uma função inteira. Essa restrição não foi simplesmente arbitrária, mas em decorrência das capacidades terem sido declaradas inteiras. Para um propósito mais geral, podemos considerar redes com funções de limite inferior e capacidade em \mathbb{R}_+ e, consequentemente, fluxos não necessariamente inteiros. Vale ressaltar que todos os resultados que foram apresentados neste capítulo também se aplicam para redes e fluxos não inteiros. Do ponto de vista prático, em muitas aplicações apenas fluxos inteiros fazem sentido. Um resultado de (FORD; FULKERSON, 1962) mostra que podemos considerar apenas fluxos inteiros, desde que todas as capacidades também sejam inteiras.

Teorema 3 (Ford e Fulkerson (1962)). *Seja $\mathcal{N} = (V, A, l \equiv 0, u)$ uma rede com fonte s e sumidouro t . Se todas as capacidades são inteiras, então existe um (s, t) -fluxo máximo em \mathcal{N} que é inteiro.*

A partir da prova dada por (FORD; FULKERSON, 1962) para o teorema do fluxo máximo e corte mínimo, é possível criar um método para encontrar o fluxo máximo. Esse método é conhecido como *algoritmo Ford-Fulkerson* e tem complexidade $O(m|x^*|)$ ¹, onde x^* é um (s, t) -fluxo máximo. Como a complexidade do algoritmo Ford-Fulkerson depende do valor do fluxo máximo, não podemos dizer que ele é polinomial em n e m (ver Seção 2.2). Posteriormente, surgiram vários algoritmos polinomiais para o problema de fluxo máximo, por exemplo, (EDMONDS; KARP, 1972) sugere algumas modificações no método de (FORD; FULKERSON, 1962) que resultam em um algoritmo de complexidade $O(m^2)$. Durante vários anos a pergunta: “existe um algoritmo de complexidade $O(nm)$ para o problema de fluxo máximo?” ficou sem resposta e foi tema de pesquisas. A questão foi respondida positivamente por (ORLIN, 2013), que desenvolveu um algoritmo com complexidade $O(nm)$.

¹ Este resultado é restrito à redes com todas as capacidades inteiras.

4 FLUXOS ARCO-DISJUNTOS

O problema de decidir se uma rede admite dois fluxos arco-disjuntos, foi introduzido em Bang-Jensen e Bessy (2014). É possível analisar a complexidade desse problema sob diferentes cenários. Por exemplo, podemos considerar redes com uma função de capacidade específica, redes sobre uma classe particular de digrafos, ou ainda, combinar essas restrições. Com relação aos fluxos, podemos nos restringir a buscar fluxos com balanços distintos ou idênticos, e, neste último caso, podemos ainda considerar um balanço genérico ou específico. Neste capítulo, apresentamos alguns dos principais resultados de complexidade acerca desse problema. Para todo caso, a menos que o contrário seja especificado, quando nos referimos a uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$, o seu digrafo base $D = (V, A)$ pode admitir arcos paralelos e consideraremos apenas fluxos viáveis. Também omitimos a função de limite inferior de \mathcal{N} , porque sempre consideramos $l \equiv 0$, já que esta restrição não reduz generalidade da rede (ver Seção 3.2).

4.1 Fluxos arco-disjuntos em redes de capacidade no máximo 2

Redes de capacidade unitária são do tipo $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv 1)$, ou seja, redes em que todos os arcos tem capacidade 1. Este tipo de rede é muito utilizada em problemas que lidam com caminhos. De fato, o digrafo $D = (V, A)$ possui um (s, t) -caminho se, e somente se, \mathcal{N} possui um (s, t) -fluxo de valor 1.

Mesmo em redes de capacidade unitária, decidir sobre a existência de fluxos arco-disjuntos x e y é difícil, pois o problema de 2-caminhos arco-disjuntos é um caso especial. Lembrando que, no problema de 2-caminhos arco-disjuntos, recebemos como entrada um digrafo D e dois pares de vértices (s_1, t_1) e (s_2, t_2) , e queremos decidir se existem (s_1, t_1) , (s_2, t_2) -caminhos arco-disjuntos em D .

Teorema 4 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *É \mathcal{NP} -completo decidir se uma rede de capacidade unitária possui dois fluxos arco-disjuntos x e y , cada qual com um balanço pré-determinado.*

Demonstração. Reduzimos o problema de 2-caminhos arco-disjuntos a este problema. Construímos uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv 1)$, dando capacidade 1 a todos os arcos de D . O resultado segue então do fato de que D possui os (s_1, t_1) , (s_2, t_2) -caminhos arco-disjuntos se, e somente se, \mathcal{N} possui fluxos arco-disjuntos x e y , onde x é um (s_1, t_1) -fluxo e y é um (s_2, t_2) -fluxo, ambos de valor 1. \square

Observe que, no resultado anterior, os fluxos x e y possuem balanços diferentes. Se buscamos por dois fluxos arco-disjuntos com o mesmo balanço, o problema se torna polinomial (em redes de capacidade unitária).

Teorema 5 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *Sejam $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv 1)$ uma rede de capacidade unitária e um vetor de balanço $b \not\equiv 0$. Então, existem dois fluxos arco-disjuntos x e y em \mathcal{N} , ambos com balanço b , se, e somente se, existe um fluxo z em \mathcal{N} com balanço $b_z \equiv 2b$. Além disso, existe um algoritmo polinomial para decidir sobre a existência de x e y .*

O resultado anterior pode ser generalizado para k fluxos arco-disjuntos com mesmo balanço.

Teorema 6 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *Sejam $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv 1)$ uma rede de capacidade unitária, um vetor de balanço $b \not\equiv 0$ e um inteiro k . Então, existem k fluxos arco-disjuntos em \mathcal{N} , todos com balanço b , se, e somente se, existe um fluxo z em \mathcal{N} com balanço $b_z \equiv kb$. Consequentemente, a existência desses fluxos pode ser verificada em tempo polinomial.*

De acordo com esses resultados, decidir sobre a existência de fluxos arco-disjuntos com mesmo balanço é polinomial (se $u \equiv 1$) limitando-se ao problema encontrar um fluxo viável. No entanto, se permitirmos apenas um arco com capacidade 2, o problema se torna \mathcal{NP} -completo.

Teorema 7 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *É \mathcal{NP} -completo decidir quando uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u, b)$ com $u(vw) \in \{1, 2\}$, $\forall vw \in A$ e pelo menos um arco com capacidade 2, possui dois fluxos arco-disjuntos viáveis.*

Considere agora o caso em que queremos encontrar (s, t) -fluxos arco-disjuntos com a mesma fonte s e o mesmo sumidouro t . Para fluxos de valor 2, em redes de capacidade unitária, o resultado segue do Teorema 6. Se permitirmos apenas um arco com capacidade 2 ainda podemos encontrar os (s, t) -fluxos em tempo polinomial, porém, se relaxarmos um pouco mais a condição e permitirmos dois arcos com capacidade 2, o problema se torna \mathcal{NP} -completo.

Teorema 8 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *É \mathcal{NP} -completo decidir se uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$ com $u(vw) \in \{1, 2\}$, $\forall vw \in A$ e pelo menos dois arcos com capacidade 2, possui dois (s, t) -fluxos arco-disjuntos de valor 2, para dois vértices s, t de \mathcal{N} .*

4.2 (s,t) -fluxos arco-disjuntos em redes acíclicas

O problema de k -caminhos arco-disjuntos é polinomial em digrafos acíclicos. Motivados por esse fato, Bang-Jensen e Bessy (2014) estudaram fluxos arco-disjuntos nessa classe de digrafos. O primeiro resultado que eles obtiveram, entretanto, foi que o problema continua \mathcal{NP} -completo se o valor dos fluxos não for fixo.

