



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E DE PRODUÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO MECÂNICA

Saulo da Silva Oliveira

**APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E HEURÍSTICAS
DE CONSTRUÇÃO DE ROTAS PARA OTIMIZAÇÃO DE ROTAS DE
COLETA DE LIXO**

Trabalho Final de Curso submetido à coordenação do curso de Engenharia de Produção Mecânica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Produção Mecânica.

Fortaleza, CE – Julho de 2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O51a Oliveira, Saulo da Silva.

Aplicação de programação linear inteira e heurísticas de construção de rotas para otimização de rotas de coleta de lixo / Saulo da Silva Oliveira. – 2013.
68 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia de Produção Mecânica, Fortaleza, 2013.

Orientação: Prof. Me. Anselmo Ramalho Pitombeira Neto.

1. Otimização Discreta. 2. Programação Linear. 3. Coleta de lixo. 4. Caixeiro-viajante. 5. Heurísticas de Construção de Rotas. I. Título.

CDD 658.5

Saulo da Silva Oliveira

**APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E HEURÍSTICAS
DE CONSTRUÇÃO DE ROTAS PARA OTIMIZAÇÃO DE ROTAS DE
COLETA DE LIXO**

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Produção Mecânica.

Monografia aprovada em ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Anselmo Ramalho Pitombeira Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Belo Torres
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Heráclito Jaguaribe Pontes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Fortaleza, CE – Julho de 2013

A Odaléa Sombra, aos meus pais e aos meus irmãos que sempre estiveram presentes e me apoiaram ao longo de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço às pessoas mais importantes na minha vida, meus pais, Antônio Gonçalves e Maria de Jesus, que sempre me deram total apoio e estrutura para que realizasse meus estudos com qualidade.

A minha Irmã, Sâmia Oliveira, pelo exemplo de vida, foco e dedicação para enfrentar os obstáculos decorrentes da vida.

A minha esposa, Odaléa Sombra, que me apoiou e motivou na reta final de faculdade, em especial na elaboração desse trabalho.

Ao professor Carlos Roberto, *in memoriam*, que me apresentou modelagem matemática, me despertando o interesse pelo assunto.

Ao meu orientador Prof. Me. Anselmo Pitombeira, que aceitou a participação e acompanhamento deste trabalho.

À Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores José Belo Torres e Heráclito Jaguaribe Pontes, com os quais vivenciei e compartilhei várias experiências na faculdade, em sala de aula, bem como no âmbito profissional.

RESUMO

A aplicação de modelos de otimização há tempos geram resultados positivos em indústrias, empresas que atuam nos ramos financeiro, de alimentos, militar, logística, dentre outras. O presente trabalho tem como objetivo mostrar o ganho gerado por técnicas de otimização em uma empresa que atua no segmento de coleta de resíduos sólidos urbanos, onde pretende-se minimizar os deslocamentos dos caminhões em rota de coleta. Consta no trabalho, a fundamentação teórica que cita e explica as principais técnicas utilizadas, além de uma explanação sobre os processos logísticos que envolvem a coleta de resíduos. O trabalho é estruturado pela análise da situação atual da empresa e desenvolvimento da modelagem matemática de programação linear inteira, desenvolvida em *Excel*, bem como heurísticas de construção de rota, com a finalidade de otimizar as rotas de coleta de lixo. Em seguida são apresentados os resultados alcançados pelos métodos aplicados, bem como a comparação desses resultados com os dados reais de produção, demonstrando os ganhos operacionais gerados pela aplicação proposta.

Palavras-Chave: Otimização Discreta, Programação Linear, Coleta de lixo, Caixeiro-Viajante, Heurísticas de Construção de Rotas.

ABSTRACT

The application of optimization models has long generated positive results in industries, financial companies, foodstuff, military and logistics, among others. This paper aims to show the gain generated by optimization techniques in a company that operates in the collection of municipal solid waste, where intends to minimize the displacement of trucks en route collection. The job mentions the theory and explains the main techniques used, and explains the logistics processes involving waste collection. The work is structured by the analysis of the company's current situation and development of mathematical modeling of whole linear programming, developed in *Excel*, as well as heuristics of route's construction, in order to optimize routes for garbage collection. The following are the results obtained by the methods applied, and the comparison of these results with actual production data, demonstrating the operating earnings generated by the proposed application.

Key words: Discrete Optimization, Linear Programming, Garbage Collection, Travelling Salesman, Heuristics of route's construction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Processo de modelagem	17
Figura 2 -	Função com custo fixo	21
Figura 3 -	Problema do caixeiro-viajante	25
Figura 4 -	Jogo de Hamilton	26
Figura 5 -	Rede de pontos	29
Figura 6 –	Opções do <i>Google Earth</i>	35
Figura 7 -	Mapeamento dos pontos de coleta	36
Figura 8 -	Coordenadas geográficas	37
Figura 9 -	Divisão do Globo em zonas UTM	39
Figura 10-	Divisão do Brasil em zonas UTM e seus respectivos meridianos centrais	39
Figura 11-	Coordenadas Euclidianas	40
Figura 12-	Matriz de distâncias entre pontos (<i>Excel</i>)	41
Figura 13-	Matriz de variáveis de decisão (<i>Excel</i>)	42
Figura 14-	Função objetivo (<i>Excel</i>)	43
Figura 15-	Restrições de chegada (<i>Excel</i>)	44
Figura 16-	Restrições de saída (<i>Excel</i>)	44
Figura 17-	Matriz de variáveis de decisão de fluxo e restrições de fluxo (<i>Excel</i>)...	46
Figura 18-	Matriz de determinação do fluxo máximo (<i>Excel</i>).....	46
Figura 19-	Exibição do menu <i>OpenSolver</i>	48
Figura 20-	Campos para caracterização da função objetivo	49
Figura 21-	Restrições	50
Figura 22-	Fluxograma PLI em <i>Excel</i>	52
Figura 23-	Fluxograma heurística do vizinho mais próximo em <i>Excel</i>	54
Figura 24-	Fluxograma heurística da inserção mais barata em <i>Excel</i>	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados de produção	33
Tabela 2 - Relação de pontos de coleta	38
Tabela 3 - Complexidade da heurística construtiva do vizinho mais próximo aplicada ao PCV	53
Tabela 4 - Complexidade da heurística construtiva da inserção mais barata aplicada ao PCV	55
Tabela 5 - Resultados da PLI	57
Tabela 6 - Resultados da heurística do vizinho mais próximo	57
Tabela 7 - Resultados da heurística do inserção mais barata	58
Tabela 8 - Comparativo de ganho em quilômetros	58
Tabela 9 - Comparativo de ganho em indicadores de desempenho	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CV – Caixeiro-Viajante

DLA – Diferença entre latitude

DLO – Diferença entre longitude

ERP – *Enterprise Resource Planning*

GRASP – *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures*

ISO – *International Organization for Standardization*

OHSAS – *Occupational Health and Safety Assessment Services*

OC – Otimização Combinatória

PB – Programação Binária

PCVG – Problema do Caixeiro-Viajante com Grupamento

PCV – Problema do Caixeiro-Viajante

PI – Programação inteira

PIM – Programação Inteira Mista

PL – Programação Linear

PLI – Programação Linear Inteira

PO – Pesquisa Operacional

RSU – Resíduos Sólidos Urbanos

UTM – *Universal Transversa de Mercator*

VBA – *Visual Basic for Applications*

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Contextualização	11
1.2	Justificativa	12
1.3	Objetivos	13
1.3.1	Objetivo Geral	13
1.3.2	Objetivos específicos	13
1.4	Metodologia	13
1.5	Estrutura do trabalho	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Histórico da Pesquisa Operacional	16
2.2	Resolução de Problemas com Modelos Matemáticos	16
2.3	Otimização Linear (Programação Linear)	17
2.4	Programação Linear Inteira (Otimização Discreta)	19
2.5	Modelagem com Variáveis Binárias	20
2.5.1	Implicações "Se - Então"	21
2.5.1.1	Custo Fixo	21
2.5.1.2	Produção de Itens	21
2.5.1.3	Desigualdades de funções	22
2.6	Formulação de Problemas Clássicos	22
2.7	Definição e Formulação do Problema do Caixeiro-Viajante (PCV)	23
2.7.1	Caixeiro-viajante distância	24
2.7.2	Formulação do Modelo	26
2.8	Heurísticas para construção de rotas	27
2.8.1	Heurística construtiva do vizinho mais próximo	27
2.8.2	Heurística construtiva da inserção mais barata (problema da árvore geradora mínima)	28
2.9	Formas de Aplicação e Resolução do PCV	30
3	ESTUDO DE CASO - OTIMIZAÇÃO DE ROTAS DE COLETA DE LIXO	31
3.1	Caracterização do problema da coleta e transporte de RSU	31
3.2	Metodologia	32

3.3	Rota atual e coleta de dados	32
3.4	Preparação de dados para a otimização	34
3.4.1	Google Earth como ferramenta de apoio à catalogação dos pontos de coleta	34
3.4.2	Sistema UTM de coordenadas planas para geoposicionamento	34
3.4.3	Mapeamento de pontos de coleta	36
3.5	Modelagem do problema em <i>Excel</i>	40
3.5.1	Definição do arranjo da matriz distância	41
3.5.2	Variáveis de decisão	41
3.5.3	Função Objetivo	42
3.5.4	Restrições de saída e chegada	43
3.5.5	Restrições de subrotas	45
3.5.6	Restrições operacionais	47
3.6	<i>Software</i> de otimização	47
3.7	Alimentando do otimizador matemático	48
3.8	Extração e análises de resultados da otimização	51
3.9	Fluxograma para a proposta de PLI	52
3.10	Heurísticas para solução do PCV	52
3.10.1	Heurística do vizinho mais próximo	53
3.10.1.1	Fluxograma da Heurística do Vizinho mais Próximo	54
3.10.2	Heurística da Inserção mais Barata	54
3.10.2.1	Fluxograma da Heurística da Inserção mais Barata	56
3.11	Análise de resultados	56
4	CONCLUSÃO	60
4.1	Sugestão de trabalhos Futuros	61
	REFERÊNCIAS	62
	ANEXO I	64
	ANEXO II	65
	ANEXO III	66
	ANEXO IV	67
	ANEXO V	68

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

No decorrer dos anos, com o crescente processo de globalização e com o avanço da tecnologia que volatiliza bens de consumo, percebe-se um aumento considerável na produção de resíduos sólidos urbanos (RSU) tornando este assunto, não somente um problema para a gestão pública, como também para o meio ambiente, além de ser uma ótima oportunidade de trabalho para empresas que atuam com serviços ambientais.

Atualmente o mercado impõe às empresas um ambiente cada vez mais competitivo, fazendo com que estas adaptem seu desempenho às exigências de clientes e acionistas.

Com os serviços ambientais não é diferente. Empresas inseridas neste segmento de gestão de RSU trabalham dispostas a manter-se neste ramo, entendendo a necessidade de se implantar técnicas de gestão empresarial, segurança e medicina do trabalho e de produção, tais como certificações ISO 9000, 14000 e OHSAS 18000, bem como implantação de sistemas de gerenciamento de recursos, *Enterprise Resource Planning (ERP)*, que auxiliam no controle de custos e otimização de recursos da empresa, atendendo assim os requisitos dos acionistas e melhorando os serviços prestados aos clientes.

O presente estudo se passa em uma empresa que atua em mais de vinte municípios na área de limpeza urbana e gerenciamento de RSU, estabelecida no mercado há mais de vinte anos, sendo atualmente considerada uma das maiores do ramo no país. Os serviços prestados abrangem desde a coleta sistemática de lixo até serviços especiais como capinação, varrição, incineração, coleta de lixo hospitalar e gerenciamentos de aterros sanitários.

Dentro da rotina de coleta sistemática, pode-se citar a coleta de difícil acesso, bastante frequente em áreas de vias estreitas e mal pavimentadas onde são posicionados *containers* para deposição de resíduos e coleta de indivisíveis, lixo desorganizado, poda e entulho.

Diante do exposto, pode-se visualizar a coleta de lixo dentro de um plano de gerenciamento de RSU, como sendo um problema de transporte onde as variáveis de custos, sistemática de operações e de manutenção, são conhecidas e

que estas podem ser otimizadas lançando mão de técnicas de gestão de frota, logística e novas tecnologias tecnológicas.

Neste trabalho, será mostrado como a otimização discreta, com a abordagem do problema do caixeiro-viajante, pode auxiliar nas análises de rotas de caminhões de coleta de lixo, proporcionando uma melhor utilização dos recursos da empresa, bem como redução de deslocamentos e conseqüentemente de custos de operação.

1.2 Justificativa

Analisando-se o cenário mundial, pode-se perceber o avanço nas tecnologias que envolvem gerenciamento de RSU, tanto na destinação, quanto no transporte e manuseio destes materiais. Caminhões compactadores cada vez mais leves, com taxa de compactação cada vez maior, *containers* enterrados para acondicionamento de lixo de praças e calçadões e coleta mecanizada são, dentre outros, avanços que representam a tendência do mercado mundial globalizado.

Ainda nesta ótica e vislumbrando os altos investimentos e custos que envolvem o setor de transportes, coleta e gerenciamento de RSU, percebe-se que às formas de redução de custos estão intimamente ligadas à operação.

Desta forma, a justificativa para a realização deste trabalho parte da necessidade de se otimizar a sistemática de trabalho aumentando o ganho operacional nas atividades que envolvem mão-de-obra e deslocamentos de veículos de coleta. Em outras palavras, pretende-se otimizar o tempo e os deslocamentos gastos para atender uma determinada demanda de coleta de resíduos.

Neste trabalho será abordada a coleta ponto a ponto realizada em áreas de difícil acesso, onde se tem pontos fixos de deposição de resíduos. Portanto, decidiu-se fazer um estudo de roteirização de caminhões de coleta de lixo em pontos fixos objetivando reduzir os custos operacionais desta atividade.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Avaliar os possíveis ganhos gerados pela aplicação de ferramentas de otimização matemática à coleta de resíduos sólidos urbanos de Fortaleza-CE, buscando a redução de custos operacionais, comparando os resultados obtidos com os atuais métodos utilizados pela empresa do segmento mencionado.

1.3.2 Objetivos Específicos

Referente ao estudo de caso, os objetivos específicos são:

- a) Identificar, montar e comparar propostas de solução do problema de roteirização de veículos baseado no problema do caixeiro-viajante;
- b) Desenvolver uma solução computacional em *Excel*;
- c) Determinar as melhores rotas de coleta;
- d) Validar os resultados encontrados comparando com duas heurísticas de construção de rotas e com a situação atual;

1.4 Metodologia

Este trabalho é um estudo de caso aplicado em uma empresa de coleta e gerenciamento de lixo, cujos dados foram coletados entre setembro de 2012 e janeiro de 2013.

O levantamento dos dados foi feito através da análise de relatórios de produção, onde informações referentes à sistemática de trabalho foram extraídas e expostas em uma planilha gerencial, e de pesquisas de campo, que, segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 186), “[...] consiste na observação dos fatos e fenômenos tais como ocorrem espontaneamente, na coleta de dados a eles referentes e no registro de variáveis que se presumem relevantes, para analisá-los”.

A metodologia mais adequada vai depender do objeto de estudo e do objetivo que se pretende alcançar, e para a realização deste trabalho optou-se por um método dedutivo. Sobre esse método Neves e Domingues (2007) afirmam:

Conclusão baseada em proposições ou resultados de experiências. Em seu “Discurso Sobre o Método”, no séc. XVII, Descartes defendeu o método dedutivo classificando-o como aquele que possibilitaria a aquisição do conhecimento por meio de uma elaboração lógica apoiada em hipóteses.

Portanto, faz-se necessária a realização de uma pesquisa bibliográfica e documental. Pesquisa bibliográfica, de acordo com Gil (2002), “é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros [...]” para retirada da teoria. A pesquisa documental é realizada a partir de publicações em revistas, jornais, redes eletrônicas, isto é, material acessível ao público em geral.

A metodologia parte de conceitos de pesquisa operacional, em particular, otimização discreta, e seus “problemas”, sendo abordado neste trabalho o Problema do Caixeiro-Viajante (PCV) e suas formas de resolução, bem como a demonstração da modelagem matemática e desenvolvimento de uma solução computacional em *Excel*. Além disso, o método também parte da aplicação de métodos comparativos para análise dos resultados encontrados com os dados reais de produção e com resultados propostos a partir de heurísticas de construção de rotas.

Após análises, pretende-se gerar uma rota a ser seguida para o método mais viável a fim de determinar uma padronização do percurso a ser seguido pelos veículos.

1.5 Estrutura do Trabalho

A estrutura deste trabalho é dividida em quatro capítulos que estão descritos abaixo:

O primeiro capítulo apresenta o cenário e o mercado mundial em que a empresa estudada está inserida, a justificativa para a realização do trabalho, os objetivos geral e específico deste estudo e a metodologia utilizada para o desenvolvimento da peça, bem como os resultados esperados.

