UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MICHEL PINHO REBOUÇAS

A CONJECTURA DO QUOCIENTE SEPARÁVEL, UMA CONJECTURA SOBRE EDO'S EM ESPAÇOS DE BANACH, UMA TEORIA DE APROXIMAÇÃO DE PONTOS FIXOS, E CONTRIBUIÇÕES

FORTALEZA
2012

MICHEL PINHO REBOUÇAS

A CONJECTURA DO QUOCIENTE SEPARÁVEL, UMA CONJECTURA SOBRE EDO'S EM ESPAÇOS DE BANACH, UMA TEORIA DE APROXIMAÇÃO DE PONTOS FIXOS, E CONTRIBUIÇÕES

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentação: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso.

FORTALEZA
2012

R241c Rebouças, Michel Pinho

A Conjectura do Quociente Separável, uma Conjectura sobre EDO's em Espaços de Banach, uma Teoria de Aproximação de Pontos Fixos, e Contribuições/ Michel Pinho Rebouças. - 2012.

86f.

Tese(Doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.

Área de concentração : Análise

Orientação: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso

1. Análise. 2. Banach, Espaços de. I. Título

CDD 515

Folha de Aprovação

Para Lena, Maria, Marino, Michele e Miguel.

Agradecimentos

Gostaria inicialmente de agradecer ao meu orientador, o professor Cleon da Silva Barroso. Na realidade, faltam-me palavras para agradecê-lo. Isto por dois motivos. Primeiro, por aceitar me orientar em uma época ruim da minha vida acadêmica, na qual me restava apenas um ano de doutorado. Segundo, pela imenso auxílio prestado na realização deste trabalho, com uma excelente orientação.

Também sou grato ao professor Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira, por tudo que fez por mim ao longo deste curso.

Gostaria de externar minha gratidão ao professor Marcus Antônio Mendonça Marrocos, pela grande colaboração com a seção que trata de genericidade algébrica, no Capítulo 2.

Também sou extremamente grato ao professor Ondřej F. K. Kalenda, pela grande colaboração com o Capítulo 4, que trata de aproximação forte de pontos fixos.

Agradeço aos professores Diego Ribeiro Moreira, José Fábio Bezerra Montenegro e Daniel Marinho Pellegrino pelas valiosas sugestões que ajudaram a melhorar a versão final deste trabalho.

Meus sinceros agradecimentos aos colegas Nazareno e Válber, por todo o apoio prestado durante as várias sessões de estudo em grupo e por serem grandes amigos. Também sou grato aos colegas Jobson e Raimundo pelas várias discussões sobre as disciplinas básicas que fizemos no doutorado. Por fim, agradeço aos colegas Damião e Gleidson, com os quais mantenho uma ótima convivência e acima de tudo, uma grande amizade.

Não poderia esquecer de dizer um OBRIGADO à Andrea Costa Dantas, secretária da PGMAT, por sempre me ajudar a compreender e resolver chateações de natureza burocrática.

Sou grato à CAPES, pelo apoio financeiro que me foi concedido.

Aos meus pais, Antônia e Marino, e a minha irmã Michele, serei eternamente grato, por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida, e sem os quais eu não teria chegado onde cheguei.

À minha esposa, Maria Aurilene da Silva, por todo o carinho e compreensão que teve comigo durante esta difícil jornada.

E finalmente agradeço a Deus, o nosso grande pai celestial, por ter iluminado meu caminho e me ajudado a superar os diversos e poderosos obstáculos ao longo da vida. E por ter presenteado a mim e minha esposa com o nosso lindo filho Miguel.

Resumo

Estabelecemos alguns resultados relativos ao problema de Cauchy-Peano em espaços de Banach, ao Problema do Quociente Separável e a Teoria de Aproximação de Pontos Fixos. Provaremos que um espaço de Banach E contém um quociente separável não-trivial, se e só se seu dual admite um referencial transfinito de Schauder na topologia fraca*. Depois, estudaremos um tipo de genericidade algébrica para a forma fraca do Teorema de Peano em espaços que possuem um subespaço complementado com uma base de Schauder incondicional. Além disso, introduziremos e estudaremos uma noção de aproximação fraca de soluções para o problema de Cauchy-Peano não-autônomo em espaços de Banach. Será provado que a ausência de ℓ_1-isomorfismos no espaço de Banach em questão equivale à existência de tais soluções. Também, estudaremos algumas relações entre sistemas biortogonais, topologias vetoriais, e a propriedade da aproximação fraca de pontos fixos em espaços abstratos. Por fim, estabeleceremos alguns resultados ótimos de aproximação de pontos fixos em espaços localmente convexos.

Palavras-chave: Problema de Cauchy-Peano. Aproximação de Pontos Fixos. Problema do Quociente Separável. ℓ_1-Isomorfismos. Espaços de Banach. Espaços Localmente Convexos. Topologias Vetoriais.

Abstract

We establish some results concerning the Cauchy-Peano problem in Banach spaces, the Separable Quotient Problem and the Approximate Fixed Point Theory. We prove that a Banach space E contains a nontrivial separable quotient iff it's dual admits a weak*-transfinite Schauder frame. Next, we study a kind of algebraic genericity for the weak form of Peano's theorem in Banach spaces having complemented subspaces with unconditional Schauder Basis. Moreover, we introduce and study a notion of weak-approximate solutions for the non-autonomous Cauchy-Peano problem in Banach spaces. It's proved that the absence of ℓ_1-isomorphs inside the space is equivalent to the existence of weak-approximate solutions for the problem. Also, we establish some new results concerning the approximate fixed point theory. Firstly, we study some relationships between biorthogonal systems, linear topologies and the weak-approximate fixed point property. After, we establish some optimal approximate fixed point results in locally convex spaces.

Keywords: Cauchy-Peano Problem. Fixed Point Approximation. Separable Quotient Problem. ℓ_1-Isomorphs. Banach spaces. Locally convex spaces. Linear topologies.

Sumário

Introdução

O presente trabalho possui dois objetivos centrais. O primeiro deles consiste na apresentação de novas relações entre a Forma Fraca do Teorema de Peano e aspectos estruturais dos espaços de Banach. A esse respeito, três problemas são estudados. O primeiro versa sobre a relação entre a Forma Fraca do Teorema de Peano e a existência de quocientes separáveis em espaços de Banach. Dentre outras coisas, apresentamos uma (aparentemente nova) contribuição para o famoso problema do quociente separável. O segundo problema versa sobre a grandeza algébrica do conjunto dos campos contínuos, em certos espaços de Banach, para os quais a Forma Fraca do Teorema de Peano não é válida. O terceiro problema aborda uma noção de aproximação fraca de soluções para o problema de Cauchy-Peano, bem como questões de existência. Estreitamente relacionado ao terceiro problema acima, o segundo propósito desta tese é fornecer um estudo e novas contribuições para a Teoria de Aproximação de Pontos Fixos. Abordaremos resultados relacionados tanto com aproximação fraca como com aproximação forte de pontos fixos. Ademais, vislumbraremos aplicações destes no tocante a existência de aproximações fracas de soluções para o problema de Cauchy-Peano. Os resultados apresentados nesta tese foram descritos nos artigos [10], [11] e [13], os quais constituem o corpo e a alma deste trabalho.

Esta tese está dividida em cinco capítulos. O Capítulo 1 fornece alguns preliminares sobre espaços topológicos e espaços localmente convexos, com o objetivo de facilitar a leitura deste trabalho, tornando-o mais didático e auto-suficiente.

O segundo capítulo possui dois objetivos. O primeiro deles consiste no estudo de um tipo de genericidade de soluções relativa a Forma Fraca do Teorema de Peano para campos autônomos em espaços de Banach. Vamos ser mais precisos. Seja $(\mathsf{C}(\mathsf{E}), \mathcal{T}_{uc})$ o espaço localmente convexo de todos os campos vetoriais contínuos sobre o espaço de Banach E, munido com a topologia linear $\mathcal{T}_{uc}$ da convergência uniforme sobre conjuntos limitados e seja $\mathcal{K}(\mathsf{E})$ o subconjunto de $\mathsf{C}(\mathsf{E})$ formado pelos campos vetoriais $f\colon \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ para os quais a equação $u' = f(u)$ não tem solução em qualquer intervalo aberto.

Queremos saber se $\mathcal{K}(\mathsf{E}) \cup \{0\}$ contém algum espaço vetorial infinito-dimensional que seja $\mathcal{T}_{uc}$-fechado em $\mathsf{C}(\mathsf{E})$. Mostraremos que a resposta é sim, no caso em que E contém um subespaço complementado com uma base de Schauder incondicional. O segundo objetivo do capítulo é estabelecer uma (aparentemente nova) caracterização de espaços de Banach com quocientes separáveis. Mostraremos que um espaço de Banach E admite um quociente separável não-trivial se, e somente se, E^* possui um referencial transfinito de Schauder na topologia fraca*. Como consequência imediata deste resultado e de um resultado recente de Hájek e Johanis [37] , concluiremos que se E^* possui um referencial transfinito de Schauder na topologia fraca*, então existe um campo vetorial contínuo $\mathsf{f}\colon \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ tal que $u' = \mathsf{f}(u)$ não possui soluções em qualquer ponto. A partir daí conjectura-se a validade desta conclusão em um espaço de Banach de dimensão infinita arbitrário.

O objetivo do capítulo 3 é o estudo de algumas relações entre sistemas biortogonais, topologias vetoriais, e a propriedade da aproximação fraca de pontos fixos (w-AFPP, em resumo) em espaços abstratos. Primeiro, provaremos que a topologia $\mathcal{T}_{\mathrm{SLC}}$ (veja a Observação 1.2.1 no Capítulo 1) em um espaço vetorial com dimensão enumerável é a única topologia localmente convexa de Hausdorff completa que goza da w-AFPP. Em seguida, apresentaremos um critério que permite a conclusão da não-validade da w-AFPP em um espaço localmente convexo infinito dimensional. Tal critério está relacionado com ℓ_1-sequências e com sistemas biortogonais fortemente equicontínuos. O próximo resultado principal do capítulo nos fala sobre a existência de topologias vetoriais mais finas e compatíveis com sistemas biortogonais fortemente equicontínuos, em espaços vetoriais topológicos de Hausdorff que possuem um sistema biortogonal equicontínuo. Em seguida, apresentaremos alguns resultados de existência de sistemas biortogonais equicontínuos em espaços vetoriais topológicos metrizáveis que possuem uma certa propriedade relacionada à existência de F-normas. Com relação ao penúltimo resultado do capítulo, trata-se de um problema inverso relativo à w-AFPP. Ele diz que todo espaço vetorial infinito-dimensional admite uma topologia vetorial que possui certas propriedades, dentre elas a w-AFPP. Por fim, apresentamos uma caracterização da w-AFPP em F-espaços com bases absolutas.

No capítulo 4, apresentaremos alguns resultados sobre aproximação forte de pontos fixos em espaços localmente convexos, sendo que alguns deles tem caráter ótimo. Em [57] é provado que um subconjunto convexo C de um espaço normado é totalmente limitado se, e só se, toda autoaplicação Lipschitz de C tem uma sequência que aproxima pontos fixos. Uma generalização da parte "somente se"deste teorema é feita por um resultado de [62] o qual, em particular, diz que toda autoaplicação contínua de um subconjunto convexo de um espaço localmente convexo, cuja imagem é totalmente limitada, possui uma rede que aproxima pontos fixos. Em um dos principais resultados do capítulo, estenderemos o resultado de [62] mencionado acima para aplicações sequencialmente contínuas. Provaremos que toda aplicação sequencialmente contínua $f\colon C \to \overline{C}$, onde C é um subconjunto convexo de um espaço localmente convexo, cuja imagem é totalmente limitada, possui uma rede que aproxima pontos fixos. Este teorema tem caráter ótimo, em um certo sentido. Isto é justificado por dois resultados que serão demonstrados no capítulo. O primeiro deles estende a "parte se"do resultado de [57] mencionado acima, para espaços localmente convexos e diz que, todo subconjunto não-vazio, convexo, limitado e não totalmente limitado de um espaço localmente convexo, admite uma autoaplicação uniformemente contínua sem redes que aproximem pontos fixos. O segundo afirma que existem um espaço localmente convexo Hausdorff X equipado com sua topologia fraca, um subconjunto convexo, fracamente compacto e não vazio $K \subset X$ e uma função fracamente sequencialmente contínua $f\colon K \to K$ sem sequências que aproximem pontos fixos. Com base neste último resultado, nos perguntamos o que podemos exigir de f para obtermos um resultado favorável, isto é, a existência de uma sequência que aproxime pontos fixos para f. Uma resposta é fornecida pelo capítulo: f afim! E neste caso, a existência de uma sequência que aproxime pontos fixos para f é o melhor que se pode obter. De fato, mostraremos que existem um espaço localmente convexo Hausdorff X, equipado com sua topologia fraca, um subconjunto convexo, compacto e não vazio $K \subset X$ e uma função sequencialmente contínua e afim $f\colon K \to K$ sem pontos fixos. Ainda falando de aplicações afins, apresentaremos, no Capítulo 4, um outro resultado. No Teorema 1 de [3], os autores mostram que, se C é um subconjunto não-vazio e fracamente compacto de um espaço localmente convexo metrizável X, então toda autoaplicação fracamente sequencialmente contínua de C tem um ponto fixo. Mostraremos que a condição de metrizabilidade pode ser retirada quando C é sequencialmente compacto e f é afim.

No capítulo 5, consideraremos o problema de Cauchy-Peano não-autônomo

$$u' = f(t, u), \quad t \in I \quad \text{e} \quad u(t_0) = u_0 \in E$$

onde E é um espaço de Banach de dimensão infinita, $I = [0, T]$ e $f\colon [0, T] \times E \to E$ é um campo vetorial de Caracthéodory que cumpre uma certa condição de crescimento. Iremos introduzir uma noção de aproximação fraca de soluções para este problema. Então, forneceremos uma caracterização da existência de uma aproximação fraca de soluções para esse problema em termos da ausência de ℓ_1-inclusões no espaço de Banach E. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado: o problema de Cauchy-Peano não-autônomo acima possui uma aproximação fraca de soluções se, e só se, E não contém um subespaço isomórfico a ℓ_1. Um fato importante a ser mencionado é que a teoria de aproximação de pontos fixos terá um papel fundamental na demonstração deste resultado. Mais precisamente, utilizaremos um resultado de aproximação fraca de pontos fixos, provado por Barroso, Kalenda e Lin em seu trabalho [9], para demonstrar o resultado principal do Capítulo 5.

Capítulo 1

Preliminares

Conteúdo

1.1 Espaços Vetoriais Topológicos

Iniciemos esta seção recordando algumas noções básicas de topologia geral.

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto qualquer não-vazio. Uma topologia em X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

i. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

ii. $\{A_\alpha \colon \alpha \in A\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

iii. $A_1, ..., A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

Um conjunto X munido com uma topologia $\mathcal{T}$ será chamado de espaço topológico e será denotado por $(X, \mathcal{T})$. Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados de abertos de $(X, \mathcal{T})$.

Definição 1.1.2. $(X, \mathcal{T})$ *é dito ser de Hausdorff se dados quaisquer* $x, y \in X$*, com* $x \neq y$*, existem abertos disjuntos* $U, V \in \mathcal{T}$ *tais que* $x \in U$ *e* $y \in V$.

Um ingrediente crucial na construção de topologias é a noção de base para uma topologia. Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de um conjunto X é denominada base para uma topologia quando:

i. Para todo $x \in X$, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A$.

ii. Dados $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

Definição 1.1.3. *Seja $\mathcal{B}$ uma base para uma topologia em X. A topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ induzida por $\mathcal{B}$ é definida da seguinte forma: $U \subset X$ é aberto se para cada $x \in U$ existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A \subset U$.*

Vale o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em textos clássicos de topologia geral.

Proposição 1.1.1. *$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ é a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$.*

Da Proposição 1.1.1 surge a razão na qual os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados de abertos básicos. A seguir recordaremos a noção de conjuntos compactos. Iniciamos com os conceitos de cobertura e subcobertura de um conjunto. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X. Uma cobertura de A é uma família $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X tal que $A \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Seja $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de A. Uma subcobertura de A é uma subfamília $\mathcal{A}' = (A_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$, $L' \subset L$, que ainda é uma cobertura de A.

Definição 1.1.4 (Compacidade)**.** *Um subconjunto C de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é compacto quando toda cobertura de C por abertos de X, possui uma subcobertura finita.*

A seguinte proposição fornece uma básica, porém importante, caracterização de espaços compactos e é de grande utilidade na demonstração de teoremas de pontos fixos como o de Schauder-Tychonoff, o qual será visto na próxima seção.

Proposição 1.1.2 (Propriedade da Interseção Finita)**.** *Um conjunto $C \subset (X, \mathcal{T})$ é compacto se, e somente se satisfaz a seguinte condição: Se uma família $\{F_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ de subconjuntos fechados de C é tal que qualquer subfamília finita $(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_n})$ tem interseção não- vazia, então $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha \neq \varnothing$.*

Demonstração. Vamos provar somente a suficiência. Suponha por contradição que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset$. Então, $C = C \setminus \emptyset = C \setminus \bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (C \setminus F_\alpha)$. Como C é compacto, existem $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tais que $C = (C \setminus F_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup (C \setminus F_{\alpha_n})$. Assim, $\bigcap_{j=1}^{n} F_{\alpha_j} = \emptyset$. Mas isto é uma contradição. ∎

Definição 1.1.5 (Continuidade)**.** *Uma aplicação $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$, do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ no espaço topológico $(Y, \mathcal{S})$, é dita ser contínua quando $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ para todo $U \in \mathcal{S}$.*

Definição 1.1.6 (Topologia Vetorial)**.** *Dado um espaço vetorial real* X*, uma topologia* $\mathcal{T}$ *em* X *é denominada topologia vetorial quando ela satisfaz as seguintes condições:*

i. *A operação adição é contínua, isto é , a aplicação* $\mathcal{A} : X \times X \longrightarrow X$*, dada por* $\mathcal{A}(x, y) = x + y$ *é contínua.*

ii. *A operação produto por escalar é contínua ou seja, a aplicação* $\mathcal{P} : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ *dada por* $\mathcal{P}(\alpha, x) = \alpha.x$ *é contínua.*

Definição 1.1.7 (Espaço Vetorial Topológico)**.** *Um espaço vetorial* X *munido com uma topologia vetorial* $\mathcal{T}$ *é denominado espaço vetorial topológico (escreveremos EVT) e é representado por* $(X, \mathcal{T})$*.*

1.1.1 Algumas Propriedades dos Espaços Vetoriais Topológicos

Vamos enunciar, sem demonstração, algumas propriedades dos espaços vetoriais topológicos.

(a) Se X é um EVT e $\mathcal{U}$ é uma base de vizinhanças em 0, então $\mathcal{U}_x = \{V + x \colon V \in \mathcal{U}\}$ é uma base de vizinhanças em x. Isto significa que todo EVT possui uma estrutura uniforme compatível com sua topologia e estrutura vetoriais.

(b) Se X é um EVT, então existe uma base de vizinhanças $\mathcal{U}$ de 0 tal que:

(b1) O único ponto comum aos elementos $V \in \mathcal{U}$ é 0.

(b2) Se $U, V \in \mathcal{U}$, então existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$.

(b3) Se $V \in \mathcal{U}$ e $|r| \leq 1$, então $rU \subset U$.

(b4) Se $U \in \mathcal{U}$, então existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V + V \subset U$.

(b5) O ponto central de cada $U \in \mathcal{U}$ é 0.

(c) Todo subespaço vetorial de um EVT $(X, \mathcal{T})$ torna-se um EVT com a topologia induzida de $(X, \mathcal{T})$.

(d) Seja $(X, \mathcal{T})$ um EVT e sejam $Y, Z \subset X$.

(1) Se Y é aberto e $r \neq 0$, então rY é aberto.

(2) Se Y ou Z é aberto, então $Y + Z$ é aberto.

(3) Se Y é aberto, o mesmo acontece com a envoltória convexa de Y.

(4) O interior de um conjunto convexo é convexo ou vazio.

(5) Se Y é fechado e Z é compacto, então $Y + Z$ é fechado.

Antes de apresentar mais uma propriedade dos espaços vetoriais topológicos, vamos enunciar algumas definições.

Definição 1.1.8 (F-seminorma). *Seja* X *um espaço vetorial topológico. Uma* F*-seminorma em* X *é uma função* $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$ *que possui as seguintes propriedades:*

(i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$.

(ii) $\|\alpha x\| \leq \|x\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$ *e* $x \in X$.

(iii) $\|\alpha x\| \to 0$ *quando* $\alpha \to 0$ *em* $\mathbb{R}$, *sempre que* x *está fixado em* X.

Definição 1.1.9 (F-norma). *Se além das propriedades acima tivermos que* $\|x\| = 0$ *implica* $x = 0$, *então* $\|\cdot\|$ *é chamada um* F*-norma. Neste caso,* $(X, \|\cdot\|)$ *é chamado um espaço* F*-normado.*

Vamos apresentar mais uma definição.

Definição 1.1.10. *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço* F*-normado. Um conjunto* $C \subset X$ *é denominado norma- limitado se* $\sup\{\|x\|\colon x \in C\} < \infty$.

Em relação a F-seminormas, o resultado que nos interessa é o seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada, por exemplo, em [81].