Teorema 9 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *Dados uma rede acíclica $\mathcal{N} = (V, A, u)$ e um número natural k , é NP-completo decidir se existem dois (s,t) -fluxos arco-disjuntos em \mathcal{N} , ambos de valor k .*

Demonstração. Considere uma instância do problema de particionamento numérico: um conjunto de inteiros $N = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ cuja soma $\sum_{i \in [r]} a_i = 2K$, na qual queremos saber se existe um subconjunto $J \subset [r]$ tal que $\sum_{j \in J} a_j = K$. A partir dela, construímos uma rede $\mathcal{N}(\{s, t, v_1, v_2, \dots, v_r\}, A, u)$, adicionando arcos para formar os caminhos s, v_i, t , para todo $i \in [r]$, com capacidade $u(sv_i) = u(v_i t) = a_i$. Agora, observe que \mathcal{N} admite dois (s,t) -fluxos arco-disjuntos, ambos de valor K se, e somente se, existe um subconjunto J tal que $\sum_{j \in J} a_j = K$. Então o resultado segue do fato de o problema de particionamento numérico ser \mathcal{NP} -completo, que pode ser visto em (GAREY; JOHNSON, 1979, p. 223). \square

Limitando a 2 a capacidade e o valor dos fluxos, Bang-Jensen e Bessy (2014) obtiveram um resultado polinomial. Com essa restrição, eles conseguiram generalizar um algoritmo proposto por Shiloach e Perl (1978) para o problema de 2-caminhos disjuntos, em digrafos acíclicos. No problema de 2-caminhos disjuntos, os caminhos que procuramos não são apenas arco-disjuntos, mas também disjuntos em vértices. Como resultado, a generalização do algoritmo também encontra fluxos disjuntos em vértices. Dois fluxos x e y são *disjuntos em vértices* se os subdigrafos arco-induzidos $D[A_x]$ e $D[A_y]$ não possuem vértices em comum, onde A_x e A_y são, respectivamente, os conjuntos de arcos com fluxo positivo em x e em y .

Teorema 10 ((BANG-JENSEN; BESSY, 2014)). *Existe um algoritmo polinomial que decide quando uma rede acíclica $\mathcal{N} = (V, A, u)$, com $u(vw) \in \{1, 2\}$ para todo $vw \in A$, admite dois fluxos disjuntos em vértices x_1 e x_2 , tais que, para $i = 1, 2$, x_i é um (s_i, t_i) -fluxo de valor 2 e s_1, s_2, t_1, t_2 são vértices distintos previamente estabelecidos.*

Observe que, uma vez que o resultado anterior se trata de fluxos disjuntos em vértices, necessariamente os vértices s_1, s_2, t_1 e t_2 são todos distintos e, além disso, $b_{x_1} \neq b_{x_2}$.

Ou seja, temos um resultado polinomial, em redes com $u \in \{1, 2\}$, para fluxos com balanços diferentes. Além disso, esse resultado pode ser estendido para fluxos arco-disjuntos (mas não necessariamente disjuntos em vértices), pois o algoritmo incluído na prova do Teorema 10 pode ser modificado para tal e, essa versão modificada, permite que $s_1 = s_2$ ou $t_1 = t_2$.

Os resultados discutidos ao longo desse capítulo estão resumidos na Tabela 1.

Fluxos	Vetor de balanço b	Capacidade u	Complexidade
x, y	$b_x \not\equiv b_y$	$u \equiv 1$	\mathcal{NP} -completo
x, y	$b \equiv b_x \equiv b_y$	$u \equiv 1$	Polinomial
x_1, \dots, x_k fluxos com balanço b	$b_{x_1} \dots b_{x_k} \equiv b$	$u \equiv 1$	Polynomial
x, y	$b \equiv b_x \equiv b_y$	$u_{ij} \in \{1, 2\}^*$	\mathcal{NP} -completo
$x, y (s, t)$ -fluxos de valor 2	$b(s) = 2, b(t) = -2$ e $b(v) = 0$, para $v \notin \{s, t\}$	$u_{ij} \in \{1, 2\}^{**}$	\mathcal{NP} -completo
$x, y (s, t)$ -fluxos*** de valor k	$b(s) = k, b(t) = -k$ e $b(v) = 0$, para $v \notin \{s, t\}$	qualquer	\mathcal{NP} -completo
$x_1, x_2 (s_i, t_i)$ -fluxos*** de valor 2	$b_i(s_i) = 2, b_i(t_i) = -2$ e $b_i(v) = 0$, para $v \notin \{s_i, t_i\}$	$u_{ij} \in \{1, 2\}$	Polinomial
$x_1, x_2 (s_i, t_i)$ -fluxos de valor 2	$b_i(s_i) = 2, b_i(t_i) = -2$ e $b_i(v) = 0$, para $v \notin \{s_i, t_i\}$	$u_{ij} \in \{1, 2\}$	Polinomial
$x, y (s, t)$ -fluxos de valor 2	$b(s) = 2, b(t) = -2$ e $b(v) = 0$, para $v \notin \{s, t\}$	$u_{ij} \in \{1, 2\}$	Polinomial

Tabela 1 – Tabela de complexidade: os resultados destacados em cinza são restritos a digrafos acíclicos; *requer ao menos **um** arco com capacidade 2; **requer ao menos **dois** arcos de capacidade 2; ***fluxos disjuntos em vértice.

5 RAMIFICAÇÕES E FLUXOS RAMIFICADOS

Uma *ramificação* em um digrafo D é um subdigrafo gerador de D que é uma árvore enraizada, ou seja, uma árvore com um vértice especial, chamado de *raiz*, que possui grau de entrada zero, enquanto todos os demais vértices possuem grau de entrada um¹. Uma *s-ramificação* é uma ramificação cuja a raiz é o vértice s (ver exemplo da Figura 7). Observe que em uma *s*-ramificação, todos os vértices são alcançáveis a partir de s .

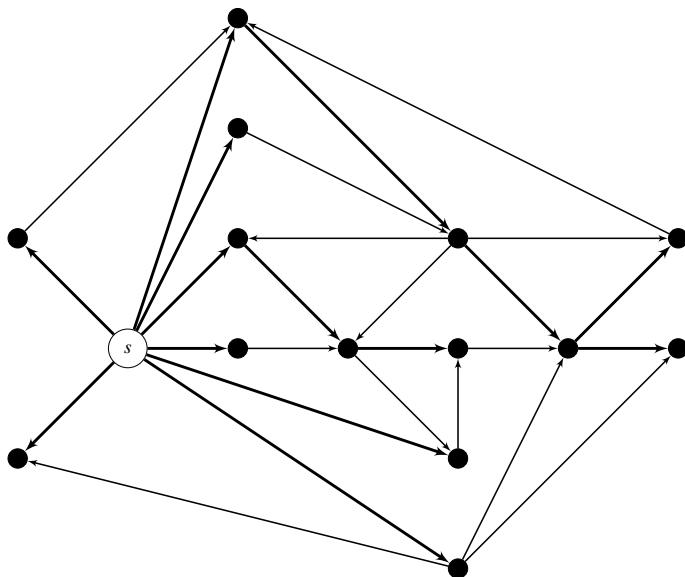


Figura 7 – Exemplo de ramificação em um digrafo D com raiz s . Os arcos da ramificação estão destacados em negrito e a raiz s também foi destacada.

Fonte: Adaptado de (BANG-JENSEN; BESSY, 2014).

Um *fluxo s-ramificado* em uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$ é um fluxo x no qual $b_x(s) = n - 1$ e $b_x(v) = -1$ para todo $v \in V - s$, em que n é o número de vértices de \mathcal{N} . No restante do capítulo sempre adotaremos n como sendo o número de vértices da rede em questão.

Ainda em (BANG-JENSEN; BESSY, 2014) são apresentados alguns resultados acerca do problema de decidir se existem 2 fluxos *s*-ramificados arco-disjuntos em uma rede \mathcal{N} . Bang-Jensen *et al.* (2016) se aprofundaram nesse problema, analisando sua complexidade de acordo com a função de capacidade. Como veremos a seguir, obtivemos aqui dois resultados: resolvemos uma questão de complexidade em aberto e, usando a nossa prova, obtivemos uma prova alternativa para um resultado de complexidade de (BANG-JENSEN *et al.*, 2016).

¹ Alguns autores utilizam o termo arborescência, mas sem exigir que seja um subdigrafo gerador.