O segundo capítulo traz um breve histórico sobre pesquisa operacional, como surgiu e como, através do uso de otimização discreta, se consegue chegar às soluções lógicas de diversos problemas cotidianos. São apresentadas também, duas abordagens heurísticas para a resolução do problema do caixeiro-viajante que serão aplicadas no desenvolvimento do trabalho e servirão de norte comparativo para avaliar a eficácia da otimização apresentada.

No terceiro capítulo, será exposto um breve histórico do negócio da empresa estudada, com as principais particularidades dos processos que envolvem a atividade fim da empresa e o estudo de caso com a aplicação dos conceitos expostos no capítulo anterior, bem como extração de dados e realização de comparações para a determinação do método mais viável, enfatizando assim, a necessidade de se aplicar modelos de otimização para construção de rotas de veículos.

Por fim, o quarto capítulo traz a análise dos resultados obtidos, as conclusões dos métodos propostos, sugestões para futuros trabalhos e as suas considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Histórico da Pesquisa Operacional

Segundo Lisboa (2012, p. 1) “[...] durante a Segunda Guerra Mundial, um grupo de cientistas foi convocado na Inglaterra para estudar problemas de estratégia e de tática associados com a defesa do país.” O objetivo era decidir sobre a utilização mais eficaz de recursos militares limitados.

Tem-se registros também que o surgimento do termo pesquisa operacional, segundo Morabito (2007, p. 1), “[...] está ligado à invenção do radar na Inglaterra em 1934, onde pretendia-se estudar como a tecnologia do radar poderia auxiliar na proteção do território britânico com a interceptação de aviões inimigos.” Em 1941, foi inaugurada uma seção de Pesquisa Operacional do Comando da Força Aérea de Combate, com equipes empenhadas na resolução de problemas de guerra, tais como manutenção de aeronaves, escolha do tipo de avião para uma determinada missão, aumento na probabilidade de se abater um submarino inimigo, controle de artilharia antiaérea e dimensionamento de comboios de frota.

Morabito (2007, p. 2), defende que a partir da década de 1950, a PO foi aplicada a problemas de ordem pública e privada e nas áreas industriais e financeiras, como: mineração, metalurgia, construção civil e militar, têxtil, farmacêutico, bancário e transportes. Em 1967, foram identificados 766 grupos de PO, dos quais 553 atuavam no setor industrial ou em serviços financeiros. Um dos exemplos de aplicação em áreas públicas é ligado à coleta de lixo, transporte e polícia, entre outros. Desde então os estudos evoluíram para as mais diversas áreas de produção e logística auxiliando na resolução de problemas e otimizando a utilização de recursos.

2.2 Resolução de problemas com modelos matemáticos

De acordo com Morabito (2007, p. 3),

Se fazer ciência é a capacidade de observar e descrever fenômenos naturais, sociais e econômicos, entre outros, a matemática tem uma importância fundamental na descrição desses fenômenos. A partir da observação de fenômenos, processos ou sistemas, que podem ser físicos, químicos, biológicos, econômicos, buscam-se leis que os regem. Essas leis,

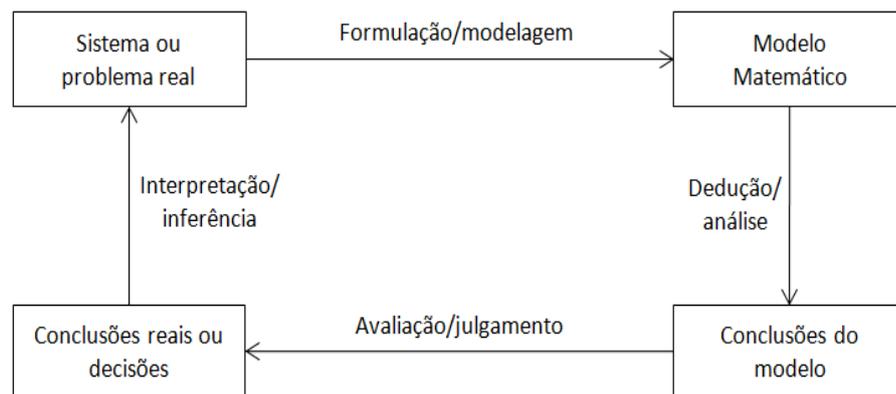
se passíveis de serem descritas por relações matemáticas, dão origem aos modelos matemáticos.

A formulação (modelagem) define as variáveis e as relações matemáticas para descrever o comportamento inerente ao fenômeno estudado. A dedução aplica técnicas matemáticas e computacionais para resolução dos modelos matemáticos desenvolvidos e permite visualizar os resultados obtidos e quais conclusões ele sugere. A interpretação destes resultados fundamenta conclusões e decisões para o problema real. Pode-se citar como exemplos de modelagem matemática, a programação linear (otimização linear), programação linear inteira (otimização discreta), programação em redes (otimização de redes) e programação não-linear (otimização não-linear).

Segundo Morabito (2007, p. 3), “[...] a pesquisa operacional e, em particular, a programação matemática tratam de problemas de decisão e faz uso de modelos matemáticos que procuram representar (em certo sentido, imitar) o problema real”.

A figura 1 mostra o processo de modelagem e como modelos matemáticos podem auxiliar na tomada de decisão em um sistema ou problema real.

Figura 1 – Processo de modelagem



Fonte: Morabito (2007)

2.3 Otimização linear (Programação Linear)

Modelos de otimização linear têm sido amplamente utilizados para resolução de problemas reais. Muitas situações práticas podem ser representadas por modelos deste tipo, embora tais modelos já tenham sido apresentados há mais

tempo, em 1947 foi publicado o método *simplex*, fazendo deste ano um marco para a pesquisa operacional. Em 1984 foi publicado o método de pontos interiores fazendo destes dois métodos, as principais ferramentas computacionais para a resolução de problemas de programação linear.

De acordo com Moreira (2007, p. 11),

A programação linear é, se não o mais popular, um dos modelos matemáticos mais populares, estruturado para resolver problemas que apresentem variáveis que possam ser medidas e cujos relacionamentos possam ser expressos por meio de equações e/ou inequações lineares. Há muitos problemas que podem ser formulados dessa maneira, em muitas áreas científicas e sociais, pelo menos de forma aproximada, vindo daí o uso intenso do modelo.

[...]

A estrutura do problema é tal que existe, em geral, uma certa restrição de recursos, ou impossibilidade de economias, de tal forma que nunca é possível obter um lucro, por exemplo, tão grande quanto se queira, ou um custo, por seu turno, tão pequeno quanto se deseje

[...]

Há de se buscar uma combinação ótima para se chegar ao melhor lucro possível, dadas as restrições práticas impostas pelo problema.

Quando se está diante de um problema de PL, as atenções devem estar voltadas aos parâmetros e às variáveis de decisão.

Moreira (2007, p.12) afirma que “parâmetros são valores já fixados, fora do controle da pessoa que monta o modelo. São valores que devemos aceitar como são. Fazem parte do problema, mas não estão sob discussão”.

Quanto às variáveis de decisão, Moreira (2007, p. 13) continua:

Variáveis de decisão são grandezas que poderão assumir diversos valores, sendo que há uma certa combinação de valores que irá maximizar ou minimizar a função objetivo, conforme seja o caso. É essa combinação de valores que será a solução do problema de programação linear. Em outras palavras as variáveis de decisão aparecem tanto na função objetivo quanto nas restrições. Os parâmetros, por sua vez, aparecem como coeficientes das variáveis de decisão ou como valores máximos ou mínimos de grandezas que compõem o modelo. Finalmente, as variáveis de decisão são, em geral, indicadas por letras como x , y , z , ... ou X , Y , Z , ... ou ainda por letras indexadas, como x_1 , x_2 , x_3 etc.

Dessa forma, quando pelo menos uma das variáveis de decisão tem que assumir valores inteiros, caracteriza-se um problema de *programação linear inteira* ou *otimização discreta*, como será detalhado na seção 2.5 deste trabalho. Já quando não há esta exigência, ou seja, quando as variáveis podem assumir quaisquer valores, inteiros ou não, o problema passa a ser de *programação linear simples*. Problemas com muitas variáveis de decisão devem ser solucionados por meio de

computador, uma vez que as combinações serão bastante numerosas aumentando consideravelmente o tempo de resolução.

2.4 Programação Linear Inteira (Otimização Discreta)

Conforme explicam Frederick e Lieberman (2012, p. 20),

A programação linear usa um modelo matemático para descrever o problema em questão. O adjetivo *linear* significa que todas as funções matemáticas nesse modelo são necessariamente *funções lineares*. A palavra *programação*, neste caso, não se refere a programação de computador; ela é, essencialmente, um sinônimo para *planejamento*. Portanto, programação linear envolve o planejamento de atividades para obter um resultado ótimo, isto é, um resultado que atinja o melhor objetivo especificado (de acordo com o modelo matemático) entre todas as alternativas viáveis.

Em outras palavras, otimização discreta ou combinatória, também conhecida como programação inteira e combinatória, tem como característica principal a existência de uma das variáveis pertencentes a um conjunto discreto, caracteristicamente, um subconjunto dos números inteiros.

Um problema com variáveis inteira e reais, denominado problema de programação (linear) inteira mista (PIM), segundo Morabito (2007, p. 163), é descrito matematicamente conforme segue:

$$Z = \max cx + dy \quad (1)$$

$$Ax + Dy \leq b \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{Z}_+^p \quad (3)$$

De acordo com Morabito (2007, p. 163),

Em que A , uma matriz ($m \times n$), D , uma matriz ($m \times p$), c , um vetor ($1 \times n$), d , um vetor ($1 \times p$), e b , um vetor ($m \times 1$), representam os parâmetros do problema. Os vetores de variáveis são x e y com dimensões ($n \times 1$) e ($p \times 1$). \mathbb{R}_+^n representa o espaço dos vetores com n componentes reais e \mathbb{Z}_+^p representa o espaço dos vetores com p componentes inteiras não negativas

Já o problema de programação (linear) inteira (PI) ocorre quando todas as variáveis são inteiras e é representado pela fórmula:

$$Z = \max cx \quad (4)$$

$$Ax \leq b \quad (5)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^n \quad (6)$$

Por outro lado, se as variáveis tiverem valores de 0 ou 1, caracteriza-se um problema de programação 0-1 ou binária (PB), representado por:

$$Z = \max cx \quad (7)$$

$$Ax \leq b \quad (8)$$

$$x \in B^n \quad (9)$$

sendo B^n representante do espaço dos vetores com n componentes binárias.

Segundo Morabito (2007, p. 165), “[...] tem-se ainda o problema da otimização combinatória (OC), quando é dado um conjunto finito $N = \{1, \dots, n\}$, um conjunto de pesos c_j para cada $j \in N$, e uma família F de subconjunto factíveis de N .” Essa modalidade de problema tem a finalidade de encontrar o subconjunto de peso mínimo de F , sendo representada pela fórmula:

$$\min \{ \sum_{j \in S} c_j : S \in F \} \quad (10)$$

De maneira genérica, um problema de Otimização Combinatória (OC) pode ser formulado como um problema de Programação Linear Inteira (PLI) ou Programação Binária (PB). Os problemas de programação inteira e combinatória são solucionados por meio de *métodos ótimos (exatos)*, que concluem uma solução ótima; por *algoritmos aproximados*, que determinam a menor distância entre o valor da solução subótima e o valor ótimo. A solução também pode ser encontrada por meio de *métodos heurísticos*, que encontra uma solução subótima, e divergente do primeiro método, não há relação entre o resultado encontrado com o valor ótimo.

2.5 Modelagem com Variáveis Binárias

A dicotomia da ocorrência ou não de um determinado evento e a decisão entre duas alternativas gera um número exacerbado de problemas de otimização discreta, sendo representada por uma variável binária x , conforme segue:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se o evento ocorre} \\ 0 & \text{se o evento não ocorre} \end{cases} \quad (11)$$

A seguir serão apresentadas várias ocorrências práticas com esse tipo de decisão e a maneira de representá-las matematicamente.

2.5.1 Implicações “Se – Então”

Há situações em que a ocorrência de um evento acarreta a ocorrência de outro evento. Seguem exemplos disto:

2.5.1.1 Custo fixo

Suponha que o custo de produção K de um determinado item é representado pelo custo fixo s adicionado de um custo variável c diretamente proporcional à quantidade produzida x . Dessa forma, segue:

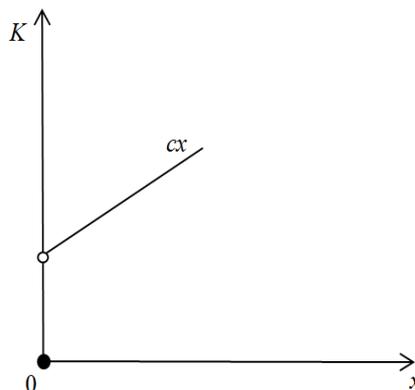
$$K(x) = \begin{cases} s + cx & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (12)$$

A figura 2 ilustra graficamente o comportamento da função K , que é não linear devido à descontinuidade no ponto $x = 0$. Assim, para representar linearmente esta função, deve ser adicionado um limitante superior da produção M , e considerar uma variável binária y tal que $y=0$ implica em $x=0$ ou, da mesma forma, $x>0$ implica em $y=1$. Dessa forma, pode-se representar a função K , conforme abaixo:

$$K = sy + cx \quad (13)$$

$$x \leq My \quad (14)$$

Figura 2 – Função com custo fixo



Fonte: Morabito (2007)

Analisando o gráfico, observa-se que $x = 0$ não implica em $y = 0$, e que o ponto $w_1 = (x = 0, y = 1)$ é possível e com um custo $K(w_1) = s$. Em geral, como o objetivo é minimizar o custo K , o ponto w_1 não é um mínimo, uma vez que a solução $w_2 = (x = 0, y = 0)$ é factível com custo $K(w_2) = 0$.

2.5.1.2 Produção de itens

Considerando-se dois produtos, 1 e 2, em um processo de fabricação e x_1 e x_2 as quantidades produzidas respectivamente. Seja y uma variável binária, então se escreve matematicamente da seguinte forma:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (15)$$

$$x_1 \leq My \quad M = \text{limite superior para a produção de } 1 \quad (16)$$

$$x_2 \leq my \quad m = \text{limite inferior para a produção de } 2 \quad (17)$$

2.5.1.3 Desigualdades de funções

Corroborando com Morabito (2007), no livro Pesquisa Operacional, pg. 168:

Em diversas situações é necessário impor que a desigualdade $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ implica que a desigualdade $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ é verdadeira. Considere uma variável binária y , e seja M um número grande, tal que $f \leq M$ e $-g \leq M$ para todo valor de x_1, x_2, \dots, x_n . A aplicação é expressa pelas seguintes restrições:

$$-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1 - y)$$

Note que, se $f > 0$, então $y = 0$ e, conseqüentemente, $g \geq 0$.

2.6 Formulação de Problemas Clássicos

A partir da década de 1980 foram criadas linguagens algébricas que ocasionaram um grande impacto na resolução de problemas de otimização. Segundo Morabito (2007, p. 172), “[...] essas linguagens de alto nível permitem que o usuário escreva modelos genéricos de programação linear e não-linear em um formato parecido com o da notação algébrica”. Isso faz com que o usuário se prenda à modelagem, entendendo as características do fenômeno estudado, permitindo assim possíveis alterações no futuro.

Existem diversas linguagens, tais como GAMS, AMPL, MPL, AIMMS, OPL, MOSEL e LINGO. Outra ferramenta importante também muito utilizada é a planilha de *Excel*, que contém os otimizados *Solver* para resolução de problemas de pequena complexidade. O *Excel*, no entanto, não gera um modelo com linguagens algébricas.

Inúmeros são os problemas cotidianos que se caracterizam como problemas de programação inteira, dentre eles pode-se citar:

- a) Problemas da mochila onde o objetivo envolve a escolha correta de itens que devem ser colocados em uma ou mais mochilas de forma a

maximizar a utilidade. Problemas desse tipo se dividem em *mochila 0-1*, *mochila inteira*, *múltiplas mochilas* e *empacotamento de mochilas*;

- b) Problemas de corte onde se objetiva determinar o melhor arranjo de peças a serem cortadas minimizando a perda e conseqüentemente a quantidade de matéria prima utilizada. Da mesma forma, este tipo de problema também se divide em subgrupos de modelagem sendo estes *problema de corte unidimensional*, *bidimensional* e *tridimensional*;
- c) Problemas de designação em que se pretende designar atividades a agentes de forma a minimizar a função custo total. Analogamente aos anteriores, estes problemas são divididos em *designação simples*, *designação generalizada*, *designação generalizada com múltiplos recursos*, *designação generalizada com múltiplos níveis* e *designação quadrática*;
- d) Problemas de cobertura, partição e empacotamento de conjuntos onde o objetivo é, de um modo geral, reduzir os custos para os problemas de cobertura e partição e aumentar o valor agregado para problemas de empacotamento;
- e) Por fim problemas de caixeiro-viajante distância, aquisição e lucro; problemas de carteiro chinês e problemas logísticos relacionados ao roteirização de veículos, sempre objetivando minimizar a função custo.

