UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA - CAEN
MESTRADO PROFISSIONAL EM ECONOMIA - MPE

EDUARDO RAYBI SALES RAMOS

CONSTRUÇÃO DE PORTIFÓLIOS EFICIENTES ATRAVÉS DO MODELO DE MÚLTIPLOS FATORES

FORTALEZA
2015

EDUARDO RAYBI SALES RAMOS

CONSTRUÇÃO DE PORTIFÓLIOS EFICIENTES ATRAVÉS DO MODELO DE MÚLTIPLOS FATORES

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Economia – Mestrado Profissional – da Universidade Federal do Ceará - UFC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia. Área de Concentração: Finanças e Seguros.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Luís Lemos Marinho.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R142c Ramos, Eduardo Raybi Sales.
Construção de portifólios eficientes através do modelo de múltiplos fatores / Eduardo Raybi Sales Ramos. – 2015.
30 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Mestrado Profissional em Finanças e Seguro, Fortaleza, 2015.
Orientação: Prof. Dr. Emerson Luís Lemos Marinho.

1. Modelo de Índice Simples. 2. Modelo de Múltiplo Fatores. 3. Portfólio Eficiente. 4. Risco. I. Título.

CDD 332

EDUARDO RAYBI SALES RAMOS

CONSTRUÇÃO DE PORTIFÓLIOS EFICIENTES ATRAVÉS DO MODELO DE MÚLTIPLOS FATORES

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Economia – Mestrado Profissional – da Universidade Federal do Ceará - UFC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia. Área de Concentração: Finanças e Seguros.

Aprovada em: **13 de Março de 2015**.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Emerson Luís Lemos Marinho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Andrei Gomes Simonassi
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Paulo Rogério Faustino Matos
Universidade Estadual do Ceará - UFC

AGRADECIMENTOS

A Deus, Senhor de todas as coisas.

À minha família, pelo apoio incondicional e compreensão dos momentos de ausência em especial a minha esposa Renata Borges, a minha mãe Maria de Fátima e aos meus avós Isabel Sales e Afrânio Sales.

Ao professor Emerson Luís Lemos Marinho, pelo voto de confiança em desenvolver sua ideia e por sua atenção e orientação.

Aos professores Andrei Gomes Simonassi e Paulo Rogério Faustino Matos, por aceitarem prontamente o convite de participar da banca examinadora e por suas valiosas contribuições para a melhoria deste documento.

RESUMO

Esta Dissertação tem como objetivo principal a construção de portfólios eficientes de acordo com o modelo média-variância devido a Markowitz (1952). No entanto, mesmo com o avanço tecnológico na área de computação, a determinação das proporções ótimas a serem investidas podem demandar bastante tempo ou mesmo falhar quando a quantidade de ativos é razoavelmente grande. Neste sentido, como alternativa a esse modelo, utiliza-se o modelo de multifatores para a obtenção de portfólios que serão aproximações dos portfólios eficientes de Markowitz. Neste tipo de modelo a simplicidade se baseia no pequeno número de parâmetros a serem estimados em comparação ao de Markowitz. Inicialmente se emprega o Modelo de Índice Simples (MIS) onde se supõe a existência de um único fator comum que explica os retornos dos ativos. Neste modelo, os ativos serão um subconjunto de ações da Bolsa de Valores de São Paulo e o fator será o IBOVESPA que é o resultado de uma carteira teórica de ativos elaborada de acordo com os critérios estabelecidos em sua metodologia. Em seguida, com o mesmo objetivo e com a mesma base de dados, emprega-se um modelo multifator considerando agora dois fatores explicativos dos retornos desses mesmos ativos. Esses dois fatores foram o IBOVESPA e a produção industrial mensal (PIM).

Palavras-Chave: Modelo de Índice Simples. Modelo de Múltiplo Fatores. Portfólio Eficiente. Risco.

ABSTRACT

This dissertation has as main objective the construction of efficient portfolios according to the mean-variance model due to Markowitz (1952). However, even as technology advances in computing, determining the optimal proportions to invest can take a long time or even fail when the amount of assets is reasonably large. In this sense, as an alternative to this model, the multifactor model is used to obtain portfolios that will be approximations of the efficient Markowitz portfolios. In this type of model simplicity is based on the small number of parameters to be estimated compared to Markowitz. Initially, the Single Index Model (SIM) is employed, which assumes the existence of a single common factor that explains asset returns. In this model, the assets will be a subset of shares of the São Paulo Stock Exchange and the factor will be the IBOVESPA which is the result of a theoretical portfolio of assets prepared according to the criteria established in its methodology. Then, with the same objective and the same database, a multifactor model is employed, considering now two explanatory factors for the returns of these same assets. These two factors were IBOVESPA and monthly industrial production (MIP).

Keywords: Simple Index Model. Multiple Factors Model. Efficient portfolio. Risk.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IBOVESPA	Índice Bovespa, índice calculado pela BOVESPA
INPC	Índice Nacional de Preços ao Consumidor
IPCA	Índice de preços ao consumidor amplo
MIS	Modelo de Índice Simples
PIM	Produção Industrial Mensal Produção Física

LISTA DE SÍMBOLOS

$	Dólar
%	Porcentagem
£	Libra
¥	Ilene
€	Euro
§	Seção
©	Copyright
®	Marca Registrada

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O processo de alocação de recursos pode ser definida como um processo ou método de decisão a respeito de como distribuir a riqueza de determinado indivíduo em diversas classes de ativos (títulos públicos, contratos futuros, etc.), ou seja, em diversos grupos de ativos que possuam os mesmos atributos ou similaridades, como por exemplo relações de risco e retorno, entre outras similaridades. Além disso, para construirmos portfólios e administra-los é necessário definirmos as etapas do processo decisório, elaborando políticas de investimento, estratégias e monitoramento dos portfólios gerados a partir de características específicas de cada investidor, pois, cada portfólio refletirá o grau de aversão ao risco do investidor. Investidores, em geral, compreendem que existe uma forte relação entre risco e retorno, sendo que, para quanto maior o risco, espera-se um prêmio maior. Dessa forma, torna-se essencial e primordial a gestão de risco. Após minuciosa análise dos riscos atribuídos aos investimentos é que podemos começar a pensar na administração dos retornos.

