UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LUIZ ANTÔNIO CAETANO MONTE

ESPECTRO ESSENCIAL DE UMA CLASSE DE VARIEDADES RIEMANNIANAS

Fortaleza
2012

LUIZ ANTÔNIO CAETANO MONTE

ESPECTRO ESSENCIAL DE UMA CLASSE DE VARIEDADES RIEMANNIANAS

Tese submetida a Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador:
Prof. Dr. José Fábio B. Montenegro.

Fortaleza
2012

.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

M767e Monte, Luiz Antônio Caetano
Espectro essencial de uma classe de variedades riemannianas / Luiz Antônio Caetano Monte. – 2012.
60 f. : enc. ; 31 cm

Tese(doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.
Área de Concentração: Análise
Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

1. Análise. 2. Banach, Espaços de. I. Título.

CDD 515

A Deus e meus familiares.

Aos meus avós Luiz, Eliete e Benilza (in memorian).

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus e Pai de Nosso Senhor e Salvador Jesus Cristo que tornou tudo isso possível, por ter me sustentado nos momentos mais díficeis e me fez acreditar que tudo se pode naquele que nos fortalece, pois a honra e a glória é para Ele. Aos meus pais, José Arnaldo Souza Monte, Maria Neide Caetano Monte e minha irmã Patricia Caetano Monte que tanto me incentivaram.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro, pela orientação, apoio e paciência.

Agradeço aos meus amigos que me ajudaram direta e indiretamente no decorrer do curso dentre os quais posso citar Davi Lustosa, Weslley Marinho(o irmão), Fabiana, Paulo Ricardo, Diego Marques, Cícero Fagner, José Nazareno, Ernani Ribeiro, João Francisco, Cristiane Magalhães, Luigi(o baiano), Ana Paula, Clodomir Neto, Paulo Ítalo, Loester Sá, Flávio (cantina), Paulo César, Isaías Pereira, Luisão, Carlos Henrique, Flávio França, Júnio Damião, Adriano Medeiros, Cícero Tiarlos, Rondinelli Marcolino, José Wilson, Michel Pinho, Renivaldo Sodré, Francisco de Assis, Disson Soares, Francisco Eraldo, Denise, Juliana, Cléber Tito e Cinthia, Edno dos Santos e aos outros amigos, meus cordiais agradecimento.

Agradeço aos professores que aceitaram participar da banca, Ernani Ribeiro, Eduardo Teixeira, Dethang Zhou e Paolo Piccione.

Aos professores José Othon, Jonathan Floriano, Gleydson Chaves, Silvano, Cleon , Lúquesio, Antônio Caminha, Fernanda Camargo, Jorge Hebert, Robério Rogério, Alexandre Fernandes, Gervásio Gurgel, Abdênago Barros, Afonso, agradeço pelo incentivo que foi dado durante todo o período.

Gostaria de agradecer também aos funcionários da UFC, Andréa Dantas, Taváres, Márcio, e aos demais.

Ao Capes pela ajuda financeira.

Resumo

Neste trabalho, provaremos alguns resultados sobre espectro essencial de uma classe de variedades Riemannianas, não necessariamente completas, com condições de curvatura na vizinhança de um raio. Sobre essas condições obtemos que o espectro essencial do operador de Laplace contém um intervalo. Como aplicação, obteremos o espectro do operador de Laplace de regiões ilimitadas dos espaços formas, tais como a horobola do espaço híperbolico e cones do espaço Euclidiano. Construíremos também um exemplo que indica a necessidade das condições globais sobre o supremo das curvaturas seccionais fora de uma bola para que a variedade não tenha espectro essencial.

Palavras-Chaves : Espectro essencial, operador Laplaciano, cones Euclidianos, horobola do espaço hiperbólico, curvatura média das esferas geodésicas.

Abstract

In this thesis we consider a family of Riemannian manifolds, not necessarily complete, with curvature conditions in a neighborhood of a ray. Under these conditions we obtain that the essential spectrum of the Laplace operator contains an interval. The results presented in this thesis allow to determine the spectrum of the Laplace operator on unlimited regions of space forms, such as horoball in hyperbolic space and cones in Euclidean space. Also construct an example that shows the need of global conditions on the supreme sectional curvature outside a ball, so that the variety has no essential spectrum.

Keywords: Essential spectrum, Laplacian operator, Euclidean cones, horobola of hyperbolic space, mean curvature of geodesic spheres.

Sumário

Iremos considerar M uma variedade Riemanniana de dimensão n. O operador de Laplace $\Delta : C_0^\infty(M) \to C_0^\infty(M)$, definido como $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, é um operador elíptico de segunda ordem e tem uma única extensão Δ auto adjunta ilimitada em $L^2(M)$. Sendo $-\Delta$ positivo e simétrico, o espectro é o conjunto dos $\lambda > 0$ tal que $\Delta + \lambda I$ não tem inverso limitado. Algumas vezes diremos espectro de M para nos referir ao espectro de $-\Delta$. Definimos o espectro essencial $\sigma_{ess}(-\Delta)$ como conjunto dos λ do espectro que são pontos de acumulação do espectro ou autovalores de multiplicidade infinita. É bem sabido que, se M é uma variedade Riemanniana de dimensão n, simplesmente conexa, completa com curvatura constante $-c \leq 0$, então o seu espectro essencial coincide com o espectro, sendo este o intervalo $[(n-1)^2c/4, \infty)$. Além disso, o princípio de decomposição em [6] diz que o espectro essencial é invariante sob pertubações em compactos da métrica de M, e assim uma função da geometria dos fins da variedade. Portanto, torna-se natural a busca de condições geométricas, dos fins da variedade, que irá determinar o espectro essencial do Laplaciano. Em 1981, Harold Donnelly, em [4], estudou o espectro essencial de variedades que a curvatura se aproxima de uma constante $-c \leq 0$ no infinito, mostrando que o espectro essencial é o intervalo $[(n-1)^2c/4, \infty)$ se M é simplesmente conexa e curvada negativamente ou M é uma superfície com grupo fundamental finitamente gerado com condição adicional de decaimento $K + c \to 0$, onde K é a curvatura de Gauss. Quando a variedade tem uma alma e a aplicação exponencial é um difeomorfismo, em 1992 Escobar e Freire [7] provaram que o espectro do Laplaciano é $[0, \infty)$, usando que a curvatura seccional é não-negativa e satisfaz algumas condições adicionais. Em [3], Detang Zhou provou que essas condições adicionais podem ser removidas. Em 1994, Li [11], provou $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$ se M tem curvatura Ricci não negativa e possui um pólo. Chen e Lu [13], mostraram o mesmo que Li quando a curvatura seccional radial é não negativa. Entre outros resultados, em [5], Donnelly provou que o espectro essencial é $[0, \infty)$ para variedades com curvatura de Ricci não negativa e crescimento do volume Euclidiano. Em 1997, Kumura [8, Teorema 1.2] apresentou o seguinte resultado: se r é a função de distância a um ponto, então $\sigma_{ess}(-\Delta) = [c^2/4, \infty)$ desde que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{r\geq n} |\Delta r - c| = 0 \tag{1}$$

Kumura mostrou também que este resultado generaliza quase todos mencionados anteriormente. Em 1997, J. Wang em [10] provou que, se a curvatura de Ricci de uma variedade M satisfaz $Ric(M) \geq -\delta/r^2$, onde r é a distância a um ponto fixo e δ é um número positivo dependendo apenas da dimensão, então o L^p espectro essencial de M é $[0, \infty)$ para todo $p \in [1, +\infty]$. Em 2011, Zhiqin Lu e Detang Zhou [14] provaram que o L^p espectro essencial do Laplaciano é $[0, +\infty)$ para uma variedade Riemanniana completa, não compacta que satisfaz o seguinte condição

$$\liminf_{x\to\infty} Ric_M(x) = 0.$$

Os trabalhos anteriormente mencionados, nos fornecem o espectro essencial de algumas variedades a partir de hipóteses globais de curvaturas. Geralmente é feita uma construção de uma sequência de funções radiais suaves que possuem suportes em anéis disjuntos e que satisfazem o item (ii) do seguinte lema clássico:

Lema 0.1 *Seja A um operador auto-adjunto atuando no espaço de Hilbert*

$\mathcal{H}$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$

ii) *Para todo $\epsilon > 0$, existe um subespaço $L_\epsilon \subset \mathrm{Dom(A)}$ de $dim(L_\epsilon) = \infty$ tal que $\|Au - \lambda u\| \leq \epsilon \|u\|$ para todo u em L_ϵ.*

Dessa forma, considerando o subespaço gerado pelas funções, segue-se o item (i), ou seja, obtém-se a inclusão de intervalos no espectro essencial os quais λ pertence. Já a inclusão contrária usa-se a desigualdade de Cheeger, veja [8]. Das condições sobre as curvaturas, obtém-se estimativas para o Laplaciano da função distância, em alguns casos usa-se teoremas de comparação, que são fundamentais para o cálculo.

Apresentaremos agora os resultados obtidos. Nestes exigiremos apenas condições sobre a curvatura média das esferas geodésias e também sobre a métrica da variedade numa vizinhança particular de um raio com um sistema de coordenadas geodésicas. O primeiro resultado é o seguinte:

Teorema 0.0.1 *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Suponha que, em coordenadas esféricas geodésicas, a métrica possa ser escrita*

$$g_M = dr^2 + \psi^2(rw) g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

em $C_a(N) = \{rw\ ;\ dist_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N) < c_2\, e^{-ar}\}$, onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}} = ds^2 + \sin^2 s\, g_{\mathbb{S}^{n-2}}$ e s é a função distância em $\mathbb{S}^{n-1}$ a $N \in \mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, a função ψ satisfaz as seguintes condições

i) $\displaystyle\lim_{\substack{r\to\infty \\ w\to N}} \frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} = c > 0$ *uniformemente sobre $C_a(N)$ e $c > a$*

ii) $\displaystyle\left|\frac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant c_1$ *for all $rw \in C_a(N)$*

Então $[(n-1)^2c^2/4, \infty) \subset \sigma_{ess}(-\Delta)$.

Para a demostração, construíremos uma sequência infinita de funções suaves, que dependem das funções distância da variedade e da esfera $n-1$ dimensional a um ponto e que possuem suportes em troncos de cones disjuntos na vizinhança $C_a(N)$. Essas funções satisfazem a condição (ii) do Lema 0.1 para o operador Laplaciano e qualquer $\lambda > (n-1)^2c^2/4$. Sendo o espectro essencial um conjunto fechado, garantimos que $(n-1)^2c^2/4 \in \sigma_{ess}(-\Delta)$.

Conseguimos também obter através de uma condição sobre a curvatura seccional na vizinhança $C_a(N)$ a inclusão de intervalos no espectro essencial. Usando teoremas de comparação, essas condições reduzem-se a hipótese (i) do Teorema 0.0.1, garantindo assim a mesma conclusão. O próximo resultado é o seguinte

Corolário 0.1 *Seja M uma variedade Riemanniana com as condições do Teorema 0.0.1. Além disso, a curvatura seccional e a função ψ satisfazem as seguintes condições*

i) $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty \\ w\to N}} K(rw) = -c < 0$ *uniformemente sobre* $C_a(N)$, $\sqrt{c} > a$

ii) $\left|\dfrac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant c_1$ *for all* $rw \in C_a(N)$

Então $[(n-1)^2c/4, \infty) \subset \sigma_{ess}(-\Delta)$.

Obteremos como aplicação do teorema 0.0.1, o espectro essencial da horobola do $\mathbb{H}^n$. Sendo uma variedade não-completa, os resultados dos autores anteriormente mencionados não podem ser aplicados. A idéia é mostrar que a horobola contém um conjunto do tipo $C_a(N)$ já que a métrica induzida de

$\mathbb{H}^n$, sendo um modelo, satisfaz todas as condições necessárias, dessa forma o espectro essencial da horobola contém um intervalo. E pela desigualdade de Cheeger em $C_a(N)$, a inclusão contrária. Isso mostra exatamente que a horobola e o $\mathbb{H}^n$ tem o mesmo espectro. Estes resultados serão apresentados na seção 3.2 do capítulo 3.

Fixamos um ponto $p \in M$ e definimos $\bar{K}(r) = \sup\{K(x,\pi)|d(p,x) \geq r\}$, onde $K(x,\pi)$ é a curvatura seccional de um plano 2-dimensional π em T_xM. Então, o seguinte teorema foi provado em [6].