5.1 Fluxos ramificados: complexidade com base na função de capacidade

Dado um fluxo x em uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$, denotamos por D_x o subdigrafo gerador de D que contém apenas os arcos com valor positivo em x . Formalmente, $D_x = (V, A_x)$, onde $A_x = \{vw \in A : x(vw) > 0\}$. É importante observar que se x é um fluxo s -ramificado, não necessariamente D_x é uma s -ramificação (ver Figura 8), pois pode haver algum vértice v com $d_{D_x}^-(v) > 1$, ou ainda, D_x pode conter alguns ciclos, pois ciclos não afetam o balanço. No entanto, podemos sempre obter um subdigrafo gerador de D_x que é uma s -ramificação. Como podemos eliminar os ciclos fazendo uma decomposição de fluxo (Teorema 1), vamos desconsiderá-los. Então, para transformar D_x em uma s -ramificação, podemos iterativamente remover um arco que entra em algum vértice com grau de entrada maior que 1. No exemplo da Figura 8, se removermos um dos arcos que entram no vértice v , obtemos uma ramificação. Por outro lado, dada uma s -ramificação R_s em D , talvez não exista um fluxo s -ramificado em \mathcal{N} , tal que $A(R_s) = A_x$, isso significa que, devido às restrições de capacidade, nem sempre é possível construir um fluxo ramificado a partir de uma ramificação.

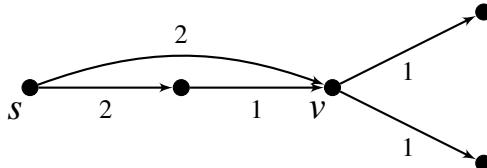


Figura 8 – Rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv 2)$ e fluxo s -ramificado com valor indicado ao lado de cada arco.

Em um fluxo ramificado x , o valor de x em um arco qualquer é no máximo $n - 1$. Logo, em uma rede em que todos os arcos tem capacidade $n - 1$, basicamente a função de capacidade não impõe nenhuma restrição sobre x . Uma consequência desse fato é que, em redes desse tipo, uma ramificação pode ser convertida em um fluxo ramificado.

Lema 5 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *Um multigrafo direcionado $D = (V, A)$ possui uma s -ramificação R_s se, e somente se, a rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv |V| - 1)$ admite um fluxo s -ramificado.*

Edmonds (1973) caracterizou os digrafos que possuem ℓ ramificações arco-disjuntas enraizadas em um dado vértice.

Teorema 11 (Edmonds (1973)). *Um multigrafo direcionado $D = (V, A)$ com vértice especial s possui ℓ s -ramificações arco-disjuntas se, e somente se,*

$$d_D^-(X) \geq \ell, \text{ para todo } \emptyset \neq X \subseteq V - s.$$

Combinando esse resultado com o Lema 5, também podemos estender essa caracterização para redes cuja função de capacidade é $u \equiv n - 1$. Além disso, utilizando a prova algorítmica dada por (LOVÁSZ, 1976) para o Teorema 11, obtém-se o seguinte resultado.

Teorema 12 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *Uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv |V| - 1)$ admite ℓ fluxos s -ramificados arco-disjuntos x_1, x_2, \dots, x_ℓ se, e somente se,*

$$d_D^-(X) \geq \ell, \text{ para todo } \emptyset \neq X \subseteq V - s.$$

Além disso, existe um algoritmo polinomial para construir os fluxos x_1, x_2, \dots, x_ℓ , quando estes existirem.

Como mencionado anteriormente, em um fluxo ramificado não há necessidade de que um arco tenha valor maior que $n - 1$, por isso, a função de capacidade só impõe restrições ao fluxo quando é menor que $n - 1$. Quando buscamos apenas dois fluxos, é possível restringir a capacidade, reduzindo-a por um fator constante k , sem que o problema deixe de ser polinomial.

Teorema 13 (Bang-Jensen *et al.* (2016)). *Dado um inteiro positivo k , existe um algoritmo que recebe como entrada uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv n - k)$ e um vértice especial s e decide em tempo polinomial se \mathcal{N} admite dois fluxos s -ramificados arco-disjuntos.*

O Teorema 5 mostra que é polinomial decidir se uma rede com capacidades unitárias ($u \equiv 1$) possui dois fluxos arco-disjuntos com o mesmo balanço. Note que, em particular, o resultado vale para fluxos ramificados. Por outro lado, o seguinte teorema foi provado:

Teorema 14 (Bang-Jensen e Bessy (2014)). *É \mathcal{NP} -completo decidir se uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$, com $u_{vw} \in \{1, 2\} \forall vw \in A$ e pelo menos um arco com capacidade 2, admite dois fluxos s -ramificados arco-disjuntos.*

O Teorema 14 é utilizado para provar que se aumentarmos a capacidade em no máximo uma constante, o problema continua \mathcal{NP} -completo.

Teorema 15 (Bang-Jensen *et al.* (2016)). *Para todo inteiro $k \geq 2$ fixo, é \mathcal{NP} -completo decidir se uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv k)$ possui dois fluxos s -ramificados arco-disjuntos.*

Vale ressaltar que nos Teoremas 13 e 15 a constante k representa um valor fixado previamente e que não pode depender de n , por exemplo, não podemos definir $2k = n$, pois, nesse caso, os Teoremas 13 e 15 estariam em contradição.

5.2 O caso da capacidade $u \equiv f(n)$

Pelos resultados anteriores, observamos que, aparentemente, o problema de encontrar fluxos ramificados arco-disjuntos se torna mais fácil à medida que aumentamos a capacidade. Estendemos resultados obtidos em (BANG-JENSEN *et al.*, 2016) para mostrar que, como consequência da *Hipótese de Tempo Exponencial* (ETH) (IMPAGLIAZZO *et al.*, 2001), o problema considerado também é difícil se fixarmos a capacidade em qualquer valor entre $\log(n)^{1+\varepsilon}$ e $n/2$, onde n é o número de vértices e ε é um real positivo. A ETH é uma conjectura que afirma não existir algoritmo para resolver o problema 3-SAT que seja sub-exponencial no número de variáveis (ver Seção 2.2.2).

Na demonstração a seguir, que é inspirada em uma prova de (BANG-JENSEN *et al.*, 2016), recebemos uma função f e uma instância do 3-SAT \mathcal{F} , construímos uma rede a partir de \mathcal{F} e inserimos nessa rede um “mecanismo” que nos permite aumentar o seu tamanho sem alterar a sua estrutura básica. Desse modo, ajustamos o tamanho da rede n de maneira que $f(n)$ seja um valor conveniente e fazemos $u \equiv f(n)$. Nessa construção, também utilizamos uma *estrela*, que é uma ramificação em que todo vértice é vizinho de saída da raiz.

Teorema 16. *Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função tal que $\log(n)^{1+\varepsilon} \leq f(n) \leq n/2$, para todo $n \geq n_0$, onde n_0 é uma constante positiva. Além disso, suponha que existe outra constante C^* tal que, para todo $c \geq C^*$, existe um n satisfazendo $f(n) = c$.*

Dadas essas condições, seja $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv f(n))$ uma rede com n vértices e um vértice especial $s \in V$. Então, assumindo válida a ETH, não existe algoritmo polinomial (em n) para decidir se \mathcal{N} possui dois fluxos arco-disjuntos s -ramificados.

Demonstração. Seja \mathcal{F} uma instância do 3-SAT formada pelas variáveis v_1, v_2, \dots, v_ℓ e cláusulas C_1, C_2, \dots, C_m . Vamos construir uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv f(n))$, tal que \mathcal{N} possui dois fluxos s -ramificados e arco-disjuntos se, e somente se, \mathcal{F} é satisfatível (ver Figura 9).

