



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM ESTRUTURAS**

**MÁRIO HENRIQUES ARAGÃO COSTA**

**CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CONCRETO DE  
ALTO DESEMPENHO REFORÇADO COM FIBRAS METÁLICAS**

**FORTALEZA**

**2019**

MÁRIO HENRIQUES ARAGÃO COSTA

CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CONCRETO DE ALTO  
DESEMPENHO REFORÇADO COM FIBRAS METÁLICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Estruturas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Evandro Parente Júnior, DSc

Coorientador: Prof. Marcelo Silva Medeiros Júnior, Ph.D.

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

C874c Costa, Mário Henriques Aragão.  
Caracterização mecânica e simulação numérica de concreto de alto desempenho reforçado com fibras metálicas / Mário Henriques Aragão Costa. – 2019.  
119 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior.

Coorientação: Prof. Dr. Marcelo Silva Medeiros Júnior.

1. Concreto de alto desempenho. 2. Não linearidade. 3. Elementos Finitos. 4. Modelo de Lee e Fenves. 5. Modelo de Mazars. I. Título.

CDD 624.1

---

MÁRIO HENRIQUES ARAGÃO COSTA

CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CONCRETO DE ALTO  
DESEMPENHO REFORÇADO COM FIBRAS METÁLICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Estruturas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Aprovada em: 30 de agosto de 2019

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Evandro Parente Júnior, DSc (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Marcelo Silva Medeiros Júnior,  
Ph.D. (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Augusto Teixeira de Albuquerque  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Francisco José Pereira de Almeida  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

A todos os que, verdadeiramente, sempre estiveram, estão e estarão comigo. Eles sabem quem são.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre agir em tudo que me rege.

Aos professores Evandro Parente Júnior e Marcelo Silva Medeiros Júnior pela excelente orientação, sempre compreensivos e presentes quando precisei.

Aos professores Tereza Denyse Pereira de Araújo, Antônio Macário Cartaxo de Melo e João Batista Marques de Sousa Junior, pelas muitas contribuições ao longo do Mestrado.

Ao meu avô Mário Henriques Aragão (*in memoriam*), por ser um dos maiores entusiastas da minha pós-graduação. Gostaria que o senhor estivesse aqui para ler esse trabalho. À minha avó Maria Celeste Carneiro Aragão por sempre me apoiar em qualquer decisão, sendo minha segunda mãe.

Aos meus pais Antônio José Gomes Costa e Rosane Maria Carneiro Aragão Costa, por nunca me deixarem desistir. À minha irmã Maria Eduarda Aragão Costa, por sempre se espelhar em mim, fazendo com que eu queira sempre me superar e servir de bom exemplo.

À minha namorada Ana Beatriz da Costa Guerreiro, por ser meu ombro amigo, minha maior entusiasta, meu porto seguro e inspiração, sempre me guiando pelo melhor caminho. Sem você esse trabalho não seria possível. À família da Bia, Demosthenes, Cláudia e Giovanna, por serem uma segunda família me apoiando.

Aos meus tios José Bessa e Viviane Maria, bem como meu primo Lucas Bessa, por, mesmo longe, me incentivarem e apoarem sempre.

A todos os colegas de mestrado, em especial Bergson Matias, quase um terceiro orientador, e Wilian Nakamura, um amigo que levo para a vida. À toda a equipe do Laboratório de Materiais e Construção Civil, principalmente Helano, Maurício e Manoel, por me auxiliarem nos experimentos.

À minha psicóloga Maria Camila Moura, por tornar minha experiência no Mestrado mais saudável. Aos meus amigos de sempre Fábio Barbosa, Lucas Sampaio e Tomás Barreto, por sempre se fazerem presentes.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"N3o tentes ser bem sucedido, tenta antes ser um  
homem de valor."

(Albert Einstein)

## RESUMO

O concreto de alto desempenho (CAD) reforçado com fibras busca suprir as limitações do concreto tradicional, como a baixa resistência à tração e sua ruptura frágil. Trata-se de um material composto por cimento de alta resistência, agregados miúdos, aditivo hiperplastificante e fibras de aço, com baixa relação água-cimento e resistência à compressão superior a 60 MPa. O CAD reforçado com fibras vem sendo aplicado cada vez mais à construção de estruturas em países como os EUA e o Japão. Não há consenso sobre qual modelo constitutivo deve ser utilizado para representar seu comportamento. Com este trabalho, deseja-se preencher a lacuna do conhecimento ao realizar um estudo acerca das características desse material com o intuito de escolher qual modelo melhor representa seu comportamento. Este trabalho tem por finalidade realizar experimentos do CAD com e sem fibras e comparar seus resultados ao concreto convencional por meio de modelos computacionais. São utilizados os modelos elásticos não-lineares do CEB-FIP (1990) para o CAD sem fibras e de Mansur *et al.* (1999) para o CAD com fibras. Eles parecem representar bem o comportamento do material. Após isso, o  $\mu$ Model e o Modelo de Lee e Fenves (1998) são estudados a fim de representar o comportamento do concreto. Apenas o  $\mu$ Model consegue representar o *softening* do CAD em aplicações numéricas. No fim, faz-se o *benchmarking* de Espion (1993) e chega-se à conclusão que o CAD possui uma capacidade de carga bem superior à do concreto convencional.

**Palavras-chave:** Concreto de alto desempenho. Não linearidade. Elementos Finitos. Modelo de Lee e Fenves. Modelo de Mazars.

## ABSTRACT

Fiber-reinforced high performance concrete (HPC) was designed to overcome the limitations of traditional concrete such as low tensile strength and brittle fracture. It is a material composed of regular cement, fine aggregates, hyperplasticizer additive and steel fibers, with low water-cement ratio and compressive strength greater than 60 MPa. Fiber-reinforced HPC is increasingly being applied to building structures in countries such as the US and Japan. There is no consensus on which constitutive model should be used to represent its behavior. In this work, we want to fill the knowledge gap by conducting a study about the material characteristics in order to choose which model best represents its behavior. This work aims to perform HPC experiments with and without fibers and compare their results to conventional concrete using computational models. Two nonlinear elastic models were used in this work. The CEB-FIP (1990) was used for the 0% fiber mix and Mansur *et al.* (1999) was used for the two fiber reinforced HPC mixes. They seem to represent well the behavior of the material. After that,  $\mu$ Model and Lee e Fenves (1998) Model are studied in order to perform the concrete behavior. Only  $\mu$  Model can represent HPC softening in numeric applications. Finally, Espion (1993) benchmark is performed and it is concluded that HPC has a much higher load capacity than conventional concrete.

**Keywords:** High performance concrete. Nonlinear models. Finite elements. Lee e Fenves Model. Mazars Model.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Posição e tamanhos ótimos das partículas de agregados no empacotamento . . . . .                                                                   | 20 |
| Figura 2 – Tipos de fibra: (a) com gancho na extremidade, (b) torcida e (c) reta . . . . .                                                                    | 21 |
| Figura 3 – Curva tensão-deformação de uma fibra reta de alta resistência . . . . .                                                                            | 22 |
| Figura 4 – Curva tensão-deformação de um concreto (a) sem utilização de fibras e (b) com utilização de fibras retas em diferentes percentagens . . . . .      | 23 |
| Figura 5 – Curvas tensão-deformação para concretos de 30 a 120 MPa . . . . .                                                                                  | 24 |
| Figura 6 – Petronas Towers, Kuala Lumpur, Malásia . . . . .                                                                                                   | 25 |
| Figura 7 – Burj Khalifa, Dubai, EAU . . . . .                                                                                                                 | 26 |
| Figura 8 – E-Tower, São Paulo, Brasil . . . . .                                                                                                               | 27 |
| Figura 9 – Modelos constitutivos . . . . .                                                                                                                    | 28 |
| Figura 10 – Curva de tensão-deformação típica de compressão uniaxial . . . . .                                                                                | 28 |
| Figura 11 – Curva de tensão-deformação típica de tração uniaxial . . . . .                                                                                    | 29 |
| Figura 12 – Efeito do confinamento na compressão do concreto . . . . .                                                                                        | 30 |
| Figura 13 – Curvas obtidas para diferentes alturas de corpos de prova (a) tensão-deformação e (b) tensão deslocamento (total - tensão de pico) . . . . .      | 31 |
| Figura 14 – Experimentos de carregamento/descarregamento em concreto à (a) tração (GOPALARATNAM; SHAH, 1985) e (b) compressão (KARSAN; JIRSA, 1969) . . . . . | 31 |
| Figura 15 – Curvas de tensão-deformação do aço na tração e na compressão da (a) NBR 6118 (ABNT, 2014) e do (b) Eurocode 2 (2004) . . . . .                    | 32 |
| Figura 16 – Curvas de tensão-deformação do concreto na compressão da (a) NBR 6118 (ABNT, 2014) e do (b) Eurocode 2 (2004) . . . . .                           | 33 |
| Figura 17 – Tensão-deformação no Modelo CEB-FIP (1990) para um concreto de $f_{cm} = 70$ MPa . . . . .                                                        | 34 |
| Figura 18 – Tensão-deformação no Modelo Van Gysel e Taerwe (1996) para um concreto de $f_{cm} = 70$ MPa . . . . .                                             | 36 |
| Figura 19 – Tensão-deformação no Modelo Wee <i>et al.</i> (1996) para um concreto de $f'_c = 70$ MPa . . . . .                                                | 37 |
| Figura 20 – Tensão-deformação no Modelo Mansur <i>et al.</i> (1999) para um concreto de $f_0 = 70$ MPa . . . . .                                              | 38 |

|                                                                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 21 – Diagrama tensão-deformação característico de uma barra de metal sujeita a carregamento uniaxial . . . . .                                                             | 40 |
| Figura 22 – Representação das superfícies de escoamento dos critérios de Tresca e von Mises no (a) plano de tensões principais e (b) plano $\pi$ . . . . .                        | 44 |
| Figura 23 – Representação plana do Critério de Mohr-Coulomb . . . . .                                                                                                             | 45 |
| Figura 24 – Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb . . . . .                                                                                                                    | 46 |
| Figura 25 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager . . . . .                                                                                                                  | 48 |
| Figura 26 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager no plano- $\pi$ . . . . .                                                                                                  | 49 |
| Figura 27 – Elemento de Volume Representativo (EVR) . . . . .                                                                                                                     | 50 |
| Figura 28 – Comportamento do concreto na tração (esquerda) e compressão (direita) . .                                                                                             | 53 |
| Figura 29 – Efeito unilateral no concreto . . . . .                                                                                                                               | 54 |
| Figura 30 – Resultados de Mazars <i>et al.</i> (2015) comparados aos de Kupfer e Gerstle (1973) (plano $\sigma_{33}$ ) . . . . .                                                  | 56 |
| Figura 31 – Caminho de carga unidimensional de Mazars <i>et al.</i> (2015) . . . . .                                                                                              | 57 |
| Figura 32 – Curvas de deformação plástica para tração (esquerda) e compressão (direita)                                                                                           | 60 |
| Figura 33 – Superfície de escoamento no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ ( $\sigma_3 = 0$ ) . . . . .                                                                                  | 62 |
| Figura 34 – Curva tensão-deformação de Lee e Fenves (1998) comparadas às curvas de (a) Karsan e Jirsa (1969) e (b) Gopalaratnam e Shah (1985) para carregamento cíclico . . . . . | 65 |
| Figura 35 – Curva granulométrica da areia fina . . . . .                                                                                                                          | 67 |
| Figura 36 – Curvas de Abrams . . . . .                                                                                                                                            | 68 |
| Figura 37 – Fibras DRAMIX® 3D 45/50 BL . . . . .                                                                                                                                  | 69 |
| Figura 38 – Maquinário para preparo do concreto: (a) betoneira e (b) argamassadeira do LMCC . . . . .                                                                             | 70 |
| Figura 39 – Vistas (a) frontal e (b) superior do compartimento de cura . . . . .                                                                                                  | 71 |
| Figura 40 – (a) Moldes para corpos de prova de ensaio à compressão e (b) corpos de prova desmoldados . . . . .                                                                    | 72 |
| Figura 41 – Ensaio de resistência à compressão . . . . .                                                                                                                          | 72 |
| Figura 42 – (a) CP moldado e (b) desmoldado para ensaio de resistência à compressão diametral; (c) cura térmica . . . . .                                                         | 73 |
| Figura 43 – Vistas (a) em perspectiva e (b) lateral de ensaio de resistência à compressão diametral . . . . .                                                                     | 74 |

|                                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 44 – Vistas (a) em perspectiva e (b) aproximada de ensaio de módulo de elasticidade                                                              | 74 |
| Figura 45 – Vistas (a) em perspectiv, (b) lateral e (c) frontal da disposição teórica de ensaio de resistência à tração na flexão . . . . .             | 75 |
| Figura 46 – Processo de moldagem do CP de ensaio de resistência à tração na flexão. (a) Fase 1, (b) fase 2 e (c) fase 3 . . . . .                       | 76 |
| Figura 47 – Adaptações ao ensaio de tração na flexão: (a) suporte para apoio e aplicação de carga e (b) suporte para posicionamento dos LVDTs . . . . . | 77 |
| Figura 48 – Vistas (a) lateral, (b) em perspectiva e (c) frontal do ensaio de tração na flexão                                                          | 77 |
| Figura 49 – Resistência à compressão . . . . .                                                                                                          | 78 |
| Figura 50 – CPs com (a) 0% de fibras, (b) 1% de fibras e (c) 2% de fibras rompidos no ensaio de compressão . . . . .                                    | 79 |
| Figura 51 – Resistência à tração por compressão diametral . . . . .                                                                                     | 80 |
| Figura 52 – CPs com (a) 0% de fibras, (b) 1% de fibras e (c) 2% de fibras rompidos no ensaio de compressão diametral . . . . .                          | 81 |
| Figura 53 – Módulos de elasticidade . . . . .                                                                                                           | 82 |
| Figura 54 – Carga x deslocamento na flexão pura . . . . .                                                                                               | 83 |
| Figura 55 – Carga x deslocamento normalizado no pós-pico para a flexão pura . . . . .                                                                   | 84 |
| Figura 56 – CPs rompidos no ensaios de flexão pura com (a) 0% de fibras, (b) 1% de fibras e (c) 2% de fibras . . . . .                                  | 84 |
| Figura 57 – Tensão-deformação na compressão a partir de modelos elásticos . . . . .                                                                     | 86 |
| Figura 58 – Elemento unitário do FAST . . . . .                                                                                                         | 87 |
| Figura 59 – Modelos elásticos no FAST (compressão) . . . . .                                                                                            | 88 |
| Figura 60 – Tensão-deformação na tração a partir do Modelo do CEB-FIP (1990) . . . . .                                                                  | 89 |
| Figura 61 – Tensão-deformação na tração a partir do Modelo do Mansur <i>et al.</i> (1999) . . . . .                                                     | 90 |
| Figura 62 – Tensão-deformação na tração para diferentes teores de fibra . . . . .                                                                       | 91 |
| Figura 63 – Modelos elásticos no FAST (tração) . . . . .                                                                                                | 92 |
| Figura 64 – Tensão-deformação na compressão e na tração em modelos elásticos . . . . .                                                                  | 93 |
| Figura 65 – Tensão-deformação na compressão a partir do $\mu$ Model (MAZARS <i>et al.</i> , 2015) para CAD sem fibras . . . . .                         | 94 |
| Figura 66 – Tensão-deformação na compressão a partir do $\mu$ Model (MAZARS <i>et al.</i> , 2015) para CAD com fibras . . . . .                         | 95 |
| Figura 67 – Tensão-deformação na compressão pelo $\mu$ Model (MAZARS <i>et al.</i> , 2015) . . . . .                                                    | 96 |

|                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 68 – Tensão-deformação na tração pelo $\mu$ Model (MAZARS <i>et al.</i> , 2015) . . . . .                               | 98  |
| Figura 69 – Tensão-deformação na compressão a partir do Modelo de Lee e Fenves (1998)<br>para CAD sem fibras . . . . .         | 99  |
| Figura 70 – Tensão-deformação na compressão a partir do Modelo de Lee e Fenves (1998)<br>para CAD com 1% fibras . . . . .      | 100 |
| Figura 71 – Tensão-deformação na compressão a partir do Modelo de Lee e Fenves (1998)<br>para CAD com 2% fibras . . . . .      | 101 |
| Figura 72 – Tensão-deformação na compressão pelo $\mu$ Model (MAZARS <i>et al.</i> , 2015) . . . . .                           | 103 |
| Figura 73 – Tensão-deformação na tração pelo Modelo de Lee e Fenves (1998) . . . . .                                           | 104 |
| Figura 74 – Modelo para simulação do ensaio de flexão pura . . . . .                                                           | 104 |
| Figura 75 – Comportamento do CAD com (a) 1% e (b) 2% de fibras na simulação do<br>ensaio de flexão pura . . . . .              | 105 |
| Figura 76 – Comportamento do CAD na simulação do ensaio de flexão pura . . . . .                                               | 106 |
| Figura 77 – Tensão-deformação pós-pico normalizada para modelos elásticos na simula-<br>ção do ensaio de flexão pura . . . . . | 107 |
| Figura 78 – Geometria e propriedades dos materiais do pilar excêntrico . . . . .                                               | 107 |
| Figura 79 – Resultados de Parente <i>et al.</i> (2014) e Matias (2018) - Pilar excêntrico . . . . .                            | 108 |
| Figura 80 – Carga x deslocamento - Pilar excêntrico . . . . .                                                                  | 109 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 1 – Parâmetro do Modelo de Van Gysel e Taerwe (1996) . . . . .                                                  | 37  |
| Tabela 2 – Parâmetros utilizados por Lee e Fenves (1998) para carregamento cíclico na compressão e na tração . . . . . | 65  |
| Tabela 3 – Traços dos concretos utilizados . . . . .                                                                   | 66  |
| Tabela 4 – Dados dos ensaios de resistência à compressão . . . . .                                                     | 78  |
| Tabela 5 – Dados dos ensaios de resistência à tração por compressão diametral . . . . .                                | 80  |
| Tabela 6 – Resultados dos ensaios de módulo de elasticidade . . . . .                                                  | 81  |
| Tabela 7 – Deformações de pico e limite para cada modelo elástico . . . . .                                            | 85  |
| Tabela 8 – Parâmetros de Mazars <i>et al.</i> (2015) - compressão . . . . .                                            | 95  |
| Tabela 9 – Parâmetros de Mazars <i>et al.</i> (2015) - tração . . . . .                                                | 97  |
| Tabela 10 – Parâmetros de Lee e Fenves (1998) - compressão . . . . .                                                   | 102 |
| Tabela 11 – Parâmetros de Lee e Fenves (1998) - tração . . . . .                                                       | 103 |

## SUMÁRIO

|                |                                                               |    |
|----------------|---------------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b>       | <b>INTRODUÇÃO</b>                                             | 17 |
| <b>1.1</b>     | <b>Objetivos</b>                                              | 17 |
| <b>1.1.1</b>   | <b>Objetivos específicos</b>                                  | 18 |
| <b>1.2</b>     | <b>Estrutura do trabalho</b>                                  | 18 |
| <b>2</b>       | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>                                  | 19 |
| <b>2.1</b>     | <b>Concreto de Alto-Desempenho - CAD</b>                      | 19 |
| <b>2.1.1</b>   | <b>Composição</b>                                             | 19 |
| <b>2.1.1.1</b> | <i>Agregados, Adições e Aditivos</i>                          | 19 |
| <b>2.1.1.2</b> | <i>Fibras</i>                                                 | 21 |
| <b>2.1.2</b>   | <b>Características mecânicas</b>                              | 23 |
| <b>2.1.3</b>   | <b>Aplicações do CAD</b>                                      | 24 |
| <b>2.1.3.1</b> | <i>Torres Petronas - Kuala Lumpur - Malásia</i>               | 25 |
| <b>2.1.3.2</b> | <i>Burj Khalifa - Dubai - Emirados Árabes Unidos</i>          | 25 |
| <b>2.1.3.3</b> | <i>Edifício E-Tower - São Paulo - Brasil</i>                  | 26 |
| <b>2.2</b>     | <b>Modelos constitutivos</b>                                  | 27 |
| <b>2.3</b>     | <b>Modelos elásticos</b>                                      | 32 |
| <b>2.3.1</b>   | <b>Modelos elásticos para o CAD</b>                           | 33 |
| <b>2.3.1.1</b> | <i>Modelo do CEB-FIP (1990)</i>                               | 34 |
| <b>2.3.1.2</b> | <i>Modelo de Van Gysel e Taerwe (1996)</i>                    | 35 |
| <b>2.3.1.3</b> | <i>Modelo de Wee et al. (1996)</i>                            | 37 |
| <b>2.3.1.4</b> | <i>Modelo de Mansur et al. (1999)</i>                         | 38 |
| <b>2.4</b>     | <b>Teoria da Plasticidade</b>                                 | 39 |
| <b>2.4.1</b>   | <b>Modelo Elastoplástico Geral</b>                            | 40 |
| <b>2.4.2</b>   | <b>Critérios de escoamento</b>                                | 44 |
| <b>2.4.2.1</b> | <i>Critério de Mohr-Coulomb</i>                               | 45 |
| <b>2.4.2.2</b> | <i>Critério de Drucker-Prager</i>                             | 47 |
| <b>2.5</b>     | <b>Mecânica do Dano Contínuo</b>                              | 49 |
| <b>2.5.1</b>   | <b>Plasticidade com Dano Contínuo</b>                         | 52 |
| <b>2.6</b>     | <b>Modelo de Mazars et al. (2015) - <math>\mu</math>Model</b> | 52 |
| <b>2.6.1</b>   | <b>Redução ao caso unidimensional</b>                         | 57 |

|       |                                                                                                |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.7   | Modelo de Lee e Fenves (1998) . . . . .                                                        | 59  |
| 2.7.1 | <i>Relação constitutiva e evolução do dano</i> . . . . .                                       | 59  |
| 2.7.2 | <i>Superfície de escoamento e lei de fluxo não associado</i> . . . . .                         | 62  |
| 2.7.3 | <i>Obtenção de parâmetros</i> . . . . .                                                        | 63  |
| 2.7.4 | <i>Redução ao caso unidimensional</i> . . . . .                                                | 64  |
| 3     | <b>MATERIAIS E METODOLOGIA</b> . . . . .                                                       | 66  |
| 3.1   | <b>Materiais</b> . . . . .                                                                     | 66  |
| 3.1.1 | <i>Agregados, Adições e Aditivos</i> . . . . .                                                 | 66  |
| 3.1.2 | <i>Fibras</i> . . . . .                                                                        | 68  |
| 3.2   | <b>Metodologia</b> . . . . .                                                                   | 69  |
| 3.2.1 | <i>Preparo do concreto</i> . . . . .                                                           | 70  |
| 3.2.2 | <i>Ensaio de resistência à compressão</i> . . . . .                                            | 71  |
| 3.2.3 | <i>Resistência à tração por compressão diametral</i> . . . . .                                 | 73  |
| 3.2.4 | <i>Ensaio de módulo de elasticidade</i> . . . . .                                              | 74  |
| 3.2.5 | <i>Ensaio de resistência à tração na flexão pura</i> . . . . .                                 | 75  |
| 4     | <b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b> . . . . .                                                      | 78  |
| 4.1   | <b>Resistência à compressão</b> . . . . .                                                      | 78  |
| 4.2   | <b>Resistência à compressão diametral</b> . . . . .                                            | 79  |
| 4.3   | <b>Módulo de Elasticidade</b> . . . . .                                                        | 81  |
| 4.4   | <b>Resistência à tração na flexão</b> . . . . .                                                | 82  |
| 5     | <b>APLICAÇÕES NUMÉRICAS</b> . . . . .                                                          | 85  |
| 5.1   | <b>Modelos elásticos de tensão-deformação na compressão</b> . . . . .                          | 85  |
| 5.1.1 | <i>Aplicação numérica dos modelos elásticos à compressão</i> . . . . .                         | 87  |
| 5.2   | <b>Modelos elásticos de tensão-deformação na tração</b> . . . . .                              | 88  |
| 5.2.1 | <i>Aplicação numérica dos modelos elásticos à tração</i> . . . . .                             | 91  |
| 5.3   | <b>Aplicação numérica no <math>\mu</math>Model (MAZARS et al., 2015)</b> . . . . .             | 93  |
| 5.3.1 | <i>Tensão-deformação na compressão - <math>\mu</math>Model (MAZARS et al., 2015)</i> . . . . . | 93  |
| 5.3.2 | <i>Tensão-deformação na tração - <math>\mu</math>Model (MAZARS et al., 2015)</i> . . . . .     | 96  |
| 5.4   | <b>Aplicação numérica no Modelo de Lee e Fenves (1998)</b> . . . . .                           | 98  |
| 5.4.1 | <i>Tensão-deformação na compressão - Modelo de Lee e Fenves (1998)</i> . . . . .               | 98  |
| 5.4.2 | <i>Tensão-deformação na tração - Modelo de Lee e Fenves (1998)</i> . . . . .                   | 103 |
| 5.5   | <b>Simulação do ensaio de flexão de 4 pontos</b> . . . . .                                     | 104 |

|            |                                                          |            |
|------------|----------------------------------------------------------|------------|
| <b>5.6</b> | <b>Simulação de pilar com carga excêntrica . . . . .</b> | <b>107</b> |
| <b>6</b>   | <b>COMENTÁRIOS FINAIS . . . . .</b>                      | <b>110</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                             | <b>112</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

De acordo com o Comitê 363 do ACI (ACI, 2010), o Concreto de Alto Desempenho (CAD) são aqueles cuja resistência à compressão ultrapassa o patamar de 80 MPa. Essa classe de concreto permite a construção de estruturas mais esbeltas e resistentes, entretanto Concretos com resistência muito alta tem a tendência de apresentar uma ruptura frágil. A adição de fibras metálicas tem sido uma solução muito utilizada para mitigar esta deficiência.

O CAD é geralmente composto por aglomerantes cimentícios de alta resistência, agregados graúdos e miúdos, adições minerais e aditivos hiperplastificantes, que permitem a redução na relação água/aglomerante. Devido à sua composição, esse material apresenta uma maior durabilidade, um aumento, tanto na resistência à compressão como à tração. As fibras metálicas propiciam uma ruptura mais dúctil, quando comparado ao concreto tradicional. De acordo com Ghasemi *et al.* (2016), essas vantagens fazem com que concretos com altas resistências sejam cada vez mais utilizados na construção de estruturas nos EUA, Canadá, Europa e Ásia, sendo aplicado principalmente em edifícios altos e pontes.

Apesar de ser um material com custo de produção mais elevado, Fehling *et al.* (2014) afirmam que é mais viável fazer uma comparação no projeto inteiro, pois suas propriedades fazem com que haja diminuição nas seções dos elementos e permitem vãos maiores, tornando a estrutura mais leve e, assim, menos dispendiosa. Isso dá ao material um imenso potencial para ser disseminado como um material econômico nas construções.

Vários modelos constitutivos têm sido utilizados na análise de estruturas de CAD (CEB-FIP, 1990; HSU; HSU, 1994; LU; ZHAO, 2010), mas não existe consenso sobre qual desses modelos melhor representa o comportamento mecânico deste material. A própria norma brasileira de projetos estruturais NBR 6118 (ABNT, 2014) sugere modelos para concretos até a classe C90, entretanto é bastante comum CAD com resistências superiores a 100 MPa.

A modelagem numérica de estruturas construídas com CAD também apresenta alguns desafios em relação a obtenção dos parâmetros de entrada para os modelos constitutivos, especialmente quando são incorporadas fibras na composição do concreto.

### 1.1 Objetivos

O objetivo geral do presente trabalho é estudar modelos constitutivos adequados à representação do comportamento mecânico de estruturas de CAD com e sem a incorporação de

fibras metálicas.

### **1.1.1 Objetivos específicos**

- Realizar experimentos em laboratório para caracterização do material considerando diferentes teores de fibras;
- Seleção de modelos empíricos e baseados na mecânica do contínuo e na teoria da plasticidade;
- Avaliar os parâmetros dos modelos constitutivos para representação do comportamento do CAD na representação do comportamento monotônico do CAD com diferentes teores de fibras;
- Comparar o desempenho dos modelos constitutivos utilizados na representação do comportamento monotônico do CAD com diferentes teores de fibras;
- Comparar resultados obtidos para a estrutura em CAD com a mesma estrutura em concreto armado (CA) convencional.

## **1.2 Estrutura do trabalho**

O presente trabalho é estruturado em seis capítulos:

No Capítulo 1 descreve-se uma rápida introdução que almeja justificar a relevância do tema e os objetivos da dissertação.

O Capítulo 2 mostra a revisão bibliográfica necessária para a compreensão do trabalho, abordando o CAD, complexidade do concreto, Teoria da Plasticidade, Mecânica do Dano Contínuo e modelos constitutivos, como o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) e o Modelo de Lee e Fenves (LEE; FENVES, 1998).

No Capítulo 3 é apresentada a metodologia e os materiais utilizados durante os experimentos. O Capítulo 4 apresenta os resultados experimentais obtidos. No Capítulo 5 há as aplicações numéricas, bem como uma breve discussão sobre elas. No Capítulo 6 são apresentados comentários e considerações finais.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Concreto de Alto-Desempenho - CAD

O patamar para um concreto ser denominado como CAD já foi de 30 MPa, na década de 1950 (ACI, 2010). Com o avanço da tecnologia, ele foi sendo elevado ao longo do tempo.

No início dos anos 1970, pesquisadores de Chicago desenvolveram um concreto que atingia resistência à compressão de até 60 MPa. Na década seguinte, com a utilização de aditivos superplastificantes e sílica ativa, quebrou-se essa barreira. O material passou a atingir resistência de 100 MPa e ficou conhecido como Concreto de Alto Desempenho, ou, simplesmente, CAD (ou *High Performance Concrete* – HPC) (MENDES, 2002).

#### 2.1.1 Composição

A composição típica do CAD se dá por cimento, agregados graúdos, areia fina, sílica ativa, aditivos hiperplastificantes e água (ACI, 2010). A adição de fibras de aço fornece uma ruptura mais dúctil e é bastante importante, visto que a ruptura de concretos com resistências à compressão altas são muito frágeis.

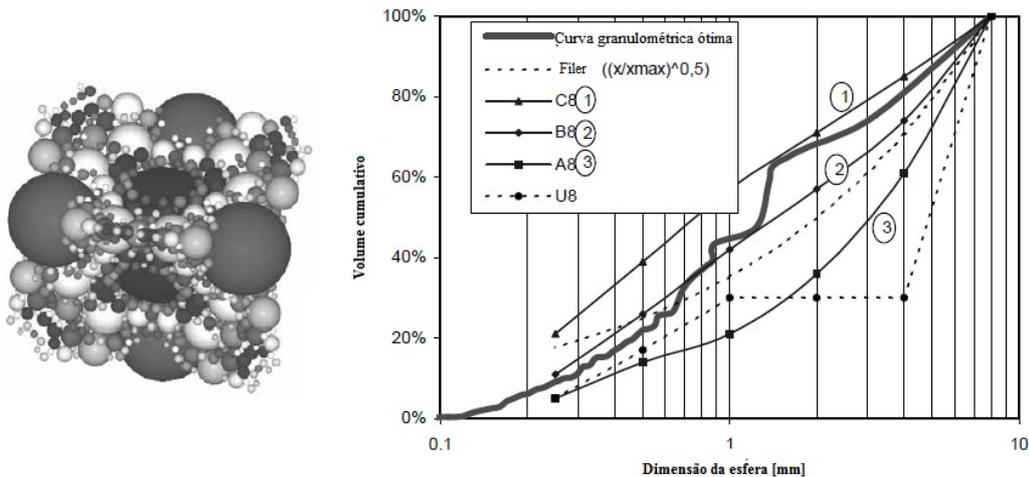
##### 2.1.1.1 Agregados, Adições e Aditivos

Apesar do CAD geralmente possuir agregados graúdos em sua composição, o utilizado nesse estudo não fará uso desses componentes, uma vez que eles possuem menor superfície específica e fornecem tensões localizadas na zona de interface agregado pasta, o que diminui a resistência do material. Para que resistências maiores sejam atingidas, é realizada uma otimização na escolha de finos, que, geralmente, possuem comprimento máximo de 0,5 mm, o que resulta em um empacotamento de alta densidade e uma baixa porosidade (GEISENHANSLÜKE; SCHMIDT, 2004). Os autores também afirmam que há duas maneiras de descrever o empacotamento do material: a partir do volume específico da matriz do concreto, especificado pela relação volumétrica entre água e cimento mais todas as partículas de finos ( $a/f$ ); ou a partir de modelos computacionais que simulem todas as variáveis necessárias dos materiais que compõem o concreto, como granulometria, formato e densidade da partícula.

Com auxílio de técnicas de empacotamento (DELARRARD; SEDRAN, 1994; DELARRARD; SEDRAN, 2002; FENNIS *et al.*, 2009) e modelos computacionais para sua simulação (STROEVEN; STROEVEN, 1999; BISHNOI; SCRIVENER, 2009), pesquisadores

vêm cada vez mais atingindo um empacotamento ótimo. Geisenhanslücke (2002) considera um modelo onde o agregado é representado por esferas posicionadas nos vértices de um tetraedro, preenchido por esferas menores. O autor desenvolveu um algoritmo que primeiro identifica a posição, tamanho e disposição das esferas e depois calcula uma curva ótima de granulometria considerando a maior densidade de empacotamento, conforme Figura 1.

Figura 1 – Posição e tamanhos ótimos das partículas de agregados no empacotamento



Fonte: adaptada de Geisenhanslücke (2002).

Fehling *et al.* (2014) recomendam a utilização do cimento CP-I de baixa alcalinidade e classe de resistência de 42,5 R, de preferência resistente a sulfatos (RS) e de baixo calor de hidratação, de acordo com o código DIN EN (DIN, 2016). Os autores justificam a escolha desse componente porque, apesar de sua alta capacidade de resistência e sua grande quantidade (entre 700 e 850 kg/m<sup>3</sup>), ele não necessita de muita água e nem possui grande retração química, além de praticamente não haver possibilidade de uma reação alcáli-sílica.

A sílica ativa tem como função física trabalhar como microfíler e sua quantidade deve ser limitada à quantidade mínima necessária para preencher os microvazios de acordo com a otimização da densidade de empacotamento, caso contrário, o concreto pode se tornar muito viscoso (FEHLING *et al.*, 2014). Embora reduza a trabalhabilidade do material (SAKAI *et al.*, 2009), esse componente pode contribuir parcialmente para processos da hidratação relacionados com a resistência, desde que se utilize um tratamento de cura térmica adequado (HEINZ *et al.*, 2012).

Segundo a Lei de Abrams, relação água/cimento (*a/c*) do concreto é inversamente proporcional à sua resistência. Portanto, a fim de alcançar resistências mais altas, o CAD

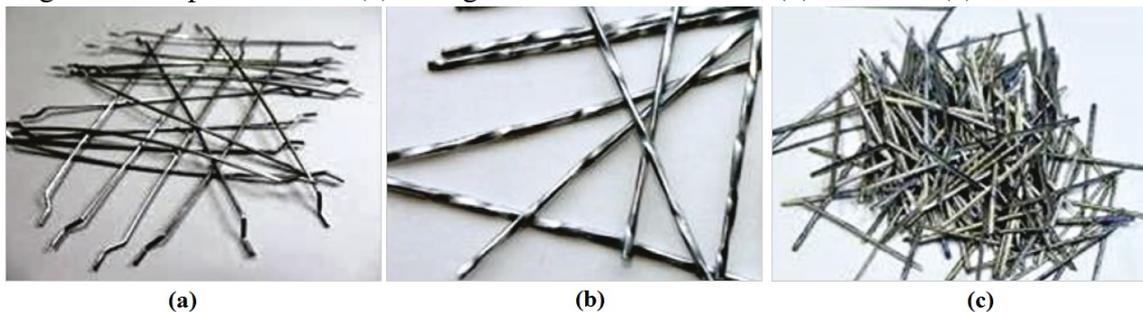
apresenta um índice *a/c* variando entre 0,20 e 0,25, bem menor que os índices apresentados por concretos tradicionais. Entretanto, essa baixa relação diminui a trabalhabilidade do material e, portanto, é necessária a utilização de aditivos (MEHTA; MONTEIRO, 2017).

Os aditivos mais utilizados são hiperplastificantes derivados de éteres de polycarboxilato (*polycarboxylate ether* - PCE) (SCHRÖFL *et al.*, 2012) devido à sua alta efetividade no concreto (SCHIESSL *et al.*, 2010). De acordo com Plank *et al.* (2009), os PCEs mais adequados são aqueles que desagregam as partículas de cimento e outros finos. Aliada à grande quantidade de finos, a presença desse aditivo faz com que o material se assemelhe reologicamente, em seu estado fresco, mais a um Concreto Auto Adensável (CAA ou *Self-Compacting Concrete* - SCC) que ao concreto convencional. Apesar disso, o CAD é mais viscoso e coesivo, o que faz com que não seja auto-adensável como o SCC (FEHLING *et al.*, 2014).

#### 2.1.1.2 Fibras

Segundo Denarié e Brühwiler (2011), a utilização de fibras tem efeito no nível estrutural, aumentando a deformabilidade do material e fornecendo uma ductilidade em sua ruptura. Geralmente, são adotadas fibras de aço devido à sua alta resistência, ao seu elevado módulo de elasticidade e sua boa adequação ao meio alcalino (BUTTIGNOL *et al.*, 2017). Alguns tipo de fibra podem ser observados na Figura 2.

Figura 2 – Tipos de fibra: (a) com gancho na extremidade, (b) torcida e (c) reta



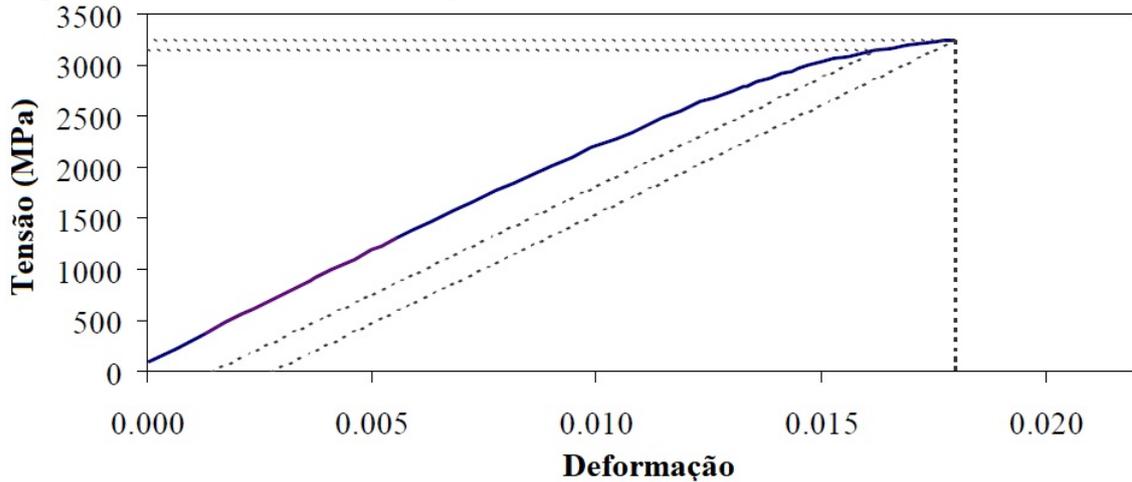
Fonte: adaptada de Buttignol *et al.* (2017).

Fehling *et al.* (2014) recomendam fibras com diâmetro de no máximo 0,2 mm e comprimento variando entre 9 e 17 mm feitas de aço de alta resistência com tensão de tração última maior que 2000 MPa de acordo com o código DIN EN 14889-1 (DIN, 2006), o que garante uma boa trabalhabilidade do concreto. Eles ainda recomendam que a relação comprimento/diâmetro não seja menor que 65.

Graybeal (2006) realizou testes com concreto utilizando fibras de metal retas com

diâmetro de 0,2 mm e comprimento de 12,7 mm, que possuíam, em média, módulo de elasticidade de 210 GPa, tensão de escoamento de 3160 MPa e tensão última de 3270 MPa (nota-se uma baixa ductilidade após a plastificação). O autor realizou testes de qualidade para garantir essas propriedades e uma curva de tensão-deformação do material pode ser observada na Figura 3.

Figura 3 – Curva tensão-deformação de uma fibra reta de alta resistência

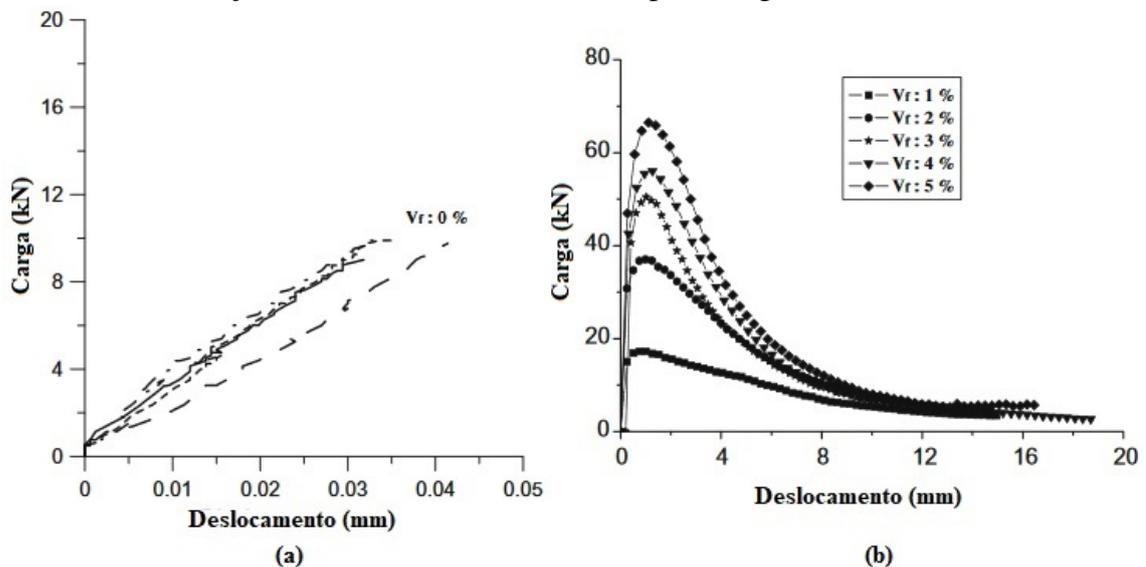


Fonte: adaptada de Graybeal (2006).