Teorema 0.0.2 (H.Donnelly e P.Li) *Seja M uma variedade Riemanniana completa e suponha que $\bar{K}(r) \to -\infty$ quando $r \to \infty$. Assim, o espectro essencial de Δ é vazio, desde que uma das seguintes condições sejam satisfeitas:*

(i) M é simplesmente conexa e curvada negativamente

(ii) M é bidimensional e seu grupo fundamental é finitamente gerado.

Esse resultado diz que o espectro essencial de uma variedade é vazio, se a curvatura seccional tende para menos infinito, quando r cresce indefinidamente em todas as direções. Dessa forma, somos capazes de construir um exemplo de uma variedade Riemanniana de dimensão dois com curvatura negativa satisfazendo

$$\lim_{r\to\infty} K(r,\theta)(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}) = -\infty$$

para todo $\theta \neq 0$ e de tal forma que o espectro essencial desta variedade contém o intervalo $[1/4,\infty)$. Este exemplo indica que são necessárias condições globais da geometria, como no Teorema 0.0.2, para que o espectro essencial da variedade seja vazio.

O próximo resultado obtido é o seguinte:

Teorema 0.0.3 *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Suponha que, em coordenadas esféricas geodésicas, a métrica pode ser escrita assim*

$$g_M = dr^2 + \psi^2(rw) g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

em $C_0(N) = \{rw\ ;\ dist_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N) < c_2\}$, onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}} = ds^2 + \sin^2 s\ g_{\mathbb{S}^{n-2}}$ e s é a função distância em $\mathbb{S}^{n-1}$ a $N \in \mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, a função ψ satisfaz as seguintes condições

i) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} = 0$ *para cada w tal que $rw \in C_0(N)$*

ii) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \psi(rw) = +\infty$ *para cada w tal que $rw \in C_0(N)$*

iii) $\displaystyle\left|\frac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant \frac{c_1}{r^\gamma}$ *para todo $rw \in C_0(N)$ para algum $\gamma > 1$.*

Então $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$.

Através desse resultado, obteremos o espectro essencial de cones Euclidianos já que são conjuntos do tipo $C_0(N)$ e tendo a métrica induzida do $\mathbb{R}^n$, todas as condições são satisfeitas. Onde concluímos que os cones e o $\mathbb{R}^n$ tem o mesmo espectro. Com as mesmas condições do Teorema 0.0.3, substituindo o limite em (i) por desigualdades envolvendo outros invariantes geométricos obteremos a mesma conclusão, basta usarmos teoremas de comparação para reduzirmos essas desigualdades a hipótese (i) do Teorema 0.0.1. Os resultados são os seguintes

Corolário 0.2 *Seja M uma variedade Riemanniana com as condições do Teorema 0.0.3. Além disso, a curvatura seccional radial e a função ψ satisfazem as seguintes condições*

i) $K_{rad}(rw) \geq 0$ *para cada* w *tal que* $rw \in C_0(N)$

ii) $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(rw) = +\infty$ *para cada* w *tal que* $rw \in C_0(N)$

iii) $\left|\dfrac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant \dfrac{c_1}{r^\gamma}$ *para todo* $rw \in C_0(N)$ *para algum* $\gamma > 1$.

Então $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$.

e

Corolário 0.3 *Seja* M *uma variedade Riemanniana com as condições do Teorema 0.0.3. Além disso, a curvatura de Ricci e a função* ψ *satisfazem as seguintes condições*

i) $Ric_M(rw) \geq 0$ *para cada* w *tal que* $rw \in C_0(N)$

ii) $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(rw) = +\infty$ *para cada* w *tal que* $rw \in C_0(N)$

iii) $\left|\dfrac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant \dfrac{c_1}{r^\gamma}$ *para todo* $rw \in C_0(N)$ *para algum* $\gamma > 1$.

Então $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria Espectral

Um operador linear em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um par constituído por um subespaço denso linear Dom(A) de $\mathcal{H}$ juntamente com uma aplicação linear $A : \text{Dom(A)} \to \mathcal{H}$. O operador adjunto A^* é determinado pela condição de que $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ para todo $u \in \text{Dom(A)}$ e $v \in \text{Dom(A}^*)$. O domínio de A^* é definido como o conjunto de todos os v para o qual existe $w \in \mathcal{H}$ tal que $\langle Au, v\rangle = \langle u, w\rangle$, para todos os $u \in \text{Dom(A)}$. Dizemos que A é auto-adjunto se $A = A^*$. O espectro de um operador linear A, $\sigma(A)$, é definida como segue. Dizemos que um número complexo z não está no $\sigma(A)$ se o operador $(z - A)$ aplica $\text{Dom}(A)$ injetivamente sobre $\mathcal{H}$, e o inverso $(z - A)^{-1}$ é limitado. O espectro de qualquer operador auto-adjunto é real e não vazio. Um número complexo é dito ser um valor próprio de um tal operador A, se existe um $u \in \text{Dom(A)}$ não nulo tal que $Au = \lambda\, u$. É inteiramente possível que nenhum ponto do espectro de A seja um autovalor. O espectro discreto

$\sigma_d(A)$ é definido como o conjunto de todos os autovalores λ de multiplicidade finita que são pontos isolados do espectro. O espectro essencial é o conjunto $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A)/\sigma_d(A)$. A caracterização do espectro essencial é dada no seguinte lema, que é uma consequência do teorema espectral [2, Lema 8.4.1, p.167].

Lema 1.1 *Seja A um operador auto-adjunto atuando no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$

ii) *Para todo $\epsilon > 0$, existe um subespaço $L_\epsilon \subset \mathrm{Dom(A)}$ de $dim(L_\epsilon) = \infty$ tal que $\|Au - \lambda u\| \leq \epsilon \|u\|$ para todo u em L_ϵ.*

1.2 Coordenadas esféricas geodésicas

Seja M uma variedade n-dimensional , um sistema de coordenadas M é uma aplicação suave injetiva $\varphi : \Omega \to M$ de um conjunto aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, com posto máximo. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Para cada vetor $w \in T_pM$, seja γ_w a única geodésica satisfazendo

$$\gamma_w(0) = p \ , \ \gamma_w'(0) = w$$

e defina

$$d(w) = \sup\{r > 0 : \mathrm{dist}_M(p, \gamma_w(r)) = r\}.$$

Considere o maior subconjunto aberto $\mathcal{D}_p = \{rw : 0 \leq r < d(w), w \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ de T_pM tal que para qualquer $w \in \mathcal{D}_p$ a geodésica $\gamma_w(r) = \exp_p(rw)$

minimiza a distância de p a $\gamma_p(r)$ para todo $r \in [0, d(w))$. Dado um sistema de coordenadas $w : \Omega \to \mathbb{S}^{n-1}$, um sistema de coordenadas em M é definido por $\varphi(r, u) = \exp_p(r\, w(u))$, $0 \leq r < d(w(u))$.

Fixamos um vetor $w \in T_pM$, $|w| = 1$ e denote por $w^\perp$ o complemento ortogonal $\{\mathbb{R}w\}$ em T_pM e seja $\tau_r : T_pM \to T_{\exp_p(rw)}M$ a transporte paralelo ao longo γ_w. Definir o caminho de transformações lineares $\mathcal{A}(r, w) : w^\perp \to w^\perp$ por

$$\mathcal{A}(r, w)\xi = (\tau_r)^{-1} Y(r),$$

sendo $Y(r)$ o campo de Jacobi ao longo de γ_w determinado pela condição inicial $Y(0) = 0$, $(\nabla_{\gamma_w'} Y)(0) = \xi$. No conjunto $\exp_p(\mathcal{D}_p)$ a métrica Riemanniana de M pode ser expressa da seguinte forma

$$ds^2(\exp_p(rw)) = dr^2 + |\mathcal{A}(r, w)dw|^2.$$

Denotaremos

$$\theta(rw) = \det\mathcal{A}(rw).$$

A medida Riemanniana de M pode ser expressa em coordenadas geodésicas por

$$d\nu = \theta\, dr dw$$

e o operador de Laplace aplicado a uma função radial $u = u(r)$ tem a seguinte forma

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\theta'}{\theta}\frac{\partial u}{\partial r},$$

onde $\theta' = \partial\theta/\partial r$. Em particular, quando $g_M = dr^2 + \psi^2(rw) g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ temos

$$d\nu = \psi^{n-1}\, dr dw$$

e

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (n-1)\frac{\psi'}{\psi}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Além disso a função $\psi(rw)$ na métrica g_M satisfaz as seguintes condições

$$\psi(0) = 0 \ , \psi_r(0) = 0 \text{ e } \psi(rw) > 0.$$

Para mais detalhes, veja referência [13].

Em particular, a curvatura média das esferas geodésicas de M é dada por

$$\frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} = \frac{1}{n-1}\,\Delta r.$$

1.2.1 Modelos Riemannianos

Uma variedade Riemanniana (M, g) de dimensional n é chamada de modelo Riemanniano se as duas seguintes condições são satisfeitas:

1. Existe uma carta $\Phi : M \to B_{r_0}$, onde $B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < r_0\}$ é a bola de raio $r_0 \in (0, +\infty]$ (em particular, se $r_0 = \infty$ então $B_{r_0} = \mathbb{R}^n$).

2. A métrica g em coordenadas esféricas (rw) na carta acima, tem a forma

   $$g = dr^2 + \psi^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

   onde $\psi(r)$ é uma função suave em $(0, r_0)$ e $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é a métrica canônica em $\mathbb{S}^{n-1}$.

Capítulo 2

Teoremas principais

2.1 Espectro Essencial de variedades

Apresentaremos um resultado onde consideramos uma família de variedades Riemannianas, não necessariamente completas, com condições de curvatura apenas em uma vizinhança de um raio, mas não uniformemente sobre M. Com estas condições obtemos que o espectro essencial do Laplaciano contém um intervalo. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1.1 *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Suponha que, em coordenadas esféricas geodésicas, a métrica possa ser escrita como*

$$g_M = dr^2 + \psi^2(rw)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

em $C_a(N) = \{rw\ ;\ dist_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N) < c_2\, e^{-ar}\}$, onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}} = ds^2 + \sin^2 s\ g_{\mathbb{S}^{n-2}}$ e s é a função distância em $\mathbb{S}^{n-1}$ a $N \in \mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, a função ψ satisfaz *as seguintes condições*

i) $\displaystyle\lim_{\substack{r\to\infty \\ w\to N}} \frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} = c > 0$ *uniformemente sobre* $C_a(N)$ *e* $c > a$

ii) $\displaystyle\left|\frac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant c_1$ *para todo* $rw \in C_a(N)$

Então $[(n-1)^2c^2/4, \infty) \subset \sigma_{ess}(-\Delta)$.

Observamos que mudando a métrica ou a toplogia de M fora do conjunto $C_a(N)$, o intervalo $[(n-1)^2c^2/4, \infty)$ permanece contido no espectro essencial de M. Na verdade, nós provamos que $[(n-1)^2c^2/4, \infty)$ está contido no espectro de $C_a(N)$. O próximo resultado, se trata do caso em que $c = 0$ na hipótese (i) do teorema anterior, que necessita de uma outra condição geométrica. O resultado é o seguinte

Teorema 2.1.2 *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Suponha que, em coordenadas esféricas geodésicas, a métrica pode ser escrita*

$$g_M = dr^2 + \psi^2(rw)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

em $C_0(N) = \{rw\ ;\ dist_{\mathbb{S}^{n-1}}(w,N) < c_2\}$, *onde* $g_{\mathbb{S}^{n-1}} = ds^2 + \sin^2 s\ g_{\mathbb{S}^{n-2}}$ *e* s *é a função distância em* $\mathbb{S}^{n-1}$ *a* $N \in \mathbb{S}^{n-1}$. *Além disso, a função* ψ *satisfaz o seguinte*

i) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} = 0$ *para cada* w *tal que* $\mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w,N) < c_2$

ii) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \psi(rw) = +\infty$ *para cada* w *tal que* $\mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w,N) < c_2$

iii) $\displaystyle\left|\frac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant \frac{c_1}{r^\gamma}$ *para todo* $rw \in C_0(N)$ *para algum* $\gamma > 1$.

Então $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$.

2.2 Demonstração do Teorema 2.1.1

Primeiro vamos estudar o comportamento da função ψ no conjunto $C_a(N)$. Vamos provar que, para qualquer $\eta > 0$ existe um $r_\eta > 0$ tal que

$$C_1\, e^{(c-\eta)r} \leqslant \psi(rw) \leqslant C_2\, e^{(c+\eta)r} \tag{2.1}$$

e

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\psi(rw)}{\psi(rN)} \leqslant \frac{3}{2} \tag{2.2}$$

para todo $r \geq r_\eta$ e $rw \in C_a(N)$, onde C_1 e C_2 são constantes positivas.