Sejam X_1, X_2, \dots, X_ℓ e $W_1, W_2, \dots, W_{\ell-1}$ conjuntos de vértices de tamanho dois ($X_i = \{x_i, \bar{x}_i\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ e $W_j = \{w_j^1, w_j^2\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, \ell-1\}$). Seja Q um conjunto de vértices independentes com q vértices (o valor de q será determinado posteriormente). Seja M uma estrela, com m vértices e com dois arcos paralelos da raiz t' para os demais $m-1$ vértices. Adicionando ainda m vértices correspondentes às cláusulas de \mathcal{F} e dois vértices especiais s e t , temos que o

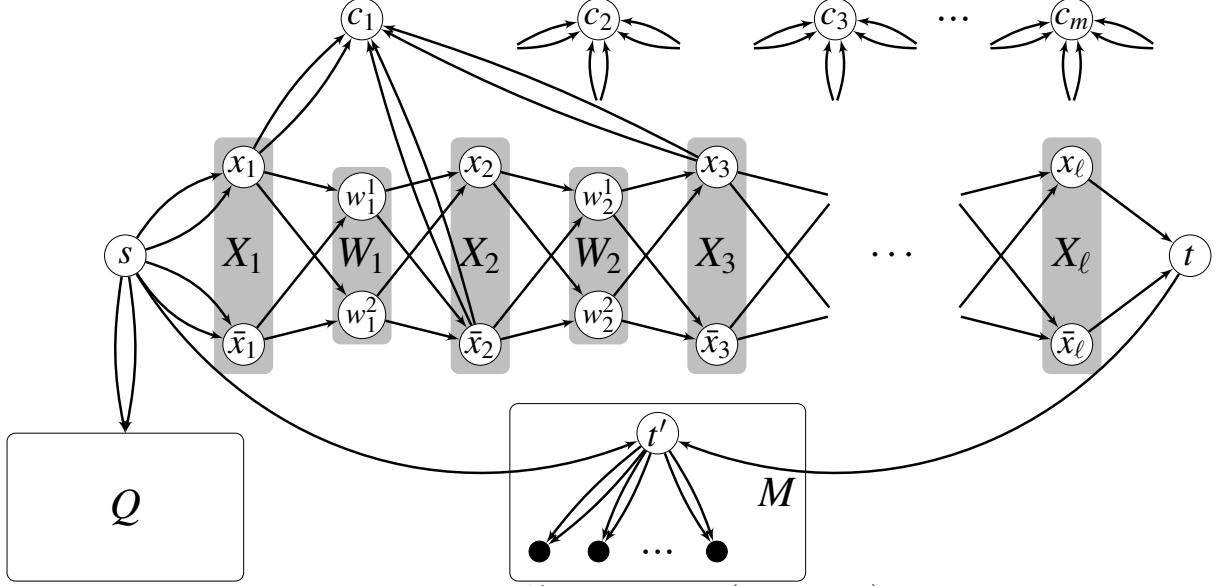


Figura 9 – Exemplo de construção de \mathcal{N} quando $C_1 = (v_1 * \bar{v}_2 * v_3)$.

conjunto de vértices de \mathcal{N} será dado por:

$$V = \{s, t, c_1, c_2, \dots, c_m\} \cup \bigcup_{i=1}^{\ell} X_i \cup \bigcup_{i=1}^{\ell-1} W_i \cup Q \cup V(M).$$

Em seguida, considere a adição de dois arcos paralelos de s para cada um dos vértices de Q e de X_1 , todos os arcos possíveis de X_i para W_i e de W_i para X_{i+1} , para todo $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$. Adicionamos também, os arcos de $x_\ell t, \bar{x}_\ell t, tt'$ e st' . Por último, para cada cláusula C_j de \mathcal{F} , $j = 1, 2, \dots, m$, adicionamos dois arcos paralelos de x_i para c_j , se C_j contém o literal v_i e dois arcos paralelos de \bar{x}_i para c_j , se C_j contém o literal \bar{v}_i , para todo $i = 1, 2, \dots, \ell$.

Dessa forma, temos que $|V| = n = 4\ell + 2m + q$ e vamos determinar o valor de q de maneira que $f(n) = f(4\ell + 2m + q) = 2\ell + m$. Note que, pelas propriedades de f , q não pode ser negativo, pois $f(n) \leq n/2$, e se $2\ell + m \geq C^*$, existe $c \geq 2(2\ell + m)$ tal que $f(c) = 2\ell + m$. Então, como podemos admitir que ℓ e m são suficientemente grandes, podemos escolher $q \geq 0$ satisfazendo $f(4\ell + 2m + q) = 2\ell + m$.

Suponha primeiro o caso em que \mathcal{N} possui dois fluxos z_1 e z_2 s -ramificados que sejam arco-disjuntos. Note que o grau de entrada dos vértices em $V - \{s, c_1, c_2, \dots, c_m\}$ é dois. Então, dos arcos que entram nesses vértices, um é utilizado por z_1 e o outro por z_2 . Além disso, como os vértices em $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ possuem grau de saída zero, o grau de entrada desses vértices é um em D_{z_1} e em D_{z_2} . Logo, temos que D_{z_i} é uma ramificação, ou seja, para todo vértice $u \in V$ existe um único (s, u) -caminho em D_{z_i} , para $i = 1, 2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $tt' \in A_{z_1}$, o que implica $z_1(tt') = m$. Seja P^F o (s, t') -caminho em D_{z_1} . Observe que tt' é o último arco desse caminho, e que $|P^F| = 2\ell + 2$. Logo, o fluxo no primeiro arco de P^F é maior

ou igual a $2\ell + m$. Como $2\ell + m = f(n)$, essa é exatamente a quantidade de fluxo enviada por s pelo primeiro arco de P^F . Observe então que nenhum dos vértices em P^F pode enviar fluxo para os vértices em $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, pois, caso contrário, não chegaria fluxo suficiente em t' . Adicionalmente, note que P^F intercepta exatamente um vértice de cada X_i , para $i = 1, 2, \dots, \ell$. Isso significa que, em z_1 , os vértices de cláusula recebem fluxo apenas de vértices que não estão em P^F . Isso implica que podemos atribuir $v_i = 0$, se $x_i \in V(P^F)$ e $v_i = 1$, se $\bar{x}_i \in V(P^F)$, para todo $i = 1, 2, \dots, \ell$. Como cada vértice em $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ recebe fluxo de algum vértice que não está em P^F , temos que cada cláusula de \mathcal{F} possui pelo menos um literal com valor 1. Logo, \mathcal{F} é satisfatível.

Suponha agora que \mathcal{F} é satisfatível e seja T uma atribuição verdade de \mathcal{F} . Seja X^V o conjunto que contém os vértices x_i , caso $v_i = 1$ pela atribuição T , e \bar{x}_i caso contrário, para todo $i = 1, 2, \dots, \ell$. Seja $X^F = \bigcup_{i=1}^{\ell} X_i - X^V$. Defina P_1^F (resp. P_2^V) como sendo o (s, t) -caminho que passa por todos os vértices em X^F (resp. X^V) e por todos os vértices w_j^1 , para $j = 1, 2, \dots, \ell - 1$. Note que $|V(P_1^F)| = |V(P_2^V)| = 2\ell + 1$. Similarmente, P_1^V (resp. P_2^F) é o caminho direcionado que inicia em s e passa por todos os vértices em X^V (resp. X^F) e pelos vértices w_j^2 . Os caminhos P_1^V e P_2^F também possuem o mesmo número de vértices, a saber, 2ℓ . Observe que podemos escolher o primeiro arco de cada um dos caminhos P_1^V, P_2^V, P_1^F e P_2^F , de modo que os quatro sejam arco-disjuntos entre si (ver Figura 10). Vamos construir dois fluxos arco-disjuntos s -ramificados

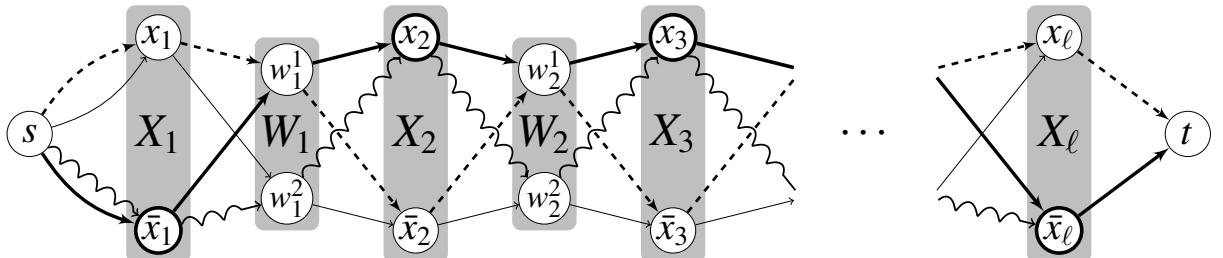


Figura 10 – Exemplo de construção dos caminhos P_1^V, P_2^V, P_1^F e P_2^F quando $\{\bar{x}_1, x_2, x_3, x_\ell\} \subseteq X^F$. Os arcos de P_1^V são os de menor espessura, já os de P_1^F , estão destacados em negrito. Os arcos em forma de mola e tracejados são, respectivamente, os arcos de P_2^F e P_2^V . Os vértices em X^F estão com a borda em negrito.