O posicionamento das fibras dentro do UHPC é um fator relevante. Segundo Graybeal (2006), embora ensaios de compressão em cubos tenham mostrado que a posição das fibras não possui efeito significativo na resistência à compressão ou módulo de elasticidade do UHPC, ensaios de flexão com três pontos mostraram que a máxima resistência à flexão equivalente dos prismas foi diminuída por um fator de mais de três quando as fibras estavam alinhadas perpendicularmente às forças de tração na flexão na direção das tensões principais. Também foi observado que esses prismas não exibiam o comportamento tradicional de dureza após a abertura de fissuras, apresentando uma grande diminuição de carga imediatamente após a primeira fissura. Devido a isso, é importante entender todas as cargas que serão aplicadas a um elemento de concreto e seguir técnicas corretas de posicionamento de fibras (GRAYBEAL, 2006).

Outro fator importante das fibras é sua porcentagem em massa no material. Kang *et al.* (2010) realizaram ensaios de três pontos de flexão variando apenas a porcentagem de fibras em um concreto com mesma composição gradualmente entre 0 e 5%, com resultados expostos na Figura 4.

Figura 4 – Curva tensão-deformação de um concreto (a) sem utilização de fibras e (b) com utilização de fibras retas em diferentes percentagens



Fonte: adaptada de Kang *et al.* (2010).

Comparando os concretos sem e com a presença de fibras, nota-se maior capacidade de carga; aumento na rigidez inicial; e uma ruptura mais dúctil, com um comportamento de amolecimento após a máxima carga. Entretanto, com o aumento na porcentagem, nota-se que a rigidez inicial é praticamente a mesma e a carga de pico aumenta. O aumento das fibras aumenta a carga de pico, mas não a rigidez inicial.

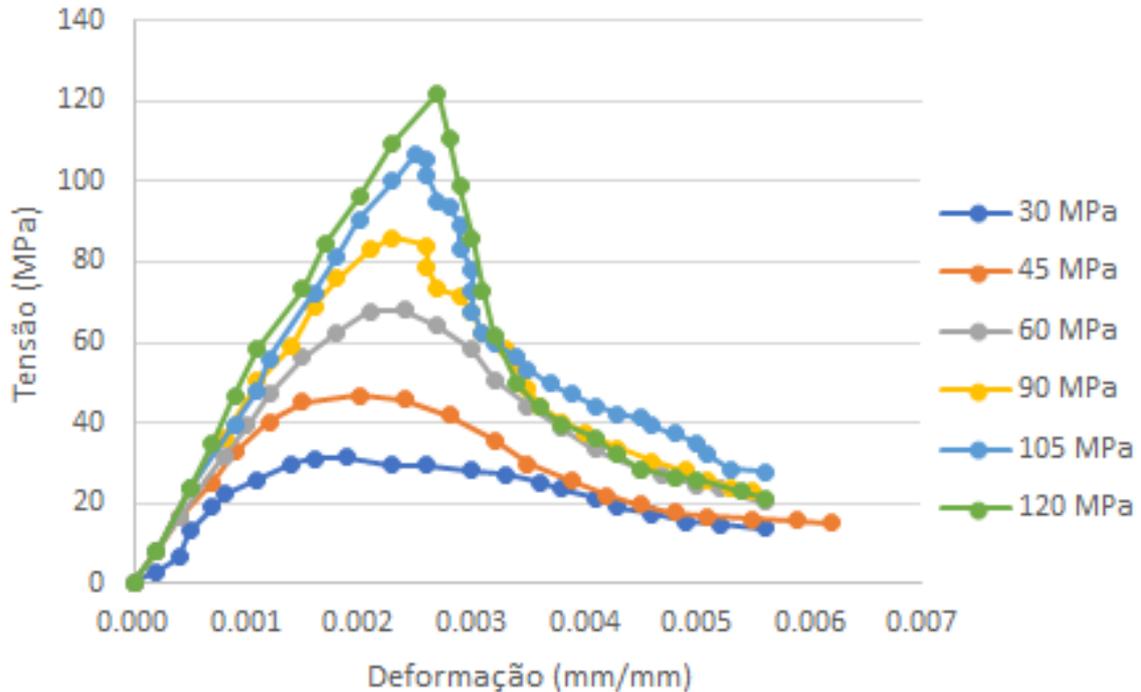
Muitos autores utilizam a porcentagem entre 1 e 3% em ensaios (SALEEM *et al.*, 2011; WILLE *et al.*, 2014; GHASEMI *et al.*, 2016; TANARSLAN, 2017; SHAFIEIFAR *et al.*, 2017).

### 2.1.2 Características mecânicas

Para ser qualificado como CAD, o material precisa possuir resistência à compressão superior a 60 MPa. Consequentemente, seu módulo de elasticidade, suas resistências à tração e à flexão também são maiores que as do concreto tradicional.

Sabe-se que o concreto é um material quase-frágil e que sua ruptura se torna mais frágil à medida que sua resistência aumenta (AFROUGHSABET; OZBAKKALOGLU, 2015). Ayub *et al.* (2014) analisaram a relação tensão-deformação de vários concretos com resistências à compressão entre 30 e 120 MPa. A Figura 5 evidencia um caminho pós-pico bem mais frágil para os concretos com maiores resistências.

Figura 5 – Curvas tensão-deformação para concretos de 30 a 120 MPa



Fonte: adaptada de Ayub *et al.* (2014).

Portanto, devido à sua alta resistência, o CAD se mostra um material com ruptura bastante frágil, necessitando da utilização de fibras de aço para torná-la mais dúctil.

Segundo Wille *et al.* (2014), a presença dessas fibras fornece uma série de vantagens, a citar uma ruptura dúctil (ao contrário da ruptura frágil apresentada pelo concreto armado convencional); uma pseudo-ductilidade à tração; uma grande absorção de energia antes da fratura; e uma distribuição da fissuração do elemento em microfissuras antes da abertura de fissuras localizadas.

Xu *et al.* (2018) dizem que a fluência pode ser diminuída adicionando fibras de aço a um concreto com mesma relação a/c. Porém, deve-se tomar cuidado para não haver uma sobredosagem, pois isso não melhoraria a resistência à fluência. Além disso, o CAD possui menor retração e maior durabilidade, se comparado ao concreto tradicional (GHASEMI *et al.*, 2016).

### 2.1.3 Aplicações do CAD

O CAD vem sendo cada vez mais empregado na construção de estruturas em todo o mundo devido às suas características. Embora o material possua um custo maior em sua fabricação, ele apresenta uma economia considerável no projeto devido a permitir vãos maiores com dimensões menores, diminuindo o peso da estrutura (FEHLING *et al.*, 2014).

Esse material é aplicado em diversas estruturas ao redor do mundo, em especial edifícios altos. A seguir são dispostas algumas estruturas que se utilizaram do material.

#### 2.1.3.1 Torres Petronas - Kuala Lumpur - Malásia

Construídas em 1998, as Torres Petronas (*Petronas Towers*) foram construídas em estrutura mista, possuindo CAD de 80 MPa em pilares e pilares-paredes. Com 88 andares, essa edificação está entre os 20 prédios mais altos do mundo, com 452 m, e pode ser observada na Figura 6.

Figura 6 – Petronas Towers, Kuala Lumpur, Malásia



Fonte: SAMSUNG (2016).

#### 2.1.3.2 Burj Khalifa - Dubai - Emirados Árabes Unidos

Construído em entre 2004 e 2010, o Burj Khalifa é a maior estrutura já feita pelo homem. Feito em CAD de 80 MPa, esse arranha-céu alcança 828 m de altura e 160 andares. Localizado em Dubai, nos Emirados Árabes Unidos (EAU), esse prédio é tão alto que pode ser observado em cidades vizinhas por telescópios. Pode ser visto na Figura 7.

Figura 7 – Burj Khalifa, Dubai, EAU



Fonte: MentalFloss (2019).

### 2.1.3.3 Edifício E-Tower - São Paulo - Brasil

O CAD também é uma realidade em nosso país. Diversas obras utilizam concretos com  $f_{ck} > 50$  MPa. Entretanto, não é usual que as construções em solos brasileiros ultrapassem o patamar de 70 MPa, sendo o E-Tower, localizado na cidade de São Paulo, uma exceção.

O edifício foi projetado pelo escritório de cálculo estrutural França e Associados para uma resistência de 80 MPa em seus pilares. Entretanto, a fim de aumentar o número de vagas nos seus subsolos, foi proposta uma diminuição na seção dos pilares desses pavimentos. A solução adotada pela cooperação entre França e Associados, os executores Tecnum e Corporate, a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), a empresa Concreto Engemix e a Associação Brasileira de Cimento Portland (ABCP) foi a utilização de um concreto de 125 MPa. Esse valor foi considerado um recorde mundial para o concreto colorido.

O edifício, localizado no bairro de Vila Olímpia, é o décimo quinto mais alto do País, com 148 m e 39 andares. A Figura 8 explicita o arranha-céu.

Figura 8 – E-Tower, São Paulo, Brasil



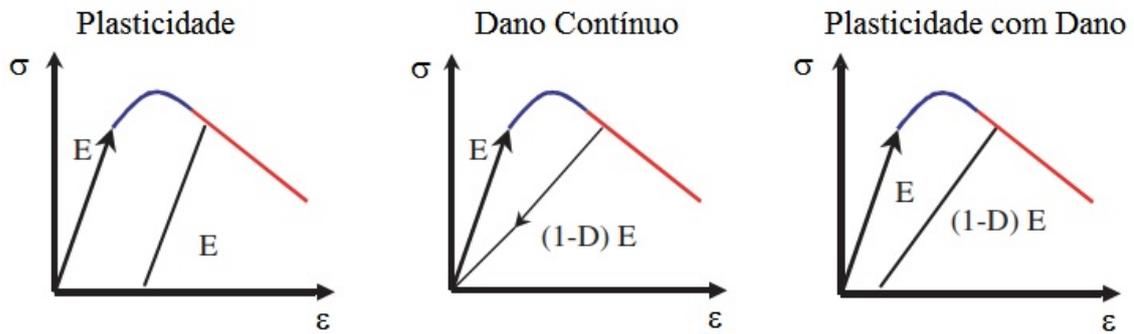
Fonte: Tecnosil (2019).

## 2.2 Modelos constitutivos

Chen e Han (2007) definem dois estágios para o desenvolvimento de um projeto de estruturas na Engenharia: primeiro, define-se campo de esforços internos de cada elemento; e em seguida determina-se a resposta do material a esse campo de esforços. Ao longo do tempo, foram criados vários modelos mecânico-matemáticos que tentam descrever seu comportamento. Esses modelos são conhecidos como modelos constitutivos ou leis constitutivas. Ao relacionar essas grandezas, os modelos constitutivos vinculam a cinemática às descrições cinéticas de movimento (WILLAM, 2002). Assim, é possível obter a formulação de um problema de valor de contorno e simular os efeitos gerados por uma carga aplicada.

O comportamento da estrutura depende de seus materiais e das condições de carregamento, por isso a escolha de modelos que representem isso com eficácia é de grande importância (ÖZTEKIN *et al.*, 2016). Existem vários modelos constitutivos, sendo grande parte deles baseados na Teoria da Elasticidade, Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo. A Figura 9 representa modelos genéricos de plasticidade, dano contínuo e plasticidade com dano contínuo. Cabe observar que essa mesma curva poderia representar um material elástico não linear, desde que o descarregamento ocorresse pelo mesmo caminho do carregamento.

Figura 9 – Modelos constitutivos

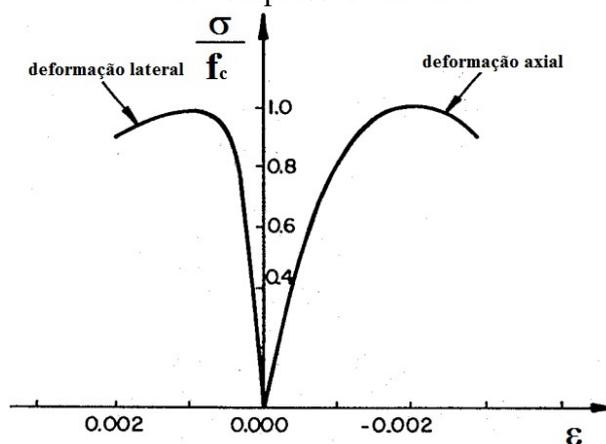


Fonte: adaptada de Jason *et al.* (2006).

Materiais dúcteis, como o aço, são bem representados por modelos de plasticidade. Já materiais frágeis e quase-frágeis (o concreto, por exemplo) são melhor representados por modelos de plasticidade com dano. Em projetos, costuma-se adotar modelos elásticos. O concreto possui comportamento bastante complexo, o que torna a formulação de um modelo constitutivo completo muito difícil para esse material.

A complexidade do concreto é evidenciada de várias maneiras (CHEN; HAN, 2007), como seu comportamento tensão-deformação não linear, devido ao desenvolvimento de microfissuras e fissuras. A Figura 10 demonstra a curva típica de um corpo de prova de concreto submetido à compressão uniaxial. Nela podem ser observados três estágios de deformação, sendo a axial (na direção da aplicação da carga) e as deformações laterais.

Figura 10 – Curva de tensão-deformação típica de compressão uniaxial



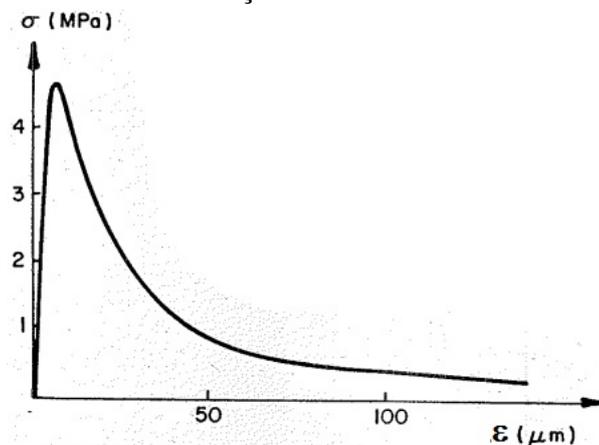
Fonte: adaptada de Kupfer *et al.* (1969).

As explicações a seguir são baseadas no trabalho de Buchaim (2001). No primeiro estágio, conhecido como estágio linear elástico e com tensões até  $0,3f_c$ , onde  $f_c$  representa a tensão máxima suportada pelo CP, o concreto permanece com apenas as microfissuras próprias

de sua composição, portanto o comportamento é linear elástico. No segundo estágio, conhecido como estágio inelástico, as tensões encontram-se entre  $0,3f_c$  e  $0,75f_c$  e as microfissuras começam a aumentar em comprimento, espessura e número, fazendo com que o comportamento se torne não linear. Ainda assim, a propagação de fissuras nesse estágio é estável até que a tensão atinja  $0,75f_c$ , patamar genericamente nomeado de início de propagação instável de fissuras. A partir desse limite, chega-se ao terceiro estágio de deformação, ou estágio localizado, no qual a falha progressiva do concreto ocorre devido à fissuras na pasta de cimento. Essas fissuras se juntam a fissuras de ligação presentes na superfície dos agregados e formam zonas de fissuras ou dano interno.

O comportamento do concreto, porém, é diferente quando sujeito à compressão ou à tração, conforme se observa na Figura 11. Nesse caso, o limite de elasticidade passa a ser entre 60% e 80% da tensão última de tração. Acima disso, as microfissuras de ligação começam a crescer, e o estágio de fissuras estáveis é muito curto, já dando início ao estágio localizado. Devido a isso, a falha do concreto é frágil.

Figura 11 – Curva de tensão-deformação típica de tração uniaxial

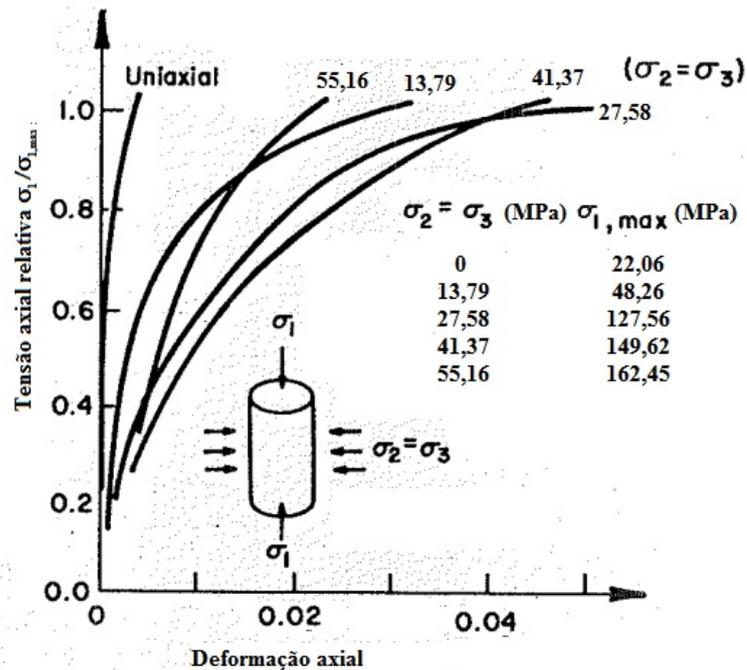


Fonte: adaptada de Petersson (1981).

Outro aspecto que torna o concreto um material complexo é a influência da tensão de confinamento sobre seu comportamento. Considere um corpo de prova cilíndrico ao qual são aplicadas tensões confinantes laterais  $\sigma_2 = \sigma_3$  fixas e uma tensão axial  $\sigma_1$  até o rompimento. Aumentando esses valores de  $\sigma_2$  a cada ensaio, percebe-se que as tensões confinantes influenciam bastante o comportamento do concreto. Inicialmente, à medida que aumentam as tensões confinantes, as deformações últimas do corpo de prova também aumentam. Porém, para tensões confinantes a partir de 27 MPa, os valores da deformações na falha começam a decair (CHEN;

HAN, 2007). Entretanto, se comparado ao corpo de prova sem confinamento, as deformações no rompimento são maiores, bem como o concreto apresenta um certo grau de ductilidade antes da falha, o que pode ser observado nos experimentos expostos na Figura 12 (PALANISWAMY; SHAH, 1974).

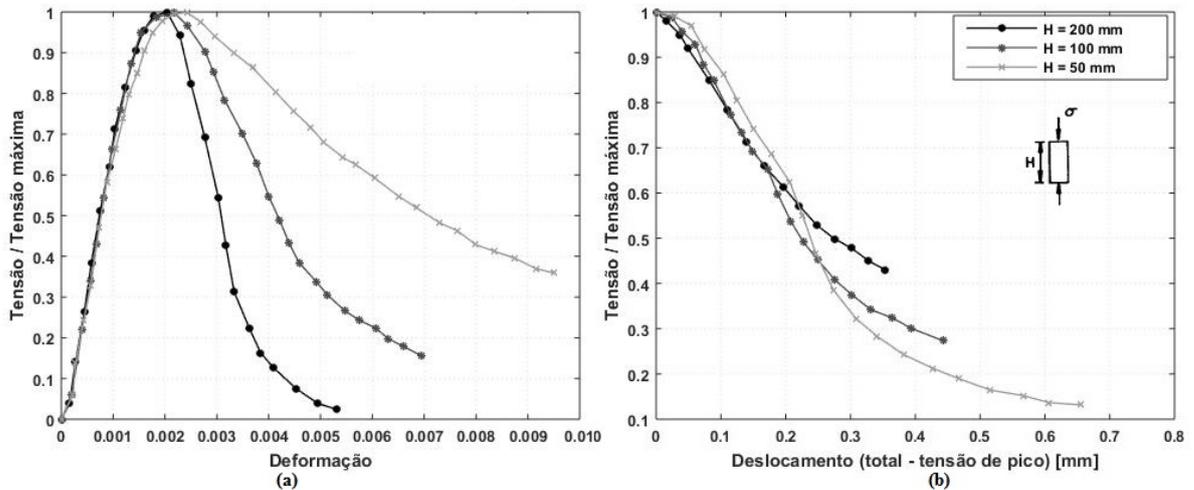
Figura 12 – Efeito do confinamento na compressão do concreto



Fonte: adaptada de Palaniswamy e Shah (1974).

Nota-se também que o concreto apresenta amolecimento (*softening*) após a tensão de pico  $\sigma_{max}$ , isto é, suas tensões diminuem com o aumento da deformação. Van Mier (1984) afirma que esse comportamento não é devido a uma propriedade do material, mas representa uma resposta da estrutura do corpo de prova às cargas aplicadas, ou seja, a altura do corpo de prova influencia no comportamento tensão-deformação (Figura 13a). Esse fenômeno ocorre porque a deformação após a tensão de pico é localizada em uma região dos corpos de prova, o que resulta em deslocamentos pós-pico iguais. Portanto, se o diagrama representar o deslocamento (em vez da deformação) pela tensão, as curvas são praticamente idênticas (Figura 13b), independente da altura do corpo de prova. Porém, quando a deformação é calculada, divide-se o mesmo deslocamento por alturas diferentes, por isso o comportamento tensão-deformação é diferente.

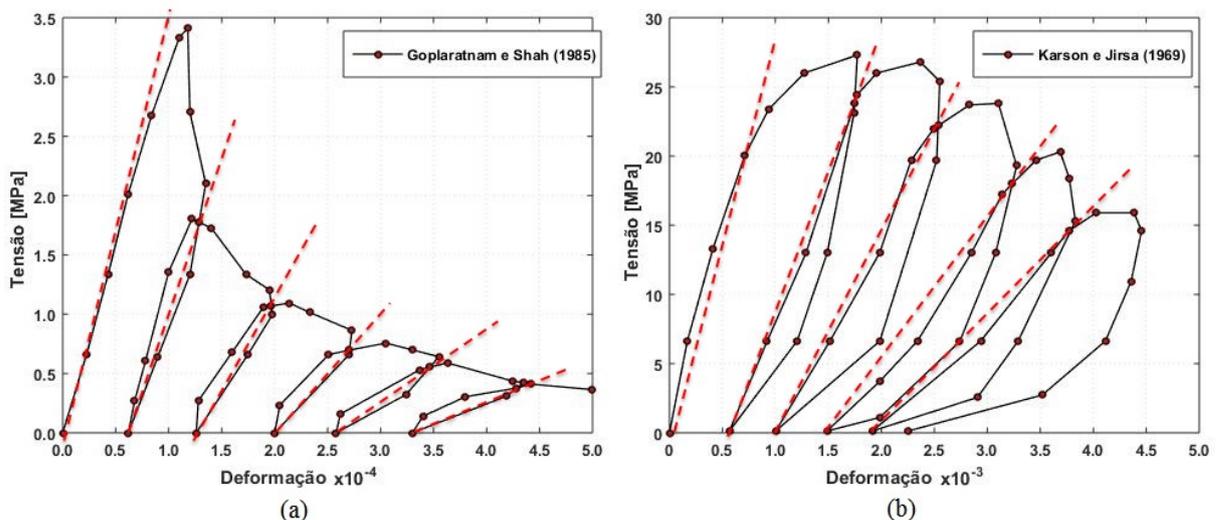
Figura 13 – Curvas obtidas para diferentes alturas de corpos de prova (a) tensão-deformação e (b) tensão deslocamento (total - tensão de pico)



Fonte: adaptada de Van Mier (1984).

As características anteriores foram obtidas considerando carregamento monotônico. No caso de ensaios com carregamento não monotônico, observa-se uma degradação da rigidez do concreto ao longo dos ciclos de carregamento e descarregamento (KARSAN; JIRSA, 1969; REINHARDT, 1984; GOPALARATNAM; SHAH, 1985). Nota-se que, ao descarregar o material, não são obtidas retas, mas histereses com inclinações cada vez menores. Considera-se que a inclinação média de cada histerese é uma reta que passa pelo cruzamento da curva, conforme Figura 14. Essas retas são as rigidezes do concreto, cada vez menores devido ao dano ocasionado por microvazios e microfissuras.

Figura 14 – Experimentos de carregamento/descarregamento em concreto à (a) tração (GOPALARATNAM; SHAH, 1985) e (b) compressão (KARSAN; JIRSA, 1969)



Fonte: adaptada de Gopalaratnam e Shah (1985), Karsan e Jirsa (1969).

### 2.3 Modelos elásticos

Os materiais sólidos possuem um patamar no qual as deformações são reversíveis, não havendo deformações residuais. Esse patamar é assegurado em pequenas taxas de deformação, sendo plausível adotar as hipóteses de isotropia e linearidade como sendo suficientes à aplicação prática na Engenharia. A Lei de Hooke relaciona, de forma linear, a tensão  $\sigma$  e deformação  $\varepsilon$

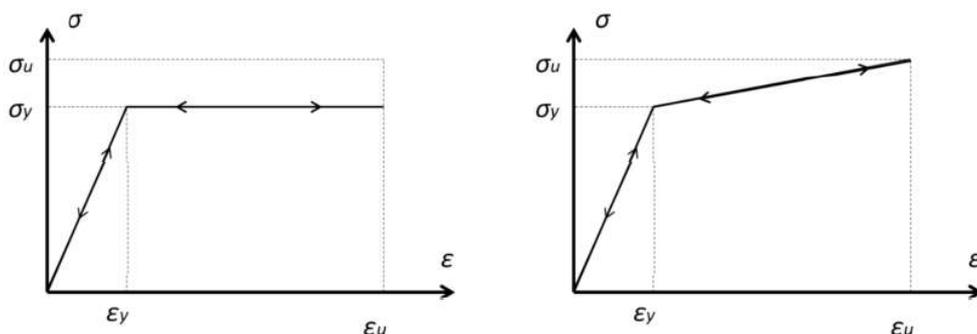
$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.1)$$

onde  $E$  é o Módulo de Elasticidade (ou de Young). No caso do concreto armado, a lei de Hooke pode ser utilizada para modelar o comportamento do aço antes da plastificação, bem como do concreto antes do início da fissuração.

Entretanto, apesar de bastante utilizada, a Lei de Hooke não descreve bem o comportamento desses materiais quando expostos a deformações maiores, pois as características do material mudam e, conseqüentemente, seu comportamento também se torna diferente. Geralmente a rigidez diminui após a plastificação, e a curva tensão-deformação pode ser no formato bilinear.

Alguns códigos utilizam diagramas simplificados para fins de projeto (CEB-FIP, 1990; EUROCODE 2, 2004; ABNT, 2014). A Figura 15 mostra as curvas de tensão-deformação bilineares para o aço na norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2014) e no código Eurocode 2 (2004). Nelas,  $\sigma_y$  e  $\varepsilon_y$  são as tensões e deformações de escoamento e  $\sigma_u$  e  $\varepsilon_u$  as tensões e deformações últimas. Observa-se que, mesmo após a mudança na curva, o caminho do descarregamento segue sendo o mesmo do carregamento.

Figura 15 – Curvas de tensão-deformação do aço na tração e na compressão da (a) NBR 6118 (ABNT, 2014) e do (b) Eurocode 2 (2004)

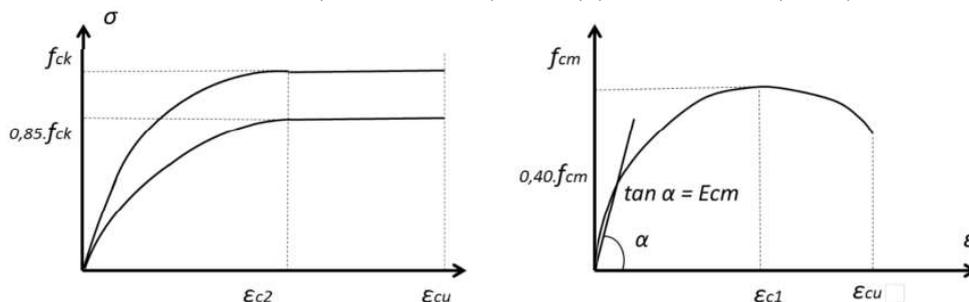


Fonte: adaptada da NBR 6118 (ABNT, 2014) e do Eurocode 2 (2004).

A partir da Figura 15 é possível notar a ausência de tensão residual no descarregamento, característica dos modelos elásticos. Isso é evidenciado pelas setas na curva que indicam que o carregamento e o descarregamento seguem o mesmo caminho. Além disso, percebe-se que na Figura 15b há um efeito de endurecimento (ou encruamento ou, ainda, *hardening*), na qual o material ganha resistência a partir de  $\sigma_y$ . Apesar das curvas acima mencionadas serem ambas bilineares, curvas multilíneas (*piecewise linear*) também são bastante utilizadas para representar curvas tensão-deformação obtidas experimentalmente.

Modelos elásticos não lineares também são bastante utilizados na modelagem de estruturas devido à sua maior simplicidade e eficiência computacional. É o que ocorre nas curvas de compressão do concreto convencional representada na NBR 6118 (ABNT, 2014) e no Eurocode 2 (2004). A Figura 16 as explicita, onde  $f_{ck}$  é a tensão característica de ruptura à compressão,  $f_{cm}$  é a tensão média de ruptura à compressão e  $\epsilon_{c1}$  e  $\epsilon_{c2}$  são as deformações de escoamento.

Figura 16 – Curvas de tensão-deformação do concreto na compressão da (a) NBR 6118 (ABNT, 2014) e do (b) Eurocode 2 (2004)



Fonte: adaptada da NBR 6118 (ABNT, 2014) e do Eurocode 2 (2004).

Apesar de sua simplicidade, modelos elásticos não lineares levam a bons resultados no análise de estruturas submetidas a carregamentos monotônicos, como pode ser verificado em Parente *et al.* (2014) e Moreira *et al.* (2018). Os autores utilizaram modelos constitutivos elásticos para o concreto e o aço na análise não linear de pórticos planos de concreto armado e obtiveram ótimos resultados na comparação com ensaios monotônicos.

### 2.3.1 Modelos elásticos para o CAD

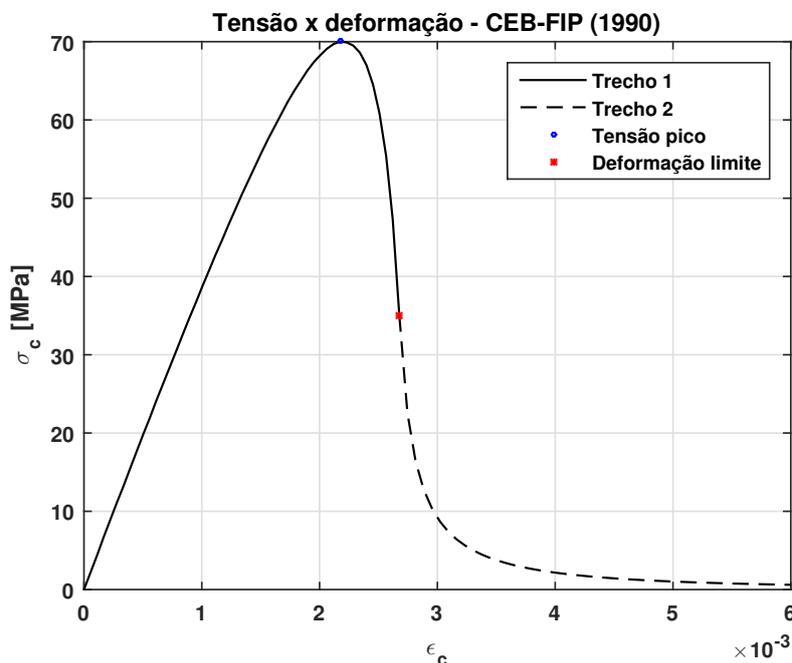
Vários pesquisadores desenvolveram curvas tensão-deformação para o CAD a partir de ensaios experimentais, a citar Sargin e Handa (1969), Wang *et al.* (1978), Hsu e Hsu (1994), Wee *et al.* (1996), Van Gysel e Taerwe (1996) e Lu e Zhao (2010). Lu e Zhao (2010) publicaram

um artigo com a revisão de diferentes modelos constitutivos utilizados para o CAD, observando que a maioria dos modelos funcionam muito bem para os respectivos ensaios, entretanto nem sempre representam bem o comportamento nos demais casos. Os modelos citados, em geral, se baseiam nos trabalhos de Sargin e Handa (1969) e Popovics (1973). A seguir serão discutidos alguns dos modelos mais utilizados na literatura.

### 2.3.1.1 Modelo do CEB-FIP (1990)

O modelo proposto no Código CEB-FIP (1990), baseado em Sargin e Handa (1969), é composto por dois trechos. O Trecho 1, é ascendente até a tensão de pico, sendo descendente até a deformação limite  $\epsilon_{c,lim}$ , correspondente a  $\sigma_c = 0,5f_{cm}$ ; o Trecho 2 descreve o comportamento após a deformação limite até a deformação última. A Figura 17 ilustra essa curva para um concreto de  $f_{ck} = 62$  MPa. Percebe-se que a tensão de pico não é  $f_{ck}$ , mas  $f_{cm}$ . Uma limitação a esse modelo é que se recomenda sua utilização para concretos com  $f_{ck}$  inferior a 90 MPa.

Figura 17 – Tensão-deformação no Modelo CEB-FIP (1990) para um concreto de  $f_{cm} = 70$  MPa



Fonte: o autor.

O Trecho 1 segue a equação:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{A\eta - \eta^2}{1 + \eta(A - 2)} \quad (2.2)$$

onde  $f_{cm}$  é a tensão média do concreto e corresponde a  $f_{cm} = f_{ck} + 8$ ;  $A = E_{c0}/E_{c1}$ ;  $E_{c0}$  e  $E_{c1}$  são, respectivamente, os módulos tangente e secante;  $\eta = \epsilon_c/\epsilon_{c1}$ ;  $\epsilon_c$  e  $\epsilon_{c1}$  são, respectivamente, as

deformações de compressão e no pico, sendo  $\varepsilon_{c1} = 0,0022$ . Na ausência de valores experimentais para módulo secante, Collins *et al.* (1993) recomendam a utilização da relação  $A = \frac{n}{n-1}$ , onde  $n = 0,8 + \frac{f_{cm}}{17}$ .

Como a parte descendente do Trecho 1 só é válida até  $\sigma_c = 0,5f_{cm}$ , limita-se a Equação (2.2) pela equação

$$\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{A}{2} + 1 \right) + \sqrt{\left( \frac{A}{2} + 1 \right)^2 - 2} \right] \quad (2.3)$$

O Trecho 2 é definido pela equação:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{1}{\left( \frac{\xi}{\eta_2} - \frac{2}{\eta_2^2} \right) \eta^2 + \left( \frac{4}{\eta_2} - \xi \right) \eta} \quad (2.4)$$

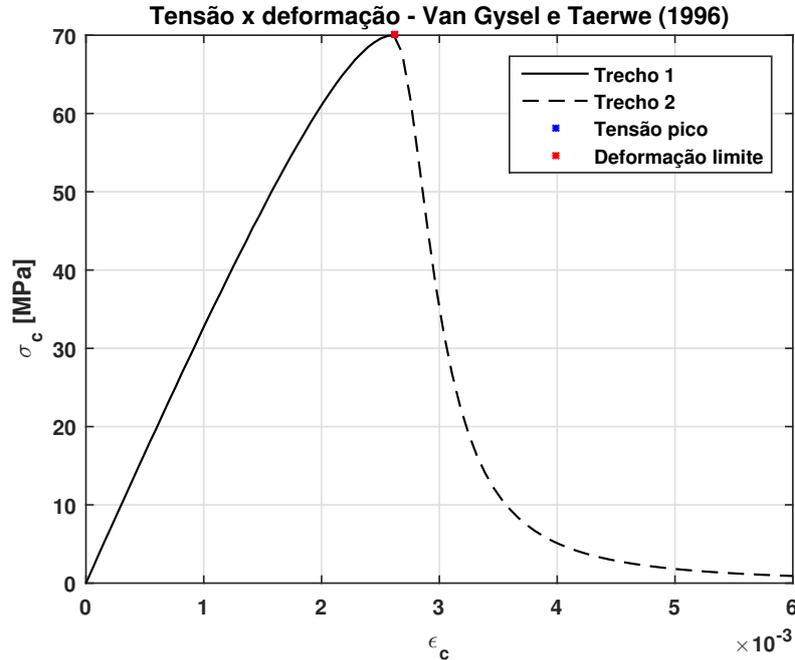
na qual

$$\eta_2 = \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}}; \quad \xi = 4 \frac{[\eta_2^2(A-2) + 2\eta_2 - A]}{[\eta_2(A-2) + 1]^2} \quad (2.5)$$

### 2.3.1.2 Modelo de Van Gysel e Taerwe (1996)

Van Gysel e Taerwe (1996) recomendaram alterações no Modelo do CEB-FIP (1990) a fim de que o modelo reproduza adequadamente o comportamento de concretos com resistência à compressão maior que 90 MPa. O Modelo de Van Gysel e Taerwe (1996) também apresenta dois trechos, semelhante ao Modelo do CEB-FIP (1990). Diferente do Modelo do CEB-FIP (1990), o Modelo de Van Gysel e Taerwe (1996) possui o Trecho 1 até sua tensão de pico (também representada por  $f_{cm}$ ) e o Trecho 2 após essa tensão, descendente. A Figura 18 representa o comportamento de um concreto de  $f_{cm} = 70$  MPa.

Figura 18 – Tensão-deformação no Modelo Van Gysel e Taerwe (1996) para um concreto de  $f_{cm} = 70$  MPa



Fonte: o autor.

São dispostas as alterações sugeridas por Van Gysel e Taerwe (1996) para o Modelo do CEB-FIP (1990). Segundo Van Gysel e Taerwe (1996), o valor da deformação  $\epsilon_{c1}$  pode ser fixado em 0,0022, desde que o  $f_{cm}$  não ultrapasse 42,6 MPa. Para tensões maiores que essa,  $\epsilon_{c1}$  passa a obedecer a seguinte lei:

$$\epsilon_{c1} = \frac{0,7f_{cm}^{0,31}}{1000} \quad (2.6)$$

Além disso, os autores fizeram alterações na Equação (2.4), referente ao Trecho 2 do Modelo do CEB-FIP (1990). O Trecho 2 do Modelo de Van Gysel e Taerwe (1996) se inicia no pico e obedece à seguinte equação:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\eta - 1}{\eta_2 - 1}\right)^2}; \text{ para } \eta > 1 \quad (2.7)$$

sendo  $\eta_2 = \frac{\epsilon_{c1} + t}{\epsilon_{c1}}$ , onde  $t$  é um parâmetro tabelado por Van Gysel e Taerwe (1996). A Tabela 1 denota os valores para as diferentes tensões máximas do concreto, sendo adotada uma regressão exponencial para valores acima de 100 MPa.

Os autores garantem uma melhora na curva proposta pelo Modelo do CEB-FIP (1990), afirmando que ela pode ser usada para concretos com  $f_{ck}$  maiores que 100 MPa.

Tabela 1 – Parâmetro do Modelo de Van Gysel e Taerwe (1996)

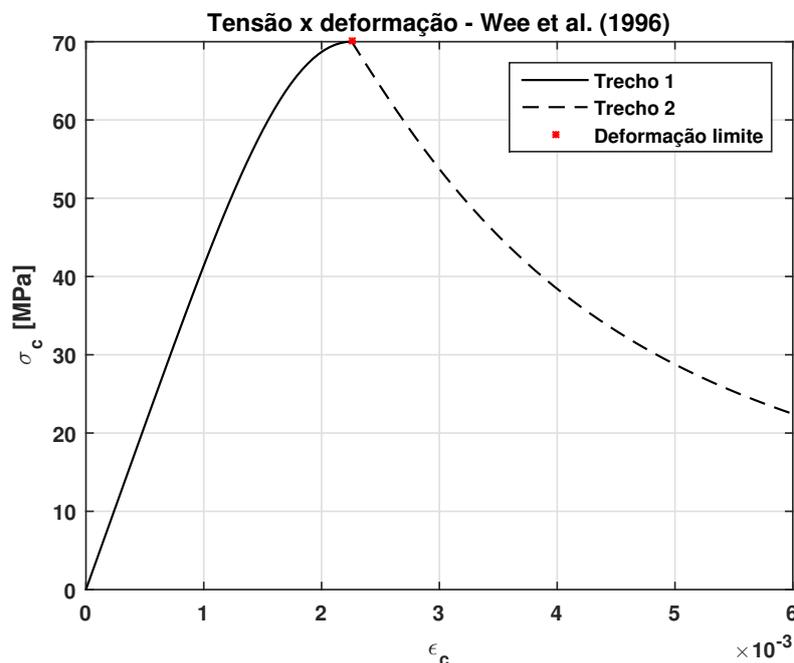
| $f_{ck}$ (MPa) | 50     | 60     | 70     | 80     | 90     | 100    |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $t$ (%)        | 0,0807 | 0,0579 | 0,0388 | 0,0221 | 0,0070 | 0,0015 |

Fonte: adaptada de Van Gysel e Taerwe (1996).

### 2.3.1.3 Modelo de Wee et al. (1996)

Wee et al. (1996) propuseram um modelo baseando-se nos estudos de Hognestad (1951), Wang et al. (1978) e Carreira e Chu (1985). Para representar o comportamento de concretos com  $50 < f'_c \leq 120$  MPa, Wee et al. (1996) alteraram as equações de Carreira e Chu (1985). Assim como os modelos anteriores, esse modelo descreve o comportamento do concreto em dois trechos, conforme se observa na Figura 19. Percebe-se que a deformação limite (agora chamada de  $\epsilon_0$ ) equivale à tensão de pico. Essa tensão, por sua vez, é dada por  $f'_c$ . Além disso, há uma maior ductilidade na ruptura.

Figura 19 – Tensão-deformação no Modelo Wee et al. (1996) para um concreto de  $f'_c = 70$  MPa



Fonte: o autor.