De fato, pelo limite no item (i), para qualquer $\eta > 0$, existe r_0 tal que

$$c - \eta \leqslant \frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} \leqslant c + \eta$$

para todo $r \geq r_0$ e $rw \in C_a(N)$. Integrando a desigualdade acima de r_0 a r, obtemos

$$e^{(c-\eta)(r-r_0)} \leqslant \frac{\psi(rw)}{\psi(r_0 w)} \leqslant e^{(c+\eta)(r-r_0)} \tag{2.3}$$

para todo $r \geq r_0$ e $rw \in C_a(N)$. Pela continuidade e positividade da função $w \mapsto \psi(r_0 w)$,

$$\inf_{w \in \mathbb{S}^{n-1}} \psi(r_0 w) > 0$$

e por (2.3)

$$0 < C_1\, e^{(c-\eta)r} \leqslant \psi(rw) \leqslant C_2\, e^{(c+\eta)r}$$

para todo $r \geqslant r_0$ e $rw \in C_a(N)$, onde

$$C_1 = \inf_{w \in \mathbb{S}^{n-1}} \psi(r_0 w) e^{-(c-\eta)r_0} \quad \text{and} \quad C_2 = \sup_{w \in \mathbb{S}^{n-1}} \psi(r_0 w) e^{-(c+\eta)r_0}.$$

Para provar (2.2) , considere $\alpha : [0, s] \to \mathbb{S}^{n-1}$ a geodésica tal que $\alpha(0) = N$, $\alpha(s) = w$ e $\alpha'(t) = \partial/\partial s$. Seja $\lambda(t) = \psi(r\alpha(t))$, pelo Teorema do valor médio, existe $t_0 \in (0, s)$ tal que

$$\lambda(s) - \lambda(0) = \lambda'(t_0)\, s = s\, g_M(r\alpha(t_0))\, (\mathrm{grad}\psi, r\alpha'(t_0))\,,$$

$$\psi(rw) - \psi(rN) = s\, g_M(r\alpha(t_0)) \left(\psi_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\psi_s}{\psi^2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\psi^2}\, \mathrm{grad}_{\mathbb{S}^{n-2}}\, \psi,\ r\, \frac{\partial}{\partial s} \right),$$

$$\psi(rw) - \psi(rN) = r\, s\, \psi_s(r\alpha(t_0)).$$

Pela hipótese (ii) temos que

$$|\psi(rw) - \psi(rN)| \leqslant c_1\, r\, s\, \psi(r\alpha(t_0)),$$

o que implica

$$\left| \frac{\psi(rw)}{\psi(rN)} - 1 \right| \leqslant \frac{c_1\, r\, s\, \psi(r\alpha(t_0))}{\psi(rN)}$$

Desde que $\mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(\alpha(t_0), N) < s = \mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N) \leq c_1 e^{-ar}$, podemos usar (2.1) para obter

$$\left| \frac{\psi(rw)}{\psi(rN)} - 1 \right| \leqslant C\, \frac{r\, e^{(c+\eta)r} e^{-ar}}{e^{(c-\eta)r}} = C\, \frac{r}{e^{(a-2\eta)r}} \longrightarrow 0$$

quando $r \to +\infty$ e $0 < \eta < a/2$. Então, existe $r_\eta \geqslant r_0$ para o qual obtemos

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\psi(rw)}{\psi(rN)} \leqslant \frac{3}{2}$$

para todo $r \geqslant r_\eta$ e $rw \in C_a(N)$.

Para a prova do teorema, vamos construir para qualquer $\lambda > (n-1)^2 c^2/4$ e $\epsilon > 0$, uma sequência de funções $(u_k) \subset C_0^\infty(M)$ com suportes disjuntos $\mathrm{supp} u_j \cap \mathrm{supp} u_k = \emptyset$, para todo $j \neq k$, tal que

$$\|\Delta u_k + \lambda u_k\|_{L^2} \leq \epsilon\, \|u_k\|_{L^2},\ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Pelo lema 1.1 e do fato que $\sigma_{ess}(-\Delta)$ é fechado temos que $[(n-1)^2c^2/4, \infty) \subset \sigma_{ess}(-\Delta)$. Na verdade cada função u_k terá suporte em $C_a(N)$. Agora vamos definir

$$u_k(rw) = f(r)g(s) \tag{2.5}$$

onde $s = \mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N)$. A função f é definida por

$$f(r) = f(r,k,p) = F(r)h(r,k,p) \tag{2.6}$$

onde

$$F(r) = v(r)^{-1/2}\cos(\beta r), \tag{2.7}$$

com $\beta = \sqrt{\lambda - (n-1)^2c^2/4}$ e

$$v(r) = \int_0^r \psi^{n-1}(\tau N)d\tau, \tag{2.8}$$

além disso h é dado pela seguinte expressão

$$h(r) = h(r,k,p) = H\left(2(r - r_{k+2p})/(r_{k+4p} - r_k)\right), \tag{2.9}$$

onde h é uma função corte centrada em r_{k+2p}, com $r_k = (2k+1)\pi/(2\beta)$ sendo o zero da função $\cos(\beta r)$, e $H \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ é uma função que satisfaz as seguintes condições

$$\begin{cases} H \equiv 1 \text{ on } [-1/2, 1/2] \\ H \equiv 0 \text{ on } \mathbb{R}\backslash[-1, 1] \\ 0 \leqslant H \leqslant 1 \text{ on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

A função g é definida por

$$g(s) = g(s,k,p) = H(s/\delta_{k,p})\cos(\pi s/\delta_{k,p}) \tag{2.10}$$

onde $\delta_{k,p} = c_2\, e^{-ar_{k+4p}}$. Agora vamos provar que existe $k_0 > 0$ e $p_0 > 0$ tal que as funções $u_k = f(r,k,p)g(s,k,p)$ definida em (2.5) satisfaz a desigualdade (2.4) para todo $k \geq k_0$ e $p = p(k) \geq p_0$.

A função $v(r)$ definida em (2.8) satisfaz

$$v'(r) = \psi^{n-1}(rN) \quad \text{e} \quad v''(r) = (n-1)\psi^{n-2}(rN)\psi_r(rN).$$

Por (2.1) temos, $\psi(rN) \geqslant M_1 e^{(c-\eta)r}$ para todo $r \geqslant r_\eta$ e $c > \eta > 0$. Então

$$\lim_{r\to\infty} v'(r) = \lim_{r\to\infty} v(r) = +\infty,$$

o que implica juntamente com (i) o seguinte

$$\lim_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{v''(r)}{v'(r)} = (n-1) \lim_{r\to\infty} \frac{\psi_r(rN)}{\psi(rN)} = (n-1)c. \tag{2.11}$$

Logo existe um $r_v \geqslant r_\eta$ tal que

$$\frac{(n-1)c}{2} \leqslant \frac{v'(r)}{v(r)} \leqslant \frac{3(n-1)c}{2} \quad ; \quad \forall\, r \geqslant r_v. \tag{2.12}$$

A função $f(r)$ definida em (2.7) satisfaz a seguinte igualdade

$$\Delta F + \lambda F = A(r)F + B(rw)F' \tag{2.13}$$

onde

$$A(r) = -\frac{1}{2}\frac{v''}{v'} \cdot \frac{v'}{v} + \frac{1}{4}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 + \frac{(n-1)^2c^2}{4}$$

e

$$B(rw) = (n-1)\frac{\psi_r}{\psi}(rw) - \frac{v'}{v}\ .$$

Note que, por (2.11) e hipótese (i) concluímos que

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{r\to\infty \\ w\to N}} B(rw) = 0 \tag{2.14}$$

uniformemente em $C_a(N)$. Por (2.13) a função f definida em (2.6) satisfaz

$$\Delta f + \lambda f = A(r)F\,h + B(r,w)F'\,h + 2F'\,h' + F\,\Delta h\,. \tag{2.15}$$

A partir da definição de h em (2.9) temos as seguintes estimativas

$$|h'| \leqslant \frac{\beta}{4\pi p} sup|H'|\,\chi_h \qquad \text{e} \qquad |h''| \leqslant \frac{\beta^2}{16\pi^2 p^2} sup|H''|\,\chi_h. \tag{2.16}$$

O Laplaciano da função $g = g(s)$, definida em (2.10) , é dado por

$$\Delta g = \frac{(n-3)\psi_s}{\psi^3} g' + \frac{(n-2)\cot(s)}{\psi^2} g' + \frac{1}{\psi^2} g''. \tag{2.17}$$

Observe que a partir da definição de g em (2.10) temos as seguintes desigualdades

$$|g'| \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}}\;\chi_{B(\delta_{k,p})} \tag{2.18}$$

e

$$|g''| \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}^2}\;\chi_{B(\delta_{k,p})} \tag{2.19}$$

onde C é uma constante que independe de k e p, e $\chi_{B(\delta_{k,p})} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ é a função característica de $B(\delta_{k,p}) = \{w \in \mathbb{S}^{n-1};\ \mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w,N) \le \delta_{k,p}\}$. Finalmente, a função $u = u_k(rw) = f(r,k,p)\,g(s,k,p)$ satisfaz

$$\Delta u = (\Delta f)g + f(\Delta g).$$

Daí por (2.15) e (2.17) concluímos

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= AFgh + BF'gh + 2F'gh' + Fg\Delta h + \\ &+ \frac{(n-3)\psi_s}{\psi^3} fg' + \frac{(n-2)\cot(s)}{\psi^2} fg' + \frac{1}{\psi^2} fg'' \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por (2.14) , dado $\delta > 0$, existe $r_0 > r_v$ tal que

$$|A(r)| \leqslant \delta \;\text{ e }\; |B(rw)| \leqslant \delta$$

para todo $r \geqslant r_0$ e $rw \in C_a(N)$. Pela desigualdade (2.16) existe $r_h \geq r_0$ tal que

$$\|F'\, g\, h'\|_2 \leqslant \delta\, \|\chi_h\, F'\, g\|_2 \;\text{ and }\; \|F\, g\, \Delta h\|_2 \leqslant \delta\, \|\chi_h\, F\, g\|_2$$

para todo $r \geqslant r_h$, daí segue-se por (2.20) que

$$\|\Delta u + \lambda u\|_2 \leqslant \delta\, (\|\chi_h\, F\, g\|_2 + \|\chi_h\, F'\, g\|_2) + C \left\| \frac{\psi_s}{\psi^3} f\, g' \right\|_2 + $$

$$+\, C \left\| \frac{\cot(s)}{\psi^2} f\, g' \right\|_2 + \left\| \frac{1}{\psi^2} f\, g'' \right\|_2 \qquad (2.21)$$

para todo $r \geqslant r_h$ e $rw \in C_a(N)$.

Vamos precisar de usar o seguinte lema técnico:

Lema 2.2.1 *Para as funções F, f, g e u definidas anteriormente, temos as seguintes desigualdades*

(a) $\|\chi_h\, F\, g\|_2 \leqslant C\, \|u\|_2$

(b) $\|\chi_h\, F'\, g\|_2 \leqslant C\, \|u\|_2$

(c) $\left\| \frac{\psi_s}{\psi^3} f\, g' \right\|_2 \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}} \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi| \right]^{-2} \|u\|_2$

(d) $\left\| \frac{\cot(s)}{\psi^2} f\, g' \right\|_2 \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}^2} \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi| \right]^{-2} \|u\|_2$

(e) $\left\| \frac{1}{\psi^2} f g'' \right\|_2 \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}^2} \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi| \right]^{-2} \|u\|_2$

onde $C_{k,p} = \{rw\,;\ r_k \leq r \leq r_{k+4p},\ w \in B(\delta_{k,p})\}$ *e* C *é uma constante positiva independente de* k *e* p.