Teorema 1.1.1. *Seja* X *um espaço vetorial topológico. Uma topologia vetorial sobre* X *sempre pode ser induzida por uma família de* F*-seminormas sobre* X*. Reciprocamente, se* $\mathcal{F}$ *é uma família de* F*-seminormas em* X*, então* $\mathcal{F}$ *determina uma topologia vetorial* τ *sobre* X*.*

1.2 Espaços Localmente Convexos

Em toda esta seção X será um espaço vetorial sobre os reais.

Definição 1.2.1. *Uma aplicação* $\rho\colon X \to \mathbb{R}_+$ *é chamada de seminorma quando:*

i. $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, *para todo* $x, y \in X$.

ii. $\rho(\lambda . x) = |\lambda|\rho(x)$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}, x \in X$.

Definição 1.2.2. *Se além das duas condições acima, uma seminorma satisfaz* $\rho(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, *então* ρ *é chamada de norma.*

Agora vamos relembrar algumas noções sobre espaços localmente convexos. Seja $\mathcal{F} = \{\rho_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ uma família de seminormas em X. Considere a família $\mathcal{B}$ formada pelos conjuntos: $V(x; \rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_n}, \epsilon) = \{y \in X\colon \rho_{\alpha_i}(y - x) < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$. Um exercício básico consiste em mostrar $\mathcal{B}$ forma uma base para uma topologia em X. Observe que os abertos básicos da topologia $\mathcal{T}_B$ são conjuntos convexos. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.3 (Espaço Localmente Convexo)**.** *Uma topologia* $\mathcal{T}$ *em* X *é dita ser uma topologia localmente convexa, se ela possui uma base de vizinhanças convexas da origem. Um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$, *em que* $\mathcal{T}$ *é uma topologia localmente convexa, é denominado espaço localmente convexo.*

A seguinte proposição é bem conhecida:

Proposição 1.2.1. *Se* $\mathcal{T}$ *é uma topologia localmente convexa em* X, *então* $(X, \mathcal{T})$ *é um espaço vetorial topológico. Além disso, uma topologia* $\mathcal{T}$ *em* X *é localmente convexa se, e somente se, ela é gerada por uma família de seminormas em* X.

Um exemplo clássico de espaço localmente convexo é o seguinte:

Exemplo 1.2.1. *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço normado. O dual de* X, *denotado por* X^*, *é o conjunto* $X^* = \{f\colon X \to \mathbb{R} : f \text{ é linear e contínua}\}$. *Para cada* $f \in X^*$, *defina uma seminorma* $\rho_f\colon X \to \mathbb{R}_+$ *pondo* $\rho_f(x) = |f(x)|$. *Considere a família* $\mathcal{B}$ *dada pelos conjuntos da forma*

$$V(x; f_1, ..., f_n, \epsilon) = \{y \in X\colon |f_i(y - x)| < \epsilon, \forall i = 1, \ldots, n\},$$

onde $f_i \in X^*$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$. *Conforme vimos acima, a família* $\mathcal{B}$ *é uma base para uma topologia localmente convexa em* X. *Esta coincide com a topologia fraca de* X. *Assim, a topologia fraca de* X *é localmente convexa.*

A seguir apresentaremos uma proposição que fornece uma caracterização de topologias localmente convexas de Hausdorff em termos da propriedade da separação de pontos. Por simplicidade de notação, tornemos antes precisa essa noção de separação de pontos.

Definição 1.2.4. *Seja* X *um espaço vetorial. Dizemos que uma família de seminormas* $\mathcal{F}$ *em* X *separa pontos de* X *quando* $\mathcal{F}$ *satisfaz a seguinte condição:* $\rho(x) = 0$ *para todo* $\rho \in \mathcal{F} \Rightarrow x = 0$*.*

Proposição 1.2.2. *Um espaço localmente convexo* $(X, \mathcal{T})$ *é Hausdorff se, e somente se, qualquer família de seminormas que gera* $\mathcal{T}$ *separa pontos de* X*.*

Demonstração. Vamos mostrar somente a necessidade. Seja $\mathcal{F}$ uma família de seminormas que gera $\mathcal{T}$ e sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Assim, existe $\rho \in \mathcal{F}$ tal que $\rho(x - y) > 0$. Considere as vizinhanças $V_1 = V(x; \rho, \epsilon) = \{z \in X \colon \rho(z - x) < \epsilon\}$ e $V_2 = V(y; \rho, \epsilon) = \{w \in X \colon \rho(w - y) < \epsilon\}$. Suponha que exista $Q \in V_1 \cap V_2$. Então $\rho(x - y) \leq \rho(x - Q) + \rho(Q - y) < 2\epsilon$. Absurdo para $\epsilon << 1$. Assim, X é Hausdorff. □

Observação 1.2.1. *Todo espaço vetorial* X *admite uma topologia localmente convexa maximal, a saber, a topologia gerada por todas as seminormas em* X*. Esta topologia será indicada pelo símbolo* $\mathcal{T}_{SLC}$*. Em inglês, esta topologia é denominada "strongest locally convex topology on* X*".*

1.3 Teoremas de Brouwer, Schauder-Tychonoff e Cauty

O clássico Teorema de Brouwer data de 1912 e afirma que se $C \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado, limitado e convexo então toda aplicação contínua $f\colon C \to C$ admite um ponto fixo. Um generalização desse resultado em espaços de Banach é devido a Banach. O seguinte teorema é a conhecida generalização do teorema de Brouwer em espaços localmente convexos (devido a Tychonoff).

Teorema 1.3.1 (Schauder-Tychonoff). *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço vetorial topológico localmente convexo de Hausdorff. Suponha que $C \subset X$ seja não-vazio, compacto e convexo. Então toda aplicação contínua $f\colon C \to C$ admite ao menos um ponto fixo.*

Diz-se que um espaço vetorial topológico $(X, \mathcal{T})$ possui a propriedade do ponto fixo se dado um subconjunto compacto convexo $C \subset X$, toda aplicação contínua $f\colon C \to C$ admite um ponto fixo. A famosa conjectura de Schauder foi resolvida em 2001 por R. Cauty [19]. Mais precisamente, Cauty provou a seguinte generalização do Teorema 1.3.1:

Teorema 1.3.2 (Cauty). *Todo espaço vetorial topológico de Hausdorff possui a propriedade do ponto fixo.*

Nesta seção, apresentaremos somente uma demonstração do Teorema de Schauder-Tychonoff.

Prova do Teorema de Schauder-Tychonoff. Seja $\mathcal{F} = \{\rho_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ uma família de seminormas que gera a topologia de X. Como X é localmente convexo e Hausdorff, sabemos que $\rho_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in \Lambda \Leftrightarrow x = 0$. Portanto, devido a Propriedade da Interseção Finita para conjuntos compactos e ao fato que $\mathcal{T}$ é Hausdorff, é suficiente mostrarmos que

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \emptyset,$$

em que para cada $\alpha \in \Lambda$, $F_\alpha = \big\{x \in C\colon \rho_\alpha(f(x) - x) = 0\big\}$. Observemos que cada F_α é fechado em C, pois ρ_α e f ambas são contínuas. Escolha de forma arbitrária uma quantidade finita de índices $\alpha_1, ..., \alpha_n$, e mostremos que $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Defina $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por $\|x\| = \sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}(x)$. Observe que $\|\cdot\|$ define uma seminorma contínua em X tal que $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \rho_{\alpha_i}(x) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Se mostrarmos que existe $x \in C$ tal que $\|f(x) - x\| = 0$, então teremos que $x \in \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}$. Fixe $\epsilon > 0$ e considere os abertos relativos $B_\epsilon = \{x \in C\colon \|x\| < \epsilon\}$. Por compacidade, existem pontos $x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, \dots, x_{N(\epsilon)}^\epsilon \in C$ tais que $C = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} B_\epsilon(x_i^\epsilon)$. Seja $M_\epsilon = \overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}}(x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, \dots, x_{N(\epsilon)}^\epsilon)$, o fecho da envoltória convexa dos pontos $x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, ..., x_{N(\epsilon)}^\epsilon$ na topologia $\mathcal{T}$. A idéia agora é projetar o conjunto C sobre

M_ϵ via projeção de Schauder. A Projeção de Schauder é a aplicação $P_\epsilon \colon C \to M_\epsilon$ dada por

$$P_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \lambda_i^\epsilon(x) \cdot x_i^\epsilon,$$

onde as funções $\lambda_i^\epsilon \colon C \to [0,1]$ são contínuas tal que $\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \lambda_i^\epsilon(x) = 1$, $\forall x \in C$.

Observação 1.3.1. *As funções* $\lambda_i^\epsilon \colon C \to [0,1]$ *são construídas da seguinte forma. Para cada* $x \in C$, *defina* $\theta_i^\epsilon(x) = \max\{0, \epsilon - \|x - x_i^\epsilon\|\}$. *Veja que* $x \in B_\epsilon(x_i^\epsilon) \Leftrightarrow \|x - x_i^\epsilon\| < \epsilon \Leftrightarrow \theta_i^\epsilon(x) = \epsilon - \|x - x_i^\epsilon\|$. *Portanto,* $\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \theta_j^\epsilon(x) \neq 0$, $\forall x \in C$. *Defina* $\lambda_i^\epsilon(x)$ *pondo:*

$$\lambda_i^\epsilon(x) = \frac{\theta_i^\epsilon(x)}{\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \theta_j^\epsilon(x)}.$$

Isto encerra nossa observação.

Voltemos à demonstração. Note que $M_\epsilon \subset C$, pois $x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, ..., x_{N(\epsilon)}^\epsilon \in C$ e, além disso, C é convexo e fechado. Como um subconjunto fechado de um compacto, M_ϵ é compacto. Portanto, M_ϵ é compacto, convexo e finito-dimensional (no sentido de estar contido num espaço finito-dimensional). Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a aplicação $P_\epsilon \circ f \colon M_\epsilon \to M_\epsilon$ possui um ponto fixo. Ou seja, existe $x_\epsilon \in M_\epsilon \subset C$ tal que $x_\epsilon = P_\epsilon(f(x_\epsilon))$. Então,

$$x_\epsilon - f(x_\epsilon) = P_\epsilon(f(x_\epsilon)) - f(x_\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \lambda_i^\epsilon(f(x_\epsilon))x_i^\epsilon - f(x_\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \lambda_i^\epsilon(f(x_\epsilon))(x_i^\epsilon - f(x_\epsilon)).$$

Segue que

$$\|x_\epsilon - f(x_\epsilon)\| \leq \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \lambda_i^\epsilon(f(x_\epsilon))\|x_i^\epsilon - f(x_\epsilon)\| < \epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Como C é compacto, o conjunto $\{x_\epsilon \colon \epsilon > 0\}$ possui uma sub-rede convergente. Assim, existem $x \in C$ e $(x_{\epsilon_\alpha}) \subset \{x_\epsilon \colon \epsilon > 0\}$ tais que $x_{\epsilon_\alpha} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ quando $\epsilon_\alpha \to 0$. Como f é contínua, segue que $f(x_{\epsilon_\alpha}) \xrightarrow{\mathcal{T}} f(x)$ quando $\epsilon_\alpha \to 0$. Portanto, $\|x - f(x)\| = 0$. Isso conclui a prova. $\square$

Corolário 1.3.1. *Seja* X *um espaço vetorial topológico localmente convexo e Hausdorff, seja* $C \neq \varnothing$ *um subconjunto convexo e fechado de* X , *e seja* $f \colon C \to C$ *uma aplicação contínua tal que* $f(C)$ *é relativamente compacto (isto é,* $\overline{f(C)}$ *é compacto) em* X. *Então* f *possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Seja $\mathrm{co}(\mathsf{f}(\mathsf{C}))$ a envoltória convexa do conjunto $\mathsf{f}(\mathsf{C})$ e seja $\mathsf{K} = \overline{\mathrm{co}(\mathsf{f}(\mathsf{C}))}$. Afirmamos que $\mathsf{f}(\mathsf{K}) \subset \mathsf{K}$. De fato, como $\mathsf{f}(\mathsf{C}) \subset \mathsf{C}$ e C é convexo, segue que $\mathrm{co}(\mathsf{f}(\mathsf{C})) \subset \mathsf{C}$. E como C é fechado, segue que $\mathsf{K} = \overline{\mathrm{co}(\mathsf{f}(\mathsf{C}))} \subset \mathsf{C}$. Assim, $\mathsf{f}(\mathsf{K}) \subset \mathsf{f}(\mathsf{C}) \subset \mathrm{co}(\mathsf{f}(\mathsf{C})) \subset \mathsf{K}$. Como X é localmente convexo e $\mathsf{f}(\mathsf{C})$ é relativamente compacto, segue que $\mathrm{co}(\mathsf{f}(\mathsf{C}))$ é relativamente compacto. Assim, K é compacto. Note também que K é convexo, já que é o fecho de um conjunto convexo. Segue então, do teorema de Schauder-Tychonoff, que $\mathsf{f}\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ possui pelo menos um ponto fixo. $\square$

1.4 Sistemas Biortogonais

Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço vetorial topológico de Hausdorff com topologia $\mathcal{T}$, e X^* seu dual topológico. Seja Γ um conjunto de índices. Nesta seção, recordaremos algumas noções básicas da análise functional como sistemas biortogonais, bases, bases de Schauder, etc. Recomendamos ao leitor interessado a bibliografia [38] sobre uma rica e atual exposição do tema no âmbito dos espaços de Banach.

Definição 1.4.1. *Um sistema* $\{x_\alpha; x_\alpha^*\}_{\alpha\in\Gamma}$*, formado por uma família de vetores* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset X$ *e por uma família de funcionais lineares* $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in\Gamma} \subset X^*$*, é dito ser um sistema biortogonal em* X *se:*

(I) $x_\alpha^*(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ *para quaisquer* $\alpha, \beta \in \Gamma$*, onde* $\delta_{\alpha\beta}$ *é o* δ *de Kronecker.*

Se, além disso, tivermos

(II) $X \subset \overline{\text{span}}\{x_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$

então o sistema é dito ser um sistema biortogonal fundamental para X*.*

Se em vez de (II), tivermos $X = \text{span}\{x_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ então $\{x_\alpha; x_\alpha^*\}_{\alpha\in\Gamma}$ é chamada uma base de Hamel para X. O sistema $(x_\alpha; x_\alpha^*)_{\alpha\in\Gamma}$ é dito ser limitado (equicontínuo) se o conjunto $\{x_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ ($\{x_\alpha^* \colon \alpha \in \Gamma\}$) é limitado (equicontínuo) em X (em X^*).

Definição 1.4.2. *Uma sequência* (x_n) *é dita ser uma base para* X *se cada elemento* $x \in X$ *pode ser unicamente escrito como* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *para alguma sequência* (a_n) *de números reais.*

Isso define naturalmente funcionais lineares $a_n \colon X \to \mathbb{R}$ tais que $a_n(x) = a_n$. Quando tais funcionais são contínuos, dizemos que (x_n) é uma base de Schauder (enumerável) para X. Neste caso, tais funcionais são denominados coeficientes funcionais associados a (x_n).

Definição 1.4.3. *Um sistema biortogonal* $\{x_n; x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é chamado uma base de Schauder para* X *se* (x_n) *define uma base Schauder para* X *com coeficientes funcionais dados por* (x_n^*)*. Uma sequência* (x_n) *em* X *é dita ser uma sequência básica (básica de Hamel) se é uma base de Schauder (Hamel-Schauder) para o fecho de seu span linear (span linear).*

Definições similares para bases de Schauder transfinitas podem ser encontradas em [38].

1.5 Espaços Barrelados e o Teorema do Gráfico Fechado

Nesta seção apresentaremos sem prova uma versão do conhecido teorema do gráfico fechado para espaços barrelados. Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff localmente convexo. Recordemos que um barrel em X é qualquer conjunto fechado, convexo, balanceado e absorvente em X. Além disso, dizemos que X é um espaço barrelado se todo barrel em X é uma vizinhança do 0 na topologia τ. Uma aplicação linear $S\colon X \to Y$ entre espaços vetoriais topológicos e dita fechada quando seu gráfico é fechado em $X \times Y$ (cf. [44, pg. 92]). O seguinte resultado pode ser econtrado em [18, Teorema 4.1.10] (veja também [44, Teorema 8, pg. 221]).

Teorema 1.5.1 (Teorema do Gráfico Fechado para Espaços Barrelados)**.** *Sejam* X *um espaço barrelado,* Y *um espaço de Fréchet e* $S\colon X \to Y$ *uma aplicação linear com gráfico fechado em* $X \times Y$*. Então,* S *é contínua.*

1.6 Somas Transfinitas

Seja ξ um número ordinal. Este número pode ser identificado com o segmento $[0, \xi)$ de todos os números ordinais maiores ou iguais do que 0 e menores do que ξ. O conjunto $[0, \xi)$ pode ser munido com uma topologia $\mathcal{O}$, denominada topologia da ordem do segmento $[0, \xi)$, a qual é definida a seguir:

Definição 1.6.1. *(Topologia da Ordem) Seja ξ um número ordinal. A topologia do segmento $[0, \xi)$ gerada pela família de todos os conjuntos $\{x \in [0, \xi) \colon x < \alpha\}$ e $\{x \in [0, \xi) \colon x > \beta\}$, onde $\alpha, \beta \in [0, \xi]$ é denominada topologia da ordem do segmento $[0, \xi)$ e será denotada por $\mathcal{O}$.*

Uma base da topologia $\mathcal{O}$ do segmento $[0, \xi)$ é dada pela família de todos os conjuntos $(\alpha, \beta]$, onde $0 \leq \alpha < \beta < \xi$.

Na definição seguinte, X denota um espaço de Banach.

Definição 1.6.2. *Sejam ξ um número ordinal e $\{x_\gamma\}_{\gamma=0}^{\xi} := \{x_\gamma \colon 0 \leq \gamma < \xi\}$ uma sequência transfinita de vetores de X. Ponha $x = \sum_{\gamma=0}^{\xi} x_\gamma$ para a soma da série de elementos $\{x_\gamma \colon 0 \leq \gamma < \xi\}$. Dizemos que a série $x = \sum_{\gamma=0}^{\xi} x_\gamma$ é convergente se existe uma função contínua $S \colon [1, \xi] \to X$, onde $[1, \xi]$ está equipado com a topologia da ordem, tal que*

$$S(1) = x_0, \quad S(\xi) = x \quad S(\gamma + 1) = S(\gamma) + x_\gamma, \quad \textit{para todo} \quad \gamma < \xi.$$

Capítulo 2

A Forma Fraca do Teorema de Peano e Genericidade Algébrica

Conteúdo

2.1 Introdução

Ao longo deste capítulo, E ou X denotarão espaços de Banach de dimensão infinita.

O Teorema de Peano afirma que se f é um campo contínuo de vetores em um espaço de Banach de dimensão finita, em $\mathbb{R}^n$ por exemplo, então o problema de valor inicial (ou, problema de Cauchy-Peano) $u'(t) = f(u(t))$, $u(t_0) = u_0$ admite ao menos uma solução. Uma questão natural versa sobre a validade desse resultado em espaços de dimensão infinita. Infelizmente, essa questão em sua forma mais geral tem uma resposta negativa. Isto foi constatado pela primeira vez em 1950 por Dieudonné através do trabalho [24], no qual é apresentado um contra-exemplo para o Teorema de Peano no espaço c_0, espaço das sequências de números reais que convergem para 0. Entre os anos cinquenta e meados da década de setenta, outros pesquisadores forneceram valiosas contribuições relacionadas a questão da não-validade do Teorema de Peano em espaços de dimensão infinita. Faremos aqui apenas uma breve descrição a respeito do desenvolvimento desse tópico. Por exemplo, em [20] foi provado que se E é qualquer espaço de Banach não-reflexivo então o Teorema de

Cauchy-Peano também não é verdadeiro. Outros contra-exemplos foram estabelecidos em várias classes de espaços de Banach. Finalmente, em 1974, a questão foi completamente resolvida por Godunov em seu trabalho [30]. Nele, Godunov mostra que o Teorema de Cauchy-Peano é verdadeiro em um espaço de Banach E se, e só se, E tem dimensão finita. Algumas generalizações para o resultado de Godunov foram apresentadas nos contextos dos espaços localmente convexos e dos espaços de Fréchet não-normáveis (veja, por exemplo, os trabalhos [5], [59] e [74]).

Atualmente existe uma nova linha de pesquisa nessa área, que tem como objetivo estudar relações entre os aspectos estruturais e geométricos dos espaços de Banach e a forma fraca do Teorema de Peano. A Forma Fraca do Teorema de Peano diz que se E é um espaço de Banach de dimensão finita e $f\colon \mathbb{R} \times E \to E$ é contínua, então $u' = f(t, u)$ tem solução em algum intervalo aberto. Em [75], Shkarin provou que se E é um espaço de Banach que possui um subespaço complementado com uma base de Schauder incondicional, então a Forma Fraca do Teorema de Peano não é válida em E. Em outras palavras, existem campos vetoriais contínuos $f\colon E \to E$ para os quais a equação $u' = f(u)$ não tem solução em qualquer intervalo aberto. Em [37], Hájek e Johanis generalizaram este resultado, mostrando que a Forma Fraca do Teorema de Peano não é válida em qualquer espaço de Banach E que possua um quociente separável de dimensão infinita. Mais geralmente, eles provaram o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1. *Seja E um espaço de Banach que possui um subespaço complementado com um quociente separável não-trivial. Então, existe um campo contínuo $f\colon E \to E$ tal que a equação autônoma $x' = f(x)$ não tem solução em qualquer ponto.*

A hipótese sobre o quociente separável no Teorema 2.1.1 remete a um dos mais antigos, e ainda insolúveis, problemas em Análise Funcional. A saber, o seguinte:

Problema do Quociente Separável. Em todo espaço de Banach E existe um subespaço fechado M tal que o quociente E/M é um espaço de Banach separável de dimensão infinita?