A equação que descreve o comportamento no Trecho 1 ( $0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_0$ ) é a seguinte

$$\frac{\sigma_c}{f'_c} = \frac{\beta \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)}{\beta - 1 + \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^\beta} \quad (2.8)$$

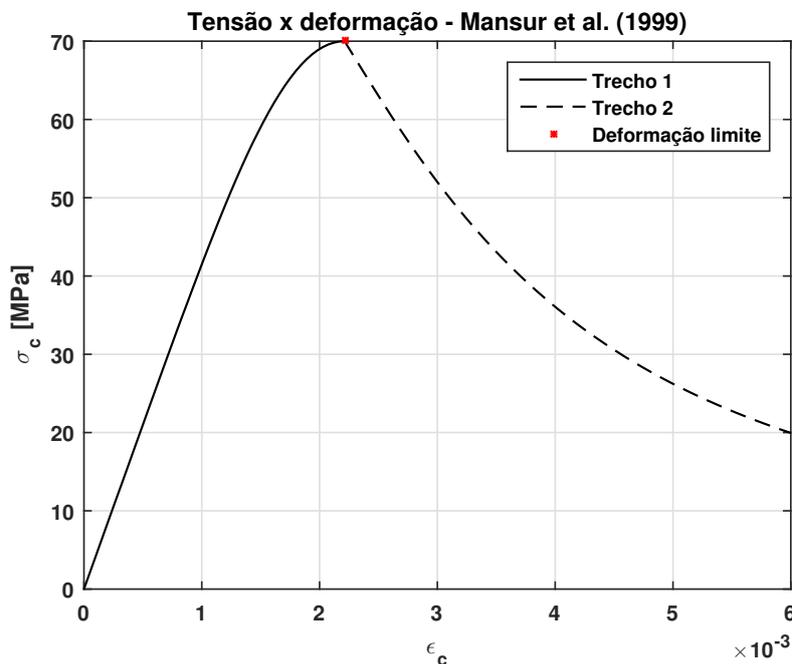
onde  $\epsilon_0 = 0,00078f_c'^{1/4}$ ;  $\beta = 1 / \left( 1 - \frac{f_c'}{\epsilon_0 E_{it}} \right)$ ; e  $E_{it} = 10200f_c'^{1/3}$ . Já para o Trecho 2 ( $\epsilon_c > \epsilon_0$ ), são utilizados os parâmetros de correção  $k_1 = \left( \frac{50}{f_c'} \right)^{3.0}$  e  $k_2 = \left( \frac{50}{f_c'} \right)^{1.3}$ . A equação passa a ser

$$\frac{\sigma_c}{f_c'} = \frac{k_1 \beta \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)}{k_1 \beta - 1 + \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^{k_2 \beta}} \quad (2.9)$$

#### 2.3.1.4 Modelo de Mansur et al. (1999)

Mansur *et al.* (1999) decidiram por um modelo que representasse a adição de fibras ao CAD. Os autores se basearam no Modelo de Wee *et al.* (1996), fazendo algumas alterações. A Figura 20 mostra como a curva desse modelo é semelhante à do Modelo de Wee *et al.* (1996) quando não há adição de fibras. A tensão de pico é chamada de  $f_0$  nesse modelo.

Figura 20 – Tensão-deformação no Modelo Mansur *et al.* (1999) para um concreto de  $f_0 = 70$  MPa



Fonte: o autor.

A primeira alteração foi o ajuste da deformação no pico  $\epsilon_0$  para

$$\epsilon_0 = \left[ 5 \times 10^{-4} + 7,2 \times 10^{-7} \left( \frac{V_f l}{d} \right) \right] f_0^{0,35} \quad (2.10)$$

onde  $V_f$ ,  $l$  e  $d$  são, respectivamente, a porcentagem, o comprimento e o diâmetro de fibras. Além

disso, Mansur *et al.* (1999) sugeriram mudanças nas constantes  $k_1$  e  $k_2$  de Wee *et al.* (1996) para

$$k_1 = \left(\frac{50}{f_0}\right)^{3,0} \left[1 + 2,5 \left(\frac{V_{fl}}{d}\right)^{2,5}\right]; \quad k_2 = \left(\frac{50}{f_0}\right)^{1,3} \left[1 - 0,11 \left(\frac{V_{fl}}{d}\right)^{1,1}\right] \quad (2.11)$$

Com isso, Mansur *et al.* (1999) garantem que há representatividade da adição de fibras no CAD, com o Trecho 2 representando uma descida mais suave e, conseqüentemente, uma ruptura mais dúctil.

## 2.4 Teoria da Plasticidade

A Teoria da Plasticidade é bastante difundida e possui formulação bem consolidada na literatura (SHAMES; COZZARELLI, 1997; SIMO; HUGHES, 2006; CHEN; HAN, 2007; Souza Neto *et al.*, 2011). Esta teoria foi desenvolvida para descrever o comportamento de materiais que apresentam deformações irreversíveis quando submetidos a tensões. Isso quer dizer que o material, mesmo após o descarregamento, não retorna ao seu estado inicial, pois apresenta deformações permanentes (ou plásticas, ou residuais).

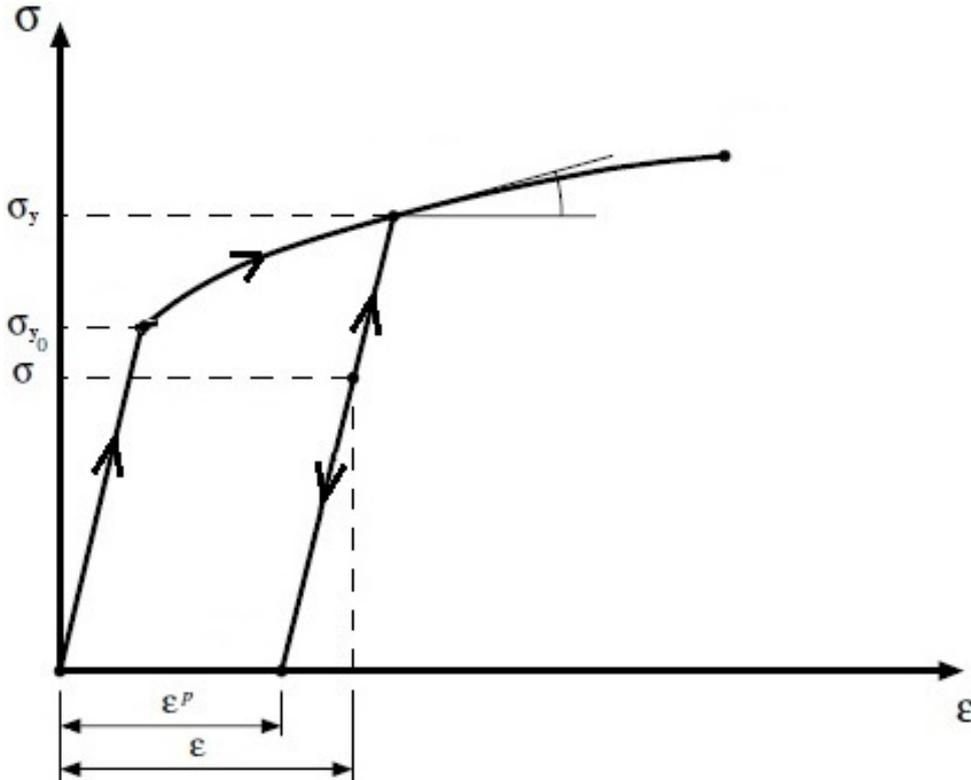
Embora tenha sido inicialmente desenvolvida para metais, essa teoria é aplicada para diversos materiais, dentre eles o concreto. São observadas deformações plásticas consideráveis no concreto devido às microfissuras e ao deslizamento das partículas, evidenciando a possibilidade desse material ser tratado pela Teoria da Plasticidade (CHEN; HAN, 2007).

Os modelos baseados na Teoria da Plasticidade possuem três elementos básicos: uma superfície de escoamento (*yield surface*) inicial no espaço de tensões, a qual define o início das deformações plásticas; uma lei de endurecimento ou encruamento (*hardening*), que altera a superfície de escoamento à medida que a plastificação ocorre; e uma lei de fluxo (*flow rule*), que é relacionada com uma função potencial plástica (*plastic potential function*), que descreve os incrementos de deformação plástica.

Em um modelo elastoplástico, o material permanece elástico linear antes de suas tensões atingirem a superfície de escoamento, no chamado domínio elástico. Quando as tensões ultrapassam a superfície de escoamento, o material entra no domínio plástico, onde há deformação permanente quando totalmente descarregado. Ao ser carregado novamente, percebe-se um aumento na superfície de escoamento, o que caracteriza o encruamento. Se houver uma diminuição na superfície, o fenômeno passa a se chamar amolecimento (*softening*). A Figura 21 apresenta um diagrama tensão-deformação de um modelo elastoplástico simplificado unidimensional para melhor visualização. Pode-se observar que o descarregamento se dá por uma

reta semelhante ao trecho elástico linear antes da plastificação. Quando novamente carregado, o material apresenta o mesmo comportamento elástico linear com até o novo ponto de escoamento.

Figura 21 – Diagrama tensão-deformação característico de uma barra de metal sujeita a carregamento uniaxial



Fonte: adaptada de Souza Neto *et al.* (2011)

#### 2.4.1 Modelo Elastoplástico Geral

Uma das vantagens dos modelos elastoplásticos é a capacidade de descrever o comportamento de materiais submetidos a estados de tensão complexos. Assim, neste item são apresentados os elementos básicos de um modelo elastoplástico tridimensional. O tensor de deformação total  $\boldsymbol{\epsilon}^t$  pode ser decomposto em duas parcelas, uma elástica e outra plástica.

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon}^t - \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (2.12)$$

De acordo com Lemaitre e Desmorat (2005), com o auxílio da termodinâmica dos processos irreversíveis, é possível modelar o comportamento de diferentes materiais em três etapas.

1. Definição de variáveis que indicam o estado atual do mecanismo correspondente (variáveis de estado);

2. Definição de um potencial de estado, a partir do qual se derivam as leis de estado e definição das variáveis associadas às variáveis de estado interno;
3. Definição de um potencial de dissipação, a partir do qual derivam-se as leis de evolução das variáveis de estado associadas aos mecanismos dissipativos;

As variáveis de estado, associadas e internas, são escolhidas de acordo com o mecanismo físico de deformação e degradação do material. A energia potencial livre (ou de Helmholtz)  $\psi^{ep}$  do sistema desempenha um importante papel na derivação do modelo e fornece a lei constitutiva para a tensão. É bastante usual a separação da energia em em uma parcela elástica e outra plástica:

$$\psi^{ep}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.13)$$

ou

$$\psi^{ep}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.14)$$

onde os parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$  representam variáveis internas associadas ao encruamento. A força termodinâmica de encruamento  $\mathbf{A}$  é representada por

$$\mathbf{A} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (2.15)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a densidade de massa. Respeitando as leis da termodinâmica e considerando materiais elastoplásticos e isotrópicos, Souza Neto *et al.* (2011) chega à seguinte contribuição elástica para a energia livre

$$\bar{\rho} \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = G \boldsymbol{\varepsilon}_d^e : \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + \frac{1}{2} K (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e)^2 \quad (2.16)$$

$\mathbf{E}$  é o tensor padrão de elasticidade isotrópica;  $G$  e  $K$  são, respectivamente, os módulos de cisalhamento e volumétrico; o tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$  é a componente desviadora do tensor de deformações elásticas; e  $\boldsymbol{\varepsilon}_v^e = \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e]$  é a deformação elástica volumétrica. Como a lei elástica geral tem forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.17)$$

a lei constitutiva elástica geral passa a ser

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + K \boldsymbol{\varepsilon}_v^e \mathbf{I} \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade.

A função de escoamento (*yield function*) e o conjunto de suas tensões admissíveis são representados por

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0 \quad (2.19)$$

A plastificação ocorre quando  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$ . Consequentemente, o domínio elástico é dado por  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) < 0$ .

É necessário definir a evolução das variáveis internas. Nesse caso, elas são o tensor de deformações plásticas  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  e os parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$  do encruamento. Define-se a lei do fluxo (*plastic flow rule*)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (2.20)$$

onde  $\dot{\gamma}$  é o multiplicador plástico a ser definido; o tensor  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$  é o vetor de fluxo (*flow vector*). A lei do encruamento (*hardening law*) é dada por

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \mathbf{H} \quad (2.21)$$

onde a função  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$  é o módulo de encruamento generalizado. A evolução das variáveis plásticas deve satisfazer as condições de Kuhn-Tucker (ou de complementaridade):

$$f \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} f = 0 \quad (2.22)$$

As expressões da Equação (2.22) definem as condições de carregamento/descarregamento do modelo elastoplástico. Há ainda uma condição complementar que garante que a evolução da deformação plástica  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  mantenha a tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  na superfície de escoamento:

$$\dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.23)$$

É conveniente definir a regra de escoamento e a lei de encruamento em termos de um potencial plástico  $\psi^p$ . Considera-se que o vetor fluxo e a lei de encruamento são derivados desse potencial, portanto

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial \psi^p}{\partial \mathbf{A}} \quad (2.25)$$

Assim, o potencial plástico  $\psi^p$  é uma função positiva e convexa de  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{A}$  e possui valor nulo na origem ( $\psi^p(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ ). Souza Neto *et al.* (2011) mostram que a evolução do multiplicador plástico é dada por

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} : \mathbf{N} - \partial f / \partial \mathbf{A} * \bar{\rho} \partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2 * \mathbf{H}} \quad (2.26)$$

A partir da Equação (2.18), é possível obter a taxa de variação da equação constitutiva no regime elástico

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (2.27)$$

Na plastificação, é possível encontrar uma relação para essa taxa de variação a partir da expressão

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (2.28)$$

onde

$$\mathbf{E}^{ep} = \mathbf{E} - \frac{(\mathbf{E} : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{E} : \partial f / \partial \boldsymbol{\alpha})}{\partial f / \partial \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{E} : \mathbf{N} - \partial f / \partial \mathbf{A} * \bar{\rho} \partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2 * \mathbf{H}} \quad (2.29)$$

e representa o módulo tangente elastoplástico (ou operador tangente elastoplástico contínuo).

Há modelos com mais de uma superfície de plasticidade. Nesses casos, o domínio elástico é limitado por superfícies no espaço de tensões que se cruzam em curvas, por vezes, não suaves (CHEN; HAN, 2007). São necessárias, então,  $n$  funções de escoamento ( $f_i, i = 1, \dots, n$ ) e a superfície de contorno é dada por  $f_i(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$  para pelo menos um  $i$  e  $f_j(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0$  para todos os outros índices  $j \neq i$ . Assumindo uma lei de fluxo associativa ( $\dot{\psi}^p = \dot{f}$ ), pode-se generalizar a lei do fluxo como

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \mathbf{N}_i \quad (2.30)$$

onde

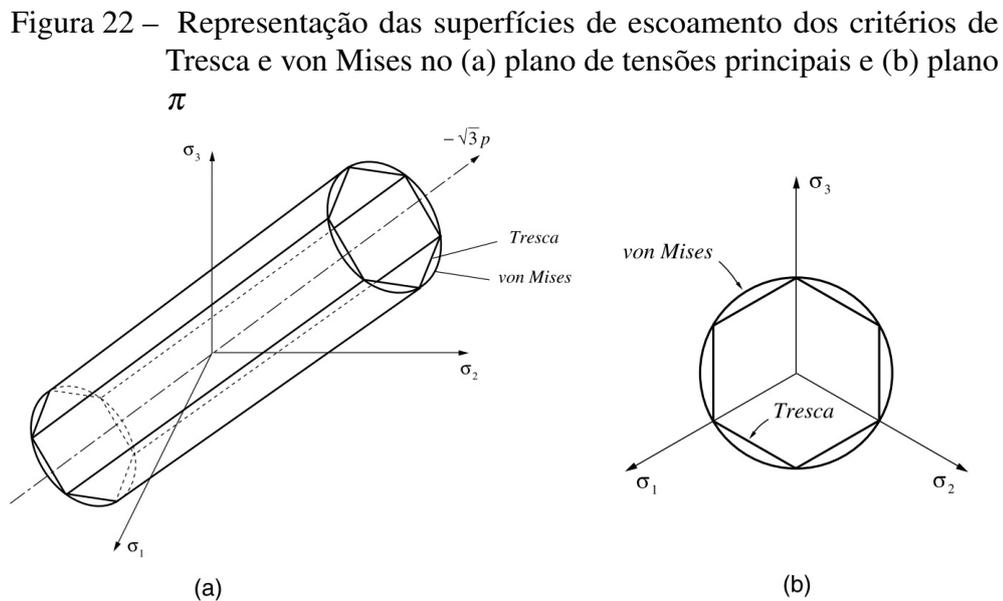
$$\mathbf{N}_i = \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_i} \quad (2.31)$$

O critério de carregamento/descarregamento passa a ser

$$f_i \leq 0, \quad \dot{\gamma}_i \geq 0, \quad \dot{\gamma}_i f_i = 0 \quad (2.32)$$

## 2.4.2 Critérios de escoamento

Apesar do modelo constitutivo geral para materiais elastoplásticos ter sido apresentado no Item 2.4.1, não foi definido nenhum critério de escoamento específico. Os critérios de escoamento mais utilizados são o Critério de Tresca, o Critério de von Mises, o Critério de Mohr-Coulomb e o Critério de Drucker-Prager (CHEN *et al.*, 2012). Os dois primeiros são insensíveis à pressão, isto é, a parcela hidrostática  $p = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$  do estado de tensão não influencia no escoamento. No espaço de tensões principais, a superfície de escoamento de Tresca é representada pela superfície de um prisma hexagonal infinito com eixo coincidindo com o eixo hidrostática ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ); enquanto que o critério de von Mises é representado por um cilindro no qual o prisma de Tresca encontra-se inscrito, como ilustrado na Figura 22a.



Fonte: adaptada de Souza Neto *et al.* (2011).

Quando a tensão se encontra na superfície do prisma ou cilindro,  $f = 0$  (plastificação). Como esses modelos são insensíveis à pressão, eles podem ser representados pelas suas projeções no subespaço de tensões com a componente de pressão hidrostática nula ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ). Esse subespaço é conhecido como plano desviador ou  $\pi$  e é representado na Figura 22b.

Devido à insensibilidade à pressão, esses modelos não diferem tração de compressão, portanto são ideais para materiais como metais. Segundo Souza Neto *et al.* (2011), materiais como rochas, solos e concreto geralmente possuem o escoamento dependente da pressão hidrostática, portanto são melhor representados pelos critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

### 2.4.2.1 Critério de Mohr-Coulomb

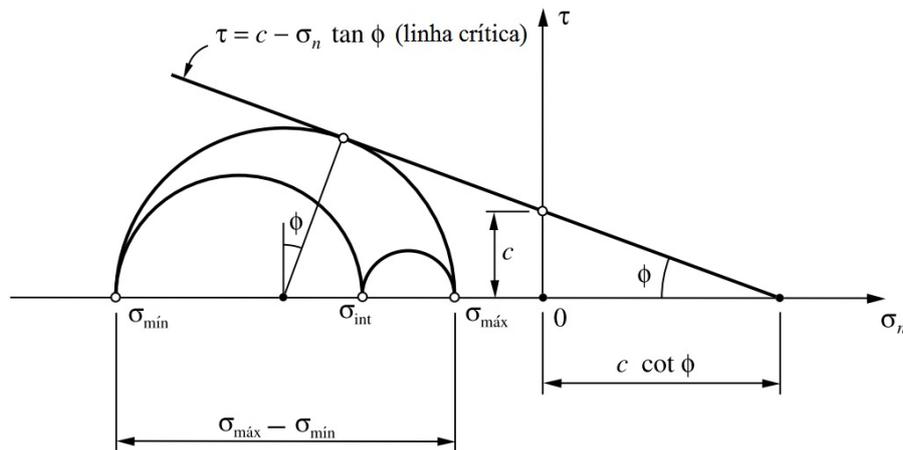
O Critério de Mohr-Coulomb é baseado na premissa de que o fenômeno macroscópico do escoamento decorre do resultado do atrito provocado pelo deslizamento entre os planos das partículas do material. Esse deslizamento provém de tensões cisalhantes e faz com que esses planos de átomos deslizem uns sobre os outros, gerando deformações plásticas (BARSANESCU *et al.*, 2018). De acordo com a Lei de Atrito de Coulomb, o escoamento se inicia quando, em um plano do corpo, a tensão de cisalhamento  $\tau$  e a tensão normal  $\sigma_n$  alcançam a combinação crítica:

$$\tau = c - \sigma_n \tan \phi \quad (2.33)$$

onde  $c$  é a coesão e  $\phi$  é o ângulo de atrito. Salienta-se que a tensão normal  $\sigma_n$  é considerada positiva na tração.

A superfície de escoamento desse critério é o conjunto de todos os estados de tensão que satisfazem a Equação (2.33). Isso pode ser visualizado na Figura 23, onde a superfície é representada por todos os estados de tensão no maior círculo de Mohr (associado às tensões principais máxima  $\sigma_{max}$  e mínima  $\sigma_{min}$ ) que tangenciam a linha crítica. Abaixo dela, nos três círculos, o material encontra-se no patamar elástico.

Figura 23 – Representação plana do Critério de Mohr-Coulomb



Fonte: adaptada de Souza Neto *et al.* (2011).

De acordo com a Figura 23, a condição de escoamento é equivalente à seguinte expressão em termos das tensões principais

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos \phi = c - \left( \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin \phi \right) \tan \phi \quad (2.34)$$

onde

$$\sigma_{max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (2.35)$$

$$\sigma_{min} = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Rearranjando a Equação (2.34)

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \phi = 2c \cos \phi \quad (2.36)$$

A partir da Equação (2.36), obtém-se a condição de escoamento de Mohr-Coulomb

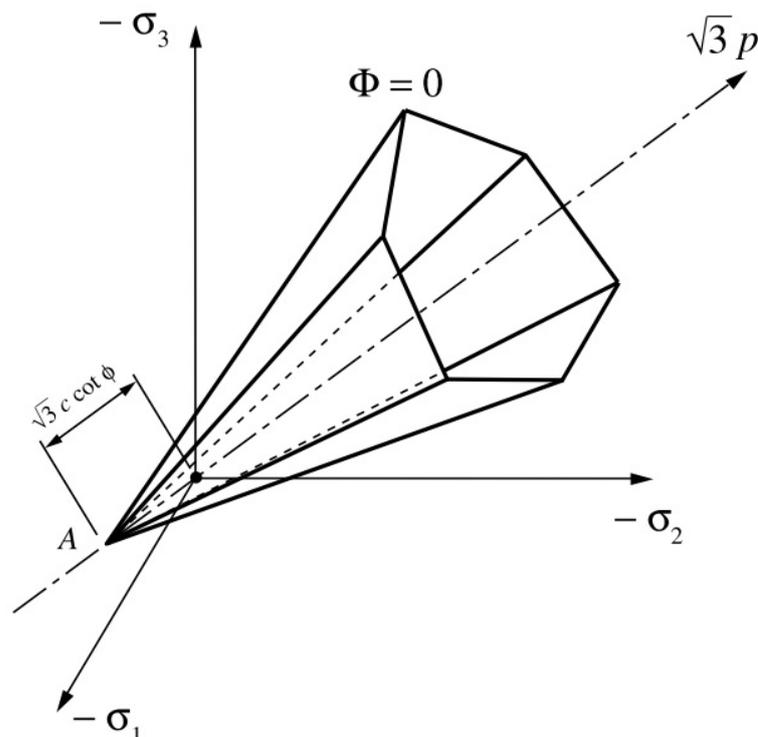
$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \phi - 2c \cos \phi \quad (2.37)$$

A superfície de escoamento de Mohr-Coulomb é uma pirâmide hexagonal alinhada no eixo hidrostático com vértice localizado em

$$p = c \cot \phi \quad (2.38)$$

na parte da tração e se encontra na Figura 24. Ao contrário da superfície prismática do Critério de Tresca, a pirâmide de Mohr-Coulomb se deve à sensibilidade à pressão hidrostática. Na ausência de atrito interno ( $\phi = 0$ ), os critérios coincidem.

Figura 24 – Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb



Fonte: Souza Neto *et al.* (2011).

As múltiplas superfícies de escoamento podem ser representadas por 6 funções  $\Phi_i(\boldsymbol{\sigma}, c)$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), das quais suas raízes,  $\Phi_i(\boldsymbol{\sigma}, c) = 0$  (para  $c$  fixo), definem os seis planos da pirâmide da Figura 24.

O Critério de Mohr-Coulomb também pode ser representado em termos dos invariantes de tensão (CRISFIELD, 1997), assumindo a forma

$$\Phi = \left( \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta \sin \phi \right) \sqrt{J_2(\mathbf{s})} + p(\boldsymbol{\sigma}) \sin \phi - c \cos \phi \quad (2.39)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de Lode e corresponde a

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{-3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.40)$$

onde

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{s}^2) = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\|^2 \quad (2.41)$$

$$J_3 = \det \mathbf{s} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{s})^3 \quad (2.42)$$

são o segundo e o terceiro invariante, respectivamente, do tensor desviador  $\mathbf{s}$ , dado por

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad (2.43)$$

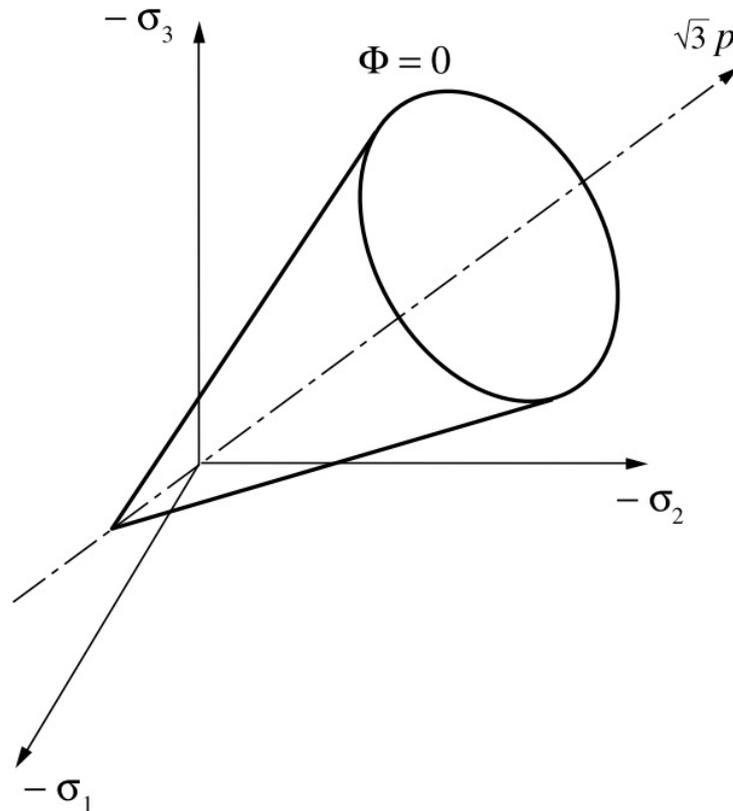
#### 2.4.2.2 Critério de Drucker-Prager

Drucker e Prager (1952) propuseram um critério a partir de uma aproximação com suavização do Critério de Mohr-Coulomb, semelhante ao Critério de von Mises em relação ao de Tresca. De acordo com o critério de Drucker-Prager, o escoamento começa quando o invariante  $J_2$  da tensão desviadora  $\mathbf{s}$  e a tensão hidrostática  $p$  alcançam a seguinte relação crítica

$$\sqrt{J_2} + \eta p = \bar{c} \quad (2.44)$$

onde  $\eta$  e  $\bar{c}$  são parâmetros do material. A superfície de escoamento de Drucker-Prager (Figura 25) é um cone alinhado no eixo hidrostático, semelhante a pirâmide de Mohr-Coulomb. Para  $\eta = 0$ , a forma passa a ser o cilindro de von Mises.

Figura 25 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager



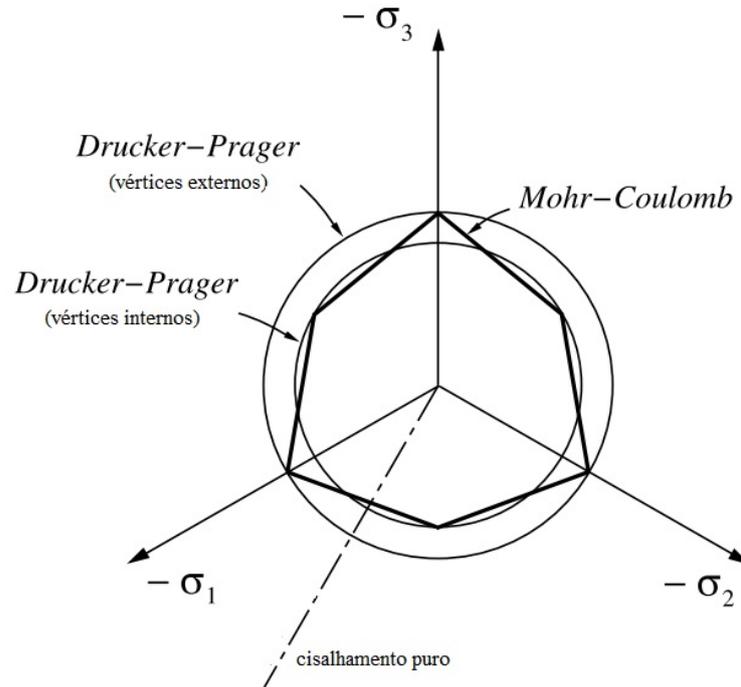
Fonte: adaptada de Souza Neto *et al.* (2011).

A aproximação da função de escoamento de Drucker-Prager com a de Mohr-Coulomb se dá por

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \eta p(\boldsymbol{\sigma}) - \xi c \quad (2.45)$$

onde os parâmetros  $\xi$  e  $\eta$  levam em consideração os pontos de escoamento do material tanto na tração quanto na compressão. Porém, para o concreto, esses pontos são quase impossíveis de determinar e, por isso, são escolhidos de acordo com o critério de aproximação com Mohr-Coulomb (ÖZTEKIN *et al.*, 2016). Geralmente, são adotados dois critérios: pelos vértices externos ou internos do hexágono de Mohr-Coulomb. Nos vértices externos, chama-se de cone de compressão e nos internos cone de extensão. A Figura 26 representa, no plano- $\pi$ , ambos os critérios. A utilização do cone de compressão ou de extensão depende do propósito da estrutura em análise.

Figura 26 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager no plano- $\pi$



Fonte: adaptada de Souza Neto *et al.* (2011).

## 2.5 Mecânica do Dano Contínuo

O dano é o processo físico progressivo pelo qual o material rompe e teve seu conceito inicial formado pela tentativa de justificar a ruptura precoce de metais em regime de deformação lenta como uma consequência da existência de defeitos no material (KACHANOV, 1958). O autor definiu a variável de dano  $D$ , com  $D = 0$  para um material livre de defeitos e  $D = 1$  para um material totalmente danificado. Posteriormente, Rabotnov (1969) propôs a utilização dessa variável como um redutor da rigidez inicial do material. Baseado em fundamentações da termodinâmica dos processos irreversíveis, Lemaitre (1984) difundiu a Mecânica do Dano Contínuo (MDC).

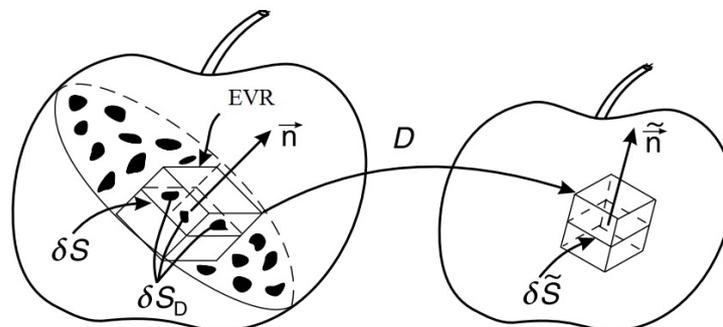
Ao longo dos anos, a MDC foi desenvolvida a fim de entender os mecanismos que gerem a deterioração do material que compõe uma estrutura sujeita a cargas. Há três níveis de escalas do material. Primeiro, o nível de microescala, no qual há o acúmulo de microtensões ao redor de imperfeições ou superfícies e a quebra de ligações que danificam o material. No nível intermediário, a mesoescala, são microfissuras ou microvazios que dão início a uma fissura. No último nível, a macroescala, ocorre o crescimento da fissura macroscópica. Lemaitre (1996) define que deformações e o dano são considerados na microescala, enquanto que as equações constitutivas são descritas na mesoescala.

O mecanismo de dano conta com deformações elásticas e, no concreto, se inicia pela descoesão entre o agregado e a matriz devido à influência da água. Esse processo também conta com deformações plásticas (irreversíveis), relacionada com deslizamentos nessas superfícies descoesas. Além disso, o dano decorre de uma microfissuração distribuída que se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta. A teoria descreve localmente, a partir de um volume representativo, a evolução de fenômenos que afetam o material no estado inicial (material íntegro) até um estado final, caracterizado pela formação de uma fissura, equivalente à ruptura do material.

O concreto é um material que possui uma fissuração difusa, característica que controla sua resposta não linear. Devido a isso, a MDC se mostra capaz de fornecer formulações bem representativas para modelos constitutivos. Porém, devido a essa difusão, não é possível mensurar diretamente o dano, sendo preciso quantificá-lo de forma indireta, medindo-se a redução progressiva de alguma característica mecânica do material (por exemplo, o módulo de elasticidade).

Para a definição da variável de dano, considera-se um sólido com defeitos em sua microestrutura. Um elemento de volume representativo (EVR) (Figura 27) do material deve ser grande o suficiente para conter defeitos distribuídos homogeneamente e pequeno o bastante para que sejam evitados gradientes elevados de grandezas locais de interesse (por exemplo a deformação). Isso admite continuidade para as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento e as propriedades nele observadas são valores médios que podem ser associadas a um ponto material.

Figura 27 – Elemento de Volume Representativo (EVR)



Fonte: adaptada de Lemaitre e Desmorat (2005).

Na Figura 27,  $S$  é a área da seção total definida pelo vetor  $\vec{n}$ ,  $\tilde{S}$  a parcela íntegra da área total. Define-se a área dos defeitos medidos como  $S_D$  e, por definição, tem-se a variável de

dano associado a um plano de normal  $\vec{n}$ :

$$D_n = \frac{S_D}{S} \quad (2.46)$$

Devido a hipótese de isotropia, considera-se que os defeitos são igualmente distribuídos em todas as direções, portanto  $D_n$  não depende da direção de  $\vec{n}$  e a variável de dano passa a ser um escalar  $D$ . Essa variável pode ser interpretada como uma medida indireta das microfissuras e microvazios (LECKIE; ONAT, 1981).

Portanto, a área efetiva  $\tilde{S}$  é dada por

$$\tilde{S} = S(1 - D) \quad (2.47)$$

Define-se a tensão aplicada ao elemento como

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2.48)$$

onde  $F$  é a força aplicada ao EVR; e a tensão efetiva como

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (2.49)$$

Portanto, a tensão efetiva é dada por

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.50)$$

Para evitar a dificuldade de determinar formas e tamanhos dos defeitos, parte-se da hipótese da equivalência de deformações. Ela diz que toda deformação de material danificado pode ser representada pelas relações constitutivas do material sem dano, apenas substituindo a tensão real pela efetiva (LEMAITRE; CHABOCHE, 1978). Por exemplo, para a elasticidade unidimensional, tem-se no estado sem dano e danificado, respectivamente

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon^e = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{E}} \quad (2.51)$$

Substituindo a Equação (2.50) na segunda expressão da Equação (2.51) e igualando à primeira expressão da Equação (2.51):

$$\tilde{E} = (1 - D)E \quad (2.52)$$

onde  $\tilde{E}$  corresponde ao módulo de elasticidade de um meio contínuo de resposta equivalente ao meio deteriorado. Assim, a variável de dano é dada por:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (2.53)$$

Esta equação permite relacionar a variável interna de dano com a degradação da rigidez do material.

Expandindo para o caso tridimensional de dano isotrópico, o tensor das tensões efetivas é dado por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.54)$$

Um modelo de dano contínuo puro que reflete bem o comportamento do concreto é o Modelo de Mazars *et al.* (2015), também conhecido por  $\mu$ Model. Ele é notório por sua simplicidade e tem sua teoria abordada na Seção 2.6.

### 2.5.1 Plasticidade com Dano Contínuo

O Modelo Elastoplástico Geral, exposto no Item 2.4.1, apresenta deformações permanentes, mas não apresenta diminuição da rigidez no descarregamento; enquanto que o  $\mu$ Model, exposto no Item 2.6, contempla essa degradação, porém não apresenta deformações plásticas. Uma boa opção para representar o comportamento do concreto, então, é unir essas duas teorias em um modelo que represente esses dois fenômenos, culminando em um modelo plástico com dano contínuo.

Embora a utilização de modelos sem deformação plástica sejam bem aceitas, eles não fornecem um controle apropriado da dilatância, que é muito importante para a simulação de estruturas de concreto submetida a carregamentos multiaxiais (LEE; FENVES, 1998).

Ao longo dos anos, vários modelos de plasticidade com dano foram desenvolvidos (LUBLINER *et al.*, 1989; OLLER *et al.*, 1990; YAZDANI; SCHREYER, 1990; LEE; FENVES, 1998; OMIDI; LOTFI, 2010). Nos modelos de plasticidade com dano, a degradação da rigidez é anexada a um modelo de plasticidade. Já em modelos elastoplásticos com dano, essa degradação é introduzida com o conceito de tensão efetiva. Essa segunda opção é bem vantajosa devido à possibilidade de desacoplar o dano da plasticidade a partir da linearização das equações evolutivas. O Modelo de Lee e Fenves (1998), descrito na Seção 2.7, se mostra uma opção bastante atrativa para isso.

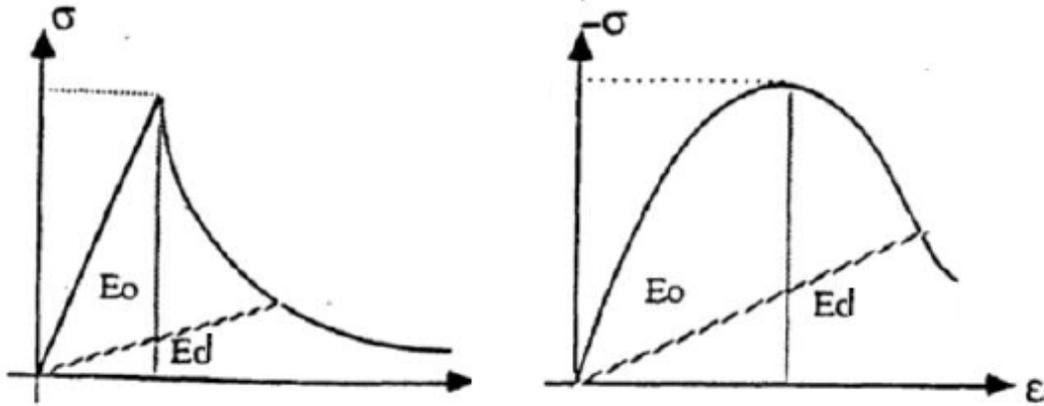
## 2.6 Modelo de Mazars *et al.* (2015) - $\mu$ Model

Ao longo dos anos, vários modelos de dano foram formulados para o concreto de acordo com as leis da termodinâmica de processos irreversíveis (MAZARS, 1986; SIMO; JU,

1987; MAZARS; PIJAUDIER-CABOT, 1989; JIRÁSEK, 2004). Recentemente, Mazars *et al.* (2015) desenvolveram um modelo que aborda o concreto sob carregamentos monotônicos, cíclicos e dinâmicos, conhecido como  $\mu$ Model. A seguir, esse modelo é descrito, baseando-se o trabalho de Matias (2018).

O  $\mu$ Model é um modelo de dano puro linear isotrópico, isto é, não possui deformações plásticas e sua variável de dano é escalar. Isso pode ser observado na Figura 28.

Figura 28 – Comportamento do concreto na tração (esquerda) e compressão (direita)



Fonte: adaptada de Mazars (1985).