Prova do Lema: Observe que da definição de f, temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_2^2 &= \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s) \int_{r_k}^{r_{k+4p}} f(r)^2 \psi^{n-1}(rw)\, dr\, dw \\
&= \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s) \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, h^2(r) \frac{\psi^{n-1}(rw)}{v(r)}\, dr\, dw \\
&\geqslant \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s) \int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r)\, \frac{\psi^{n-1}(rw)}{\psi^{n-1}(rN)} \cdot \frac{v'(r)}{v(r)}\, dr\, dw
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\|\chi_h F\, g\|_2^2 &= \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s) \int_{r_k}^{r_{k+4p}} F(r)^2 \psi^{n-1}(rw)\, dr\, dw \\
&\leqslant \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s) \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, \frac{\psi^{n-1}(rw)}{v(r)}\, dr\, dw. \\
&\leqslant \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s) \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, \frac{\psi^{n-1}(rw)}{\psi^{n-1}(rN)} \cdot \frac{v'(r)}{v(r)}\, dr\, dw
\end{aligned}$$

Deduzimos das estimativas (2.12) e (2.2) que

$$\|u\|_2^2 \geqslant \frac{(n-1)c}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s) \int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r)\, dr\, dw \tag{2.22}$$

e

$$\|\chi_h F\, g\|_2^2 \leqslant \frac{3(n-1)c}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s) \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, dr\, dw.$$

Além disso,

$$\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, dr = 2 \int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r)\, dr.$$

Das duas últimas desigualdades segue-se

$$\|\chi_h F\, g\|_2 \leqslant \sqrt{2}\, 3^{n/2}\ \|u\|_2. \tag{2.23}$$

Para a segunda desigualdade, utilizando integração por partes

$$\int_{r_k}^{r_{k+4p}} F'(r)^2\,\psi^{n-1}(rw)\,dr = -\int_{r_k}^{r_{k+4p}} F(r)\,\Delta F(r)\,\psi^{n-1}(rw)\,dr$$

através da igualdade (2.13) obtemos

$$\begin{aligned}\|\chi_h\,F'\,g\|_2^2 &= \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\int_{r_k}^{r_{k+4p}} F\,[\lambda F - A(r)F - B(r,w)F'\,]\;\psi^{n-1}(rw)dr\,dw\\ &\leqslant \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\int_{r_k}^{r_{k+4p}} [\lambda F^2 + |A(r)|F^2 + |B(r,w)||F\,F'|\,]\;\psi^{n-1}(rw)dr\,dw\end{aligned}$$

dos limites em (2.14), tomamos $|A(r)| \leqslant 1$ e $|B(r,w)| \leqslant 1$, e pelo fato de $2|F\,F'| \leqslant F^2 + (F')^2$, obtemos que

$$\begin{aligned}\|\chi_h\,F'\,g\|_2^2 &\leqslant \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\int_{r_k}^{r_{k+4p}} [(\lambda+1/2)F^2 + 1/2(F')^2\,]\psi^{n-1}(rw)dr\,dw\\ &\leqslant \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\int_{r_k}^{r_{k+4p}} [(\lambda+1/2)F^2 + 1/2(F')^2]\psi^{n-1}(rw)dr\,dw\\ &\leqslant (\lambda+1/2)\|\chi_h F\,g\|_2^2 + 1/2\|\chi_h\,F'\,g\|_2^2),\end{aligned}$$

logo

$$\|\chi_h\,F'\,g\|_2^2 \leqslant (2\lambda+1)\;\|\chi_h\,F\,g\|_2^2$$

e da desigualdade (2.23) obtemos

$$\|\chi_h\,F'\,g\|_2 \leqslant \sqrt{2\lambda+1}\sqrt{2}\,3^{n/2}\;\|u\|_2.$$

Agora mostraremos o item (c), perceba que

$$\left\|\frac{\psi_s}{\psi^3} f\,g'\right\|_2^2 = \int_{B(\delta_{k,p})} |g'|^2 \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \frac{\psi_s^2}{\psi^6}\,f^2(r)\,\psi^{n-1}\,dr\,dw.$$

Em virtude da estimativa (2.18), definição de ínfimo e hipótese (ii) garantimos que

$$\left\|\frac{\psi_s}{\psi^3} f\,g'\right\|_2^2 \leq \frac{C}{\delta_{k,p}^2}\left[\inf_{C_{k,p}} |\psi|\right]^{-4} \int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} f^2(r)\psi^{n-1}\,dr\,dw. \tag{2.24}$$

Note que

$$\int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} f^2(r)\psi^{n-1}\,dr\,dw = \int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)h^2(r)\frac{\psi^{n-1}}{v}\,dr\,dw$$
$$\leq \int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\frac{\psi^{n-1}(rw)}{\psi^{n-1}(rN)}\frac{v'}{v}\,dr\,dw.$$

Pelas estimativas (2.12) e (2.2) deduzimos

$$\int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} f^2(r)\psi^{n-1}\,dr\,dw \leq C\int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\,dr\,dw. \tag{2.25}$$

Por outro lado

$$\int_{B(\delta_{k,p})} dw = \int_{\mathbb{S}^{n-2}}\int_0^{\delta_{k,p}} \sin^{n-2} s\,ds\,d\xi$$

sendo $d\xi$ a medida canônica de $\mathbb{S}^{n-2}$ e da existência de um $s_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\sin s}{s} \leqslant \frac{3}{2},$$

para todo $0 < s < s_0$, podemos tomar $0 < \delta_{k,p} < s_0$ tal que

$$\int_{B(\delta_{k,p})} dw \leq C\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\int_0^{\delta_{k,p}} s^{n-2}ds\,d\xi = C\,\delta_{k,p}^{n-1}$$

além disso

$$\int_0^{\delta_{k,p}/2} \cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right)\sin^{n-2} s\,ds \geqslant C\int_0^{\delta_{k,p}/2} \cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right)s^{n-2}\,ds$$

onde

$$\int_0^{\delta_{k,p}/2} \cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right)s^{n-2}\,ds = \frac{\delta_{k,p}^{n-1}}{\pi^{n-1}}\int_0^{\pi/2} \cos^2 s\, s^{n-2}ds = C\delta_{k,p}^{n-1},$$

então concluímos que

$$\int_{B(\delta_{k,p})} dw \leq C\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\int_0^{\delta_{k,p}/2} \cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right)\sin^{n-2} s\,ds\,d\xi.$$

Pela definição da função $G_{\delta_{k,p}}$, segue-se que

$$\begin{aligned}\int_{B(\delta_{k,p})} dw &\leqslant C \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_0^{\delta_{k,p}/2} G^2_{\delta_{k,p}}(s) \cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right) \sin^{n-2} s\, ds\, d\xi \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_0^{\delta_{k,p}} G^2_{\delta_{k,p}}(s)\ \cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right) \sin^{n-2} s\, ds\, d\xi \\ &= C\int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\, dw, \end{aligned} \tag{2.26}$$

combinando (2.25) e (2.26) obtemos que

$$\int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} f^2(r)\psi^{n-1}\, dr\, dw \leq C \int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, dr\, dw, \tag{2.27}$$

usando (2.22) , obtemos

$$\int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} f^2(r)\psi^{n-1}\, dr\, dw \leq C\|u\|_2^2. \tag{2.28}$$

Comparando (2.28) com (2.24) verificamos que

$$\left\|\frac{\psi_s}{\psi^3} f\, g'\right\|_2^2 \leq \frac{C}{\delta_{k,p}^2}\left[\inf_{C_{k,p}} |\psi|\right]^{-4} \|u\|_2^2. \tag{2.29}$$

o que prova o item (c). Agora iremos mostrar o item (d), utilizando um procedimento semelhante tal como na desigualdade (2.24) temos que

$$\left\|\frac{\cot s}{\psi^2} f\, g'\right\|_2^2 \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}^2}\left[\inf_{C_{k,p}} |\psi|\right]^{-4} \int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cot^2 s \cos^2(\beta r)\, dr\, dw \tag{2.30}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\int_{B(\delta_{k,p})} \cot^2 s\ \ dw &= \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \sqrt{\det\xi} \int_0^{\delta_{k,p}} \sin^{n-4} s\ ds\, d\xi \\ &\leqslant C \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \sqrt{\det\xi} \int_0^{\delta_{k,p}} s^{n-4} ds\, d\xi\end{aligned}$$

$$\leqslant C\delta_{k,p}^{n-3}\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\sqrt{\det\xi}\,d\xi \tag{2.31}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\,dw =& \int_{\mathbb{S}^{n-2}}\sqrt{\det\xi}\int_0^{\delta_{k,p}} G^2_{\delta_{k,p}}(s)\cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right)\sin^{n-2}s\,ds\,d\xi\\ &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-2}}\sqrt{\det\xi}\int_0^{\delta_{k,p}/2}\cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right)\sin^{n-2}s\,ds\,d\xi\\ &\geq C\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\sqrt{\det\xi}\int_0^{\delta_{k,p}/2}\cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right)s^{n-2}ds\,d\xi. \end{aligned}\tag{2.32}$$

Além disso, pelo teorema da mudança de variável temos que

$$\int_0^{\delta_{k,p}/2}\cos^2\left(\frac{\pi s}{\delta_{k,p}}\right)s^{n-2}\,ds = \frac{\delta_{k,p}^{n-1}}{\pi^{n-1}}\int_0^{\pi/2}\cos^2 s\, s^{n-2}ds = C\delta_k^{n-1}$$

portanto, podemos usar em (2.32) para concluir que

$$\int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\,dw \geq C\delta_k^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\sqrt{\det\xi}\,d\xi,$$

ademais, comparando com (2.31) deduzimos que

$$\int_{B(\delta_{k,p})}\cot^2 s\,ds\,dw \leq C\delta_{k,p}^{-2}\int_{B(\delta_{k,p})} g^2(s)\,dw$$

desta forma, a partir de (2.30) garantimos que

$$\left\|\frac{\cot(s)}{\psi^2}f\,g'\right\|_2^2 \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}^4}\left[\inf_{C_{k,p}}|\psi|\right]^{-4}\int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} g^2(s)\cos^2(\beta r)\,dr\,dw.$$

Da desigualdade (2.22) concluímos

$$\left\|\frac{\cot(s)}{\psi^2}f\,g'\right\|_2^2 \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}^4}\left[\inf_{C_{k,p}}|\psi|\right]^{-4}\|u\|_2^2. \tag{2.33}$$

o que prova o item (d).

Para o último item, usando (2.19) e o mesmo raciocínio da desigualdade (2.24) temos

$$\left\|\frac{1}{\psi^2}\, f\, g''\right\|_2^2 \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}^4}\left[\inf_{C_{k,p}}|\psi|\right]^{-4}\int_{B(\delta_{k,p})}\int_{r_k}^{r_{k+4p}} f^2(r)\psi^{n-1}\,dr\,dw.$$

por (2.28), concluímos

$$\left\|\frac{1}{\psi^2}\, f\, g''\right\|_2^2 \leqslant \frac{C}{\delta_{k,p}^4}\left[\inf_{C_{k,p}}|\psi|\right]^{-4}\quad\|u\|_2^2. \tag{2.34}$$

assim finalizamos o lema.

□

Continuando a demonstração do teorema, considere $p = \lfloor k/m \rfloor$ (O maior inteiro menor ou igual que k/m, onde $m \in \mathbb{N}$), então, pela definição de r_{k+4p} obtemos $r_{k+4p} \leqslant (1+4/m)r_k + M$, juntamente com a definição de $\delta_{k,p}$, desigualdade (2.1) e com os itens c), d) e e) do lema 2.2.1 temos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\psi_s}{\psi^3} f\, g'\right\|_2^2 &\leqslant \frac{1}{e^{-2ar_{k+4p}}}(C_1 e^{(c-\eta)r})^{-4}\|u\|_2\\ &\leqslant C\frac{e^{2a(1+4/m)r_k}}{e^{4(c-\eta)r_k}}\|u\|_2^2\end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\cot(s)}{\psi^2} f\, g'\right\|_2^2 &\leqslant \frac{1}{e^{-2ar_{k+4p}}}(C_1 e^{(c-\eta)r})^{-4}\|u\|_2\\ &\leqslant C\frac{e^{4a(1+4/m)r_k}}{e^{4(c-\eta)r_k}}\|u\|_2^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\psi^2} f\, g''\right\|_2^2 &\leqslant \frac{1}{e^{-2ar_{k+4p}}}(C_1 e^{(c-\eta)r})^{-4}\|u\|_2\\ &\leqslant C\frac{e^{4a(1+4/m)r_k}}{e^{4(c-\eta)r_k}}\|u\|_2^2.\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ onde $c - \eta > a(1 + 4/m)$ tal que

$$\left\| \frac{\psi_s}{\psi^3} f\, g' \right\|_2, \left\| \frac{\cot(s)}{\psi^2} f\, g' \right\|_2, \left\| \frac{1}{\psi^2} f\, g'' \right\|_2 \leq \epsilon \, \|u\|_2$$

e juntamente com o lema 2.2.1 , deduzimos de (2.21) que

$$\|\Delta u + \lambda u\|_2 \leq \epsilon \, \|u\|_2. \tag{2.35}$$

Considere o subespaço gerado

$$G = [[u(k_0, p_0, .), u(k_0 + 4p_0, p_0, .), u(k_0 + 8p_0, p_0, .), \cdots]]$$

onde $supp(u(k_0 + 2^i p_0, p_0, .)) \bigcap supp(u(k_0 + 2^j p_0, p_0, .)) = \emptyset$, para $i \neq j$, logo

$$\|\Delta u + \lambda u\|_2 \leq \epsilon \, \|u\|_2$$

para todo $u \in G$. Pelo lema 1.1 , $\lambda \in \sigma_{ess}(-\Delta)$, para o qual concluímos que

$$[(n-1)^2 c^2/4, \infty) \subseteq \sigma_{ess}(-\Delta), \tag{2.36}$$

o que finaliza a prova do nosso primeiro Teorema.