No caso afirmativo, dizemos que E admite um quociente separável não-trivial. Hájek e Johanis [37] também propuseram o seguinte problema (em aberto):

Problema. Dado um espaço de Banach E qualquer, existe um campo contínuo $f\colon E \to E$ tal que a a equação $u' = f(u)$ não tem solução em qualquer ponto?

O primeiro objetivo deste capítulo consiste em estudar e analisar um tipo de genericidade de soluções relativo a Forma Fraca do Teorema de Peano para campos autônomos em espaços de Banach. A fim de tornar evidente o objeto de estudo e com o intuito de fixação de idéias, iremos inicialmente estabelecer algumas definições.

Seja $(\mathsf{C}(\mathsf{E}), \mathcal{T}_{uc})$ o espaço localmente convexo de todos os campos vetoriais contínuos sobre E, munido com a topologia linear $\mathcal{T}_{uc}$ da convergência uniforme sobre conjuntos limitados. Denote por $\mathcal{K}(\mathsf{E})$ o subconjunto de $\mathsf{C}(\mathsf{E})$ formado pelos campos vetoriais $f\colon \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ para os quais a equação $u' = f(u)$ não tem solução em qualquer instante. É interessante observar que, a priori, não há garantia alguma que $\mathcal{K}(\mathsf{E})$ seja um espaço vetorial. A questão central na qual dedicaremos grande parte do nosso interesse é: $\mathcal{K}(\mathsf{E}) \cup \{0\}$ contém algum espaço vetorial de dimensão infinita que seja $\mathcal{T}_{uc}$-fechado em $\mathsf{C}(\mathsf{E})$? Este questionamento sugere-nos a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Dizemos que uma propriedade* (P) *é algebricamente genérica para* $\mathcal{K}(\mathsf{E})$ *se* $\mathcal{K}(\mathsf{E}) \cup \{0\}$ *contém um espaço vetorial* L *de dimensão infinita e* $\mathcal{T}_{uc}$*- fechado, tal que* (P) *vale para todos os campos não nulos de* L.

Antes de enunciar um dos principais resultados deste capítulo, iremos relembrar os conceitos de subespaço complementado e de base incondicional.

Definição 2.1.2. *Um subespaço* F *de um espaço de Banach* E *é dito ser complementado em* E *se existe uma projeção linear de* E *sobre* F *(i.e.,* $\mathsf{P}\colon \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ *linear e sobrejetiva tal que* $\mathsf{P}(x) = x$, $\forall x \in \mathsf{F}$*) limitada.*

Definição 2.1.3. *Uma série* $\sum x_n$ *em um espaço de Banach* E *é incondicionalmente convergente se* $\sum \epsilon_n x_n$ *converge para quaisquer escolhas de sinais* $\epsilon_n = \pm 1$. *Além disso, uma sequência básica* (x_n) *é dita incondicional se para cada* $x \in \overline{\operatorname{span}}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, *sua expansão* $x = \sum a_n x_n$ *converge incondicionalmente.*

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.1.2. *Seja* E *um espaço de Banach e suponha que* E *contém um subespaço complementado com uma base de Schauder incondicional. Então a propriedade da não validade da Forma Fraca do Teorema de Peano é algebricamente genérica para* $\mathcal{K}(\mathsf{E})$.

A prova deste teorema consiste na utilização de um método conhecido que pode ser encontrado, por exemplo, em [14]. Tal metodologia é padrão e é denominada Técnica do Vetor Mãe. Utilizando esta técnica, faremos uma manipulação de um certo elemento de $\mathcal{K}(\mathsf{E})$, o chamado vetor mãe, com o objetivo de construir um operador injetivo e contínuo $\mathsf{T}\colon \ell_1 \to \mathsf{C}(\mathsf{E})$. Continuando com a utilização desta técnica padrão, mostraremos que $\overline{\mathsf{T}(\ell_1)}^{\mathcal{T}_{uc}} \subset \mathcal{K}(\mathsf{E}) \cup \{0\}$. Para o nosso teorema, o vetor mãe é fornecido por um resultado de Shkarin, provado em [75] (veja o Lema 2.4.1). Convém mencionar que o Teorema 2.1.2 generaliza o Teorema 2.1 de [14] e que apesar de os dois teoremas utilizarem a mesma técnica, os detalhes da prova do Teorema 2.1.2 são realizados de uma maneira diferente.

O segundo objetivo do capítulo é estabelecer uma (aparentemente nova) caracterização de espaços de Banach com quocientes separáveis. Tal caracterização remete a uma noção generalizada de sequências básicas de Schauder relativamente a topologia $\sigma(E^*, E)$ (veja [45, Definição II.1]).

Definição 2.1.4. *Seja ξ um número ordinal. Uma sequência transfinita $(f_\alpha)_{\alpha<\xi} \subset E^*$ é dita ser um referencial transfinito de Schauder na topologia fraca* se:*

(i) Para cada $y^* \in \overline{\operatorname{span}}^{w^\star}\{f_\alpha : \alpha < \xi\}$, existe uma sequência transfinita de escalares $(a_\alpha(y^*))_{\alpha<\xi} \in \ell_\infty(\xi)$ tal que $y^* = \sum_{\alpha<\xi} a_\alpha(y^*) f_\alpha$, com a convergência desta série na topologia fraca* $\sigma(E^*, E)$, isto é, para cada $x \in E$ temos

$$\lim_{\alpha \to \xi} \Big\langle \sum_{\gamma=0}^{\alpha} a_\gamma f_\gamma, x \Big\rangle = \langle y^*, x \rangle.$$

(ii) $(f_\alpha)_{\alpha<\xi}$ admite uma sequência transfinita $(e_\alpha)_{\alpha<\xi}$ de vetores biortogonais em E.

Vamos então enunciar o segundo resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.1.3. *Um espaço de Banach E admite um quociente separável não-trivial se, e somente se, E^* possui um referencial transfinito de Schauder na topologia fraca*.*

O Teorema 2.1.3 foi provado primeiramente por Johnson e Rosenthal em [45], no contexto das sequências básicas fraca*. Neste contexto, o Teorema 2.1.3 é também consequência do Teorema 3 do artigo [78], de Sliwa. A prova do Teorema 2.1.3 será dada na Seção 2.5, e é baseada em técnicas de espaços barrelados. Também discutiremos algumas consequências do Teorema 2.1.3 e revisitaremos alguns resultados conhecidos.

Voltando à questão da análise de relações entre aspectos estruturais e geométricos de espaços de Banach e a forma fraca do Teorema de Peano, como consequência imediata do Teorema 2.1.3 acima enunciado e do Teorema 8 de Hájek e Johanis [37], obtemos o seguinte interessante resultado.

Corolário 2.1.1. *Suponha que E^* possui um referencial transfinito de Schauder na topologia fraca*. Então existe um campo vetorial contínuo $f\colon E \to E$ tal que $u' = f(u)$ não possui solução em qualquer ponto.*

Este corolário é uma resposta parcial para o problema proposto por Hájek e Johanis em [37], o qual foi descrito acima. Em outras palavras, este corolário é uma resposta parcial para a seguinte conjectura sobre EDO's em espaços de Banach, proposta por Hájek e Johanis em [37].

Conjectura 2.1.1. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então existe um campo vetorial contínuo $f\colon E \to E$ tal que $u' = f(u)$ não possui solução em qualquer ponto.*

O capítulo 2 está estruturado da seguinte forma: Na Seção 2.2, faremos os devidos preliminares abordando noções e resultados básicos acerca da teoria de espaços de Banach com ênfase em sistemas biortogonais, bases de Schauder, sequências básicas e espaços barrelados. Na seção 2.3, faremos uma exposição do clássico (e ainda aberto) Problema do Quociente Separável em espaços de Banach. Em seguida, apresentaremos algumas das importantes contribuições para o problema. Na mesma seção, também provaremos um lema auxiliar (Lema 2.3.5) que nos servirá de suporte para a demonstração do Teorema 2.1.3. Além do caráter auxiliar, destacamos sua utilidade em uma nova demonstração de vários resultados conhecidos sobre o tema.

Finalmente, nas seções 2.4 e 2.5 demonstraremos os Teoremas 2.1.2 e 2.1.3 respectivamente.

2.2 Sistemas ℓ_1-fundamentais

Antes de definir sistemas biortogonais ℓ_1-fundamentais, façamos um breve comentário sobre somas indexadas por um conjunto arbitrário. Se Γ é um conjunto qualquer de índices e $a_\alpha \in \mathbb{R}_+$ é dado para cada $\alpha \in \Gamma$, definimos

$$\sum_{\alpha\in\Gamma} a_\alpha = \sup\Big\{\sum_{\alpha\in\tilde{\Gamma}} a_\alpha \colon \tilde{\Gamma} \subset \Gamma \text{é finito}\Big\}.$$

Se $\sum\limits_{\alpha\in\Gamma} a_\alpha < +\infty$, então o conjunto $\Big\{\alpha \in \Gamma \colon a_\alpha \geq 1/n\Big\}$ é finito, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\Big\{\alpha \in \Gamma \colon a_\alpha \neq 0\Big\} = \bigcup_{n\geq 1}\Big\{\alpha \in \Gamma \colon a_\alpha \geq 1/n\Big\}$$

é finito ou enumerável.

Definição 2.2.1. *Um sistema biortogonal* $\{x_\alpha; x_\alpha^*\}_{\alpha\in\Gamma} \subset X \times X^*$ *é dito ser* ℓ_1*-fundamental se o espaço vetorial*

$$\Big\{x \in X \colon \sum_{\alpha\in\Gamma} |x_\alpha^*(x)|\|x_\alpha\| < \infty\Big\}$$

for denso em X *com relação a topologia original* $\mathcal{T}$*.*

Observação 2.2.1. *Note que todo sistema biortogonal fundamental é* ℓ_1*-fundamental. De fato, basta notar que*

$$\operatorname{span}\{x_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\} \subset \Big\{x \in X \colon \sum_{\alpha\in\Gamma} |x_\alpha^*(x)|\|x_\alpha\| < \infty\Big\}.$$

A motivação para os sistemas biortogonais ℓ_1-fundamentais vem do trabalho de Śliwa [78], concernente ao problema do quociente separável em espaços de Banach. Lá, o autor aborda o conceito de sequências fortemente normais no dual de um espaço de Banach X e relaciona a existência de uma tal sequência com a existência de um quociente separável não-trivial em X. Discutiremos isso a seguir com mais detalhes.

Seja X um espaço de Banach e seja $S(X^*) = \{f \in X^* \colon \|f\|_{X^*} = 1\}$.

Definição 2.2.2. *Uma sequência* $(f_n) \subset S(X^*)$ *é dita ser:*

(i) normal em X^* *se* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *para todo* $x \in X$*.*

(ii) fortemente normal em X^* *se o subespaço* $\{x \in X \colon \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty\}$ *é denso em* X*.*

Claramente, toda sequência fortemente normal em X^* é normal. Em [78], o autor usou a noção de sequências fortemente normais para caracterizar espaços de Banach com quocientes separáveis. Daremos uma maior ênfase sobre isso na próxima seção.

Encerramos esta seção com o seguinte resultado auxiliar. Ele versa sobre os conhecidos espaços de Schur, e a demonstração é elementar.

Proposição 2.2.1. *Seja* X *um subespaço não necessariamente fechado de um espaço de Banach* E. *Suponha que* X *seja um espaço de Schur (isto é, toda sequência fracamente convergente em* X, *converge fortemente). Então* $\overline{X}$ *é Schur.*

Demonstração. Seja $(u_k) \subset \overline{X}$ uma sequência fracamente nula. Então para cada inteiro $k \geq 1$ podemos achar uma sequência $(v_i^k)_i \subset X$ tal que $\|v_i^k - u_k\| \to 0$ quando $i \to \infty$. Assim, para todo k, existe $v_{i_k}^k \in \{v_i^k : i \in \mathbb{N}\}$ tal que $\|v_{i_k}^k - u_k\| \leq 1/k$. Isto e o Corolário 2.5 em [28] implicam que $(v_{i_k}^k)$ é uma sequência fracamente (e assim fortemente) nula em X. Portanto $\|u_k\| \to 0$ quando $k \to \infty$. $\square$

2.3 Espaços de Banach com Quociente Separável

Conforme já mencionado, o Problema do Quociente Separável questiona se todo espaço de Banach E possui um quociente separável. Mais especificamente, se sempre existe um subpsaço fechado de dimensão infinita $M \subset E$ tal que o quociente E/M é linearmente isomorfo a um espaço de Banach separável. Doravante, faremos uma breve exposição sobre o problema, bem como de algumas das notáveis contribuições. Ao longo desta seção, E será um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e E^* o correspondente espaço dual. Inicialmente, convém observar que E/M é isomorfo a um espaço separável se, e somente se, existe um espaço de Banach separável X e uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva $T\colon E \to X$. Esse problema foi formulado essencialmente por Banach e Pełczyński, e permanece em aberto até os dias de hoje. Existem muitos casos especiais de espaços de Banach que possuem quocientes separáveis não-triviais. Por exemplo, espaços separáveis ou reflexivos gozam dessa propriedade. Convém destacar os seguintes resultados que estão entre as mais importantes e recentes contribuições para o problema.

Teorema 2.3.1 (Johnson and Rosenthal [45]). *Todo espaço de Banach cujo dual contém um subespaço de dimensão infinita com dual separável possui um quociente separável não-trivial.*

Teorema 2.3.2 (Hagler and Johnson [36]). *Todo espaço de Banach cujo dual contém uma sequência básica incondicional possui um quociente separável não-trivial.*

Teorema 2.3.3 (Argyros, Dodos and Kanellopoulos [6]). *Todo espaço de Banach dual possui um quociente separável.*

O leitor interessado em mais detalhes sobre o problema poderá consultar o artigo *survey* de Mujica [60], bem como as referências contidas lá para outras contribuições do gênero. No recente artigo [78], Śliwa caracterizou espaços de Banach admitindo quocientes separáveis, como aqueles cujo dual possui $\sigma(E^*, E)$-sequências básicas; equivalentemente, admitindo sequências fortemente normais. Mais precisamente, inspirado primordialmente pelas técnicas de Johnson e Rosenthal desenvolvidas em [45], ele provou o seguinte resultado.

Teorema 2.3.4. *(Śliwa) Para um espaço de Banach E, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E *possui um infinito-dimensional quociente separável.*

(ii) E^* *possui uma sequência fortemente normal.*

(iii) $(E^*, \sigma(E^*, E))$ *possui uma* $\sigma(E^*, E)$*-sequência básica.*

Recordemos de [78], mais uma vez, que uma sequência normalizada $(x_n^*) \subset E^*$ é dita ser fortemente normal se o espaço vetorial $\left\{x \in E\colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)| < \infty\right\}$ é norma-denso em E. Słiwa também forneceu uma demonstração direta que o dual de todo espaço de Banach WCG (weakly compactly generated, em inglês) admite uma tal sequência.

O principal resultado desta seção é o teorema seguinte, que será uma das principais ferramentas na prova do Teorema 2.1.3.

Teorema 2.3.5. *Se* $E \times E^*$ *possui um sistema biortogonal* ℓ_1*-fundamental* $\{x_\alpha; x_\alpha^*\}_{\alpha \in \Gamma}$*, então* E *possui um quociente separável não-trivial.*

Demonstração. Denote por $\|\cdot\|$ a norma de E. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\Gamma = \mathbb{N}$. Daí, $\{x \in E\colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)|\|x_n\| < \infty\}$ é denso em E. Denotemos por Z este espaço. Suponha, por contradição, que E não contém qualquer quociente separável não-trivial. Por [60, Teorema 4.1, p. 317], ℓ_1 não é isomórfico a um subespaço de E. Além disso, pela Proposição 4.6.5 em [18], todo subespaço próprio denso de E é barrelado. Podemos assumir que Z é um subespaço próprio de E, e assim, Z será barrelado. Nosso objetivo é mostrar que a aplicação linear $S\colon (Z, \|\cdot\|) \to (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$ dada por $S(x) = (x_n^*(x)\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é contínua. Para isto, suponha primeiro que $u_k \to u$ em $(Z, \|\cdot\|)$ e $S(u_k) \to v$ em $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$. Escreva $v = (v_n)$. Seja $m \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente. Tomando o limite quando $k \to \infty$ na desigualdade

$$|x_m^*(u_k)\|x_m\| - v_m| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(u_k)\|x_n\| - v_n| = \|S(u_k) - v\|_{\ell_1},$$

obtemos a igualdade $x_m^*(u)\|x_m\| = v_m$. Como m é arbitrário, isto por sua vez implica que $S(u) = (x_n^*(u)\|x_n\|) = (v_n) = v$. Isto mostra que S tem gráfico fechado em $(Z, \|\cdot\|) \times (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$. Assim, S é uma aplicação linear fechada e então, pelo Teorema 1.5.1, é contínua.

Seja agora $X\colon = \operatorname{span}\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Claramente $\{x_n\}$ é uma base de Hamel para X e $\{x_n^*\}$ são os correspondentes coeficientes funcionais. Em particular, temos

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)|\|x_n\| < \infty, \quad \forall\, x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n \in X. \tag{2.1}$$

Sabemos que $\ell_1(\Gamma)$ tem a propriedade de Schur (isto é, toda sequência fracamente convergente em $\ell_1(\Gamma)$, converge fortemente). Daí, segue diretamente da continuidade de S e de (2.1) que $(X, \|\cdot\|)$ tem a propriedade de Schur. Pela Proposição 2.2.1, $\overline{X}^{\|\cdot\|}$ também tem a propriedade de Schur. Em vista do clássico ℓ_1-teorema de Rosenthal (veja [69]), o espaço $(\overline{X}, \|\cdot\|)$ e então E contém um subespaço isomórfico a ℓ_1. Esta contradição prova o resultado. $\square$

Finalizamos esta seção observando algumas consequências do Teorema 2.3.5, dentre as quais vários resultados conhecidos sobre quocientes separáveis.

Corolário 2.3.1. *Todo espaço de Banach com um sistema biortogonal fundamental possui um quociente separável não-trivial.*

Vale a pena mencionar que existe uma abundância de espaços de Banach que admitem sistemas biortogonais fundamentais, incluindo $\ell_\infty(\Gamma)$, WLD, WCD ou WCG-espaços, e outros espaços (cf. [83]).

Proposição 2.3.1. *Seja E um espaço de Banach cujo dual contém um subespaço com dual separável. Então E^* tem uma sequência básica fraca*.*

Demonstração. Seja Y um subespaço de E^* com dual separável Y^*. Então existe uma sequência normalizada $(u_n^*) \subset Y \subset E^*$ que é uma sequência fracamente nula. Como Y^* é separável, segue por um resultado de Johnson-Rosenthal [45, Teorema III.3], que (u_n^*) contém uma subsequência básica (shrinking) fraca* . $\square$

Observação 2.3.1. *Observe que E^* tem um subespaço com dual separável quando E^* é Asplund, contém um subespaço reflexivo ou uma cópia isomórfica de c_0. A Proposição 2.3.1 é uma resposta parcial bem conhecida para a SQP, veja [45, Observação III.3]. Parece ser quase a melhor possível, desde que é sabido (veja [60, Teorema 4.2]) que se E^* tem um subespaço isomórfico a ℓ_1, então E tem um quociente isomórfico a c_0 ou ℓ_2.*

O seguinte resultado produz informação quantitativa sobre espaços cujos duais possuem uma sequência básica incondicional.

Proposição 2.3.2. *Seja E um espaço de Banach cujo dual possui uma sequência básica incondicional. Então uma das seguintes afirmações é válida:*

(i) *E contém um subespaço isomórfico a ℓ_1.*

(ii) *E^* contém um subespaço com dual separável ou uma cópia isomórfica de ℓ_1.*

Demonstração. Isto segue de um resultado clássico de James [28, Corolário 6.36]. De fato, seja (u_n) uma sequência básica incondicional em E^*. Seja $R\colon = \overline{\operatorname{span}}\{u_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Então ou R é reflexivo, contém um subespaço isomórfico a ℓ_1 ou contém um subespaço isomórfico a c_0. Suponha que (i) não é válido. Então, por um resultado de Bessaga-Pełczyński [36, Teorema 4], E^* não contém uma cópia isomórfica de c_0. Então, ou E^* contém um espaço reflexivo separável cujo dual é separável ou contém uma cópia isomórfica de ℓ_1. $\square$

A seguinte consequência direta da Proposição 2.3.2 foi originalmente provada por Hagler and Johnson [36]. Uma prova alternativa foi dada em [6].

Corolário 2.3.2. *Se* E^* *tem uma sequência básica incondicional, então* E *possui um quociente separável não-trivial.*

Convém mencionar que Argyros, Dodos e Kanellopoulos mostraram em [6] que o bidual de um espaço de Banach separável com dual não-separável admite uma sequência básica incondicional. Usando este fato e resultados acima, estamos também habilitados a oferecer uma prova ligeiramente diferente do seguinte resultado provado primeiramente em [6]:

Corolário 2.3.3. E^* *tem um quociente separável não-trivial.*

Demonstração. Se E^* tem a propriedade de Radon-Nikodym, então E é Asplund. Assim E^* possui um sistema biortogonal fundamental (cf. [83, Theorem 7.13]. Pelo Teorema 2.3.5, E^* tem um quociente separável. Suponha agora que E^* não tem a propriedade de Radon-Nikodym. Logo, E^{**} contém uma sequência básica incondicional. Pelo Corolário 2.3.2, E^* tem um quociente separável não-trivial. $\square$

Observação 2.3.2. *Note que se* E *pode ser aplicado sobrejetivamente em um espaço de Banach dual, por uma aplicação linear contínua, então, pelo Corolário 2.3.3, segue que* E *tem um quociente separável não-trivial.*

A exposição prévia nos permite formular o seguinte problema .