Na próxima sessão deste trabalho, será detalhado melhor o problema do caixeiro-viajante, utilizado posteriormente no estudo de caso.

2.7 Definição e Formulação do Problema do Caixeiro-Viajante (PCV)

O problema do caixeiro viajante, em inglês conhecido como *travelling salesman problem*, se trata de uma questão de otimização sendo muito estudado por cientistas e matemáticos, bem como por vários profissionais de diversas áreas.

Marcone (2013) defende que o PCV é um problema dada classe NP-difícil, tendo em vista sua complexidade exponencial, ou seja, o esforço computacional cresce de maneira exponencial de acordo com a complexibilidade do problema. Dessa forma encontrar a solução ótima do problema é praticamente impossível, o que evidencia, na visão matemática, a necessidade de se trabalhar com formulações heurísticas ou com intervenção computacional.

Em meados de 1800, o escocês William Rowan Hamilton e o britânico Thomas Penyngton Kerkman passaram a desenvolver problemas oriundos do PCV. No entanto a forma geral do PCV parece ter sido estudada por matemáticos apenas em 1930 em Haward e Viena, sendo posteriormente estudado por Hassler Whitney e Erril Flood em Princeton.

O nome titulado para o problema em questão passou por várias variações, mas apenas ficou mundialmente conhecido em 1950.

O problema do caixeiro-viajante, representado pela sigla CV ou PCV, engloba um conjunto de cidades, postos de atendimento ou trabalho, depósitos, etc, onde o caixeiro tem como ponto de partida uma base, percorre todos os pontos ou um subconjunto de pontos, passando por eles somente uma vez, e por fim retorna ao ponto de partida, com o intuito de otimizar um ou mais objetivos. Problemas dessa natureza pertencem à classe de roteirização em nós e são determinados em grafos orientados e não orientados.

Em síntese, os problemas de roteirização, na maioria das vezes se relacionam com passeios ou tours sobre pontos de demanda ou oferta.

2.7.1 Caixeiro viajante – distância

O problema em questão, que é objeto de um número elevado de trabalhos na literatura e tem grande ocorrência nas diversas áreas, se trata da minimização da distância da rota percorrida, com a finalidade de atingir a rota ideal, tendo grande importância em função de três fatores: grande aplicação prática, enorme relação com outros modelos e grande dificuldade de solução exata. Portanto, o valor do modelo é de suma importância tanto sob a ótica prática, como pelo aspecto teórico.

Para melhor entender o problema em comento, será necessário analisar as características do caixeiro viajante, que será demonstrada a seguir. Morabito (2007), no livro Pesquisa Operacional, pg. 168, afirmam:

Considere um grafo não orientado $G=(N,E)$, em que o conjunto N consiste de n cidades e E representa o conjunto de arestas entre cidades. Suponha que G é um grafo completo, isto é, para qualquer par de cidades $i, j \in N, i \neq j$, existe uma aresta (i,j) . A distância entre as cidades i e j é c_{ij} , e quando $c_{ij}=c_{ji}$, o problema é dito simétrico; caso contrário, é chamado de assimétrico. O caixeiro deve visitar n cidades, passando por cada cidade somente uma vez, e retornar a cidade de partida. Este percurso é denominado ciclo

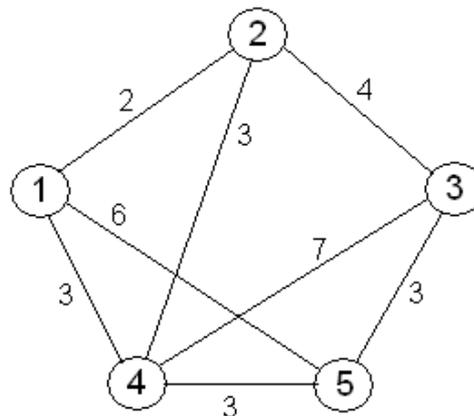
hamiltoniano do grafo G , e o problema consiste em determinar o ciclo hamiltoniano, ou rota, de distância mínima. Este é um dos problemas combinatórios mais conhecidos e pesquisado devido à sua aplicação em diversas áreas, tais como manufatura de circuitos, programação da produção, telecomunicações e seqüenciamento de DNA.

O ciclo *hamiltoniano*, que demonstra o problema do caixeiro viajante (representado na figura 3), é o percurso ideal de rota. Recebe esta denominação em função de Willian Rowan Hamilton, não sendo ele o primeiro a apresentar esse problema, mas que teve destaque em decorrência da criação de um jogo, figura 4. O ciclo era feito sobre um dodecaedro em que cada vértice estava ligado a uma cidade, tendo como objetivo a criação de uma rota ideal, por meio dos vértices da figura, que partisse e terminasse em um ponto base, sem repetição de visitas nas cidades dispostas. Talvez por este motivo, muitas literaturas atuais utilizam cidades para explicar o problema do caixeiro viajante, quando na verdade pode se tratar de qualquer conjunto de pontos, como já explicado anteriormente.

De acordo com Goldbarg e Luna (2005, p. 331),

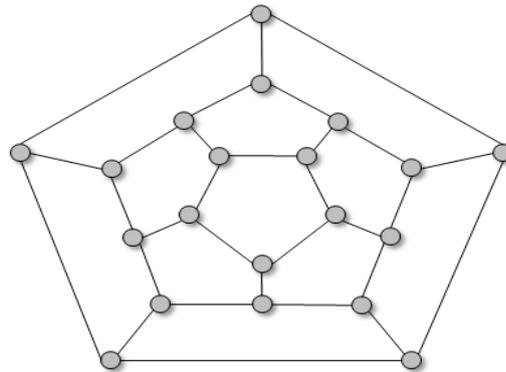
Dentre os tipos de passeios um dos mais importantes é o denominado hamiltoniano. Seu nome é devido A Willian Rowan Hamilton que, em 1857, propôs um jogo que denominou *Around the World*. O jogo era feito sobre um dodecaedro em que cada vértice estava associado a uma cidade importante na época. O desafio consistia em encontrar uma rota através dos vértices do dodecaedro que iniciasse e terminasse em uma mesma cidade sem nunca repetir uma visita

Figura 3 – Problema do caixeiro–viajante



Fonte:Ficheiro:Example_the_travelling_salesman_problem_(TSP).gif)

Figura 4 – Jogo de Hamilton



Fonte: Goldberg (2005)

2.7.2 Formulação do Modelo

Seja um conjunto de nós de um grafo $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e outro composto de arcos A . Neste trabalho os nós representam pontos de coleta de lixo. Os arcos são as ligações entre estes pontos. Para o arco $(i, j) \in A$, c_{ij} pode ser o tempo de viagem do ponto i para o ponto j , ou para o nosso problema, é a distância entre os pontos de coleta i e j . Portanto, objetiva-se encontrar a menor rota, partindo do pressuposto o veículo parte de um ponto determinado, passa por todos os pontos do grafo e retorna para o ponto de partida.

Por se tratar de um problema de programação binária, tem-se que se $x_{ij} = 1$, então o ponto j foi visitado imediatamente após a visita ao ponto i . Da mesma forma, se $x_{ij} = 0$, o vínculo entre os pontos i e j não ocorre na construção da rota. Para evitar resultados inconvenientes, os pontos de índice duplo, c_{ji} , serão excluídos da formulação.

Dessa forma, segundo Colin (2007, p. 183), uma formulação possível para o problema é:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

$$\text{s. a: } \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{saída}) \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{chegada}) \quad (19)$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (i \neq j; i = 2, \dots, n; j = 2, \dots, n) \quad (\text{sub-rotas}) \quad (20)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, u_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

De acordo com Colin (2007, p. 183),

As restrições de saída, de chegada e binárias garantem que cada um dos x_{ij} é 0 ou 1. As restrições “saída” garantem que para cada cidade haverá apenas uma rota de saída; e analogamente em uma chegada para as restrições “chegada”.

As restrições do grupo de sub-rotas garantem que a solução ótima não contenha sub-rotas. Se não introduzirmos esse grupo de restrições, não há garantia de que a solução oferecida contenha uma rota única, na qual o viajante parta de uma cidade, visite todas as outras e retorne para a cidade inicial sem passar mais de uma vez em cada cidade.

[...]

As restrições de sub-rotas são tratadas na equação sub-rotas onde, u_i representa o fluxo de entrada no nó i e u_j o fluxo de saída. Da mesma forma, o lado direito da equação, garante que o grafo tenha $n-1$ arcos orientados.

Segundo Colin (2007, p. 183),

a expressão $S \subset V$ representa que, para cada subconjunto possível de V , uma restrição deve ser formada. Para n o número total de cidades e s o número de cidades de S , o número de restrições que representarão um subconjunto com s cidades, ou sub-rotas de coleta, será $\frac{n!}{s!(n-s)!}$, em que $x!$ representa o fatorial de x .

A resolução deste modelo será apresentada no capítulo 3 deste trabalho.

2.8 Heurísticas para construção de rotas

Morabito (2007), afirma

heurísticas são métodos de resolução de problemas de otimização discreta que não garantem a obtenção de uma solução factível ou ótima. Nicholson (1971) propôs uma definição que expressa muito bem as características de uma heurística: é um procedimento para resolver problemas por meio de um enfoque “intuitivo”, em geral racional, no qual a estrutura do problema possa ser interpretada e explorada inteligentemente para se obter uma solução razoável.

Para o caso do problema do caixeiro-viajante, há vários exemplos de heurísticas construtivas de rotas, sendo abordadas neste trabalho a heurística do vizinho mais próximo e a heurística construtiva da inserção mais barata.

2.8.1 Heurística construtiva do vizinho mais próximo

Schopf, Schepke, Silva e Silva, afirmam:

A heurística do vizinho mais próximo, descrita por [SOLOMON,1987] utiliza uma matriz para definir a distância entre os pontos. O percurso é construído com base na distância entre estes pontos, sendo o ponto mais próximo da

origem adicionado primeiro e os demais pontos adicionados posteriormente. Esses pontos são inseridos segundo a sua proximidade em relação ao último ponto adicionado na rota.

Em outras palavras, este método de construção de rota consiste em escolher aleatoriamente, ou segundo algum critério, um nó do grafo e adicionar à rota. A partir da inclusão do primeiro ponto, ou ponto de partida, busca-se o ponto mais próximo do ponto já incorporado à rota até que todos os pontos sejam visitados e a rota finalizada.

O algoritmo do vizinho mais próximo determina rapidamente o caminho mais curto, mas geralmente não é a rota ideal, como demonstrado no capítulo 3.

Segundo Cordenonsi (2008), “[...] o algoritmo é muito simples de entender e se baseia em um conceito genérico [...] produz resultados razoáveis como ponto de partida para outras soluções.”

O passo a passo para solução do problema do caixeiro-viajante utilizando esta heurística é descrito abaixo:

- a) determine o ponto de início da rota;
- b) determine o ponto mais próximo não visitado e construa o arco de ligação entre estes dois pontos;
- c) marque o ponto anterior como visitado;
- d) a partir do vértice adicionado no passo *b*, determine o ponto mais próximo não visitado e agregue à rota;
- e) repita os passos *c* e *d* até que todos os pontos sejam visitados;
- f) por fim, force a inserção do ponto de partida para atender a restrição de passar por todos os pontos e retornar ao ponto inicial.

2.8.2 Heurística construtiva da inserção mais barata (Problema da árvore geradora mínima)

Segundo Goldberg e Luna (2005, p. 238), “[...] Uma árvore geradora mínima é uma árvore cuja soma do comprimento de suas arestas é minimal em *G*.”

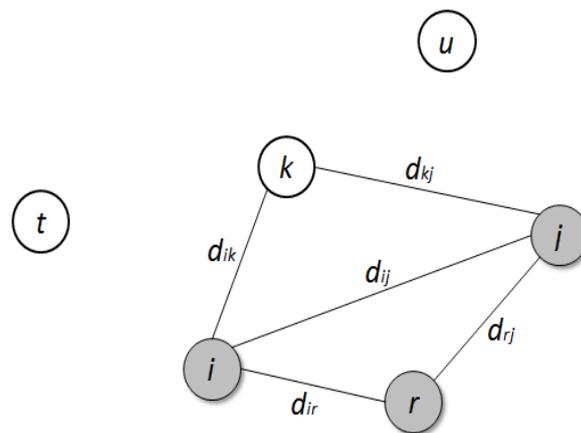
Marcone (2013), defende consistir em utilizar a heurística da inserção mais barata onde, a partir de uma rota mínima de três pontos, determinada com base no procedimento supra descrito, pretende-se incluir um novo ponto à rota, desde que este cause o menor impacto possível.

De acordo com Morabito (2007, p. 331),

Para escrever um modelo matemático para o problema da árvore geradora mínima de um grafo não direcionado com n nós, podemos imaginar um problema de transporte em que existe suprimento de $n-1$ unidades de um produto em apenas um dos nós do grafo, digamos o nó 1, e existe uma demanda de exatamente 1 unidade do produto em cada um dos demais $n-1$ nós. O custo de transporte em cada aresta (i,j) no grafo, entretanto, diferente do que ocorre no caso do problema de transporte, independe do volume transportado do produto na aresta.

Supondo um conjunto de cidades (figura 5), objetiva-se construir uma rota de custo mínimo, partindo de rota inicial envolvendo 3 cidades (obtidas por um método qualquer) e adicionar a cada passo, a cidade k (ainda não visitada) entre a ligação (i, j) de cidades já visitadas, cujo custo de inserção seja o mais barato.

Figura 5 – Rede de pontos



Fonte: o autor

O custo da inserção é representado pela expressão $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$ e o ponto a ser agregado à rota apresentará o menor valor para o custo de inserção. O procedimento se repete para todos os outros pontos da rede até que se obtenha a rota de custo mínimo onde todos os pontos são visitados.

Após a geração do circuito mínimo de 3 pontos, conforme demonstrado acima, para inserção do quarto ponto à rota, tem-se $3(n-3)$ avaliações a fazer. Dessa forma para a quinta inclusão, $4(n-4)$ avaliações. Assim para o último ponto da rede serão apresentadas $(n-1)(n-(n-1))$ avaliações. Projetando-se a lógica para a toda a amostra de tamanho n , a complexidade da heurística construtiva da inserção mais barata é determinada pela expressão $\sum_{j=3}^{n-1} j(n-1)$.

Para resolver estas heurísticas, à medida que a rede de pontos aumenta, aumenta também a necessidade de uma modelagem computacional para otimizar o

tempo de resolução. Neste trabalho, será demonstrado no capítulo 3 a utilização de planilhas de *Excel* para resolução destas heurísticas retro descritas.

2.9 Formas de aplicação e resolução do PCV

Segundo Silva (2006) “[...] alguns experimentos com os operadores de cruzamento para o problema do caixeiro viajante assimétrico, afirma que, são métodos de busca probabilística inspirados na evolução natural.” Neste artigo foram realizados testes para comparar, em termos de desempenho computacional e qualidade da solução obtida, os principais operadores de cruzamento desenvolvidos para o PCV.

Mestria (2010) relata que em seu trabalho foi abordado o Problema do Caixeiro Viajante com Grupamentos, uma generalização do Problema do Caixeiro Viajante. Quatro heurísticas híbridas foram desenvolvidas para o PCVG utilizando GRASP e ISL e dois tipos diferentes de algoritmos construtivos, o IMPP e o IMPnP. Constata-se que as metaheurísticas híbridas alcançam melhor desempenho do que suas formas clássicas.

Segundo Taufer (2011) “[...] a facilidade da resolução do PCV pelo Solver do *Excel* está no fato de que as restrições relativas aos subciclos hamiltonianos, que não podem existir de acordo com a formulação apresentada, são inseridas de acordo com os resultados das otimizações realizadas”.

Mestria (2011) relatou em Heurísticas usando GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedures*) e Reconexão de Caminhos para o Problema do Caixeiro Viajante com Grupamentos, que nos experimentos que os cinco métodos heurísticos baseados no GRASP produzem soluções de boa qualidade para o PCVG, em tempo computacional viável.

Oprime (2008) propõe a aplicação de métodos de programação matemática para resolução do problema de sequenciamento de experimentos. No estudo apresentado, o recurso de PO utilizado, demonstrou em tempo razoável, sequencias de experimentação com o menor número de trocas de variáveis para vários tipos de matrizes fatoriais.

3 ESTUDO DE CASO – OTIMIZAÇÃO DE ROTAS DE COLETA DE LIXO

3.1 Caracterização do problema da coleta e transporte de RSU

O problema de coleta de lixo é um problema típico de transporte onde o tratamento dos custos depende de variáveis conhecidas, tais como, manutenção média e custo de combustível por quilômetro rodado, horas trabalhadas e horas extras por funcionário, custo de mão de obra por hora trabalhada, dentre outros indicadores que demonstram o desempenho operacional da empresa.

A atividade fim da empresa estudada é manter limpa a área determinada em contrato, garantindo a rentabilidade estabelecida no planejamento estratégico. Dessa forma, diante da grande abrangência contratual, cabe à empresa, diversificar os serviços prestados, sendo atualmente representados pela coleta de lixo nas ruas por caminhões compactadores; serviços de varrição de praças, calçadões e sarjetas das regiões central e costeira; capinação de canteiros; coleta de lixo desorganizado, entulho e podaço; e coleta de áreas de difícil acesso.