A utilização de estratégias de investimentos que podem ser utilizadas pelos gestores de portfólios que dependerão diretamente das características de cada investidor (como o grau de aversão ao risco, por exemplo), podem ser divididas em 2 grupos: gestão ativa e passiva. A gestão ativa busca superar um determinado índice de referência (o *benchmark*). No caso da gestão passiva busca-se acompanhar a rentabilidade do *benchmark.*

Na gestão ativa de recursos, um dos modelos mais conhecidos relacionados à alocação de portfólio é o modelo Média - Variância desenvolvido pelo Markowitz (1952). Em seu trabalho pioneiro, desenvolveu um modelo que permite fazer a seleção de carteiras considerando o conflito entre retorno e risco sendo assim denominado de Média-Variância por utilizar o retorno esperado médio como medida de desempenho da carteira e a variância como medida de risco.

Além do mais, demonstrou matematicamente que a diversificação é uma estratégia positiva para os administradores ou gerentes de empresas na diminuição dos riscos. A elaboração mais simplificada da teoria de Markowitz passou a ser muito usada para a alocação ótima de uma carteira de ações. Pode-se dizer que a teoria de alocação de portfólio de Markowitz marcou o surgimento da moderna análise financeira.

No entanto, quando o número de ativos é relativamente muito grande, o tempo de computação das quantidades ótimas se mostra bastante expressivo ou mesmo incapaz de seus cálculos, mesmo com o surgimento de modernos computadores e avanços das técnicas computacionais.

Neste sentido, emprega-se neste estudo o modelo de múltiplos fatores como alternativa ao modelo de Markowitz para determinação de portfólios ótimos. A vantagem de seu uso é o pequeno número de parâmetros a serem estimados, facilitando assim a construção de carteira de ativos. Para se ter uma ideia desta dimensão, no caso de um portfólio com 50 ativos, no modelo de Markowitz precisa-se estimar 1.326 parâmetros enquanto no modelo com um único fator estima-se apenas 53 parâmetros.

Inicialmente, se supõe que os retornos dos ativos sejam explicados por um único fator. Daí, a razão de ser chamado de modelo de índice simples (MIS). Neste modelo considera-se um subconjunto de ativos da Bolsa de Valores de São Paulo e o fator explicativo é o IBOVESPA. Em seguida, com esta mesma base de dados, considera-se um modelo multifator utilizado o IBOVESPA e a produção industrial média mensal (PIM) como fatores explicativos (modelos com dois fatores).

Para a construção dessas carteiras se considera os retornos de 14 ativos da Bolsa de valores de São Paulo no período de julho de 2009 até julho de 2014. Desde que na construção dessas carteiras se pode aplicar ou tomar emprestado a uma taxa de juros livre de risco, essa última será a taxa de juros SELIC, Sistema Especial de Liquidação e de Custódia.

No que se segue, além desta introdução, capítulo 1, a composição desta dissertação está distribuída da seguinte forma: no segundo capítulo será exposto a metodologia e o embasamento necessário para a elaboração de portfólios eficientes pelo modelo exato de Markowitz bem como a metodologia alternativa presente na literatura de Haim Levy, de acordo com a visão da minimização da variância dos portfólios.

No terceiro capítulo serão abordados os testes estatísticos e matemáticos realizados, incluindo a elaboração do cálculo da Fronteira Eficiente através do referencial teórico de Markowitz bem como a elaboração dos portfólios providos do SIM, com um único fator e com dois fatores além de comparações entre os resultados.

No quarto capítulo serão apresentadas as conclusões do trabalho, bem como serão apresentadas às considerações finais.

2 METODOLOGIA

2.1 O modelo média-variância de Markowitz

O modelo de Markowitz é um modelo de otimização multi-objetivo usado para equilibrar o retorno esperado e o risco de um portfólio definido como o conjunto de ativos financeiros. Para um investidor, o retorno e a volatilidade do retorno dos ativos são aspectos cruciais na escolha de um portfólio. Markowitz usa medidas estatísticas de esperança e variância de retorno para descrever, respectivamente, os benefícios e os riscos associados a um investimento. Deste modo, o objetivo pode ser minimizar o risco para um dado nível de retorno esperado ou maximizar o retorno esperado para um dado nível de risco. Como mostrado por Markowitz, Matematicamente as soluções destes dois problemas são idênticas.

Em assim sendo, admiti-se que exista *n* ativos com risco e outro livre de risco. Em relação a este último ativo, supõe-se que o investidor possa tomar emprestado ou emprestar uma quantidade qualquer desse a uma mesma taxa de retorno. Nestes termos, o retorno esperado ER_p desse portfólio será:

$$ER_p = \mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) r_f,$$

em que μ_i é o retorno esperado do ativo *i*, x_i é a proporção investida *no i-ésimo* ativo com risco e, $(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)$, é a proporção investida ou tomada emprestada a uma taxa livre de risco r_f. O risco do retorno desse portfólio será mensurado pela sua variância denotada por σ_p^2. Logo, a variância do retorno do portifólio será calculada como:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i+1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>1}}^{n} x_i x_j \rho_{ij},$$

onde σ_i^2 é a variância do *i-ésimo* ativo com risco e, ρ_{ij} , a covariância entre o retorno do ativo *i* e o retorno do ativo *j*.

Portanto, minimizando a variância σ_p^2 para um fixado retorno esperado u_p, tem-se o seguinte *lagrangeano* para este problema de minimização:

$$L = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i+1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>1}}^{n} x_i x_j \rho_{ij} + \lambda\left[\mu_p - \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i - \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) r_f\right],$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. A derivação de *L* com relação às proporções ótimas a serem determinadas e com relação à λ, dá origem ao seguinte sistema de (*n+1)* equações:

$$2\sigma_1^2 + 2x_2\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{13} + \cdots + 2x_n\sigma_{1n} - \lambda(u_1 - r_f) = 0$$
$$2x_1\sigma_{21} + 2x_2\sigma_2^2 + 2x_3\sigma_{23} + \cdots + 2x_n\sigma_{1n} - \lambda(u_2 - r_f) = 0$$
$$\vdots$$
$$2x_1\sigma_{n1} + 2x_2\sigma_{n2} + 2x_3\sigma_{n3+} + \cdots + 2x_n\sigma_n^2 - \lambda(u_n - r_f) = 0$$
$$\mu_p - \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i - \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) r_f = 0$$

Das *n* primeiras equações do sistema acima, observe que para um ativo qualquer *i* a equação correspondente pode ser escrita como:

$$y_i\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} y_i\sigma_{ij} = \mu_i - r_f \quad \textit{para i=1,2,3,....,n,} \qquad (1)$$

em que $y_i = \frac{2}{\lambda}x_i$.