□

2.3 Demonstração do Teorema 2.1.2

Vamos provar que existe $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\psi(rw)}{\psi(rN)} \leqslant \frac{3}{2} \tag{2.37}$$

para todo $r \geq r_0$ e $rw \in C_0(N)$. Considere $\mu : [0, s] \to \mathbb{S}^{n-1}$ a geodésica tal que $\mu(0) = N$, $\mu(s) = w$ e $\mu'(t) = \partial/\partial s$. Se $\nu(t) = \psi(r\mu(t))$, pelo teorema do valor médio, existe $t_0 \in (0, s)$ tal que

$$\nu(s) - \nu(0) = \nu'(t_0)\, s = s\, g_M(r\mu(t_0))\, (\mathrm{grad}\psi, r\mu'(t_0))\,,$$

$$\psi(rw) - \psi(rN) = s\, g_M(r\mu(t_0)) \left(\psi_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\psi_s}{\psi^2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\psi^2} \operatorname{grad}_{\mathbb{S}^{n-2}} \psi,\ r \frac{\partial}{\partial s} \right)$$

e

$$\psi(rw) - \psi(rN) = r\, s\, \psi_s(r\mu(t_0)). \tag{2.38}$$

Da hipótese (iii) temos que

$$\frac{\psi_\tau(r,\tau,\xi)}{\psi(r,\tau,\xi)} \leq \frac{c_1}{r^\gamma}$$

para cada r, ξ tal que $(r,\tau,\xi) \in C_0(N)$. Além disso, integrando com respeito a τ de 0 a s, obtemos

$$\psi(r,s,\xi) \leq \psi(r,0,\xi) e^{c_1 s/r^\gamma} = \psi(rN) e^{c_1 s/r^\gamma}$$

Assim de (2.38), da hipótese (iii) e da desigualdade anterior obtemos

$$|\psi(rw) - \psi(rN)| \leq \frac{c_1\, s\, e^{c_1 s/r^\gamma} \psi(rN)}{r^\gamma}$$

sendo $s \leqslant c_2$, temos

$$|\psi(rw) - \psi(rN)| \leq \frac{c_1\, c_2\, e^{c_1 c_2/r^\gamma} \psi(rN)}{r^\gamma}$$

$$\left|\frac{\psi(rw)}{\psi(rN)} - 1\right| \leq \frac{c_1\, c_2\, e^{c_1 c_2/r^\gamma}}{r^\gamma},$$

ademais, sendo $\gamma > 1$, existe r_0 tal que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\psi(rw)}{\psi(rN)} \leq \frac{3}{2} \tag{2.39}$$

para todo $r \geq r_0$ e $rw \in C_0(N)$.

Para $\lambda > 0$, tome $\alpha > 0$ tal que $\lambda > \frac{(n-1)^2\alpha^2}{4}$ e considere a métrica

$$g_{M^\alpha} = dr^2 + \psi^\alpha(rw)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

em $C_0(N)$, onde $\psi^\alpha(rw) = e^{\alpha\, r}\psi(rw)$. Pela hipótese (i), a função $\psi^\alpha(rw)$ satisfaz

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi_r^\alpha(rw)}{\psi^\alpha(rw)} = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} + \alpha\right) = \alpha$$

para cada w tal que $\mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N) < c_2$.

Dado $\epsilon > 0$, construíremos uma sequência (u_k^α) de maneira análoga a (2.5) que satisfaz a desigualdade (2.4), onde f_k^α é a mesma de (2.6) com $v_\alpha(r) = \displaystyle\int_0^r \psi^\alpha(\tau N)^{n-1} d\tau$, $r_k = (2k+1)\pi/2\sqrt{\lambda}$ e $g(s) = H(s/c_2)\cos(\pi s/c_2)$ e g satisfazendo (2.17) e

$$supp\, g = B(c_2) = \left\{w \in \mathbb{S}^{n-1}\ ;\ \mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N) < c_2\right\}.$$

Similarmente a (2.20) temos que

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha u^\alpha + \lambda u^\alpha &= A_\alpha(r) F^\alpha\, g\, h + B_\alpha(rw)(F^\alpha)'\, g\, h + 2(F^\alpha)'\, g\, h' + F^\alpha\, g\, \Delta h \\ &+ \frac{(n-3)\psi_s^\alpha}{(\psi^\alpha)^3} f^\alpha\, g' + \frac{(n-2)\cot(s)}{(\psi^\alpha)^2} f^\alpha\, g' + \frac{1}{(\psi^\alpha)^2} f^\alpha\, g'' \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde

$$A_\alpha(r) = -\frac{1}{2}\frac{v_\alpha''}{v_\alpha} + \frac{1}{4}\left(\frac{v_\alpha'}{v_\alpha}\right)^2 + \frac{(n-1)^2\alpha^2}{4}$$

e

$$B_\alpha(rw) = (n-1)\frac{\psi_r^\alpha}{\psi^\alpha}(rw) - \frac{v_\alpha'}{v_\alpha}\ .$$

Analogamente a (2.11) temos

$$\lim_{r\to\infty} \frac{v_\alpha'(r)}{v_\alpha(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{v_\alpha''(r)}{v_\alpha'(r)} = (n-1)\alpha, \tag{2.41}$$

o que implica

$$\lim_{r\to\infty} A_\alpha(r) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{r\to\infty} B_\alpha(rw) = 0 \tag{2.42}$$

para cada w tal que $\text{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N) < c_2$.

Então, similarmente a (2.21) , dado $\delta > 0$ existe r_0 tal que

$$\begin{aligned} \|\Delta_\alpha u^\alpha + \lambda u^\alpha\|_{L^2(M^\alpha)} &\leqslant \delta\|\chi_h F^\alpha g\|_{L^2(M^\alpha)} + \delta\|\chi_h (F^\alpha)' g\|_{L^2(M^\alpha)} \\ &+ C\left\|\frac{\psi_s^\alpha}{(\psi^\alpha)^3} f^\alpha g'\right\|_{L^2(M^\alpha)} + C\left\|\frac{\cot(s)}{(\psi^\alpha)^2} f^\alpha g'\right\|_{L^2(M^\alpha)} \\ &+ \left\|\frac{1}{(\psi^\alpha)^2} f^\alpha g''\right\|_{L^2(M^\alpha)} \end{aligned} \tag{2.43}$$

para todo $r \geqslant r_0$ e $rw \in C_0(N)$. Para o que segue provaremos o seguinte lema

Lema 2.3.1 *Para as funções F^α, f^α, g e u^α definidas anteriormente, temos as seguintes desigualdades*

(a) $\|\chi_h\, F^\alpha\, g\|_2 \leqslant C\, \|u^\alpha\|_2$

(b) $\|\chi_h\, (F^\alpha)'\, g\|_2 \leqslant C\, \|u^\alpha\|_2$

(c) $\left\|\dfrac{\psi_s^\alpha}{(\psi^\alpha)^3} f^\alpha\, g'\right\|_2 \leqslant C\, r_k^{-\gamma} \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi^\alpha|\right]^{-2} \|u^\alpha\|_2$

(d) $\left\|\dfrac{\cot(s)}{(\psi^\alpha)^2} f^\alpha\, g'\right\|_2 \leqslant C \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi^\alpha|\right]^{-2} \|u^\alpha\|_2$

(e) $\left\|\dfrac{1}{(\psi^\alpha)^2} f^\alpha g''\right\|_2 \leqslant C \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi^\alpha|\right]^{-2} \|u^\alpha\|_2$

onde $C_{k,p} = \{rw\,;\ r_k \leq r \leq r_{k+4p},\ w \in B(c_2)\}$ e C uma constante positiva independente de k e p.

Demonstração Os itens de (a) e (b) são provados de forma semelhante aos itens (a) e (b) do lema 2.2.1. Provaremos o item (c), os outros itens segue-se de forma semelhante.

Note que

$$\left\| \frac{\psi_s^\alpha}{(\psi^\alpha)^3} f^\alpha\, g' \right\|_{L^2(M^\alpha)}^2 = \int_{B(c_2)} |g'|^2 \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \frac{(\psi_s^\alpha)^2}{(\psi^\alpha)^6}\, f^\alpha(r)^2\, (\psi^\alpha)^{n-1}\, dr\, dw$$

Pela hipótese (iii) e fato de $\inf\limits_{C_{k,p}} |\psi^\alpha| \leqslant |\psi^\alpha|$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\psi_s^\alpha}{(\psi^\alpha)^3} f^\alpha\, g' \right\|_{L^2(M^\alpha)}^2 &\leq \frac{C}{r_k^{2\gamma}} \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi^\alpha| \right]^{-4} \int_{B(c_2)} |g'|^2 \int_{r_k}^{r_{k+4p}} f^\alpha(r)^2 (\psi^\alpha)^{n-1}\, dr\, dw \\ &\leq \frac{C}{r_k^{2\gamma}} \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi^\alpha| \right]^{-4} \| f^\alpha\, g' \|_{L^2(M^\alpha)}^2 . \end{aligned}$$

Sendo $f^\alpha(r) = v_\alpha^{-1/2} \cos(\beta r) h(r)$ e $v_\alpha'(r) = \psi^\alpha(rN)^{n-1}$, então

$$\begin{aligned} \| f^\alpha\, g' \|_{L^2(M^\alpha)}^2 &= \int_{B(c_2)} |g'|^2 \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r) h^2(r) \frac{(\psi^\alpha)^{n-1}}{v_\alpha}\, dr\, dw \\ &\leq \int_{B(c_2)} |g'|^2 \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r) \frac{\psi^\alpha(rw)^{n-1}}{\psi^\alpha(rN)^{n-1}} \cdot \frac{v_\alpha'}{v_\alpha}\, dr\, dw. \end{aligned}$$

Pela estimativa (2.39) e limite (2.41) segue-se

$$\left\| \frac{\psi_s^\alpha}{(\psi^\alpha)^3} f^\alpha\, g' \right\|_{L^2(M^\alpha)}^2 \leq \frac{C\,\alpha}{r_k^{2\gamma}} \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi^\alpha| \right]^{-4} \int_{B(c_2)} |g'|^2 \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, dr\, dw. \tag{2.44}$$

Além disso temos que

$$\begin{aligned} \| u^\alpha \|_{L^2(M^\alpha)}^2 =& \int_{B(c_2)} g^2(s) \int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r) \frac{\psi^{n-1}}{v(r)}\, dr\, dw \\ =& \int_{B(c_2)} |g'|^2 \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r) \frac{\psi^\alpha(rw)^{n-1}}{\psi^\alpha(rN)^{n-1}} \cdot \frac{v_\alpha'}{v_\alpha}\, dr\, dw. \end{aligned}$$

Pela estimativa (2.39) e limite (2.41) obtemos

$$\|u^\alpha\|^2_{L^2(M^\alpha)} \geqslant C\,\alpha \int_{B(c_2)} g^2(s) \int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r)\,dr\,dw. \tag{2.45}$$

Sendo

$$\int_{B(c_2)} |g'(s)|^2\,dw \leqslant C \int_{B(c_2)} g(s)^2\,dw$$

e

$$\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\,dr = 2\int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r)\,dr.$$

podemos combinar essas duas últimas expressões com (2.44) e (2.45), o que obtemos

$$\left\| \frac{\psi_s^\alpha}{(\psi^\alpha)^3} f^\alpha\, g' \right\|^2_{L^2(M^\alpha)} \leq \frac{C}{r_k^{2\gamma}} \left[\inf_{C_{k,p}} |\psi^\alpha|\right]^{-4} \|u^\alpha\|^2_{L^2(M^\alpha)}. \tag{2.46}$$

O que finaliza a demonstração do lema.

□

Continuando a demonstração do teorema, usaremos na desigualdade (2.43) o lema 2.3.1 e hipótese (ii) para deduzirmos que dado $\epsilon > 0$ existe r_0 tal que

$$\|\Delta_\alpha u^\alpha + \lambda u^\alpha\|_{L^2(M^\alpha)} \leq (\epsilon/M)\,\|u^\alpha\|_{L^2(M^\alpha)} \tag{2.47}$$

para todo $r \geqslant r_0$ e $rw \in C_0(N)$.