Problema. O Teorema 2.1.3 continuaria verdadeiro se a condição (ii) da Definição 2.1.4 fosse retirada?

2.4 Prova do Teorema 2.1.2

Conforme já mencionamos na introdução deste capítulo, esta prova utiliza um método padrão conhecido como Técnica do Vetor Mãe. Vamos então provar o Teorema 2.1.2. Por hipótese, E possui um subespaço complementado X com uma base de Schauder incondicional $\{e_n, e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Como X é complementado, existe uma projeção linear limitada $P\colon E \to X$. Decomponha $\mathbb{N}$ como $\mathbb{N} = \bigcup_{i\geq 1} \mathbb{N}_i$, onde cada $\mathbb{N}_i$ tem cardinalidade $|\mathbb{N}_i| = \infty$ e $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Por convenção, escrevemos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$. Seja $X_i = \overline{\mathrm{span}}\{e_n\colon n \in \mathbb{N}_i\}$. Defina, para cada $i \in \mathbb{N}$, a i-ésima projeção $\pi_i\colon X \to X_i$ por

$$\pi_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (e_{\mathbb{N}_i}^*)_n(x) e_n, \qquad x \in X, \tag{2.2}$$

onde $(e_{\mathbb{N}_i}^*)_n(x) = e_n^*(x)$ se $n \in \mathbb{N}_i$ e $(e_{\mathbb{N}_i}^*)_n(x) = 0$ se $n \notin \mathbb{N}_i$. Como $\{e_n\colon n \in \mathbb{N}_i\}$ é uma base de Schauder incondicional para X_i, segue que $\pi_i(x)$ está bem definido e $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|\pi_i\| < \infty$. Também, note que $X_i = \pi_i(X)$. Convém mencionar que esta construção feita acima é padrão e pode ser encontrada, por exemplo, em [16].

Uma ferramenta fundamental para esta demonstração é o seguinte resultado de Shkarin, cuja prova pode ser encontrada no Corolário 1.5 de [75].

Lema 2.4.1. *(Shkarin) Seja Y um espaço de Banach com um subespaço complementado que possui uma base incondicional. Então, para cada $\alpha \in (0,1)$ e $\epsilon > 0$ fixados, existe $f\colon Y \to Y$ tal que*

(i) $\|f(y)\| \leq 2$, *para todo* $y \in Y$.

(ii) $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon \|x - y\|^{\alpha}$ *para todo* $x, y \in Y$.

(iii) A equação $u' = f(u)$ não tem solução em qualquer intervalo da reta real.

Agora fixe $\alpha \in (0,1)$. Segue, do Lema 2.4.1, que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe um campo vetorial $f_i\colon X_i \to X_i$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) acima. Seja $h_i\colon E \to E$ um campo vetorial contínuo dado por

$$h_i(x) = f_i(\pi_i(Px)), \qquad x \in E.$$

Para cada $(a_n) \in \ell_1$, defina o campo vetorial $f_{(a_n)}\colon E \to E$ por

$$f_{(a_n)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(x), \qquad x \in E.$$

Um cálculo simples mostra que $f_{(a_n)} \equiv 0$ se, e só se $(a_n) = 0$. Além disso, é fácil ver que

$$\|f_{(a_n)}(x) - f_{(a_n)}(y)\| \leq C\|x - y\|^{\alpha}, \qquad \forall x, y \in E,$$

onde

$$C = \left(\sup_{i \in \mathbb{N}} \|\pi_i\|\|P\|\right)^{\alpha} \|(a_n)\|_{\ell_1}.$$

Assim, é válida a seguinte proposição.

Proposição 2.4.1. *A aplicação linear* $T\colon \ell_1 \to C(E)$ *dada por*

$$T((a_n)) = f_{(a_n)} \tag{2.3}$$

está bem definida, é injetiva e contínua.

Segue então, da Proposição 2.4.1, que $T(\ell_1)$ é algebricamente isomorfo a ℓ_1.

Afirmação 1. $T(\ell_1) \subset \mathcal{K}(E) \cup \{0\}$.
De fato, seja $(a_n) \in \ell_1 \setminus \{0\}$. Então $a_m \neq 0$ para algum inteiro $m \geq 1$. Suponha, por contradição, que $T((a_n)) \notin \mathcal{K}(E)$. Então existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tal que a EDO

$$u'(t) = f_{(a_n)}(u(t)) \tag{2.4}$$

tem uma solução u em I. Defina a função vetorial $v\colon I \to X_m$ por $v(t) = (\pi_m \circ P)(u(t/a_m))$. Vamos mostrar que

$$v'(t) = f_m(v(t)), \qquad \forall t \in I$$

De fato, seja $w(t) = P(u(t/a_m))$. Então $v(t) = \pi_m(w(t))$, e assim

$$
\begin{aligned}
v'(t) &= \pi_m(w'(t)) \\
&= \pi_m\left(\frac{1}{a_m}P\left(u'\left(\frac{t}{a_m}\right)\right)\right) \\
&= \pi_m\left(\frac{1}{a_m}P\left(f_{(a_n)}\left(u\left(\frac{t}{a_m}\right)\right)\right)\right) \\
&= \pi_m\left(\frac{1}{a_m}f_{(a_n)}\left(u\left(\frac{t}{a_m}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{a_m}\sum_{j=1}^{\infty} a_j\pi_m\left(h_j\left(u\left(\frac{t}{a_m}\right)\right)\right) \\
&= \pi_m\left(h_m\left(u\left(\frac{t}{a_m}\right)\right)\right) \\
&= h_m\left(u\left(\frac{t}{a_m}\right)\right) \\
&= f_m\left(\pi_m\left(P\left(u\left(\frac{t}{a_m}\right)\right)\right)\right) \\
&= f_m(v(t)).
\end{aligned}
$$

Assim, $v'(t) = f_m(v(t))$ para todo $t \in I$. Mas isto contradiz o fato de que para o campo f_m, a Forma Fraca do Teorema de Peano não vale em X_m. Está provada a Afirmação 1.

Agora vamos provar que a inclusão dada pela Afirmação 1 pode ser mais refinada.

Afirmação 2. $\overline{T(\ell_1)}^{\mathcal{T}_{uc}} \subset \mathcal{K}(E) \cup \{0\}$.

De fato, se $h \in \overline{T(\ell_1)}^{\mathcal{T}_{uc}}$ então existe um sequência $x_k = (a_n^k)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k f_n(\pi_n(Px))\}_{k=1}^{\infty}$ $\mathcal{T}_{uc}$-converge para h em B_E. Do Lema de Shkarin sabemos que $f_i(0) \neq 0$. Daí um cálculo simples mostra que

$$a_i^k \to \pi_i Ph(0)/f_i(0) \quad \text{para todo } i.$$

Seja $a_i = \pi_i Ph(0)/f_i(0)$. Segue que

$$\pi_i Ph(x) = a_i f_i(\pi_i Px) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Portanto, se (por contradição) $u'(t) = h(u(t))$ em algum instante t então fixado um inteiro $i \geq 1$, $v(t) = \pi_i P(u(t/a_i))$ satisfaz $v'(t) = f_i(v(t))$. Isto contradiz o lema de Shkarin e encerra a prova do teorema.

2.5 Prova do Teorema 2.1.3

Se E tem um quociente separável não-trivial, então por [78, Teorema 3], E^* contém uma sequência básica fraca*. Reciprocamente, suponha que $(f_\alpha)_{\alpha<\xi}$ é um referencial transfinito de Schauder na topologia fraca* em E^*. Sejam X e Y os seguintes espaços vetoriais:

$$X = \operatorname{span}\Big\{e_\alpha \colon \alpha < \xi\Big\},$$

$$Y = \overline{\operatorname{span}}^{w^\star}\{f_\alpha \colon \alpha < \xi\}.$$

Denote por $X^\top$ e $Y_\perp$ os aniquiladores de X e Y, respectivamente. Em virtude da Definição 2.1.4, é fácil ver que $X^\top \cap Y = \{0\}$. Como $\big(X + Y_\perp\big)^\top = \big(X \cup Y_\perp\big)^\top = X^\top \cap Y$, segue de uma aplicação clássica do teorema de Hahn-Banach, que $X + Y_\perp$ é norma-denso em E. Seja $Z = \big\{x \in E \colon \sum_{\alpha<\xi}^{\infty} |f_\alpha(x)|\|e_\alpha\| < \infty\big\}$. Como $X + Y_\perp \subset Z$ segue que Z é denso em E. Assim, $\{e_\alpha; f_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ é um sistema biortogonal ℓ_1-fundamental para E. O resultado segue então do Teorema 2.3.5. $\square$

Capítulo 3

Aproximação Fraca de Pontos Fixos

Conteúdo

3.1 Introdução

Seja E um espaço de Banach e considere o problema de Cauchy-Peano

$$u' = f(t,u), \quad t \in I, \quad u(t_0) = u_0 \in E, \tag{3.1}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f\colon I \times E \to E$ é um campo contínuo. Sob condições razoáveis em f, pode-se mostrar que soluções para a equação (3.1) correspondem a soluções da seguinte equação integral

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds$$

que em particular, são pontos fixos do operador $F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds$. Conforme visto no capítulo anterior, nem sempre a equação (3.1) possui solução.

Uma questão natural que pode ser formulada é se existe uma sequência de funções vetoriais (u_n) tal que

$$u_n - \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))ds - u_0 \rightharpoonup 0,$$

ou equivalentemente, $u_n - F(u_n) \rightharpoonup 0$ em $C(I, E)$.

O objetivo deste e do próximo capítulo é realizar um estudo sobre a existência de aproximações de pontos fixos. Especificamente, este capítulo é dedicado à aproximação fraca de pontos fixos. A seguir providenciaremos alguns preliminares necessários ao estudo proposto acima.

Dizemos que um espaço vetorial topológico (X, τ) possui a propriedade da aproximação forte de pontos fixos (s-AFPP) se sempre que $C \subset X$ for limitado, fechado e convexo e $f\colon C \to C$ for uma aplicação contínua, então existe uma sequência $(x_n) \subset C$ tal que $x_n - f(x_n) \to 0$ com respeito a topologia τ. Mais geralmente, diremos que X possui a propriedade da aproximação fraca de pontos fixos (w-AFPP) se for possível obter uma sequência (x_n) em C tal que a convergência acima ocorra com relação a topologia fraca de X. A motivação primária para essas noções vem da clássica propriedade do ponto fixo estabelecida por Brouwer (ver [26]) em espaços de dimensão finita, e neste contexto essas noções são equivalentes. Uma segunda, e mais importante motivação para o estudo da w-AFPP (bem como da s-AFPP) vém do seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 ([57]). *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Suponha que $C \subset X$ é uma subconjunto convexo e não-compacto. Então, existe uma aplicação Lipschitz $f\colon C \to C$ tal que*

$$\inf_{x \in C} \|x - f(x)\| > 0.$$

Mediante esse resultado, um questionamento natural é o seguinte: Sob que circunstâncias, existe uma sequência $(x_n) \subset C$ tal que $x_n - f(x_n) \rightharpoonup 0$ (ou, $\to 0$) em X?

A noção de w-AFPP foi introduzida em [7] a partir do questionamento acima. Lá alguns resultados iniciais foram delineados, e desde então vários outros avanços tem sido obtidos (cf. [7–9, 46]). A seguir, daremos um breve panorama dos resultados obtidos até o presente momento. Primeiramente, foi provado em [7], que todo subconjunto convexo e fracamente compacto de um espaço de Banach, possui a w-AFPP. Depois, foi mostrado, em [8], que os espaços de Apslund também possuem a w-AFPP. Recentemente, Kalenda em [46] deu um caracterização da w-AFPP em espaços de Banach, generalizando os resultados prévios: Um espaço de Banach tem a w-AFPP se, e só se, ele não contém uma cópia isomorfa de ℓ_1. A abordagem de Kalenda é baseada em uma fina análise sobre a relação entre aspectos estruturais/topológicos de espaços de Banach e a propriedade de Fréchet-Uryshon de certos conjuntos munidos com a topologia fraca.

Em [9], esta abordagem foi ampliada para incluir o estudo da w-AFPP em espaços abstratos, principalmente em espaços localmente convexos e metrizáveis. O papel central é desempenhado pelas ℓ_1-sequências. Em particular, o seguinte resultado foi demonstrado em [9] .

Teorema 3.1.2. *Sejam* X *um espaço de Banach,* $C \subset X$ *um conjunto convexo limitado e* $F\colon C \to \overline{C}$ *uma aplicação demicontínua. Suponha que* C *não contém uma cópia isomórfica de* ℓ_1*. Então, existe uma sequência* (u_n) *em* C *tal que* $u_n - F(u_n) \rightharpoonup 0$ *em* X*.*

Observação 3.1.1. *O Teorema 3.1.2 será utilizado para provar o principal resultado do Capítulo 5.*

Um dos dois principais objetivos deste capítulo é estudar algumas relações entre sistemas biortogonais, topologias vetoriais e a w-AFPP. Inicialmente, provaremos que a topologia $\mathcal{T}_{\mathrm{SLC}}$ (veja a Observação 1.2.1 no Capítulo 1) em um espaço vetorial com dimensão infinita-enumerável é a única topologia localmente convexa de Hausdorff completa que goza da w-AFPP. Para provar isto, utilizaremos um resultado de Kalton [47] que, entre outras coisas, trata de aspectos estruturais de espaços localmente convexos de dimensão enumerável. Depois, apresentaremos um simples critério para que um espaço localmente convexo de dimensão infinita possua uma ℓ_1-sequência, sendo tal critério relacionado com sistemas biortogonais fortemente equicontínuos. Em seguida, serão estabelecidos dois resultados sobre a existência de tais sistemas. O primeiro se refere a existência de topologias vetoriais mais finas tendo como condição prescrita a existência de sistemas biortogonais fortemente equicontínuos, sendo a existência de sistemas biortogonais equicontínuos uma condição suficiente para isso. O segundo trata da existência de sistemas biortogonais equicontínuos. Esses resultados mostram a importância de estudar relações entre sistemas biortogonais e a w-AFPP. Seguindo este pensamento, também abordaremos o problema inverso de provar a existência de boas topologias vetoriais que gozem da w-AFPP. Provaremos que todo espaço vetorial de dimensão infinita admite uma topologia vetorial Hausdorff, não-localmente convexa, completa e não-metrizável, a qual possui a w-AFPP.

3.2 A w-AFPP em Espaços de Dimensão Enumerável

Iniciamos com a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Seja* (X, τ) *um espaço de Hausdorff, localmente convexo, sequencialmente completo e com dimensão infinito-enumerável. Suponha que* C *é um subconjunto não-vazio, convexo e limitado de* X*. Então toda aplicação* $f\colon C \to \overline{C}$ *que é* τ*-to-weak sequencialmente contínua possui uma sequência que* τ*-aproxima pontos fixos.*

Demonstração. De fato, segue do Teorema 1.4 em [47] que C está contido em um subespaço finito-dimensional de X. Assim, o resultado segue do Teorema 2.1 em [9], o qual acarreta que $0 \in \overline{\{x - f(x) \colon x \in C\}}^{\sigma(X,X^*)}$, onde $\sigma(X, X^*)$ denota a topologia fraca de X. $\square$

É claro que existem topologias sequencialmente não-completas com a w-AFPP e sem a w-AFPP. Surge então a seguinte questão.

Questão 3.2.1. *Sob que condições um espaço localmente convexo com dimensão infinito-enumerável e com a* w*-AFPP é sequencialmente completo ?*

Nosso primeiro resultado principal (Teorema 3.2.1 abaixo) é uma tentativa de obter respostas para esta questão. Sua prova é baseada em um resultado (Teorema 3.2.2 abaixo), que afirma ser a topologia $\mathcal{T}_{\mathrm{SLC}}$ (veja a Observação 1.2.1 no Capítulo 1) a única topologia localmente convexa Hausdorff completa sobre X. Seja c_{00} o espaço das sequências eventualmente nulas de escalares. Os esforços para responder a Questão 3.2.1 acima devem levar-nos a uma resposta para a seguinte questão.

Questão 3.2.2. *Quais são as topologias vetoriais Hausdorff sequencialmente completas sobre* c_{00}*?*

Teorema 3.2.1. *Seja* X *um espaço vetorial com dimensão infinito-enumerável. Então a topologia* $\mathcal{T}_{SLC}$ *(veja a Observação 1.2.1 no Capítulo 1) sobre* X *é a única topologia Hausdorff, localmente convexa e completa com a* w*-AFPP.*

Demonstração. A prova do teorema é uma consequência da Proposição 3.2.1 e do seguinte resultado geral.

Teorema 3.2.2. *Seja* X *um espaço vetorial com dimensão infinito-enumerável. Então a topologia* $\mathcal{T}_{SLC}$ *é a única topologia localmente convexa Hausdorff completa sobre* X.

Observação 3.2.1. *Em particular, a topologia* $\mathcal{T}_{SLC}$ *é a única topologia localmente convexa Hausdorff completa sobre um espaço vetorial com dimensão infinito-enumerável a gozar da* w*-AFPP.*

Antes de provar o Teorema 3.2.2, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2.1. *Seja* X *um espaço localmente convexo Hausdorff e sequencialmente completo. Se* X *tem dimensão infinito-enumerável, então toda aplicação linear de* X *em qualquer espaço vetorial topológico é contínua.*

Demonstração. Seja T uma aplicação linear de X sobre um espaço vetorial topológico L. Para mostrar que T é contínua, é suficiente mostrar que, se (x_σ) é uma rede convergindo para zero, então $T(x_\sigma)$ converge para zero. Pelo Teorema $1.4 - (i)$ em [47], obtemos que (x_σ) está contida em um subespaço finito-dimensional N de X. Por outro lado, pelo Teorema 3.4 em [71], segue que $T\big|_N$ é contínua. Portanto, $T(x_\sigma)$ converge para zero. □

Agora, vamos provar o Teorema 3.2.2. Suponha que τ é uma topologia localmente convexa Hausdorff completa sobre X. Sejam E um espaço de Banach arbitrário e $T\colon X \to E$ uma aplicação linear fechada. Segue do Lema 3.2.1 que T é contínua. Assim, pelo Teorema 8 em [44], X é barrelado. Por outro lado, o resultado da página 97 de [?], relativo à unicidade de topologias completas barreladas em espaços com dimensão enumerável, acarreta que τ é a topologia $\mathcal{T}_{\mathrm{SLC}}$. Isto encerra a demonstração. □

Agora, vamos apresentar uma outra consequência do Teorema 3.2.2. Seja (e_i) uma base de Hamel infinito-enumerável para X, e sejam (e_i^*) os correspondentes coeficientes funcionais. Seja $(0,1]^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sequências (ω_i) tais que $0 < \omega_i \leq 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $\varphi\colon (0,1] \to (0,\infty)$ uma função contínua tal que $\lim_{t\to 0} \varphi(t) > 0$. Para cada $\omega \in (0,1]^{\mathbb{N}}$, defina a norma $\|\cdot\|_\omega$ sobre X por

$$\|x\|_\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|e_i^*(x)|}{\omega_i \varphi(\omega_i)}, \quad x \in X.$$

Vamos denotar por $\mathcal{T}(X,(0,1]^{\mathbb{N}})$ a topologia localmente convexa induzida pela família

$$\left\{\|\cdot\|_\omega \colon \omega \in (0,1]^{\mathbb{N}}\right\}.$$

Segue de [12] que $\mathcal{T}(X,(0,1]^{\mathbb{N}})$ é completa e Hausdorff. De posse do Teorema 3.2.2, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.1. *Seja* X *um espaço vetorial com dimensão infinito-enumerável. Então* $\mathcal{T}(X,(0,1]^{\mathbb{N}})$ *coincide com a topologia* $\mathcal{T}_{SLC}$ *de* X.

3.3 Alguns Critérios de Falha para a w-AFPP

As ℓ_1-sequências, definidas abaixo, desempenham um papel fundamental na análise da validade da w-AFPP em certos espaços.

Definição 3.3.1. *Um espaço vetorial topológico* X *é dito ter uma* ℓ_1*-sequência se existe uma sequência* $(x_n) \subset X$ *tal que a aplicação linear canônica* $T_0 \colon \ell_1^0 \to X$ *dada por*

$$T_0((t_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i, \quad (t_n) \in \ell_1^0$$

é um isomorfismo sobre sua imagem, onde ℓ_1^0 *denota o subespaço de* ℓ_1 *formado pelas sequências eventualmente nulas.*

O seguinte resultado, cuja prova está contida na demonstração do Teorema 3.3 de [9], nos fornece uma interação entre aspectos estruturais de espaços abstratos e a w-AFPP, como já ocorre com espaços de Banach.

Teorema 3.3.1. *Sejam* X *um espaço localmente convexo de Hausdorff e* $C \subset X$ *um subconjunto não-vazio, limitado, convexo e fechado. Então, valem as seguintes afirmações:*

(i) Se C *tem a* w*-AFPP hereditária (isto é, se cada subconjunto não-vazio, convexo e fechado de* C *tem a* w*-AFPP), então* C *não contém* ℓ_1*-sequências.*

(ii) Se X *é metrizável, então* C *tem a* w*-AFPP hereditária se, e só se,* C *não contém* ℓ_1*-sequências.*

Antes de apresentar nosso próximo resultado, precisamos de uma definição.