Há uma série de restrições que envolvem a atividade de coleta e transporte de lixo. Uma das mais frequentes é a existência de áreas de difícil acesso, ou seja, locais onde os caminhões não têm como realizar a coleta devido ao estreitamento ou má pavimentação das vias. Para estes casos são adotadas duas técnicas: coleta com *pick-ups* e uso de *containers* para deposição de resíduos (ver ANEXO I).

A utilização de *containers* representa uma estratégia de apoio logístico à operação de coleta de lixo, pois atende diretamente à população, que deposita seus resíduos, e às *pick-ups*, que por serem menores, conseguem acesso a estes locais, porém, devido ao fato de não compactarem o lixo, precisam realizar várias descargas para dar continuidade à operação.

Portanto, após a realização de um estudo da área, determina-se tamanho, quantidade e localização dos *containers*. Estes pontos de coleta constituem uma rota que é realizada por uma equipe composta por quatro funcionários, sendo um motorista que guia o caminhão e três garis coletores.

Dessa forma, a otimização da rota composta por estes pontos, tem um impacto significativo nos custos da operação, uma vez que além de despesas com combustível, desgaste e manutenção dos caminhões, tem-se todas as horas

normais e extras geradas pelos funcionários que compõem as equipes. Em outras palavras, a metodologia em comento, trará retorno para a empresa, ao passo que o tempo de coleta e os deslocamentos do caminhão serão reduzidos.

Analisando especificamente a coleta de lixo em difícil acesso, pode-se verificar uma abordagem de otimização utilizando programação linear inteira, uma vez que os pontos de coleta são pré-determinados e compõem uma rota. Portanto, trata-se de um problema do tipo caixeiro-viajante, sendo este o foco deste estudo de caso.

3.2 Metodologia

O presente estudo de caso será apresentado conforme a sequência a seguir:

- a) Análise da rota atual e apresentação dos dados de coleta, tais como: data da execução da rota, horas de saída e retorno ao ponto de partida, quilometragem percorrida por rota executada e cálculo do tempo e deslocamento médios;
- b) Mapeamento dos pontos específicos de coleta no *software* livre *Google Earth*, onde foram extraídas coordenadas UTM de latitude e longitude de cada ponto, além do cálculo das distâncias entre os pontos mapeados;
- c) Modelagem do problema em *Excel*, demonstrando as variáveis inerentes ao processo, função objetivo e restrições para o problema, bem como otimização do problema utilizando o *solver* do *Excel*;
- d) Resolução do problema sob as óticas da Heurística do Vizinho mais Próximo e da Heurística da Inserção mais Barata;
- e) Confronto dos resultados obtidos com os dados reais, evidenciando-se os ganhos ou perdas percentuais para cada um deles.

3.3 Rota atual e coleta de dados

A rota estudada e executada uma única vez por dia e consiste em partir da sede da empresa (garagem), percorrer todos os pontos de coleta estabelecidos

no planejamento da rota, dirigir-se ao local de destinação final dos resíduos, e posteriormente, retornar à sede.

Todos os pontos de coleta são estrategicamente dimensionados de acordo com a dificuldade de acesso às localidades e, fazendo uma correlação com problemas teóricos, representam os nós de um grafo. A combinação entre as possíveis ligações entre estes nós, representam a rota, partindo do pressuposto que cada ponto é visitado uma única vez. Esta breve análise se faz necessária para que a metodologia seja aplicada, conforme descrito na próxima sessão deste trabalho.

Periodicamente os dados de produção são extraídos dos sistemas de controle para alimentar indicadores operacionais e direcionar tomadas de decisão. Estes dados mostram a eficiência dos roteiros, do dimensionamento dos caminhões e das equipes, fato este que será base de comparação para as análises de resultados apresentadas na última sessão deste capítulo. Resumidamente, os dados consistem em quilometragem e hora de saída da garagem, quilometragem e hora de chegada e quantidade de resíduos coletados medidos em kg em cada rota executada.

As informações foram organizadas na tabela 1, conforme segue.

Tabela 1 – Dados reais de produção

Data	Horas	Dist. (km)	Peso (kg)	Ton/h	Ton/km
23/09/2012	3,00	50	6900	2,30	0,14
30/09/2012	3,02	42	5110	1,69	0,12
28/10/2012	3,32	44	6500	1,96	0,15
04/11/2012	3,20	42	7580	2,37	0,18
11/11/2012	2,75	43	5940	2,16	0,14
18/11/2012	3,25	37	7750	2,38	0,21
25/11/2012	3,50	42	7180	2,05	0,17
02/12/2012	3,65	42	10000	2,74	0,24
09/12/2012	3,77	42	7960	2,11	0,19
16/12/2012	3,67	41	10450	2,85	0,25
06/01/2013	3,83	49	9030	2,36	0,18
Médias	3,36	43,09	7.672,73	2,28	0,18

Fonte: O autor

Portanto, pode-se concluir que a rota é executada no tempo médio de 3,36 horas, percorrendo em média 43,09 quilômetros, coletando em média 7.671,73 quilos de material, gerando os indicadores médios de tonelada por hora de 2,28 e de tonelada por quilômetro de 0,18.

3.4 Preparação de dados para a otimização

De posse das informações reais de produção, nesta sessão será apresentada a ferramenta utilizada para a catalogação dos pontos de coleta e tratamento das distâncias para aplicação das técnicas de resolução do problema em comento.

3.4.1 *Google Earth como ferramenta de apoio à catalogação dos pontos de coleta*

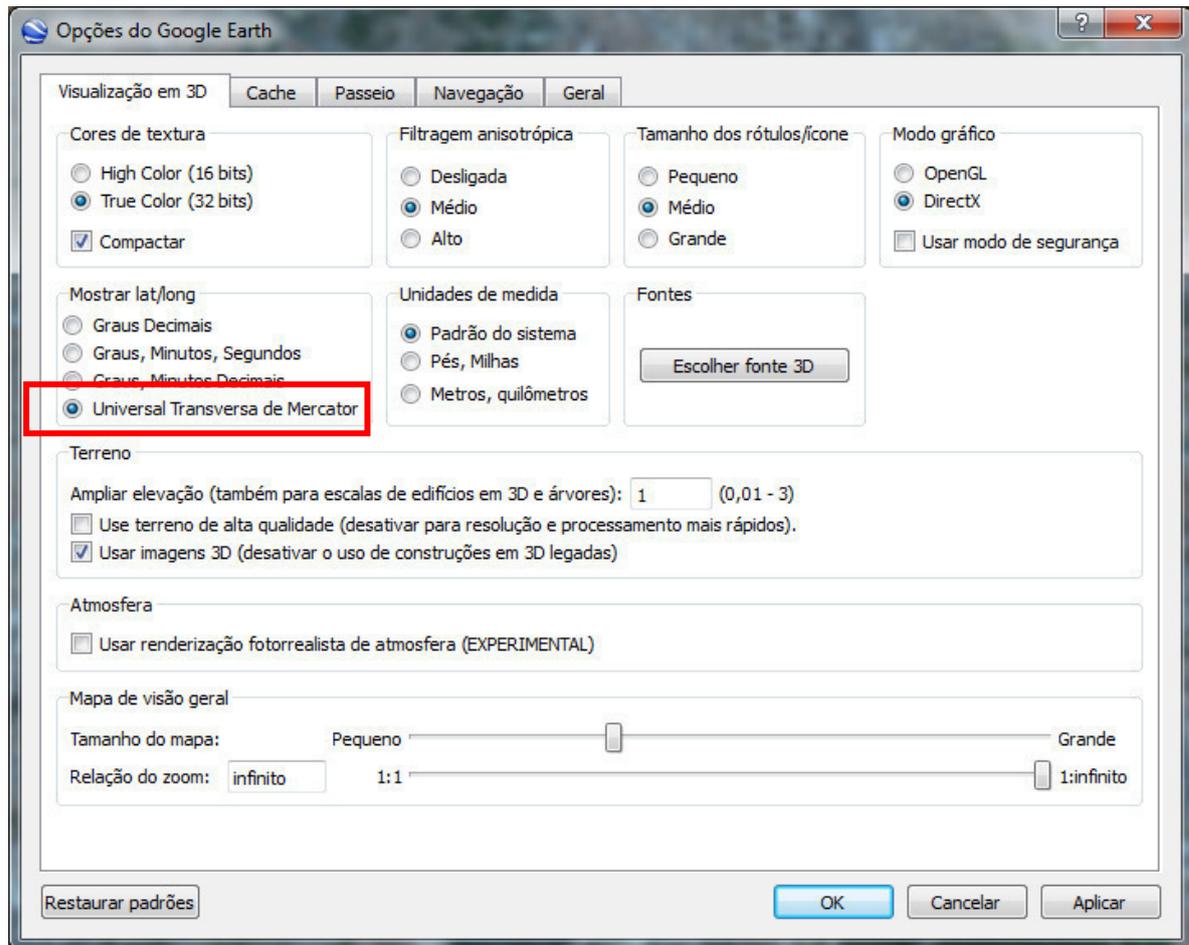
O *Google Earth* é um *software* livre desenvolvido a partir de obtenção de imagens via satélite, capturadas de diversos ângulos, bem como imagens aéreas obtidas por aeronaves, além das terrestres, e sistemas de informações geográficas 3D.

Este *software* foi utilizado para obtenção das coordenadas planas UTM de latitude e longitude dos pontos de coleta especificados para a rota estudada, bem como da garagem, ponto de partida e chegada de caminhões, e estação de transbordo de resíduos, estágio intermediário para a destinação do material coletado. Conforme dito na sessão 3.1.1, esses pontos foram determinados a partir de análises de campo e a rota atual, a partir de um modelo intuitivo de roteirização gerado pelos colaboradores de fiscalização de limpeza urbana, não sendo levadas em consideração as restrições do trânsito anteriormente citadas.

Dessas rotas intuitivas foram extraídos somente os pontos (nós) do circuito de coleta em questão (grafo). Como o método utilizado é alicerçado no problema do caixeiro-viajante, pretende-se obter a rota ideal, de forma que seja feita a visita de determinado número de pontos, passando em cada um deles apenas uma única vez, retornando posteriormente ao ponto de partida.

3.4.2 *Sistema UTM de coordenadas planas para geoposicionamento*

Conforme dito na sessão anterior, os pontos de coleta identificados foram marcados no *Google Earth* como nós de um grafo. Para tanto, o campo “*Universal Transversa de Mercator*”, deve estar marcado no menu ferramentas, conforme figura 6.

Figura 6 – Opções do *Google Earth*

Fonte: *Google Earth 7.0.2.8415* (2012)

Este campo marcado permitirá ao *software* exibir as coordenadas de latitude e longitude em *Universal Transversa de Mercator (UTM)*.

Carvalho e Araújo (2008), em *Leituras cartográficas e interpretações estatísticas I*, afirmam:

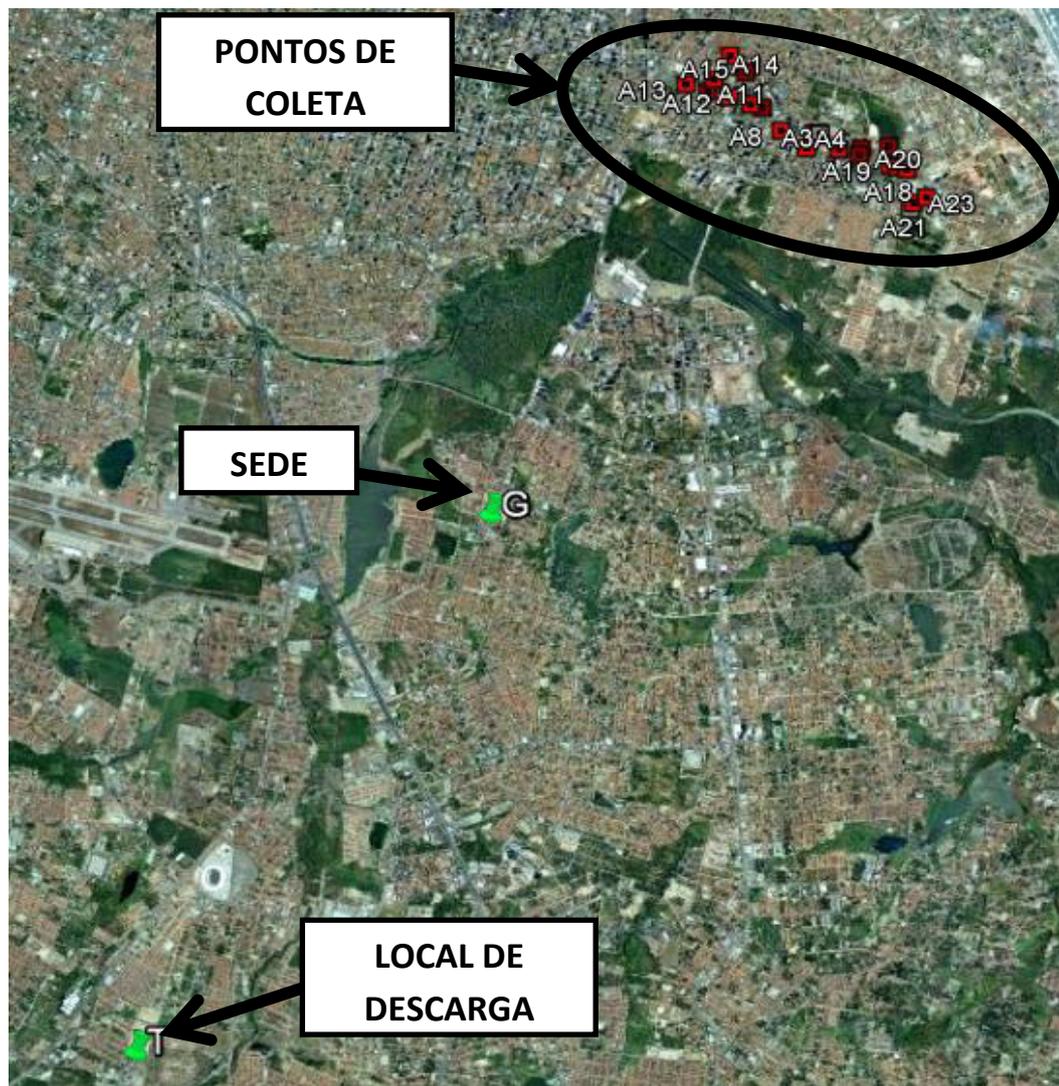
coordenadas UTM são projeções analíticas que tem como objetivo minimizar todas as deformações de um mapa a níveis toleráveis. Em casos de levantamentos cartográficos de grandes superfícies, superiores a 25km, seria impossível utilizar um sistema ortogonal sem distorções, devido à curvatura da terra. A Projeção UTM permite mapear áreas de grandes extensões com significativo controle de distorções.

Para a obtenção das latitudes, convencionou-se para a linha do Equador o valor de 10.000.000,00m, sendo os valores crescentes no sentido norte e decrescentes no sentido sul. Da mesma forma, para a obtenção das longitudes, convencionou-se o valor de 500.000,00m para o meridiano central, sendo crescentes os valores a direita da linha, e decrescentes os valores a esquerda.

3.4.3 Mapeamento de pontos de coleta

Todos os pontos de coleta mapeados para o estudo em questão receberam rótulos seguindo a sequência $A1, A2, \dots, A(n-2)$, onde n é a quantidade de nós do grafo; a garagem recebeu o rótulo G ; e o local de descarrego o rótulo T , conforme figura 7.