Diferentemente dos modelos clássicos de dano, o  $\mu$ Model se utiliza do conceito de um dano efetivo  $d$ . Logo, pode-se dizer que

$$\mathbf{E}_d = (1 - d)\mathbf{E} \quad (2.55)$$

onde  $\mathbf{E}_d$  corresponde à matriz de rigidez do material danificado. De acordo com o modelo,  $d$  é função das variáveis termodinâmicas  $Y_t$  e  $Y_c$ , que correspondem, respectivamente, à fissuração (devido à tração) e ao esmagamento (devido à compressão). A energia livre de Helmholtz do modelo  $\psi^\mu$  é dada por

$$\bar{\rho} \psi^\mu = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.56)$$

Consequentemente

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_d : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.57)$$

Utilizando-se do 2º Princípio da Termodinâmica e de algumas manipulações matemáticas, tem-se a inequação de Clausius-Duhem:

$$-\bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial Y_t} \dot{Y}_t - \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial Y_c} \dot{Y}_c \geq 0 \quad (2.58)$$

Sendo a taxa de liberação de energia do dano  $-\partial\psi/\partial d$  sempre positiva, a inequação da Equação (2.58) é verificada se

$$\frac{\partial d}{\partial Y_t} \dot{Y}_t \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial d}{\partial Y_c} \dot{Y}_c \geq 0 \quad (2.59)$$

Definem-se as deformações equivalentes para fissuração devido à tração ( $\varepsilon_t$ ) e esmagamento devido à compressão ( $\varepsilon_c$ )

$$\varepsilon_t = \frac{I_\varepsilon}{2(1-2\nu)} + \frac{\sqrt{J_\varepsilon}}{2(1+\nu)} \quad (2.60)$$

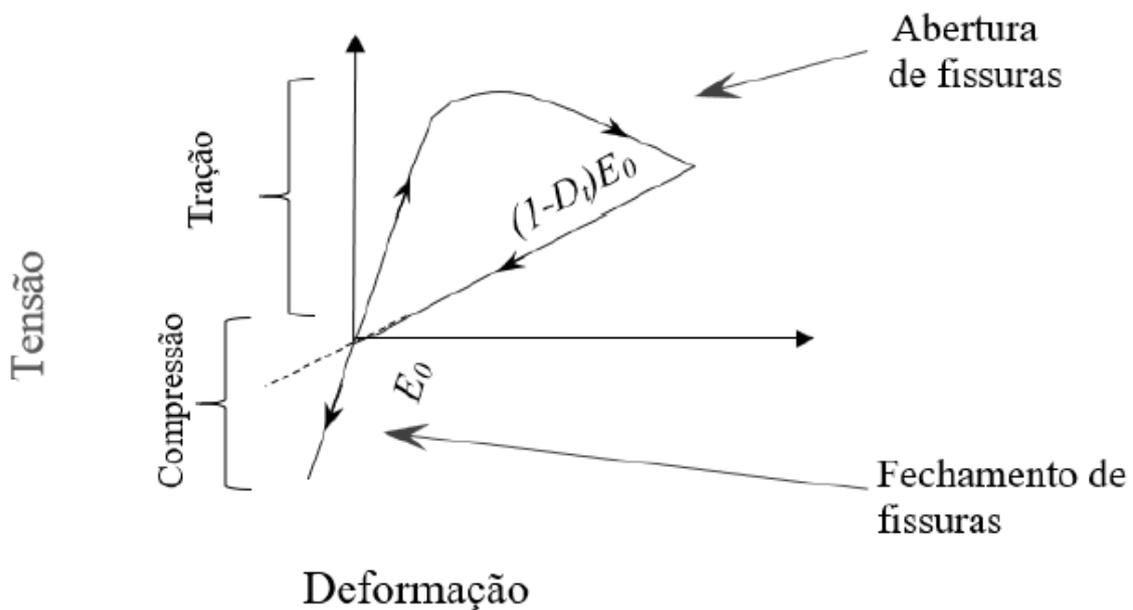
$$\varepsilon_c = \frac{I_\varepsilon}{5(1-2\nu)} + \frac{6\sqrt{J_\varepsilon}}{5(1+\nu)} \quad (2.61)$$

onde  $I_\varepsilon = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$  é o primeiro invariante do tensor deformação e

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] \quad (2.62)$$

é diretamente ligado ao segundo invariante da componente desviadora do tensor deformação. Essa diferenciação das deformações na compressão e na tração foi adotada para contemplar o efeito unilateral, fenômeno que consiste em uma recuperação na rigidez ocasionado pelo fechamento de fissuras abertas quando o concreto passa de um estado de tração para a compressão, conforme Figura 29.

Figura 29 – Efeito unilateral no concreto



Fonte: Matias (2018).

São associadas duas superfícies de carregamento

$$f_t = \varepsilon_t - Y_t \quad \text{e} \quad f_c = \varepsilon_c - Y_c \quad (2.63)$$

onde  $Y_t$  e  $Y_c$  são os máximos valores históricos durante o carregamento.

Os limites de dano iniciais de  $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_c$  são dados, respectivamente, por  $\varepsilon_{0_t}$  e  $\varepsilon_{0_c}$ . Para a evolução do dano, define-se que

$$Y = rY_t + (1 - r)Y_c \quad (2.64)$$

onde  $r$  é o fator triaxial (LEE; FENVES, 1998), definido por

$$r = \frac{\sum \langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\sum |\tilde{\sigma}_i|} \quad (2.65)$$

onde  $\tilde{\sigma}_i$  representa as componentes da tensão equivalente nas direções principais  $i = 1, 2, \text{ e } 3$ .

Vale ressaltar a notação de Macaulay  $\langle x \rangle = (|x| + x)/2$ .

Dito isso, a lei de evolução do dano é

$$d = \frac{(1 - A)Y_0}{Y} - Ae^{-B(Y - Y_0)} \quad (2.66)$$

onde  $Y_0$  é o limite inicial de dano para  $Y$ :

$$Y_0 = r\varepsilon_{0_t} + (1 - r)\varepsilon_{0_c} \quad (2.67)$$

Substituindo a Equação (2.67) na Equação (2.59) e manipulando matematicamente, chega-se a

$$(1 - A)\frac{Y_0}{Y} + AB e^{-B(Y - Y_0)} \geq 0 \quad (2.68)$$

As variáveis  $A$  e  $B$  são parâmetros do material, determinados em ensaios uniaxiais de tração e compressão, e determinam a forma do dano. São dadas, respectivamente, por

$$A = A_t(2r^2(1 - 2k) - r(1 - 4k) + A_c(2r^2 - 3r + 1)) \quad (2.69)$$

e

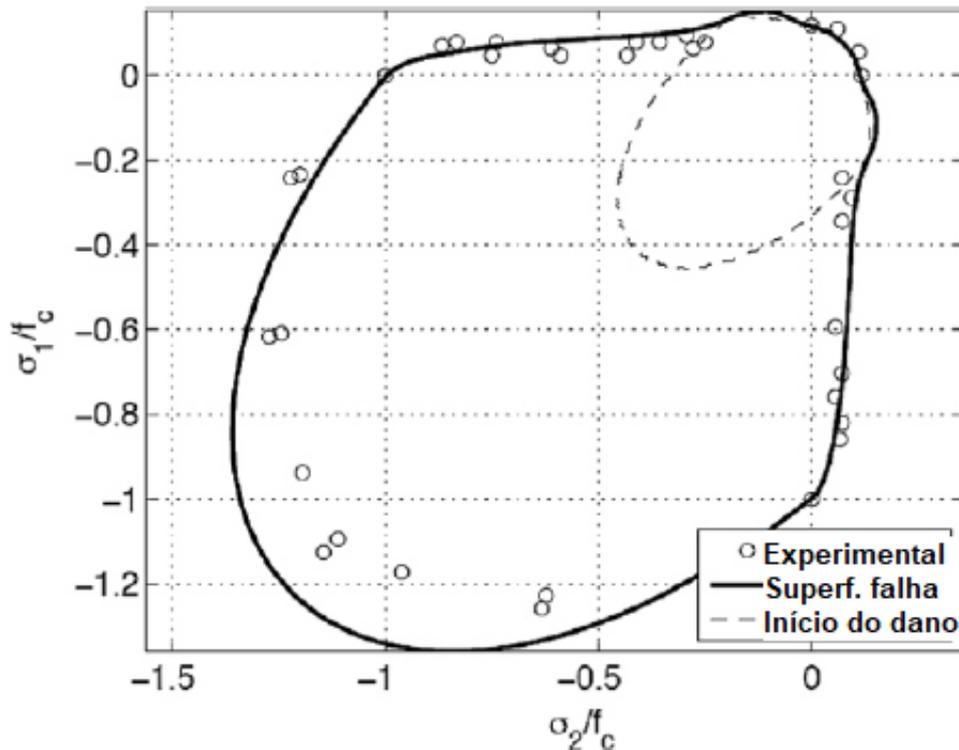
$$B = r^{r^2 - 2r + 2}B_t + (1 - r^{r^2 - 2r + 2})B_c \quad (2.70)$$

Quando  $r = 0$  (domínio de tensões de compressão)  $A = A_c$  e  $B = B_c$ ; quando  $r = 1$   $A = A_t$  e  $B = B_t$ ;  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $A_c$  e  $B_c$  são parâmetros do material; e  $k$  é usado para calibrar o valor

assintótico de tensão para grandes deslocamentos no cisalhamento:  $k = A(r = 0.5)/A_r$ . Em carregamento mais complexos,  $r$  varia para garantir a inequação de Clausius-Duhem (Equação (2.58)). Mazars *et al.* (2015) testaram carregamentos com grandes variações de  $r$  e comprovaram o atendimento à Equação (2.58).

Mazars *et al.* (2015) obtiveram resultados no estado plano de tensões ( $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ), dispostos na Figura 30. A superfície de falha é apresentada por vários conjuntos de resultados ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ), sempre normalizados pelo máximo valor de tensão na compressão  $f_c$ . Mazars *et al.* (2015) comparam seus resultados com os resultados experimentais fornecidos por Kupfer e Gerstle (1973). Apesar de diferenças mais evidentes na região de bicompressão, os resultados da superfície de falha se mostraram bastante semelhantes aos experimentais, conforme Figura 30.

Figura 30 – Resultados de Mazars *et al.* (2015) comparados aos de Kupfer e Gerstle (1973) (plano  $\sigma_{33}$ )



Fonte: Adaptada de Mazars *et al.* (2015).

O  $\mu$ Model apresenta uma série de vantagens, como boa representação do concreto em diferentes tipos de carregamento; consideração adequada do comportamento unilateral (abertura e fechamento de fissuras); e formulação bastante simples em relação a outros modelos.

### 2.6.1 Redução ao caso unidimensional

Principalmente devido ao seu baixo custo computacional, modelos constitutivos unidimensionais são bastante interessantes em análises pelo Método dos Elementos Finitos. Para o  $\mu$ Model, a simplificação pode ser feita com certa facilidade a partir do coeficiente triaxial  $r$ .

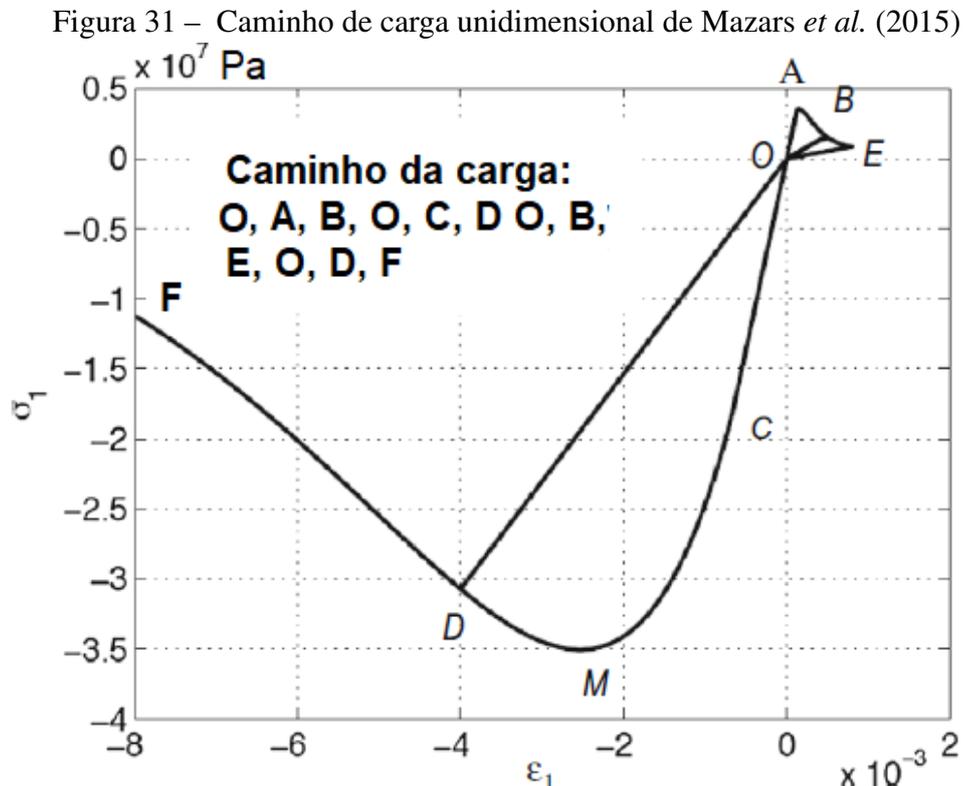
É considerado um modelo unidimensional na tração quando  $r = 1$  e na compressão quando  $r = 0$ . Isso implica nas importantes simplificações no modelo. Na tração,  $Y = Y_t$ ,  $Y_0 = \varepsilon_{0_t}$ ,  $A = A_t$  e  $B = B_t$ ; já na compressão,  $Y = Y_c$ ,  $Y_0 = \varepsilon_{0_c}$ ,  $A = A_c$  e  $B = B_c$ . Essas simplificações possibilitam que a evolução do dano (Equação (2.66)) pode ser separada em duas partes independentes:

$$d_t = \frac{(1 - A_t)\varepsilon_{0_t}}{Y_t} - A_t e^{-B_t(Y_t - \varepsilon_{0_t})} \quad (2.71)$$

e

$$d_c = \frac{(1 - A_c)\varepsilon_{0_c}}{Y_c} - A_c e^{-B_c(Y_c - \varepsilon_{0_c})} \quad (2.72)$$

onde  $Y_t = \text{Sup}[\varepsilon_{0_t}, \text{max}\varepsilon_t]$  e  $Y_c = \text{Sup}[\varepsilon_{0_c}, \text{max}\varepsilon_c]$ . Com isso, foi possível aos autores traçar o gráfico tensão-deformação presente na Figura 31.



Fonte: Adaptada de Mazars *et al.* (2015).

A partir da Figura 31, é possível fazer algumas considerações. O caminho  $OAB$  denota um primeiro carregamento de tração. O  $\varepsilon_0$  é atingido em  $A$  e  $d_t$  aumenta até  $B$ . Logo depois, não há acréscimo de dano no descarregamento  $BO$ . Na transição da tração para a compressão, há aumento da rigidez, o que caracterizando o efeito unilateral. A partir do ponto  $C$ ,  $d_c$  começa a evoluir, crescendo até  $D$ . Novamente, o dano para de crescer no descarregamento. De volta à tração,  $d_c$  volta a evoluir, dessa vez até  $E$ ; deixando de evoluir novamente com o descarregamento. Voltando para a região de compressão novamente,  $d_t$  só volta a evoluir ao atingir  $Y_c = \text{Sup}[\varepsilon_{0_c}, \max \varepsilon_c]$  (ponto  $D$ ).

A tensão pode ser determinada explicitamente a partir da lei constitutiva do material, respectivamente para tração e compressão

$$\sigma_t = (1 - d_t)E\varepsilon \quad (2.73)$$

$$\sigma_c = (1 - d_c)E\varepsilon \quad (2.74)$$

Para o módulo tangente, a maneira de obtenção é análoga à das tensões, independentemente dos trechos de tração e compressão. Na tração, obtém-se o módulo a partir da Equação (2.73)

$$\dot{\sigma}_t = \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \sigma_t}{\partial d_t} \dot{d}_t \quad (2.75)$$

Da Equação (2.75), chega-se às seguintes expressões:

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varepsilon} = E_s = (1 - d_t)E \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma_t}{\partial d_t} = -E\varepsilon \quad (2.76)$$

onde é  $E_s$  o módulo secante.

Diferenciando a Equação (2.71) no tempo, é possível obter a taxa de evolução do dano

$$\dot{d}_t = \left[ \frac{\varepsilon_{0_t}(1 - A_t)}{Y_t^2} + \frac{A_t B_t}{\exp[B_t(Y_t - \varepsilon_{0_t})]} \right] \dot{\varepsilon} \quad (2.77)$$

Substituindo as Equações 2.76 e 2.77 na Equação (2.71), o módulo tangente é obtido quando o dano evolui ( $\varepsilon \geq 0$  e  $\varepsilon > Y_t$ ). Sendo  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon}$ , o módulo tangente é

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = (1 - d_t)E - \left[ \frac{\varepsilon_{0_t}(1 - A_t)}{Y_t^2} + \frac{A_t B_t}{\exp[B_t(Y_t - \varepsilon_{0_t})]} \right] E\varepsilon \quad (2.78)$$

Analogamente à tração, a evolução do dano na compressão ocorre quando  $\varepsilon < 0$  e  $\varepsilon > Y_c$ . Temos que o módulo tangente na compressão é

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = (1 - d_c)E - \left[ \frac{\varepsilon_{0c}(1 - A_c)}{Y_c^2} + \frac{A_c B_c}{\exp[B_c(Y_c - \varepsilon_{0c})]} \right] E \varepsilon \quad (2.79)$$

Em caso de não evolução de dano ( $\varepsilon < Y_t$  ou  $\varepsilon < Y_c$ ), há descarregamento ou recarregamento pelo trecho elástico da curva. Assim, o módulo tangente é igual ao módulo secante ( $E_s = (1 - d_t)E$  ou  $E_s = (1 - d_c)E$ ).

## 2.7 Modelo de Lee e Fenves (1998)

Esse modelo incorpora fenômenos importantes na consideração de carregamentos cíclicos no concreto, como a recuperação da rigidez quando há reversão de deformações. Acerca de carregamentos cíclicos, vale salientar a variedade de estados possíveis de danificação, proveniente de distintos fenômenos. Como no  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015), Lee e Fenves (1998) usam uma abordagem simples, considerando duas variáveis de dano. Elas evoluem independentemente uma da outra, sendo uma relacionada à fissuração (tração) e outra relacionada ao esmagamento (compressão). Matias (2018) realizou uma excelente revisão sobre esse modelo e serve como alicerce de sua descrição a seguir.

### 2.7.1 Relação constitutiva e evolução do dano

Apesar de não ser um modelo com plasticidade associada, o modelo também se baseia nos princípios da termodinâmica. A adoção por uma abordagem não associada se dá por uma melhor representação da dilatância. O modelo possui duas variáveis internas: o tensor de deformações plásticas  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$  e a variável de dano  $\boldsymbol{\kappa}$  (LUBLINER *et al.*, 1989). A taxa de evolução das  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$  é dada pela lei de fluxo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \dot{\lambda} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.80)$$

onde  $\dot{\lambda}$  é o parâmetro de consistência plástica e  $\Phi$  é o potencial plástico. A evolução de  $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$  é dada por

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (2.81)$$

onde a função  $\mathbf{H}$  é definida através da consideração de dissipação plástica. Devido ao comportamento diferente do concreto para tração ou compressão, apenas uma variável de dano  $D$  não é

suficiente. Assim, a variável  $\boldsymbol{\kappa}$  é representada por um vetor com dois valores escalares a fim de representar esses comportamentos distintos

$$\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_t \ \kappa_c] \quad (2.82)$$

A superfície de escoamento do modelo depende, além das tensões, das funções de resistências uniaxiais  $f_t$  e  $f_c$ . Essas variáveis são definidas em termos das variáveis internas  $\kappa_t$  e  $\kappa_c$ . Sendo  $\chi = [t, c]$ , com  $t$  referenciando tração e  $c$  compressão, essas resistências são dadas por

$$f_\chi = [1 - D_\chi(\boldsymbol{\kappa}_\chi)] \tilde{f}_\chi(\boldsymbol{\kappa}_\chi) \quad (2.83)$$

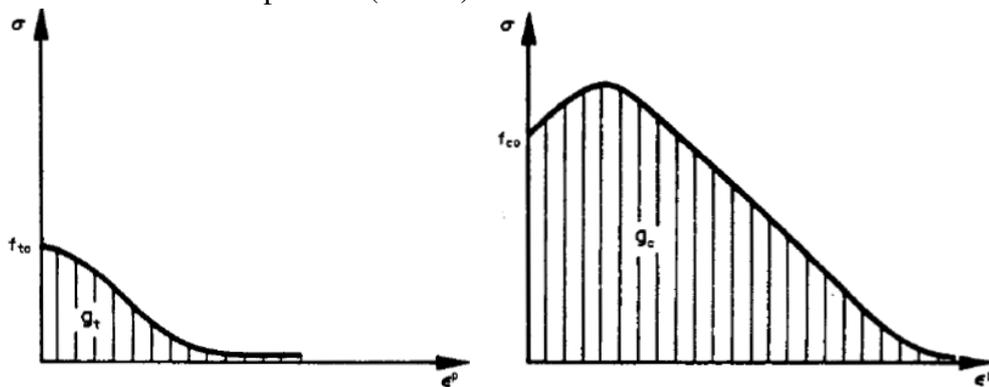
onde  $\tilde{f}_\chi$  corresponde às funções uniaxiais em termos de tensão efetiva para tração e compressão.

Lee e Fenves (1998) adotaram a mesma relação constitutiva uniaxial em termos de deformação apresentada por Lubliner *et al.* (1989):

$$\sigma_\chi = f_{\chi 0} [(1 + a_\chi) \exp(-b_\chi \varepsilon^p) - a_\chi \exp(-2b_\chi \varepsilon^p)] \quad (2.84)$$

onde  $f_{\chi 0}$  é a o início da degradação do material (tensão de escoamento); e  $a_\chi$  e  $b_\chi$  são constantes que caracterizam as duas curvas de tensão-deformação, conforme Figura 32.

Figura 32 – Curvas de deformação plástica para tração (esquerda) e compressão (direita)



Fonte: Lubliner *et al.* (1989).

As áreas sob as curvas expostas na Figura 32 representam a energia necessária para a total danificação do material. As energias por unidade de área e de volume se relacionam por  $g_t = G_t/l_t$  e  $g_c = G_c/l_c$ ; onde  $G_c$  e  $G_t$  são parâmetros do material definidos como energias de esmagamento e de fratura e  $l_\chi$  é o comprimento característico do elemento finito. Deve-se dar atenção especial à definição desses valores, pois eles possuem influência significativa na sensibilidade de malhas (BAZANT, 2019).

As variáveis internas  $\kappa_\chi$  são obtidas a partir das curvas da Figura 32 seguindo a seguinte relação

$$\kappa_\chi = \frac{1}{g_\chi} \int_0^{\varepsilon^p} \sigma_\chi d\varepsilon^p \quad (2.85)$$

onde

$$g_\chi = \int_0^\infty \sigma_\chi d\varepsilon^p \quad (2.86)$$

Considerando que o dano possui a forma exponencial

$$1 - D_\chi = \exp(-d_\chi \varepsilon^p) \quad (2.87)$$

na qual  $d_\chi$  é um parâmetro de ajuste na evolução do dano, define-se a relação constitutiva como sendo

$$\tilde{\sigma}_\chi = f_{\chi 0} \left[ (1 + a_\chi) (\exp(-b_\chi \varepsilon^p))^{1-d_\chi/b_\chi} - a_\chi (\exp(-2b_\chi \varepsilon^p))^{1-d_\chi/b_\chi} \right] \quad (2.88)$$

Para relacionar a tensão com a variável interna  $\kappa_\chi$ , faz-se a combinação entre as Equações 2.85 e 2.88, chegando à seguinte expressão

$$\sigma_\chi = f_\chi(\kappa_\chi) = \frac{f_{\chi 0}}{a_\chi} \left[ (1 + a_\chi) \sqrt{\phi_\chi(\kappa_\chi)} - \phi_\chi(\kappa_\chi) \right] \quad (2.89)$$

onde  $\phi_\chi(\kappa_\chi) = 1 + a_\chi(2 + a_\chi)\kappa_\chi$ .

De maneira análoga, a tensão efetiva e a variável de dano também são dadas em função de  $\kappa_\chi$  pelas equações

$$\tilde{\sigma}_\chi = \tilde{f}_\chi(\kappa_\chi) = f_{\chi 0} \left[ \left( \frac{1}{a_\chi} (1 + a_\chi - \sqrt{\phi_\chi(\kappa_\chi)}) \right)^{1-d_\chi/b_\chi} \sqrt{\phi_\chi(\kappa_\chi)} \right] \quad (2.90)$$

e

$$D_\chi = 1 - \left[ \left( \frac{1}{a_\chi} (1 + a_\chi - \sqrt{\phi_\chi(\kappa_\chi)}) \right)^{1-d_\chi/b_\chi} \right] \quad (2.91)$$

Dito isso, pode-se reescrever a expressão da evolução da variável interna (Equação (2.85)) como sendo

$$\dot{\kappa}_\chi = \frac{1}{g_\chi} f_\chi(\kappa_\chi) \dot{\varepsilon}^p \quad (2.92)$$

### 2.7.2 Superfície de escoamento e lei de fluxo não associado

Lubliner *et al.* (1989) apresentaram a seguinte superfície de escoamento

$$F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha \tilde{I}_1 + \sqrt{3} \tilde{J}_2 + \beta \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{max} \rangle] - c_c(\boldsymbol{\kappa}) \quad (2.93)$$

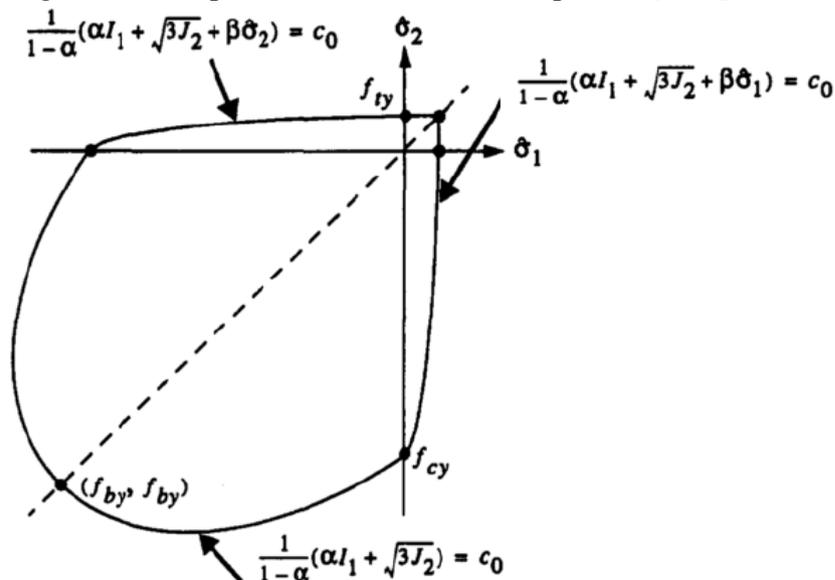
na qual  $\tilde{I}_1$  é o primeiro invariante do tensor das tensões,  $\tilde{J}_2$  é o segundo invariante do tensor desviador,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{max}$  é a tensão principal máxima. O til sobre os termos denota que eles se referem às tensões efetivas;  $c_c$  representa a coesão em termos da variável interna  $\boldsymbol{\kappa}$ ;  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes baseados nas tensões iniciais de escoamento em carregamentos uniaxiais e biaxiais:

$$\alpha = \frac{(f_{b0}/f_{c0}) - 1}{2(f_{b0}/f_{c0}) - 1}, \quad \beta = \frac{f_{b0}}{f_{t0}}(1 - \alpha) - (1 + \alpha) \quad (2.94)$$

onde  $f_{b0}$  e  $f_{c0}$  são as resistências à compressão de escoamento bi e uniaxial, respectivamente;  $f_{t0}$  a resistência à tração de escoamento uniaxial. Geralmente, adota-se  $f_{b0}/f_{c0} = 1,16$ .

A superfície de escoamento do modelo apresenta pontos de singularidade nas mudanças de estado de tração para compressão e no quadrante de tração pura. Isso ocasiona problemas numéricos em casos de tensões bi ou triaxiais, não obstante não ser relevante em problemas uniaxiais. A superfície pode ser observada na Figura 33, em seu plano  $\sigma_1 - \sigma_2$ .

Figura 33 – Superfície de escoamento no plano  $\sigma_1 - \sigma_2$  ( $\sigma_3 = 0$ )



Fonte: Lee e Fenves (1998).

O Modelo de Lubliner *et al.* (1989) apresentava resultados satisfatórios para carregamentos monotônicos, mas não para carregamentos cíclicos. Lee e Fenves (1998) propuseram a adoção de uma função que levasse em consideração a coesão tanto na tração quanto na

compressão. Para isso, os autores alteraram o parâmetro  $\beta$  para

$$\beta(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{c_c(\boldsymbol{\kappa}^c)}{c_t(\boldsymbol{\kappa}^t)}(1 - \alpha) + (1 + \alpha) \quad (2.95)$$

onde  $c_c(\boldsymbol{\kappa}^c) = -\tilde{f}_c(\boldsymbol{\kappa}^c)$  e  $c_t(\boldsymbol{\kappa}^t) = -\tilde{f}_t(\boldsymbol{\kappa}^t)$ .

Assim, a superfície de escoamento passa a ser

$$F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{1 - \alpha} [\alpha \tilde{I}_1 + \sqrt{3\tilde{J}_2} + \beta(\boldsymbol{\kappa}) \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{max} \rangle] - c_c(\boldsymbol{\kappa}) \quad (2.96)$$

O potencial plástico é dado por uma função do tipo Drucker-Prager

$$\Phi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{2\tilde{J}_2} + \alpha_p \tilde{I}_1 \quad (2.97)$$

na qual  $\alpha_p$  é um parâmetro de dilatância do modelo.

As tensões reais podem ser determinadas a partir de duas etapas. Na primeira, são determinadas as tensões efetivas  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ . Na segunda etapa, por sua vez, são determinadas as tensões reais  $\boldsymbol{\sigma}$ , quando o material já se encontra danificado. Reescrevendo a Equação (2.50) para o caso tridimensional

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - D(\boldsymbol{\kappa})] \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.98)$$

onde a variável de dano  $D$  é representada por

$$D = 1 - (1 - D_t)(1 - D_c) \quad (2.99)$$

Lee e Fenves (1998), a fim de abordarem o efeito unilateral, introduziram à Equação (2.99) um parâmetro  $s$  quantificador da recuperação da rigidez. Com isso, chega-se à seguinte equação

$$D = 1 - (1 - s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})D_t)(1 - D_c) \quad (2.100)$$

onde  $s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = s_0 + (1 - s_0)r(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ ; sendo  $s_0$  o parâmetro que determina a mínima recuperação de rigidez do material. Ele varia entre 0 e 1, sendo  $s_0 = 0$  a recuperação total da rigidez (fissuras abertas são totalmente fechadas) e  $s_0 = 1$  nenhuma recuperação de rigidez (não há fechamento de fissuras).

### 2.7.3 Obtenção de parâmetros

Uma forma de se obter e calibrar parâmetros do material é se baseando em experimentos. Essa etapa é de suma importância para a utilização de qualquer modelo constitutivo. No

caso do Modelo de Lee e Fenves (1998), esses parâmetros definem o comportamento das curvas de tensão real e efetiva em função de  $\kappa\chi$ .

O parâmetro  $a_c$  se relaciona com a tensão máxima de compressão  $f'_c$ , facilmente obtida em ensaios de laboratório, pela seguinte expressão (LUBLINER *et al.*, 1989)

$$a_c = 2 \frac{f'_c}{f_{c0}} - 1 + \sqrt{\left(\frac{f'_c}{f_{c0}}\right)^2 - \frac{f'_c}{f_{c0}}} \quad (2.101)$$

Conhecido o valor do dano  $\tilde{D}_c$  correspondente à  $f'_c$ , é possível obter a razão  $d_c/b_c$  (LEE; FENVES, 1998). O valor de  $\tilde{D}_c$  pode ser obtido através de experimentos de carregamento e descarregamento e se relaciona com a razão  $d_c/b_c$  a partir da seguinte relação

$$\frac{d_c}{b_c} = \frac{\log(1 - \tilde{D}_c)}{\log\left(\frac{1 + a_c}{2a_c}\right)} \quad (2.102)$$

Não se pode usar da analogia no caso da tração, uma vez que a máxima tensão de tração corresponde à degradação zero, isto é,  $f'_t = f_{t0}$ . Portanto, adota-se um valor conhecido de  $\tilde{D}_t$  correspondente ao valor da tensão  $\sigma_t = f'_t/2$ . A partir de uma série de manipulações matemáticas, Lee e Fenves (1998) chegam à seguinte relação

$$\frac{d_t}{b_t} = \frac{\log(1 - \tilde{D}_t)}{\log\left[(1 + a_t) - \sqrt{1 + a_t^2} - \log(2a_t)\right]} \quad (2.103)$$

Lee e Fenves (1998) recomendam que a obtenção dos parâmetros na Equação (2.103) seja feita da ordem inversa, com  $a_t$  em função de  $b_t/d_t$  e  $\tilde{D}_t$ . Os autores justificam isso com base no fato de que  $a_t$  não possui significado físico. Com isso, passa-se a existir a expressão

$$a_t = \frac{2(1 - \tilde{D}_t)^{b_t/d_t} - 1}{2(1 - \tilde{D}_t)^{b_t/d_t} [(1 - \tilde{D}_t)^{b_t/d_t} - 1]} \quad (2.104)$$

#### 2.7.4 Redução ao caso unidimensional

Com a mesma justificativa utilizada no  $\mu$ Model, o Modelo de Lee e Fenves (1998) também é reduzido ao caso unidimensional. Primeiramente, são identificados quais termos da superfície de escoamento podem ser reduzidos. Sendo  $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}$  e  $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_3 = 0$ , chega-se a

$$\tilde{I}_1 = \tilde{\sigma}, \quad \sqrt{3\tilde{J}_2} = |\tilde{\sigma}|, \quad \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle = \langle \tilde{\sigma} \rangle \quad (2.105)$$

Assim, é possível reescrever as Equações 2.96 e 2.97, referentes à superfície de escoamento e potencial plástico, respectivamente

$$F(\tilde{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{1 - \alpha} [\alpha \tilde{\sigma} + |\tilde{\sigma}| + \beta(\boldsymbol{\kappa}) \langle \tilde{\sigma} \rangle] - c_c(\boldsymbol{\kappa}) \quad (2.106)$$

$$\Phi(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\frac{2}{3}}|\tilde{\sigma}| + \alpha_p \tilde{\sigma} \quad (2.107)$$

Analogamente, a lei de fluxo não associado para o caso 1D é dada por

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \nabla_{\tilde{\sigma}} \Phi(\tilde{\sigma}) = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\sigma}} = \dot{\lambda} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \text{sign}(\tilde{\sigma}) + \alpha_p \right) \quad (2.108)$$

O comportamento unidimensional é bem mais simples porque as tensões obtidas seguem exatamente o comportamento das curvas de tensão unidimensional adotadas.

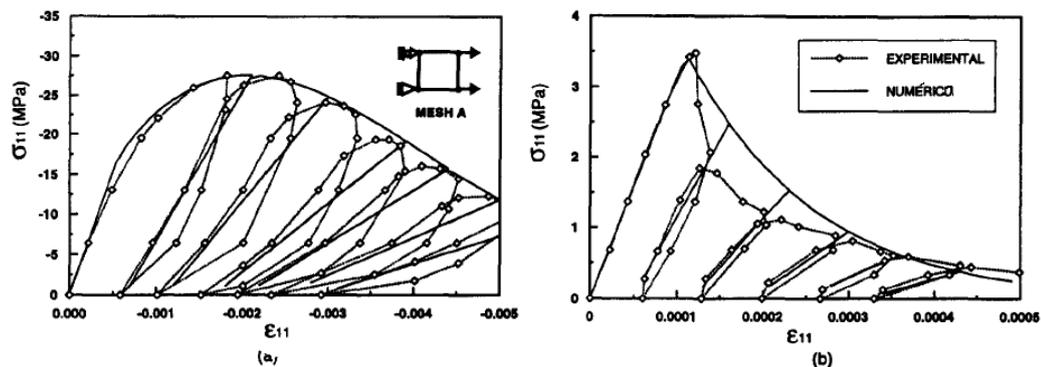
Lee e Fenves (1998) obtiveram as curvas tensão-deformação apresentadas na Figura 34. Os autores utilizaram parâmetros da Tabela 2 e compararam os resultados com os resultados experimentais de Karsan e Jirsa (1969) (compressão) e Gopalaratnam e Shah (1985) (tração), obtendo excelentes resultados. Lee e Fenves (1998) adotaram uma malha de um único elemento quadrado com lado de 82,6 mm.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados por Lee e Fenves (1998) para carregamento cíclico na compressão e na tração

| $E_0$ (GPa) | $f'_c$ (MPa) | $f'_t$ (MPa) | $G_c$ (N/m) | $G_t$ (N/m) | $l_c$ (mm) | $l_t$ (mm) | $\tilde{D}_c$ | $\tilde{D}_t$ | $\alpha_p$ |
|-------------|--------------|--------------|-------------|-------------|------------|------------|---------------|---------------|------------|
| 31,7        | -27,6        | 3,48         | 5690        | 40          | 82,6       | 82,6       | 0,4           | 0,5           | 0,2        |

Fonte: o autor.

Figura 34 – Curva tensão-deformação de Lee e Fenves (1998) comparadas às curvas de (a) Karsan e Jirsa (1969) e (b) Gopalaratnam e Shah (1985) para carregamento cíclico



Fonte: Adaptada de Lee e Fenves (1998).

### 3 MATERIAIS E METODOLOGIA

Nesse tópico são descritos os materiais utilizados nos experimentos, bem como a metodologia dos ensaios que fornecem os dados a serem utilizados nas análises numéricas computacionais.

#### 3.1 Materiais

Para obtenção de um CAD com as características desejadas, é adotado o traço descrito a seguir, baseando-se nos estudos do ACI (2010). Para 1 m<sup>3</sup> de concreto, é necessário 841,9 kg de cimento CP-V; sílica ativa na proporção de 12% da massa do cimento; e areia fina na proporção de 150% da massa do cimento. A taxa de a/c utilizada é de apenas 20%, o que torna necessária a aplicação de um aditivo superplastificante na proporção de 2% da massa dos aglomerantes. Para conceber uma maior ductilidade ao material, a solução é a adição de fibras de aço. Com isso, são utilizadas mais dois traços diferentes do traço referência (Traço 0): um com 1% (Traço 1) e outro com 2% (Traço 2) em massa das fibras em relação à massa de cimento. A Tabela 3 apresenta os traços utilizados.

Tabela 3 – Traços dos concretos utilizados

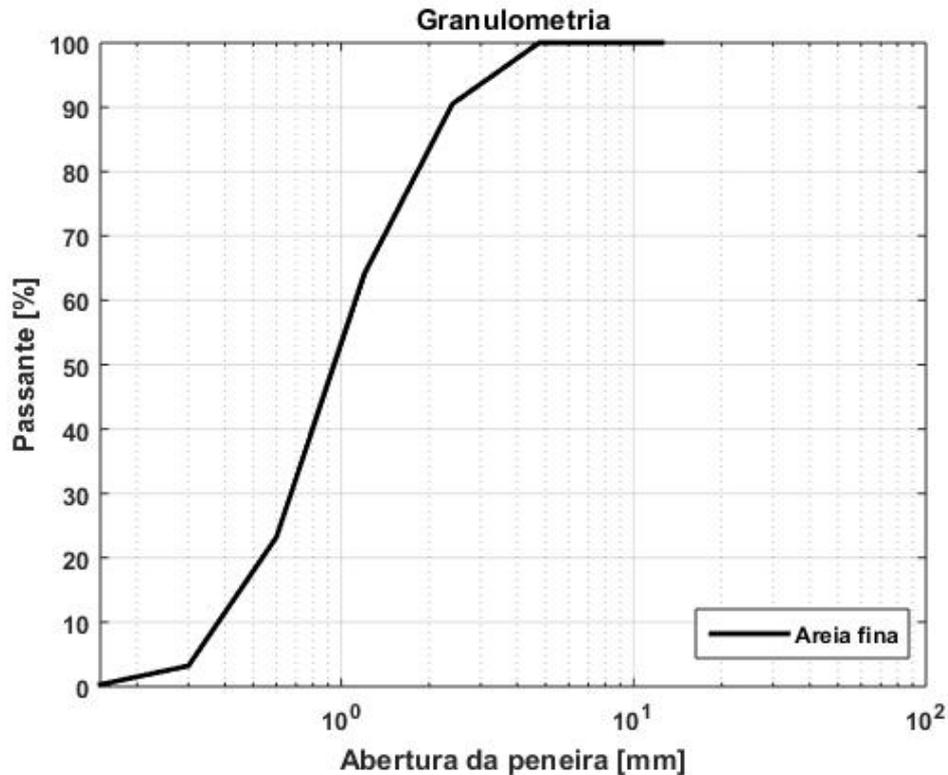
| Materiais          | Traço 0 (kg) | Traço 1 (kg) | Traço 2 (kg) |
|--------------------|--------------|--------------|--------------|
| Cimento CP V-ARI   | 841,9        | 841,9        | 841,9        |
| Areia fina         | 1262,9       | 1262,9       | 1262,9       |
| Sílica Ativa       | 101,0        | 101,0        | 101,0        |
| Superplastificante | 18,9         | 18,9         | 18,9         |
| Água               | 168,4        | 168,4        | 168,4        |
| Fibra              | -            | 8,4          | 16,8         |

Fonte: o autor.

##### 3.1.1 Agregados, Adições e Aditivos

Na composição do concreto em estudo, não há a presença de agregado graúdo. Isso se deve ao desejo de se obter uma resistência mais alta. Alia-se a isso o agregado miúdo ser uma areia fina, com diâmetro máximo característico (DMC) de 2,36 mm. Sua curva de granulometria é de tal maneira que se encontre um empacotamento máximo, atributo necessário para a diminuição de vazios e consequente aumento na resistência. Ela pode ser observada na Figura 35.

Figura 35 – Curva granulométrica da areia fina



Fonte: o autor.

De acordo com a curva granulométrica presente na Figura 35, percebe-se que sua disposição permite que as partículas mais finas preencham esses espaços, o que é o esperado em um empacotamento para um concreto de alto desempenho. Esse preenchimento, que é feito por cimento não-hidratado e sílica ativa, fornece um baixo índice de vazios ao material, o que faz com que ele seja quase impermeável. Assim, garante-se uma menor penetração de agentes químicos, reduzindo o risco de corrosão das armaduras (AHLBORN *et al.*, 2011).

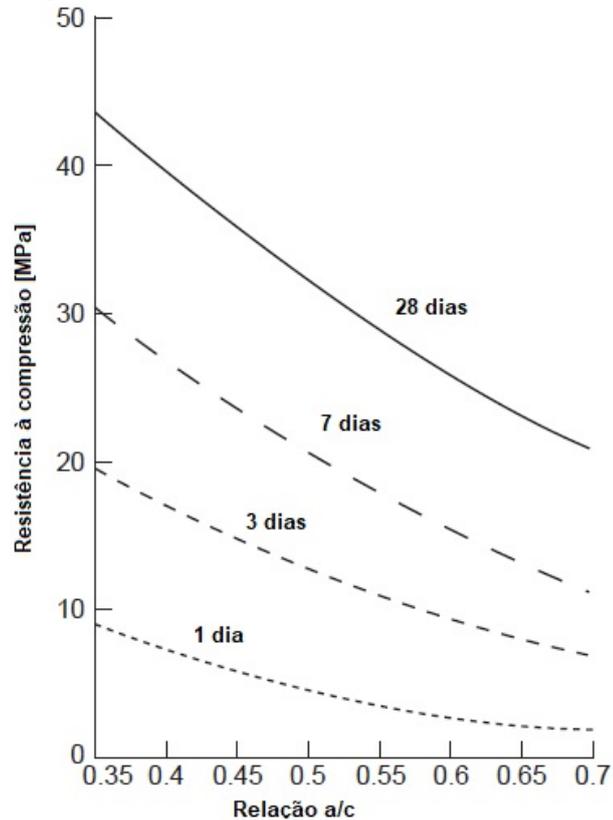
O cimento utilizado é o CP V-ARI (Alta Resistência Inicial) em quantidade bem elevada (841,9 kg/m<sup>3</sup>). A utilização desse alto valor também tem a intenção de fornecer uma maior resistência ao concreto, além de preencher microvazios com suas partículas não hidratadas. O uso desse tipo de cimento é consagrado devido à sua alta reatividade em idades baixas, característica obtida em função do alto grau de moagem a que é submetido.