Definição 3.3.2. *Dizemos que uma sequência* $(f_n) \subset X^*$ *é* (s)*-equicontínua quando o conjunto*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \xi_i f_i \colon m \in \mathbb{N}, \xi_i \in \{-1, 1\} \right\}.$$

é equicontínuo em X^*. *De modo análogo, podemos definir sistemas biortogonais* (s)*-equicontínuos como aqueles cujos coeficientes funcionais são* (s)*-equicontínuos.*

Apresentamos agora a

Proposição 3.3.1. *Seja* X *um espaço infinito-dimensional e localmente convexo. Suponha que* X *possui um sistema biortogonal enumerável e limitado, cujos coeficientes funcionais são* (s)*-equicontínuos. Então* X *possui uma* ℓ_1*- sequência e não vale a* w*-AFPP em* X.

Demonstração. Seja $\{u_n, u_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ um sistema biortogonal limitado em $X \times X^*$ tal que os coeficientes funcionais associados, (u_n^*), são todos s-equicontínuos. Agora, vamos fazer uma afirmação.

Afirmação 3.3.1. *A aplicação linear canônica* $T_0\colon \ell_1^0 \to X$ *dada por*

$$T_0((a_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i, \quad (a_i) \in \ell_1^0,$$

é um isomorfismo sobre sua imagem $Y = T_0(\ell_1^0)$.

Vamos provar esta afirmação. É claro que T_0 é contínua. Note que se ρ é uma seminorma contínua em X, temos que

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i\right) \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \rho(u_i)\|(a_i)\|_{\ell_1}.$$

Seja $S\colon Y \to \ell_1^0$ a inversa de T_0, a qual é dada por

$$S_0(x) = S\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(x) u_i\right) : = (u_i^*(x)), \quad x \in Y.$$

Dado $\varepsilon > 0$ segue, da hipótese de equicontinuidade sobre (u_n^*), que existe uma vizinhança U de 0 em Y tal que

$$\sup_{x\in U}\left|\sum_{i=1}^{m} \xi_i u_i^*(x)\right| \leq \epsilon, \quad \forall m, \quad (\xi_i) \in \{-1, 1\}.$$

Segue então que $\|S_0(x)\|_{\ell_1} \leq \varepsilon$ para todo $x \in U$, e assim S_0 é contínua, o que encerra a prova da Afirmação 3.3.1.

Segue da afirmação anterior que (u_n) é uma ℓ_1-sequência para X. Portanto, pelo Teorema 3.3.1, X não possui a w-AFPP. $\square$

Proposição 3.3.2. *Seja* X *um* F*-espaço com uma sequência básica* (u_n)*. Suponha que* (u_n) *é equivalente à base canônica de* ℓ_1*. Então* X *não possui a* w*-AFPP.*

Demonstração. Seja (e_i) a base canônica de ℓ_1. Pelo Teorema 2 de [4], existe um isomorfismo $T\colon \ell_1 \to \overline{\operatorname{span}}(u_n)$ tal que $T(e_i) = u_i$ para cada i. Denote por C o conjunto convexo $T(B_{\ell_1})$, onde B_{ℓ_1} é a bola unitária de ℓ_1. Segue, da Proposição 4 em [44], que C é limitado. Também, como a inversa S de T aplica sequências de Cauchy em sequências de Cauchy, segue que C é fechado. Segue, do Teorema 2 em [57], que existe uma aplicação contínua $f\colon B_{\ell_1} \to B_{\ell_1}$, a qual é desprovida de sequências que aproximem pontos fixos fortemente. Segue então, do Teorema de Schur, que f não possui sequências que aproximem pontos fixos fracamente. Logo, a aplicação contínua $\tilde{f}\colon C \to C$ dada por $\tilde{f}(T(x)) := T(f(x))$ não possui sequências que aproximem pontos fixos fracamente. Portanto, X não possui a w-AFPP. $\square$

3.4 Existência de Sistemas Biortogonais (s)-Equicontínuos

Vimos, na seção anterior, que a existência de sistemas biortogonais (s)-equicontínuos implica na não-validade da w-AFPP. O principal resultado desta seção versa sobre a existência de topologias vetoriais mais finas que são compatíveis com tais sistemas. Esse resultado nos dá, para uma grande classe de sistemas biortogonais, uma interação entre as noções de equicontinuidade e equicontinuidade forte. A prova deste resultado decorre de refinamentos das idéias de Peck e Porta [64].

Teorema 3.4.1. *Sejam* (X, τ) *um espaço vetorial topológico de Hausdorff e* γ *um número ordinal. Suponha que* $\{e_\alpha; f_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ *é um sistema biortogonal para* X *tal que* $\{f_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ *é* τ*-equicontínua. Então para cada sequência* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \gamma$*, existe uma topologia vetorial Hausdorff* $\tau_\star$ *sobre* X *que é mais fina do que* τ *e tal que* (f_{α_n}) *é* (s)*-equicontínuo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}(\tau)$ uma 0-base de vizinhanças para τ em X. Fixe uma sequência $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \gamma$. Seguindo as idéias de [64], defina para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e cada sequência (ξ_i) em $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, a aplicação linear $T_{(n,(\xi_i))}\colon X \to X$ por

$$T_{(n,(\xi_i))}(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i f_{\alpha_i}(x) \right) (\xi_k e_{\alpha_k} - \xi_{k+1} e_{\alpha_{k+1}}), \quad x \in X.$$

Por definição, pomos $T_{(0,(\xi_i))} = I$, o operador identidade de X. Para cada $U \in \mathcal{U}(\tau)$ e para cada escolha finita de números $N_1, \ldots, N_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos por $\gamma(U; N_1, \ldots, N_n)$ o conjunto

$$U \cap \left(\bigcap_{(\xi_i)\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} T_{(N_1,(\xi_i))}(U) \right) \cap \cdots \cap \left(\bigcap_{(\xi_i)\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} T_{(N_n,(\xi_i))}(U) \right).$$

Note que, se $\beta \in [0, \gamma)$ é tal que $e_\beta \notin \{e_\alpha\colon \alpha \in \{\alpha_k\colon k = 1, \ldots, N_n\}\}$, então para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, teremos

$$\lambda e_\beta \in U \cap \left(\bigcap_{(\xi_i)\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} T_{(N_i,(\xi_i))}(U) \right), \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Segue que $\gamma(U; N_1, \ldots, N_n) \neq \{0\}$. Por outro lado, é fácil ver que a família $\mathcal{U}(\tau_\star)$ de todos os conjuntos $\gamma(U; N_1, \ldots, N_n)$ forma uma base de vizinhanças para 0 em uma topologia vetorial Hausdorff que denotaremos por $\tau_\star$. É claro que $\tau \leq \tau_\star$. Em particular, como $\{f_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ é uma família de funcionais lineares τ-contínuos em X, segue que os f_{α_j}'s são

$\tau_\star$-contínuos. Agora, vamos mostrar que $\{f_{\alpha_i}\}$ é fortemente equicontínua $w.r.t.$ a topologia $\tau_\star$. Para isto, vamos provar a seguinte :

Afirmação 3.4.1. *Para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $U_{(\epsilon)} \in \mathcal{U}(\tau)$ *com a seguinte propriedade: Para cada inteiro* $N > 1$*, cada sequência de ordinais* $\alpha_1, \ldots, \alpha_N < \gamma$ *e cada sequência de escalares* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$*, vale o seguinte*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_{\alpha_i} \notin U_{(\epsilon)} - U_{(\epsilon)} \quad \textit{se algum} \quad |\lambda_{\alpha_j}| > 2\epsilon. \tag{3.2}$$

Vamos provar esta afirmação. Suponha que a afirmação é falsa. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $U \in \mathcal{U}(\tau)$, podemos achar um inteiro $N_U > 1$, números ordinais $\alpha_{(1,U)} < \cdots < \alpha_{(N_U,U)} < \gamma$ e escalares $(\lambda_i^U)_{i=1}^{N_U}$ tais que para algum $i_U^* \in \{1, \ldots, N_U\}$, temos que $|\lambda_{i_U^*}^U| > 2\epsilon_0$ mas $\sum_{i=1}^{N_U} \lambda_i^U e_{\alpha_{(i,U)}} \in U - U$. Por simplicidade, escreveremos $x_U = \sum_{i=1}^{N_U} \lambda_i^U e_{\alpha_{(i,U)}}$. Como $\{f_i\}$ é τ-equicontínua, existe uma τ-vizinhança U_0 de 0 em X tal que $|f_\alpha(z)| < \epsilon_0$, para todo $z \in U_0$ a para todo $\alpha < \gamma$. Tome $U \in \mathcal{U}(\tau)$ suficientemente pequeno tal que $U - U \subset U_0$. Então, $x_U \in U_0$, e assim $|f_\beta(x_U)| < \epsilon_0$ para todo $\beta < \gamma$. Porém, sabemos que $|f_{\alpha_{(i_U^*,U)}}(x_U)| = |\lambda_{i_U^*}^U| > 2\epsilon_0$. Mas isto é uma contradição, e assim a afirmação está provada.

Agora, sejam $\epsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ fixados. Para a 0-vizinhança $U_{(\epsilon)} \in \mathcal{U}(\tau)$ dada pela afirmação anterior, denote por $\gamma(\epsilon; N)$ a 0-vizinhança em $(X, \tau_\star)$ dada por

$$U_{(\epsilon)} \cap \left(\bigcap_{(\xi_i) \in \{-1,1\}} T_{(N,(\xi_i))}(U_{(\epsilon)}) \right).$$

Se $z \in \gamma(\epsilon; N)$, então $z \in U_{(\epsilon)} \cap T_{(N,(\xi_i))}(U_{(\epsilon)})$ para todo $(\xi_i) \in \{-1, 1\}$. Assim,

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i f_{\alpha_i}(x) \right) (\xi_k e_{\alpha_k} - \xi_{k+1} e_{\alpha_{k+1}}) = x - z \quad \text{para algum} \quad x \in U_{m(\epsilon)}. \tag{3.3}$$

Fazendo $L_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i f_{\alpha_i}(x)$, podemos escrever o lado esquerdo de (3.3) como

$$\sum_{k=1}^{N} L_k(x)(\xi_k e_{\alpha_k} - \xi_{k+1} e_{\alpha_{k+1}}) = L_1(x)\xi_1 e_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{N} (L_k(x) - L_{k-1}(x)\xi_k e_{\alpha_k} - L_N(x)\xi_{N+1} e_{\alpha_{N+1}}.$$

Segue de (3.2) que

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \xi_i f_{\alpha_i}(x) \right| < 2\epsilon \quad \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, (\xi_i) \in \{-1, 1\}. \tag{3.4}$$

Um cálculo direto mostra que

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_j f_{\alpha_j}(z) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j f_{\alpha_j}(x).$$

Então, usando (3.4), concluimos a prova do Teorema.

□

O próximo corolário é uma consequência imediata do teorema anterior e da Proposição $2-(b)$ de Domański [25].

Corolário 3.4.1. *Seja* (X, τ) *um espaço vetorial topológico metrizável. Suponha que* (x_n) *é uma sequência básica regular cujas projeções canônicas são equicontínuas. Então os coeficientes funcionais associados a* (x_n) *são* (s)*-equicontínuos w.r.t. em uma topologia vetorial de Hausdorff mais fina.*

3.5 Existência de Sistemas Biortogonais Equicontínuos

Fornecer vínculos entre sistemas biortogonais equicontínuos e (s)-equicontínuos pode ser útil para obter informações sobre a existência de sistemas biortogonais equicontínuos. Nosso próximo resultado principal dá uma contribuição para uma grande classe de espaços metrizáveis X satisfazendo a seguinte condição:

($\star$) Existe uma F-norma $\|\cdot\|$ que gera a topologia de X e tal que $\|a_k x_K\| \to 0$, sempre que (a_k) é uma sequência nula de escalares e (x_k) é uma sequência de vetores em X tal que $0 < \inf_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$.

Note que os espaços localmente limitados gozam da propriedade ($\star$).

Teorema 3.5.1. *Seja* (X, τ) *um espaço vetorial topológico metrizável gozando da propriedade* ($\star$)*. Suponha que* X *contém uma sequência básica. Então* X *contém uma sequência básica regular cujos coeficientes funcionais são equicontínuos.*

Demonstração. Seguiremos a construção de Singer em [77], página 154. Suponha que (u_n) é uma sequência básica, e seja $(u_n^\star)$ a sequência dos coeficientes funcionais associados. Seja $\|\cdot\|$ uma F-norma monótona que gera a topologia de X e que possui a propriedade ($\star$). Seja $U_0 = \{X \in X \colon \|x\| < 1\}$. Afirmamos que se $E = \overline{\mathrm{span}}(u_n)$, o span linear fechado de (u_n) em X, então $\|u_n^*\|_E = \sup_{z\in U_0\cap E} |u_n^*(z)| < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para provar isto, tome uma sequência (δ_n) de números positivos tal que $u_n^*(U_n)$ seja limitado em $\mathbb{R}$, onde $U_n = \{x \in X \colon \|x\| < \delta_n\} \cap E$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $U_n \subset \{x \in E \colon |u_n^*(x)| < 1\}$ e que $\delta_n < 1$ para todo n. Dados $n \geq 1$ e $x \in X$ com $\|x\| > \delta_n$, podemos escolher $\lambda^n(x) \in (0, 1)$ tal que $\|\lambda^n(x)x\| = \delta_n/2$. Seja $\lambda^n(x) = 1$ para $\|x\| \leq \delta_n$. Note que para todo $x \in X$ e todo $n \geq 1$, temos

$$\left\| \frac{\lambda^n(x)x}{\lambda^n(x)\|\lambda^n(x)x\| + 1} \right\| < \delta_n.$$

Assim, $|u_n^*(x)| \leq \delta_n + 1/\lambda^n(x)$ para todo $x \in E$. Por outro lado, a propriedade ($\star$) mostra que $\inf_{\delta_n \leq \|x\| \leq 1} \lambda^n(x) > 0$. Isto prova a afirmação. Agora, seja $(b_n) \subset \ell_1$ uma sequência de números positivos dada por $b_n = 1/2^n(\|u_n^*\|_E + 1)$. Escreva $a_1 = 1/b_1$ e $c_n = 1/b_n$, para todo $n \geq 2$. Então, defina um sistema biortogonal $(e_n; f_n)$ em $E \times E^*$ da seguinte maneira:

$$e_1 = a_1 u_1, \quad e_n = (-1)^{n+1} a_1 u_1 + c_n u_n$$

e

$$f_1 = b_1 u_1^* + \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j b_j u_j^*, \quad f_n = b_n u_n^*, \quad n \geq 2.$$

É claro que , como U_0 é absorvente, f_1 está bem definida e é contínua. Além disso, é fácil ver que $|f_n| \leq 2$ em $U_0 \cap E$. Em particular, $\{f_n\}$ é equicontínua. Afirmamos agora que (e_n) é uma base de Schauder para E. De fato, seja $x \in E$ e vamos mostrar que $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) e_n$. Como U_0 é absorvente, podemos escolher $\lambda_x > 0$ tal que $\lambda_x x \in U_0$. Seguindo [77], obtemos

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(\lambda_x x) e_n = \sum_{n=1}^{N} u_n^*(\lambda_x x) u_n + \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} (-1)^j b_j u_j^*(\lambda_x x) \right) a_1 u_1.$$

Assim,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} f_n(\lambda_x x) e_n - \sum_{n=1}^{N} u_n^*(\lambda_x x) u_n \right\| \leq \left\| \left(\sum_{j=N+2}^{\infty} \frac{a_1}{2^j} \right) u_1 \right\|,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lambda_x x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda_x x) e_n.$$

Segue então que (e_n) é uma base de Schauder para o span linear fechado de (u_n) em X. Como $|u_1^*(e_n)| = a_1$ para todo n, segue que (e_n) é regular. $\square$

Antes de apresentar os próximos resultados, vamos seguir a terminologia de [47, 58], denotando por ω o espaço vetorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ munido com a topologia produto, e por φ o subespaço de ω formado pelas sequências com suporte finito. A prova do teorema anterior nos dá os dois seguintes interessantes escólios.

Teorema 3.5.2. *Suponha que X é um espaço vetorial topológico metrizável gozando da propriedade $(\star)$, o qual possui um sistema biortogonal. Então X possui um sistema biortogonal equicontínuo.*

Teorema 3.5.3. *Seja (X, τ) um espaço localmente convexo metrizável. Suponha que X não contém uma cópia isomórfica de φ. Então X possui um sistema biortogonal equicontínuo.*

Demonstração. Seja (X, τ) um espaço localmente convexo e metrizável. Como a topologia fraca induzida por $(X, \tau)^*$ não é metrizável, podemos escolher um conjunto circled limitado, fechado e $B \subset X$ que não esteja contido em um subespaço finito-dimensional de X. Por outro lado, como X não contém uma cópia isormófica de φ, segue que X admite uma norma contínua, digamos $|\cdot|$ (Veja o Teorema 4 em [58]). Usando indutivamente o Teorema de Hahn-Banach(Veja a prova da proposição 1.1 em [47]), podemos achar um sistema biortogonal $(x_n, x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ para $(X, |\cdot|) \times (X, |\cdot|)^*$ com $x_n \in B$ para todo n. Sendo $U_0 = \{x \in X \colon |x| < 1\}$, temos que $\|x_n^*\| = \sup_{z\in U_0} \|x_n^*(z)\| < \infty$, para $n = 1, 2, \ldots$ Usando exatamente os mesmos argumentos do Teorema 3.5.1, obtemos um sistema biortogonal regular equicontínuo $(e_n; f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para (X, τ). $\square$

Como aplicação dos Teoremas 3.4.1 e 3.5.3, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.5.1. *Todo espaço localmente convexo metrizável sem uma cópia isomórfica de φ não possui a w-AFPP com respeito a uma topologia Hausdorff localmente convexa mais fina.*

3.6 Um Problema Inverso Relativo a w-AFPP

Sob a perspectiva da Proposição 3.3.1 é natural perguntar se uma topologia vetorial completa suporta uma base de Hamel Schauder limitada. Podemos verificar que uma tal topologia não pode ser localmente convexa. Nessa linha, apresentamos o seguinte resultado.

Teorema 3.6.1. *Todo espaço vetorial infinito-dimensional admite uma topologia vetorial Hausdorff, completa, não-localmente convexa e não-metrizável, a qual possui uma base de Hamel Schauder limitada e goza da w-AFPP.*

Demonstração. O seguinte Lema é devido ao Professor S. Shkarin.

Lema 3.6.1. *Seja (t_n) uma sequência de números reais positivos. Então existe uma função côncava crescente $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(t_n) = \infty$.*

Este lema é o maior ingrediente na prova da existência de topologias vetoriais completas e não metrizáveis tendo uma base de Hamel Shauder limitada. De fato, seja X um espaço vetorial infinito-dimensional qualquer, e seja $H = \{e_i\}_{i\in J}$ uma base de Hamel para X. Denote por $\{e_i^*\}_{i\in J}$ os correspondentes funcionais coordenadas. Para cada F-seminorma contínua ρ sobre o corpo $\mathbb{K}$ subjacente, consideremos em X uma F-seminorma $\|\cdot\|_\rho$ definida por

$$\|x\|_\rho = \sum_{i\in J} \rho(e_i^*(x)), \quad x \in X.$$

Agora, vamos considerar sobre X a topologia vetorial τ gerada pela coleção de todas as F-seminormas $\|\cdot\|_\rho$. Note que cada funcional e_i^* é τ-contínuo. De fato, tome $\rho_0(t) = |t|$ para $t \in \mathbb{K}$. Então $\|\cdot\|_{\rho_0}$ é a norma usual de ℓ_1, em relação a qual, cada e_i^* é contínuo. Como a topologia τ é mais forte do que a definida por $\|\cdot\|_{\rho_0}$, segue que todos os e_i^* são τ- contínuos.

Afirmação 3.6.1. H *é um subconjunto limitado de* (X,τ).

Para provar esta afirmação, seja U qualquer τ-vizinhança de 0 em X. Então, existem F-seminormas contínuas $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sobre $\mathbb{K}$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X\colon \|x\|_{\rho_i} < \epsilon\} \subset U.$$

Defina uma F-seminorma ρ em $\mathbb{K}$ por $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n$. Então o conjunto $V = \{x \in X\colon \|x\|_\rho < \epsilon\}$ está contido em U. Como ρ é contínua, existe $\lambda > 0$ tal que $\rho(\lambda) < \epsilon$.

Então $\|\lambda e_i\|_\rho$ para todo $i \in J$. Logo, $\lambda H \subset V \subset U$, isto é, H é absorvido por U, e assim, é limitado. Portanto, $\{e_i\}_{i\in J}$ é uma base de Hamel Schauder limitada para (X, τ). Está provada a afirmação.

Nosso objetivo agora é mostrar que τ é completa. Seja $\{x_\sigma\}_\sigma$ uma rede de Cauchy em (X, τ). Então, para cada $i \in J$ existem os limites $\lim_\sigma e_i^*(x_\sigma)$. As duas afirmações abaixo nos ajudarão a provar que x_σ é τ-convergente em X.