em \mathcal{N} da seguinte maneira: Em z_1 , enviamos $2\ell + m$ unidades de fluxo pelo primeiro arco de P_1^F . Como cada vértice do caminho consome uma unidade de fluxo, o vértice t é alcançado com $m + 1$ unidades. Além disso, enviamos m unidades para o vértice t' utilizando o arco tt' . Em z_2 , enviamos $2\ell - 1$ unidades de fluxo para distribuir entre os vértices de P_2^F e m unidades

pelo arco st' . Além disso, enviamos $2\ell + m - 1$ pelo primeiro arco de P_1^V em z_1 , e $2\ell + m$ pelo primeiro arco de P_2^V em z_2 . Note que, considerando a atribuição T , cada um dos m vértices em $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ é vizinho de pelo menos um vértice de P_i^V , para $i = 1, 2$, e dessa forma podemos distribuir o fluxo ao longo de P_i^V para alcançar esses vértices. Enviamos ainda, em ambos os fluxos, 1 unidade de fluxo para cada vértice em Q , visto que estes são vizinhos de saída de s . Como P_1^V, P_2^V, P_1^F e P_2^F são arco-disjuntos e os vértices em $\{c_1, c_2, \dots, c_m\} \cup Q \cup V(M) - \{t'\}$ possuem arcos paralelos, nenhum arco precisa ser utilizado por z_1 e z_2 ao mesmo tempo, ou seja, z_1 e z_2 são arco-disjuntos.

Suponha, por contradição, que existe um algoritmo polinomial para decidir se uma rede \mathcal{N} com n vértices e com vértice especial s possui dois fluxos arco-disjuntos s -ramificados, e que a complexidade desse algoritmo é $O(n^c)$, para alguma constante c . Pela redução, tal algoritmo resolve o 3-SAT.

Como $(\log(n))^{1+\varepsilon} \leq f(n)$, temos que $\log(n) \leq f(n)^{1/(1+\varepsilon)}$, e podemos obter um algoritmo para resolver o 3-SAT com complexidade:

$$O(n^c) = O(2^{c(\log(n))}) = O(2^{c(f(n)^{1/(1+\varepsilon)})}) = O(2^{c(2\ell+m)^{(1/(1+\varepsilon))}}).$$

No pior caso, todas as cláusulas são formadas por variáveis distintas, ou seja, $\ell \leq 3m$. Então, a complexidade é no máximo $O(2^{c7m^{(1/(1+\varepsilon))}})$. Como $1/(1+\varepsilon) < 1$, temos um algoritmo subexponencial (no número de cláusulas) para o 3-SAT, o que contradiz o Lema 1. \square

Adaptando a demonstração do Teorema 16, obtemos uma prova com uma construção diferente daquela dada por Bang-Jensen *et al.* (2016) para o caso em que a função de capacidade tem valor complementar ao teorema anterior, ou seja, para o caso em que $u \equiv n - f(n)$.

Teorema 17 (Bang-Jensen *et al.* (2016)). *Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função tal que $\log(n)^{1+\varepsilon} \leq f(n) \leq n/2$, para todo $n \geq n_0$, onde n_0 é uma constante positiva. Além disso, suponha que existe outra constante C^* tal que, para todo $c \geq C^*$, existe um n satisfazendo $f(n) = c$.*

Dadas essas condições, seja $\mathcal{N}' = (V, A, u \equiv n - f(n))$ uma rede com n vértices e um vértice especial $s \in V$. Então, assumindo válida a ETH, não existe algoritmo polinomial (em n) para decidir se \mathcal{N} possui dois fluxos arco-disjuntos s -ramificados.

Demonstração. Dada uma instância do 3-SAT $\mathcal{F} = C_1 * C_2 * \dots * C_m$, com variáveis v_1, v_2, \dots, v_ℓ , construímos \mathcal{N}' adicionando os conjuntos $\{s, t, c_1, c_2, \dots, c_m\}$, X_1, \dots, X_ℓ e $W_1, \dots, W_{\ell-1}$ e os

arcos entre esses vértices exatamente como no Teorema 16. Também como no caso anterior, adicionamos uma estrela com arcos paralelos e raiz t' , que aqui será chamada de Q' . Além disso, adicionamos os arcos st' e tt' . O número de vértices em Q' é dado por q' , de modo que, $f(n) = f(4\ell + m + q') = 2\ell + m$. Para concluir a construção, damos a cada arco $2\ell + q'$ de capacidade, que é igual a $n - f(n)$. Na Figura 11, temos uma ilustração da construção de \mathcal{N}' .

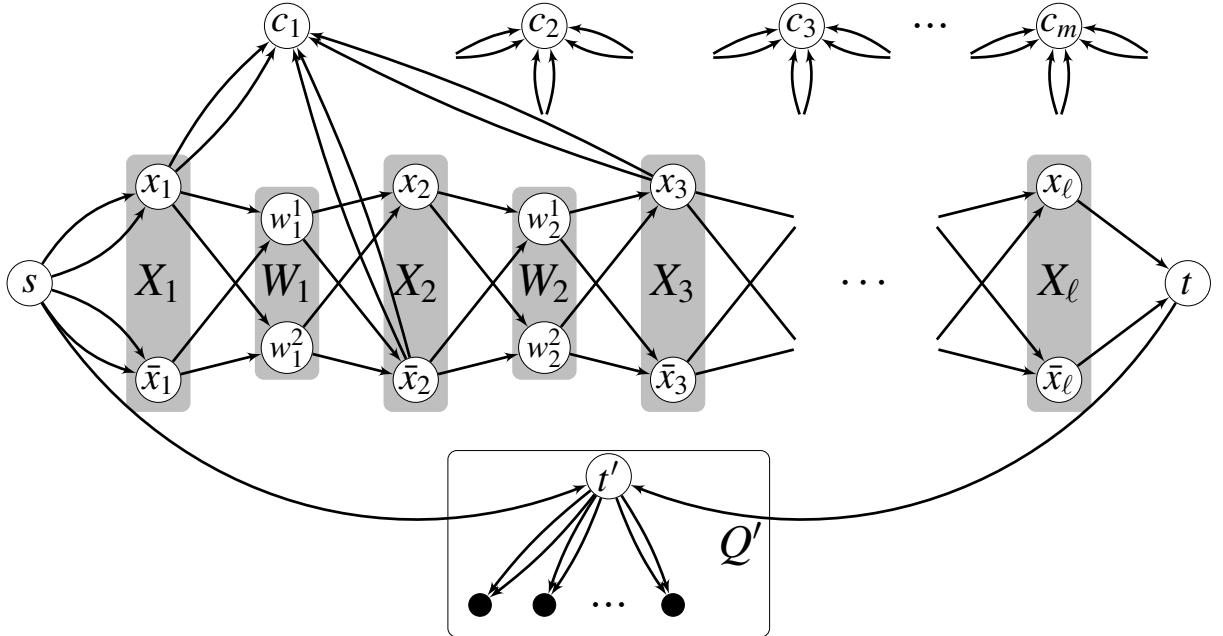


Figura 11 – Exemplo de construção de \mathcal{N}' quando $C_1 = (v_1 * \bar{v}_2 * v_3)$.

O restante da prova também é similar ao caso anterior, observando que, para enviar q' unidades de fluxo pelo arco tt' , é necessário que o fluxo no primeiro arco do caminho tenha valor $2\ell + q' = n - f(n)$. \square

A diferença essencial entre a nossa demonstração para o Teorema 17 e a demonstração original está na construção de \mathcal{N}' . Porém, encontramos um erro na construção de (BANG-JENSEN *et al.*, 2016), ilustrada na Figura 12, que torna a prova original incorreta. O problema está na segunda parte da demonstração. Com o objetivo de mostrar que “se \mathcal{F} é satisfável, então \mathcal{N}' admite dois fluxos s -ramificados arco-disjuntos”, os autores definem X'' como sendo o conjunto dos vértices associados a literais com valoração 0, segundo uma atribuição que satisfaz \mathcal{F} , e definem P_1 e P_2 como (s,t) -caminhos que interceptam todos os vértices de X'' . Sem perda de generalidade, suponha que $v_\ell = 1$. Neste caso, $\bar{x}_\ell \in V(P_1)$, $\bar{x}_\ell \in V(P_2)$ e os dois caminhos necessariamente compartilham o arco $\bar{x}_\ell t$ (ver Figura 12), ou seja, P_1 e P_2 não são arco-disjuntos e, dessa forma, os dois fluxos s -ramificados que são construídos a partir de P_1 e P_2 também não são arco-disjuntos. É importante reforçar que esse problema na demonstração não é

apenas uma falha na argumentação, mas sim na construção de \mathcal{N}' , ou seja, existem instâncias do 3-SAT que são satisfatóveis, mas que as redes construídas a partir delas, com qualquer f que respeite as restrições do Teorema 17, não admitem dois fluxos s -ramificados arco-disjuntos. Uma dessas instâncias é, por exemplo, $\mathcal{F} = (x_1 + x_1 + x_1) * (x_2 + x_2 + x_2)$.