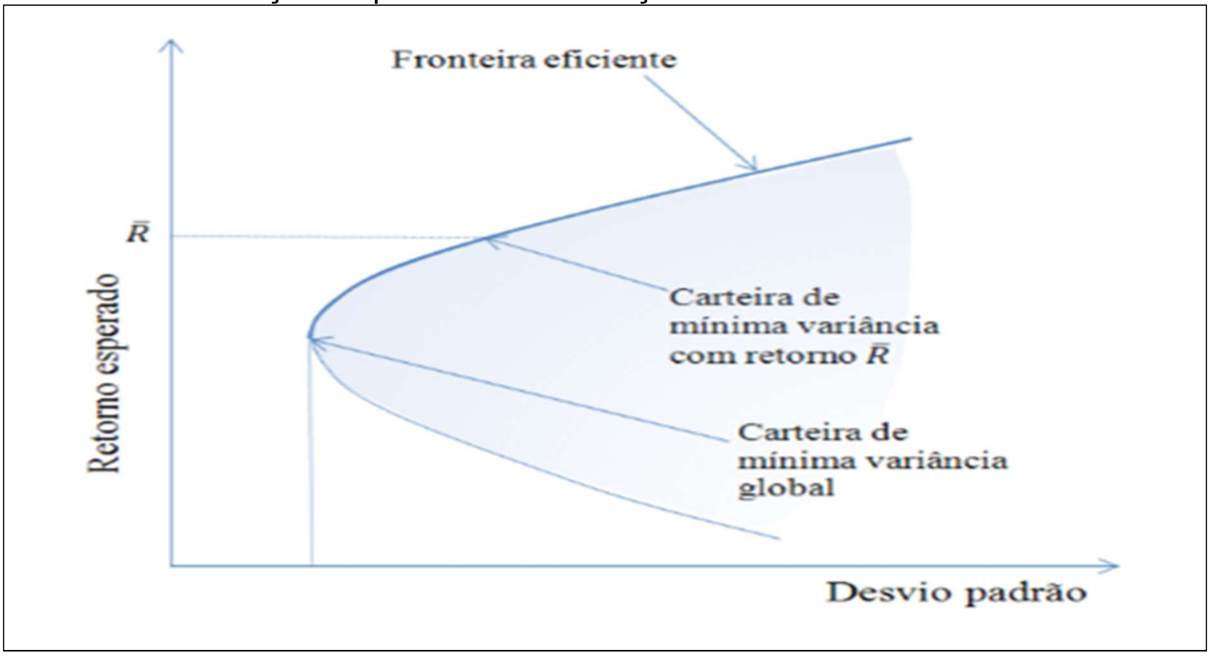
Uma maneira interessante de traçar a fronteira eficiente de portfólios com apenas ativos com risco é a seguinte: variando a taxa livre de risco resolve-se o sistema (1) de equações para cada taxa de juros. Assim, obtêm-se as proporções $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Para obter as proporções ótimas do portfólio com apenas ativos com risco para cada taxa livre de risco, normalizam-se essas proporções na forma $z_i = \frac{y_i}{\sum_1^n y_i}$ onde agora $\sum_1^n z_i = 1$. Desse modo, a média e a variância do retorno desse portifólio serão, respectivamente, iguais a:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} z_i\,\mu_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i\,\sigma_i^2 + 2\sum_{i+1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j>1}}^{n} z_i z_j \rho_{ij}$$

Neste sentido, consegue-se construir a fronteira eficiente de portfólios que apresenta a configuração como na figura a seguir:

Gráfico 1 – Estilização do problema de alocação



Fonte: Elaboração do autor
Nota: $\bar{R}$ representa o μ_p

2.2 Modelo de índice simples

A evidência empírica tem mostrado que quando o mercado sofre uma oscilação positiva (negativa), a grande maioria dos retornos dos ativos covariam no mesmo sentido. Essa característica sugere que os retornos dos ativos são correlacionados a algum fator comum que pode representar características econômicas, políticas ou outras situações que afetem os retornos dos ativos.

Nestes termos, admite-se que o retorno do ativo tenha a seguinte representação:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta I_t + \mu_{it}$$

onde, R_{it} é o retorno do ativo *i* no período *t*, I_t representa o valor do fator comum no período *t* que afeta todos os ativos e, μ_{it} um erro aleatório. O parâmetro β a ser estimado é chamado de beta do ativo com referência ao fator comum I_t.

As hipóteses básicas por trás deste modelo são as seguintes:

i) O erro aleatório μ_{it} possui média (retorno esperado) igual a zero, ou seja;

$$E\mu_{it} = 0$$

ii) O erro aleatório μ_{it} é não correlacionado com o fator comum, I_t, isto é:

$$Cov(\mu_{it}, I_t) = E|\mu_i(I_t - EI_t)| = 0$$

iii) A hipótese mais crucial do modelo é que os erros aleatórios dos ativos *i* e *j* não são correlacionados, isto é;

$$Cov(\mu_{it}, \mu_{jt}) = E\left[(\mu_{it} - E\mu_{it})(\mu_{jt} - E\mu_{jt})\right] = E\mu_{it}\mu_{jt} = 0,$$

desde que $E\mu_{it} = 0$ e $E\mu_{jt} = 0$.

Em função dessas hipóteses obtêm-se os seguintes resultados:

a) O retorno esperado μ_i de cada ativo é dado por:

$$\mu_{it} = ER_{it} = E(\alpha_i + \beta_i I_{it} + \mu_{it}) = \alpha_i + \beta_i I_t$$

b) A variância do retorno de cada ativo é calculada como:

$$\sigma_i^2 = E(I_t - EI_t)^2 = E\left(\alpha_1 + \beta_i I_t + \mu_i - (\alpha_i + \beta_i I_t)\right)^2$$

$$\sigma_i^2 = E[\beta_i(I_t - EI_t) + \mu_{it}]^2$$

$$\sigma_i^2 = {\beta_i}^2 E(I_t - EI_i)^2 + E{\mu_{it}}^2 + 2\beta_i E[\mu_{it}(I_t - EI_t)]$$

$$\sigma_i^2 = {\beta_i}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{u_i}^2 \qquad (2)$$

desde que, por hipótese, $\mathrm{E}{\mu_{it}}^2 = \sigma_{u_i}^2$ e $E|\mu_{it}(I_t - EI_t)| = 0$.