Afirmação 3.6.2. *O conjunto* $\{i \in J\colon \lim_\sigma |e_i^*(x_\sigma)| \neq 0\}$ *é finito.*

Suponha que esta afirmação é falsa. Então existem índices $a_1, a_2, \ldots$ em J, distintos dois a dois, tais que os números $b_n = \lim_\sigma |e_{a_n}^*(x_\sigma)|$ são positivos para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Lema 3.6.1 para $t_n = b_n$, obtemos uma função côncava crescente $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $\sum_n \varphi(b_n) = \infty$. Então, é fácil ver que, $\rho(t) = \varphi(|t|)$ define uma F-norma contínua sobre o corpo $\mathbb{K}$. Além disso, se $N \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(|e_{a_n}^*(x_\sigma)|) = \sum_{n=1}^{N} \rho(e_{a_n}^*(x_\sigma)) \leq \|x_\sigma\|_\rho \quad ,$$

e tomando o limite em σ, obtemos

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(b_n) \leq \lim_\sigma \|x_\sigma\|_\rho.$$

Como N é arbitrário, segue que $\sum_n \varphi(b_n) < \infty$. Esta contradição conclui a prova da afirmação.

Afirmação 3.6.3. $\lim_\sigma x_\sigma = x$, *onde* $x = \sum_{i\in J}(\lim_\sigma e_i^*(x_\sigma))e_i$.

Suponha que a afirmação é falsa. Então, existe uma F-seminorma contínua ρ sobre $\mathbb{K}$ tal que

$$M = \lim_\sigma \|x_\sigma - x\|_\rho > 0.$$

Por simplicidade, façamos $y_\sigma = x_\sigma - x$. Como $\{y_\sigma\}_\sigma$ é Cauchy, existe um índice σ_0 tal que

$$\|y_\sigma - y_{\sigma_0}\|_\rho < M/2,$$

para todo $\sigma \succ \sigma_0$. Consideremos agora a projeção P de X sobre $span\{e_i\colon i \in supp y_{\sigma_0}\}$ dada por

$$P(x) = \sum_{i\in supp y_{\sigma_0}} e_i^*(x)e_i \quad ,$$

onde $\mathrm{supp}x$ denota o suporte de um vetor $x \in X$, isto é, o conjunto $\{i \in J\colon e_i^*(x) \neq 0\}$. Seja I o operador identidade de X. Um cálculo simples mostra que as duas seguintes igualdades valem para cada $x \in X$:

(i) $\mathrm{supp}P(x) \cap \mathrm{supp}(I-P)(x) = \varnothing$.

(ii) $\mathrm{supp}y_{\sigma_0} \cap \mathrm{supp}(I-P)(x) = \varnothing$.

Usando (i) e (ii), prova-se que

$$\|y_\sigma - y_{\sigma_0}\|_\rho = \|P(y_\sigma) - y_{\sigma_0}\|_\rho + \|(I-P)(y_\sigma)\|_\rho \quad ,$$

o que por sua vez implica que $\|(I-P)(y_\sigma)\|_\rho < M/2$ para todo $\sigma > \sigma_0$. Porém, por outro lado, sabemos que $\lim_\sigma e_i^*(y_\sigma) = 0$ e $\mathrm{supp}y_{\sigma_0}$ é finito. Logo, $\lim_\sigma P(y_\sigma) = 0$. Usando (i) e (ii) novamente, obtemos

$$M = \lim_\sigma \|y_\sigma\|_\rho = \lim_\sigma \|(I-P)(y_\sigma + Py_\sigma\|_\rho = \lim_\sigma \|(I-P)(y_\sigma\|_\rho \leq M/2 \quad ,$$

uma contradição. Portanto, devemos ter $M = 0$, o que encerra a prova da afirmação.

Afirmação 3.6.4. τ *não é metrizável.*

Para provar esta afirmação, basta tomar qualquer sequência (ρ_n) de F-normas sobre o corpo $\mathbb{K}$ e mostrar que existe uma τ-vizinhança de 0, que não contenha um conjunto da forma

$$\{x \in X\colon \|x\|_{\sigma_1} + \cdots + \|x\|_{\sigma_n} < \varepsilon\} \quad ,$$

onde n é um inteiro positivo e $\varepsilon > 0$. Note que, podemos tomar uma sequência de números positivos (c_n) tal que a série $\sum_n c_n\rho_n$ converge pontualmente para uma F-norma $\omega\colon = \sum_{n=1}^\infty c_n\rho_n$. Agora, tome $\rho = \omega^{1/2}$. Temos ainda uma outra F-norma sobre $\mathbb{K}$ com a seguinte importante propriedade:

(P) Para cada natural j, existe $c = c(j) > 0$ tal que $\rho \geq c(\rho_1 + \cdots + \rho_j)^{1/2}$.

Considere agora a vizinhança $U = \{x \in X\colon \|x\|_\rho < 1\}$. Vamos provar que U serve aos nossos propósitos. Suponha que não. Então, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$W = \{x \in X\colon \|x\|_{\rho_1} + \cdots + \|x\|_{\rho_n} < \varepsilon\} \subset U.$$

Se $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, podemos tomar $t > 0$ tal que $\rho_1(t) + \cdots + \rho_n(t) = \varepsilon/2m$. Tomando $x \in X$ tal que para m dos índices j, $h_j(x) = t$ e $h_j(x) = 0$ para todos os outros j, obtemos que

$$\|x\|_{\rho_1} + \cdots + \|x\|_{\rho_n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad ,$$

e assim, $x \in W$. Logo, $x \in U$. Então, $\|x\|_{\rho} = m\rho(t) < 1$. Daí, $\rho(t) < 1/m$. Por outro lado, por (P), existe $c > 0$, dependendo somente de n, tal que

$$\rho \geq c(\rho_1 + \cdots + \rho_n)^{1/2}.$$

Assim, $\rho(t) \geq c(\varepsilon/2m)^{1/2}$. Daí $m < 2/c^2\varepsilon$, para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Esta contradição prova a afirmação.
Agora, consideraremos em X a topologia τ dada acima. Precisamos do seguinte lema.

Lema 3.6.2. *Seja* C *um subconjunto não-vazio, separável e limitado de* (X, τ). *Então, o espaço*

$$\overline{C - C}^{\,\sigma(X,X^*)} = \overline{\{x - y \colon x, y \in C\}}^{\,\sigma(X,X^*)}$$

é Fréchet- Urysohn quando equipado com a topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.

Vamos provar o lema. Defina uma aplicação injetiva e contínua $T \colon (X, \tau) \to c_0(J)$ por $T(x) = (e_i^*(x))_{i \in J}$. Então $T(C)$ é separável em $c_0(J)$. Afirmamos que $T(C)$ é limitado. De fato, note que

$$U = \left\{ x \in X \colon \sum_{i \in J} |e_i^*(x)| < 1 \right\}$$

é uma τ-vizinhança de 0 em X. Então, como C é limitado, existe uma constante $\lambda > 0$ tal que $\lambda C \subset U$. Logo,

$$\|T(x)\|_{c_0(J)} = \sup_{i \in J} |e_i^*(x)| \leq \lambda^{-1} \quad ,$$

para todo $x \in C$. Como $c_0(J)$ não contém qualquer cópia isomórfica de ℓ_1 e T é uma injeção contínua, o lema segue da Proposição 2.3 em [46].

Afirmação 3.6.5. (X, τ) *possui a* w*-AFPP.*

De fato, seja $C \subset X$ não-vazio, convexo, fechado e limitado e seja $f \colon C \to C$ uma aplicação contínua. Podemos supor, sem perda de generalidade, que C é separável(veja a Proposição 2.3 em [9]). Pelo Teorema 2.1 em [9], temos que

$$0 \in \overline{\{x - f(x) \colon x \in C\}}^{\,\sigma(X,X^*)}.$$

Pelo Lema 3.6.2, obtemos o resultado. E isto encerra a prova do teorema.

$\square$

3.7 Sobre a w-AFPP em F-espaços com Bases Absolutas

Encerraremos este capítulo com uma caracterização da w-AFPP em F-espaços com bases absolutas. Lembre que uma base (x_n) em um F-espaço $(X, \|\cdot\|)$ é dita absoluta quando

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n x_n\| \quad \text{para} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

É sabido que toda base em um F-espaço é uma base de Schauder.

Teorema 3.7.1. *Seja X um F-espaço não-localmente convexo com uma base absoluta. Então X possui a w-AFPP se, e só se, todo subconjunto convexo, fechado e norma-limitado de X é compacto.*

Demonstração. A necessidade segue diretamente de um recente resultado de Robert Cauty [19] relativo à conjectura de Schauder (Todo subconjunto compacto e convexo de um F-espaço tem a Propriedade do Ponto Fixo). Vamos então provar a suficiência. Seja (e_n) uma base de Schauder para X. Suponha, por contradição, que X contém um subconjunto convexo , limitado e fechado C que é não compacto. Pelo Teorema 2 em [73], existe uma base de blocos regular (u_n) para (e_n) tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} t_n u_n$ converge para cada $(t_n) \in \ell_1$. Segue das versões gerais do Teorema da Aplicação Aberta e do Teorema do Gráfico Fechado, válidas para F-espaços, que (u_n) é equivalente a base canônica de ℓ_1. A conclusão segue da Proposição 3.3.2.

□

Capítulo 4

Aproximação Forte de Pontos Fixos

Conteúdo

4.1 Introdução

O teorema de Schauder-Tychonoff nos diz que toda autoaplicação contínua, de um subconjunto compacto convexo não-vazio $C \subset X$, onde X é um espaço localmente convexo e Hausdorff, possui um ponto fixo. Como teoremas de ponto fixo são muito úteis para a teoria das equações diferenciais, a pesquisa por novos resultados está ativa. Existem vários tipos de teoremas de ponto fixo, onde são relaxadas a hipótese de compacidade, a hipótese de continuidade ou a conclusão de que existe um ponto fixo. E neste último contexto, entra um formidável tópico da teoria de pontos fixos: a aproximação de pontos fixos.

No capítulo anterior apresentamos alguns resultados sobre aproximação fraca de pontos fixos. No presente capítulo forneceremos mais algumas contribuições para a Teoria de Aproximação de Pontos Fixos, mas desta vez nossos resultados tratarão de aproximações fortes de pontos fixos em espaços localmente convexos. Dizemos que um espaço vetorial topológico (X, τ) possui a propriedade da aproximação forte de pontos fixos (s-AFPP) se sempre que $C \subset X$ for limitado, fechado e convexo e $f\colon C \to C$ for uma aplicação contínua, então existe uma sequência $(x_n) \subset C$ tal que $x_n - f(x_n) \to 0$ com respeito a topologia τ. Também, é conveniente recordar a seguinte definição.

Definição 4.1.1. *Seja* C *um subconjunto convexo não-vazio de um espaço vetorial* *topológico* X. *Dizemos que uma sequência* $(x_n) \subset C$ *aproxima (fortemente) pontos fixos para uma aplicação* $f\colon C \to \overline{C}$ *quando* $x_n - f(x_n) \to 0$.

Analogamente, podemos definir redes que aproximam pontos fixos para f. Em outras palavras, note que f tem uma rede que aproxima pontos fixos se, e só se,

$$0 \in \overline{\{x - f(x) \colon x \in C\}}.$$

Encontrar aplicações contínuas que aproximem pontos fixos constitui um interessante tópico em teoria de pontos fixos, e vários resultados tem sido apresentados. Dentre eles, mencionamos Hazewinkel e Van de Vel [39], Hadzic [34,35], Idzik [41,42], Lin-Sternfeld [57] e Park [62].

Em particular, em [57] é provado que um subconjunto convexo C de um espaço normado é totalmente limitado se, e só se, toda autoaplicação Lipschitz de C tem uma sequência que aproxima pontos fixos. Uma generalização da parte "somente se"deste teorema é apresentada por um resultado de [62] o qual, em particular, diz que toda autoaplicação contínua de um subconjunto convexo de um espaço localmente convexo, cuja imagem é totalmente limitada, possui uma rede que aproxima pontos fixos.

Neste capítulo, iremos estender o resultado de [62] mencionado acima para aplicações sequencialmente contínuas (ver Teorema 4.2.1 na próxima seção). Esta extensão é possível pelo fato de que o problema pode ser reduzido a um problema finito-dimensional e em espaços finito-dimensionais, continuidade sequencial implica em continuidade. Também neste capítulo, iremos estender a "parte se"do resultado de [57] citado acima, para espaços localmente convexos. Vamos mostrar que todo subconjunto não-vazio, convexo, limitado e não totalmente limitado de um espaço localmente convexo, admite uma autoaplicação uniformemente contínua sem redes que aproximem pontos fixos (ver Teorema 4.2.2 na próxima seção).

Ainda neste capítulo, apresentaremos um outro resultado. No Teorema 1 de [3], os autores mostram que, se C é um subconjunto não-vazio fracamente compacto de um espaço localmente convexo metrizável X, então toda autoaplicação fracamente sequencialmente contínua de C tem um ponto fixo. Este teorema tem muitas aplicações em teoria de equações diferenciais e os autores perguntam se a hipótese de metrizabilidade pode ser retirada. Mostraremos que a condição de metrizabilidade pode ser retirada se C é sequencialmente compacto e f é afim. Por outro lado, se C é compacto e f é sequencialmente contínua e afim, então f não necessariamente tem um ponto fixo.

4.2 Resultados sobre Aproximação Forte de Pontos Fixos

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Seja* C *um subconjunto convexo de um espaço localmente convexo* X *e* $f\colon C \to \overline{C}$ *uma aplicação sequencialmente contínua tal que* $f(C)$ *é totalmente limitado. Então* f *possui uma rede que aproxima pontos fixos.*

Um resultado semelhante ao Teorema 4.2.1, mas com a hipótese de que f é contínua, foi provado no Corolário 2.1 de [62]. O Teorema 4.2.1 estende este resultado para o caso em que f é sequencialmente contínua.

Como consequência do teorema anterior, obtemos a seguinte generalização de um resultado de [57].

Corolário 4.2.1. *Seja* C *um subconjunto convexo totalmente limitado de um espaço normado* X*. Então, toda aplicação contínua* $f\colon C \to C$ *admite uma sequência que aproxima pontos fixos.*

O Teorema 4.2.1 é o melhor resultado possível em um certo sentido. Isto é justificado pelos dois próximos resultados. O primeiro diz que a hipótese de limitação total é essencial, mesmo para aplicações uniformemente contínuas. O segundo mostra que aplicações sequencialmente contínuas não necessariamente tem sequências que aproximem pontos fixos, mesmo quando C é compacto.

Teorema 4.2.2. *Sejam* X *um espaço localmente convexo e* $C \subset X$ *um conjunto convexo limitado mas não totalmente limitado. Então, existe uma aplicação uniformemente contínua* $f\colon C \to C$*, a qual não admite redes que aproximem pontos fixos.*

Apresentaremos agora um exemplo de uma autoaplicação sequencialmente contínua, definida em um conjunto compacto convexo, a qual não possui sequências que aproximem pontos fixos.

Exemplo 4.2.1. *Existem um espaço localmente convexo Hausdorff* X *equipado com sua topologia fraca, um subconjunto não-vazio compacto e convexo* $K \subset X$ *e uma função sequencialmente contínua* $f\colon K \to K$ *sem sequências que aproximem pontos fixos.*

Demonstração. Sejam $X = (\ell_\infty^*, w^*)$ e $K = \{\mu \in X\colon \mu \geq 0 \text{ e } \|\mu\| \leq 1\}$. Então X é um espaço localmente convexo munido com sua topologia fraca, e $K \subset X$ é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo. Resta construir a função f. O espaço ℓ_∞^*

pode ser canonicamente identificado com o espaço $M(\beta\mathbb{N})$ das medidas de Radon com sinal, sobre o espaço compacto $\beta\mathbb{N}$(compactificação de Cech-Stone dos números naturais). Seja $P\colon M(\beta\mathbb{N}) \to M(\beta\mathbb{N})$ dada por

$$P(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\})\delta_n$$

onde δ_x denota a medida de Dirac suportada por x. Note que P é um operador linear limitado. Seja $K_0 = P(K)$. Então $K_0 \subset K$ e K_0 é um subconjunto convexo de ℓ_∞^*, não totalmente limitado em norma. Então, pelo Teorema 1 de [57], existe uma aplicação Lipschitz $g\colon K_0 \to K_0$ sem sequências que aproximem pontos fixos fortemente.

Seja $f = g \circ P\big|_K$. Afirmamos que f é fraca* $\to$ fraca* sequencialmente contínua e que não possui sequências que aproximem pontos fixos na topologia fraca*.

Para provar que f é fraca* $\to$ fraca* sequencialmente contínua , seja (μ_n) uma sequência em K convergindo fraco* para algum $\mu \in K$. Como ℓ_∞ é um espaço de Grothendieck, segue que μ_n converge fracamente para μ em ℓ_∞^*. Como P é um operador linear limitado, segue que P fraco $\to$ fraco contínuo, e assim $P\mu_n$ converge para $P\mu$ fracamente em ℓ_∞^*. Como $P(\ell_\infty^*)$ é isométrico à ℓ_1, segue da Propriedade de Schur que $P\mu_n$ converge para $P\mu$ em norma, e assim $g(P\mu_n)$ converge para $g(P\mu)$ em norma. Logo, $f(\mu_n)$ converge para $f(\mu)$ em norma, e daí na topologia fraca*. Portanto, f é fraca* $\to$ fraca* sequencialmente contínua.

Agora, por contradição, suponha que exista uma sequência $(\mu_n) \subset K$ tal que $\mu_n - f(\mu_n) \to 0$ na topologia fraca*. Pela propriedade de Grothendiek de ℓ_∞, segue que $\mu_n - f(\mu_n) \to 0$ fracamente em ℓ_∞^*. Como P é um operador linear limitado, segue que $P\mu_n - Pf(\mu_n) \to 0$ fracamente, e então, pelo Teorema de Shur, obtemos que $P\mu_n - Pf(\mu_n) \to 0$ em norma. Além disso,

$$P\mu_n - Pf(\mu_n) = P\mu_n - f(\mu_n) = P\mu_n - g(P\mu_n) \quad ,$$

e assim, a sequência $(P\mu_n)$ aproxima pontos fixos para g com respeito a norma. Mas, isto é uma contradição.

□

Com base no exemplo acima, nos perguntamos o que se pode exigir de f para obtermos um resultado favorável, ou seja, a existência de uma sequência que aproxime pontos fixos para f. A próxima proposição mostrará que a exigência de que f seja afim é uma resposta para esse questionamento. Também vale a pena mencionar um outro fato sobre a próxima proposição. No Teorema 1 de [3], os autores mostram que, se C é um subconjunto não-vazio e fracamente compacto de um espaço localmente convexo metrizável X, então toda autoaplicação fracamente sequencialmente contínua de C tem um ponto fixo. A proposição 4.2.1 mostrará que esta condição de metrizabilidade pode ser suprimida quando C é sequencialmente compacto e f é afim.

Proposição 4.2.1. *Sejam X um espaço vetorial topológico, $C \subset X$ um subconjunto não-vazio, convexo e limitado, e $f\colon C \to C$ uma aplicação afim. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) A aplicação f possui uma sequência que aproxima pontos fixos.

(ii) Se X é Hausdorff, C é contavelmente compacto e f é contínua, então f tem um ponto fixo.

(iii) Se X é Hausdorff, C é sequencialmente compacto e f é sequencialmente contínua, então f possui um ponto fixo.

Demonstração. (i) Fixe $y_1 \in C$ e defina indutivamente a sequência (y_k) pondo $y_{k+1} = f(y_k)$. Seja

$$x_k = \frac{y_1 + \cdots + y_k}{k}.$$

Como C é limitado, segue que

$$x_k - f(x_k) = \frac{y_1 - y_{k+1}}{k} \to 0.$$

(ii) Seja (x_k) uma sequência que aproxima pontos fixos para f, dada pela afirmação (i). Como C é contavelmente compacto, a sequência (x_k) possui um ponto de acumulação $x \in C$, e assim existe uma subrede (x_ν) de (x_k) que converge para x. Como f é contínua, segue que $f(x_\nu) \to f(x)$. Contudo, $(x_\nu - f(x_\nu))$ é uma subrede de $(x_k - f(x_k))$, e assim, $x_\nu - f(x_\nu) \to 0$. Portanto, $x = f(x)$.

(iii) A prova é análoga a do item anterior. Usamos a compacidade sequencial de C para obter uma subsequência (x_{k_n}) que convirja para algum $x \in C$, e então pela continuidade sequencial de f, concluimos que $f(x_{k_n}) \to f(x)$.

$\square$

O próximo exemplo mostra que no item (iii) da proposição anterior, a hipótese de que C é sequencialmente compacto não pode ser trocada pela hipótese de que C é compacto. No caso em que C é compacto, a aplicação afim e sequencialmente contínua f, não necessariamente possui pontos fixos. O exemplo também mostra que o item (i) da proposição anterior tem caráter ótimo.

Exemplo 4.2.2. *Existem um espaço localmente convexo Hausdorff* X *munido com sua topologia fraca, um subconjunto não-vazio, compacto convexo* $K \subset X$ *e uma função afim, sequencialmente contínua* $f\colon K \to K$ *sem pontos fixos.*

Demonstração. Seja $X = (\ell_\infty^\star, w^\star)$. Podemos considerar X como as medidas de Radon com sinal sobre $\beta\mathbb{N}$. Seja C o subconjunto de X formado pelas medidas de probabilidade. Então C é compacto e convexo. Considere uma decomposição $\{A_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ em infinitos subconjuntos disjuntos. Usaremos esta decomposição para definir uma sequência (k_j) de números naturais como segue:

(a) $k_1 \geq 2$ e $k_1 \notin A_1$.