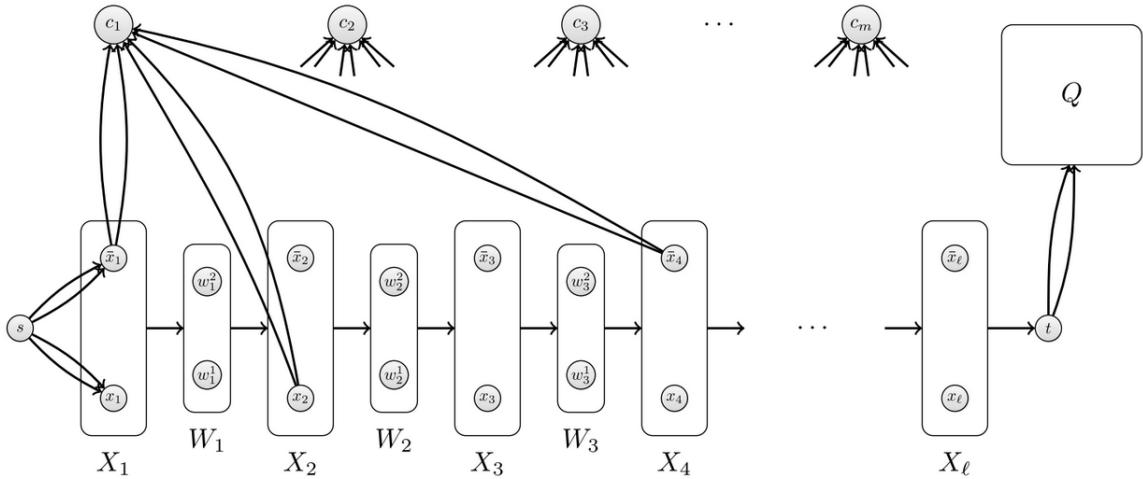


Figura 12 – Exemplo de construção da demonstração original do Teorema 17. O único arco de X_i para W_i representa todos os possíveis arcos de X_i para W_i . De maneira similar, o único arco de X_ℓ para t representa os arcos $\bar{x}_\ell t$ e $x_\ell t$.

Fonte: (BANG-JENSEN *et al.*, 2016)

Os dois últimos resultados (Teoremas 16 e 17) possuem um ponto de interseção, que é quando $f(n) = n/2$. Nesse caso, as duas construções resultam na mesma rede, pois teremos $q = 0$ e $q' = m$. Então na primeira construção teremos que o conjunto $Q = \emptyset$ e na segunda $Q' = M$. Vale ressaltar ainda que o número de vértices que adicionamos quando $f(n) = n/2$ é polinomial, em ℓ e m , ou seja, nesse caso o problema é \mathcal{NP} -completo e a HTE aqui não é necessária.

Na Figura 13 apresentamos uma síntese dos resultados de complexidade apresentados até aqui. Os segmentos contínuos são resultados de (BANG-JENSEN; BESSY, 2014; BANG-JENSEN *et al.*, 2016), o segmento curvo marca a nossa contribuição, e os segmentos tracejados indicam os valores de capacidade para os quais a complexidade do problema ainda não foi provada. Observe que os intervalos em que o problema é “Difícil” utilizam hipóteses de complexidade diferentes e que para valores de capacidade maiores ou iguais a n , o problema continua “Fácil”, pois não impõe novas restrições.

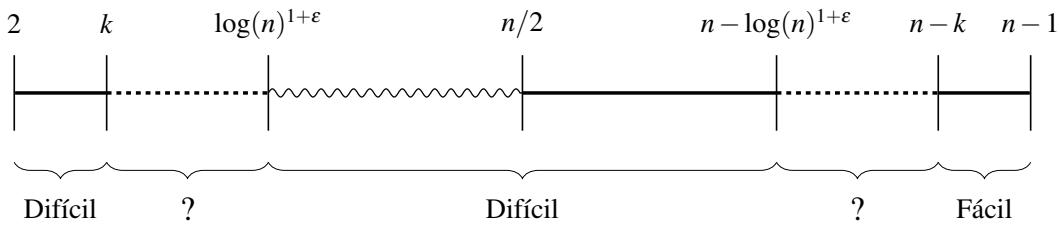


Figura 13 – Distribuição de complexidade do problema segundo a capacidade. Cada ponto $2 \leq \lambda \leq n - 1$ do seguimento de reta define um valor de capacidade para o qual é considerado o problema de decidir sobre a existência de 2 fluxos ramificados arco-disjuntos em redes do tipo $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv \lambda)$, onde k é constante e n é o número de vértices da rede.

5.3 Uma condição necessária e suficiente

No Teorema 11, temos uma caracterização, dada por (EDMONDS, 1973), dos multidigrafos que admitem ℓ s -ramificações arco-disjuntas, sendo estes os que satisfazem:

$$d_D^-(X) \geq \ell, \forall \emptyset \neq X \subseteq V - s. \quad (5.1)$$

A condição (5.1) é a mesma usada por (BANG-JENSEN; BESSY, 2014) para caracterizar as redes do tipo $\mathcal{N}(V, A, u \equiv n - 1)$ que possuem ℓ fluxos s -ramificados arco-disjuntos (Teorema 12). Podemos observar que para um conjunto $X \subseteq V - s$, serão necessários pelo menos ℓ arcos entrando em X , um para cada fluxo e, curiosamente, mas não tão simples de observar, essa quantidade também é suficiente. Isso nos leva a questionar se é possível generalizar a condição (5.1) de modo que funcione para qualquer valor de capacidade λ , isto é, caracterizar as redes com função de capacidade $u \equiv \lambda$ que possuem ℓ fluxos s -ramificados. Por um lado, sabemos o seguinte:

Proposição 3. *Se uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv \lambda)$ admite ℓ fluxos s -ramificados arco-disjuntos, então:*

$$d_D^-(X) \geq \ell \left\lceil \frac{|X|}{\lambda} \right\rceil, \forall \emptyset \neq X \subseteq V - s. \quad (5.2)$$

Demonstração. De modo geral, em um fluxo s -ramificado, sabemos que, para um conjunto de vértices $X \subseteq V - s$, valem as seguintes condições: se $|X| \leq \lambda$, um único arco tem capacidade suficiente para conduzir o fluxo necessário a X de forma que cada vértice de X possa reter uma unidade. Porém, se $|X| > \lambda$, serão necessários pelo menos $\left\lceil \frac{|X|}{\lambda} \right\rceil$ arcos para tanto. Adicionalmente, se temos ℓ fluxos s -ramificados arco-disjuntos, o número de arcos entrando em X será pelo menos $\ell \left\lceil \frac{|X|}{\lambda} \right\rceil$. \square

Por outro lado, combinando a Proposição 3 com o resultado original ($\lambda = n - 1$) em que o número de arcos necessários também é suficiente, conjecturamos que o mesmo acontece com a condição 5.2.

Conjectura 1. *Seja $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv \lambda)$ uma rede com n vértices e um vértice especial s . Então, para todo $1 \leq \lambda \leq n - 1$, \mathcal{N} admite ℓ fluxos s -ramificados arco-disjuntos se, somente se,*

$$d_D^-(X) \geq \ell \left\lceil \frac{|X|}{\lambda} \right\rceil, \forall \emptyset \neq X \subseteq V - s. \quad (5.2)$$

Pela Proposição 3, sabemos que a condição (5.2) é necessária para a existência de ℓ fluxos s -ramificados arco-disjuntos e, adicionalmente, sabemos que (5.2) também é suficiente quando $\lambda = n - 1$, pois, neste caso, a conjectura acima se torna equivalente ao Teorema 12. A seguir, provamos que a Conjectura 1 é válida para qualquer valor de λ nos casos em que D é um multicaminho, onde um *multicaminho* é um multidigrafo $D = (V, A)$ que admite uma ordenação v_1, v_2, \dots, v_n dos seus vértices, de maneira todo arco de D é do tipo $v_i v_{i+1}$ e existe pelo menos um arco $v_i v_{i+1}$, para todo $i \in [n - 1]$. Utilizamos $\mu(v_i, v_{i+1})$ para denotar o número de arcos entre $v_i v_{i+1}$. Podemos também dizer que D é um multicaminho se toda ramificação de D é um caminho.