c) A covariância entre o retorno do ativo *i* e o retorno do ativo *j* para $i \neq j$ é igual a:

$$\sigma_{ij} = E\left[\left(\alpha_i + \beta_i I_t + \mu_{it} - (\alpha_i + \beta_i Et)\right)\left(\alpha_j + \beta_j I_t + \mu_{jt} - \left(\alpha_j + \beta_j EI_{jt}\right)\right)\right]$$

$$\sigma_{ij} = E\left[(\beta_i(I_t - EI_t) + \mu_{it})\left(\beta_j(I_t - EI_t) + \mu_{jt}\right)\right]$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_I^2 + \beta_j E[\mu_i(I_t - EI_t)] + \beta_i E\left[\mu_{jt}(I_t - EI_t)\right] + E\mu_{it}\mu_{jt}$$

Como $E\mu_{it}\mu_{jt} = 0$, $E\mu_{it} = 0$ e $E\mu_{jt} = 0$ tem-se que:

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_I^2 \qquad (3)$$

Dadas estas propriedades, o número de parâmetros a serem estimados para a construção de um portfólio com *n* ativos com risco será igual a *3n+3*. Com efeito, pois há a necessidade de se estimar os seguintes parâmetros:

$$\alpha_i\ ,\ i = 1,2,3, \dots \dots n;$$

$$\beta_i\ , i = 1,2,3, \dots \dots n;$$

$$\sigma_{ui}^2\ , i = 1,2,3, \dots \dots n;$$

Adicionalmente, tem-se que estimar EI_t, σ_I^2 e a taxa de retorno do ativo livre de risco.

Para se obter uma aproximação do portfólio eficiente de Markowitz usando o modelo MIS basta substituir as expressões (2) e (3) na expressão (1). Nesse caso obtém-se que:

$$y_i\beta_i^2\sigma_I^2 + y_i\sigma_{\mu i}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} y_j\,\beta_i\beta_j\sigma_I^2 = \mu_i - r_f$$

Esta expressão pode ainda ser reescrita como:

$$y_i\sigma_{\mu i}^2 + \beta_i\sigma_{\mu i}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} y_j\,\beta_j = \mu_i - r_f$$

Resolvendo para y_i tem-se que:

$$y_i = \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_{\mu i}^2} - \frac{\beta_i\sigma_I^2}{\sigma_{\mu i}^2}\sum_{j}^{n} y_j\,\beta_j \qquad (4)$$

Multiplicando ambos os lados da expressão (4) por β_j e somando em *j*:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j\beta_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu_i - r_{f)}}{\sigma_{\mu j}^2}\beta_j/(1 + \sigma_I^2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j^2}{\sigma_{\mu j}^2})$$

Substituindo esse resultado na expressão (4) obtêm-se finalmente as proporções ótimas y_i:

$$y_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{\mu i}^2}[\frac{\mu_i - r_f}{\beta_i} - \frac{\sigma_I^2\sum_{j=1}^{n}\frac{(\mu_i - r_{f)}}{\sigma_{\mu j}^2}\beta_j}{1 + \sigma_I^2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j^2}{\sigma_{\mu j}^2}}] \qquad (5)$$

Normalizando essas proporções na forma $z_i = \frac{y_i}{\sum_1^n y_i}$ encontram-se as proporções ótimas do portfólio com apenas ativos com risco.

2.3 Modelo com múltiplos fatores

Modelos com Múltiplos Fatores, assim como o modelo com apenas um índice, tentam explicar as variações dos retornos dos ativos em função desses fatores. A técnica busca um conjunto de fatores econômicos ou setoriais comuns a todos os ativos que expliquem a variação dos preços das ações, além daquela explicada pelo próprio mercado.

De uma forma geral o retorno do ativo R_{it} pode ser relacionado com os vários fatores I_{jt} conforme a seguinte relação:

$$R_{it} = \alpha_i + \textstyle\sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} I_{jt} + \mu_{it},$$

em que:

R_{it} : é a taxa de retorno do ativo *i* no período *t;*

α_i : é o componente do retorno do ativo *i* que é independente do fator I_{jt};

β_{ij} : mede a sensibilidade do retorno do ativo *i*, R_{it}, à variações do fator I_{jt};

I_{jt} : representa o valor do fator *j* no período *t* comum a todos os ativos;

μ_{it} : é um erro aleatório que por hipótese possui média iguala zero e variância constante, ou seja, $E\mu_{it}$= 0 e Var(μ_{it}) = $\sigma^2_{u\,i}$.

As hipóteses que compõem o modelo com múltiplos fatores são as mesmas levantadas no modelo com um único fator. A única diferença é que o erro aleatório é agora não correlacionado com todos os fatores I_{jt} para todo *j*. Assim através do uso destas hipóteses podem-se obter as seguintes propriedades:

a) O retorno esperado do ativo *i* é igual a:

$$ER_{it} = \mu_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} I_{jt}$$

b) A variância do retorno do ativo *i* pode ser calculada como:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}^2\, \sigma_{Ij}^2 + \sigma_{ui}^2 \qquad (6)$$

c) covariância entre o retorno do ativo *i* com o retorno do ativo *j* é dada por:

$$\sigma_{ij} = \textstyle\sum_{m=1}^{k} \beta_{mi}\, \beta_{mj} \sigma_{Im}^2 \qquad (7)$$

Observe que nesse caso geral o número de parâmetros a serem estimados será *n(k+2)+2k+1* onde *n* é o número de ativos com risco e *k* o número de fatores.

Para se obter um portfólio eficiente como uma aproximação do portfólio de Markowtiz através do modelo de dois fatores basta substituir as expressões (6) e (7) na expressão (1). Em assim sendo, tem-se:

$$\sigma_{\mu i}^2 y_i + \beta_{1i}\sigma_{I1}^2 \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j}\, y_j + \beta_{2i}\sigma_{I2}^2 \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j}\, y_j = \mu_i - r_f$$

Isolando y_i nesta última expressão tem-se o seguinte:

$$y_i = \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_{\mu i}^2} - \frac{\beta_{1i}\sigma_{I1}^2}{\sigma_{\mu i}^2} \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j} y_j - \frac{\beta_{2i}\sigma_{I2}^2}{\sigma_{\mu i}^2} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} y_j \tag{8}$$

Multiplica-se ambos os lados desta última expressão por β_{1j} e soma em *j*. Idem para β_{2j}. Obtêm-se assim o seguinte sistema de equações:

$$(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_{1j}^2 \sigma_{I1}^2}{\sigma_{\mu j}^2}) \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j} y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_{1j}\beta_{2j}\sigma_{I2}^2}{\sigma_{\mu j}^2} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} y_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu_j - r_{f)}}{\sigma_{\mu j}^2} \beta_{1j}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_{1j}\beta_{2j}\sigma_{I1}^2}{\sigma_{\mu j}^2} \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j} y_j + \ (1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_{2j}^2 \sigma_{I2}^2}{\sigma_{\mu j}^2} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu_j - r_{f)}}{\sigma_{\mu j}^2} \beta_{2j}$$