A quantidade de sílica é em função da alta quantidade de cimento, sua proporção é de 12% em massa desse componente. Sua presença, apesar de tornar o concreto mais viscoso (FEHLING *et al.*, 2014), contribui parcialmente para processos de hidratação relacionados com a resistência, quando utilizado um processo de cura térmica (HEINZ *et al.*, 2012).

Em 1918, Duff Abrams realizou vários ensaios no Instituto Lewis, da Universidade

de Illinois, EUA. O pesquisador relacionou a porcentagem a/c com a resistência à compressão do concreto, obtendo o que ficou conhecido como a Lei da Proporção de a/c de Abrams (MEHTA; MONTEIRO, 2017). As curvas de Abrams podem ser observadas na Figura 36.

Figura 36 – Curvas de Abrams



Fonte: Adaptada de Kosmatka e Panarese (1988)

A relação a/c da mistura é de 0,20, bem abaixo da que normalmente é usada nos concretos tradicionais. Conforme as curvas de Abrams, percebe-se que isso aumenta a resistência do concreto. Isso pode ser explicado pela perda de resistência da matriz com o aumento da porosidade, ocasionado devido ao crescimento da relação a/c (MEHTA; MONTEIRO, 2017).

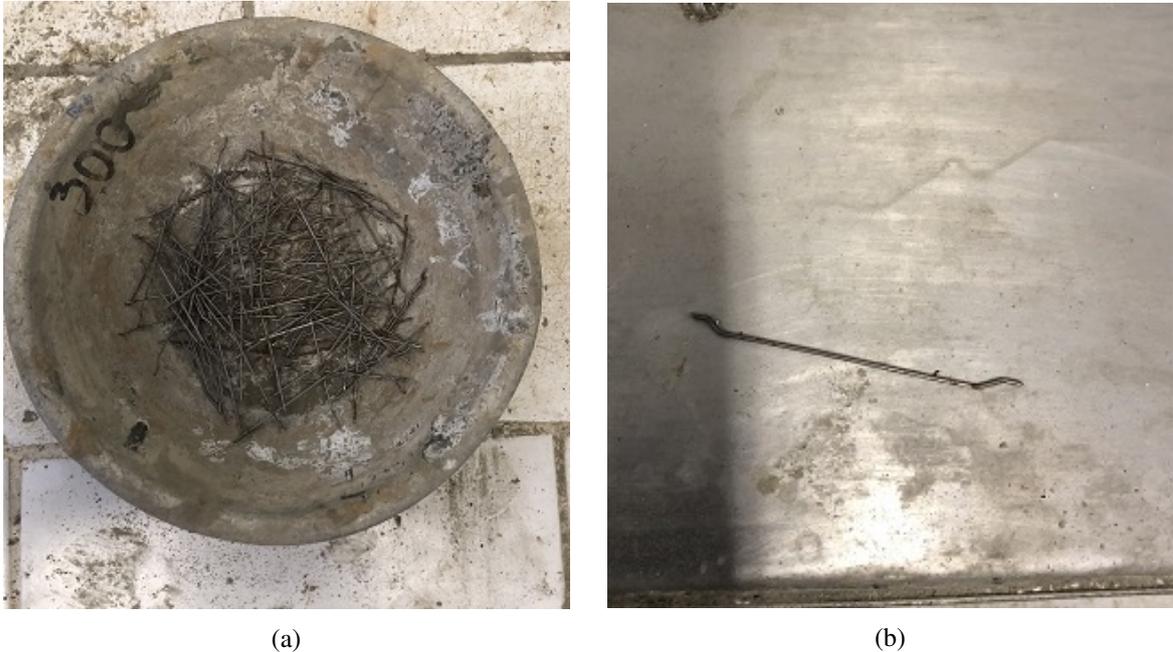
Entretanto, a diminuição da relação a/c diminui a sua trabalhabilidade. Com o intuito de aumentá-la, faz-se uso do aditivo superplastificante de alto desempenho MC-Powerflow 4001, da MC Bauchemie. A proporção utilizada é de 2% em massa de aglomerantes (cimento e sílica ativa).

### 3.1.2 Fibras

Utiliza-se fibra de aço da especificação DRAMIX® 3D 45/50 BL, fornecida pela ArcelorMittal. Trata-se de uma fibra com gancho na extremidade, com comprimento  $l$  de 50

mm e diâmetro  $d$  de 1,05 mm, o que lhe fornece um fator de forma  $l/d$  de 45. Seu módulo de elasticidade equivale a 200 GPa e sua resistência à tração é de 1115 MPa (DRAMIX, 2019). A Figura 37 ilustra as fibras utilizadas.

Figura 37 – Fibras DRAMIX® 3D 45/50 BL



Fonte: o autor.

Devido ao baixo índice de vazios e alta resistência do concreto, a presença de fibras se torna indispensável para tornar a ruptura do material mais dúctil, pois atuam em seu nível estrutural, aumentando sua deformabilidade (DENARIÉ; BRÜHWILER, 2011).

### 3.2 Metodologia

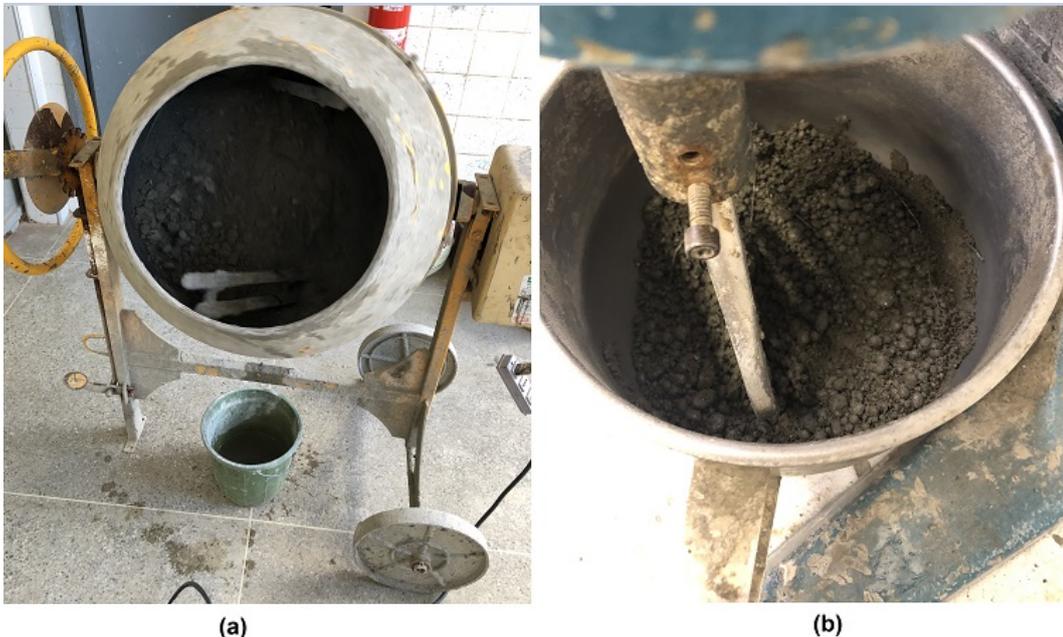
A partir do traço exposto, realizam-se alguns ensaios a fim de caracterizar o concreto, em termos da resistência à compressão, resistência à tração por compressão diametral, módulo de elasticidade e resistência à tração por flexão (flexão pura ou ensaio de 4 pontos). Esses experimentos são descritos nos itens subsequentes.

A nomenclatura dos CPs é dada de acordo com a quantidade de fibras, tipo de ensaio e ordem, no modelo  $NF - X - Y$ .  $N$  é a porcentagem de fibras em massa (porcentagens utilizadas: 0, 1 e 2),  $X$  é o tipo de ensaio ( $C$  para resistência à compressão,  $CD$  para resistência à compressão diametral,  $M$  para módulo de elasticidade,  $T$  para resistência à tração por flexão) e  $Y$  corresponde ao número do CP daquele ensaio (1 a 9, a depender do ensaio).

### 3.2.1 Preparo do concreto

Embora exista betoneira no Laboratório de Materiais da Construção Civil (LMCC) da UFC, devido à ausência de agregado graúdo, esse dispositivo não possui força suficiente para que o aditivo haja na mistura e garanta fluidez ao concreto. Portanto, a execução do concreto é realizada em argamassadeira (Figura 38a), o que faz com que sejam realizados mais traços devido à capacidade do equipamento. Isso representa uma dificuldade considerável, uma vez que exige mais pesagens e aumenta a possibilidade de erros. A Figura 38b ilustra a execução de concreto na argamassadeira.

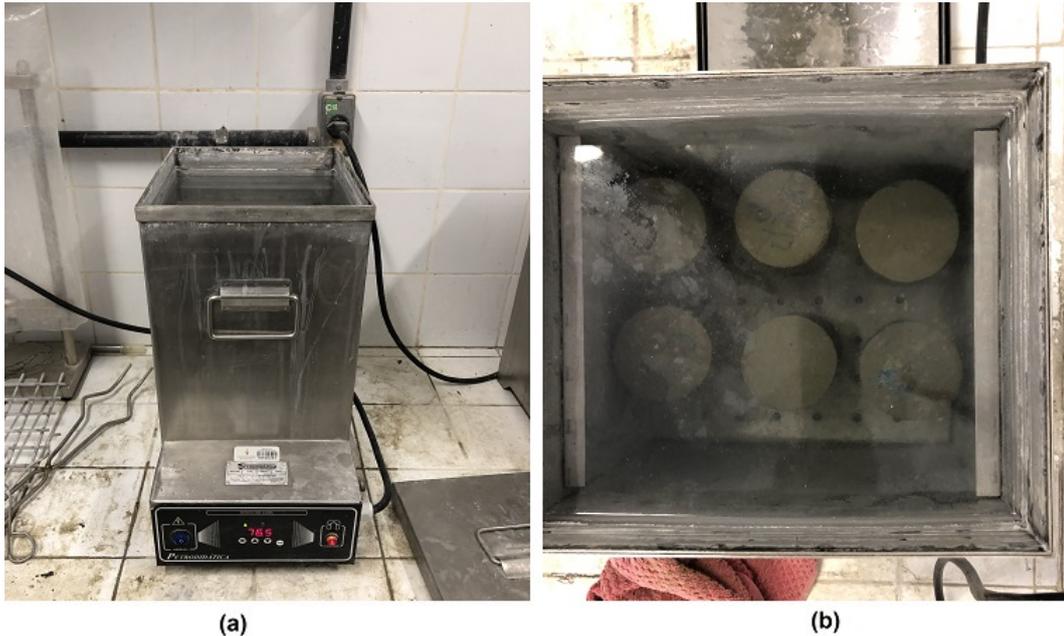
Figura 38 – Maquinário para preparo do concreto: (a) betoneira e (b) argamassadeira do LMCC



Fonte: o autor.

Feito isso, o concreto é moldado conforme disposto na subseção do ensaio correspondente. Após um dia da moldagem, os CPs são desformados e seguem para o processo de cura térmica a 80°C, em compartimento disposto na Figura 39a. Devido à limitação de espaço (evidenciada na Figura 39b), o processo de cura térmica dura apenas 6 dias. Após 7 dias da moldagem, o CP fica imerso em água com cal até atingir a idade de seu ensaio, correspondente a 28 dias.

Figura 39 – Vistas (a) frontal e (b) superior do compartimento de cura



Fonte: o autor.

### 3.2.2 *Ensaio de resistência à compressão*

No Brasil, esse ensaio é normatizado pela NBR 5738 - Concreto — Procedimento para moldagem e cura de corpos de prova (ABNT, 2015). Ela delimita, entre outros CPs, um cilíndrico com 10 cm de diâmetro e 20 cm de altura (molde disponível no LMCC). O equipamento do laboratório é a prensa de compressão para concreto EMIC PCE100C, com capacidade de carga de 100.000 kgf (ou 1 MN). Entretanto, ela é inferior à capacidade de carga necessária para rompimento do concreto com a resistência esperada. Para tanto, faz-se uso de um CP com dimensões menores: diâmetro de 7,5 cm e altura de 15 cm.

Como não há molde com essas dimensões no LMCC, a solução encontrada foi a moldagem com a utilização de canos de PVC de 75 mm de diâmetro. Corta-se o tubo em diversos segmentos de 150 mm e, posteriormente, fixam-se esses segmentos em bases de vidro com o auxílio de massa para calafetar. A utilização dessa massa fornece equilíbrio e vedação ao molde, garantindo uma boa moldagem, como pode ser visto na Figura 40.

Figura 40 – (a) Moldes para corpos de prova de ensaio à compressão e (b) corpos de prova desmoldados



Fonte: o autor.

Outra limitação a esse ensaio é o adensamento do concreto. A NBR 5738 (ABNT, 2015) não define um método para o CP com as dimensões desse trabalho, e a haste do laboratório era grande em comparação ao molde utilizado. A solução é fornecer 50 golpes laterais ao molde com uma colher de pedreiro. Embora não se garanta um adensamento tão bom quanto o da norma, esse método mostra-se eficiente para os objetivos do trabalho. São ensaiados 10 CPs com a idade de 28 dias, sendo 4 com 0% de fibras, 3 com 1% de fibras e 3 com 2% de fibras. A Figura 41 mostra como é realizado o ensaio.

Figura 41 – Ensaio de resistência à compressão



Fonte: o autor.

### 3.2.3 Resistência à tração por compressão diametral

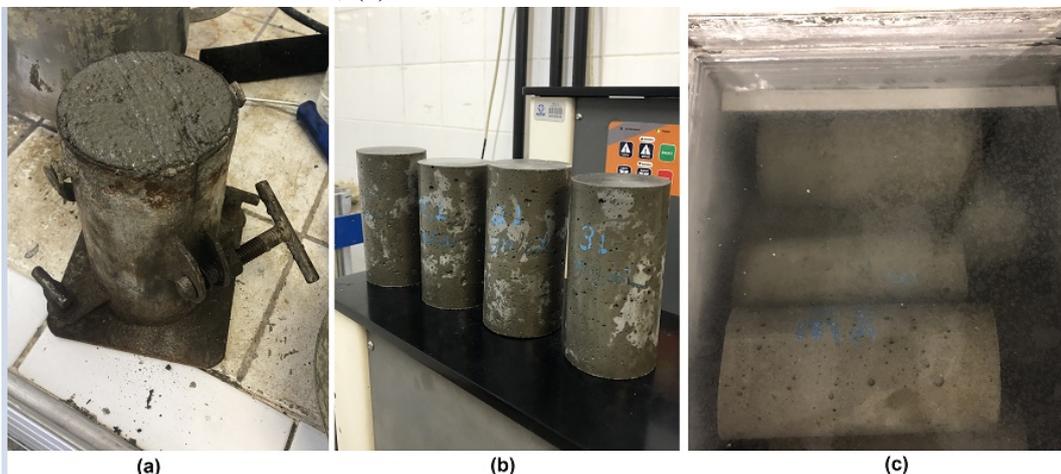
A NBR 7222 - Concreto e argamassa – Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos (ABNT, 2011) disciplina o ensaio de tração a compressão diametral, também conhecido como ensaio brasileiro, pois foi idealizado pelo Prof. Lobo Carneiro, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). De acordo com ela, a relação entre a força de ruptura na compressão diametral  $F_{cd}$  e a resistência à tração por compressão diametral  $f_{tcd}$  é:

$$f_{tcd} = \frac{2F_{cd}}{\pi d_{cd} h_{cd}} \quad (3.1)$$

onde  $d_{cd}$  é o diâmetro e  $h_{cd}$  é a altura do CP.

Utilizam-se CPs cilíndricos de 100 mm de diâmetro e 200 mm de altura, com procedimento de moldagem de acordo com a NBR 5738 (ABNT, 2015). São moldados 3 CPs para cada porcentagem de fibra (total de 9) e todos são ensaiados com a idade de 28 dias. A Figura 42 retrata os moldes do ensaio.

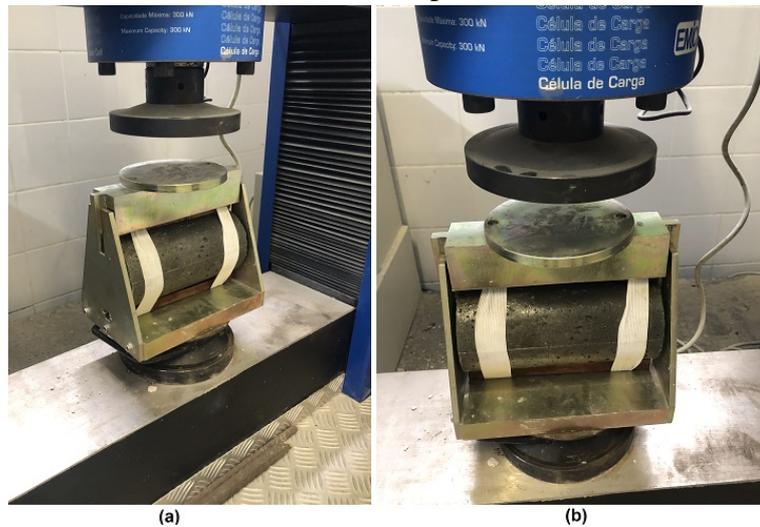
Figura 42 – (a) CP moldado e (b) desmoldado para ensaio de resistência à compressão diametral; (c) cura térmica



Fonte: o autor.

O ensaio é realizado conforme a NBR 5738 (ABNT, 2011). O aparato utilizado é mostrado na Figura 43.

Figura 43 – Vistas (a) em perspectiva e (b) lateral de ensaio de resistência à compressão diametral

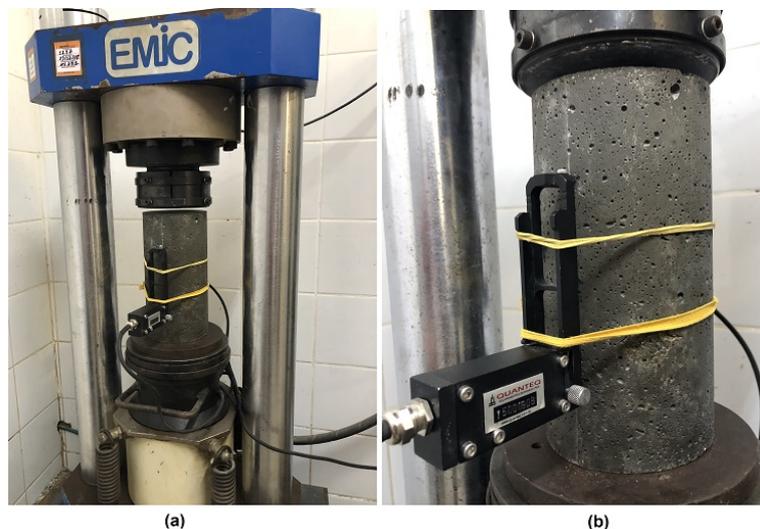


Fonte: o autor.

### 3.2.4 Ensaio de módulo de elasticidade

Esse ensaio, no Brasil, é realizado conforme a NBR 8522 - Concreto – Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão (ABNT, 2017). Os CPs utilizados são iguais aos utilizados no ensaio brasileiro, também sendo 3 para cada porcentagem de fibra (total de 9). Entretanto, há uma limitação nesse ensaio devido à capacidade de carga da máquina. A NBR 8522 (ABNT, 2017) recomenda que os CPs sejam rompidos, mas isso não ocorre devido à limitação supracitada. A Figura 44 ilustra o ensaio. A força aplicada equivale a 30% da força média para ruptura obtida nos ensaios de resistência à compressão.

Figura 44 – Vistas (a) em perspectiva e (b) aproximada de ensaio de módulo de elasticidade

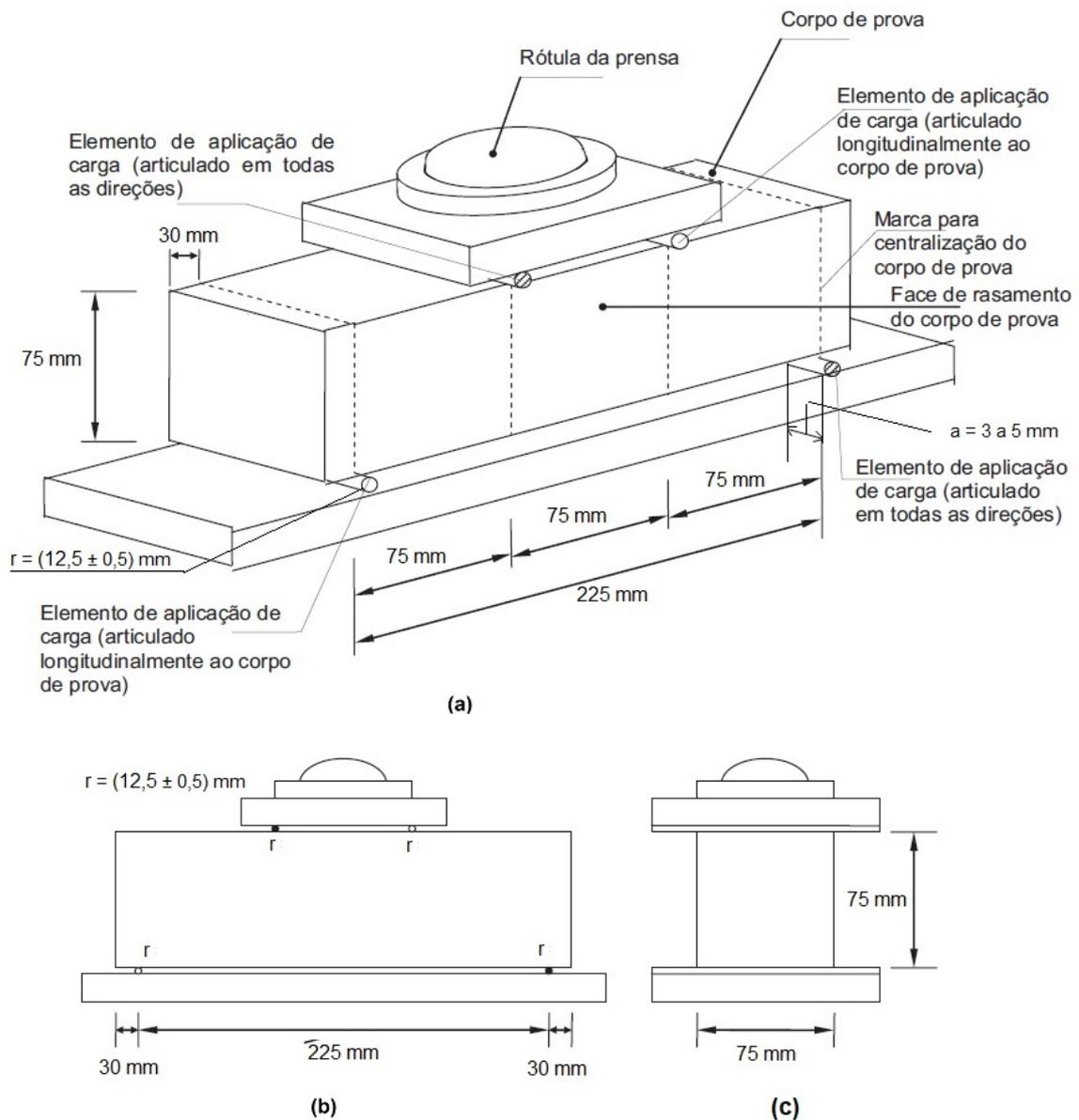


Fonte: o autor.

### 3.2.5 Ensaio de resistência à tração na flexão pura

Esse ensaio é normatizado pela NBR 12142 - Concreto – Determinação da resistência à tração na flexão de corpos de prova prismáticos (ABNT, 2010). São ensaiados 9 prismas, sendo 3 para cada porcentagem de fibras (0, 1 e 2%). Devido à limitação de espaço do compartimento de cura térmica, as dimensões adotadas para esse ensaio são menores que as convencionais, porém seguem o exigido pela NBR 12142 (ABNT, 2010). As dimensões utilizadas são mostradas na Figura 45.

Figura 45 – Vistas (a) em perspectiva, (b) lateral e (c) frontal da disposição teórica de ensaio de resistência à tração na flexão



Fonte: adaptada de NBR 12412 (ABNT, 2010).

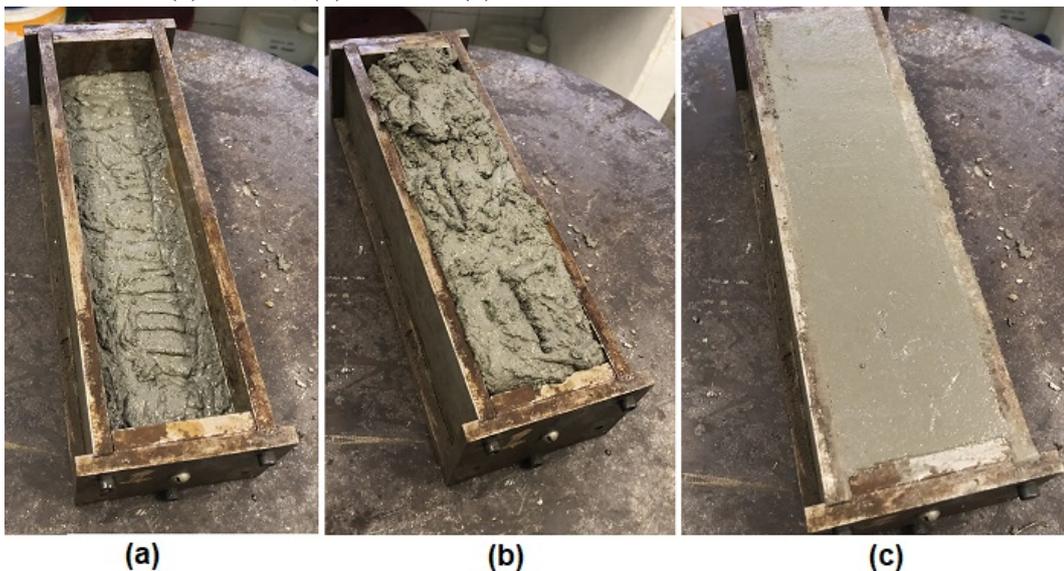
A resistência à tração na flexão  $f_{t(ten)}$  é calculada de acordo com a seguinte equação (ABNT, 2011):

$$f_{t(ten)} = \frac{F_{ten}l}{bd^2} \quad (3.2)$$

sendo  $F_{ten}$  a força aplicada;  $l = 225$  mm o vão;  $b$  a base e  $d$  a altura, com  $b = d = l/3 = 75$  mm.

A moldagem é feita em três fases. A primeira é o preenchimento de metade do molde com concreto, então utiliza-se o bastão para adensamento. Após isso, o molde é levado à prensa, onde são aplicadas 12 batidas para maior preenchimento de vazios. A segunda fase consiste em completar o molde e repetir o procedimento do bastão e da prensa. Por fim, regulariza-se a parte exposta com uma colher de pedreiro. A Figura 46 representa esse processo.

Figura 46 – Processo de moldagem do CP de ensaio de resistência à tração na flexão.  
(a) Fase 1, (b) fase 2 e (c) fase 3



Fonte: o autor.

A primeira dificuldade encontrada nesse ensaio é que o LMCC não dispõe de elementos de aplicação de carga e apoio nas dimensões do CP desejado. Isso foi contornado com a fabricação de suportes adequados a essas medidas em ferro fundido (Figura 47a). Além disso, também não há suporte para posicionamento dos LVDTs, equipamentos utilizados para mensurar o deslocamento do CP prismático. A solução adotada foi fixar uma barra de alumínio conforme pode-se observar na Figura 47b.

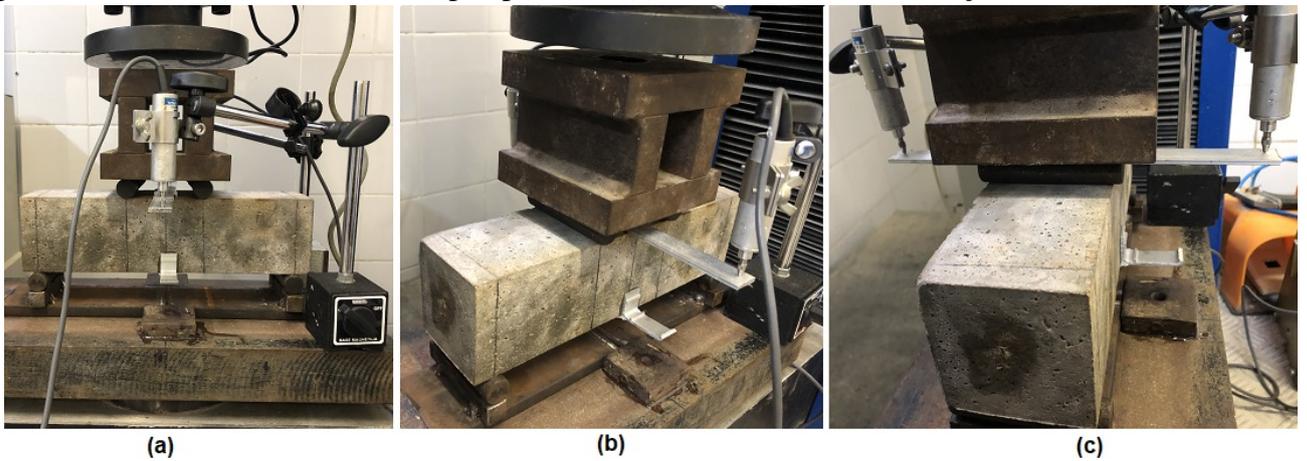
Figura 47 – Adaptações ao ensaio de tração na flexão: (a) suporte para apoio e aplicação de carga e (b) suporte para posicionamento dos LVDTs



Fonte: o autor.

A disposição dos aparatos ilustrados na Figura 47 nos CPs para o ensaio de flexão pura pode ser observada na Figura 48.

Figura 48 – Vistas (a) lateral, (b) em perspectiva e (c) frontal do ensaio de tração na flexão



Fonte: o autor.

## 4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Nesse capítulo são apresentados todos os resultados obtidos a partir dos ensaios realizados no LMCC, discriminados na Seção 3.2 do Capítulo 3. Esses resultados servem como base das aplicações numéricas apresentadas no Capítulo 5.

### 4.1 Resistência à compressão

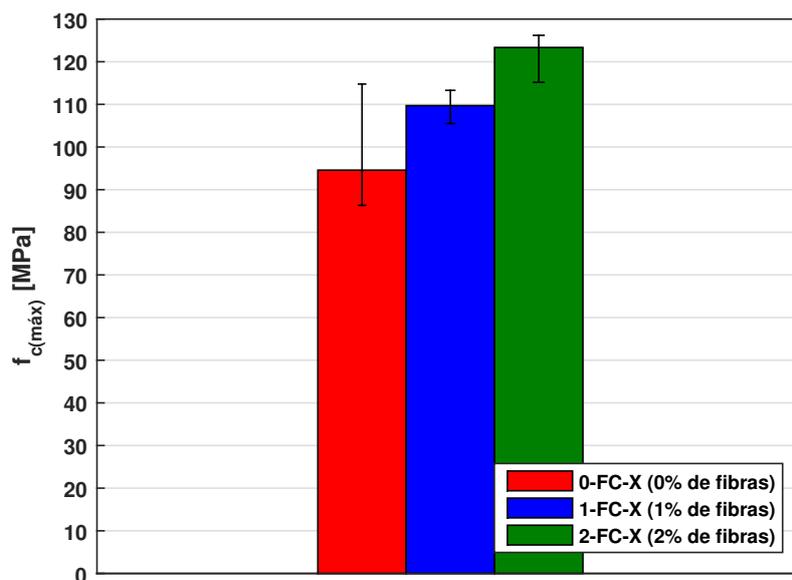
A Tabela 4 relaciona os CPs da Seção 3.2.2 com suas forças de ruptura na compressão  $F_c$  e resistências últimas à compressão  $f_{cu28}$ . A partir dos dados obtidos na Tabela 4 é possível plotar o gráfico de barras da Figura 49.

Tabela 4 – Dados dos ensaios de resistência à compressão

| CP<br>(0% de fibra) | $F_c$<br>[kN] | $f_c$<br>[MPa] | CP<br>(1% de fibra) | $F_c$<br>[kN] | $f_c$<br>[MPa] | CP<br>(2% de fibra) | $F_c$<br>[kN] | $f_c$<br>[MPa] |
|---------------------|---------------|----------------|---------------------|---------------|----------------|---------------------|---------------|----------------|
| 0-FC-1              | 371,6         | 90,7           | 1-FC-1              | 453,6         | 110,3          | 2-FC-1              | 465,4         | 115,2          |
| 0-FC-2              | 466,8         | 114,8          | 1-FC-2              | 432,3         | 105,5          | 2-FC-2              | 549,2         | 134,4          |
| 0-FC-3              | 350,8         | 86,3           | 1-FC-3              | 461,6         | 113,3          | 2-FC-3              | 488,5         | 120,5          |
| 0-FC-4              | 351,2         | 86,5           | -                   | -             | -              | -                   | -             | -              |
| Média               | 385,1         | 94,6           | Média               | 449,2         | 109,7          | Média               | 501,0         | 123,4          |

Fonte: o autor.

Figura 49 – Resistência à compressão

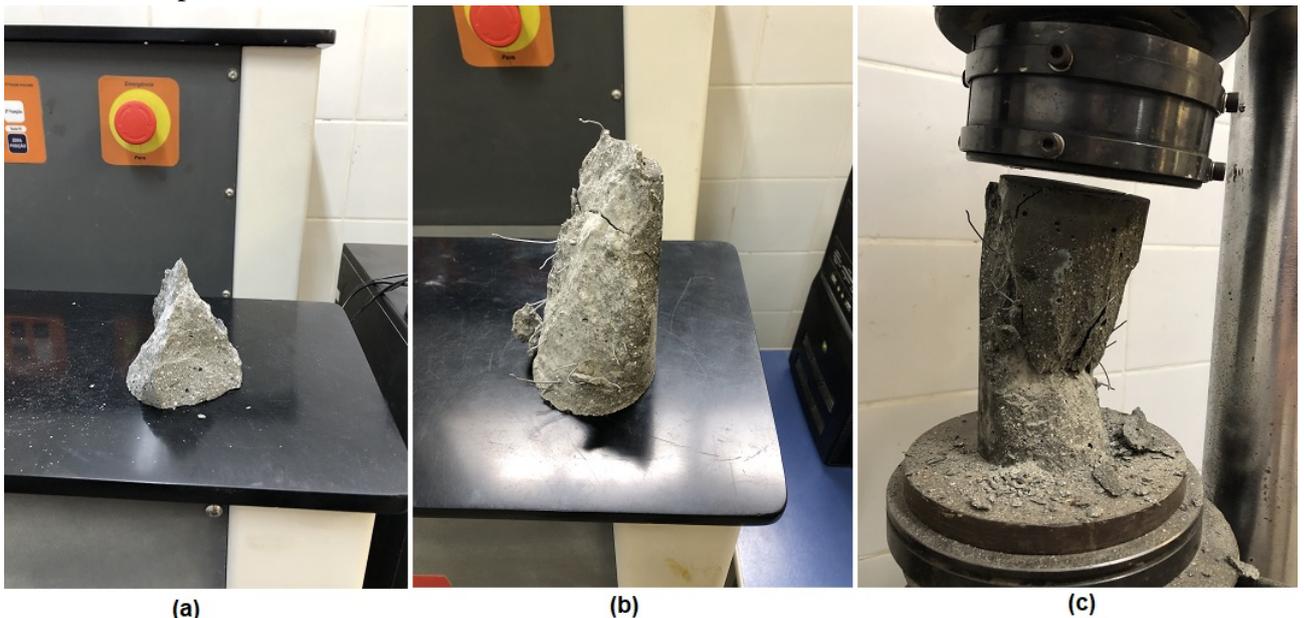


Fonte: o autor.

Esses resultados mostram um aumento de resistência nos CPs com o acréscimo de fibras. Isso já era esperado, pois o acréscimo de fibras faz com que o concreto possua uma maior capacidade de carga, conforme estudo de Kang *et al.* (2010). Para os CPs sem fibra, 1% e 2% de fibras considera-se uma resistência média à compressão  $f_{cm}$  de 95, 110 e 123 MPa, respectivamente, dispostos na Tabela 4. Isso evidencia uma relação entre o acréscimo de fibras e a resistência, mostrando que é possível aumentar este parâmetro a partir da adição de fibras.

Além disso, nota-se a ruptura mais dúctil com adição de fibras. Isso fica claro com a Figura 50 mostrando como ficam os CPs após a ruptura. Nota-se que a ruptura dos CPs sem fibras é altamente explosiva, deixando apenas poucos resquícios do cilindro. Conforme são adicionadas as fibras, os restos do CP são maiores, o que evidencia um comportamento mais dúctil.

Figura 50 – CPs com (a) 0% de fibras, (b) 1% de fibras e (c) 2% de fibras rompidos no ensaio de compressão



Fonte: o autor.

Devido às limitações do maquinário presente no LMCC, não é possível traçar o gráfico de força-deslocamento na compressão, sendo necessário recorrer aos modelos da Seção 2.2, 2.7 e 2.6. Esse estudo é apresentado no Capítulo 5.

#### 4.2 Resistência à compressão diametral

Os resultados de  $F_{cd}$  e  $f_{icd}$  estão dispostos na Tabela 5 e são obtidos a partir da Equação (3.1). Esses dados possibilitam a plotagem do gráfico da Figura 51. Os resultados

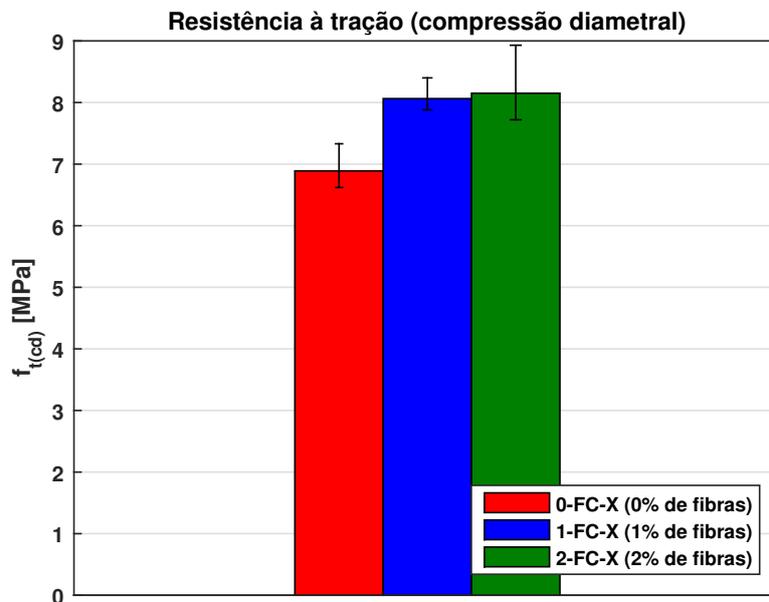
dos CPs com presença de fibra são bem semelhantes, havendo um acréscimo de resistência em comparação aos CPs sem fibra.

Tabela 5 – Dados dos ensaios de resistência à tração por compressão diametral

| CP<br>(0% de fibra) | $F_{cd}$<br>[kN] | $f_{tcd}$<br>[MPa] | CP<br>(1% de fibra) | $F_{cd}$<br>[kN] | $f_{tcd}$<br>[MPa] | CP<br>(2% de fibra) | $F_{cd}$<br>[kN] | $f_{tcd}$<br>[MPa] |
|---------------------|------------------|--------------------|---------------------|------------------|--------------------|---------------------|------------------|--------------------|
| 0-FCD-1             | 208,7            | 6,62               | 1-FCD-1             | 243,3            | 7,72               | 2-FCD-1             | 284,2            | 8,93               |
| 0-FCD-2             | 247,3            | 6,72               | 1-FCD-2             | 252,8            | 7,91               | 2-FCD-2             | 209,7            | 7,88               |
| 0-FCD-3             | 229,5            | 7,33               | 1-FCD-3             | 268,5            | 8,40               | 2-FCD-3             | 245,1            | 7,80               |
| Média               | 228,5            | 6,89               | Média               | 254,9            | 8,01               | Média               | 246,3            | 8,20               |

Fonte: o autor.