(b) $k_{j+1} > k_j$, e $k_{j+1} \notin A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{j+1}$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Vamos definir a aplicação linear $f\colon X \to X$ por

$$f(\mu) = \mu(\beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N})\delta_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\delta_{k_j} \quad ,$$

onde δ_x denota a medida de Dirac suportada por x. Note que f é uma aplicação linear norma $\to$ norma contínua, e assim, é fraca $\to$ fraca contínua sobre $\ell_\infty^\star$. Como ℓ_∞ é um espaço de Grothendieck, segue que f é fraca* $\to$ fraca* sequencialmente contínua. Em outras palavras, é sequencialmente contínua quando considerada de X em X. Além disso, note que f fixa C.

Afirmamos que f não possui pontos fixos em C. De fato, suponha que exista $\mu \in C$ tal que $f(\mu) = \mu$. Como $f(\mu)$ é suportada por $\mathbb{N}$, segue que

$$\mu(\{1\}) = f(\mu)(\{1\}) = \mu(\beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}) = f(\mu)(\beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}) = 0.$$

Assim μ é suportada pelo conjunto $\{k_j\colon j \in \mathbb{N}\}$. Como μ é uma medida de probabilidade, existe um j minimal tal que $\mu(\{k_j\}) \neq 0$. Porém,

$$\mu(\{k_j\}) = f(\mu)(\{k_j\}) = \mu(A_j) = 0 \quad ,$$

com $k_l \notin A_j$ para $l \geq j$ pela condição (b). Obtemos então uma contradição.

□

Observamos que não está claro se a hipótese de que f é afim se torna essencial para as afirmações (ii) e (iii) da Proposição 4.2.1. A prova dessas afirmações, dada acima, usa o fato de que f admite uma sequência que aproxima pontos fixos.

Proposição 4.2.2. *Sejam* X *um espaço vetorial topológico e* $C \subset X$ *um subconjunto relativamente contavelmente compacto. Então* C *é totalmente limitado.*

Demonstração. Suponha que C não é totalmente limitado. Então, existe uma vizinhança balanceada U de zero, tal que C não pode ser coberto por um número finito de translações de U. Podemos construir, por indução, uma sequência (x_n) em C tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$x_{n+1} \notin \{x_1, \ldots, x_n\} + U.$$

Afirmamos que o conjunto $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto discreto fechado de X. De fato, seja V uma vizinhança balanceada de 0 tal que $V + V \subset U$. Então, para cada $x \in X$, o conjunto $x + V$ contém no máximo um elemento de A. Para ver isto, suponha que $m < n$ e que $\{x_m, x_n\} \subset x + V$. Então, $x \in x_m + V$, donde

$$x_n \in x + V \subset x_m + V + V \subset x_m + U \quad ,$$

uma contradição. Assim, A é um subconjunto infinito de C sem pontos de acumulação em X. Portanto, C não é relativamente contavelmente compacto.

$\square$

Apresentaremos agora um problema que está em aberto.

Problema 4.2.1. *Sejam X um espaço localmente convexo Hausdorff, $C \subset X$ um conjunto convexo e $f \colon C \to C$ uma aplicação. Suponha que uma das seguintes condições é satisfeita:*

(i) C *é contavelmente compacto e* f *é contínua.*

(ii) C *é sequencialmente compacto e* f *é sequencialmente contínua.*

Então f *necessariamente admite um ponto fixo ?*

Segue, da Proposição 4.2.2 e do Teorema 4.2.1, que f possui rede que aproxima pontos fixos desde que C seja contavelmente compacto e f seja sequencialmente contínua. Contudo, neste caso, f não necessariamente tem uma sequência que aproxime pontos fixos, mesmo no caso em que C é compacto(veja o exemplo 4.2.1). E, mesmo que f admitisse uma sequência que aproxime pontos fixos, o exemplo 4.2.2 mostra que ela não necessariamente tem um ponto fixo. Segue que o problema acima é natural já que, nos dois exemplos citados, os respectivos conjuntos não são sequencialmente compactos e as respectivas aplicações não são contínuas.

4.2.1 Prova do Teorema 4.2.1

Nesta subseção provaremos um resultado mais geral, o Teorema 4.2.3. A partir dele, o Teorema 4.2.1 segue imediatamente. O Teorema 4.2.3 é uma generalização do Teorema 4.2.1 e do Teorema 2.1 em [9]. Para formular o teorema precisamos da seguinte definição devida a Himmelberg [40]:

Definição 4.2.1. *Dizemos que um subconjunto não-vazio C de um espaço vetorial topológico X é quase convexo quando, para toda vizinhança V da origem 0 em X e para todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset C$, existe um conjunto finito $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset C$ tal que*

$$\mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\} \subset C \quad e \quad z_i - x_i \in V \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 4.2.3. *Seja C um subconjunto quase convexo de um espaço vetorial topológico $(X, \mathcal{T})$. Sejam $\mathcal{R}$ a topologia localmente convexa mais fraca sobre X e $f\colon C \to \overline{C}$ uma aplicação $\mathcal{T} \to \mathcal{R}$ sequencialmente contínua tal que $f(C)$ é $\mathcal{R}$-totalmente limitado. Então f possui uma rede que aproxima pontos fixos.*

Este teorema é uma consequência imediata do seguinte resultado.

Lema 4.2.1. *Seja C um subconjunto quase convexo de um espaço vetorial topológico $(X, \mathcal{T})$. Sejam ρ uma seminorma contínua em X e $f\colon C \to \overline{C}$ uma aplicação $\mathcal{T} \to \rho$ sequencialmente contínua tal que $f(C)$ é ρ-totalmente limitado. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in C$ tal que $\rho(x - f(x)) < \varepsilon$.*

O resto desta subseção será destinado à prova do lema anterior. Usaremos o seguinte lema, que vem a ser uma leve generalização do Lema 1 de [27] ou de um resultado de [63].

Lema 4.2.2. *Sejam C um subconjunto de um espaço vetorial topológico $(X, \mathcal{T})$, D subconjunto não vazio finito de C tal que $\mathrm{co}D \subset C$, e $F\colon D \to 2^C$ uma aplicação com as seguintes propriedades:*

(a) $F(z)$ *é sequencialmente fechado para todo* $z \in D$.

(b) $\mathrm{co}N \subset \bigcup_{z \in N} F(z)$ *para todo* $N \subset D$.

Então $\bigcap_{z \in D} F(z) \neq \varnothing$.

Prova do Lema 4.2.1.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $f(C)$ é ρ-totalmente limitado, e $f(C) \subset \overline{C}$, existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset C$ tal que para todo $x \in f(C)$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ com $\rho(x - x_i) < \varepsilon/2$. Como C é quase convexo, podemos achar pontos $z_1, \ldots, z_n \in C$ tais que $\rho(z_i - x_i) < \varepsilon/2$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, e $\mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\} \subset C$. Seja $D = \{z_1, \ldots, z_n\}$ e defina a aplicação $F \colon D \to 2^C$ pondo para cada i,

$$F(z_i) = \left\{x \in C \colon \rho(f(x) - x_i) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Como ρ é contínua e f é sequencialmente contínua , segue que cada $F(z_i)$ é sequencialmente fechado em C. Além disso,

$$\cap_{i=1}^{n} F(z_i) = \varnothing.$$

Isto segue da escolha de $x_1, \ldots, x_n$. Aplicando o Lema 4.2.2 a F, D e C, concluimos que existe um subconjunto $\{z_{k_1}, \ldots, z_{k_m}\}$ tal que $x \notin \bigcup_{j=1}^{m} F(z_{k_j})$. Então $\rho(f(x) - x_{k_j}) < \varepsilon/2$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m$ e assim, pela desigualdade triangular,

$$\rho(f(x) - z_{k_j}) < \varepsilon \quad \forall j = 1, \ldots, m. \tag{4.1}$$

Uma vez que $x \in \mathrm{co}\{z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_m}\}$, segue, novamente pelo uso da desigualdade triangular, que

$$\rho(f(x) - x) < \varepsilon.$$

Isto completa a prova do lema.

A prova do Lema 4.2.1 foi inspirada por [63]. Outra possibilidade é seguir as linhas da prova do Teorema 2.1 em [9] e reduzir o problema ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

4.2.2 Prova do Teorema 4.2.2

O Teorema 4.2.2 será provado usando resultados e idéias de [57]. Provaremos um resultado um pouco mais forte:

Teorema 4.2.4. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço localmente convexo e $C \subset X$ um conjunto convexo limitado. Seja ρ_0 uma seminorma contínua tal que C não é ρ_0-totalmente limitado. Então, existe uma aplicação $f \colon C \to C$ com as seguintes propriedades:*

(a) f *não possui redes que aproximem pontos fixos.*

(b) Para toda seminorma contínua ρ a aplicação f é $\rho_0 \to \rho$ Lipschitz.

O papel fundamental na prova deste teorema é desempenhado pelo espaço Δ, definido e estudado em [57]. Vamos recordar a definição deste espaço e algumas de suas propriedades.

Definição 4.2.2. *Seja $\{e_n\}$ a base canônica de ℓ_1. Então*

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{co}\{0, e_n, e_{n+1}\}.$$

Consideraremos no espaço Δ a métrica herdada de ℓ_1. Outra importante propriedade de Δ é dada pelo seguinte lema da seção 5 de [57].

Lema 4.2.3. *Existe uma aplicação Lipschitz $g \colon \Delta \to \Delta$ tal que $\inf_{x\in\Delta} \|x - g(x)\| > 0$, e assim g não possui redes que aproximem pontos fixos.*

Vamos iniciar a prova do Teorema 4.2.4. Sejam $(X, \mathcal{T})$, C e ρ_0 satisfazendo as hipóteses. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in C$. Então, existe $\delta > 0$ tal que, para todo subespaço finito-dimensional $F \subset X$, existe algum $x \in C$ com $\mathrm{dist}_{\rho_0}(x, F) > \delta$. Assim, podemos construir indutivamente uma sequência (x_n) em C tal que

(i) $\rho_0(x_1) > \delta$.

(ii) $\mathrm{dist}_{\rho_0}(x_{n+1}, \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) > \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Provaremos agora o seguinte lema.

Lema 4.2.4. *Seja ρ uma seminorma contínua em X tal que $\rho \geq \rho_0$. Então existem constantes $m > 0$ e $M > 0$ tais que*

$$m \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i| \leq \rho\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_{k_i}\right) \leq M \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i| \tag{4.2}$$

sempre que $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ são números naturais e α_i são escalares para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Demonstração. Como C é limitado, existe $M > 0$ tal que $\rho(x_n) \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $M > \delta$. Sejam $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ números naturais e α_i escalares para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Claramente,

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_{k_i}\right) \leq M \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i| \quad ,$$

o que prova a segunda desigualdade de (4.2). Para mostrar a primeira desigualdade, seja

$$c_i = \frac{1}{2^{2i+1}} \left(\frac{\delta}{M}\right)^{i-1} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, 4.$$

Então $\sum_{i=1}^{4} c_i < 1$ e assim, existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $|\alpha_i| \geq c_i \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i|$. Seja i_0 o maior de tais i. Então

$$\begin{aligned}
\rho\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_{k_i}\right) &\geq \rho\left(\sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i x_{k_i}\right) - \rho\left(\sum_{i=i_0+1}^{4} \alpha_i x_{k_i}\right) \\
&\geq \delta|\alpha_{i_0}| - M \sum_{i=i_0+1}^{4} |\alpha_i| \\
&\geq \left(\delta c_{i_0} - M \sum_{i=i_0+1}^{4} c_i\right) \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i| \\
&= \delta \left(c_{i_0} - \frac{M}{\delta} \sum_{i=i_0+1}^{4} c_i\right) \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i| \\
&\geq \frac{1}{2} c_{i_0} \delta \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i| \\
&\geq \frac{1}{32} \frac{\delta^4}{M^3} \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i|.
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue da desigualdade triangular, a segunda segue da condição (ii) da página anterior, usando o fato de que $\rho \geq \rho_0$, e da escolha de M. A terceira segue da escolha de i_0 e a quarta é imediata. As duas últimas desigualdades seguem da escolha das constantes $c_1, \dots, c_4$. Portanto, podemos tomar

$$m = \frac{1}{32} \frac{\delta^4}{M^3}.$$

□

Vamos continuar a prova do teorema. Seja

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{co}\{0, x_n, x_{n+1}\}.$$

Veja que $D \subset C$. Além disso, segue do lema anterior o seguinte resultado:

Corolário 4.2.2. *Valem as seguintes afirmações:*

(a) (D, ρ_0) *é bi-Lipschitz isomórfico a* Δ.

(b) Para toda seminorma contínua ρ *em* X *satisfazendo* $\rho \geq \rho_0$, *a aplicação identidade de* D *é* $\rho_0 \to \rho$ *bi-Lipschitz.*

Agora, vamos provar dois lemas.

Lema 4.2.5. *A aplicação identidade de* D *é* $\rho_0 \to \rho$ *Lipschitz para toda seminorma contínua* ρ *sobre* X. *Em particular, a identidade de* D *é um* $\mathcal{T} \to \rho_0$ *homeomorfismo uniforme.*

Demonstração. Seja ρ uma seminorma contínua. Seja $\rho_1 = \rho + \rho_0$. Então ρ_1 é uma seminorma contínua satisfazendo $\rho_1 \geq \rho_0$. Pelo corolário anterior, a identidade de D é $\rho_0 \to \rho_1$ Lipschitz. Consequentemente , a identidade de D é uma fortiori $\rho_0 \to \rho$ Lipschitz. Segue que a identidade de D é $\rho_0 \to \mathcal{T}$ uniformemente contínua. Reciprocamente, como ρ_0 é uma seminorma contínua, segue que a identidade de D é $\tau \to \rho_0$ uniformemente contínua. □

Lema 4.2.6. *Existe uma retração uniformemente contínua* $r \colon X \to D$ *a qual é* $\rho_0 \to \rho_0$ *Lipschitz.*

Demonstração. Seja $I \colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \rho_0)$ a aplicação identidade. Seja Y o quociente $(X, \rho_0)/\rho_0^{-1}(0)$. Então, Y é um espaço normado. Seja $q \colon (X, \rho_0) \to Y$ a aplicação quociente. Então $q \circ I$ é uma aplicação linear contínua. Logo é uniformemente contínua. Além disso, I é um homeomorfismo uniforme de D sobre $I(D)$, e q é uma isometria de $I(D)$ sobre $q(I(D))$. Segue que $q(I(D))$ é bi-Lipschitz isomórfico a Δ. Pela Proposição 1 de [57], existe uma retração Lipschitz $r_0 \colon Y \to q(I(D))$. Daí,

$$r = (q \circ I\big|_D)^{-1} \circ r_0 \circ q \circ I$$

é uma retração uniformemente contínua de (X, τ) sobre D. Além disso, r é $\rho_0 \to \rho_0$ Lipschitz já que $q \circ I$ tem esta propriedade, r_0 é Lipschitz e $q \circ I\big|_D$ é uma isometria de (D, ρ_0) em Y. □

Agora vamos finalizar a prova do teorema. Como (D, ρ_0) é bi-Lipschitz isomórfico a Δ, pelo Lema 4.2.3 existe uma aplicação Lipschitz $g_0\colon (D, \rho_0) \to (D, \rho_0)$ sem redes que aproximem pontos fixos com respeito a ρ_0. Seja r a retração dada pelo lema anterior e seja

$$f = g_0 \circ r\big|_C.$$

Então f é uma auto-aplicação de C que é $\rho_0 \to \rho_0$ Lipschitz. Pelo Lema 4.2.5 f é $\rho_0 \to \rho$ Lipschitz para qualquer seminorma contínua ρ, com $f(C) \subset D$. Afirmamos que f não possui redes que aproximem pontos fixos. Para provar isto, é suficiente achar $\varepsilon > 0$ tal que $\rho_0(x - f(x)) \geq \varepsilon$ para todo $x \in C$. Isto pode ser feito imitando a prova do lema da página 634 de [57]:

Seja L uma $\rho_0 \to \rho_0$ constante de Lipschitz de f. Seja $\eta = \inf_{x \in q(I(C))} \|x - g_0(x)\|$ e seja

$$\varepsilon = \frac{\eta}{L+2}.$$

Fixe $x \in C$. Se $\mathrm{dist}_{\rho_0}(x, D) \geq \varepsilon$, então $\rho_0(x - f(x)) \geq \varepsilon$ já que $f(x) \in D$. Se $\mathrm{dist}_{\rho_0}(x, D) < \varepsilon$, existe $y \in D$ com $\rho_0(x - y) < \varepsilon$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho_0(x - f(x)) &\geq \rho_0(y - f(y)) - \rho_0(x - y) - \rho_0(f(x) - f(y)) \\
&\geq \eta - (1 + L)\rho_0(x - y) \\
&> (L + 2)\varepsilon - (1 + L)\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Uma Caracterização de Espaços de Banach contendo ℓ_1 em Termos de Aproximação Fraca de Soluções do CP-Problema

Conteúdo

5.1 Introdução

Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Consideremos o problema de Cauchy-Peano não-autônomo

$$u' = f(t, u), \quad t \in I \quad \text{e} \quad u(t_0) = u_0 \in E \tag{5.1}$$

onde $I = [0, T]$ e $f\colon [0, T] \times E \to E$ é um campo vetorial de Caracthéodory, isto é, um campo vetorial com as seguintes propriedades:

(f_1) $f(t, \cdot)\colon E \to E$ é contínua, para todo $t \in I$.

(f_2) $f(\cdot, x)\colon I \to E$ é mensurável, para todo $x \in E$.

Queremos introduzir uma noção de aproximação fraca de soluções (AFS, em resumo) para o problema (5.1). De posse desta noção, teremos como principal meta neste capítulo, obter uma caracterização da existência de AFS para o problema (5.1), em termos da ausência de ℓ_1-inclusões no espaço de Banach E. Para conseguirmos isto, iremos supor que o campo f do problema (5.1) pertence a uma certa classe de campos vetoriais de Caracthéodory. Iremos agora descrever esta classe de campos vetoriais, com a qual iremos trabalhar. Seja $I \subset \mathbb{R}$ como acima e denote por $\mathcal{X}(I, E)$ a família dos campos de Caracthéodory $f\colon I \times E \to E$ que satisfazem a seguinte condição de crescimento:

($\star$) $\|f(s,x)\|_E \leq \alpha(s)\varphi(\|x\|_E)$ para quase todo $s \in I$ e para todo $x \in E$, onde α e φ são tais que:

  (a) $\alpha \in L_1[0,T]$.

  (b) $\varphi\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ é uma função contínua não-decrescente satisfazendo

$$\int_0^T \alpha(s)ds < \int_0^\infty \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Vamos então enunciar uma definição de aproximação fraca de soluções.

Definição 5.1.1. *Seja* $f \in \mathcal{X}(I,E)$. *Dizemos que uma sequência* $(u_n) \subset C(I,E)$ *é uma aproximação fraca de soluções* (AFS, *em resumo*) *de* (5.1) *quando:*

(i) Cada u_n *é fortemente diferenciável* q.t.p. *em* I.

(ii) As sequências (u_n) *e* (u_n') *são limitadas em* $C(I,E)$.

(iii) A sequência (u_n) *é fracamente Cauchy e satisfaz* $u_n - \int f(s,u_n(s))ds \rightharpoonup u_0$ *em* $C(I,E)$.

(iv) $u_n(t) - u_0 \in \overline{\operatorname{span}}(f(I \times E))$ *para todo* $t \in I$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 5.1.1. *O Problema* (5.1) *tem uma* AFS *para* $f \in \mathcal{X}(I,E)$ *se, e somente se,* E *não contém um subespaço isomórfico a* ℓ_1.

Este teorema é uma espécie de generalização do Teorema 4.2 em [7]. A prova apresentada aqui utiliza três importantes resultados de Análise Funcional:

(1) Uma caracterização fundamental de compacidade fraca em $L_\infty(\mu, E)$, devida a Schlüchtermann [72].

(2) Uma caracterização de reflexividade devida a Cellina [20].

(3) O famoso ℓ_1-teorema de Rosenthal [69].

5.2 Prova do Teorema 5.1.1

Necessidade.

Suponha que X é um subespaço de E isomórfico a ℓ_1. Logo, X não é reflexivo. Segue então, de um resultado de Cellina [20], que existe um funcional linear contínuo $\vartheta \in B_{X^*}$, com $\|\vartheta\| = 1$, e uma aplicação contínua $g\colon B_X \to B_X$ que é livre de pontos fixos e satisfaz a igualdade $\langle \vartheta, g(x) \rangle = \frac{1}{2}(\langle \vartheta, x \rangle + 1)$, para todo $x \in B_X$. Seja $G\colon E \to B_X$ uma extensão contínua de g para E, com imagem em B_X. Seguindo Cellina [20], definimos um campo vetorial contínuo $f_G\colon \mathbb{R} \times E \to E$ por

$$f_G(t,x) = \begin{cases} 2tG(x/t^2), & \text{se} \quad t \neq 0, \\ 0, & \text{se} \quad t = 0. \end{cases}$$

Note que

$$\|f_G(t,x)\|_E \leq 2|t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E. \tag{5.2}$$

Assim, $f_G \in \mathcal{X}(\mathbb{R}, E)$, com $\alpha(t) = 2|t|$ e $\varphi \equiv 1$. Em [20], Cellina provou que não existe solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) &= f_G(t, u(t)), \\ u(0) &= 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Isto equivale a dizer que a equação integral

$$u(t) = \int_0^t f_G(s, u(s))ds \tag{5.4}$$

não tem soluções.