Resolvendo esse sistema de equações para $\sum_{j=1}^{n} \beta_{1j} y_j$ e $\sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} y_j$ e substituindo esses valores em (8), encontram-se as proporções ótimas y_i. Normalizando os y_i na forma $z_i = \frac{y_i}{\sum_1^n y_i}$, obtêm-se as proporções do portfólio eficiente apenas com ativos com risco. A média e a variância do retorno do portfólio serão, respectivamente, então iguais a:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} z_i\, \mu_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i\, \sigma_i^2 + 2 \sum_{i+1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>1}}^{n} \ z_i z_j \rho_{ij}$$

Observe que as metodologias anteriores determinam somente as proporções ótimas de portifólios sem nenhuma alavancagem, ou seja, carteiras de ativos com somente ativos com risco. Para se calcular a média e o retorno de portifólio com ativos com risco e com ativo livre de risco procede-se da seguinte maneira:

i) Desde que $z_i = \frac{y_i}{\sum_1^n y_i} = \frac{(2/\lambda)x_i}{\sum_1^n (\frac{2}{\lambda})x_i} = \frac{x_i}{\sum_i^n x_i}$, tem-se que $x_2 = \frac{Z_2}{Z_1}x_1$, $x_3 = \frac{Z_3}{Z_1}x_1$, ..., $x_n = \frac{Z_n}{Z_1}x_1$.

ii) Como o retorno esperado de um portfólio com ativo livre de risco é igual a $\mu_p = \sum_{i=1}^n x_i\mu_i + (1 - \sum_{i=1}^n x_i)r_f$, substituindo os valores de x_i nesta última pode-se obter uma expressão para cada x_i em função da média u_p e da taxa livre de risco r_f. Em assim sendo, tem-se que para cada ativo *i*:

$$x_i = \frac{Z_i}{Z_1}\left[\frac{\mu_{p-}r_f}{\mu_1 + \sum_{j=2}^n \frac{Z_j}{Z_1} - r_f}\right]$$

Portanto, a média e variância do portfólio serão calculadas como:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n x_i\mu_i + (1 - \sum_{i=1}^n x_i)r_f,$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2\,\sigma_i^2 + 2\sum_{i+1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>1}}^n x_i x_j \rho_{ij}$$

2.4 Base de dados

Os ativos utilizados foram obtidos da Bovespa no período de julho de 2009 a julho de 2014. A partir dos preços médios diários dos ativos pode-se calcular o valor médio mensal de cada um desses 14 ativos presentes na Bovespa assim estimando além de suas médias mensais suas variâncias e seus desvios padrões, contabilizando 61 observações, sendo que cada observação é composta de um retorno, uma variância e um desvio padrão.

3 RESULTADOS

3.1 Modelo de Markowitz

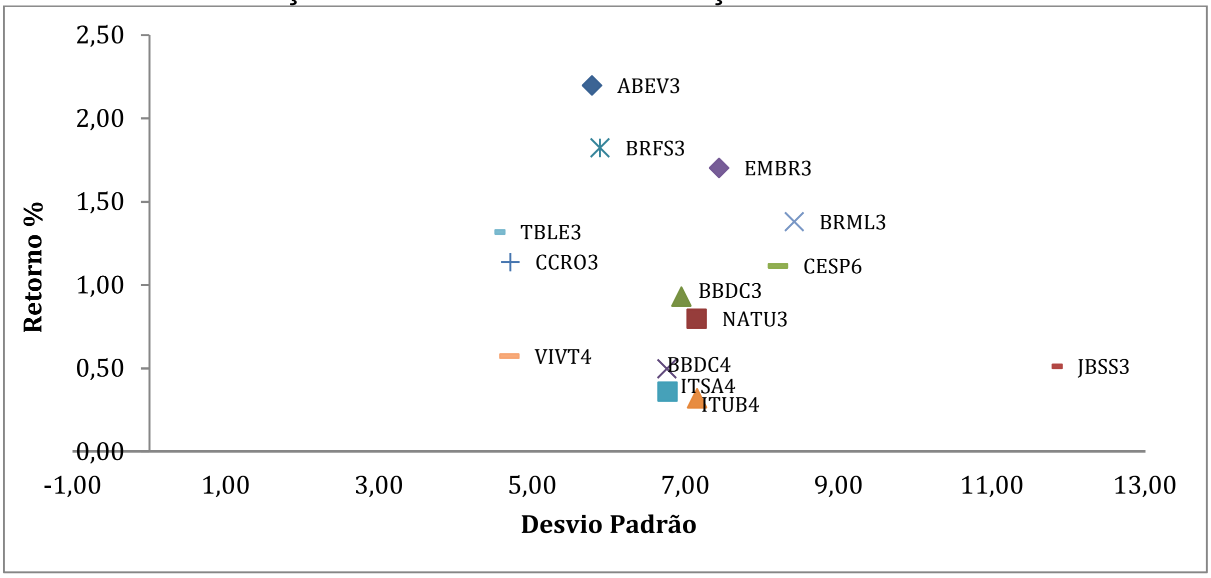
A base de dados gerou os seguintes resultados para o modelo de Markowitz:

Tabela 1 – Resultados para o modelo de Markowitz

Ativos / Indicadores	m	σ^2	σ
Ibovespa	-0,2113	28,4390	5,3328
Produção Industrial PIM-PF	0,1230	2,6158	1,6173
Taxa Selic Mês LFT	0,7647	0,0166	0,1288
ABEV3	2,1975	33,4230	5,7813
NATU3	0,7990	51,0826	7,1472
BBDC3	0,9313	48,2311	6,9449
BBDC4	0,4978	45,6758	6,7584
BRFS3	1,8241	34,6339	5,8851
CCRO3	1,1385	22,2426	4,7162
JBSS3	0,5122	138,9992	11,7898
CESP6	1,1157	67,3898	8,2091
EMBR3	1,7024	55,3336	7,4387
ITSA4	0,3605	45,7920	6,7670
ITUB4	0,3214	51,1338	7,1508
BRML3	1,3813	70,8719	8,4185
TBLE3	1,3197	20,4113	4,5179
VIVT4	0,5733	22,1045	4,7015

Fonte: Elaboração do autor
Nota: m reprensentará a média, σ^2 a variância e o σ o desvio padrão.