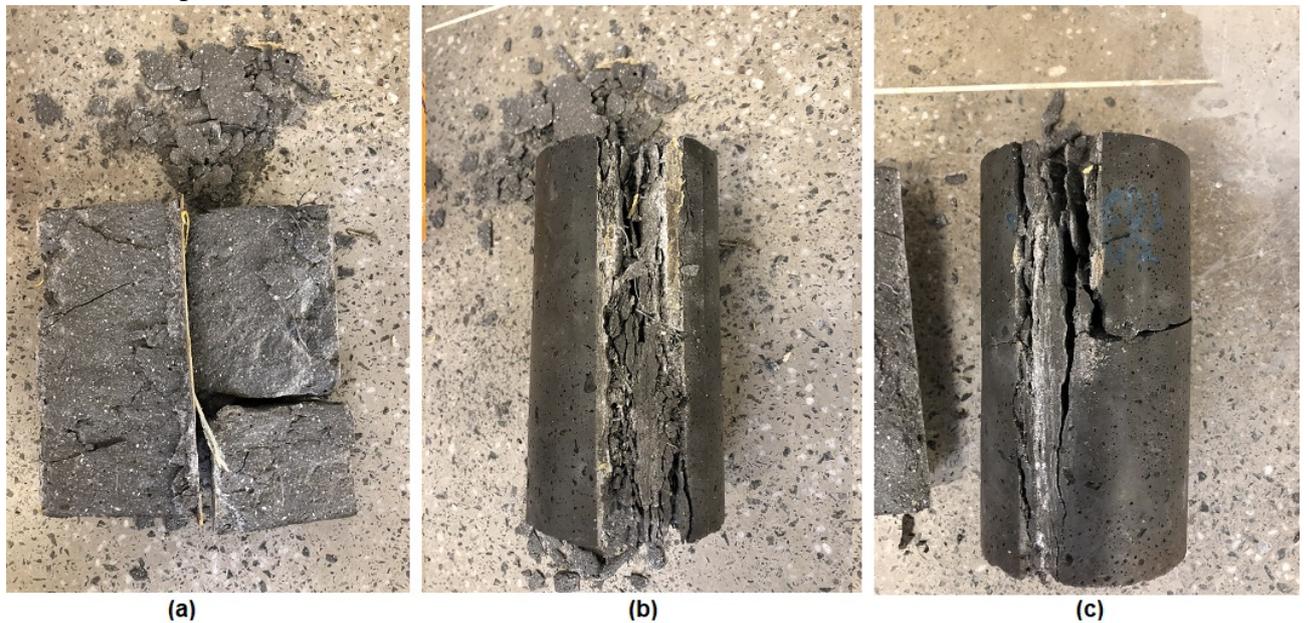
Figura 51 – Resistência à tração por compressão diametral



Fonte: o autor.

O rompimento dos CPs com fibras se dá de maneira bem mais dúctil, o que pode ser observado na Figura 52. Nota-se que o CP sem fibra rompe de maneira frágil, com plano de falha bem definido. Diferentemente do que ocorre na compressão, a ruptura não é explosiva. À medida que são adicionadas fibras, o rompimento apresenta uma ruptura mais dúctil, indicando uma queda mais suave no caminho pós-pico no gráfico de carga deslocamento, o que é explicitado no ensaio de tenacidade, na Seção 4.4.

Figura 52 – CPs com (a) 0% de fibras, (b) 1% de fibras e (c) 2% de fibras rompidos no ensaio de compressão diametral



Fonte: o autor.

### 4.3 Módulo de Elasticidade

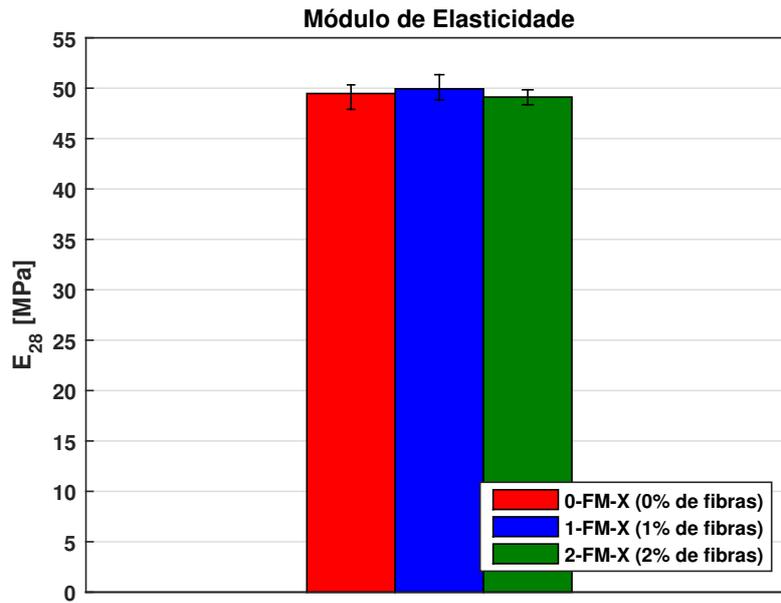
A força do ensaio de módulo  $F_M$  equivale a 30% da força média obtida na ruptura dos CPs no ensaio de compressão. Para isso, utilizam-se as resistências à compressão dispostas na Tabela 4. A Tabela 6 relaciona a força  $F_M$  e os módulos  $E_c$  de elasticidade para cada CP. Por sua vez, a Figura 53 dispõe das médias de valores dos módulos.

Tabela 6 – Resultados dos ensaios de módulo de elasticidade

| CP<br>(0% de fibra) | $F_M$<br>[kN] | $E_c$<br>[GPa] | CP<br>(1% de fibra) | $F_M$<br>[kN] | $E_c$<br>[GPa] | CP<br>(2% de fibra) | $F_M$<br>[kN] | $E_c$<br>[GPa] |
|---------------------|---------------|----------------|---------------------|---------------|----------------|---------------------|---------------|----------------|
| 0-FM-1              | 222,8         | 47,90          | 1-FM-1              | 259,1         | 51,34          | 2-FM-1              | 273,4         | 48,36          |
| 0-FM-2              | 223,1         | 50,33          | 1-FM-2              | 256,8         | 48,84          | 2-FM-2              | 266,9         | 49,84          |
| 0-FM-3              | 223,7         | 50,19          | 1-FM-3              | 259,8         | 49,62          | 2-FM-3              | 273,8         | 49,16          |
| Média               | 223,2         | 49,47          | Média               | 258,6         | 49,93          | Média               | 271,4         | 49,12          |

Fonte: o autor.

Figura 53 – Módulos de elasticidade



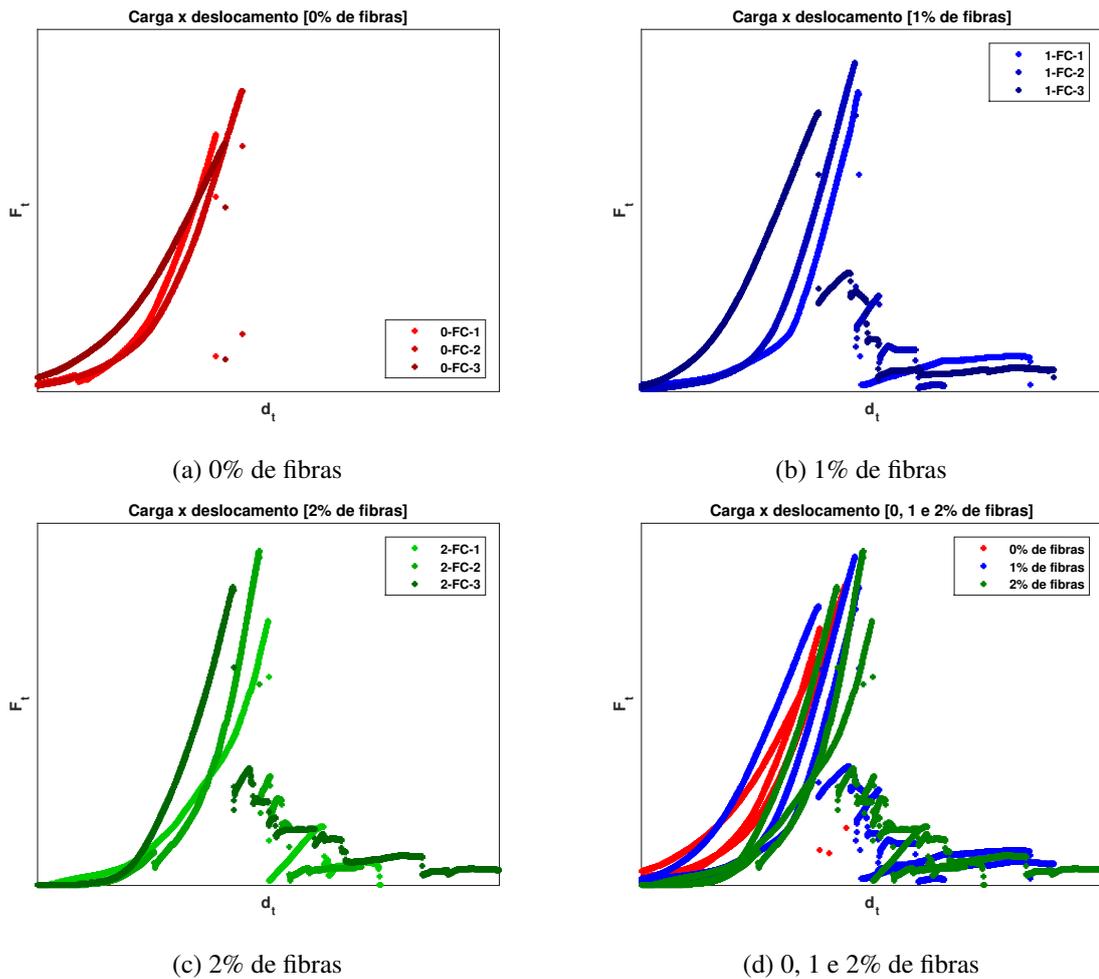
Fonte: o autor.

Conforme previsto, os módulos pouco se alteram com a variação na porcentagem de fibras, ficando em uma média de 49,5 GPa. Esse resultado também já era esperado e condiz com os resultados obtidos por Kang *et al.* (2010). Em seu estudo, os autores chegaram à conclusão que o acréscimo de fibras não altera a rigidez do concreto.

#### 4.4 Resistência à tração na flexão

O ensaio de flexão pura deveria fornecer os carregamentos máximos na flexão, com seus devidos deslocamentos no pico. Entretanto, devido a um provável erro de conversão das unidades de medida na obtenção de resultados do experimento, os dados não são condizentes com a realidade. Entretanto, para fins qualitativos, os resultados são satisfatórios. Eles são ilustrados na Figura 54.

Figura 54 – Carga x deslocamento na flexão pura



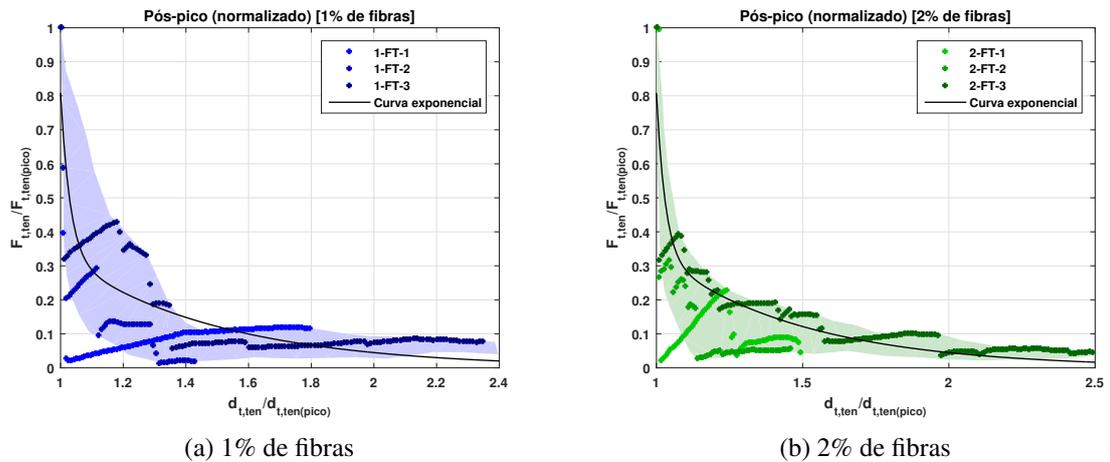
Fonte: o autor.

A partir da Figura 54, é observado que há um trecho inicial de acomodação seguido de um trecho aproximadamente linear. A causa disso é a adaptação utilizada com o molde de ferro fundido da Figura 47a. Isso faz com que não haja graus de liberdade livres, prejudicando o deslocamento inicial.

Além disso, observa-se que, na ausência de fibras, o prisma rompe de maneira frágil. Entretanto, com fibras, o CP passa a ter um caminho pós-pico, evidenciando ruptura mais dúctil.

A fim de se entender melhor o comportamento pós pico do CAD, são traçados gráficos normalizados com a carga e o deslocamento máximos obtida na Figura 55. Por óbvio, isso só é feito para os prismas com presença de fibra. Uma curva exponencial é traçada dentro da envoltória, mostrando que um modelo desse tipo poderia ser criado para o caminho pós-pico.

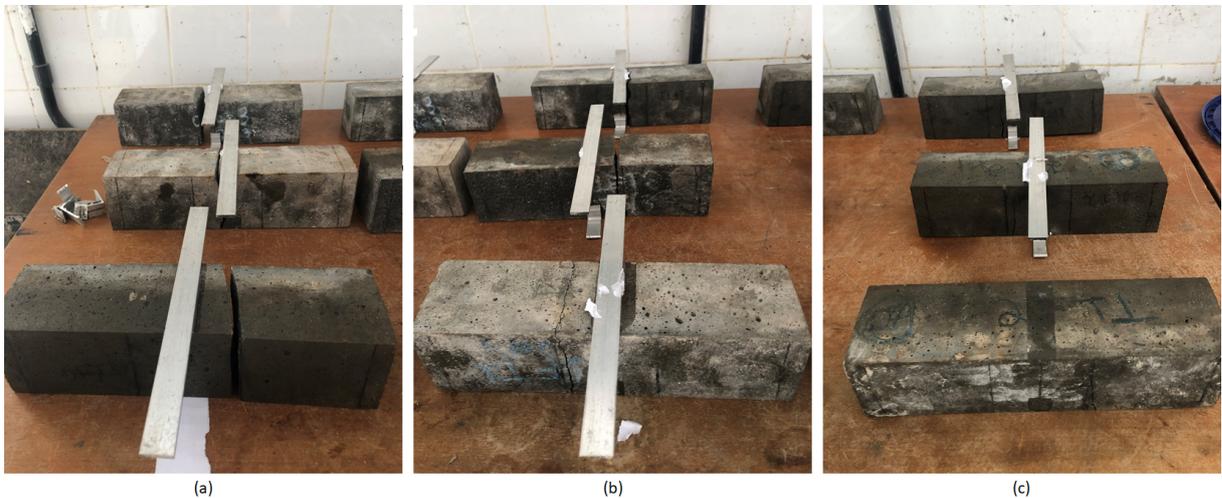
Figura 55 – Carga x deslocamento normalizado no pós-pico para a flexão pura



Fonte: o autor.

É possível evidenciar essa ruptura mais frágil na flexão para os CPs sem fibras a partir da Figura 56. Observa-se que, na ausência de fibras, o prisma se rompe por completo, ficando separado. Com 1%, isso não ocorre em todos, enquanto que com 2% isso não ocorre nenhuma vez.

Figura 56 – CPs rompidos no ensaios de flexão pura com (a) 0% de fibras, (b) 1% de fibras e (c) 2% de fibras



Fonte: o autor.

## 5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Nesse Capítulo são estudados os modelos apresentados nas Seções 2.3.1, 2.6 e 2.7 com o intuito de demonstrar o comportamento do CAD com diferentes teores de fibras. Para isso, são realizadas análises numéricas não-lineares no software FAST (*Finite Element Analysis Tool*), desenvolvido pelo Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da UFC. Com isso, verifica-se a capacidade do programa de reproduzir o comportamento do CAD de acordo com os modelos elásticos não-lineares e, posteriormente, com os Modelos de Mazars *et al.* (2015) e Lee e Fenves (1998).

### 5.1 Modelos elásticos de tensão-deformação na compressão

A caracterização experimental descrita nos capítulos anteriores não permite a determinação das curvas tensão-deformação do CAD. Assim, os modelos elásticos discutidos na Seção 2.3.1 serão utilizados para representar o comportamento do concreto na compressão.

Os modelos se referem à tensão de pico com diferentes parâmetros, sendo  $f_{cm}$  para os Modelos do CEB-FIP (1990) e de Van Gysel e Taerwe (1996);  $f'_c$  para o Modelo de Wee *et al.* (1996); e  $f_0$  para o Modelo de Mansur *et al.* (1999). Como só foram ensaiados na compressão um máximo 4 CPs para cada teor de fibra, esse parâmetro é considerado como sendo a resistência à compressão média  $f_c$  da Tabela 4. A Tabela 7 mostra as deformações de pico ( $\epsilon_{pico}$ ) e limite entre trechos ( $\epsilon_{lim}$ ) para cada modelo.

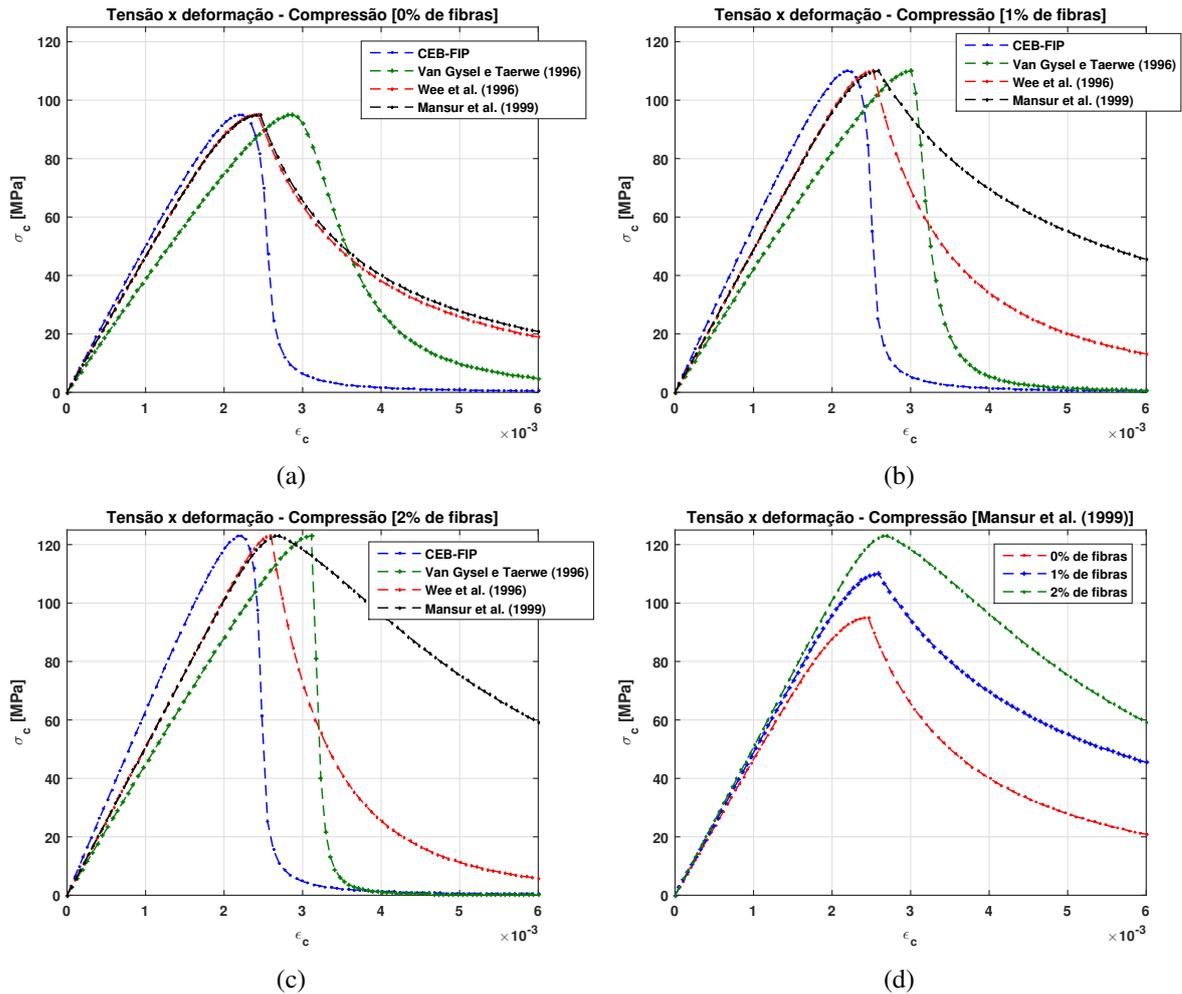
Tabela 7 – Deformações de pico e limite para cada modelo elástico

| Modelo                      | $\epsilon_{pico} \times 10^{-3}$<br>[0%] | $\epsilon_{lim} \times 10^{-3}$<br>[0%] | $\epsilon_{pico} \times 10^{-3}$<br>[1%] | $\epsilon_{lim} \times 10^{-3}$<br>[1%] | $\epsilon_{pico} \times 10^{-3}$<br>[2%] | $\epsilon_{lim} \times 10^{-3}$<br>[2%] |
|-----------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|
| CEB-FIP (1990)              | 2,20                                     | 2,68                                    | 2,20                                     | 2,50                                    | 2,20                                     | 2,48                                    |
| Van Gysel e Taerwe (1996)   | 2,61                                     | -                                       | 3,05                                     | -                                       | 3,11                                     | -                                       |
| Wee <i>et al.</i> (1996)    | 2,26                                     | -                                       | 2,55                                     | -                                       | 2,60                                     | -                                       |
| Mansur <i>et al.</i> (1999) | 2,21                                     | -                                       | 2,63                                     | -                                       | 2,70                                     | -                                       |

Fonte: o autor.

No Modelo do CEB-FIP (1990),  $\epsilon_{pico}$  é fixo e  $\epsilon_{lim}$  diminui com o aumento do  $f_c$ . Os outros três modelos possuem  $\epsilon_{lim} = \epsilon_{pico}$ . A deformação de pico aumenta com aumento de  $f_c$  nesses modelos. A Figura 57 mostra os gráficos das curvas tensão-deformação para cada porcentagem de fibras.

Figura 57 – Tensão-deformação na compressão a partir de modelos elásticos



Fonte: o autor.

De acordo com a Figura 57, as curvas para diferentes teores de fibras dos modelos do CEB-FIP (1990), Van Gysel e Taerwe (1996) e Wee *et al.* (1996) possuem comportamento semelhante, fato que se deve à equação ser a mesma e não possuir adequação à presença de fibras. O comportamento pós-pico é diferente nas curvas do Modelo de Mansur *et al.* (1999), uma vez que há influência da presença de fibras. É importante salientar que, na ausência de fibras, as curvas de Wee *et al.* (1996) e Mansur *et al.* (1999) são praticamente idênticas.

Pode-se observar que as curvas do Modelo do CEB-FIP (1990) e de Van Gysel e Taerwe (1996) possuem comportamento semelhante, com uma ruptura mais frágil. Entretanto, neste segundo modelo há uma deformação no pico maior. Observa-se que nesses dois modelos a ruptura se dá de maneira bem frágil, como é de se esperar em CADs. No caso das curvas de Van Gysel e Taerwe (1996), ela se torna ainda mais frágil à medida que a  $f_c$  aumenta. Entretanto, com a adição de fibras, isso deveria mudar, uma vez que a presença desses componentes torna a ruptura mais dúctil. Evidentemente, isso não é observado pois os modelos não foram desenvolvidos para

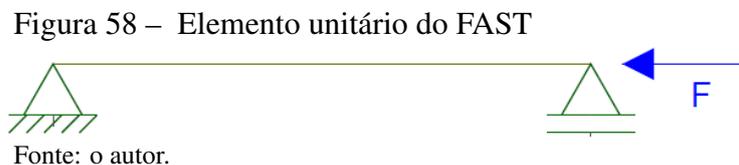
abordar esse material.

Tratando agora das curvas do Modelo de Wee *et al.* (1996), percebe-se que ele fornece rupturas mais dúcteis, mas ainda assim independe da presença de fibras. O efeito da presença delas só é observado no Modelo de Mansur *et al.* (1999), onde influencia o Trecho 2 das curvas, como pode ser observado na Figura 57d. Entretanto, tais modelos não representam uma ruptura frágil para o CAD sem fibras, o que pode não ser tão fiel à realidade, tendo em vista a ruptura explosiva obtida neste caso.

Portanto, compreende-se que a curva do CEB-FIP (1990) é adequada para ilustrar o comportamento do CAD sem fibras, enquanto que para a presença de fibras é recomendada o Modelo de Mansur *et al.* (1999), único capaz de demonstrar seu efeito.

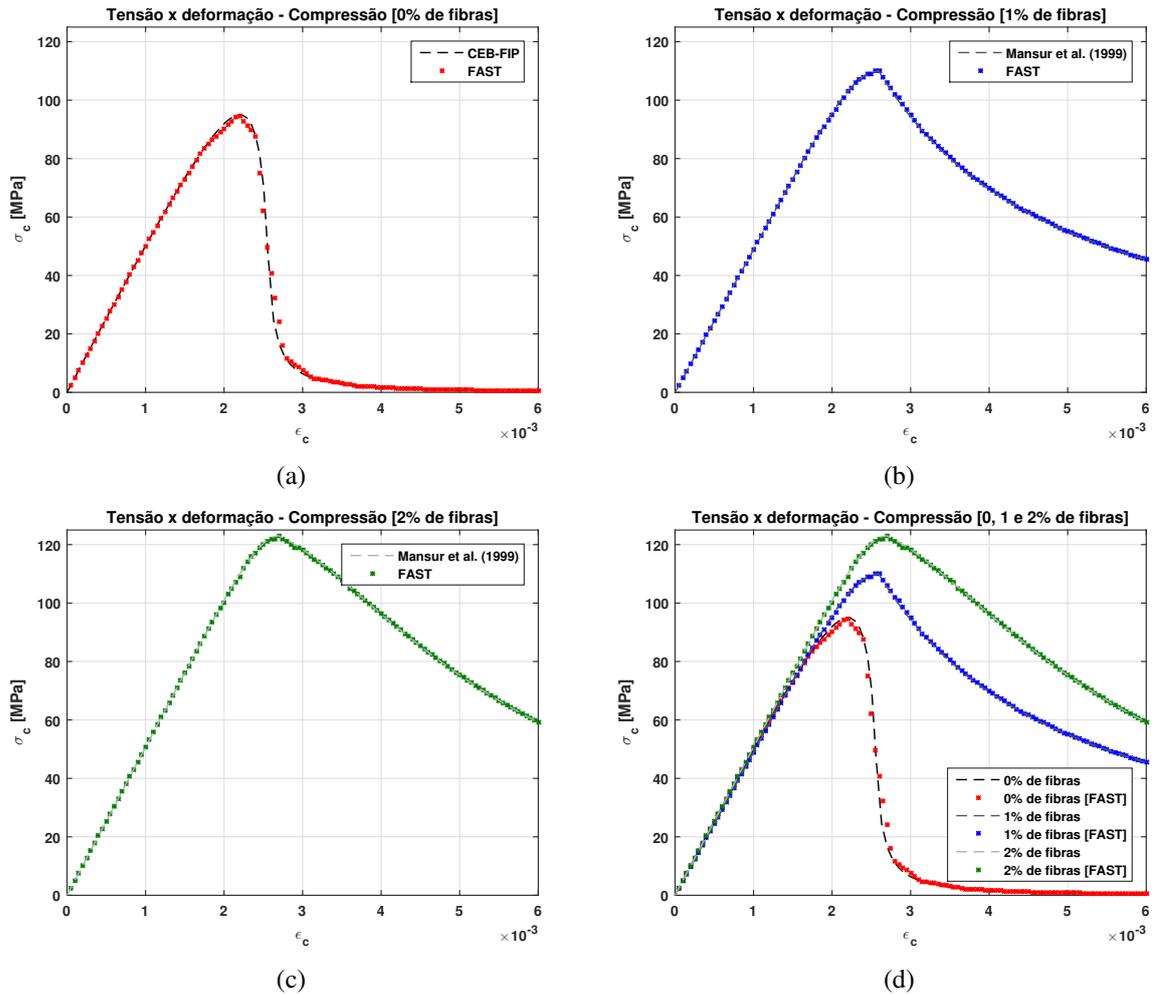
### 5.1.1 Aplicação numérica dos modelos elásticos à compressão

É feita uma análise não-linear no software FAST, mencionado anteriormente. Ela é realizada em um único elemento de barra com comprimento e área unitários submetido a deslocamentos uniaxiais prescritos de compressão, mostrado na Figura 58.



O FAST fornece a opção `%MATERIAL.NONLINEAR.ELASTIC`, que possibilita a tabulação de deformações e tensões, possibilitando traçar uma curva com vários trechos lineares (*piecewise linear*). São escolhidos quinze pontos de deformações e tensões a partir das curvas numéricas dos Modelos do CEB-FIP (1990) (CAD sem fibras) e do Modelo de Mansur *et al.* (1999) (CAD com fibras), bem como é adotado o valor da constante de Poisson  $\nu = 0,20$ . O controle de deslocamento é dado por 120 passos de  $5 \times 10^{-5}$  m com tolerância de  $10^{-4}$ , totalizando um deslocamento de 6 mm. Como o elemento possui comprimento e área unitários, deslocamentos e forças correspondem, respectivamente, a deformações e tensões. Os resultados obtidos nesse exemplo são ilustrados na Figura 59.

Figura 59 – Modelos elásticos no FAST (compressão)



Fonte: o autor.

A Figura 59 demonstra que o FAST é capaz de reproduzir fielmente a curva tensão-deformação em todos os casos. Nesse exemplo específico, não houve problemas com a convergência do modelo. É possível adicionar mais dados na tabulação, com o intuito de reproduzir a curva ainda mais exata; ou requerer mais passos ao programa, a fim de se obter mais pontos nos resultados.

## 5.2 Modelos elásticos de tensão-deformação na tração

Embora o concreto tenha resistência à tração, essa propriedade é bem menor que sua resistência à compressão. Devido a isso, a resistência à tração normalmente é desprezada no projeto de estruturas de concreto armado, com apenas o aço trabalhando a esses esforços. Entretanto, em uma análise não linear essa consideração é importante, principalmente para estruturas com baixa taxa de armadura.

Para o concreto sem fibra foi adotado o Modelo do CEB-FIP (1990) para a compressão. Neste trabalho, este modelo foi adaptado para tração, pois representa bem uma ruptura frágil. Com isso, pode-se dizer que a curva do Trecho 1, presente na Equação (2.2), passa a ser:

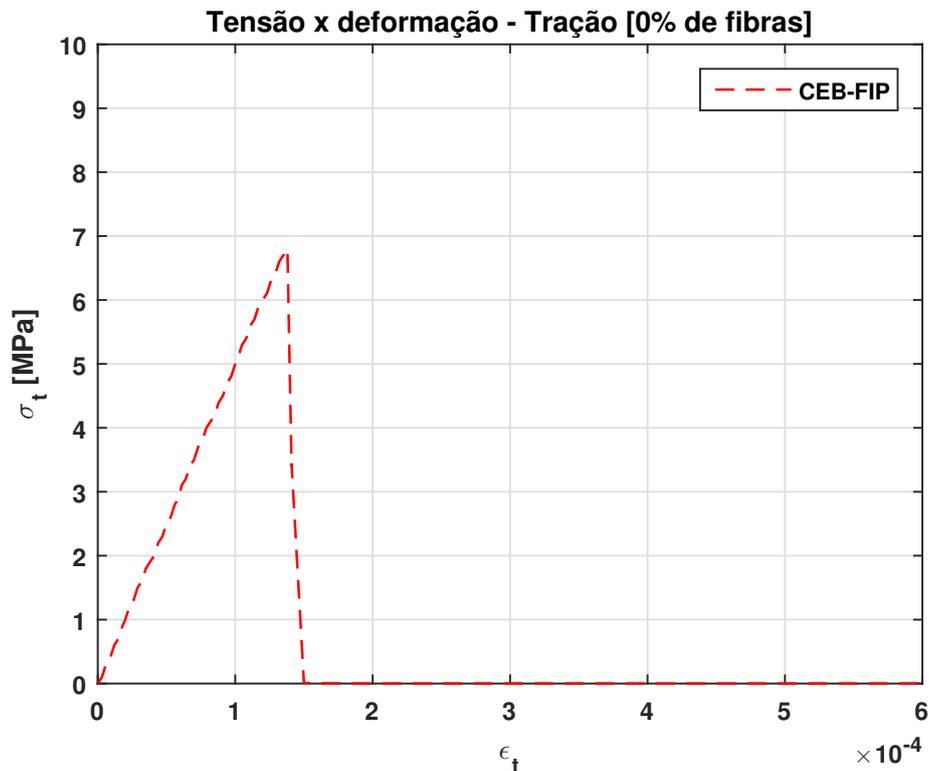
$$\frac{\sigma_t}{f_{tm}} = \frac{A\eta - \eta^2}{1 + \eta(A - 2)} \quad (5.1)$$

Além disso, a constante  $A$  é adaptada para o valor de 1,01. Isso se explica pois, na tração, o módulo secante e tangente é considerado como sendo igual. Isso faria com que  $A = 1$ , porém geraria problemas numéricos no Trecho 2. Portanto, adota-se  $A = 1,01$  como medida para evitar isso. O Trecho 2, presente na Equação (2.4), se transforma em:

$$\frac{\sigma_t}{f_{tm}} = \frac{1}{\left(\frac{\xi}{\eta_2} - \frac{2}{\eta_2^2}\right)\eta^2 + \left(\frac{4}{\eta_2} - \xi\right)\eta} \quad (5.2)$$

Sendo os parâmetros presentes na Equação (2.5) adaptados para a tração, substituindo deformações de compressão pelas de tração e  $A$  por 1,01. O valor de  $f_{tm}$  é a resistência à tração na compressão diametral  $f_{tcd}$ , apresentado na Tabela 5. A curva tensão-deformação a partir dessas alterações é ilustrada na Figura 60.

Figura 60 – Tensão-deformação na tração a partir do Modelo do CEB-FIP (1990)



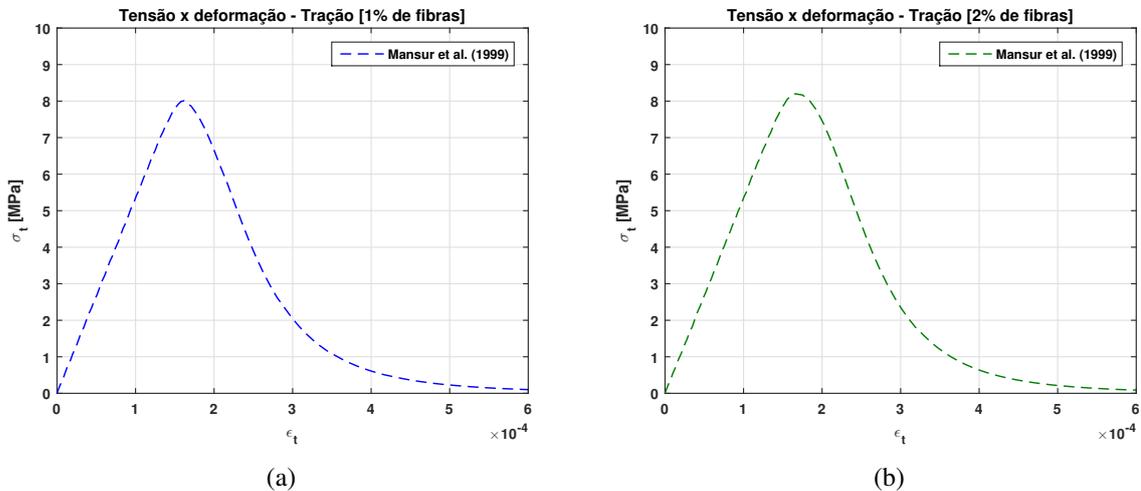
Fonte: o autor.

Já para os concretos com fibra, a opção pelo Modelo do CEB-FIP (1990) não é uma boa alternativa, devido ao aumento da ductilidade causado pelas fibras metálicas. Assim como na compressão, é utilizado o Modelo de Mansur *et al.* (1999). Porém, são necessárias algumas alterações. A primeira delas é que  $\epsilon_0$  passa a ser linear, ou seja,  $\epsilon_0 = f_{tm}/E$ . Além disso, as constantes  $k_1$  e  $k_2$ , dispostas na Equação (5.3), são adaptadas para a seguinte relação:

$$k_1 = \left(\frac{5}{f_{tcd}}\right)^{3.0} \left[1 + 2,5 \left(\frac{V_{fl}}{d}\right)^{2,5}\right]; \quad k_2 = \left(\frac{5}{f_{tcd}}\right)^{1.3} \left[1 - 0,11 \left(\frac{V_{fl}}{d}\right)^{1,1}\right] \quad (5.3)$$

onde a mudança de 50 para 5 no coeficiente de cada constante se justifica na ideia de que, em geral, a resistência à tração é dez vezes menor que a resistência à compressão. Caso o valor de 50 fosse mantido, haveria problemas numéricos na fórmula. Além desse problema, caso  $E_{it}$  continuasse seguindo sua relação,  $\beta$  seria negativo, pois  $\epsilon_0$  é obtido pela relação linear disposta anteriormente. Desta forma, adotou-se a obtenção de um  $E_{it} = 1,08E$ , a fim de se obter uma curva um pouco mais suave no Trecho 2. Com isso, é possível traçar as curvas de tensão-deformação na tração para CAD com fibra na Figura 61.

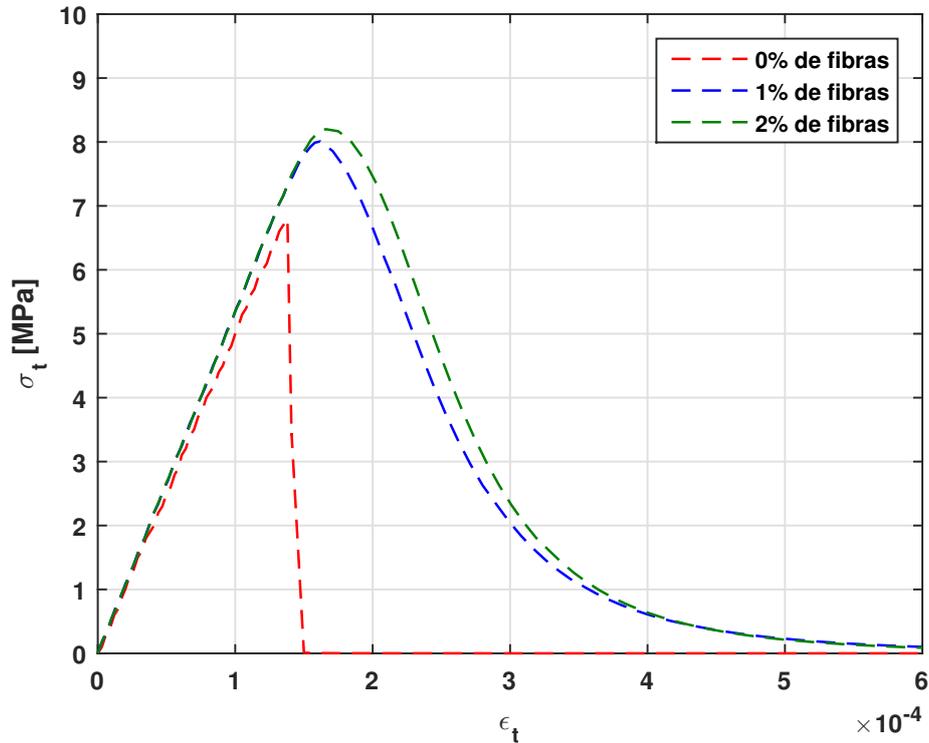
Figura 61 – Tensão-deformação na tração a partir do Modelo do Mansur *et al.* (1999)



Fonte: o autor.

Para efeito de comparação entre as curvas e melhor entendimento do efeito das fibras no CAD, as curvas tensão-deformação na tração de cada concreto são plotados na Figura 62.

Figura 62 – Tensão-deformação na tração para diferentes teores de fibra



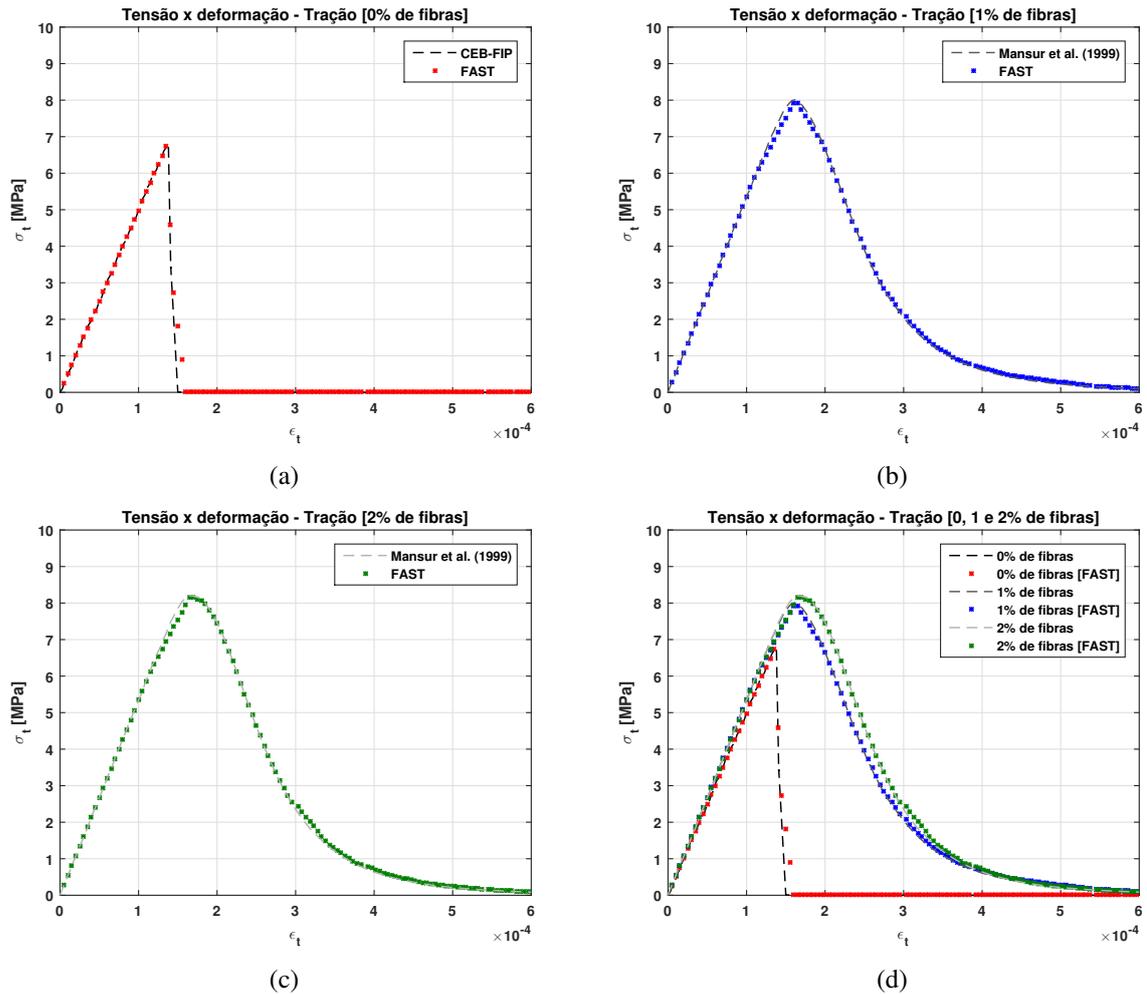
Fonte: o autor.