Lema 6. *Seja $D = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, A)$ um multicaminho. Então, para $\lambda \in [n - 1]$, a rede $\mathcal{N} = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, A, u \equiv \lambda)$ admite ℓ fluxos v_1 -ramificados se, e somente se,*

$$d_D^-(X) \geq \ell \left\lceil \frac{|X|}{\lambda} \right\rceil, \forall \emptyset \neq X \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Proposição 3.

(\Leftarrow) Seja $D = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, A)$ um multicaminho, e sejam $\ell \geq 1$ e $\lambda \in [n - 1]$ inteiros. Suponha que D satisfaz (5.2). Vamos construir ℓ fluxos s -ramificados na rede $\mathcal{N}(V, A, u \equiv \lambda)$, onde $s = v_1$. Com exceção de v_n , todos os demais vértices de D possuem exatamente um vizinho de saída, portanto, para todo $2 \leq i \leq n - 1$, o vértice v_i deve receber $n - i + 1$ unidades de fluxo do vértice v_{i-1} e enviar $n - i$ unidades para v_{i+1} . Por (5.2), observe que, para todo $1 \leq i \leq n - 1$, temos $\mu(v_i, v_{i+1}) \geq \ell \left\lceil \frac{n-i}{\lambda} \right\rceil$. Então, para todo $i \in [n - 1]$, separamos $\left\lceil \frac{n-i}{\lambda} \right\rceil$ arcos $v_i v_{i+1}$ distintos para o fluxo x_j e fazemos $x_j(v_i, v_{i+1}) = \lambda$ em $\left\lfloor \frac{n-i}{\lambda} \right\rfloor$ deles e, se for o caso, fazemos $x_j(v_i, v_{i+1}) = r$ no arco sobressalente, onde r é o resto da divisão inteira de $n - i$ por λ , para todo $j \in [\ell]$. \square

Uma abordagem da Conjectura 1, outra que prová-la para subclasses de multidigrafos, é prová-la para valores fixos ou intervalos de λ e ℓ . No que segue, veremos a demonstração da Conjectura 1 para $\lambda = \lfloor n/2 \rfloor$ e $\ell = 1$. Para simplificar a demonstração deste caso, generalizamos o conceito de fluxo ramificado. Dados uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$, um vértice $s \in V$ e um conjunto de vértices $Z \subseteq V$ tal que $s \in Z$, definimos um *fluxo (s, Z) -ramo* como sendo um fluxo x tal que:

$$b_x(v) = \begin{cases} |Z| - 1 & \text{se } v = s \\ -1 & \text{se } v \in Z - \{s\} \\ 0 & \text{se } v \in V - Z. \end{cases}$$

Além disso, vamos restringir que apenas os vértices em Z recebam fluxo, ou seja, para todo $w \in V - Z$, temos: $\sum_{vw \in A} x(vw) = 0$. Observe que se $Z = V$, então x é um fluxo ramificado.

Lema 7. *Uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv \lfloor n/2 \rfloor)$ com n vértices e um vértice especial s admite um fluxo s -ramificado se, somente se,*

$$d_D^-(X) \geq \left\lceil \frac{2|X|}{n} \right\rceil, \forall \emptyset \neq X \subseteq V - s. \quad (5.3)$$

Demonstração. (\implies) Suponha que \mathcal{N} admite um fluxo s -ramificado x . Note que $\left\lceil \frac{2|X|}{n} \right\rceil$ é 1 se $|X| \leq n/2$ e 2 se $|X| > n/2$. Como em x cada vértice de $V - s$ recebe pelo menos uma unidade de fluxo, necessariamente $d_D^-(U) \geq 1$ para todo $U \subseteq V - s$. Se $|U| > n/2$, então o total de fluxo que entra em U também é maior que $n/2$ e não pode entrar por um único arco, logo, $d_D^-(U) \geq 2$ e (5.3) é verificada.

(\impliedby) Agora, assuma que (5.3) é satisfeita. Seja $Z \subseteq V$ o maior conjunto para o qual \mathcal{N} admite um fluxo z que é um (s, Z) -ramo. Assumindo, por contradição, que $Z \neq V$, seja $W = V - Z$ o conjunto dos vértices que não são “alcançados” por z . Por (5.3), temos que $d_D^-(W) \geq 1$, então existe um vértice $w \in W$ que é vizinho de saída de um vértice $v \in Z$. Sabemos então que todo (s, v) -caminho, em D , passa por algum arco *saturado* pq , ou seja, $z(pq) = u(pq) = \lfloor n/2 \rfloor$, do contrário, poderíamos enviar uma unidade de fluxo a mais para o vértice v e repassá-la para w pelo arco vw e esse fluxo modificado seria um $(s, Z \cup \{w\})$ -ramo com mais vértices que z , um absurdo.

Considere primeiro o caso em que existe um arco único saturado em z , e seja pq esse arco. Seja $Y \subseteq Z - p$ o conjunto dos vértices que são alcançáveis por q no fluxo z , ou melhor, o conjunto dos vértices y tais que existe um (q, y) -caminho em D_z . Observe que $v \in Y$ e que

todo (s, W) -caminho² P passa por pq , senão poderíamos enviar uma unidade de fluxo por P e alcançar um novo vértice em W , o que também seria absurdo. Isso implica que $|Y| = \lfloor n/2 \rfloor$, pois q precisa “dissipar” todas as $\lfloor n/2 \rfloor$ unidades de fluxo que recebe de p . Além disso, temos que $(Z - Y, W)_D = 0$, pois do contrário também seria possível alcançar um novo vértice em W , e $(Z - Y, Y)_D = 1$ (devido à existência de pq). Na Figura 14 está ilustrada a disposição dos conjuntos W, Y e Z . Como $|Y \cup \{w\}| > \lfloor n/2 \rfloor$, deve existir um arco além de pq que entra em $Y \cup \{w\}$, porém esse arco não pode vir de $Z - Y$, logo esse arco vem de algum vértice $w' \neq w$ em W . Considerando agora $Y \cup \{w, w'\}$, o mesmo argumento pode ser aplicado repetidamente, até a obtenção do conjunto $Y \cup W$. Temos então duas possibilidades: ou existe um arco que entra em W vindo de $Z - Y$, que observamos não ser possível, ou $d_D^-(Y \cup W) < 2$, o que por (5.3) é absurdo já que $|Y \cup W| > n/2$. Logo, $Z = V$ e z é na verdade um fluxo s -ramificado.

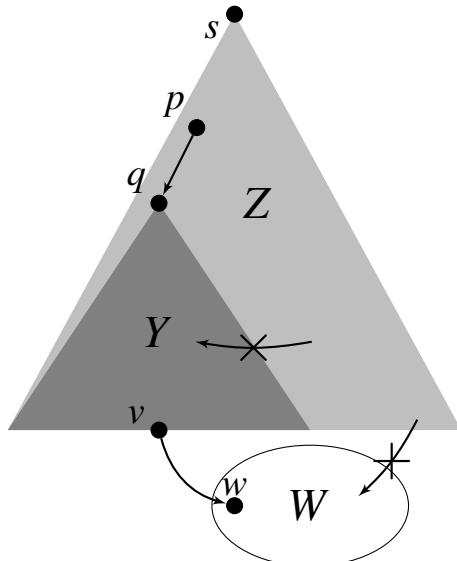


Figura 14 – Ilustração dos conjuntos W, Y, Z . Os arcos marcados com um “ \times ” indicam onde não pode haver arcos.

Agora, considere o caso em que existe mais de um arco saturado. Observe que existe no máximo um arco saturado que sai de s , pois do contrário z seria um fluxo ramificado. Então, deve existir um caminho que sai de s e passa por todos os arcos saturados. Tomamos pq como sendo o último arco desse caminho e a partir desse ponto a argumentação é a mesma do caso anterior.