Gráfico 2 – Distribuição do Risco X Retorno das ações selecionadas



Fonte: Elaboração do autor

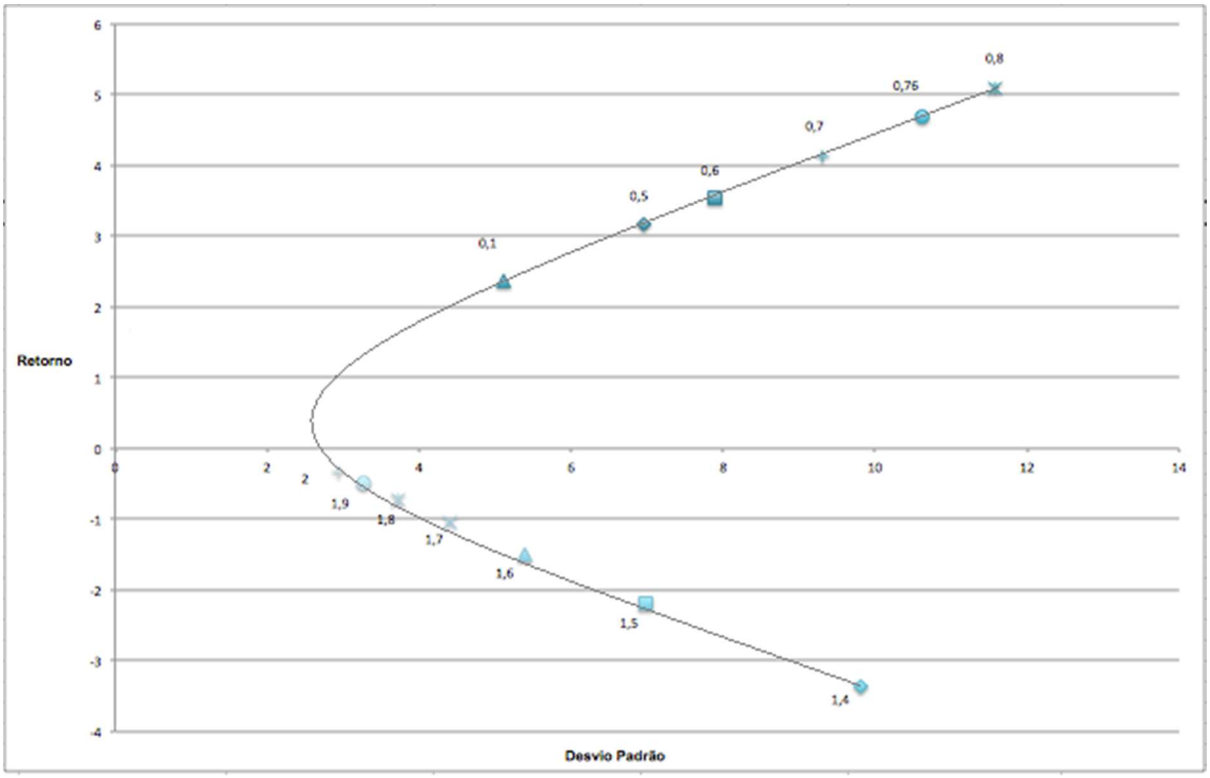
Posteriormente elaborou-se a fronteira eficiente de Markowitz obtendo assim para a sua construção os seguintes valores:

Tabela 2 – Valores obtidos para a elaboração da Fronteira Eficiente de Markowitz

r_f	Retorno	Desvio Padrão
0,5	3,1573	6,9644
0,6	3,5504	7,8983
0,7	4,1313	9,2944
0,76	4,6816	10,6282
0,8	5,0769	11,5911
0,9	6,8875	16,0306
1	11,7511	28,0453
1,2	-14,3779	36,9859
1,3	-5,8344	15,8549
1,4	-3,3634	9,8115
1,5	-2,1882	6,9942
1,6	-1,5013	5,3973
1,7	-1,0506	4,3944
1,8	-0,7323	3,7261
1,9	-0,4954	3,2644
2	-0,3123	2,9387

Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 3 – Fronteira Eficiente de Markowitz com ativos de risco



Fonte: Elaboração do autor

3.2 Modelo de índice simples

3.2.1 Modelo de índice simples – um fator

Para a elaboração do modelo de índice simples com um fator, Bovespa, tem-se:

Tabela 3 – Modelo de Índice Simples com um fator - Bovespa

	m	σ^2	σ	β Bovespa	α	ε
ABEV3	2,197495	6,856616	2,618514	0,198944	2,239530	5,731038
BBDC3	0,931320	30,921958	5,560752	0,959594	1,134072	4,734709
BBDC4	0,497803	31,105745	5,577252	0,969207	0,702586	4,391195
BRFS3	1,824069	10,804143	3,286966	0,433597	1,915683	5,457429
BRML3	1,381279	14,881425	3,857645	0,721540	1,533733	0,075509
CCRO3	1,138484	6,845130	2,616320	0,287279	1,199183	4,498079
CESP6	1,115674	6,797554	2,607212	0,486066	1,218375	0,078549
EMBR3	1,702360	7,976955	2,824350	0,133939	1,730660	7,466766
ITSA4	0,360456	31,469485	5,609767	0,976369	0,566753	4,358651
ITUB4	0,321447	34,657801	5,887088	1,027498	0,538546	4,633251
JBSS3	0,512232	48,631711	6,973644	1,306393	0,788259	0,095915
NATU3	0,799039	15,485407	3,935150	0,736475	0,954648	0,060218
TBLE3	1,319684	1,006729	1,003359	0,183945	1,358550	0,044473
VIVT4	0,573273	5,326894	2,308006	0,151951	0,605379	4,670266

Fonte: Elaboração do autor

Obtêm-se as proporções normalizadas: **ABEV3** (0,0167) + **BBDC3** (-0,0002) + **BBDC4** (-0,0071) + **BRFS3** (0,0123) + **BRML3** (0,4363) + **CCRO3** (0,0049) + **CESP6** (0,2262) + **EMBR3** (0,0084) + **ITSA4** (-0,0093) + **ITUB4** (-0,0095) + **JBSS3** (-0,3584) + **NATU3** (-0,1203) + **TBLE3** (0,8033) + **VIVT4** (-0,0032) = **Σ** (1,0000).

Este portfólio obteve retorno médio esperado de 1,70% e desvio padrão de 0,25.