Figura 7 – Mapeamento dos pontos de coleta

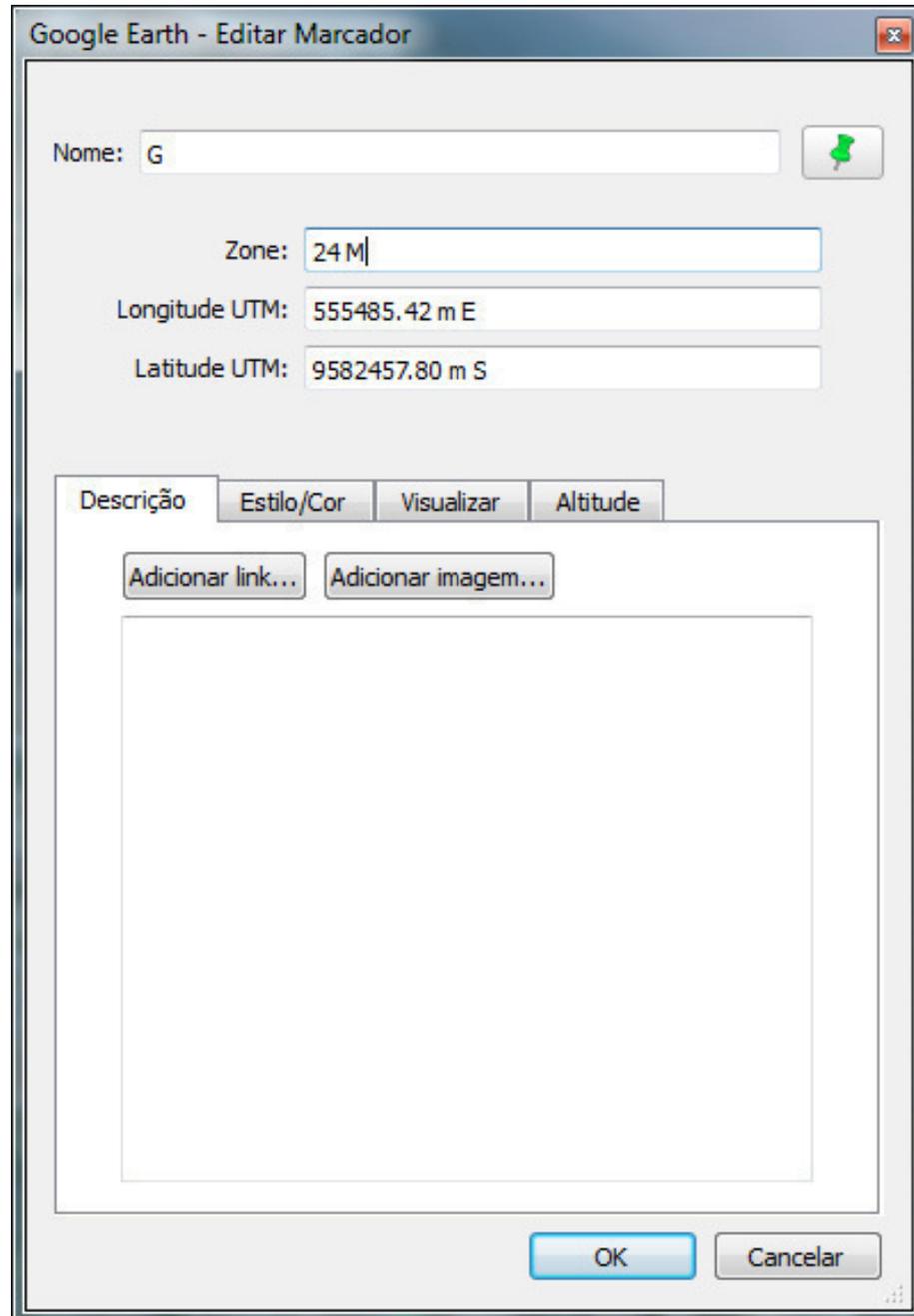


Fonte: *Google Earth 7.0.2.8415* (2012)

Ciente da localização de cada um dos pontos, o cadastramento destes é feito utilizando-se da ferramenta “marcador” no *software Google Earth*. Após o cadastramento de todos os nós, foram extraídas as coordenadas de latitude e

longitude de cada um dos pontos de coleta, conforme figura 8, e montada uma tabela de coordenadas com todos os pontos do problema, conforme tabela 2.

Figura 8 – Coordenadas geográficas



Fonte: *Google Earth 7.0.2.8415* (2012)

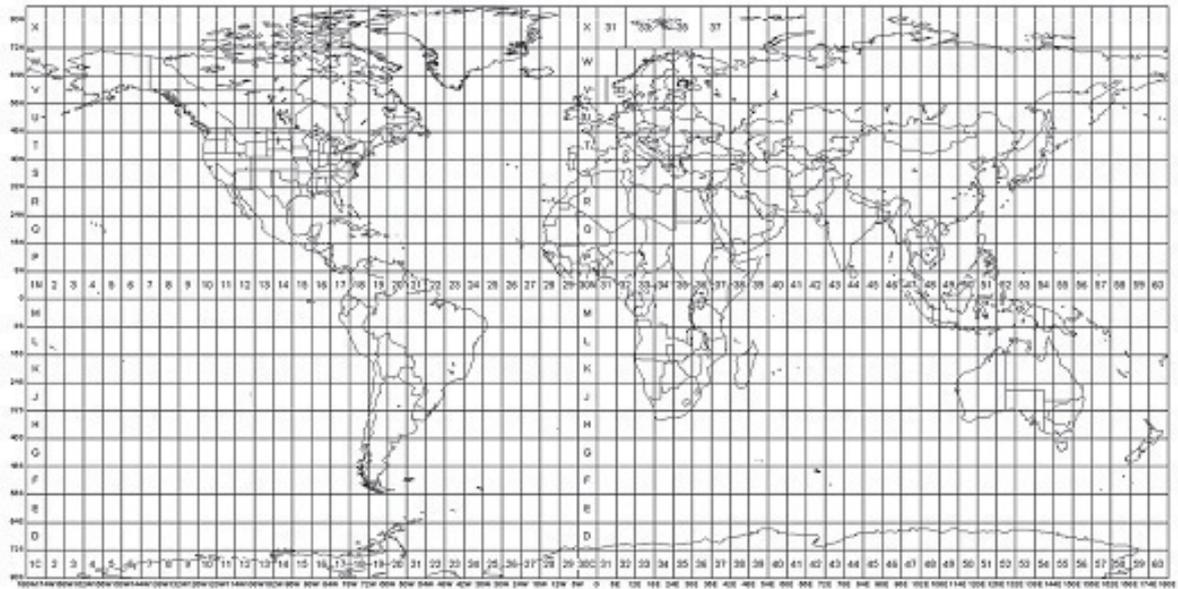
Tabela 2 – Relação de pontos de coleta

Descrição do Ponto	Zona	Latitude UTM	Longitude UTM
G	24	555485.42 m E	9582457.80 m S
T	24	552254.16 m E	9577302.36 m S
A1	24	558929.27 m E	9586152.08 m S
A2	24	558909.19 m E	9586092.22 m S
A3	24	558426.80 m E	9586158.22 m S
A4	24	558722.29 m E	9586145.45 m S
A5	24	558494.44 m E	9586301.57 m S
A6	24	558545.33 m E	9586297.24 m S
A7	24	558549.65 m E	9586293.25 m S
A8	24	558197.10 m E	9586326.01 m S
A9	24	558026.04 m E	9586543.51 m S
A10	24	557529.21 m E	9586702.55 m S
A11	24	557919.33 m E	9586575.50 m S
A12	24	557724.12 m E	9586645.01 m S
A13	24	557328.76 m E	9586772.06 m S
A14	24	557732.99 m E	9587044.18 m S
A15	24	557586.03 m E	9586817.96 m S
A16	24	557875.41 m E	9586887.19 m S
A17	24	559176.97 m E	9586175.88 m S
A18	24	559252.42 m E	9585971.95 m S
A19	24	559186.42 m E	9585990.11 m S
A20	24	559337.85 m E	9585948.87 m S
A21	24	559396.57 m E	9585628.89 m S
A22	24	559372.78 m E	9585572.10 m S
A23	24	559516.59 m E	9585677.94 m S

Fonte: O autor

Na tabela acima a zona 24 representa o fuso UTM no qual os pontos são localizados. Para o sistema de coordenadas UTM no Brasil, tem-se 8 fusos UTM, numerados de 25 a 18, conforme figuras 9 e 10. O fuso central ou meridiano central é rotulado como fuso 30 e todos os demais a esquerda decrescem a numeração e os posicionados a direita aumentam a numeração de modo que o globo é subdividido em 60 fusos.

Figura 9 – Divisão do Globo em zonas UTM



Fonte: Edilson Alves (2008)

Figura 10 – Divisão do Brasil em zonas UTM e seus respectivos meridianos centrais

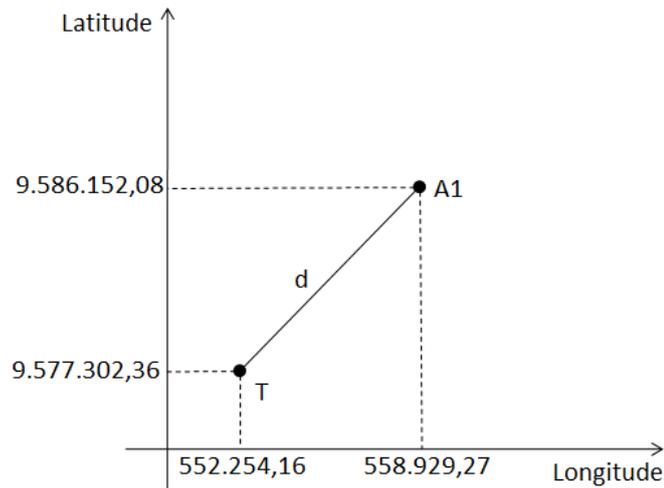


Fonte: Edilson Alves (2008)

Também pode-se perceber na tabela 2 que, conforme dito na sessão 3.4.2, cada ponto apresenta coordenadas em metros sendo as latitudes a leste do meridiano central e as longitudes a sul da linha do equador. Portanto, para se calcular a distância entre dois pontos, tomam-se os valores de latitude e longitude como coordenadas euclidianas, conforme figura 11, onde distância se dá pela

fórmula $d = \sqrt{DLA^2 + DLO^2}$, onde DLA é a diferença entre latitudes e DLO a diferença entre longitudes de cada dupla de pontos.

Figura 11 – Coordenadas euclidianas



Fonte: O autor

Portanto, a distância determinada pela fórmula $d = \sqrt{DLA^2 + DLO^2}$ é de 11.080,00 metros, ou seja, 11,08 quilômetros.

Seguindo o exposto, para a obtenção de todas as distâncias possíveis, foi utilizada como suporte uma planilha do *software Microsoft Excel*, com o objetivo de montar a tabela Matriz de Distâncias entre Pontos (Ver ANEXO II).

3.5 Modelagem do problema em *Excel*

Relembrando formulação demonstrada na sessão 2.7.3, segue:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

$$\text{s. a: } \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{saída}) \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{chegada}) \quad (19)$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (i \neq j; i = 2, \dots, n; j = 2, \dots, n) \quad (\text{sub-rotas}) \quad (20)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, u_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

Esta formulação foi adaptada para o *Excel*, conforme demonstrado a seguir.

3.5.1 Definição do arranjo da matriz distância

Conforme dito na sessão 3.4.3, as distâncias entre os pontos foram dispostas em uma planilha de *Excel*. Para facilitar a compreensão, as matrizes serão ilustradas neste trabalho como imagem, conforme segue a figura 12.

Figura 12 – Matriz de distâncias entre pontos (*Excel*)

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
7	PONTO	G	T	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14
8	G	0,00	6,08	5,05	4,99	4,73	4,91	4,88	4,91	4,91	4,72	4,81	4,71	4,78	4,75	4,69	5,11
9	T	6,08	0,00	11,08	11,03	10,79	10,96	10,95	10,98	10,98	10,80	10,90	10,78	10,87	10,83	10,74	11,16
10	A1	5,05	11,08	0,00	0,06	0,50	0,21	0,46	0,41	0,41	0,75	0,98	1,50	1,10	1,30	1,72	1,49
11	A2	4,99	11,03	0,06	0,00	0,49	0,19	0,46	0,42	0,41	0,75	0,99	1,51	1,10	1,31	1,72	1,51
12	A3	4,73	10,79	0,50	0,49	0,00	0,30	0,16	0,18	0,18	0,28	0,56	1,05	0,66	0,85	1,26	1,13
13	A4	4,91	10,96	0,21	0,19	0,30	0,00	0,28	0,23	0,23	0,56	0,80	1,32	0,91	1,12	1,53	1,34
14	A5	4,88	10,95	0,46	0,46	0,16	0,28	0,00	0,05	0,06	0,30	0,53	1,05	0,64	0,84	1,26	1,06
15	A6	4,91	10,98	0,41	0,42	0,18	0,23	0,05	0,00	0,01	0,35	0,57	1,09	0,69	0,89	1,31	1,10
16	A7	4,91	10,98	0,41	0,41	0,18	0,23	0,06	0,01	0,00	0,35	0,58	1,10	0,69	0,90	1,31	1,11
17	A8	4,72	10,80	0,75	0,75	0,28	0,56	0,30	0,35	0,35	0,00	0,28	0,77	0,37	0,57	0,98	0,86
18	A9	4,81	10,90	0,98	0,99	0,56	0,80	0,53	0,57	0,58	0,28	0,00	0,52	0,11	0,32	0,73	0,58
19	A10	4,71	10,78	1,50	1,51	1,05	1,32	1,05	1,09	1,10	0,77	0,52	0,00	0,41	0,20	0,21	0,40
20	A11	4,78	10,87	1,10	1,10	0,66	0,91	0,64	0,69	0,69	0,37	0,11	0,41	0,00	0,21	0,62	0,50
21	A12	4,75	10,83	1,30	1,31	0,85	1,12	0,84	0,89	0,90	0,57	0,32	0,20	0,21	0,00	0,42	0,40
22	A13	4,69	10,74	1,72	1,72	1,26	1,53	1,26	1,31	1,31	0,98	0,73	0,21	0,62	0,42	0,00	0,48
23	A14	5,11	11,18	1,49	1,51	1,13	1,34	1,06	1,10	1,11	0,86	0,58	0,40	0,50	0,40	0,49	0,00
24	A15	4,84	10,91	1,50	1,51	1,07	1,32	1,04	1,09	1,10	0,78	0,52	0,13	0,41	0,22	0,26	0,27
25	A16	5,03	11,11	1,28	1,30	0,91	1,13	0,85	0,89	0,90	0,65	0,38	0,39	0,31	0,29	0,56	0,21
26	A17	5,24	11,25	0,25	0,28	0,75	0,46	0,69	0,64	0,64	0,99	1,21	1,73	1,32	1,53	1,94	1,68
27	A18	5,15	11,14	0,37	0,36	0,85	0,56	0,83	0,78	0,77	1,11	1,35	1,87	1,46	1,67	2,08	1,86
28	A19	5,12	11,11	0,30	0,30	0,78	0,49	0,76	0,71	0,71	1,04	1,29	1,80	1,40	1,60	2,02	1,80
29	A20	5,20	11,18	0,46	0,45	0,93	0,65	0,91	0,87	0,86	1,20	1,44	1,96	1,55	1,76	2,17	1,94
30	A21	5,04	10,97	0,70	0,67	1,10	0,85	1,13	1,08	1,08	1,39	1,65	2,15	1,75	1,96	2,36	2,18
31	A22	4,98	10,91	0,73	0,70	1,11	0,87	1,14	1,10	1,09	1,40	1,66	2,16	1,77	1,97	2,37	2,20
32	A23	5,16	11,09	0,75	0,74	1,19	0,92	1,20	1,15	1,15	1,47	1,72	2,24	1,83	2,04	2,45	2,25

Fonte: o Autor

Por se tratar de uma adaptação para *Excel* nota-se que a matriz distância representada acima está inserida no conjunto de células D7:AC32.

3.5.2 Variáveis de decisão

Há informações importantes dentro de qualquer modelo a ser estudado. Dentre essas informações têm-se as variáveis de decisão, restrições inerentes ao problema, e a função objetivo, onde esta determina o valor a ser maximizado ou minimizado de acordo com a necessidade da modelagem.

Sendo assim, em problemas de otimização discreta, como já é sabido, são geradas inúmeras variáveis do tipo 0-1, conforme já explanado mais detalhadamente em tópico anterior. Na modelagem em *Excel*, essas variáveis são

representadas por uma matriz resposta, sendo 1 o valor que representa a ligação entre dois nós do grafo, ou seja a ocorrência da ligação, e 0, caso contrário.

Dessa forma, assim como na matriz de distâncias entre nós, as variáveis de decisão serão dispostas em uma matriz de mesma quantidade de linhas e colunas, conforme figura 13.

Figura 13 – Matriz de variáveis de decisão (Excel)

	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD
7	X	G	T	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23
8	G	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	A1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	A2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	A3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	A4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	A5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	A6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	A7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	A8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	A9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	A10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	A11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	A12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
22	A13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	A14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
24	A15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	A16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	A17	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	A18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
28	A19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
29	A20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
30	A21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
31	A22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
32	A23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Fonte: o Autor

Vale ressaltar que os valores preenchidos na matriz de variáveis de decisão são preenchidos automaticamente pela otimização. Os valores gerados após a resolução do problema são visualizados no ANEXO III. Porém, de forma análoga, as variáveis de decisão estão compreendidas no conjunto de células AE7:BD32.

3.5.3 Função Objetivo

Neste estudo a função objetivo corresponde função que gerará como resultado o deslocamento ou distância total em quilômetros que deve ser minimizada.

Portanto, detalhando o retro exposto, a conversão da função objetivo $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$, representada em fórmula do Excel corresponde à expressão: =SOMARPRODUTO (AF8:BD32;E8:AC32), conforme figura 14, cujo resultado é o produto das matrizes de distâncias entre os nós, e a matriz binária de variáveis de decisão gerada como resposta da otimização, ou seja, tem-se como resultado 0 ou 1 (ver anexo III).