□

² Abuso de notação para indicar um caminho de s para qualquer vértice em W .

5.4 Fluxos ramificados em redes sem arcos paralelos

Como mencionamos no início do Capítulo 4, todos os resultados de (BANG-JENSEN; BESSY, 2014; BANG-JENSEN *et al.*, 2016) consideram redes com arcos paralelos. Por se tratar de uma restrição do problema, os casos que são polinomiais no problema original permanecem polinomiais, se proibirmos os arcos paralelos, mas podemos fazer algumas considerações quanto aos demais casos.

Redes de capacidade unitárias não admitem dois fluxos ramificados arco-disjuntos se proibirmos os arcos paralelos, pois existem no máximo $n - 1$ arcos saindo da raiz (e de qualquer outro vértice) e não é possível enviar $2n - 2$ unidades de fluxo por eles.

O caso $u \equiv 2$ em redes sem arcos paralelos é um pouco mais interessante. No lema a seguir, temos algumas condições necessárias para este caso.

Lema 8. *Seja $\mathcal{N} = (V, A, u)$ uma rede sem arcos paralelos e com um vértice especial s . Então, se \mathcal{N} admite dois fluxos arco-disjuntos s -ramificados x e y então:*

- a) *s é um vértice universal;*
- b) *O número de vértices de \mathcal{N} é ímpar;*
- c) *$d^+(v) \geq 1$ para todo vértice v .*

Demonstração. O total de fluxo enviado por s somando x e y é $2n - 2$. Uma vez que cada arco só carrega no máximo duas unidades de fluxo, são necessários $n - 1$ arcos saindo de s e logo, como não existem arcos paralelos, s é universal (a). Se n é par, não é possível dividir igualmente os $n - 1$ arcos que saem de s entre x e y , logo n é ímpar (b). Como cada vértice v recebe (em x ou y) duas unidades de fluxo diretamente de s , uma dessas unidades deverá ser repassada pra outro vértice, ou seja, existe um arco $vw \in A$ e, por isso, $d^+(v) \geq 1$ (c). \square

Mesmo com todas essas condições necessárias fáceis de checar, o problema permanece \mathcal{NP} -completo, pois na redução do Teorema 14 apresentada em (BANG-JENSEN; BESSY, 2014) não são adicionados arcos paralelos. Além disso, a redução também funciona se todos os arcos tiverem capacidade 2. O mesmo não acontece nos casos $u \equiv k$, $u \equiv f(n)$ e $u \equiv n - f(n)$ e estes estão em aberto quando proibimos os arcos paralelos.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, resumiremos os resultados apresentados neste documento e descreveremos algumas questões em aberto acerca dos problemas apresentados ao longo deste trabalho, que serão alvo de uma pesquisa futura.

No que diz respeito à complexidade do problema de decidir se uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$, com n vértices, admite dois fluxos s -ramificados arco-disjuntos, provamos, com base na HTE, que não existe algoritmo polinomial para este problema quando $u \equiv f(n)$, obtivemos uma nova prova, que mostra o mesmo, para quando $u \equiv n - f(n)$, uma vez que a prova original desse caso estava incorreta, onde f é uma função inteira entre $\log^{1+\varepsilon}(n)$ e $n/2$. Estes resultados foram publicados em (MAIA *et al.*, 2018) e apresentados no III Encontro de Teoria da Computação (ETC) e no VIII Latin American Workshop on Cliques in Graphs.

Ainda sobre a complexidade, existem valores de capacidade nos quais a complexidade do problema não foi estabelecida (ver Figura 13). Por exemplo, não existem resultados para os casos $u \equiv \log(n)$ ou $u \equiv n - \log(n)$. Nesses casos, se aplicarmos as reduções dos Teoremas 16 e 17, obtemos instâncias exponenciais que fogem do escopo da HTE. Então, uma possível maneira para explorar esses casos seria buscar por hipóteses de complexidade mais fortes que a HTE.

Na situação em que $u \equiv n - k$, a prova do Teorema 13 de (BANG-JENSEN *et al.*, 2016) fornece um algoritmo de complexidade $O(n^{(g(k))})$, que é polinomial quando o valor de k é fixo, onde g é uma função computável. No entanto, resta saber se esse problema é TPF com relação ao parâmetro k , ou seja, se existe um algoritmo de ordem $O(h(k) \cdot n^c)$ para o problema, onde h é uma função computável e c é uma constante.

Do ponto de vista estrutural, a Conjectura 1, formulada aqui, segue em aberto. À semelhança dos estudos de complexidade, poderíamos tentar estabelecer a conjectura considerando capacidades fixas pequenas ou próximas a n . Outra possibilidade seria considerar um número fixo de fluxos. Por exemplo, no Lema 7, vimos que a Conjectura 1 é válida para um fluxo ($\ell = 1$) em redes com $u \equiv \lfloor n/2 \rfloor$. Talvez seja possível generalizar a demonstração desse lema para que funcione para outras funções de capacidade. Pode-se também continuar com a abordagem feita no Lema 6 de provar a conjectura para classes restritas de multidigrafos.

Finalmente, na Seção 5.4 introduzimos uma versão mais restrita do problema de encontrar fluxos ramificados arco-disjuntos, em que as redes que não possuem arcos paralelos. Considerando essa restrição, seria interessante saber se existem mais instâncias polinomiais

para o problema restrito, além daquelas que já são polinomiais no problema geral (em que são permitidos arcos paralelos), ou seja, pode se tentar estabelecer uma régua de complexidade, mais uma vez, semelhante à da Figura 13 para esse problema restrito.

REFERÊNCIAS

- AHUJA, R. **Network flows : theory, algorithms, and applications.** Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1993. ISBN 0-13-617549-X.
- BANG-JENSEN, J.; BESSY, S. (Arc-) disjoint flows in networks. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 526, p. 28–40, 2014.
- BANG-JENSEN, J.; GUTIN, G. Z. **Digraphs: theory, algorithms and applications.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.
- BANG-JENSEN, J.; HAVET, F.; YEO, A. The complexity of finding arc-disjoint branching flows. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 209, p. 16–26, 2016.
- BANG-JENSEN, J.; YEO, A. Balanced branchings in digraphs. **Theoretical Computer Science**, v. 595, p. 107 – 119, 2015. ISSN 0304-3975.
- COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In: ACM. **Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing.** [S.l.], 1971. p. 151–158.
- EDMONDS, J. Edge-disjoint branchings. **Combinatorial Algorithms**, p. 91–96, 1973.
- EDMONDS, J.; KARP, R. M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. **Journal of the ACM (JACM)**, ACM, v. 19, n. 2, p. 248–264, 1972.
- FORD, D. R.; FULKERSON, D. R. **Flows in Networks.** Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1962.
- FORTUNE, S.; HOPCROFT, J.; WYLLIE, J. The directed subgraph homeomorphism problem. **Theoretical Computer Science**, v. 10, n. 2, p. 111 – 121, 1980. ISSN 0304-3975.
- GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.** New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1979. ISBN 0716710447.
- IMPAGLIAZZO, R.; PATURI, R.; ZANE, F. Which problems have strongly exponential complexity? **Journal of Computer and System Sciences**, v. 63, n. 4, p. 512 – 530, 2001. ISSN 0022-0000.
- LOVÁSZ, L. On two minimax theorems in graph. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 21, n. 2, p. 96 – 103, 1976. ISSN 0095-8956. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895676900496>>.
- MAIA, A. K.; COSTA, J.; LOPES, R. Fluxos ramificados arco-disjuntos em redes de capacidade restrita. In: **3º Encontro de Teoria da Computação (ETC).** Porto Alegre, RS, Brasil: SBC, 2018. v. 3. ISSN 2595-6116. Disponível em: <<http://portaldeconteudo.sbc.org.br/index.php/etc/article/view/3162>>.
- ORLIN, J. B. Max flows in $O(nm)$ time, or better. In: **Proceedings of the Forty-fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing.** New York, NY, USA: ACM, 2013. (STOC '13), p. 765–774. ISBN 978-1-4503-2029-0. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/2488608.2488705>>.
- SHILOACH, Y.; PERL, Y. Finding two disjoint paths between two pairs of vertices in a graph. **J. ACM**, ACM, New York, NY, USA, v. 25, n. 1, p. 1–9, jan. 1978. ISSN 0004-5411. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/322047.322048>>.