Definindo as funções $u_k = \mu^{-1} u_k^\alpha \in C_0^\infty(M)$ onde $\mu(r,\alpha) = e^{-(n-1)\alpha\, r/2}$, note que $\|u_k\|_{L^2(M)} = \|u_k^\alpha\|_{L^2(M^\alpha)}$. Entretanto

$$\Delta_\alpha u_k^\alpha = \left[\Delta u_k + \left(\frac{1}{e^{2\alpha\, r}} - 1\right) f_k\,\Delta g - (n-1)^2 \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2}\frac{\psi_r}{\psi}\right) u_k\right] \mu(r)$$

onde $f_k = \mu(r,\alpha)^{-1} f_k^\alpha$. Por outro lado

$$\left\| \left[\Delta u_k + \left(\frac{1}{e^{2\alpha\, r}} - 1\right) f_k\,\Delta g - (n-1)^2 \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2}\frac{\psi_r}{\psi}\right) u_k + \lambda u_k\right] \mu(r) \right\|_{L^2(M^\alpha)} =$$

$$= \left\| \Delta u_k + \left(\frac{1}{e^{2\alpha r}} - 1 \right) f_k \, \Delta g - (n-1)^2 \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2} \frac{\psi_r}{\psi} \right) u_k + \lambda u_k \right\|_{L^2(M)}$$

usando desigualdade triangular e hipótese (i) na desigualdade (2.47) temos

$$\|\Delta u_k + \lambda \, u_k\|_{L^2(M)} \leq (\epsilon/M) \, \|u\|_{L^2(M)} + C \|f_k \, \Delta g\|_{L^2(M)}$$

$$+ C \left(\frac{\alpha^2}{4} + \epsilon \right) \|u_k\|_{L^2(M)} \, . \tag{2.48}$$

Note que $\|f_k \, \Delta g\|_{L^2(M)} = \|f_k^\alpha \, \Delta g\|_{L^2(M^\alpha)}$, mas

$$\begin{aligned}
\|f_k^\alpha \, \Delta g\|_{L^2(M^\alpha)} &= \int_{B(c_2)} \int_{r_k}^{r_{k+4p}} f^\alpha(r)^2 (\Delta g)^2 (\psi^\alpha)^{n-1} \, dr \, dw \\
&= \int_{B(c_2)} \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r) h^2(r) (\Delta g)^2 \frac{(\psi^\alpha)^{n-1}}{v_\alpha} \, dr \, dw \\
&\leq \int_{B(c_2)} \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r) (\Delta g)^2 \frac{\psi^\alpha(rw)^{n-1}}{\psi^\alpha(rN)^{n-1}} \cdot \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} \, dr \, dw.
\end{aligned}$$

Usando a estimativa (2.39) e limite (2.41) concluimos que

$$\|f_k \, \Delta g\|_{L^2(M)} \leq C\alpha \int_{B(c_2)} \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r) (\Delta g)^2 \, dr \, dw.$$

Além disso, por (2.17) e hipótese (iii), sendo $r \geqslant r_0$ e $supp \, g = supp \, g' = supp \, g'' = B(c_2)$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_{B(c_2)} (\Delta g)^2 \, dw &\leqslant \int_{B(c_2)} \left[\left| \frac{(n-3)\psi_s}{\psi^3} \right| |g'| + \frac{(n-2)|cot(s)|}{\psi^2} |g'| + \frac{1}{\psi^2} |g''| \right]^2 dw \\
&\leqslant \frac{C}{(\inf_{C_{k,p}} |\psi|)^4} \int_{B(c_2)} \left[\left| \frac{(n-3)c_1}{r_0^\gamma} \right| |g'| + (n-2)|cot(s)||g'| + |g''| \right]^2 dw \\
&\leqslant \frac{C}{(\inf_{C_{k,p}} |\psi|)^4} \int_{B(c_2)} g^2 \, dw.
\end{aligned}$$

Assim

$$\|f_k\,\Delta g\|_{L^2(M)} \leqslant \frac{C\alpha}{(\inf\limits_{C_{k,p}} |\psi|)^4} \int_{B(c_2)} g(s)^2 \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\,dr\,dw.$$

Usando a desigualdade (2.45) temos que

$$\|f_k\,\Delta g\|_{L^2(M)} \leqslant \frac{C}{(\inf\limits_{C_{k,p}} |\psi|)^4} \|u_k\|_{L^2(M)},$$

pela hipótese (ii), segue-se

$$\|f_k\,\Delta g\|_{L^2(M)} \leqslant C\epsilon\|u_k\|_{L^2(M)}.$$

Portanto, tomando $\alpha < \epsilon$, obtemos por (2.48) que

$$\|\Delta u_k + \lambda u_k\|_{L^2(M)} \leq \epsilon\,\|u_k\|_{L^2(M)},\ \ k = 1, 2, \dots \tag{2.49}$$

o que nos permite usar o lema 1.1 e concluir que

$$\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$$

o que finaliza a prova do teorema 2.1.2.

$\square$

Capítulo 3

Outros resultados e aplicações

Nesse capítulo, mostraremos a existência de espectro essencial para variedades com condições geométricas na vizinhança de um raio e alguns exemplos. Os próximos resultados garantem a existência do espectro essencial para classes de variedades com condições de curvatura numa vizinhança de um raio, e através de teoremas de comparação, tais resultados reduzem-se aos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2.

3.1 Consequências dos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2

Corolário 3.1 *Seja M uma variedade Riemanniana com as condições do Teorema 2.1.1. Além disso, a função ψ satisfaz as seguintes condições*

i) $\displaystyle\lim_{\substack{r\to+\infty \\ w\to N}} K(rw) = -c < 0$ *uniformemente sobre* $C_a(N)$, $\sqrt{c} > a$

ii) $\displaystyle\left|\frac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant c_1$ *for all* $rw \in C_a(N)$

Então $[(n-1)^2 c/4, \infty) \subset \sigma_{ess}(-\Delta)$.

Demonstração: Temos que $\sqrt{\det g_M} = \theta(rw) = \psi(rw)^{n-1}$, assim

$$\frac{\theta_r(rw)}{\theta(rw)} = (n-1)\frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)}$$

Pela hipótese (i), dado $\epsilon > 0$ existe r_0 tal que

$$-c-\epsilon \leq K(rw) \leq -c+\epsilon$$

para todo $r \geq r_0$ e $rw \in C_a(N)$. Usando o Lema 6.1 em [4] obtemos

$$(n-1)\sqrt{c-\epsilon} \leq \frac{\theta_r(rw)}{\theta(rw)} \leq (n-1)\sqrt{c+\epsilon}$$

para $r_0 \leq r \leq \sigma$ com σ suficientemente grande e $rw \in C_a(N)$. Dessa forma garantimos que

$$\lim_{\substack{r\to+\infty \\ w\to N}} \frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} = \sqrt{c}$$

uniformemente sobre $C_a(N)$. Portanto, podemos usar o Teorema 2.1.1 para concluir a prova do resultado.

$\square$

Corolário 3.2 *Seja M uma variedade Riemanniana com as condições do Teorema 2.1.2. Além disso, a curvatura seccional radial e a função ψ satisfazem as seguintes condições*

i) $K_{rad}(rw) \geq 0$ *para cada w tal que $rw \in C_0(N)$*

ii) $\lim_{r\to\infty} \psi(rw) = +\infty$ *para cada w tal que $rw \in C_0(N)$*

iii) $\left|\frac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant \frac{c_1}{r^\gamma}$ *para todo $rw \in C_0(N)$ para algum $\gamma > 1$.*

Então $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0,\infty)$.

Demonstração: Temos que

$$K_{rad}(rw) = -\frac{\psi_{rr}(rw)}{\psi(rw)}$$

é contínua e ψ é suave satisfazendo $\psi(0) = 0$, $\psi_r(0) = 1$ e $\psi(rw) > 0$ em $C_0(N)$, pelo lema 1 em [13] garantimos que

$$\left|\frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)}\right| \leq \frac{1}{r}$$

para cada w tal que $rw \in C_0(N)$ e $r > 0$. Portanto

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} = 0$$

para cada w tal que $rw \in C_0(N)$, assim pelo Teorema 2.1.2 segue-se o resultado.

□

Corolário 3.3 *Seja M uma variedade Riemanniana com as condições do Teorema 2.1.2. Além disso, a curvatura de Ricci e a função ψ satisfazem as seguintes condições*

i) $Ric_M(rw) \geq 0$ *para cada w tal que $rw \in C_0(N)$*

ii) $\lim_{r\to\infty} \psi(rw) = +\infty$ *para cada w tal que $rw \in C_0(N)$*

iii) $\left|\frac{\psi_s(rw)}{\psi(rw)}\right| \leqslant \frac{c_1}{r^\gamma}$ *para todo $rw \in C_0(N)$ para algum $\gamma > 1$.*

Então $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$.

Demonstração: Para a hipótese (i), utilizamos o Lema em [11] para obtermos a seguinte desigualdade

$$0 \leq \Delta r \leq \frac{n-1}{r}$$

em $C_0(N)$, por outro lado

$$\Delta r = (n-1)\frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)},$$

portanto

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\psi_r(rw)}{\psi(rw)} = 0$$

para cada w tal que $rw \in C_0(N)$, assim pelo Teorema 2.1.2 segue-se o resultado.

□

3.2 Espectro essencial da horobola em $\mathbb{H}^n$ e de cones em $\mathbb{R}^n$

Iremos agora determinar espectro essencial de uma horobola do $\mathbb{H}^n(-1)$ e de um cone do $\mathbb{R}^n$.

Corolário 3.2.1 *O espectro essencial de uma horobola é o mesmo do* $\mathbb{H}^n(-1)$.

Demonstração: Em coordenadas esféricas geodésicas a métrica do $\mathbb{H}^n(-1)$ é dada por

$$g = dr^2 + \sinh^2 r g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

e a horobola é o conjunto

$$\Sigma = \left\{rw;\ \sin^2 s\, e^r \leq (1+\cos s)^2\right\} \tag{3.1}$$

onde $s = \mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N)$ com $N \in \mathbb{S}^{n-1}$ fixo. Note que o conjunto

$$C_{1/2}(N) = \left\{rw;\ se^{r/2} \leq 1\right\}$$

está contido em Σ, pois

$$\sin s \leq s \;\; \text{e} \;\; 1 \leq (1+\cos s)^2$$

Sendo $g_\Sigma = dr^2 + \sinh^2 r g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ a métrica induzida de $\mathbb{H}^n(-1)$, $\psi(rw) = \sinh r$ satisfaz as hipóteses do teorema 2.1.1, daí concluímos que $[1/4, \infty) \subset \sigma_{ess}(\Sigma)$. Pelo Lema(Desigualdade de Cheeger) em [8] obtemos a inclusão contraria, o que mostra o corolário.

Apresentaremos uma demonstração que a horobola é o conjunto 3.1. Por simplicidade de notação faremos a demonstração para o $\mathbb{H}^2(-1)$.