A Figura 62 ilustra um ligeiro aumento na rigidez dos CADs com fibras devido às adaptações em  $E_{it}$ . Esse efeito não foi verificado nos resultados experimentais apresentados no Capítulo 4, mas trata-se de um artifício matemático para a obtenção de curva. No CAD sem fibras, a ruptura é bastante frágil, assim como na compressão. Quando há adição de fibras, a ruptura se torna um pouco mais dúctil, mas não tanto quanto na compressão. Isso se deve ao fato de que o concreto, por si só, não resiste tão bem à tração quanto à compressão e o percentual de fibras é pequeno.

### 5.2.1 Aplicação numérica dos modelos elásticos à tração

Analogamente à aplicação numérica disposta na Seção 5.1.1, é realizada uma análise não-linear no comportamento do CAD à tração. Os resultados obtidos são dispostos na Figura 63. Assim como na compressão, o FAST se mostra uma excelente ferramenta para reproduzir o comportamento do CAD na tração.

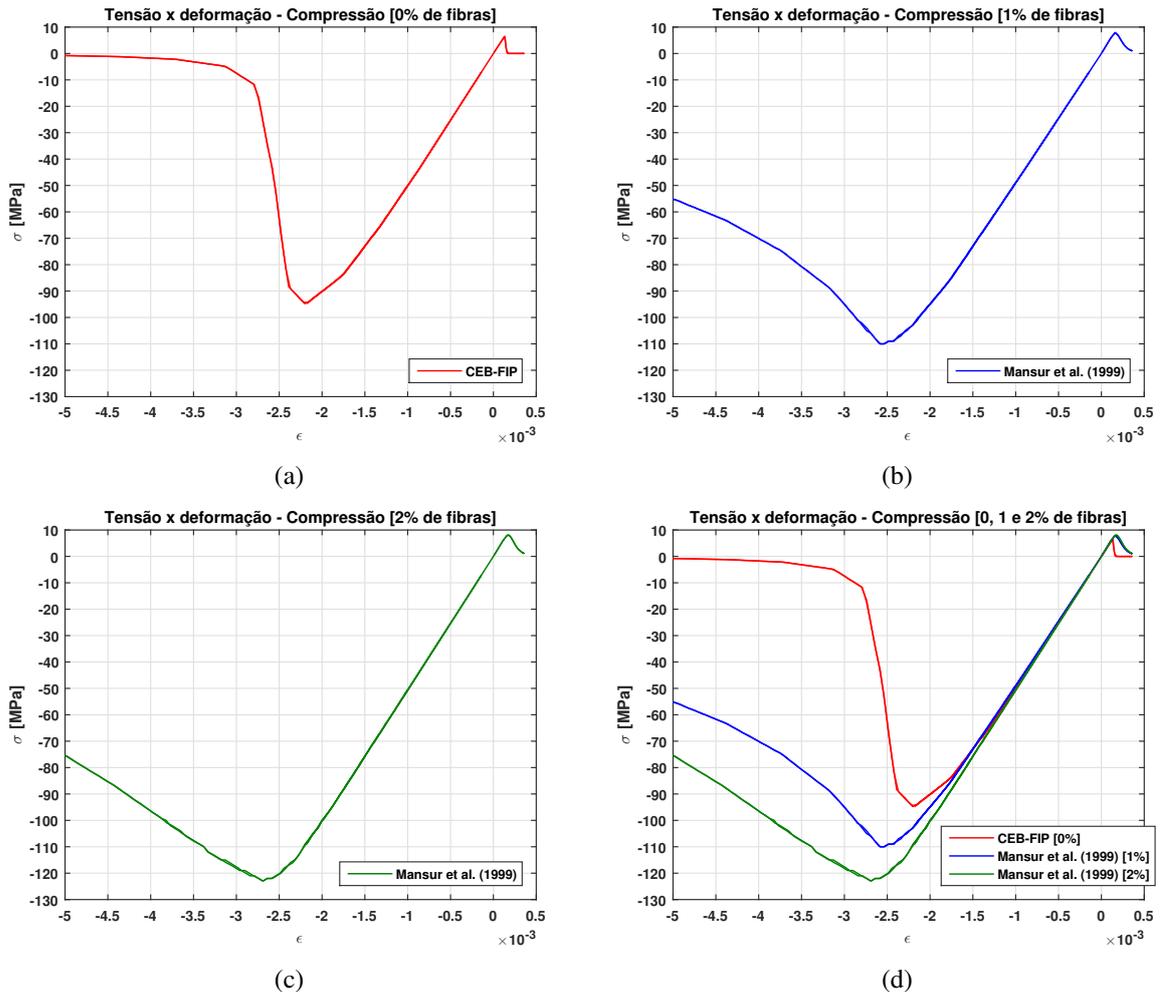
Figura 63 – Modelos elásticos no FAST (tração)



Fonte: o autor.

A aplicação dos modelos elásticos ao CAD evidencia a diferença no comportamento do concreto à compressão e à tração quando se considera a curva tensão-deformação completa. A resistência e a deformação de pico na compressão são bem maiores que na tração e isso é observado na Figura 64.

Figura 64 – Tensão-deformação na compressão e na tração em modelos elásticos



Fonte: o autor.

### 5.3 Aplicação numérica no $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015)

Os  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) é descrito na Seção 2.6. Seus parâmetros dependem de curvas tensão-deformação e caracterização obtidos em ensaios experimentais. Neste trabalho, alguns parâmetros são obtidos diretamente a partir dos ensaios, mas outros são estimados com base nas curvas obtidas dos modelos elásticos do CEB-FIP (1990) para o concreto sem fibras e de Mansur *et al.* (1999) para o concreto com fibras. A análise é feita no FAST com o mesmo exemplo da Figura 58. O programa possui implementação desse modelo com a opção %MATERIAL.DAMAGE.MAZARS2 (MATIAS, 2018).

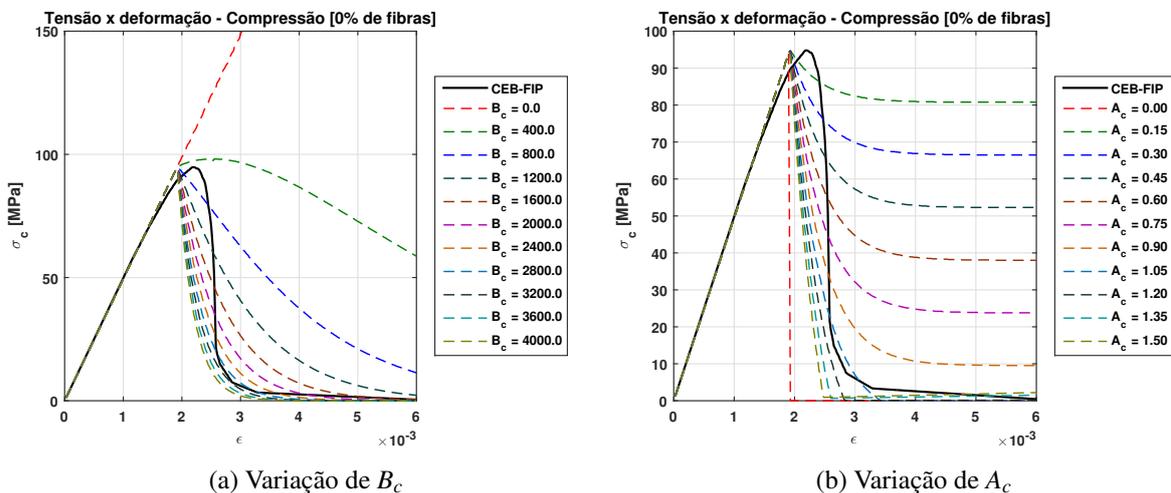
#### 5.3.1 Tensão-deformação na compressão - $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015)

Os parâmetros do material  $A_c$  e  $B_c$  são obtidos a partir da adequação às curvas provenientes de modelos elásticos. Faz-se necessário realizar um estudo paramétrico variando

$B_c$  e  $A_c$ , nessa ordem. Segundo Matias (2018), o efeito da variação de  $B_c$  na curva é bem maior que o de  $A_c$ , por isso é recomendável seguir essa ordem.

A partir do ensaio da Seção 3.2.4 sabe-se que o módulo de elasticidade do CAD em estudo equivale a 49,5 MPa, valor esse que serve como parâmetro para o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015). Além disso, é necessário fornecer o valor da resistência limite  $f_{c0}$  em que começa o dano (*threshold*). São considerados os valores de  $f_c$  obtidos experimentalmente na Seção 4.1. No caso do concreto sem fibras, a curva elástica que melhor exprime o comportamento do material é a do CEB-FIP (1990). A partir dessa informação, é possível ajustar os parâmetros do material  $B_c$  e  $A_c$  com o estudo paramétrico. Esse estudo culmina nos gráficos da Figura 65.

Figura 65 – Tensão-deformação na compressão a partir do  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) para CAD sem fibras

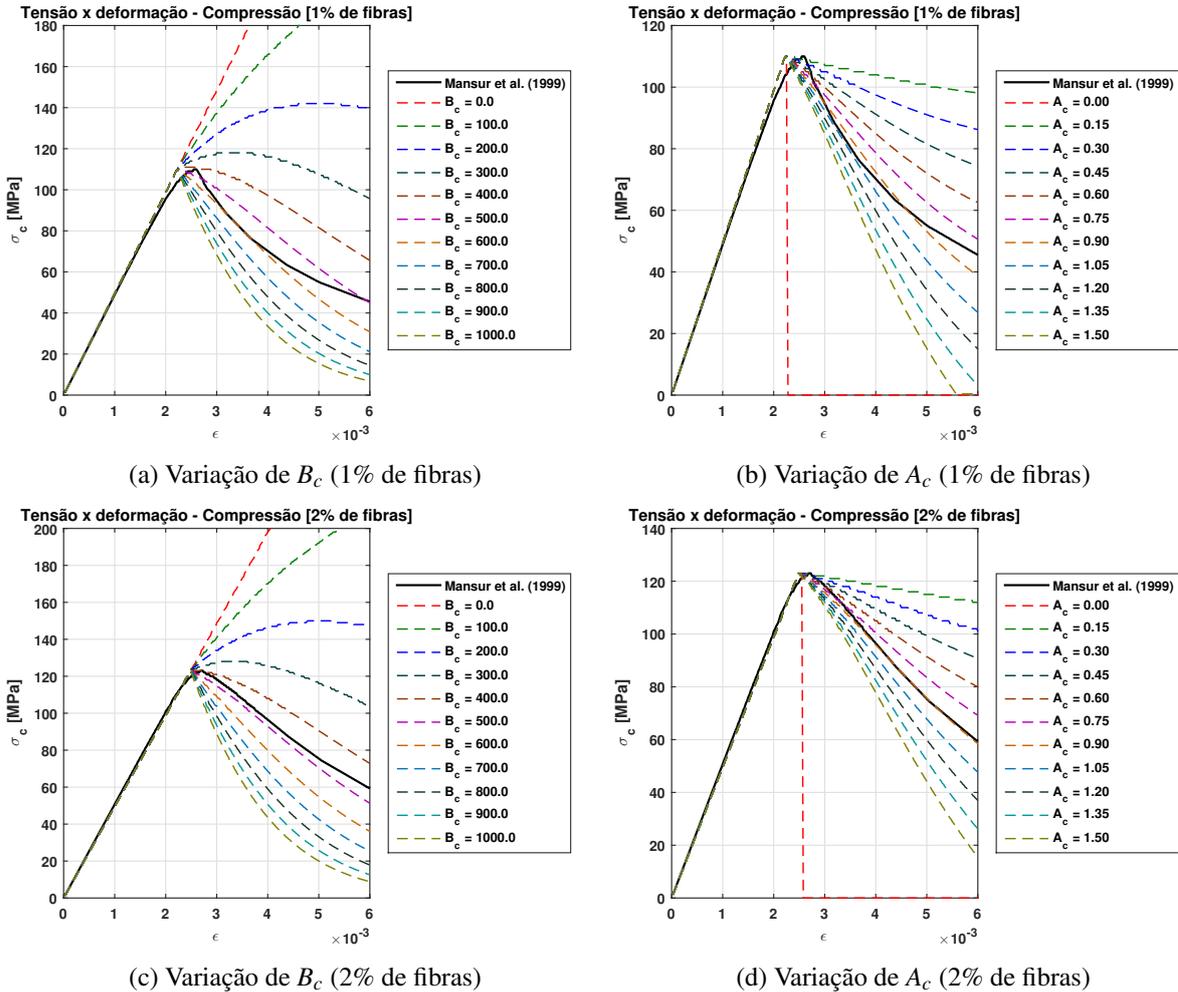


Fonte: o autor.

A Figura 65a mostra a variação de  $B_c$  com  $A_c = 1,00$ . Como esperado, percebe-se uma maior variação na curva com a mudança no valor de  $B_c$ . À medida que aumenta-se esse parâmetro, a curva apresenta uma ruptura mais frágil, condizente com o comportamento do CAD. Adota-se como a curva mais semelhante à do Modelo do CEB-FIP (1990) a referente a  $B_c = 2400$ . A partir desse valor, varia-se o valor de  $A_c$ , percebendo uma mudança no comportamento pós-pico. Quanto maior o valor, menor o valor final de tensão. O valor  $A_c = 1,05$  indica a melhor adequação da curva.

Procedimento análogo é adotado na obtenção das curvas de tensão-deformação para o CAD com fibras. Porém, a curva que serve como base é a do Modelo de Mansur *et al.* (1999), justamente por esse modelo representar o acréscimo de fibras. A Figura 66 explicita os estudos paramétricos realizados.

Figura 66 – Tensão-deformação na compressão a partir do  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) para CAD com fibras



Fonte: o autor.

A adequação da curva do  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) é bem melhor para o concreto com fibras que para o concreto sem fibras. Isso se deve à maior ductilidade com o acréscimo das fibras. A Tabela 8 mostra os valores adotados para os parâmetros de Mazars *et al.* (2015) para cada tipo de concreto.

Tabela 8 – Parâmetros de Mazars *et al.* (2015) - compressão

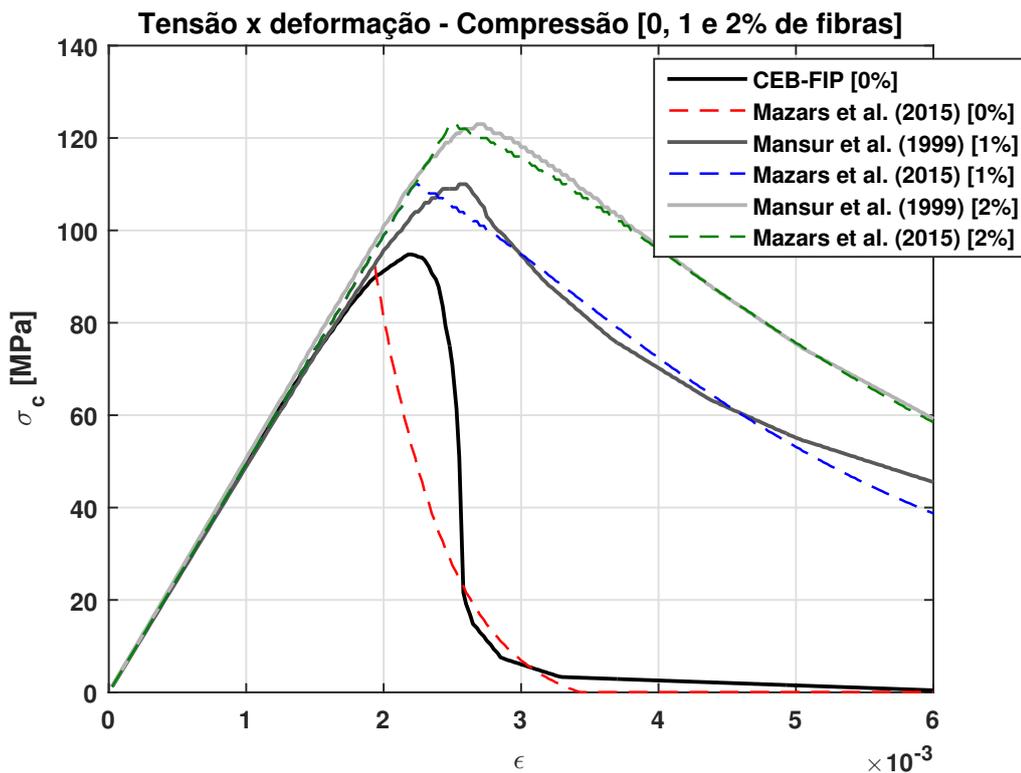
| Teor de fibras [%] | $A_c$ | $B_c$ | $f_{c0}$ | E        | $\nu$ |
|--------------------|-------|-------|----------|----------|-------|
| 0                  | 1,05  | 2400  | 95 MPa   | 49,5 GPa | 0,20  |
| 1                  | 0,90  | 600   | 110 MPa  | 49,5 GPa | 0,20  |
| 2                  | 0,90  | 500   | 123 MPa  | 49,5 GPa | 0,20  |

Fonte: o autor.

A partir dos parâmetros da Tabela 8, é possível traçar os gráficos da Figura 67. Percebe-se que o comportamento em muito se assemelha ao comportamento do concreto con-

vencional à tração, com um primeiro trecho praticamente linear e o segundo trecho com uma ruptura se tornando mais dúctil com a presença de fibras. Para a ausência de fibras, o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) parece não refletir muito bem o Modelo do CEB-FIP (1990). Isso se deve ao fato da ruptura nesse último modelo ser muito frágil, sendo difícil para os parâmetros do Modelo de Mazars *et al.* (2015) reproduzi-la de maneira adequada.

Figura 67 – Tensão-deformação na compressão pelo  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015)



Fonte: o autor.

### 5.3.2 Tensão-deformação na tração - $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015)

É realizado um estudo paramétrico análogo ao estudo da Seção 5.3.1, porém variando-se os parâmetros  $B_t$  e  $A_t$ . Os valores do *threshold*  $f_{t0}$  são as resistências à tração obtidas na Seção 4.2. As variações se dão de maneira análoga às que ocorreram na compressão. A Tabela 9 mostra os valores adotados para os parâmetros de Mazars *et al.* (2015) para cada tipo de concreto.

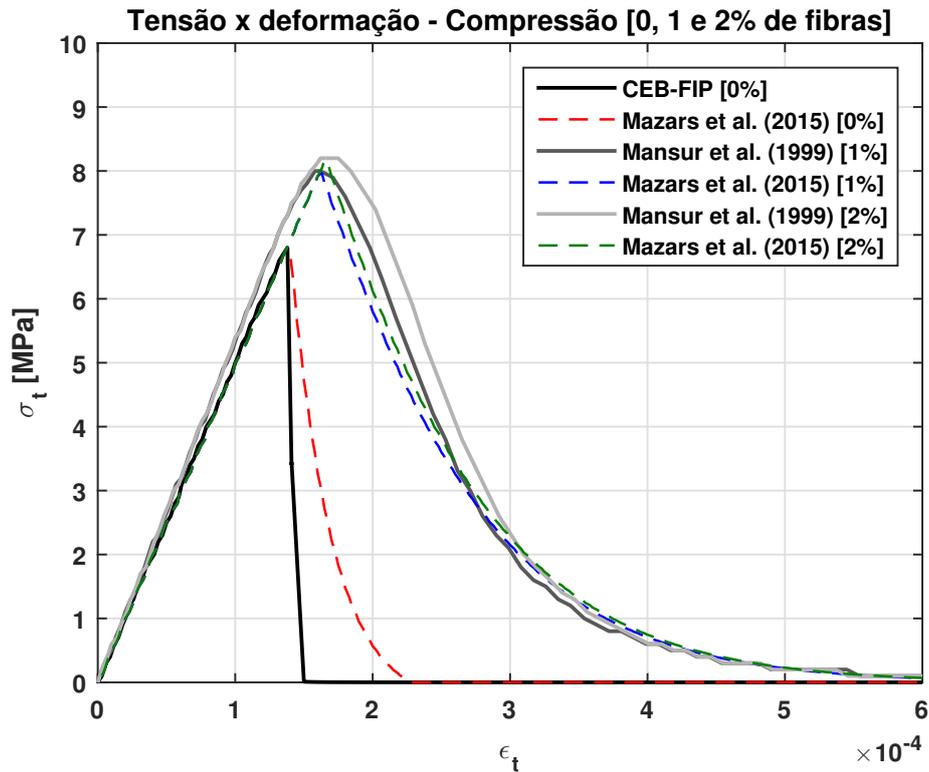
Tabela 9 – Parâmetros de Mazars *et al.* (2015) - tração

| Teor de fibras [%] | $A_t$ | $B_t$ | $f_{t0}$ | E        | $\nu$ |
|--------------------|-------|-------|----------|----------|-------|
| 0                  | 1,05  | 40000 | 6,89 MPa | 49,5 GPa | 0,20  |
| 1                  | 1,00  | 14000 | 8,01 MPa | 49,5 GPa | 0,20  |
| 2                  | 1,00  | 14000 | 8,20 MPa | 49,5 GPa | 0,20  |

Fonte: o autor.

A partir dos parâmetros da Tabela 9, é possível traçar os gráficos da Figura 68. Assim como na compressão, a adequação da curva do  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) é melhor para o concreto com fibras que para o concreto sem fibras. Isso se deve à maior ductilidade obtida com a incorporação das fibras metálicas no concreto. Entretanto, as curvas da tração não se ajustam tão bem quanto na compressão. Percebe-se que o comportamento também se assemelha ao comportamento do concreto convencional à tração, com um primeiro trecho praticamente linear e o segundo trecho com uma ruptura se tornando mais dúctil com a presença de fibras.

Para a ausência de fibras, o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) parece não refletir muito bem o Modelo do CEB-FIP (1990). Na prática, o CAD sem fibras na tração simplesmente se rompe ao atingir a tensão máxima à tração. A curva expressa é apenas uma representação numérica, uma vez que essa queda abrupta representaria problemas de convergência. Diferentemente do que ocorre na compressão, o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) não representa tão bem as curvas empíricas, embora as represente de maneira razoável.

Figura 68 – Tensão-deformação na tração pelo  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015)

Fonte: o autor.

#### 5.4 Aplicação numérica no Modelo de Lee e Fenves (1998)

Assim como o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015), o Modelo de Lee e Fenves (1998), descrito na Seção 2.7, depende de parâmetros obtidos por ensaios experimentais e baseados nas curvas dos modelos do CEB-FIP (1990) e de Mansur *et al.* (1999). A análise também segue o exemplo da Figura 58. O FAST possui implementação desse modelo com a opção %MATERIAL.PLASTIC.DAMAGE.LEEFENVES (MATIAS, 2018).

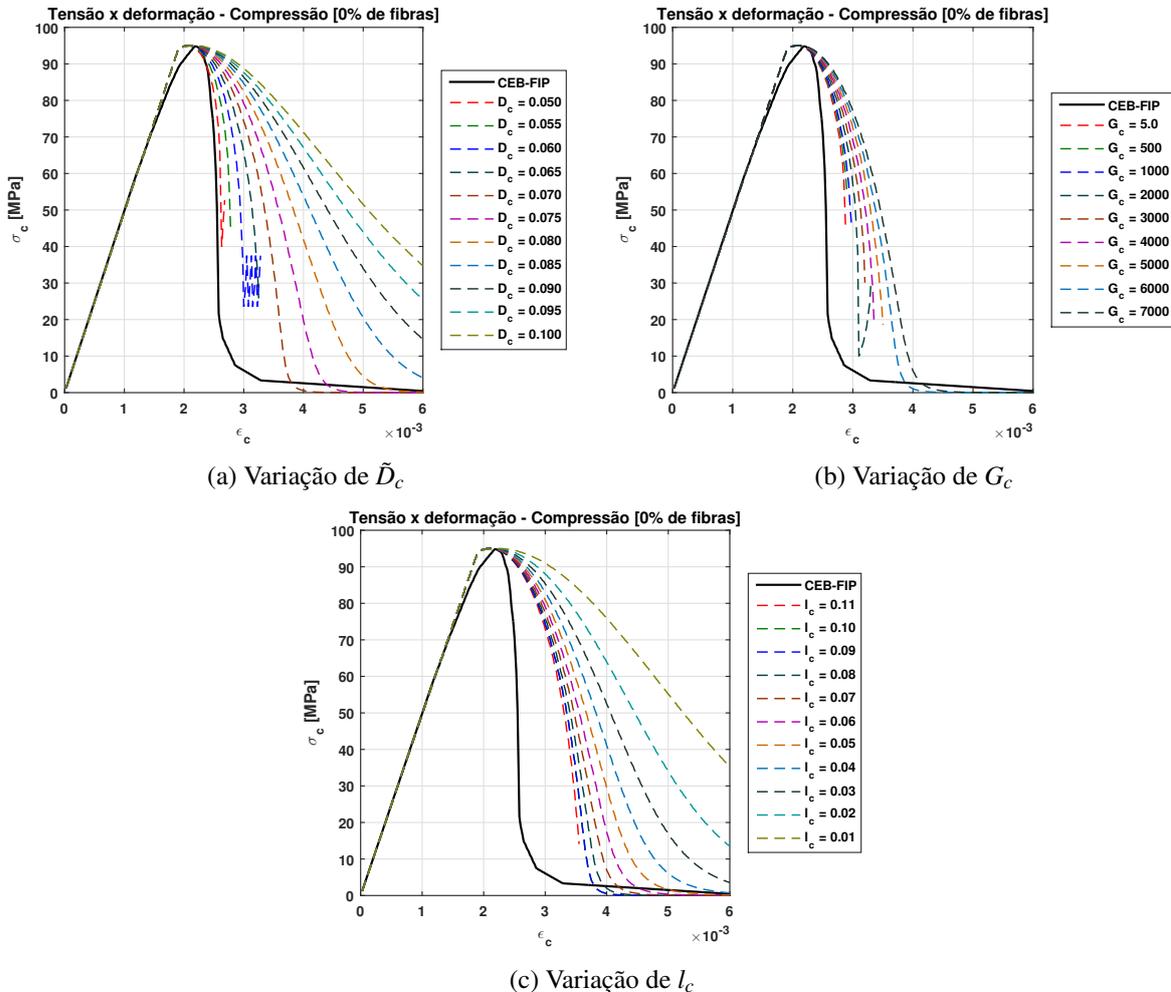
##### 5.4.1 Tensão-deformação na compressão - Modelo de Lee e Fenves (1998)

Esse modelo apresenta uma maior complexidade em sua formulação e consequentemente em seus parâmetros. Os valores de  $f_{c0}$  para cada CAD são os apresentados na Tabela 4. O valor de  $a_c$  é fixado em 1,20. Analogamente à Seção 5.3.1, variam-se os demais parâmetros do Modelo de Lee e Fenves (1998) a fim de se obter o comportamento do CAD à compressão.

Inicialmente varia-se o valor de  $\tilde{D}_c$ , parâmetro dependente de ensaios de carregamento e descarregamento, conforme dito na Seção 2.7.3. Os valores iniciais de  $G_c$  e  $l_c$  são 5690 e 0,1, respectivamente. Seu valor influencia consideravelmente no valor da relação  $d_c/b_c$ , alterando o formato da curva da tensão-deformação. Após a variação de  $\tilde{D}_c$ , varia-se  $G_c$ , parâmetro

diretamente relacionado com a área abaixo da curva no caminho pós-pico. Por último, varia-se o valor do comprimento característico  $l_c$ . A Figura 69 ilustra esse estudo para o CAD sem fibras.

Figura 69 – Tensão-deformação na compressão a partir do Modelo de Lee e Fenves (1998) para CAD sem fibras

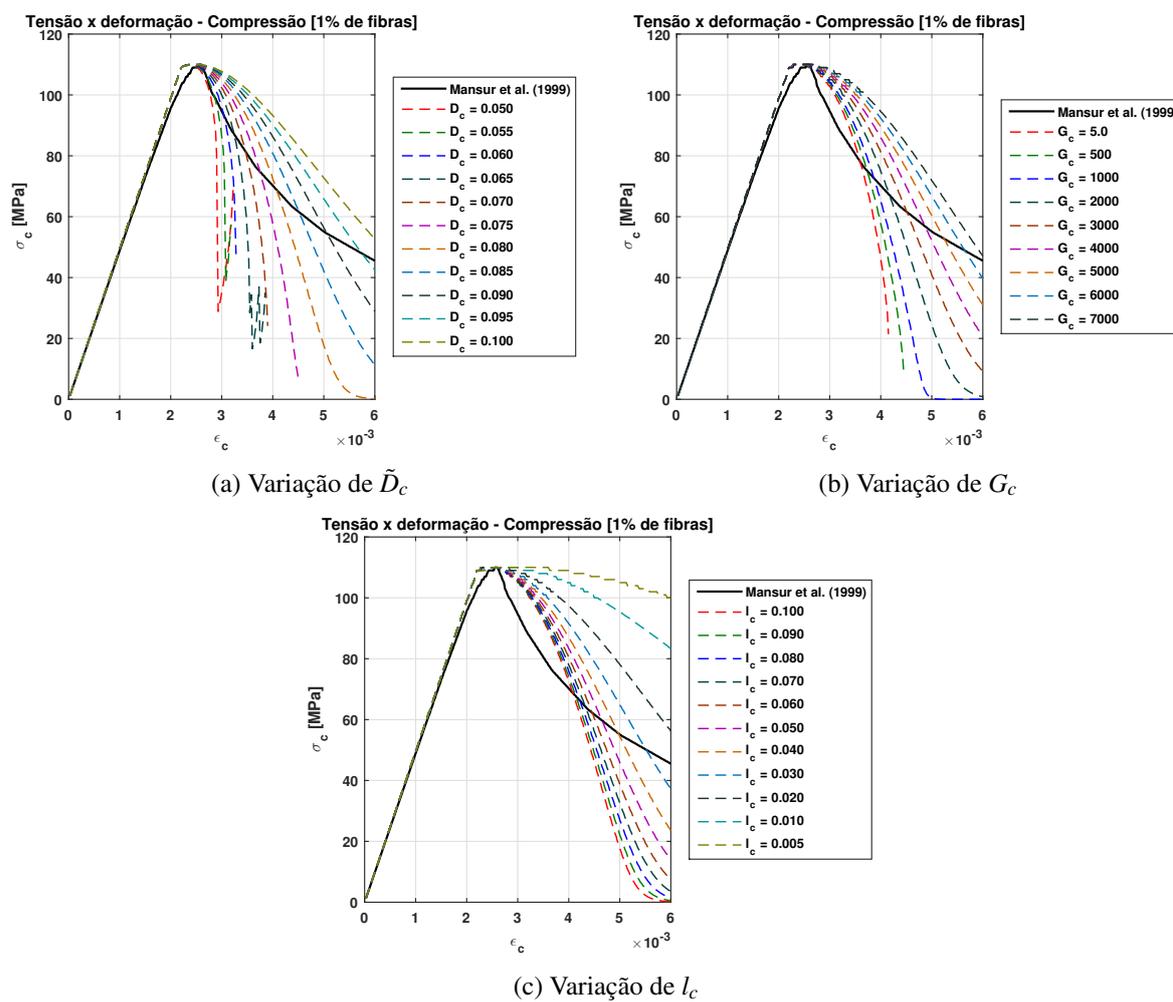


Fonte: o autor.

Percebe-se que nas Figuras 69a e 69b o FAST não consegue obter o caminho de equilíbrio até o final do deslocamento prescrito devido a problemas de convergência. Isso é ocasionado por algum problema numérico devido à grande inclinação no *softening*. Isso faz com que o referido modelo consiga demonstrar uma ruptura frágil do CAD, mas não tão frágil como o Modelo do CEB-FIP (1990) representa.

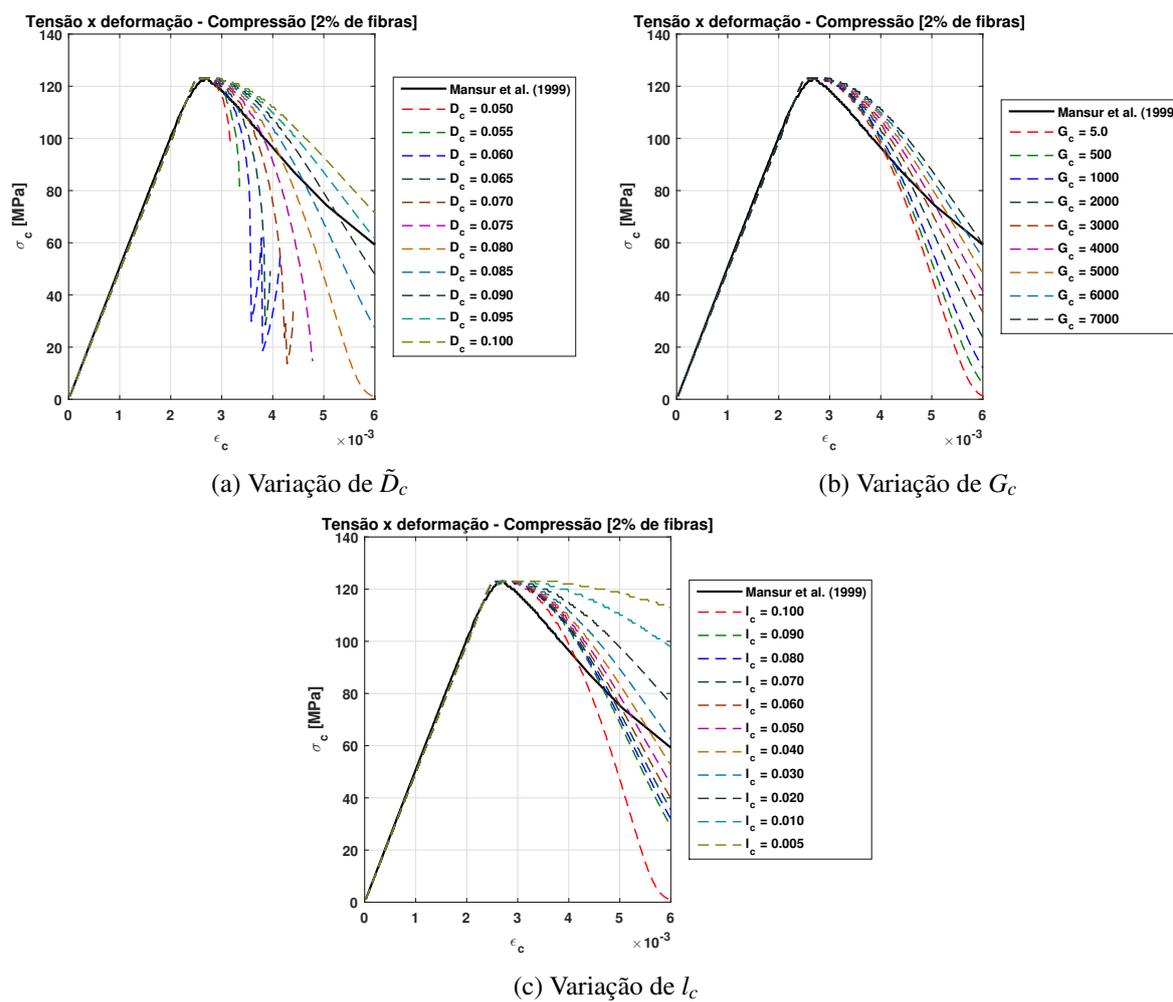
Já para os CADs com fibras, a análise é feita em cima das curvas dos modelos elásticos de Mansur *et al.* (1999). A Figura 70 demonstra o estudo paramétrico para o teor de 1% de fibras, enquanto que a Figura 71 ilustra a mesma análise para 2%.

Figura 70 – Tensão-deformação na compressão a partir do Modelo de Lee e Fenves (1998) para CAD com 1% fibras



Fonte: o autor.

Figura 71 – Tensão-deformação na compressão a partir do Modelo de Lee e Fenves (1998) para CAD com 2% fibras



Fonte: o autor.

As Figuras 70 e 71 demonstram a mesma dificuldade encontrada no *softening* presente na Figura 69. Embora os resultados obtidos para o CAD com fibras sejam melhores que para o CAD sem fibras, as curvas de Lee e Fenves (1998) reproduzem uma ruptura mais dúctil que o do Modelo de Mansur *et al.* (1999), com deformações maiores que as do segundo modelo no Trecho 2. A Tabela 10 mostra os valores dos parâmetros que melhor representam o comportamento do CAD.

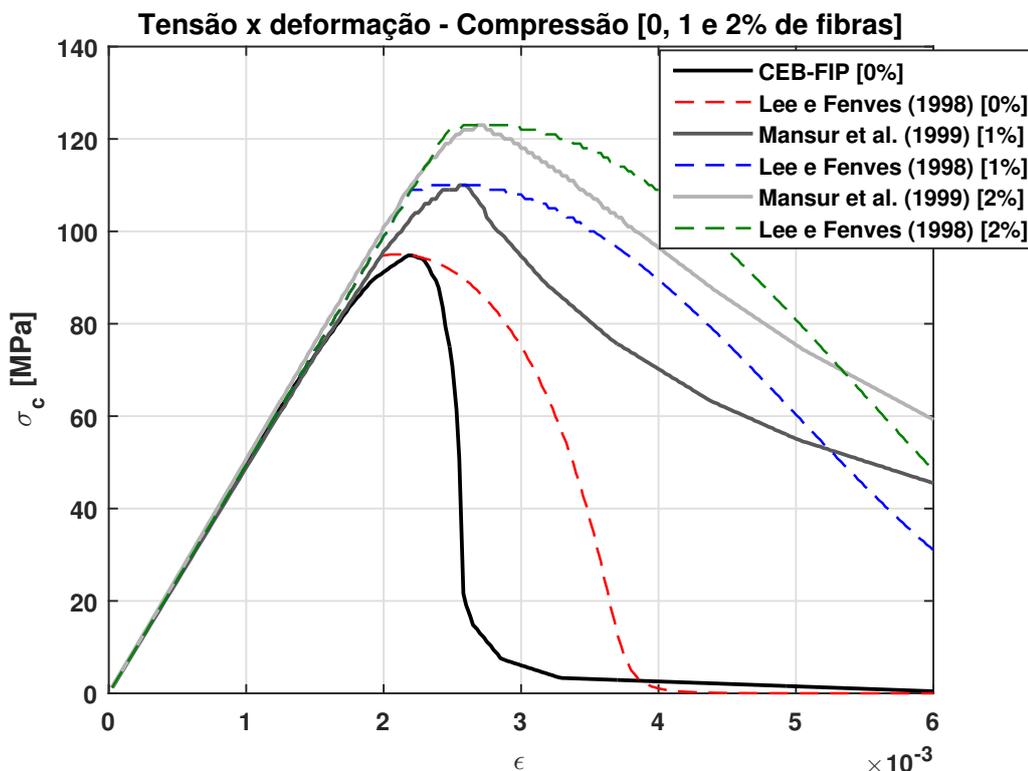
Tabela 10 – Parâmetros de Lee e Fenves (1998) - compressão

| Teor de fibras [%] | E        | $f_{c0}$ | $f'_c$    | $a_c$ | $\tilde{D}_c$ | $G_c$ | $l_c$ |
|--------------------|----------|----------|-----------|-------|---------------|-------|-------|
| 0                  | 49,5 GPa | 95 MPa   | 94,22 MPa | 1,20  | 0,080         | 6000  | 0,03  |
| 1                  | 49,5 GPa | 110 MPa  | 109,1 MPa | 1,20  | 0,080         | 6000  | 0,03  |
| 2                  | 49,5 GPa | 123 MPa  | 122,0 MPa | 1,20  | 0,085         | 6000  | 0,04  |

Fonte: o autor.

A partir dos parâmetros da Tabela 10, é possível traçar os gráficos da Figura 72. O modelo parece não representar muito bem a ruptura frágil do CAD sem fibras. Além disso, não consegue representar a ductilidade característica do Modelo de Mansur *et al.* (1999), apresentando tensões maiores que este modelo. Estes resultados indicam que o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) parece representar melhor o CAD na compressão que o Modelo de Lee e Fenves (1998).

Figura 72 – Tensão-deformação na compressão pelo  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015)



Fonte: o autor.

#### 5.4.2 Tensão-deformação na tração - Modelo de Lee e Fenves (1998)

Assim como na Seção 5.4.1, é feito um estudo paramétrico do modelo. Porém, diferentemente do estudo da compressão, na tração o parâmetro  $a_t$  não possui relação com a resistência do CAD. Ele não possui significado físico e se relaciona com  $d_t/b_t$  e  $\tilde{D}_t$ . Nesse estudo, o valor de  $\tilde{D}_t$  é fixado em 0,50. Variam-se, na sequência, os valores de  $d_t/b_t$ ,  $G_t$  e  $l_t$ . Com isso, chega-se à Tabela 11.