3.2.2 Modelo de índice simples – dois fatores

Para a elaboração do modelo de índice simples com dois fatores, Bovespa e PIM tem-se:

Tabela 4 – Modelo de Índice Simples com dois fatores - Bovespa e PIM

	μ	σ^2	σ	β Bovespa	β PIM	α	ε
ABEV3	2,197495	7,004144	2,646534	0,204250	0,125385	2,225235	5,776600
BBDC3	0,931320	31,912831	5,649144	0,972765	0,311244	1,098587	4,748400
BBDC4	0,497803	31,928499	5,650531	0,980429	0,265189	0,672352	4,407800
BRFS3	1,824068	11,666570	3,415636	0,450668	0,403394	1,869692	5,464900
BRML3	1,381279	24,212895	4,920660	0,745584	0,568188	1,468954	7,559300
CCRO3	1,138484	7,009417	2,647530	0,292639	0,126667	1,184742	4,532000
CESP6	1,115674	17,418369	4,173532	0,521862	0,845892	1,121935	7,801600
EMBR3	1,702360	10,109643	3,179567	0,169874	0,849181	1,633845	7,402700
ITSA4	0,360457	32,293509	5,682738	0,987558	0,264407	0,536608	4,374900
ITUB4	0,321446	35,475332	5,956117	1,038200	0,252885	0,509714	4,654800
JBSS3	0,512232	64,111687	8,006977	1,349882	1,027706	0,671090	9,527900
NATU3	0,799038	24,005821	4,899574	0,766645	0,712935	0,873366	5,961400
TBLE3	1,319685	5,506480	2,346589	0,187739	0,089644	1,348330	4,483100
VIVT4	0,573274	5,368608	2,317026	0,152128	0,004204	0,604900	4,710400

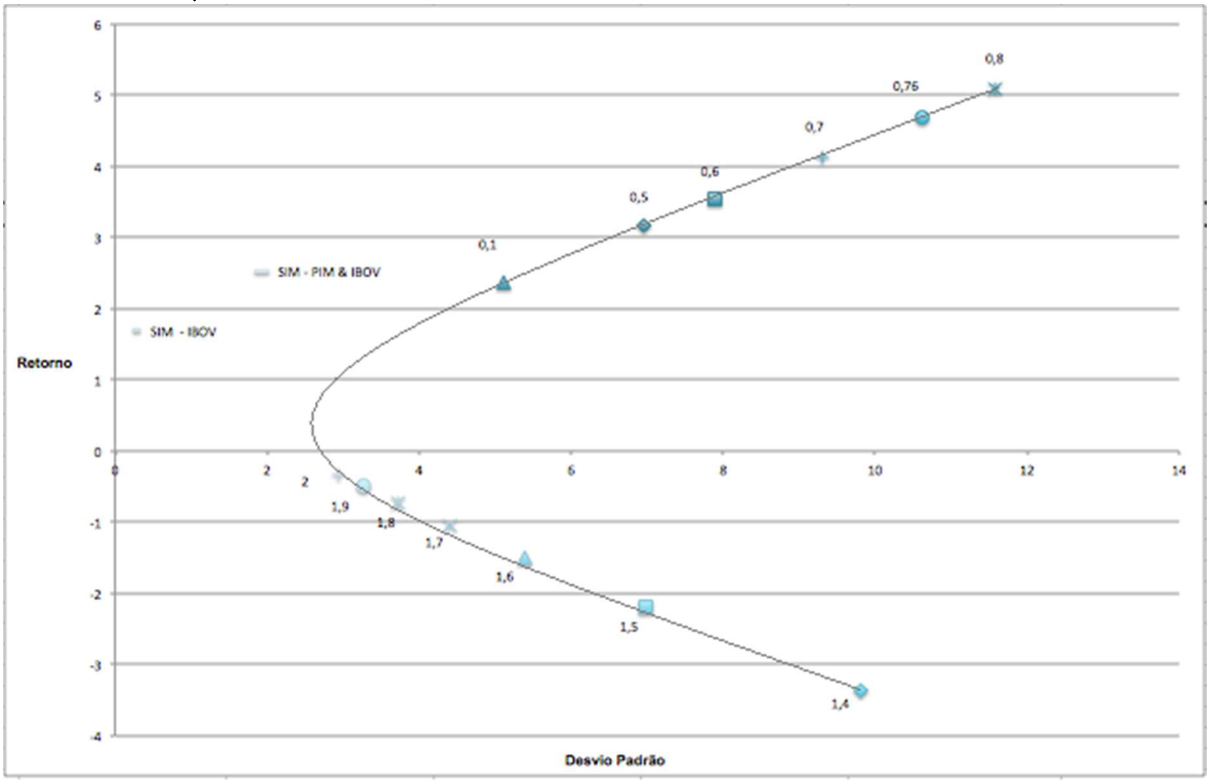
Fonte: Elaboração do autor

Obtêm-se as proporções normalizadas: **ABEV3** (0,4945) + **BBDC3** (0,0736) + **BBDC4** (-0,1116) + **BRFS3** (0,3589) + **BRML3** (0,1349) + **CCRO3** (0,1624) + **CESP6** (0,0293) + **EMBR3** (0,1792) + **ITSA4** (-0,1754) + **ITUB4** (-0,1773) + **JBSS3** (-0,0967) + **NATU3** (-0,0430) + **TBLE3** (0,2461) + **VIVT4** (-0,0749) = **Σ** (1,0000).

Logo este portfólio terá retorno médio esperado de 2,54% e desvio padrão de 1,92.

Deste modo foi possível obter graficamente uma comparação entre os portfólios de Markowitz e o Modelo de Índice Simples com um fator, e o MIS com dois fatores, assim representados:

Gráfico 4 – Comparação entre os portfólios de Markowitz e o Modelo de Índice Simples com um fator, e o MIS com dois fatores



Fonte: Elaboração do autor

3.3 Comparação direta entre Markowitz e SIM com um ativo livre de risco

Buscando uma comparação exata, mesmo retorno, ao modelo de Markowitz foram elaborados três novos portfólios com os mesmos ativos arriscados usados anteriormente, ou seja, mesma fronteira eficiente anterior com o acréscimo de um ativo livre de risco.

ABEV3 (0,3373) + **BBDC3** (0,3709) + **BBDC4** (-0,4095) + **BRFS3** (0,2266) + **BRML3** (0,0690) + **CCRO3** (-0,0560) + **CESP6** (0,1466) + **EMBR3** (0,0886) + **ITSA4** (-0,5160) + **ITUB4** (0,3224) + **JBSS3** (-0,0263) + **NATU3** (-0,0868) + **TBLE3** (0,1159) + **VIVT4** (-0,2670) = **Σ** (1,0000).

Assim tendo um retorno de 2% e desvio padrão de 2,64.