Figura 14 – Função objetivo (Excel)

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1															
2															
3															
7	PONTO	G	T	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A11
8	G	0,00	6,08	5,05	4,99	4,73	4,91	4,88	4,91	4,91	4,72	4,81	4,71	4,78	4,78
9	T	6,08	0,00	11,08	11,03	10,79	10,96	10,95	10,98	10,98	10,80	10,90	10,78	10,87	10,87
10	A1	5,05	11,08	0,00	0,06	0,50	0,21	0,46	0,41	0,41	0,75	0,98	1,50	1,10	1,10
11	A2	4,99	11,03	0,06	0,00	0,49	0,19	0,46	0,42	0,41	0,75	0,99	1,51	1,10	1,10
12	A3	4,73	10,79	0,50	0,49	0,00	0,30	0,16	0,18	0,18	0,28	0,56	1,05	0,66	0,66
13	A4	4,91	10,96	0,21	0,19	0,30	0,00	0,28	0,23	0,23	0,56	0,80	1,32	0,91	0,91
14	A5	4,88	10,95	0,46	0,46	0,16	0,28	0,00	0,05	0,06	0,30	0,53	1,05	0,64	0,64
15	A6	4,91	10,98	0,41	0,42	0,18	0,23	0,05	0,00	0,01	0,35	0,57	1,09	0,69	0,69
16	A7	4,91	10,98	0,41	0,41	0,18	0,23	0,06	0,01	0,00	0,35	0,58	1,10	0,69	0,69
17	A8	4,72	10,80	0,75	0,75	0,28	0,56	0,30	0,35	0,35	0,00	0,28	0,77	0,37	0,37
18	A9	4,81	10,90	0,98	0,99	0,56	0,80	0,53	0,57	0,58	0,28	0,00	0,52	0,11	0,11
19	A10	4,71	10,78	1,50	1,51	1,05	1,32	1,05	1,09	1,10	0,77	0,52	0,00	0,41	0,41
20	A11	4,78	10,87	1,10	1,10	0,66	0,91	0,64	0,69	0,69	0,37	0,11	0,41	0,00	0,00

Fonte: o Autor

3.5.4 Restrições de saída e chegada

Em problemas reais, como é o caso do abordado neste trabalho, há inúmeras restrições de tempo, de capacidade, físicas, de mão de obra, de acesso, entre outras, que serão desconsideradas para a formulação do modelo, uma vez que essas se restringirão às adjacências entre os nós do grafo, e à geração de subrotas abordadas na sessão seguinte.

As restrições que garantem as adjacências entre os nós são representadas matematicamente pelas expressões: de saída $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$, onde $j = 1, 2, \dots, n$; e de chegada $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$, onde $i = 1, 2, \dots, n$, onde n é o número de nós do grafo em questão.

Dessa forma as restrições de chegada e saída garantem que, de cada um dos nós, obtenha-se apenas um único nó antecessor e um único nó sucessor dentro do grafo, ou seja, que daquele ponto apenas haja uma partida e uma chegada, sem nunca ocorrer repetições dessas ações para o nó em questão. Em outras palavras, estas restrições asseguram a continuidade da rota dentro do grafo, também garantindo que cada caminhão passe apenas uma vez em cada ponto.

A linha de raciocínio empregada para as variáveis de decisão e função objetivo, também foi utilizada para as restrições do modelo, uma adaptação para o

Excel, sendo as restrições de chegada representadas pelas matrizes constantes no anexo III.

Nas células da matriz de restrições de chegada consta a fórmula =SOMA(AF8:BD8), cujo valor resposta deve ser igual a 1, atendendo à restrição de chegada para cada ponto. Da mesma forma, todas as outras células dessa matriz têm a mesma fórmula para os demais pontos do grafo, devendo novamente apresentar como resultado o valor 1, conforme figura 15.

Figura 15 – Restrições de chegada (Excel)

		=SOMA(AF8:BD8)												
	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI
1														
2														
3														
7	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23					
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0		1			
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1			

Fonte: o Autor

Por outro lado, para as restrições de saída de um ponto tem-se nas células a fórmula =SOMA(AF8:AF32), cujo valor resposta deve ser igual a 1. Assim como as restrições de chegada, as demais células da matriz apresentam a mesma fórmula e devem gerar como resultado o mesmo valor, conforme figura 16.

Figura 16 – Restrições de saída (Excel)

		=SOMA(AF8:AF32)													
	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS
23	A14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	A15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
25	A16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	A17	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	A18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	A19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	A20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	A21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	A22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	A23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33															
34															
35	ROTAS _{i,j}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
36															

Fonte: o Autor

3.5.5 Restrições de subrotas

Tratando-se de uma otimização discreta, cuja função objetivo deve ser minimizada, o modelo apresentará como menor rota, uma subrota contendo um subconjunto dos nós do grafo em questão. Ou seja, o resultado pode conter de dois a vinte e quatro nós, não atendendo a premissa básica de visitar todos os nós do grafo.

De acordo com Rangel (2012, p. 40), “[...] precisamos acrescentar restrições ao problema que tornem as soluções associadas às subrotas inviáveis”. Dessa forma, segundo Colin (2007, p. 183), “[...] deve-se incluir nas restrições a expressão $u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1$, para todo $i \neq j$, sendo i e j iguais a 2, 3, ..., $n-1$, onde n representa o número de nós do grafo; e u_i e u_j variáveis auxiliares sem significado físico.”

Interpretando a expressão e adaptando-a ao modelo em *Excel*, pode-se dizer que a expressão $u_i - u_j$ representa as restrições de fluxo, cujas células apresentam a fórmula =SOMA(AG40:AG64)-SOMA(AF41:BD41), conforme figura 17. Todos os valores constantes nesta matriz devem ser iguais a 1. Portanto, estas restrições garantem o fluxo positivo em cada um dos nós, ou seja, condicionam a cada nó a exigência de se ter um nó consecutivo.

O trecho de expressão nx_{ij} , representado pela matriz “determinação do fluxo máximo”, figura 18, representa a condição de que cada nó pode assumir qualquer posição no sequenciamento dos nós. Neste caso, x_{ij} representa o valor apresentado como resposta na matriz binária de variáveis de decisão, demonstrada na figura 13, e n um valor discreto pertencente ao conjunto N dos índices atribuídos aos nós.

Figura 17 – Matrizes de variáveis de decisão de fluxo e restrições de fluxo (Excel)

=SOMA(AG40:AG64)-SOMA(AF41:BD41)																										
AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD	BE
MATRIZ DE VARIÁVEIS DE DECISÃO DE FLUXO																										
Y	G	T	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	
G	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	23	0	
A1	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A2	0	0	0	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A4	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A5	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A6	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A7	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A17	0	0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0	0	
A19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	0	0	0	0	
A20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21	
A22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22	0	0	
A23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	
RESTRIÇÕES DE FLUXO																										
=SOMA(AG40:AG64)-SOMA(AF41:BD41)																										
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Fonte: O autor

Por fim, a matriz resposta “Matriz de variáveis de decisão de fluxo”, deve atender às duas premissas detalhadas: manutenção do fluxo positivo e do sequenciamento máximo. Esta condição é representada pelo trecho $\leq n - 1$.

Figura 18 – Matriz determinação do fluxo Maximo (Excel)

=AR27*24																										
	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
DETERMINAÇÃO DO FLUXO MÁXIMO																										
38																										
39	PONTO	G	T	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23
40	G	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0
42	A1	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	A2	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	A3	0	0	0	0	0	24	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	A4	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	A5	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
47	A6	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	A7	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	A8	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	A9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
51	A10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	A11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	A12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	A13	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
55	A14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0
56	A15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
57	A16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58	A17	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
59	A18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	24	0	0	0
60	A19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0
61	A20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0
62	A21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24
63	A22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0
64	A23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0
65																										

Fonte: O autor

3.5.6 Restrições operacionais

Conforme dito anteriormente, os problemas reais apresentam várias restrições que não foram levadas em consideração para a formulação do modelo explanado neste trabalho. Dito isso, não se pode deixar de mencionar como restrição a exigência de descarregar o caminhão após visitar todos os pontos de coleta e antes de retornar à sede (garagem).

Para tanto, novas restrições foram adicionadas ao modelo. Para este caso, a solução seria vincular os dois nós, sendo o local de descarrego (T) o ponto de origem, e a garagem (G) o ponto destino para o arco em questão. Na sessão seguinte, será mostrado como o modelo de otimização exerce influência na resolução do PCV e como as variáveis de decisão, função objetivo e restrições são alimentadas no otimizador matemático.

3.6 Software de otimização

Como visto na sessão 3.5, o *Microsoft Excel* foi a ferramenta computacional escolhida para desenvolvimento da modelagem, com o objetivo de resolver o problema do caixeiro-viajante anteriormente demonstrado.

No entanto, por se tratar de um problema de programação linear inteira, com 1250 variáveis de decisão, com tempo elevado de resolução, há a necessidade de se utilizar um *software* de otimização, uma vez que o *Excel* é limitado à 200 variáveis. Outro fator determinante para a utilização de um otimizador é a quantidade de interações que devem ser feitas para atender a todas as restrições do modelo. Como, por exemplo, as subrotas que, segundo Colin (2007, p. 183), “[...] para n o número total de cidades e s o número de cidades de S , o número de restrições que representarão um subconjunto com s cidades será $\frac{n!}{s! \cdot (n-s)!}$, em que $x!$ representa o fatorial de x .”

Portanto, devido às limitações de resolução do solver do *Excel*, foi adicionado ao *software* o *OpenSolver*, *software* de otimização de código aberto para o *Excel*.

De acordo com www.opensolver.org, “[...] o OpenSolver foi desenvolvido por Andrew Mason e Dunning Lain no departamento de ciência de engenharia,

localizado na Universidade de Auckland, Nova Zelândia”. Ferramenta de otimização linear e inteira desenvolvida em *Visual Basic for Applications (VBA)*, que consiste em uma linguagem de programação específica para os *softwares* da *Microsoft*, é disponibilizado como complemento do Excel e apresenta as seguintes vantagens:

- Resolve rapidamente grandes problemas de programação linear;
- É compatível com todos os modelos de Solver (otimizador padrão do *Excel*) existentes;
- Não há limites artificiais em relação ao tamanho do problema e quantidade de células variáveis;
- É um *software* de código aberto.

Vale salientar que o OpenSolver foi desenvolvido para o *Excel* 2003, 2007 e 2010 (incluindo a versão 64 bits) rodando em plataforma Windows.

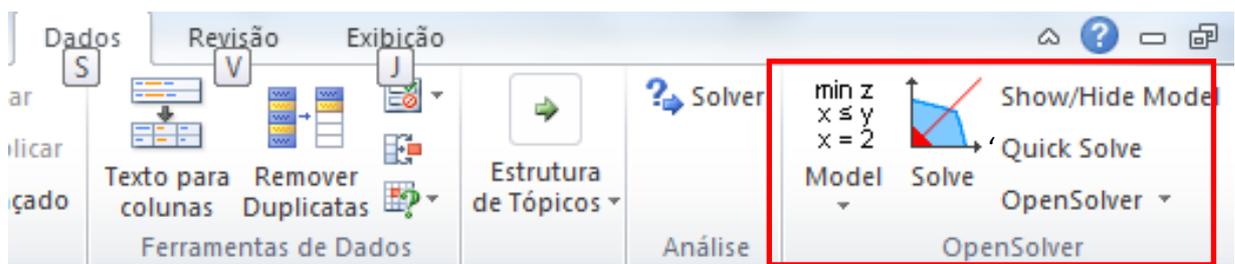
No desenvolvimento do modelo de otimização, o OpenSolver percorre todas as variáveis de decisão e grava os valores da função objetivo, ao passo que as restrições mudam. Isso permite que os coeficientes das equações associadas sejam determinados.

3.7 Alimentando o otimizador matemático

Após a modelagem do problema em *Excel*, será feita nesta sessão, para a alimentação do otimizador matemático com o objetivo de encontrar a solução ótima para o problema.

O otimizador é exibido na guia dados, conforme figura 19, e deve ter seus campos preenchidos seguindo os passos seguintes.

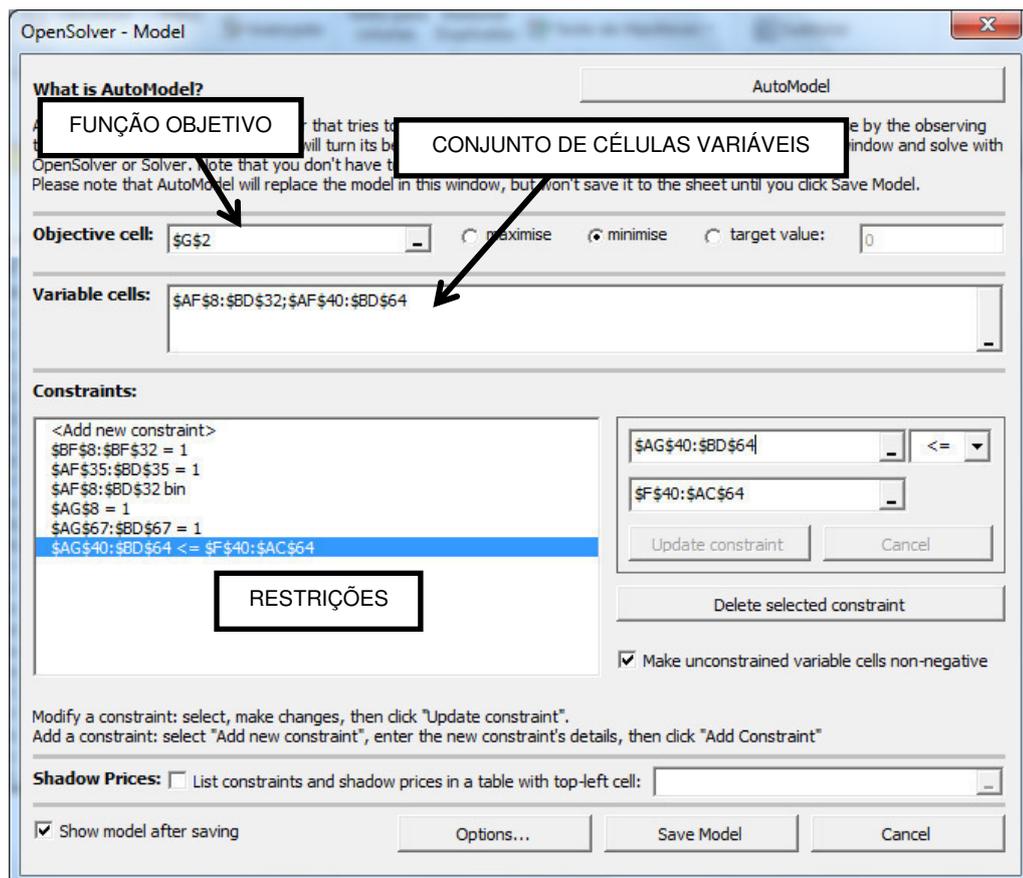
Figura 19 – Exibição do menu *OpenSolver*



Fonte: *Microsoft Excel* 2010

- a) Função objetivo: inicialmente seleciona-se a célula correspondente à função objetivo e determina-se se esta deve ser maximizada, minimizada ou apresentar um valor alvo determinado, conforme figura 20. Para o caso específico de resolução de problemas com as características apresentadas, a função objetivo deve ser minimizada.