Tabela 11 – Parâmetros de Lee e Fenves (1998) - tração

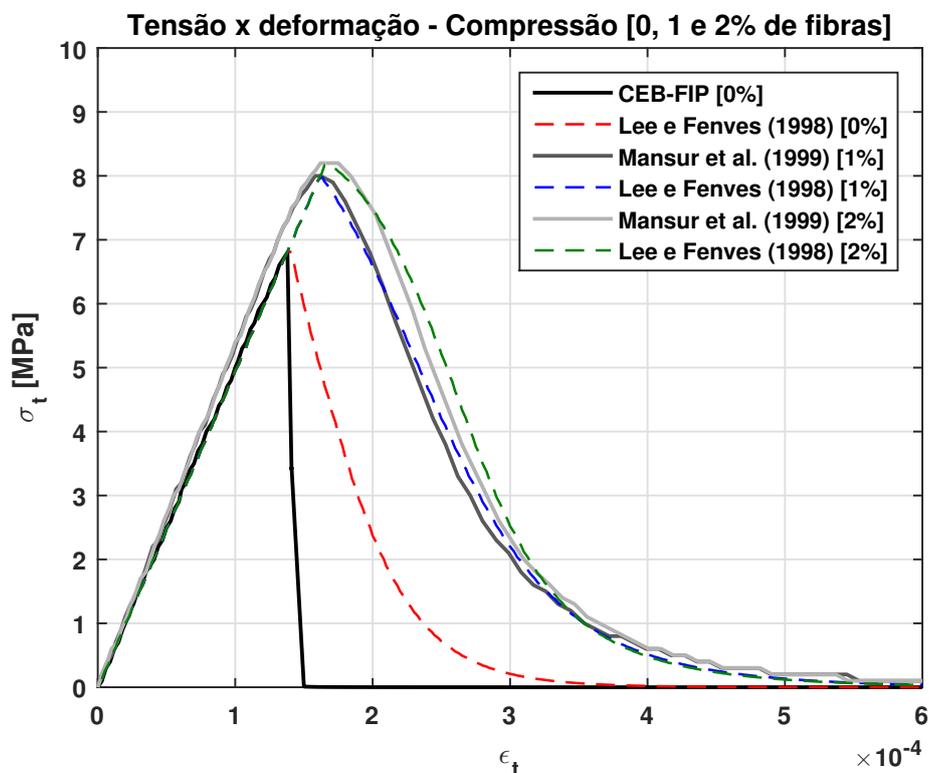
| Teor de fibras [%] | E        | $f_{t0}$ | $a_t$ | $\tilde{D}_t$ | $G_t$ | $l_t$ |
|--------------------|----------|----------|-------|---------------|-------|-------|
| 0                  | 49,5 GPa | 6,89 MPa | 0,212 | 0,50          | 40    | 0,10  |
| 1                  | 49,5 GPa | 8,01 MPa | 0,514 | 0,50          | 95    | 0,10  |
| 2                  | 49,5 GPa | 8,20 MPa | 0,770 | 0,50          | 105   | 0,10  |

Fonte: o autor.

A partir da Tabela 11 é possível traçar as curvas da Figura 73. Percebe-se que o Modelo de Lee e Fenves (1998) representa muito bem as curvas empíricas de tensão-deformação do CAD sujeito à tração, diferentemente da compressão. Esses resultados mostram que o Modelo de Lee e Fenves (1998) representa melhor o CAD na tração que o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*,

2015).

Figura 73 – Tensão-deformação na tração pelo Modelo de Lee e Fenves (1998)

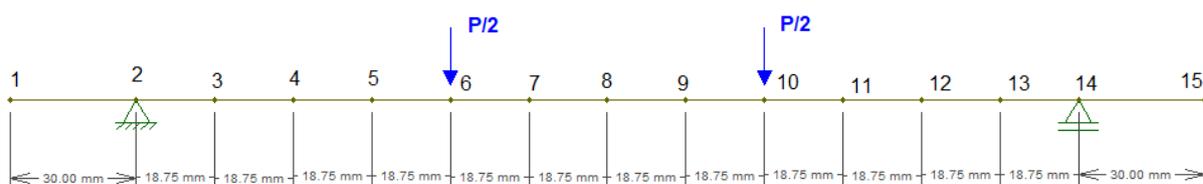


Fonte: o autor.

### 5.5 Simulação do ensaio de flexão de 4 pontos

Realiza-se uma análise no FAST simulando o ensaio de 4 pontos da Seção 3.2.5 para efeitos de simular o comportamento do CAD nesse experimento. O modelo utilizado é representado por elementos de pórtico plano (MATIAS, 2018) e sua disposição é ilustrada na Figura 74. Há aplicação de forças concentradas nos nós 6 e 10 e é feito um controle de deslocamento no nó 8.

Figura 74 – Modelo para simulação do ensaio de flexão pura

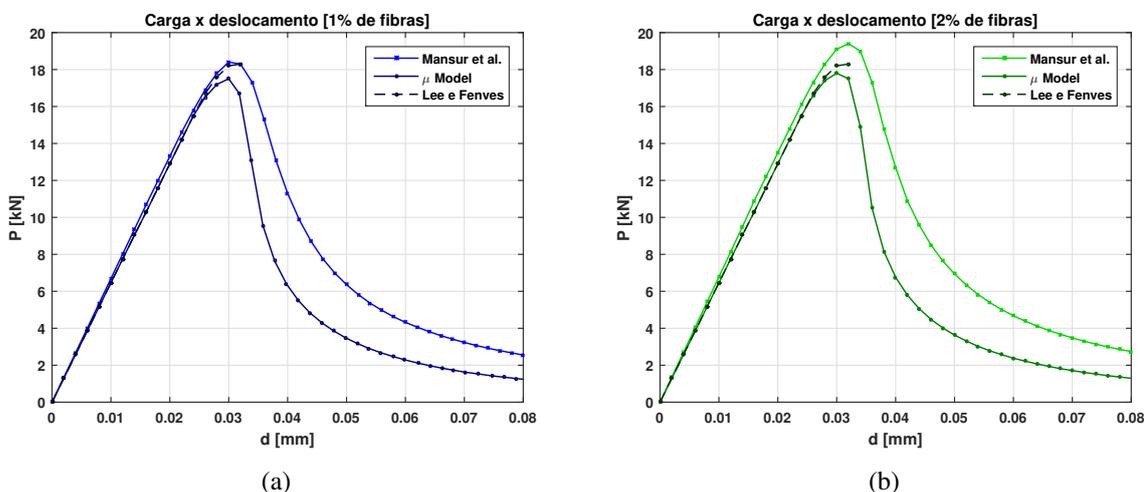


Fonte: o autor.

Como o CAD sem fibras rompe em seu carregamento pico, ou seja, não há caminho

pós-pico, essa análise é realizada apenas no CAD com fibras. A Figura 75 apresenta a relação carga total aplicada pelo deslocamento no nó 8.

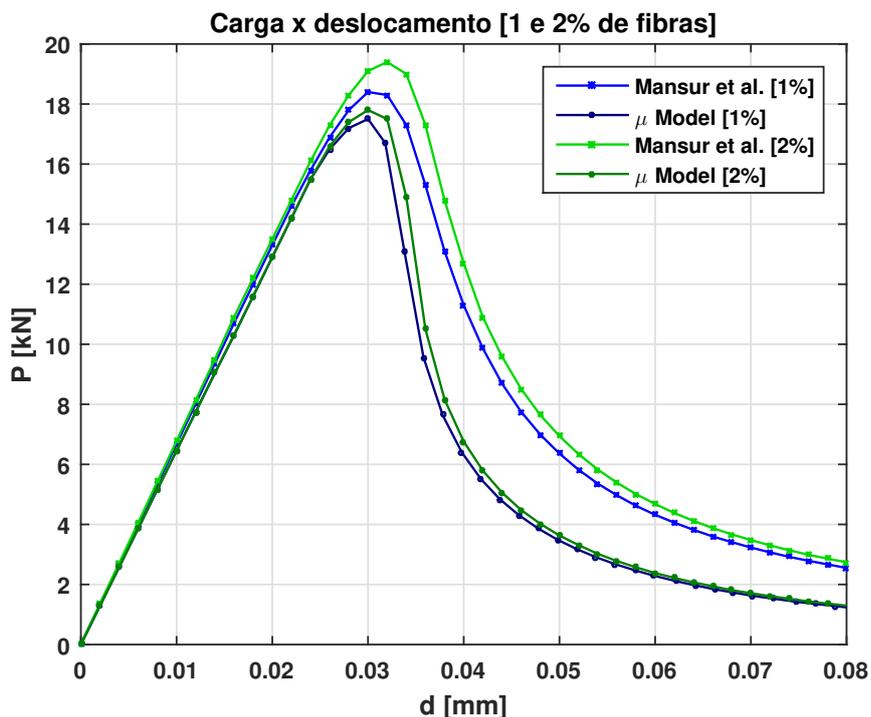
Figura 75 – Comportamento do CAD com (a) 1% e (b) 2% de fibras na simulação do ensaio de flexão pura



Fonte: o autor.

A primeira observação acerca da Figura 75 é que o Modelo de Lee e Fenves (1998) não consegue reproduzir o *softening* nesse exemplo. Isso pode ser explicado por conta de uma provável incompatibilidade entre comprimento característico e a energia de fratura. Uma possível correção disso seria um maior refinamento da malha. Para os demais modelos, percebe-se que a curva de Mansur *et al.* (1999) apresenta uma maior capacidade de carga. Isso ocorre pois a curva de tensão-deformação desse modelo apresenta uma ruptura mais dúctil que a apresentada pelo  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015). Isso é evidenciado na Figura 76.

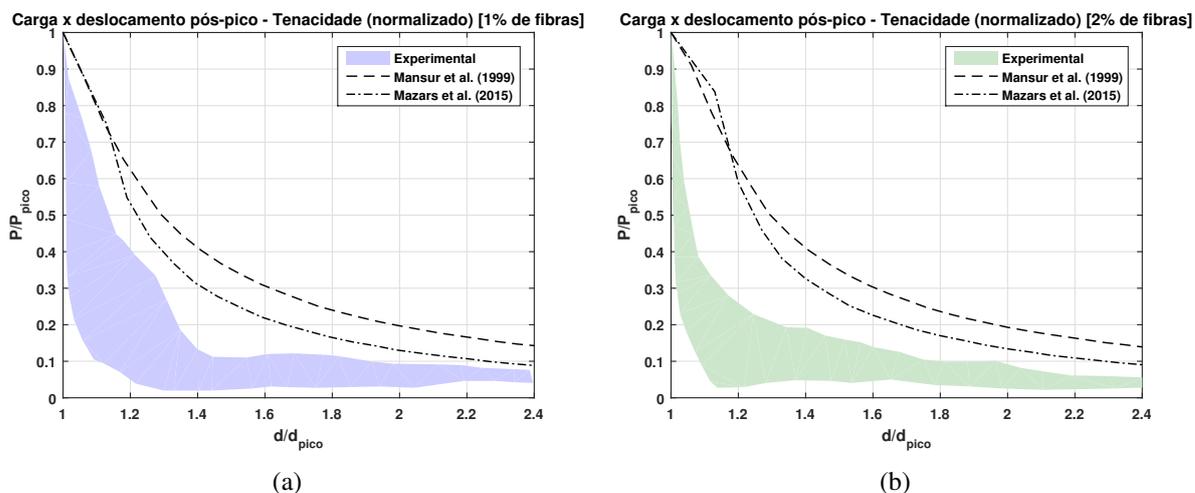
Figura 76 – Comportamento do CAD na simulação do ensaio de flexão pura



Fonte: o autor.

A fim de se obter uma comparação com os resultados obtidos na Seção 4.4, é feita a normalização dos resultados apresentados na Figura 75 em relação ao carregamento de pico e ao deslocamento de pico, semelhante ao realizado na Seção 4.4. Com isso, é possível plotar os gráficos da Figura 77. Percebe-se que a simulação representa uma resposta um pouco mais rígida que a obtida em laboratório. Apesar disso, há uma semelhança na curva, mostrando que o Modelo de Mansur *et al.* (1999) e o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) apresentam uma boa adequação ao comportamento experimental do CAD com fibras. O  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) parecem estar mais próximos dos resultados experimentais.

Figura 77 – Tensão-deformação pós-pico normalizada para modelos elásticos na simulação do ensaio de flexão pura

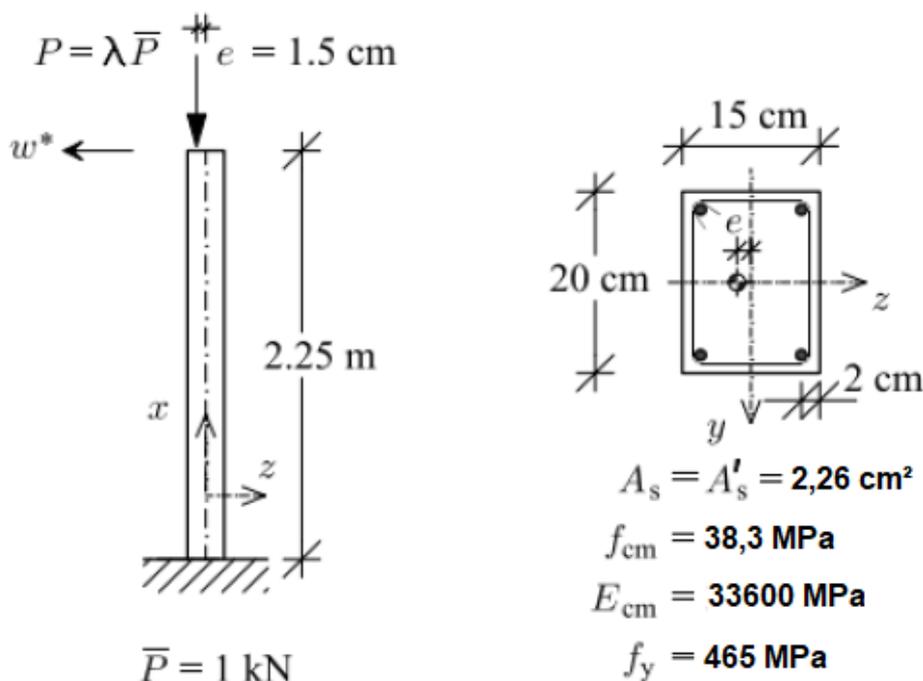


Fonte: o autor.

## 5.6 Simulação de pilar com carga excêntrica

Espion (1993) realizou um experimento aplicando uma carga excêntrica  $P$  a um pilar de concreto armado. Esse estudo serve como *benchmarking* para testes de modelos numéricos para concreto armado (BRATINA *et al.*, 2004; PARENTE *et al.*, 2014; MATIAS, 2018). A disposição do ensaio é apresentada na Figura 79.

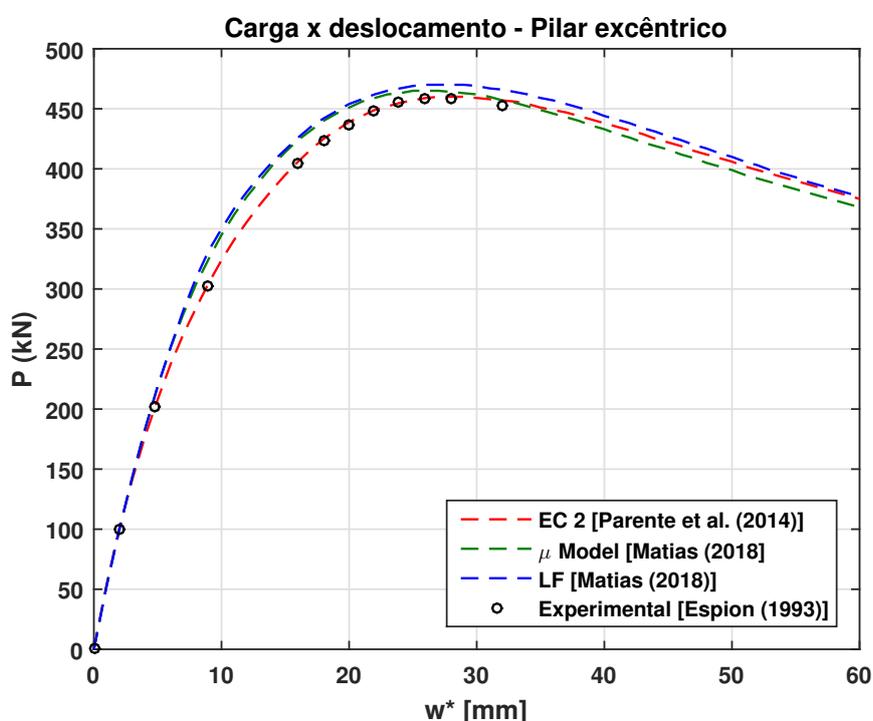
Figura 78 – Geometria e propriedades dos materiais do pilar excêntrico



Fonte: adaptada de Bratina *et al.* (2004).

Parente *et al.* (2014) validaram a implementação de modelos constitutivos não lineares elásticos de concreto a partir de uma formulação corrotacional com método das fatias na integração da seção. Um de seus modelos implementados é encontrado no Eurocode 2 (2004) e sua tração é condizente com o Modelo do CEB-FIP (1990). Matias (2018) ajustou parâmetros do  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) e do Modelo de Lee e Fenves (1998) para reproduzir os resultados, obtendo sucesso. Os resultados numéricos de Parente *et al.* (2014) e de Matias (2018), bem como os resultados experimentais de Espion (1993) são ilustrados na Figura 79.

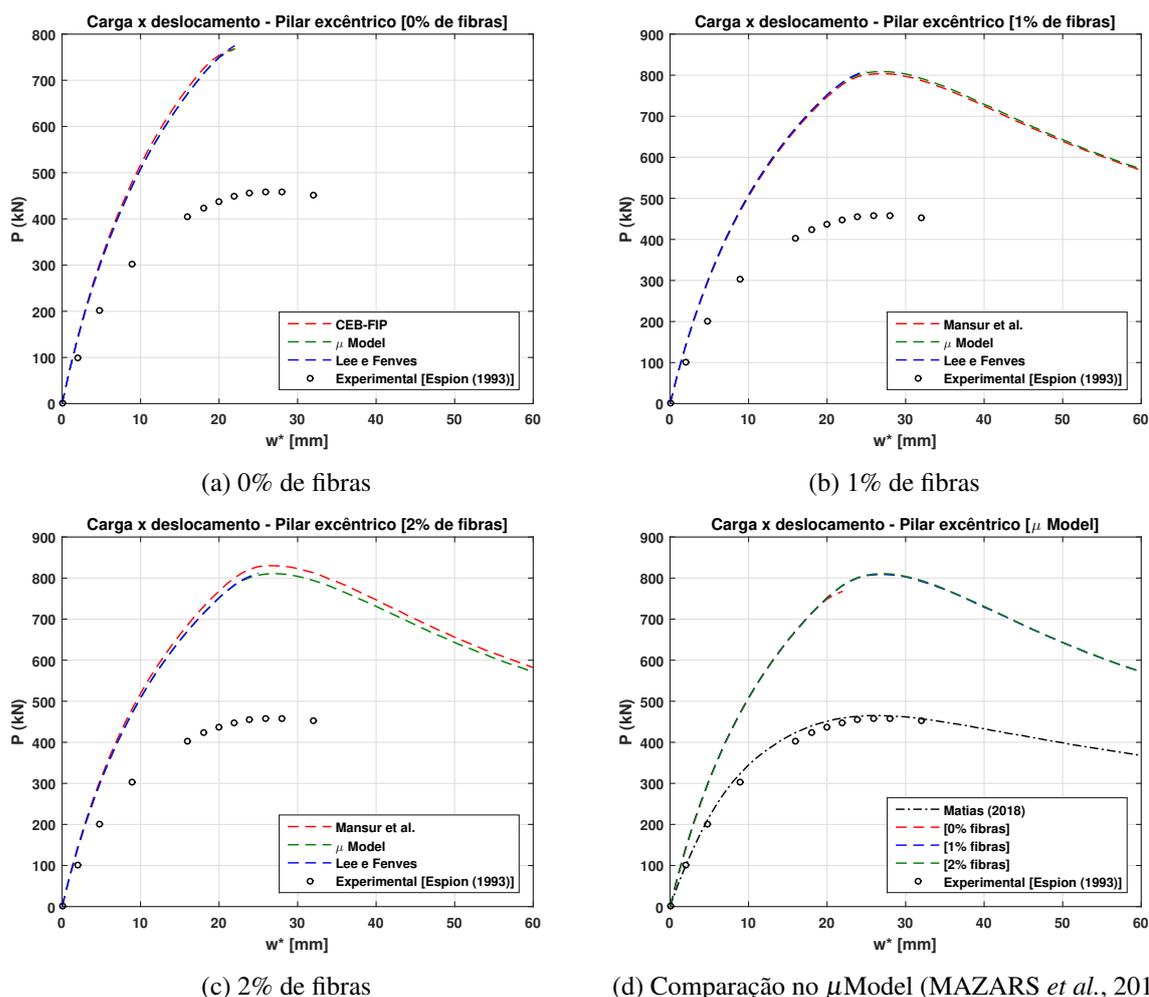
Figura 79 – Resultados de Parente *et al.* (2014) e Matias (2018) - Pilar excêntrico



Fonte: adaptada de Matias (2018).

Com o intuito de comparar o CAD desse estudo com um concreto convencional, é realizada uma aplicação numérica no FAST no pilar de Espion (1993). O pilar é discretizado em 5 elementos corrotacionais e são utilizadas as curvas obtidas pelos modelos elásticos, o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) e o Modelo de Lee e Fenves (1998) para o CAD com diferentes teores de fibras. Os dados dos dois últimos modelos estão dispostos nas Tabelas 8, 9, 10 e 11.

Figura 80 – Carga x deslocamento - Pilar excêntrico



Fonte: o autor.

Percebe-se que, na ausência de fibras, o modelo deixa de convergir antes do *softening*. Isso ocorre devido a erros numéricos ocasionados pela grande inclinação dos modelos sem fibras. Com a adição de fibras, o comportamento do concreto passa a descrever uma curva mais suave, o que faz com que o programa obtenha com sucesso os resultados para 1 e 2% de fibra. Entretanto, devido a erro já mencionado na Seção anterior, o Modelo de Lee e Fenves (1998) não consegue descrever o comportamento pós-pico do CAD.

Para fins de comparação, são plotados os gráficos obtidos pelo  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) por Matias (2018) e nesse trabalho. Fica evidente o ganho na capacidade de carga do CAD em relação ao concreto convencional (ESPION, 1993). Isso poderia ocasionar economia em estruturas de grande porte.

## 6 COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho, foi realizada a caracterização mecânica de um Concreto de Alto Desempenho obtido a partir da incorporação de fibras metálicas a um traço adotado. De acordo com o traço adotado, é possível fazer a caracterização mecânica do CAD com diferentes teores de fibras. Percebe-se que, com a adição das fibras, o concreto passa a ter uma ruptura mais dúctil, tanto na compressão quanto na tração. Esse comportamento já era esperado a partir da literatura consultada e foi evidenciado a partir do ensaio de flexão em 4 pontos. Além disso, os resultados experimentais obtidos mostram que o acréscimo de fibras aumenta a resistência à compressão e à tração, mas não influencia no módulo de elasticidade do CAD. Isso comprova o que Kang *et al.* (2010) já haviam previsto.

Devido às limitações do LMCC, como capacidade de carga do maquinário e moldes disponíveis, não foi possível obter a curva de tensão-deformação do CAD para a compressão. Assim, para representar o comportamento do CAD à compressão, foram utilizados modelos elásticos não-lineares (CEB-FIP, 1990; Van Gysel; TAERWE, 1996; WEE *et al.*, 1996; MANSUR *et al.*, 1999). Já para a tração, foram realizadas adaptações nos modelos adotados para compressão.

Para o concreto sem a presença de fibras, os modelos do CEB-FIP (1990) e de Van Gysel e Taerwe (1996) parecem representar de forma adequada o comportamento do CAD, uma vez que demonstram sua ruptura frágil de maneira mais realista. O Modelo do CEB-FIP (1990) parece ser o mais adequado devido a se tornar cada vez mais frágil com o aumento da resistência à compressão do concreto. Os modelos de Wee *et al.* (1996) e Mansur *et al.* (1999) evidenciam um comportamento um pouco mais dúctil para a ruptura do concreto. O segundo se destaca quando há a adição de fibras, sendo recomendada a sua utilização na presença desse componente.

A fim de realizar análises não-lineares mais rebuscadas, são adotados o  $\mu$ Model e o Modelo de Lee e Fenves (1998). O primeiro se adequa melhor às curvas propostas pelos modelos elásticos de tensão-deformação do CAD à compressão, enquanto que o segundo se adequa melhor à tração. Entretanto, o Modelo de Lee e Fenves (1998) não consegue reproduzir o *softening* devido à dificuldade em encontrar valores adequados para o comprimento característico e a energia de fratura.

Por fim, a coluna com carregamento excêntrico de Espion (1993) é analisado pelos modelos acima mencionados e há uma comparação entre o CAD e o concreto convencional. O Modelo de Mansur *et al.* (1999) e o  $\mu$ Model (MAZARS *et al.*, 2015) simulam o comportamento do CAD com fibras adequadamente, mas não convergem na análise do *softening* do CAD sem

fibras. O Modelo de Lee e Fenves (1998) não converge na análise do *softening* do CAD com ou sem fibras. A comparação com o concreto convencional evidencia um grande ganho na capacidade de carga para o material estudado.

Para trabalhos futuros, é recomendado um estudo experimental mais abrangente do CAD, a fim de se obter as curvas tensão-deformação tanto na tração quanto na compressão. Essa caracterização deve incluir ainda a realização de ensaios com carregamento e descarregamento de forma a permitir uma melhor representação da evolução do dano nestes materiais. Além disso, seria interessante uma análise mais minuciosa dos parâmetros e nas malhas para o Modelo de Lee e Fenves (1998), a fim de conseguir representar o *softening* em modelos numéricos. Outra sugestão é a realização de estudos de vigas de CAD protendidas para uso em pontes e viadutos.

## REFERÊNCIAS

- AFROUGHSAKET, V.; OZBAKKALOGLU, T. Mechanical and durability properties of high-strength concrete containing steel and polypropylene fibers. **Construction and building materials**, Elsevier, v. 94, p. 73–82, 2015.
- AHLBORN, T. M.; HARRIS, D. K.; MISSON, D. L.; PEUSE, E. J. Characterization of strength and durability of ultra-high-performance concrete under variable curing conditions. **Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board**, n. 2251, p. 68–75, 2011.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI Committee 363**: Report on High-Strength Concrete (ACI 363R-10). Farmington Hills, 2010.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 12142**: Concreto — Determinação da resistência à tração na flexão de corpos de prova prismáticos. Rio de Janeiro, 2010.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7222**: Concreto e argamassa — Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2011.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5738**: Concreto – Procedimento para moldagem e cura de corpos de prova. Rio de Janeiro, 2015.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8522**: Concreto — Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão. Rio de Janeiro, 2017.
- AYUB, T.; SHAFIQ, N.; NURUDDIN, M. F. Stress-strain response of high strength concrete and application of the existing models. **Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology**, Maxwell Science Publishing, v. 8, n. 10, p. 1174–1190, 2014.
- BARSANESCU, P.; SANDOVICI, A.; SERBAN, A. Mohr-Coulomb criterion with circular failure envelope, extended to materials with strength-differential effect. **Materials and Design**, Elsevier, v. 148, p. 49–70, 2018.
- BAZANT, Z. P. **Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials**. [S.l.]: Routledge, 2019.
- BISHNOI, S.; SCRIVENER, K. L.  $\mu$ ic: A new platform for modelling the hydration of cements. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 266–274, 2009.
- BRATINA, S.; SAJE, M.; PLANINC, I. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 41, n. 24-25, p. 7181–7207, 2004.
- BUCHAIM, R. **A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica**. 2001. 158 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 2001.

BUTTIGNOL, T. E. T.; SOUSA, J.; BITTENCOURT, T. Ultra High-Performance Fiber-Reinforced Concrete (UHPFRC): a review of material properties and design procedures. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 10, n. 4, p. 957–971, 2017.

CARREIRA, D. J.; CHU, K.-H. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1985. v. 82, n. 6, p. 797–804.

CHEN, G.; CHEN, J.; TENG, J. On the finite element modelling of RC beams shear-strengthened with FRP. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 32, p. 13–26, 2012.

CHEN, W.-F.; HAN, D.-J. **Plasticity for Structural Engineers**. 1. ed. Fort Lauderdale, FL, USA: J. Ross Publishing, 2007. ISBN 1-932159-75-4.

COLLINS, M. P.; MITCHELL, D.; MACGREGOR, J. G. Structural design considerations for high-strength concrete. **Concrete international**, v. 15, n. 5, p. 27–34, 1993.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAÎNTE. **CEB-FIP Code 90: Model code for concrete structures**. bulletin d'information (117-e). Londres, 1990.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 2: Advanced Topics**. Chichester, West Sussex, England: John Wiley Sons, 1997.

DELARRARD, F.; SEDRAN, T. Optimization of ultra-high-performance concrete by the use of a packing model. **Cement and Concrete Research**, Pergamon, v. 24, n. 6, p. 997–1009, 1994.

DELARRARD, F.; SEDRAN, T. Mixture-proportioning of high-performance concrete. **Cement and Concrete Research**, Pergamon, v. 32, p. 1699–1704, 2002.

DENARIÉ, E.; BRÜHWILER, E. Strain-hardening ultra-high performance fibre reinforced concrete: deformability versus strength optimization. **Restoration of Buildings and Monuments**, De Gruyter, v. 17, n. 6, p. 397–410, 2011.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN EN 14889-1: Fibres for concrete - Part 1: Steel fibres - Definitions, specifications and conformity; German version**. Berlin, 2006.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN EN 196-1: Methods of testing cement - Part 1: Determination of strength; German version**. Berlin, 2016.

DRAMIX. **Catálogo da Dramix, ArcelorMittal**. 2019. Disponível em: <<http://longos.arcelormittal.com/produtos/catalogos/dramix>>. Acesso em: 23 abr. 2019.

DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. **Quarterly of applied mathematics**, v. 10, n. 2, p. 157–165, 1952.

ESPION, B. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs. In: CHAPMAN & HALL. **RILEM PROCEEDINGS**. [S.l.], 1993. p. 877–877.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARTIZATION. **Design of concrete structures: Part 1-1: General rules and rules for buildings**. en 1991-1-7. Bruxelas, 2004.

FEHLING, E.; SCHMIDT, M.; WALRAVEN, J.; LEUTBECHER, T.; FRÖHLICH, S. **Ultra-high performance concrete UHPC: Fundamentals, design, examples**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.

FENNIS, S. A.; WALRAVEN, J. C.; DENUIJL, J. A. The use of particle packing models to design ecological concrete. **Heron**, v. 54, n. 2, 2009.

GEISENHANSLÜCKE, C. **Herleitung eines dreidimensionalen Partikelverteilungsmodells zur Entwicklung verbesserter UHPC-Mischungen**. 2002. Tese (Doutorado) — Doctoral, University of Kassel, Germany, Kassel, HE, Germany, 2002.

GEISENHANSLÜCKE, C.; SCHMIDT, M. Methods for modelling and calculation of high density packing for cement and fillers in UHPC. In: **Proceedings of the International Symposium on Ultra-High Performance Concrete**. Kassel, HE, Germany: [s.n.], 2004. p. 303–312.

GHASEMI, S.; ZOHREVAND, P.; MIRMIRAN, A.; XIAO, Y.; MACKIE, K. A super lightweight UHPC–HSS deck panel for movable bridges. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 113, p. 186–193, 2016.

GOPALARATNAM, V.; SHAH, S. P. Softening response of plain concrete in direct tension. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1985. v. 82, n. 3, p. 310–323.

GRAYBEAL, B. A. **Material property characterization of ultra-high performance concrete**. [S.l.], 2006.

HEINZ, D.; URBONAS, L.; GERLICHER, T. Effect of heat treatment method on the properties of UHPC. In: **Proceedings of Hipermat 2012 3rd International Symposium on UHPC and Nanotechnology for High Performance Construction Materials**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 283–290.

HOGNESTAD, E. **Study of combined bending and axial load in reinforced concrete members**. [S.l.], 1951.

HSU, L.; HSU, C.-T. Complete stress—strain behaviour of high-strength concrete under compression. **Magazine of concrete research**, Thomas Telford Ltd, v. 46, n. 169, p. 301–312, 1994.

JASON, L.; HUERTA, A.; PIJAUDIER-CABOT, G.; GHAVAMIAN, S. An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 195, n. 52, p. 7077–7092, 2006.

JIRÁSEK, M. Non-local damage mechanics with application to concrete. **Revue française de génie civil**, v. 8, n. 5–6, p. 683–707, 2004.

KACHANOV, L. M. Rupture time under creep conditions. **Nank SSR Otd Tech Nauk**, v. 8, p. 26–31, 1958.

KANG, S.-T.; LEE, Y.; PARK, Y.-D.; KIM, J.-K. Tensile fracture properties of an Ultra High Performance Fiber reinforced concrete (UHPRFC) with steel fiber. **Composite Structures**, Elsevier, v. 92, n. 1, p. 61–71, 2010.

KARSAN, I. D.; JIRSA, J. O. Behavior of concrete under compressive loadings. **Journal of the Structural Division**, 1969.

KOSMATKA, S.; PANARESE, W. C. **Design and control of concrete mixtures**. [S.l.: s.n.], 1988.

KUPFER, H.; HILSDORF, H. K.; RUSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stresses. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1969. v. 66, n. 8, p. 656–666.

KUPFER, H. B.; GERSTLE, K. H. Behavior of concrete under biaxial stresses. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 99, n. 4, p. 853–866, 1973.

LECKIE, F. A.; ONAT, E. T. Tensorial nature of damage measuring internal variables. In: **Proceedings of the IUTAM Symposium on Physical Nonlinearities in Structures**. [S.l.]: Springer, 1981. p. 144–155.

LEE, J.; FENVES, G. L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. **Journal of engineering mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 124, n. 8, p. 892–900, 1998.

LEMAITRE, J. How to use damage mechanics. **Nuclear Engineering and Design**, Elsevier, v. 80, p. 233–245, 1984.

LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. 2. ed. Cachan, Île-de-France, France: Springer, 1996. ISBN 978-3-540-60980-3.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. Aspect phénoménologie de la rupture par endommagement. **J. Mécanique**, v. 2, n. 3, p. 317–365, 1978.

LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. **Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures**. 1. ed. Cachan, Île-de-France, France: Springer, 2005. ISBN 3-540-21503-4.

LU, Z.-H.; ZHAO, Y.-G. Empirical stress-strain model for unconfined high-strength concrete under uniaxial compression. **Journal of Materials in Civil Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 22, n. 11, p. 1181–1186, 2010.

LUBLINER, J.; OLIVER, J.; OLLER, S.; ONATE, E. A plastic-damage model for concrete. **International Journal of solids and structures**, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 299–326, 1989.

MANSUR, M.; CHIN, M.; WEE, T. Stress-strain relationship of high-strength fiber concrete in compression. **Journal of materials in civil engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 11, n. 1, p. 21–29, 1999.

MATIAS, B. d. S. **Modelos constitutivos para análise dinâmica não linear de pórticos planos de concreto armado**. 2018. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, CE, Brasil, 2018.

MAZARS, J. A model of a unilateral elastic damageable material and its application to concrete. **Fracture toughness and fracture energy of concrete**, p. 61–71, 1985.

MAZARS, J. A description of micro-and macroscale damage of concrete structures. **Engineering Fracture Mechanics**, RILEM, v. 25, n. 5–6, p. 729–737, 1986.

MAZARS, J.; HAMON, F.; GRANGE, S. A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. **Materials and Structures**, RILEM, v. 48, n. 11, p. 3779–3793, 2015.

MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory - application do concrete. **J. Eng. Mech.**, v. 115, n. 2, p. 345–365, 1989.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. **Concrete microstructure, properties and materials**. [S.l.: s.n.], 2017.

MENDES, S. E. S. **Estudo experimental de concreto de alto desempenho utilizando agregados graúdos disponíveis na região metropolitana de Curitiba**. 2002. 146 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Construção Civil, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil, 2002.

MENTALFLOSS. **Burj Khalifa, Dubai, EAU**. 2019. Disponível em: <<http://mentalfloss.com/article/584459/burj-khalifa-dubai-facts>>. Acesso em: 31 jul. 2019.

MOREIRA, L. S.; JR, J. B. M. S.; JR, E. P. Nonlinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 170, p. 167–177, 2018.

OLLER, S.; ONATE, E.; OLIVER, J.; LUBLINER, J. Finite element nonlinear analysis of concrete structures using a “plastic-damage model”. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 35, n. 1-3, p. 219–231, 1990.

OMIDI, O.; LOTFI, V. Finite element analysis of concrete structures using plastic-damage model in 3-D implementation. **International Journal of Civil Engineering**, International Journal of Civil Engineering, v. 8, n. 3, p. 187–203, 2010.

PALANISWAMY, R.; SHAH, S. P. Fracture and stress-strain relationship of concrete under triaxial compression. **ASCE J Struct Div**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 100, n. ST5, p. 901–916, 1974.

PARENTE, E.; NOGUEIRA, G. V.; NETO, M. M.; MOREIRA, L. S. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 7, n. 5, p. 879–904, 2014.

PETERSSON, P.-E. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. 1981. 174 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Doctoral of Engineering: Civil Engineering, University of Lund, Lund, Lund, M, Sweden, 1981.

PLANK, J.; SCHRÖFL, C.; GRUBER, M.; LESTI, M.; SIEBER, R. Effectiveness of polycarboxylate superplasticizers in ultra-high strength concrete: the importance of PCE compatibility with silica fume. **Journal of Advanced Concrete Technology**, Japan Concrete Institute, v. 7, n. 1, p. 5–12, 2009.

POPOVICS, S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 3, n. 5, p. 583–599, 1973.

RABOTNOV, Y. N. Creep problems in structural members. 1969.

REINHARDT, H. W. Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete. **HERON**, Delft University of Technology, n. 2, p. 1–42, 1984.

SAKAI, E.; KAKINUMA, Y.; YAMAMOTO, K.; DAIMON, M. Relation between the shape of silica fume and the fluidity of cement paste at low water to powder ratio. **Journal of Advanced Concrete Technology**, Japan Concrete Institute, v. 7, n. 1, p. 13–20, 2009.

SALEEM, M. A.; MIRMIRAN, A.; XIA, J.; MACKIE, K. Ultra-high-performance concrete bridge deck reinforced with high-strength steel. **ACI Structural Journal**, American Concrete Institute, v. 108, n. 5, p. 601, 2011.

SAMSUNG. **Petrona Towers, Kuala Lumpur, Malaysia**. 2016. Disponível em: <<http://news.samsungcnt.com/the-towers-at-twenty-how-the-petronas-towers-are-still-reshaping-malaysia-2/>>. Acesso em: 31 jul. 2019.

SARGIN, M.; HANDA, V. **A general formulation for the stress-strain properties of concrete**. [S.l.]: University of Waterloo, 1969.

SCHIESSL, P.; MAZANEC, O.; LOWKE, D.; PLANK, J.; SCHRÖFL, J.; GRUBER, M.; SCHMIDT, M.; STEPHAN, D.; GLOTZBACH, C. Investigations on the workability and microstructure development of UHPC, part 1: Effect of superplasticizer and silica fume on mixing and workability of UHPC. **Cement International**, v. 8, p. 60–7, 2010.

SCHRÖFL, C.; GRUBER, M.; PLANK, J. Preferential adsorption of polycarboxylate superplasticizers on cement and silica fume in ultra-high performance concrete (UHPC). **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 42, n. 11, p. 1401–1408, 2012.

SHAFIEIFAR, M.; FARZAD, M.; AZIZINAMINI, A. Experimental and numerical study on mechanical properties of Ultra High Performance Concrete (UHPC). **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 156, p. 402–411, 2017.

SHAMES, I. H.; COZZARELLI, F. A. **Elastic and Inelastic Stress Analysis**. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1997.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. 1. ed. New York, NY, USA: Springer Science Business Media, 2006.

SIMO, J. C.; JU, J. W. Strain- and stress-based continuum damage models—I. Formulation. **International journal of solids and structures**, v. 23, n. 7, p. 821–840, 1987.

Souza Neto, E. A.; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. 1. ed. Fort Lauderdale, FL, USA: John Wiley Sons, 2011. ISBN 1-932159-75-4.

STROEVEN, M.; STROEVEN, P. SPACE system for simulation of aggregated matter application to cement hydration. **Cement and Concrete Research**, Pergamon, v. 29, n. 8, p. 1299–1304, 1999.

TANARSLAN, H. Flexural strengthening of RC beams with prefabricated ultra high performance fibre reinforced concrete laminates. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 151, p. 337–348, 2017.

TECNOSIL. **E-Tower, São Paulo, Brasil**. 2019. Disponível em: <<https://www.tecnosilbr.com.br/o-que-caracteriza-um-concreto-de-alto-desempenho-cad/>>. Acesso em: 31 jul. 2019.

Van Gysel, A.; TAERWE, L. Analytical formulation of the complete stress-strain curve for high strength concrete. **Materials and Structures**, Springer, v. 29, n. 9, p. 529–533, 1996.

Van Mier, J. G. M. **Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions**. [S.l.]: Technische Hogeschool Eindhoven, 1984.

WANG, P.; SHAH, S.; NAAMAN, A. Stress-strain curves of normal and lightweight concrete in compression. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1978. v. 75, n. 11, p. 603–611.

WEE, T.; CHIN, M.; MANSUR, M. Stress-strain relationship of high-strength concrete in compression. **Journal of Materials in Civil Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 8, n. 2, p. 70–76, 1996.

WILLAM, K. Constitutive models for engineering materials. In: **Encyclopedia of physical science and technology**. Boulder, CO, USA: Academic Press, 2002. p. 603–633.

WILLE, K.; EL-TAWIL, S.; NAAMAN, A. E. Properties of strain hardening Ultra High Performance Fiber Reinforced Concrete (UHP-FRC) under direct tensile loading. **Cement Concrete Composites**, Elsevier, v. 48, p. 53–66, 2014.

XU, Y.; LIU, J.; LIU, J.; ZHANG, P.; ZHANG, Q.; JIANG, L. Experimental studies and modeling of creep of UHPC. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 175, p. 643–652, 2018.

YAZDANI, S.; SCHREYER, H. Combined plasticity and damage mechanics model for plain concrete. **Journal of engineering mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 116, n. 7, p. 1435–1450, 1990.

ÖZTEKIN, E.; PUL, S.; HÜSEM, M. Experimental determination of drucker-prager yield criterion parameters for normal and high strength concretes under triaxial compression. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 112, p. 725–732, 2016.