Afirmação 5.2.1. *A equação* (5.3) *não tem* AFS.

De fato, suponha por contradição, que (5.3) possui uma AFS. Então, para algum intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$, contendo 0, existe uma sequência $(u_n) \subset C(I, E)$ satisfazendo as condições $(i)-(iv)$ da Definição 5.1.1. Como $f_G(I \times E) \subset X$, segue, da Definição 5.1.1-(iv), que $u_n(t) \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in I$. Além disso, pela Definição 5.1.1-(iii), segue que

$$u_n(t) - \int_0^t f_G(s, u_n(s))ds \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad X, \quad \forall t \in I.$$

Como $X \approx \ell_1$, segue que X possui as mesmas propriedades de ℓ_1. Assim, X tem a propriedade de Schur e é $\sigma(X, X^*)$- sequencialmente completo. Então, para cada t,

$$u_n(t) - \int_0^t f_G(s, u_n(s))ds \to 0 \quad \text{em} \quad X. \tag{5.5}$$

Por outro lado, segue da Definição 5.1.1-(iv), que cada sequência $(u_n(t))_n$ é fracamente de Cauchy em X. Fixe $t \in I$. Como X é $\sigma(X, X^*)$- sequencialmente completo, segue que $(u_n(t))$ converge fracamente, a assim fortemente, para algum $u(t) \in X$. Usando a desigualdade em (5.2) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue de (5.5) que $u(t) = \int_0^t f_G(s, u(s))ds$, para todo $t \in I$. Logo, $u \in C(I, E)$ e u é uma solução de (5.4). Esta contradição encerra a prova da necessidade do teorema.

Suficiência.

A estratégia é mostrar que a aplicação $F\colon C(I,E) \to C(I,E)$ dada por

$$F(u)(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))ds, \quad t \in I$$

tem uma sequência que aproxima pontos fixos fracamente, isto é, uma sequência (u_n) tal que $u_n - F(u_n) \rightharpoonup 0$ em $C(I, E)$. Tal sequência será uma AFS de (5.1). Com este objetivo em mente, consideremos os conjuntos A, B e C definidos abaixo:

$$\begin{aligned} A &= \{u \in C(I,E) \colon \|u(t)\|_E \le b(t) \text{ q.t.p em I}\}, \\ B &= \{v \in C(I,E) \colon v(I) \subset W, \|v(t)\| \le \alpha(t)\varphi(b(t)) \text{ q.t.p. em I}\}, \\ C &= \left\{u \in A \colon u(t) = u_0 + \int_0^t \hat{u}(s)ds, \text{ q.t.p em I para algum } \hat{u} \in B\right\}. \end{aligned}$$

onde $W = \overline{span}(f(I \times E))$ e $b\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $b(t) = J^{-1}\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)$, sendo $J(z) = \int_{\|u_0\|_E}^z \frac{ds}{\varphi(s)}$. Note que A e B são subconjuntos convexos fechados de $C(I,E)$. Já o conjunto C é limitado e convexo. Além disso, note que $F(C) \subset C$.

Afirmação 5.2.2. F *é demicontínuo.*

De fato, suponha que $u_n \to u$ em C. Devemos mostrar que $F(u_n) \rightharpoonup F(u)$ em $C(I, E)$. Por hipótese , $u_n(t) \to u(t)$ em E para todo $t \in I$. Como f é Carathéodory, segue que $f(t, u_n(t)) \to f(t, u(t))$ em E q.t.p. em I. Por outro lado, a condição (f_2) da definição de campo de Caracthéodory mostra que $\|f(t, u_n(t))\|_E \le b'(t)$ para todo $t \in I$. O Teorema da Convergência Dominada nos dá que

$$\int_0^t \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|_E ds \to 0, \ \forall t \in I.$$

Daí, $F(u_n)(t) \to F(u)(t)$ para todo $t \in I$. Agora precisaremos do seguinte lema.

Lema 5.2.1. $K = \{F(u_n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ *é fracamente relativamente compacto.*

Demonstração. Para provar este lema, precisaremos da seguinte caracterização de compacidade fraca em $L_\infty(I, E)$(veja o Teorema 2.7 em [72]).

Teorema 5.2.1. *Seja* (Ω, Σ, μ) *um espaço medida finito e positivo. Para um subconjunto limitado* $K \subset L_\infty(\mu, E)$ *as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) K *é fracamente relativamente compacto.*

(b) Para toda sequência $(\nu_n) \subset K$ *existem uma subsequência* (w_i) *de* (ν_n)*, uma função* $w \in L_\infty(\mu, E)$ *e um conjunto* $N \subset \Omega$ *com* $\mu(N) = 0$*, tais que:*

(i) Para todo $t \in \Omega \backslash N$*,* $w_i(t) \to w(t)$ *fracamente em* E.

(ii) Para toda sequência $(x_j^*) \subset B_{E^*}$ *e para toda sequência* $(t_j) \subset \Omega \backslash N$*, existem subsequências* $(x_{j_k}^*)$ *e* (t_{j_k}) *tais que*

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{k\to\infty} \langle x_{j_k}^*, (w_i - w)(t_{j_k}) \rangle = 0.$$

Sejam (ν_i) qualquer subsequência de $(F(u_n))$ e (w_i) qualquer subsequência de (ν_i). Seja $w = F(u)$, e tome qualquer conjunto $N \subset I$ com $|N| = 0$. Já provamos que $w_i(t) \to w(t)$, para todo $t \in I\backslash N$. Assim, a condição (i) do Teorema 5.2.1 é cumprida. Agora, seja (x_j^*) qualquer sequência na bola unitária B_{E^*} de E^*, e seja (t_j) qualquer sequência de números reais em $I\backslash N$. Note que

$$|\langle x_j^*, (w_i - w)(t_j) \rangle| \leq \int_0^T \|f(s, u_{m_I}(s)) - f(s, u(s))\|_E ds,$$

onde estamos assumindo que $w_i = F(u_{m_i})$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^T \|f(s, u_{m_i}(s) - f(s, u(s))\|_E ds = 0, \tag{5.6}$$

e assim,

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} |\langle x_j^*, (w_i - w)(t_j) \rangle| = 0.$$

Logo, obtemos a hipótese (ii) do Teorema 5.2.1, dadas as arbitrariedades das sequências (x_j^*) e (t_j). Portanto, K é fracamente relativamente compacto em $L_\infty(I, E)$, o que encerra a prova do lema.

□

O Lema 5.2.1 implica que para alguma subsequência (u_{n_k}) de (u_n), a sequência $(F(u_{n_k}))$ converge fracamente para algum $\nu \in L_\infty(I, E)$. Segue, pelo Teorema 2.11 em [79], que $F(u_{n_k})(t) \rightharpoonup \nu(t)$ em E q.t.p. em I. Como a topologia fraca é Hausdorff, segue que

$v \equiv F(u)$ q.t.p. em I. Portanto, $F(u_n)$ converge fracamente para $F(u)$ em $C(I, E)$ e isto encerra a prova da Afirmação 5.2.2.

Afirmação 5.2.3. F *possui uma sequência que aproxima fracamente pontos fixos em* C.

Para provar esta afirmação, necessitaremos do seguinte lema.

Lema 5.2.2. *Sejam* X *um espaço de Banach,* $C \subset X$ *um conjunto convexo limitado e* $F \colon C \to \overline{C}$ *uma aplicação demicontínua. Suponha que* C *não contém uma cópia isomórfica de* ℓ_1. *Então, existe uma sequência* (u_n) *em* C *tal que* $u_n - F(u_n) \rightharpoonup 0$ *em* X.

Demonstração. Este lema é uma consequência direta da Proposição 3.7 em [9]. □

Vamos voltar nossa atenção para a prova do Teorema 5.1.1. Como I não é disperso e como X não contém uma cópia isomórfica de ℓ_1 segue, de um resultado de Cembranos [21], que $C(I, x)$ também não contém qualquer cópia isomórfica de ℓ_1. Assim, pelo Lema 5.2.2, existe uma sequência (u_n) em C tal que $u_n - F(u_n) \rightharpoonup 0$ em $C(I, E)$. Isto encerra a prova da afirmação 5.2.3.

Afirmação 5.2.4. *A sequência* (u_n) *obtida na Afirmação 5.2.3 é uma* AFS *para o problema* (5.1).

Com efeito, as condições $(i) - (ii)$ e (iv) da Definição 5.1.1 seguem do fato de que a sequência (u_n) pertence a C. Passando a uma subsequência se necessário, o item (iii) é uma consequência direta do ℓ_1-teorema de Rosenthal [69] e do fato de que

$$u_n - F(u_n) \rightharpoonup 0 \text{ em } C(I, E).$$

Isto encerra a prova da Afirmação 5.2.4. Portanto, a prova do Teorema 5.1.1 está completa.

Referências Bibliográficas

[1] AMBROSETTI, A. Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, v.39, p. 349-360, 1967.

[2] ANDRES, J. ; GABOR, G. ; GORNIEWICZ, L. Boundary value problems on infinite intervals. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 351, No 12, p. 4861-4903, 1999.

[3] ARINO, O. ;GAUTIER, S. ; PENOT, J.P. A fixed point theorem for sequentially continuous mappings with application to ordinary differential equations. *Funkcial. Ekvac.*, v.27, p. 273-279, 1984.

[4] ARSOVE, M. ; EDWARDS, R. Generalised bases in topological linear spaces. *Stud. Math.*, v.19, p. 95-113, 1958.

[5] ASTALA, K. On Peano's theorem in locally convex spaces. *Studia Math*, v. 73, p. 213-223, 1982.

[6] ARGYROS, S. A. ;DODOS, P. ; KANELLOPOULOS, V. Unconditional families in Banach spaces. *Math. Annalen*, v. 341, p. 15-38, 2008.

[7] BARROSO, C. S. The approximate fixed point property in Hausdorff topological vector spaces and applications. *Discrete Cont. Dyn. Syst.*, v. 25, p. 467-479, 2009.

[8] BARROSO C. S. ; LIN, P. K. On the weak approximate fixed point property. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 365, p. 171-175, 2010.

[9] BARROSO, C. S. ; KALENDA, O. F. K. ; LIN, P. K. On the weak approximate fixed point property in abstract spaces. *Math. Z.*, v.271, no. 3-4, p.1271-1285, 2012.

[10] BARROSO, C. S. ; KALENDA, O. F. K. ; REBOUÇAS, M. P. Optimal approximate fixed point results in locally convex spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, published online, 2012.

[11] BARROSO, C. S. ; MARROCOS, M. A. M. ; REBOUÇAS, M. P. An interplay between the weak form of Peano's theorem and structural aspects of Banach spaces. arXiv: 1207.6777 (Submitted), 2012.

[12] BARROSO, C. S. ; MOTA, C. Existence of complete vector topologies with prescribed conditions. *Arch. Math. (Basel)*, v. 94, no. 1, p. 73-84, 2010.

[13] BARROSO, C. S. ; REBOUÇAS, M. P. On some relationships between biorthogonal systems, linear topologies and the weak-AFPP. Submitted, 2012.

[14] BARROSO, C. S. ; BOTELHO, G. ; FÁVARO, V. V. ; PELLEGRINO, D. Lineability and spaceability for the weak form of Peano's theorem and vector-valued sequence spaces. To appear in *Proc. AMS*.

[15] BIEZUNER, R. J. *Análise funcional (notas de aula).* Belo Horizonte: UFMG, 2009.

[16] BOTELHO, G. ; DINIZ, D. ; PELLEGRINO, D. Lineability of the set of bounded linear non-absolutely summing operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 357, p. 171-175, 2009.

[17] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Piscataway: Springer, 2010.

[18] CARRERAS, P. P. ; BONET, J. Barreled Locally Convex Spaces. *North-Holland Mathematics Studies*, v.131, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[19] CAUTY, R. Solution du problème de point fixe de Schauder. (French) [Solution of Schauder's fixed point problem]. *Fund. Math.*, v. 170, no. 3, p. 231-246, 2001.

[20] CELLINA, A. On the nonexistence of solutions of differential equations in nonreflexive spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 78, p. 1069-1072, 1972.

[21] CEMBRANOS, P. Algunas propriedades del espacio de Banach C(K,X). Ph. D. Thesis, Universidad Complutense de Madrid, Madrid 1984.

[22] CORDUNEANU, C. Citive probleme globale referitoare la ecuatiile differentiale nelineare de ordinne al doilea. Acad. Rep. Pop. Rom., Fil. Iasi, Stud. Cer. St., Mat. 7, p. 1-7, 1956.

[23] CORDUNEANU, C. Existenta solutiilar marginuite pentru unele ecuatii differentiale de ordinue al doilea, Acad. Rep. Pop. Rom., Fil. Iasi, Stud. Cer. St., Mat. 7, p. 127-134, 1957.

[24] DIEUDONNÉ, J. Deux examples singuliers d'equations differentielles. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, v. 12B, p. 38-40, 1950.

[25] DOMAŃSKI, P. Nonseparable closed subspaces in separable products of topological vector spaces, and q-minimality. *Arch. Math. (Basel)*, v. 41, no. 3, p. 270-275, 1983.

[26] DUGUNDJI, J ; GRANAS, A. Fixed Point Theory. I. *Monografie Matematyczne*, v. 61, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWNPolish Scientific Publishers), Warsaw, 1982.

[27] FAN, K. A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem. *Math. Annal.* v. 142, p. 305-310, 1961.

[28] FABIAN, M. ; HABALA, P. ; HÁJEK, P. ; MONTESINOS, V. ; PELANT, J. ; ZIZLER, V. *Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry.* CMS Books in Mathematics, v. 8, Springer-Verlag, 2001.

[29] FOLLAND, G. B. *Real analysis. Modern techniques and their applications.* Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[30] GODUNOV, A. N. Peano's theorem in Banach spaces. *Funct. Anal. Appl.*, v. 9, p. 53-55, 1975.

[31] GRANAS, A. The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces, (I). *Rozpr. Mathematyczne*, v. XXX, p. 1-93, 1962.

[32] GRANAS, A. ; DUGUNDJI, J. *Fixed Point Theory.* New York: Springer Verlag, 2003.

[33] GRAZIEWICZ, W. Remarks on a Boundary Value Problem in Banach Spaces on the Half-line. *Fixed Point Theory and its Applications*, Banach Center Publications, v. 77. Warszawa: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, 2007.

[34] HADZIC, O. Some fixed point and almost fixed point theorems for multivalued mappings in topological vector spaces. *Nonlinear Anal.*, v.5, p. 1009-1019, 1981.

[35] HADZIC, O. Almost fixed point and best approximations theorems in H-spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.*, v. 53, no. 3, p. 447-454, 1996.

[36] HAGLER, J. N. ; JOHNSON, B. W. On Banach spaces whose dual balls are not weak* sequentially compact. *Israel J. Math.*, v. 28, p. 325-330, 1977.

[37] HÁJEK, P. ; JOHANIS, M. On Peano's Theorem in Banach spaces. *J. Differential Equations*, v. 249, p. 3342-3351, 2010.

[38] HÁJEK, P. ; SANTALUCÍA, V. M. ; VANDERWERFF, J. ; ZIZLER, V. *Biorthogonal systems in Banach spaces*. CMS Books in Mathematics, Canadian Mathematical Society, Springer-Verlag, 2007.

[39] HAZEWINKEL, M. ; VEL, M. V. On almost-fixed-point theory. *Canad. J. Math.*, v. 30, p. 673-699, 1978.

[40] HIMMELBERG, C. J. Fixed points of compact multifunctions. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 38, p. 205-207, 1972.

[41] IDZIK, A. On γ-almost fixed point theorems. The single-valued case. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, v. 35, no. 7-8, p. 461-464, 1987.

[42] IDZIK, A. Almost fixed point theorems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 104, p. 779-784, 1988.

[43] ISAC, G. Quasi-bounded mappings and complementarity problems depending of parameter. *J. Global Optim.*, v. 47, p. 355-367, 2010.

[44] JARCHOW, H. *Locally convex spaces*. Mathematische Leitfden. [Mathematical Textbooks]. Stuttgart: B. G. Teubner, 1981.

[45] JOHNSON, W. B. ; ROSENTHAL, H. P. On weak* basic sequences and their applications to the study of Banach spaces. *Studia Math.*, v. 43, p. 77-92, 1972.

[46] KALENDA, O. F. K. Spaces not containing ℓ_1 have weak approximate fixed point property. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 373, p. 134-137, 2011.

[47] KALTON, N. J. Bases in Non-closed Subspaces of ω. *J. London Math. Soc.*, v. 3, p. 711-716, 1971.

[48] KALTON, N. J. Schauder bases and reflexivity. *Studia Math.*, v. 38, p. 255-266, 1970.

[49] KARTSATOS, A. G. The Leray-Schauder theorem and the existence of solutions to boundary value problems on infinite intervals. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 23, p. 1021-1029, 1973/74.

[50] KARTSATOS, A. G. A boundary value problem on an infinite interval. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, v. 19, p. 245-252, 1974/75.

[51] KITSON, D. ; TIMONEY, R. M. Operator ranges and spaceability. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 378, p. 680-686, 2011.

[52] KNESER, A. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen Werthen des Arguments. *J. Reine Angen. Math 1*, v. 116, p. 178-212, 1896.

[53] LASOTA, A. ; YORKE, J. A. The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach spaces. *J. Differential Equations*, v. 13, p. 1-12, 1973.

[54] LIMA, E. L. *Curso de análise*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[55] LIMA, E. L. *Curso de análise v. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[56] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

[57] LIN, P. K. ; STERNFELD, Y. Convex sets with the Lipschitz fixed point property are compact. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 93, p. 633-639, 1985.

[58] LIPECKI, Z. Remarks on independent sequences and dimension in topological linear spaces. *Collect. Math.*, v. 49, no. 1, p. 53-65, 1998.

[59] LOBANOV, S. G. On Peano's theorem in Fréchet spaces. *Differentsial'nye Uravneniya*, v. 28, p. 10-86, 1992.

[60] MUJICA, J. Separable quotients of Banach spaces. *Rev. Math.*, v.10, p. 299-330, 1997.

[61] OLIVEIRA, C. R. *Introdução à análise funcional*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[62] PARK, S. Almost fixed points of multimaps having totally bounded ranges. *Nonlinear Anal.*, v. 51, no. 1, p. 1-9, 2002.

[63] PARK, S. ; TAN, D. H. Remarks on the Schauder-Tychonoff fixed point theorem. *Vietnam J. Math.*, v. 28, no. 2, p. 127-132, 2000.

[64] PECK, N. T. ; PORTA, H. Linear topologies which are suprema of dual-less topologies. *Studia Math.*, T .XLVII, p. 63-73, 1973.

[65] PEŁCZYŃSKI, A. On Banach spaces containing $L_1(\mu)$. *Studia Math.*, v. 30, p. 231-246, 1968.

[66] PRZERADZKI, B. The existence of bounded solutions for differential equations in Hilbert spaces. *Ann. Polon. Math.*, v. 56, p. 103-121, 1992.

[67] RABIER, P. J. ; STUART, C. A. A Sobolev Space Approach to Boundary Value Problems on the Half-line. *Communications in Contemporary Mathematics*, v. 7, No. 1, p. 1-36, 2005.

[68] REED, M. ; SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics I. Functional Analysis*. Academic Press, 1980.

[69] ROSENTHAL. H. P. A characterization of Banach spaces containing ℓ_1. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, v. 71, p. 2411-2413, 1974.

[70] RZEPECKI, B. An existence theorem for bounded solutions of differential equations in Banach spaces. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, v. 73, p. 89-94, 1985.

[71] SCHAEFER, H. H. *Topological vector spaces. Third printing corrected. Graduate Texts in Mathematics, v. 3*. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1971.

[72] SCHLÜCHTERMANN, G. Weak compactness in $L_\infty(\mu, X)$. *J. Funct. Anal.*, v. 125, p. 379-388, 1994.

[73] SHAPIRO, J. H. On convexity and compactness in F-spaces with bases,

[74] SHKARIN, S. A. On a problem of O. G. Smolyanov related to Peano's infinite-dimensional theorem. *Differentsial'nye Uravneniya*, v. 28, p. 10-92, 1992.

[75] SHKARIN, S. A. On Osgood theorem in Banach spaces. *Math. Nahchr.*, v. 257, p. 87-98, 2003.

[76] SCHAUDER, J. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Math.*, v. 2, p. 171-180, 1930.

[77] SINGER, I. *Bases in Banach spaces*, v. II. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1961.

[78] ŚLIWA, W. The separable quotient problem and the strongly normal sequences. *J. Math. Soc. Japan*, v. 64, p. 387-397, 2012.

[79] TEIXEIRA, E. V. Strong solutions for differential equations in abstract spaces. *J. Differential Equations*, v. 214, p. 65-91, 2005.

[80] TYCHONOFF, A. Ein Fixpunktsatz. *Math. Ann.*, v. 111, p. 767-776, 1935.

[81] WEALBROECK, L. *Topological vector spaces and Algebras*. Springer-Verlag, Lecture Notes, 230, 1971.

[82] ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part 1: Fixed-Point Theorems*. New York: Springer, 1986.

[83] ZIZLER, V. *Nonseparable Banach spaces. Handbook of the geometry of Banach spaces*, v. 2, p. 1743-1816. Amsterdam: North-Holland, 2003.

.