Figura 20 – Campos para caracterização da função objetivo

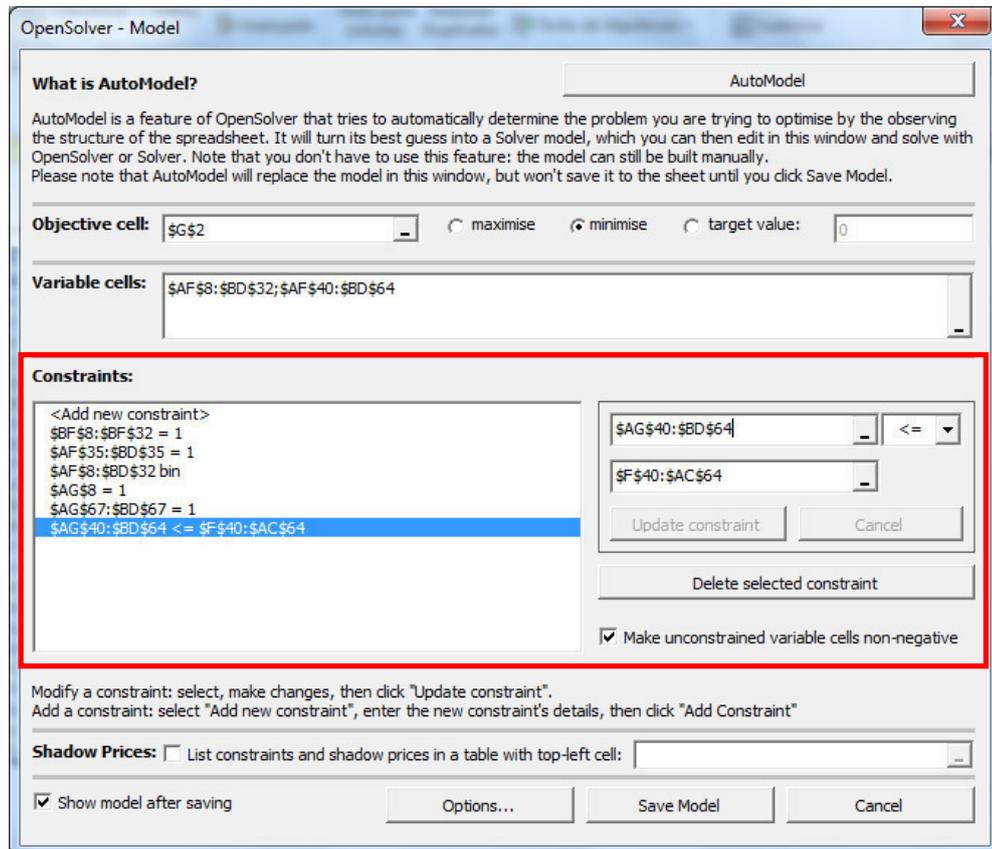


Fonte: Microsoft Excel 2010

- b) Células variáveis: neste campo devem ser informados os grupos de células que terão seus valores variáveis, conforme figura 20. Para o problema em comento, tem-se as matrizes de variáveis de decisão binária e de fluxo, apresentadas anteriormente. Vale ressaltar que estas matrizes, inicialmente, devem estar em branco, uma vez que o preenchimento é automático e condicionado às restrições do problema.

c) Restrições: neste campo serão informadas todas as restrições que envolvem o problema. A primeira expressão apresentada na figura 21 é referente ao grupo de células de restrições de chegada. Este grupo apresentará seus valores iguais a 1. A segunda expressão é referente às restrições de saída, as quais também devem ser iguais a 1. A terceira expressão caracteriza a matriz de variáveis de decisão como binária. A quarta expressão fixa o vínculo entre os pontos de descarga dos caminhões e sede. A quinta expressão está relacionada à matriz de variáveis de restrições de fluxo. Estes valores também devem ser iguais a 1. Por fim, a última expressão condiciona aos valores da matriz de determinação do fluxo máximo os valores da matriz de variáveis de decisão de fluxo, onde estes devem ser menores ou iguais aos anteriores.

Figura 21 – Restrições



Fonte: Microsoft Excel 2010

- d) Após a completa alimentação do modelo, seleciona-se o botão de salvamento e posteriormente o botão solver apresentado na figura 19.
- e) Por fim, o otimizador calculará o melhor resultado para a função objetivo atendo todas as premissas determinadas na alimentação.

3.8 Extração e análises de resultados da otimização

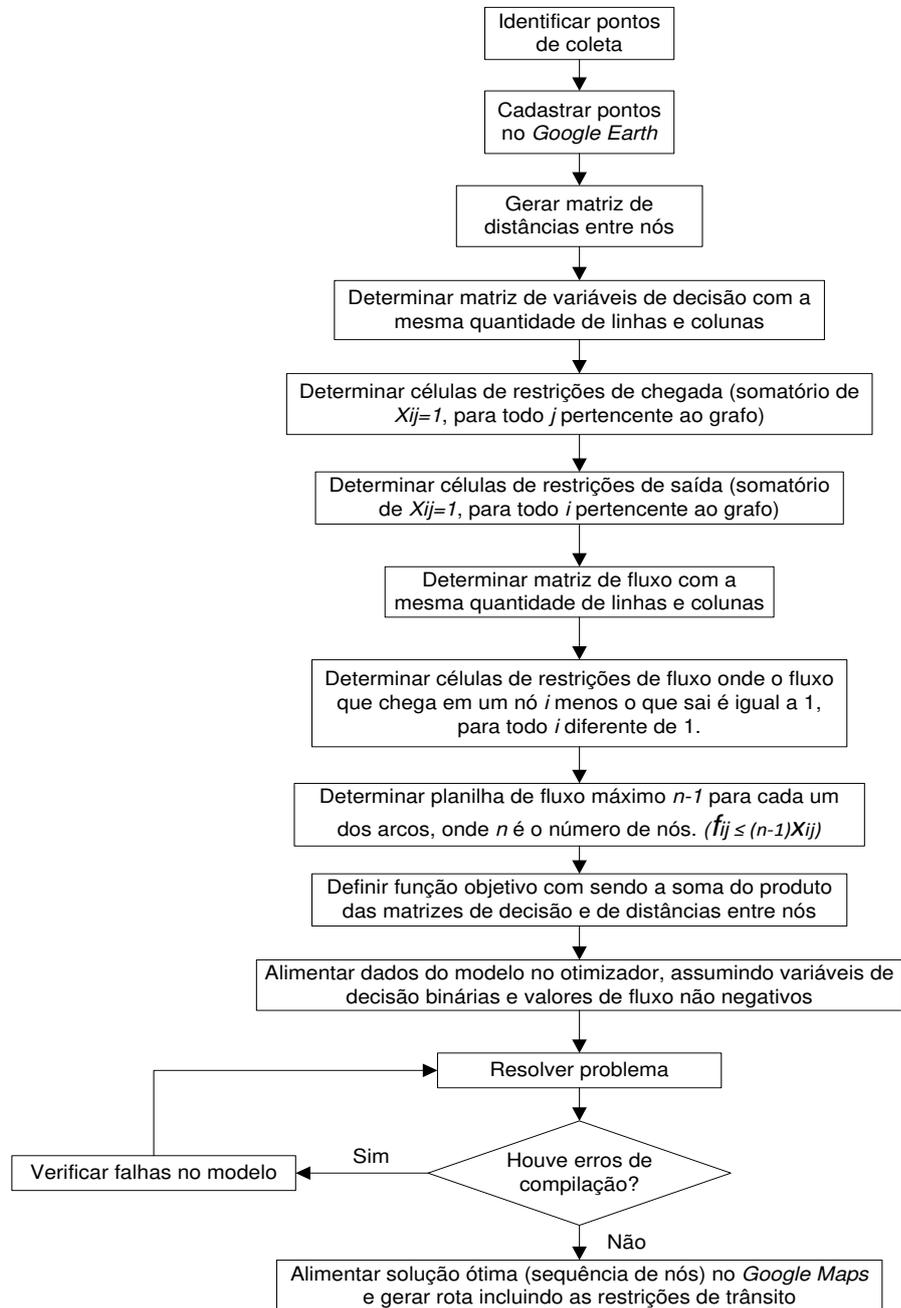
Depois de realizadas a modelagem das matrizes e alimentação do otimizador, para ser realizada a extração dos resultados, ajustes e interpretações precisam ser feitas.

Inicialmente, analisando o arranjo dos valores nas tabelas, após a otimização, tem-se:

- a) Matriz de distâncias entre pontos: permanece inalterada, uma vez que nenhuma restrição referente a esta matriz foi relacionada na resolução;
- b) Matriz de variáveis de decisão: apresentará como resultado os valores 0 ou 1, atendendo todas as restrições de chegada e saída, conforme detalhado na sessão 3.5.2;
- c) Matriz de determinação do fluxo máximo: apresentará disposição de valores similar à matriz de variáveis de decisão;
- d) Matriz de variáveis de decisão de fluxo: apresentará o sequenciamento dos pontos de coleta, ou seja, a rota partindo da sede;
- e) Função objetivo: apresentará o menor valor correspondente à distância percorrida, desde que todas as restrições sejam atendidas. Como as distâncias entre pontos são cartesianas, o valor da função objetivo não pode ser comparado aos dados reais, porém o sequenciamento dos pontos, para fins de análise, pode ser considerado ideal. Por fim, este sequenciamento é alimentado no *software* livre *Google Maps* e este gerará o deslocamento real, considerando as restrições de trânsito.

3.9 Fluxograma para a proposta de PLI

Figura 22 – Fluxograma PLI em Excel



Fonte: O Autor

3.10 Heurísticas para solução do PCV

Conforme mencionado no capítulo 2 deste trabalho, foram escolhidas duas heurísticas de construção de rotas, heurística do vizinho mais próximo e

heurística construtiva da inserção mais barata, com o objetivo de comparar e validar os resultados gerados pela otimização com os dados reais de produção.

A seguir serão mostradas as particularidades e implementações em *Excel* para cada uma delas.

3.10.1 *Heurística do vizinho mais próximo*

Segundo Marcone (2013) “[...] a ideia central dessa heurística é construir uma rota passo a passo, adicionando à solução corrente a cidade mais próxima (e ainda não visitada) da última cidade inserida”. Dessa forma, pode-se verificar que para um grafo com 25 nós tem-se 25 arcos, ou seja, são necessárias 25 interações entre nós. Assim, para realizar a primeira interação, tem-se 24 diferentes possibilidades, onde é escolhida a de menor distância. Da mesma forma, para a segunda interação, tem-se 23 avaliações a fazer. Esta lógica segue até que seja realizada a vigésima quarta interação com apenas uma avaliação. Por fim, faz-se a inserção forçada do ponto de partida da rota, ou seja, para a vigésima quinta interação, tem-se novamente uma avaliação.

Portanto, para um grafo de 25 nós, tem que ser feitas 301 avaliações. Por este motivo, a modelagem em *Excel* para esta heurística dispensa o uso de otimização, uma vez que esta é uma modelagem de baixa complexidade, conforme tabela 3.

Tabela 3 – Complexidade da heurística construtiva do vizinho mais próximo aplicada ao PCV

INTERAÇÃO	Nº DE AVALIAÇÕES
1	N-1
2	N-2
...	...
N-1	N-(N-1)
N	1
TOTAL	$1+N(N-1)/2$

Fonte: Marcone (2013)

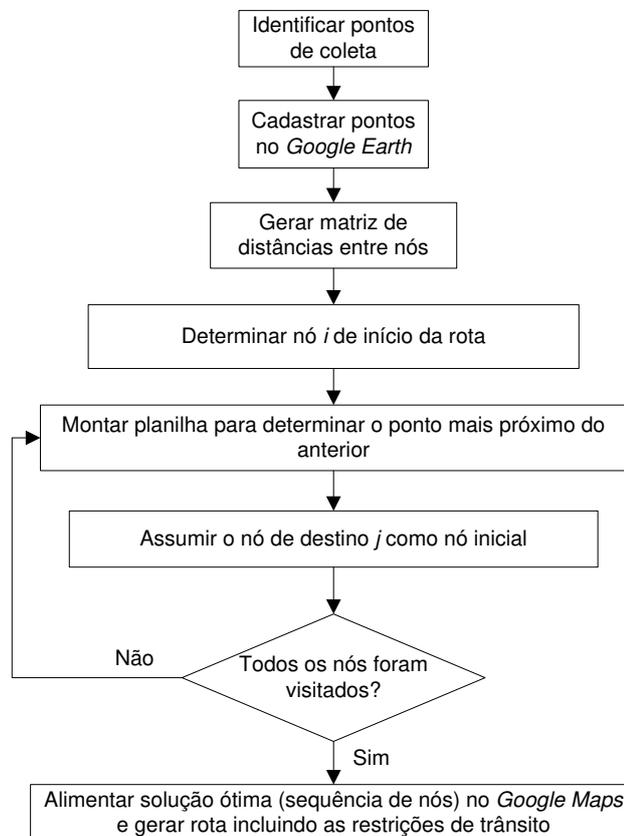
Ademais, a determinação da rota pode ser feita a partir de uma análise simples da matriz de distâncias entre pontos, ver anexo II. Após a determinação da

rota, atendendo a premissa do vizinho mais próximo, basta somar os deslocamentos e analisar os resultados atingidos.

De forma análoga à otimização, esta forma de resolução também requer que o sequenciamento de pontos seja alimentado no *software* livre *Google Maps* para se ter a distância percorrida levando-se em consideração as restrições de trânsito.

3.10.1.1 Fluxograma da Heurística do Vizinho mais Próximo

Figura 23 – Fluxograma Heurística do vizinho mais próximo em *Excel*



Fonte: O autor

3.10.2 Heurística da inserção mais barata

A ideia central dessa heurística é, Segundo Marcone (2013), “[...] construir uma rota passo a passo, partindo de rota inicial envolvendo 3 cidades e adicionar a cada passo, a cidade k (ainda não visitada) entre a ligação (i, j) de cidades já visitadas, cujo custo de inserção seja o mais barato”.

Dessa forma, para se ter a rota gerada utilizando esta heurística construtiva, inicialmente, que determinar uma rota a partir de três primeiros pontos através da metodologia do vizinho mais próximo. Para este caso, restam $N-3$ interações a realizar, onde N representa o total de nós do grafo. Para cada interação deve-se avaliar, para cada um dos n arcos existentes, qual dos pontos ainda não visitados causa o menor impacto na distância total percorrida. Portanto para a primeira interação tem-se $3(N-3)$ avaliações a fazer. Estendendo o raciocínio para todo o modelo, tem-se para a interação $N-3$, $(N-1)(N-(N-1))$ avaliações, conforme tabela 4.

Tabela 4 – Complexidade da heurística construtiva da inserção mais barata aplicada ao PCV.

INTERAÇÃO	Nº DE AVALIAÇÕES
1	$3(N-3)$
2	$4(N-4)$
...	...
$i - 2$	$i(N-1)$
...	...
N-3	$(N-1) (N-(N-1))$
TOTAL	$\sum_{i=3}^{N-1} i(N - i)$

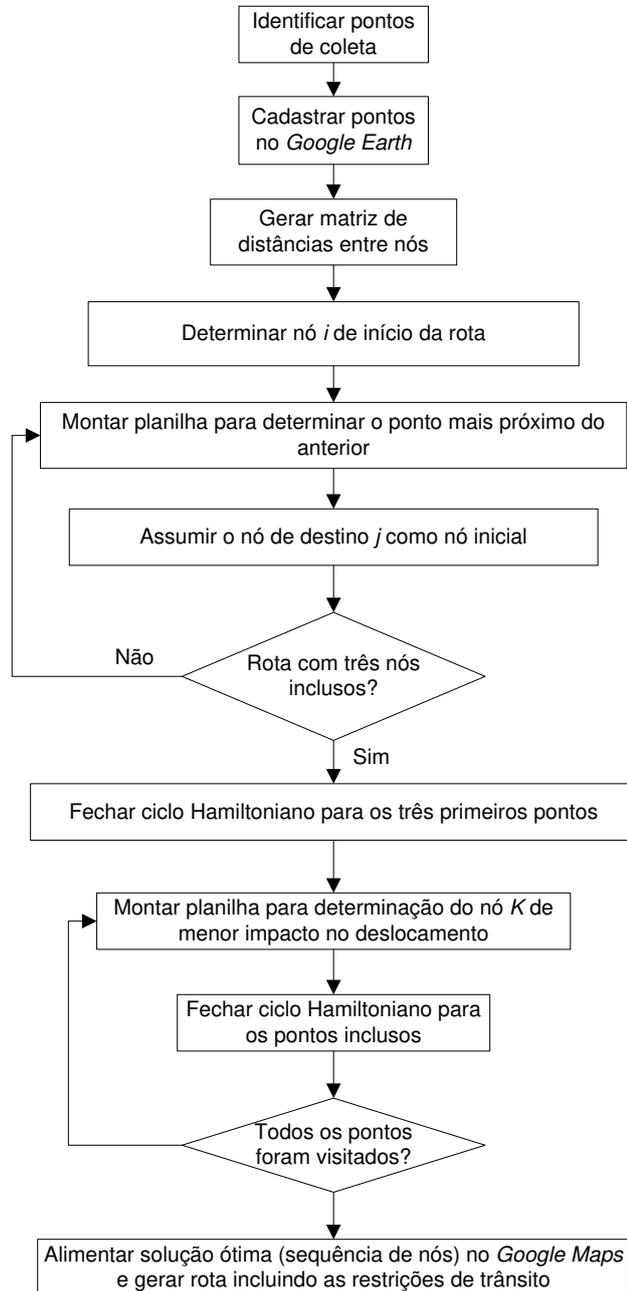
Fonte: Marcone (2013)

Para o problema com 25 nós, tem-se para a determinação da primeira rota de vizinhos mais próximos, 69 avaliações a fazer; para a primeira interação de inserção mais barata, 66 avaliações; para a segunda, 84 avaliações. Assim, para o modelo completo tem-se 2599 avaliações. Da mesma forma que na heurística anterior, ao término das interações, tem-se que fazer a inserção forçada dos dois últimos arcos, referentes aos locais de descarga e sede (garagem).

De forma análoga à otimização e à heurística anteriormente apresentada, esta forma de resolução também requer que o sequenciamento de pontos seja alimentado no *software* livre *Google Maps* para se ter a distância percorrida levando-se em consideração as restrições de trânsito.

3.10.2.1 Fluxograma da Heurística da Inserção mais Barata

Figura 24 – Fluxograma Heurística da Inserção mais Barata em *Excel*.



Fonte: O autor

3.11 Análise de resultados

A otimização apresentada nas sessões 3.7 e 3.8 gera o seguinte sequenciamento de pontos de coleta: G-A13-A10-A15-A14-A16-A12-A11-A9-A8-A5-A6-A7-A4-A2-A1-A17-A19-A18-A20-A23-A21-A22-A3-T-G. O resultado da função

objetivo, levando-se em consideração as distâncias euclidianas, foi de 25,58km, porém após a alimentação do *Google Maps*, o valor da função objetivo passou a ser de 36,32km, representando uma correção de 42%, conforme tabela 5.