Considere o espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ com métrica

$$g = \frac{(dx^2 + dy^2)}{y^2}$$

A Horobola $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{H}^2; x^2 + (y-R)^2 \leq R^2\}$ tem o seu bordo interceptado pelo semi-círculo de centro $(x_0, 0)$ e raio $\sqrt{x_0^2 + 4R^2}$, com $x_0 < 0$, o qual é uma geodésica de $\mathbb{H}^2$, que passa pelos pontos $Q(0, 2R)$ e $P\left(\frac{-2x_0R^2}{x_0^2+R^2}, \frac{2R^3}{x_0^2+R^2}\right)$. A curva do semi-círculo é dada por

$$\alpha(t) = (\sqrt{x_0^2 + 4R^2}\sin t + x_0, \sqrt{x_0^2 + 4R^2}\cos t)$$

Seja $\omega(t_0)$ o vetor tangente da curva $\alpha(t)$ no ponto Q formando um ângulo s com o vetor N começando em Q e apontando para o centro da horobola. O comprimento da curva α de Q a P é dada por

$$r = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)|dt = \int_{t_0}^{t_1} \sec t \, dt = ln\left|\frac{\sec t_1 + \tan t_1}{\sec t_0 + \tan t_0}\right|$$

por outro lado

$$e^r = \frac{\sec t_1 + \tan t_1}{\sec t_0 + \tan t_0} = \frac{1+\sin t_1}{\cos t_1} \cdot \frac{\cos t_0}{1 + \sin t_0}$$

Sendo $\alpha(t_1) = P$ e $\alpha(t_0) = Q$, obtemos

$$\sin t_1 = \frac{-x_0^3 - 3x_0R^2}{(x_0^2 + R^2)\sqrt{x_0^2 + 4R^2}} \ , \ \cos t_1 = \frac{2R^3}{(x_0^2 + R^2)\sqrt{x_0^2 + 4R^2}}$$

e

$$\sin t_0 = \frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2 + 4R^2}} \ , \ \cos t_0 = \frac{2R}{\sqrt{x_0^2 + 4R^2}}$$

portanto

$$e^r = \frac{(x_0^2 + R^2)\sqrt{x_0^2 + 4R^2} - x_0^3 - 3x_0R^2}{2R^3} \cdot \frac{2R}{\sqrt{x_0^2 + 4R^2} - x_0}$$

Da inclinação da reta tangente à α no ponto Q implica

$$\frac{\cos s}{\sin s} = -\tan(s + \frac{\pi}{2}) = \frac{-x_0}{2R}$$

logo

$$e^r = \frac{1 + 3\cos s + 3\cos^2 s + \cos^3 s}{\sin^2 s\,(1 + \cos s)} = \frac{(1 + \cos s)^2}{\sin^2 s}$$

portanto obtemos a equação da horoesfera

$$\sin^2 s\, e^r = (1 + \cos s)^2$$

Corolário 3.2.2 *Os cones do $\mathbb{R}^n$ têm o mesmo espectro de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: O $\mathbb{R}^n$ tem a métrica em coordenadas esféricas geodésicas dada por $g_{\mathbb{R}^n} = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ e um cone é o conjunto

$$C = \{rw : r \in [0, +\infty), dist_{\mathbb{S}^{n-1}}(w, N) < c\}$$

onde N é uma direção fixa em $\mathbb{S}^{n-1}$. Como a função $\psi(rw) = r$ satisfaz as hipóteses do teorema 2.1.2 e C é um conjunto do tipo $C_0(N)$, assim obtemos que $\sigma_{ess}(C) = [0, \infty)$.

3.3 Um exemplo e mais uma aplicação

O próximo exemplo é uma consequência do Teorema 2.1.1. O Teorema 0.0.2 diz que para uma variedade ter espectro essencial vazio é suficiente que em todas as direções a curvatura seccional deve divergir uniformemente para menos infinito. Exibiremos um exemplo que indica a necessidade que em todas as direções a curvatura seccional deva divergir para menos infinito uniformemente afim de que o espectro essencial seja vazio.

Exemplo 3.3.1 *Considere* $\mathbb{R}^2 = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ r \geq 0\ ,\ \theta \in [0, 2\pi]\}$ *com métrica dada por* $g = dr^2 + \psi^2(r,\theta)g_{\mathbb{S}^1}$, *s* $\psi(r,\theta) = re^{r^2 g(\theta)+r}$ *onde* $g(\theta) = \sin^2(\theta/2)$. *Calculando as derivadas de* ψ

$$\psi_r = \frac{\psi}{r} + (2rg(\theta)+1)\psi \quad e \quad \psi_{rr} = \frac{\psi_r}{r} - \frac{\psi}{r^2} + 2g(\theta)\psi + (2rg(\theta)+1)\psi_r$$

então deduzimos

$$\left|\frac{\psi_r}{\psi} - 1\right| = \frac{1}{r} + 2r(\theta/2)^2\frac{\sin^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2}$$

e

$$K(r,\theta) = -\frac{\psi_{rr}}{\psi}(r,\theta) = -6g(\theta) - \frac{2}{r} - (2rg(\theta)+1)^2$$

No conjunto $C(a) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ |\theta| \leq e^{-ar}\}$ *temos que*

$$\left|\frac{\psi_r}{\psi} - 1\right| \leq Cre^{-2ar} \to 0$$

quando $r \to +\infty$, *além disso*

$$K(r,0) = -\frac{\psi_{rr}}{\psi}(r,0) \to -1$$

e

$$K(r,\theta) \to -\infty\ ;\ \ \theta \neq 0$$

quando $r \to +\infty$. Claramente

$$\left|\frac{\psi_\theta}{\psi}(r,\theta)\right| = r^3 g'(\theta) = r^3(\theta/2)\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}\cos(\theta/2) \leq Cr^3 e^{-ar} \leq b$$

em $C(a)$, entretanto pelo Teorema 2.1.2, o espectro essencial de $\mathbb{R}^2$ com tal métrica contém o intervalo $[1/4, +\infty)$.

Corolário 3.3.1 *O espectro essencial do gráfico de uma função radial completa é o intervalo $[0, +\infty)$.*

Demonstração: Os gráficos de funções radiais suaves são variedades Riemannianas. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é suave e radial, $f(x) = f(r)$ onde $r = |x|$, então a métrica g induzida sobre $M = \{(r\,\omega, f(r)) \in \mathbb{R}^{n+1} / \, r \geq 0,\ \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tem a forma

$$g = dt^2 + r^2(t) g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

onde $t(r) = \int_0^r \sqrt{1 + f'(\tau)^2} d\tau$ e $r(t)$ é a função inversa de $t(r)$. Entretanto,

$$0 < r'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(r(t))^2}} \leq 1$$

Sendo f inteira, $r(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$, logo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r'(t)}{r(t)} = 0$$

por [8, Theorem 1.2], segue-se que $\sigma_{ess}(M) = [0, \infty)$.

Observamos que cones no gráfico de uma função radial

$$C = \{(r\,\omega, f(r)) \in \mathbb{R}^{n+1} / \, r \geq 0,\ \mathrm{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(\omega, N) < c\}$$

possuem espectro igual ao do gráfico pelo Teorema 2.1.2.

3.4 Apêndice

Apresentaremos agora uma demonstração diferente para o Teorema 1.2 em [8], obtido por Hironori Kumura. Usaremos um método intrínseco diferente de Hironori Kumura que trabalhou extrínsicamente. Essa demonstração foi obtida no início do trabalho da minha tese por José Fábio Bezerra Montenegro e por mim, depois percebemos que o resultado já havia sido demonstrado.

Teorema 3.4.1 *Seja M uma variedade Riemanniana completa com um pólo e de dimensão $n \geq 2$ tal que*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\theta'(r,w)}{\theta(r,w)} = \sqrt{c} \tag{3.2}$$

para alguma constante $c \geq 0$ e para cada $w \in \mathbb{S}^{n-1}$, onde θ é o elemento de volume de M e $\theta' = \partial\theta/\partial r$. Então o espectro essencial do Laplaciano é o intervalo $[c/4, \infty)$.

Demonstração: Primeiro vamos considerar $c > 0$. Seja

$$v(r) = \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta(\tau, w)dwd\tau$$

o volume da bola geodésica de raio $r > 0$. Temos que

$$v'(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta(r,w)dw \quad \text{and} \quad v''(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta'(r,w)dw$$

Note que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{v''(r)}{v'(r)} = \sqrt{c}$$

De fato,

$$v''(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\theta'}{\theta} \cdot \theta \, dw = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{\theta'}{\theta} - \sqrt{c}\right) \theta \, dw + \sqrt{c} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta \, dw$$

logo

$$|v''(r) - \sqrt{c} \cdot v'(r)| \leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \frac{\theta'}{\theta} - \sqrt{c} \right| \theta \, dw$$

Por (3.2), dado $\epsilon > 0$ existe $r_0 > 0$ tal que para $r > r_0$

$$|v''(r) - \sqrt{c} \cdot v'(r)| \leq \epsilon \, v'(r)$$

$$\left| \frac{v''(r)}{v'(r)} - \sqrt{c} \right| \leq \epsilon$$

Pela regra de L'Hospital

$$\lim_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} = \sqrt{c} \tag{3.3}$$

então

$$\lim_{r\to\infty} \frac{v''(r)}{v(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{v''(r)}{v'(r)} \cdot \frac{v'(r)}{v(r)} = c \tag{3.4}$$

Para cada $\lambda > c/4$, considere a função

$$f_\lambda(r) = v(r)^{-1/2} \cos(\beta r), \tag{3.5}$$

sendo $\beta = \sqrt{\lambda - c/4}$. Temos

$$\Delta f_\lambda + \lambda f_\lambda = a(r) f_\lambda + b(r,w) f'_\lambda \tag{3.6}$$

onde

$$a(r) = \frac{-1}{2}\frac{v''}{v} + \frac{1}{4}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \frac{c}{4}$$

e

$$b(r,w) = \frac{\theta'}{\theta} - \frac{v'}{v} \; .$$

Note que por (3.2), (3.3) e (3.4) temos

$$\lim_{r\to\infty} a(r) = \lim_{r\to\infty} b(r,w) = 0. \tag{3.7}$$

Agora suponha que $H \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ é uma função de corte que satisfaz as seguintes condições

$$\begin{cases} H \equiv 1 \text{ on } [-1/2, 1/2], \\ H \equiv 0 \text{ on } \mathbb{R}\backslash[-1,1], \\ 0 \leq H \leq 1. \end{cases}$$

Definimos $h(k,p,r) = H\left(2(r - r_{k+2p})/(r_{k+4p} - r_k)\right)$ como sendo uma função corte centrada em r_{k+2p}, onde $r_k = (2k+1)\pi/(2\beta)$ é zero da função $\cos(\beta r)$, com suporte $\operatorname{supp} h = [r_k, r_{k+4p}]$.
Agora definimos a função radial

$$g_\lambda(k,p,r) = f_\lambda(r)\, h(k,p,r) \in C_0^\infty(M). \tag{3.8}$$

Por (3.6), segue-se

$$\Delta g_\lambda + \lambda g_\lambda = a(r) f_\lambda h + b(r,w) f'_\lambda h + 2 f'_\lambda h' + f_\lambda \Delta h\ . \tag{3.9}$$

A fim de estimar a norma L^2 de $\Delta g_\lambda + \lambda g_\lambda$, observamos que

$$|h'| \leq \frac{\beta}{4\pi p} sup|H'|\, \chi_h \qquad \text{and} \qquad |h''| \leq \frac{\beta^2}{16\pi^2 p^2} sup|H''|\, \chi_h \tag{3.10}$$

onde χ_h é a função característica do conjunto $\operatorname{supp} h = [r_k, r_{k+4p}]$. Para o limite em (3.7) existe $k_0 > 0$ tal que $|a(r)| \leqslant \delta/2$ e $|b(r,w)| \leqslant \delta/2$ para todo $r \geq r_{k_0}$. Então de (3.9)

$$\|\Delta g_\lambda + \lambda g_\lambda\|_2 \leq \frac{\delta}{2}(\|h\, f_\lambda\|_2 + \|h\, f'_\lambda\|_2) + 2\|f'_\lambda\, h'\|_2 + \|f_\lambda\, \Delta h\|_2. \tag{3.11}$$

Por (3.10) existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $p \geq p_0$, $2\|f'_\lambda\, h'\|_2 \leqslant (\delta/2)\|\chi_h\, f'_\lambda\|_2$ and $\|f_\lambda\, \Delta h\|_2 \leqslant (\delta/2)\|\chi_h\, f_\lambda\|_2$. Dessa forma obtemos que

$$\|\Delta g_\lambda + \lambda g_\lambda\|_2 \leq \delta\, (\|\chi_h\, f_\lambda\|_2 + \|\chi_h\, f'_\lambda\|_2) \tag{3.12}$$

para todo $p \geq p_0$ e $r \geq r_{k_0}$.

Vamos precisar usar o lema técnico:

Lema 3.4.1 *Para as funções f_λ e g_λ definidas em (3.5) e (3.8), temos as desigualdades*

$$\|\chi_h\, f_\lambda\|_2 \leq C_1 \|g_\lambda(k,p,.)\|_2$$

e

$$\|\chi_h\, f'_\lambda\|_2 \leq C_2 \|g_\lambda(k,p,.)\|_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas independente k e p.