Tabela 5 – Resultados da PLI

Método	Função Objetivo otimizada	Função Objetivo <i>Google Maps</i>	Fator de correção
PLI	25,58km	36,32km	42%

Fonte: O autor

Analisando os resultados da heurística do vizinho mais próximo, apresentada na sessão 3.9, tem-se o seguinte sequenciamento de pontos: G-A13-A10-A15-A12-A11-A9-A8-A5-A6-A7-A4-A2-A1-A17-A19-A18-A20-A23-A21-A22-A3-A16-A14-T-G. O resultado da função objetivo, levando-se em consideração as distâncias euclidianas, foi de 32,62km, porém após a alimentação do *Google Maps*, o valor da função objetivo passou a ser de 37,18km, representando uma correção de 14%, conforme tabela 6.

Tabela 6 – Resultados da Heurística do Vizinho mais Próximo

Método	Função Objetivo otimizada	Função Objetivo <i>Google Maps</i>	Fator de correção
Heurística do Vizinho mais Próximo	32,62km	37,18km	14%

Fonte: O autor

Por fim, analisando-se os resultados da heurística da inserção mais barata, tem-se o seguinte sequenciamento dos pontos de coleta: G-A13-A15-A10-A12-A14-A16-A11-A9-A8-A5-A6-A7-A1-A17-A20-A23-A21-A22-A18-A19-A2-A4-A3-T-G. O resultado da função objetivo, levando-se em consideração as distâncias euclidianas, foi de 26,66km, porém após a alimentação do *Google Maps*, o valor da função objetivo passou a ser de 37,05km, representando uma correção de 39%, conforme tabela 7.

Tabela 7 – Resultados da Heurística da Inserção mais Barata

Método	Função Objetivo otimizada	Função Objetivo <i>Google Maps</i>	Fator de correção
Heurística da Inserção mais Barata	26,66km	37,05km	39%

Fonte: O autor

Os resultados obtidos em ambos os métodos foram organizados na tabela 8 com o objetivo de compará-los com os dados reais de produção.

Tabela 8 – Comparativo de ganhos em quilômetros

Método	Função Objetivo otimizada	Função Objetivo <i>Google Maps</i>	Fator de correção	Deslocamento real	Ganho %
PLI	28,58km	36,32km	1,42	43,09km	15,71%
Heurística do Vizinheiro mais Próximo	32,62km	37,18km	1,14	43,09km	13,71%
Heurística da Inserção mais Barata	26,66km	37,05km	1,39	43,09km	14,01%

Fonte: O autor

A partir da tabela acima algumas análises podem ser feitas, tais como:

- Quanto à função objetivo percebe-se que a PLI apresenta o melhor resultado, sendo 27,52% menor se comparada à heurística do vizinho e 4,22% menor se comparada à heurística da inserção. Esta por sua vez é menor 22,36%, se comparada à heurística do vizinho.
- Quanto aos deslocamentos gerados no *Google Maps* a PLI novamente apresenta o melhor resultado, sendo 2,2% menor, se comparado à heurística do vizinho, e 0,54% menor, se comparada à heurística da inserção. Esta também é menor do que a heurística da inserção em 1,65%.
- No comparativo com os dados reais de produção a PLI confirma o retro exposto, gerando um ganho de 15,71%, contra 13,71% da heurística do vizinho e 14,01% da heurística da inserção.

A tabela 9 mostra o quanto melhorariam os indicadores operacionais se a quantidade coletada fosse mantida estável enquanto os deslocamentos variam de acordo com o método.

Nota-se que, com a redução na distância percorrida, os ganhos gerados pela PLI são melhores 17,11%, contra 14,59% e 15,21%, correspondente à Heurística do Vizinho e à Heurística da Inserção respectivamente.

Tabela 9 – Comparativo de ganhos em indicadores de desempenho

Método de resolução	Resultado <i>Google Maps</i>	Peso médio coletado	Ton/km proposta	Ganho % Real/Proposto
Atual	43,09km	7.672,73kg	0,180	-
PLI	36,32km	7.672,73kg	0,211	17,11%
Heurística do Vizinho	37,18km	7.672,73kg	0,206	14,59%
Heurística da inserção	37,05km	7.672,73kg	0,207	15,21%

Fonte: O autor

4 CONCLUSÃO

Considerando a dificuldade de resolver problemas de rede com grande número de pontos, o presente trabalho apresentou soluções viáveis para o problema com tempos de resolução aceitáveis e a baixo custo.

Foram apresentadas três diferentes formas de otimização de roteiros, sendo duas heurísticas e uma programação linear inteira, ambas apresentando resultados positivos na operação reduzindo deslocamentos e conseqüentemente custos. Os resultados obtidos pela programação linear inteira foram comparados com os das heurísticas como forma de validação da metodologia e de analisar os ganhos e perdas relativos.

Apesar das heurísticas gerarem resultados mais rapidamente, se comparadas à otimização em PLI, esta gera um resultado mais exato e, portanto, com maior confiabilidade, posto que executa um número muito maior de interações através do otimizador matemático, apresentando como resultado o menor deslocamento para um dado sequenciamento de pontos.

Portanto, quanto à escolha do método mais viável, se analisado o tempo de resposta, as heurísticas do Vizinheiro mais próximo ou da Inserção mais barata apresentam melhor desempenho. Em contrapartida, com relação à confiabilidade nos resultados, a PLI supera as heurísticas.

Por outro lado, para desenvolver uma modelagem em PLI, existe a necessidade de conhecimentos matemáticos específicos para trabalhar a otimização, o que não ocorre para as heurísticas, uma vez que, estas são métodos intuitivos e de fácil resolução.

Ademais, vale salientar que, independente do método escolhido, a solução apresentada por cada um deles é sempre melhor do que o atual método empírico utilizado pela empresa.

Em suma, todos os objetivos previstos para o trabalho foram alcançados, posto que foi demonstrado que é viável à empresa, através dos ganhos gerados pelos métodos, a aplicação das técnicas demonstradas, sendo assim necessário por parte da empresa o aprofundamento no conhecimento do assunto, tendo em vista as reduções nos custos, tempo, deslocamento, desgaste de caminhão e utilização de mão de obra.

4.1 Sugestão de Trabalhos Futuros

Como sugestão para trabalhos futuros pode-se citar o incremento das restrições de capacidade na modelagem, possibilitando assim o melhor arranjo de viagens e o melhor dimensionamento da frota de caminhões.

Outra sugestão consiste em aplicar modelagens matemáticas à solução do problema da coleta porta a porta, baseado no problema do carteiro chinês, uma vez que estão associados a este uma parcela significativa operacionais da logística de coleta de lixo.

Por fim, devido à vulnerabilidade de planilhas de *Excel*, incrementos computacionais se fazem necessários para aumentar a confiabilidade na modelagem, uma vez que planilhas são facilmente violadas. Atitudes como esta facilitariam a disseminação do modelo para os demais usuários da empresa e reduziriam a incidência de falhas de compilação ou manuseio do otimizador matemático.

REFERÊNCIAS

ARENALES, Marcos; ARMENTANO, Vinícius; MORABITO, Reinaldo; YANASSE, Horacio. **Pesquisa Operacional**. 6 tiragem. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

GOLDBARG, Marco César; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização Combinatória Programação Linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

MOREIRA, Daniel Augusto. **Pesquisa Operacional: Curso Introductório**. São Paulo: Thomson, 2007.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9 ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2012.

COLIN, Emerson C. **Pesquisa Operacional: 170 Aplicações em Estratégia, Finanças, Logística, Produção, Marketing e Vendas**. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

KONOWALENKO, Flávia. **Problema do Carteiro Chinês Não-orientado e Misto para a Otimização de Rotas na Cidade de Irati/PR**. 2012. Dissertação (Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia) - Departamentos de Construção Civil e de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

SOUZA, Marcone Jamilson Freitas. **Inteligência Computacional para Otimização**. Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais. Disponível em <http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=heur%C3%ADsticas%20de%20constru%C3%A7%C3%A3o%20de%20rotas.ppt&source=web&cd=1&ved=0CC4QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.inf.ufpr.br%2Faurora%2Fdisciplinas%2Ftopicosia%2Faulas%2Fico-construtivas.ppt&ei=CosEUfOLKIL28wSa9IG4Aw&usg=AFQjCNGPO0XwGvW_yIHvWR41Kp11UCFerQ>. Acesso em 15 jan. 2013.

NEVES, Eduardo Borba; DOMINGUES, Clayton Amaral. **Manual de Metodologia da Pesquisa Científica**. Rio de Janeiro: Centro de Estudos de Pessoal, 2007.

OPENSOLVER PARA EXCEL. Disponível em <<http://www.opensolver.org>>

SCHOPF, Eliseu Celestino; SCHEPKE, Cláudio; SILVA, Marcus Lucas; SILVA, Pablo Furlan. **Um Estudo da Aplicação de Heurísticas Construtivas e de Melhoramento para um Problema de PRV**.

CORDENONSI, A.Z. **Ambientes, Objetos e Dialogicidade: Uma Estratégia de Ensino Superior em Heurísticas e Metaheurísticas**. Tese de Doutorado: Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação – UFRGS, 2008.

SILVA, A. F.; OLIVEIRA, A. C. **Algoritmos Genéricos: alguns experimentos com os operadores de cruzamento (“crossover”) para o problema do caixeiro viajante assimétrico**. ENEGEP, 2006.

MESTRIA, M.; OCHI, L. S.; MARTINS, S.L. **Heurísticas Híbridas para o Problema do Caixeiro Viajante com Grupamentos**. ENEGEP, 2010.

TAUFER, F.S.G.; PEREIRA, E.C. **Aplicação do problema do caixeiro viajante na otimização de roteiros**. ENEGEP, 2011.

MESTRIA, M. **Heurísticas usando GRASP e Reconexão de caminhos para o Problema do Caixeiro Viajante com Grupamentos**. ENEGEP, 2011.

OPRIME, P.C.; PUREZA, V. **Sequenciamento de experimentos fatoriais para minimização do número de mudanças de variáveis**. ENEGEP, 2008.

LISBOA, E. F. A. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro. 2012

ANEXO I

Foto de *container* utilizado na coleta de difícil acesso



ANEXO II

MATRIZ DE DISTÂNCIAS ENTRE PONTOS

PONTO	G	T	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23
G	0,00	6,08	5,05	4,99	4,73	4,91	4,88	4,91	4,91	4,72	4,81	4,71	4,78	4,75	4,69	5,11	4,84	5,03	5,24	5,15	5,12	5,20	5,04	4,98	5,16
T	6,08	0,00	11,08	11,03	10,79	10,96	10,95	10,98	10,98	10,80	10,90	10,78	10,87	10,83	10,74	11,18	10,91	11,11	11,25	11,14	11,11	11,18	10,97	10,91	11,09
A1	5,05	11,08	0,00	0,06	0,50	0,21	0,46	0,41	0,41	0,75	0,98	1,50	1,10	1,30	1,72	1,49	1,50	1,28	0,25	0,37	0,30	0,46	0,70	0,73	0,75
A2	4,99	11,03	0,06	0,00	0,49	0,19	0,46	0,42	0,41	0,75	0,99	1,51	1,10	1,31	1,72	1,51	1,51	1,30	0,28	0,36	0,30	0,45	0,67	0,70	0,74
A3	4,73	10,79	0,50	0,49	0,00	0,30	0,16	0,18	0,18	0,28	0,56	1,05	0,66	0,85	1,26	1,13	1,07	0,91	0,75	0,85	0,78	0,93	1,10	1,11	1,19
A4	4,91	10,96	0,21	0,19	0,30	0,00	0,28	0,23	0,23	0,56	0,80	1,32	0,91	1,12	1,53	1,34	1,32	1,13	0,46	0,56	0,49	0,65	0,85	0,87	0,92
A5	4,88	10,95	0,46	0,46	0,16	0,28	0,00	0,05	0,06	0,30	0,53	1,05	0,64	0,84	1,26	1,06	1,04	0,85	0,69	0,83	0,76	0,91	1,13	1,14	1,20
A6	4,91	10,98	0,41	0,42	0,18	0,23	0,05	0,00	0,01	0,35	0,57	1,09	0,69	0,89	1,31	1,10	1,09	0,89	0,64	0,78	0,71	0,87	1,08	1,10	1,15
A7	4,91	10,98	0,41	0,41	0,18	0,23	0,06	0,01	0,00	0,35	0,58	1,10	0,69	0,90	1,31	1,11	1,10	0,90	0,64	0,77	0,71	0,86	1,08	1,09	1,15
A8	4,72	10,80	0,75	0,75	0,28	0,56	0,30	0,35	0,35	0,00	0,28	0,77	0,37	0,57	0,98	0,86	0,78	0,65	0,99	1,11	1,04	1,20	1,39	1,40	1,47
A9	4,81	10,90	0,98	0,99	0,56	0,80	0,53	0,57	0,58	0,28	0,00	0,52	0,11	0,32	0,73	0,58	0,52	0,38	1,21	1,35	1,29	1,44	1,65	1,66	1,72
A10	4,71	10,78	1,50	1,51	1,05	1,32	1,05	1,09	1,10	0,77	0,52	0,00	0,41	0,20	0,21	0,40	0,13	0,39	1,73	1,87	1,80	1,96	2,15	2,16	2,24
A11	4,78	10,87	1,10	1,10	0,66	0,91	0,64	0,69	0,69	0,37	0,11	0,41	0,00	0,21	0,62	0,50	0,41	0,31	1,32	1,46	1,40	1,55	1,75	1,77	1,83
A12	4,75	10,83	1,30	1,31	0,85	1,12	0,84	0,89	0,90	0,57	0,32	0,20	0,21	0,00	0,42	0,40	0,22	0,29	1,53	1,67	1,60	1,76	1,96	1,97	2,04
A13	4,69	10,74	1,72	1,72	1,26	1,53	1,26	1,31	1,31	0,98	0,73	0,21	0,62	0,42	0,00	0,49	0,26	0,56	1,94	2,08	2,02	2,17	2,36	2,37	2,45
A14	5,11	11,18	1,49	1,51	1,13	1,34	1,06	1,10	1,11	0,86	0,58	0,40	0,50	0,40	0,49	0,00	0,27	0,21	1,68	1,86	1,80	1,94	2,18	2,20	2,25
A15	4,84	10,91	1,50	1,51	1,07	1,32	1,04	1,09	1,10	0,78	0,52	0,13	0,41	0,22	0,26	0,27	0,00	0,30	1,72	1,87	1,80	1,96	2,17	2,18	2,24
A16	5,03	11,11	1,28	1,30	0,91	1,13	0,85	0,89	0,90	0,65	0,38	0,39	0,31	0,29	0,56	0,21	0,30	0,00	1,48	1,65	1,59	1,74	1,97	1,99	2,04
A17	5,24	11,25	0,25	0,28	0,75	0,46	0,69	0,64	0,64	0,99	1,21	1,73	1,32	1,53	1,94	1,68	1,72	1,48	0,00	0,22	0,19	0,28	0,59	0,63	0,60
A18	5,15	11,14	0,37	0,36	0,85	0,56	0,83	0,78	0,77	1,11	1,35	1,87	1,46	1,67	2,08	1,86	1,87	1,65	0,22	0,00	0,07	0,09	0,37	0,42	0,40
A19	5,12	11,11	0,30	0,30	0,78	0,49	0,76	0,71	0,71	1,04	1,29	1,80	1,40	1,60	2,02	1,80	1,80	1,59	0,19	0,07	0,00	0,16	0,42	0,46	0,45
A20	5,20	11,18	0,46	0,45	0,93	0,65	0,91	0,87	0,86	1,20	1,44	1,96	1,55	1,76	2,17	1,94	1,96	1,74	0,28	0,09	0,16	0,00	0,33	0,38	0,32
A21	5,04	10,97	0,70	0,67	1,10	0,85	1,13	1,08	1,08	1,39	1,65	2,15	1,75	1,96	2,36	2,18	2,17	1,97	0,59	0,37	0,42	0,33	0,00	0,06	0,13
A22	4,98	10,91	0,73	0,70	1,11	0,87	1,14	1,10	1,09	1,40	1,66	2,16	1,77	1,97	2,37	2,20	2,18	1,99	0,63	0,42	0,46	0,38	0,06	0,00	0,18
A23	5,16	11,09	0,75	0,74	1,19	0,92	1,20	1,15	1,15	1,47	1,72	2,24	1,83	2,04	2,45	2,25	2,24	2,04	0,60	0,40	0,45	0,32	0,13	0,18	0,00

ANEXO V

MATRIZ DE DETERMINAÇÃO DO FLUXO MÁXIMO

PONTO	G	T	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23
G	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0
A1	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A2	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A4	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A5	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A6	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A7	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
A13	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
A15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A17	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0
A19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0
A20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0
A21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24
A22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0
A23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0