Proof of Lemma: É suficiente para mostrar que estas desigualdades valem para todos $k \geq \bar{k}_0$, para algum $\bar{k}_0 > 0$. Veja que

$$\begin{aligned}\|g_\lambda\|_2^2 &= \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \cos^2(\beta r)\, h^2(r) \frac{\theta(r,w)}{v(r)}\, dw\, dr \\ &\geq \int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \frac{\cos^2(\beta r)}{v(r)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta(r,w) dw\, dr \\ &= \int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r) \frac{v'(r)}{v(r)}\, dr.\end{aligned}$$

Por (3.3), existe $\bar{k}_1 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{\sqrt{c}}{2} \leq \frac{v'(r)}{v(r)} \leq \frac{3\sqrt{c}}{2}. \tag{3.13}$$

para $r \geq r_{\bar{k}_1}$. Então

$$\|g_\lambda\|_2^2 \geq \frac{\sqrt{c}}{2} \int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r)\, dr. \tag{3.14}$$

Além disso

$$\begin{aligned}\|\chi_h f_\lambda\|_2^2 &= \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \cos^2(\beta r)\, \frac{\theta(r,w)}{v(r)}\, dw\, dr \\ &= \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r) \frac{v'(r)}{v(r)}\, dr\end{aligned}$$

por (3.13) obtemos

$$\|\chi_h f_\lambda\|_2^2 \leq \frac{3\sqrt{c}}{2} \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, dr. \tag{3.15}$$

Mas

$$\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \cos^2(\beta r)\, dr = 2\int_{r_{k+p}}^{r_{k+3p}} \cos^2(\beta r)\, dr,$$

entretanto por (3.14) e (3.15)

$$\|\chi_h f_\lambda\|_2 \leq \sqrt{6}\; \|g_\lambda\|_2 \tag{3.16}$$

para todo p, e $k \geq \bar{k}_1$.

Para a outra desigualdade, usando integração por partes

$$\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f'_\lambda(r)^2\, \theta(r,w) dw dr = -\int_{r_k}^{r_{k+4p}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_\lambda(r)\, \Delta f_\lambda(r)\, \theta(r,w) dw dr.$$

Por (3.6) obtemos

$$\|\chi_h f'_\lambda\|_2^2 = \int_{r_k}^{r_{k+4p}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_\lambda \left[\lambda f_\lambda - a(r) f_\lambda - b(r,w) f'_\lambda\,\right] \theta(r,w) dw dr.$$

Através de (3.7), existe $\bar{k}_0 \geq \bar{k}_1$ de tal forma que $|a(r)|, |b(r,w)| \leq 1$ para todo $r \geq r_{\bar{k}_0}$

$$\begin{aligned}
\|\chi_h f'_\lambda\|_2^2 &\leq (\lambda+1)\int_{r_k}^{r_{k+4p}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_\lambda^2\; \theta(r,w) dr dw + \int_{r_k}^{r_{k+4p}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f_\lambda|\; |f'_\lambda| \theta(r,w) dw dr \\
&\leq (\lambda + \frac{3}{2})\int_{r_k}^{r_{k+4p}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_\lambda^2\, \theta(r,w) dw dr + \frac{1}{2}\int_{r_k}^{r_{k+4p}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (f'_\lambda)^2\, \theta(r,w) dw dr \\
&\leq (\lambda + \frac{3}{2})\|\chi_h f_\lambda\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\chi_h f'_\lambda\|_2^2
\end{aligned}$$

logo

$$\|\chi_h f'_\lambda\|_2^2 \leq 2(\lambda + 3/2)\|\chi_h f_\lambda\|_2^2$$

e atráves de (3.16)

$$\|\chi_h f'_\lambda\|_2^2 \leq 12(\lambda + 3/2)\,\|g_\lambda\|_2^2$$

para todo $p > 0$ e $k \geq \bar{k}_0$.

Continuando a prova do Teorema, usando a estimativa (3.12) e o lema 3.4.1

$$\|\Delta g_\lambda + \lambda g_\lambda\|_2 \leqslant C\delta\,\|g_\lambda\|_2 \tag{3.17}$$

para todo $p \geq p_0$ e $k \geq k_0$. Dado $\epsilon > 0$ de tal forma que $C\delta \leqslant \epsilon$ e o subespaço gerado

$$L_\epsilon = [[g_1, g_2, ..., g_i, ...]]$$

onde $g_i = g_\lambda(k_0 + 2^i p_0, p_0, .)$, $i \in \mathbb{N}$. Temos $\mathrm{supp}(g_i) \bigcap \mathrm{supp}(g_j) = \emptyset$, para $i \neq j$ e por (3.17)

$$\|\Delta g + \lambda g\|_2 \leqslant \epsilon\,\|g\|_2$$

para todo $g \in L_\epsilon$ e $\lambda > c/4$. Então pelo lema 1.1 , $\lambda \in \sigma_{ess}(M)$. Além disso, o espectro essencial é um conjunto fechado, de modo que

$$[c/4, +\infty) \subseteq \sigma_{ess}(M).$$

Para mostrar que esses conjuntos são na verdade os mesmos, note que por (3.2), temos que, para qualquer $\eta > 1$, existe $r_\eta > 0$ de tal forma que

$$\frac{\theta'(r,w)}{\theta(r,w)} > \frac{\sqrt{c}}{\eta}$$

para todo $r \geq r_\eta$. Perceba que $\Delta r = \theta(r,w)^{-1}\theta'(r,w)$. Seja D um domínio compacto em $M - B(r_\eta)$. Integrando Δr sobre D e usando a desigualdade isoperimétrica em [12], obtemos $Area(\partial D) \geq (c/4\eta^2)Vol(D)$ em , onde ∂D é o bordo de D. Pelo Lema(Desigualdade de Cheeger) em [8], o espectro do

Laplaciano de $M - B(r_\eta)$ é limitado inferiormente por $c/4\eta^2$, e pelo princípio de decomposição em [4], concluímos que o espectro essencial do Laplaciano de M é limitado inferiormente por $c/4\eta^2$, para todo $\eta > 1$. Tomando o limite quando η tende para um, isso mostra a inclusão oposta.

Agora vamos tratar o caso $c = 0$. Queremos provar que $\sigma_{\mathrm{ess}}(M) = [0, \infty)$. Para isso, dado $\lambda > 0$, $\epsilon > 0$, tomamos $\alpha > 0$ satisfazendo

$$\alpha, \alpha^2 \leqslant \epsilon \quad \text{and} \quad \frac{\alpha^2}{4} < \lambda \tag{3.18}$$

Seja $M_\alpha = M$ com a métrica

$$g_\alpha = dr^2 + |e^{r\alpha/(n-1)}\mathcal{A}(r, w)dw|^2,$$

Então o elemento de volume de M_α é dado por

$$\theta_\alpha(r, w)drdw = \theta(r, w)e^{r\alpha}drdw.$$

Note que

$$\frac{\theta'_\alpha(r, w)}{\theta_\alpha(r, w)} = \frac{\theta'(r, w)}{\theta(r, w)} + \alpha \longrightarrow \alpha \tag{3.19}$$

quando $r \to +\infty$, para cada $w \in \mathbb{S}^{n-1}$. Então pela primeira parte da prova e (3.18)

$$\lambda \in \sigma_{ess}(M_\alpha) = [\alpha^2/4, \infty)$$

e existe uma sequência de funções radiais $u_k \in C_0^\infty(M_\alpha)$ satisfazendo

i) $\|u_k\|_{L^2(M_\alpha)} = 1$

ii) $\mathrm{supp}(u_k) \bigcap \mathrm{supp}(u_j) = \emptyset$ para todo $k \neq j$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \inf[\mathrm{supp}(u_k)] = +\infty$

iii) $\left|\dfrac{\theta'}{\theta}(r, w)\right| \leqslant 1$ para cada $w \in \mathbb{S}^{n-1}$, $r \in \mathrm{supp}(u_k)$ e $k \geq 1$

iv) $\|\Delta_{M_\alpha} u_k + \lambda u_k\|_{L^2(M_\alpha)} \leqslant \dfrac{\epsilon}{4}$

Definimos $v_k(r)$ de tal forma que $u_k(r) = w_\alpha(r) v_k(r)$, onde $w_\alpha(r) = e^{-\alpha r/2}$. Perceba que $\|v_k\|_{L^2(M)} = \|u_k\|_{L^2(M_\alpha)} = 1$. Temos que

$$\Delta_{M_\alpha}(w_\alpha v_k) + \lambda w_\alpha v_k = v_k \Delta_{M_\alpha}(w_\alpha) + 2w'_\alpha v'_k + w_\alpha \Delta_{M_\alpha} v_k + \lambda w_\alpha v_k$$

por outro lado

$$\Delta_{M_\alpha}(w_\alpha) = \left[\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\theta'}{\theta} + \alpha\right)\right] w_\alpha$$

e

$$\Delta_{M_\alpha} v_k = \alpha v'_k + \Delta_M v_k$$

e sendo $w'_\alpha = (-\alpha/2) w_\alpha$, obtemos

$$\Delta_{M_\alpha}(w_\alpha v_k) + \lambda w_\alpha v_k = -\frac{\alpha^2}{4} w_\alpha v_k - \frac{\alpha}{2}\frac{\theta'}{\theta} w_\alpha v_k + w_\alpha \Delta_M v_k + \lambda w_\alpha v_k$$

substituindo em iv)

$$\left\| \left[-\frac{\alpha^2}{4} v_k - \frac{\alpha}{2}\frac{\theta'}{\theta} w_\alpha v_k + \Delta_M v_k + \lambda v_k \right] w_\alpha \right\|_{L^2(M_\alpha)} \leqslant \frac{\epsilon}{4}$$

$$\left\| -\frac{\alpha^2}{4} v_k - \frac{\alpha}{2}\frac{\theta'}{\theta} v_k + \Delta_M v_k + \lambda v_k \right\|_{L^2(M)} \leqslant \frac{\epsilon}{4}$$

usando desigualdade triângular

$$\|\Delta_M v_k + \lambda v_k\|_{L^2(M)} - \frac{\alpha^2}{4}\|v_k\|_{L^2(M)} - \frac{\alpha}{2}\|(\theta'/\theta) v_k\|_{L^2(M)} \leqslant \frac{\epsilon}{4}$$

por iii), (3.18) e sendo $\|v_k\|_{L^2(M)} = 1$ temos

$$\|\Delta_M v_k + \lambda v_k\|_{L^2(M)} \leqslant \frac{\epsilon}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2} \leqslant \epsilon.$$

Então, temos que o subespaço gerado

$$L_\epsilon = [[v_1,\, v_2, ..., v_k,\, ...]] \subset C_0^\infty(M)$$

satisfaz o seguinte

$$\dim(L_\epsilon) = +\infty \quad \text{e} \quad \|\Delta_M v + \lambda v\|_{L^2(M)} \leqslant \epsilon \, \|v\|_{L^2(M)}$$

para todo $v \in L_\epsilon$. Logo, pelo Lema 1.1 temos $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(M)$. Como $\lambda > 0$ é qualquer e sendo o espectro essencial um conjunto fechado, concluímos que

$$[0, \infty) \subset \sigma_{ess}(M)$$

A inclusão contrária sendo verdadeira, segue-se o resultado.

Referências Bibliográficas

[1] GRIGOR'YAN, A. **Heat kernel and analysis on manifolds**. Providence, R. I : American Mathematical Society, 2009. (AMS/IP studies in advanced mathematics, 47).

[2] DAVIES, E. B. **Spectral theory and differential operators**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[3] ZHOU, D. Essential spectrum of the Laplacian on manifolds of nonnegative curvature. **Int. Math. Res. Not.**, v. 4, p. 209-215, 1994.

[4] DONNELLY, H. On the essential spectrum of a complete Riemannian manifol. **Topology**, v. 20, p. 1-14, 1981.

[5] DONNELLY, H. Exhaustion functions and the spectrum of Riemannian manifolds. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 46, n. 2, p. 505-527, 1997.

[6] DONNELLY, H. ; LI, P. Pure point Spectrum and negative curvature for noncompact manifolds. **Duke Math. J.**, v. 46, p. 497-503, 1979.

[7] ESCOBAR, J. F. ; FREIRE, A. The spectrum of the laplacian of manifolds of positive curvature. **Duke Math. J.**, v. 65, p. 1-21, 1992.

[8] KUMURA, H. On the spectrum of the Laplacian on complete manifolds. **J. Math. Soc. Japan**, v. 49, p. 1-14, 1997.

[9] CHEEGER, J. **A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. problems in analysis**: a symposium in honor of Saloman Bochner. Princeton: Princeton University Press, 1970. p. 195-199.

[10] WANG, J. The spectrum of the Laplacian on a minifold of nonnegative Ricci curvature. **Math. Res. Lett.**, v. 4, n. 4, p. 473-479, 1997.

[11] LI, J. Spectrum of the Laplacian on a complete Riemannian manifold with non-negative Ricci curvature which possesses a pole. **J. Math. Soc. Japan**, v. 46, p. 213-216, 1994.

[12] YAU, S. T. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a complete Riemannian manifold. **Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.**, v. 8, p. 487-507, 1975.

[13] CHEN, Z. H. ; LU, Z. Essential spectrum of complete Riemannian manifolds. **Sci. China Ser. A**, v. 35, n. 3, p. 276-282, 1992.

[14] Lu, Z. ; Zhou D. On the essential spectrum of complete non-compact manifolds. **Journal of Functional Analysis**, v. 260, p. 3283-3298, 2011.