Para o SIM com um fator as proporções ótimas do portfólio normalizados foram: **ABEV3** (0,0220) + **BBDC3** (-0,0003) + **BBDC4** (-0,0093) + **BRFS3** (0,0162) + **BRML3** (0,5747) + **CCRO3** (-0,0064) + **CESP6** (0,2980) + **EMBR3** (0,0111) + **ITSA4** (-0,0122) + **ITUB4** (-0,0125) + **JBSS3** (-0,4722) + **NATU3** (-0,1585) + **TBLE3** (1,0583) + **VIVT4** (-0,0043) = **Σ** (1,0000).

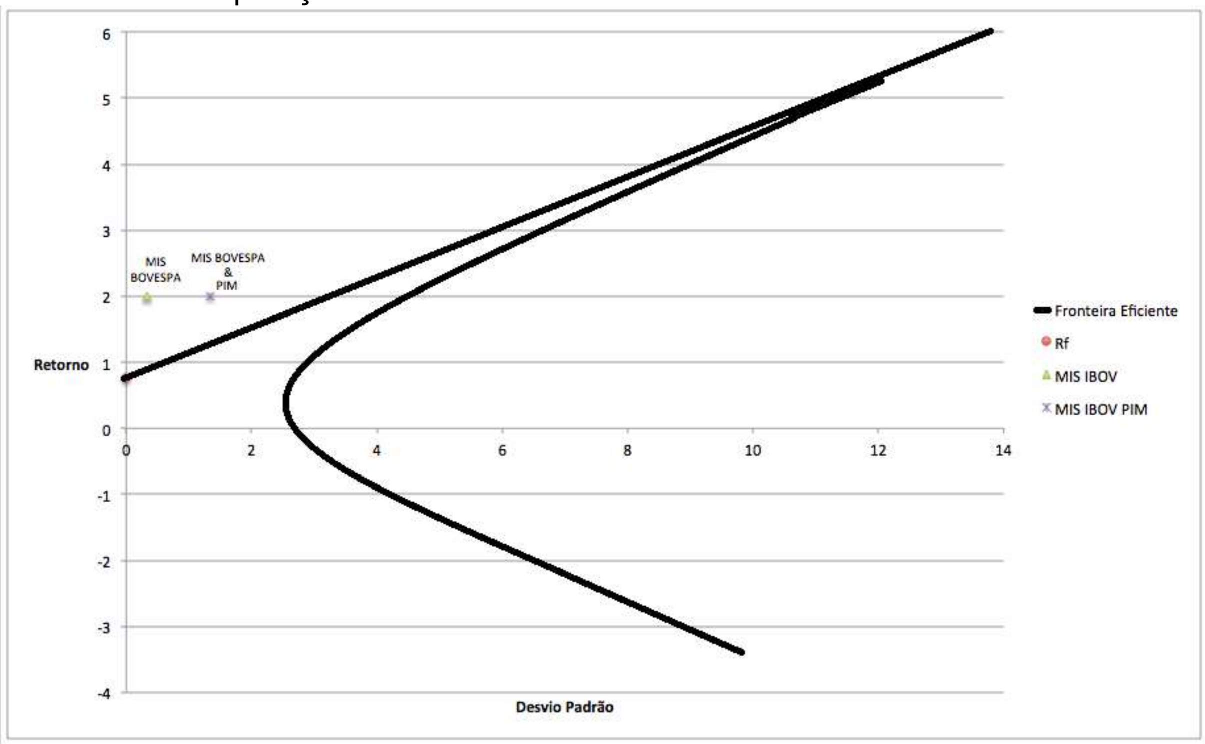
Resultando em um retorno de 2% e desvio padrã0 de 0,33.

E para o SIM com dois fatores o portfólio ótimo normalizado foi: **ABEV3** (0,3439) + **BBDC3** (0,0512) + **BBDC4** (-0,0776) + **BRFS3** (0,2496) + **BRML3** (0,0938) + **CCRO3** (0,1129) + **CESP6** (0,0204) + **EMBR3** (0,1246) + **ITSA4** (-0,1220) + **ITUB4** (-0,1233) + **JBSS3** (-0,0672) + **NATU3** (-0,0299) + **TBLE3** (0,1712) + **VIVT4** (-0,0521) = **Σ** (1,0000).

Fato que gerou um retorno de 2% e desvio padrão de 1,33.

Essa comparação terá o seguinte gráfico:

Gráfico 5 – Comparação direta entre Markowitz e SIM com um ativo livre de risco



Fonte: Elaboração do autor

4 CONCLUSÕES

A determinação do portfólio ótimo para cada investidor depende de suas aspirações pessoais, tanto quanto ao retorno que esperam obter de seus investimentos, quanto ao risco que estão dispostos a correr para obter este retorno. No entanto, a teoria moderna dos portfólios demonstra que existem alguns portfólios que são mais eficientes do que diversos outros possíveis de serem montados com um mesmo conjunto de ativos, estes portfólios se encontram na Fronteira Eficiente. Desta forma, existiria apenas um portfólio da Fronteira Eficiente que, independente das preferências específicas do investidor, teria a melhor relação entre o retorno esperado e o risco de investimento entre todos os demais portfólios disponíveis, o Portfólio Ótimo.

Após a elaboração da fronteira eficiente de Markowitz verificou-se que para os portfólios de índice simples com um fator e com dois fatores eles estarão a esquerda, externamente, da fronteira eficiente, pois seus desvios padrões possuem valores inferiores ao conjunto de pontos do desvio padrão que compõem a fronteira eficiente de Markowitz.

Após a elaboração de novos portfólios para uma mesma taxa de retorno de 2% para Markowitz, SIM com um e dois fatores sendo adotada uma taxa livre de risco, esses portfolios apresentaram resultados divergentes da literatura, pois os portfólios do SIM seguiram se localizando externamente a esquerda da fronteira eficiente de Markowitz. Estes resultados geraram uma busca para se elucidar o motivo da divergência dos resultados obtidos em comparação ao que se era esperado.

Assim pode-se concluir que a base de dados adotada neste trabalho não satisfaz as hipóteses básicas do modelo MIS, acredita-se que seja devido ao fato da covariância do erro das regressões serem diferentes de zero, $Cov(\mu_{it}, \mu_{jt}) \neq 0$, pois, como o modelo é uma aproximação ao modelo original esperava-se que a matriz de variância e covariância possuísse valores bem próximos ao do modelo original, fato que não se concretizou, assim impossibilitando desta maneira que os resultados esperados do modelo fossem alcançados.

REFERÊNCIAS

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. **Investments**. 6. ed. New York: McGraw-Hill, 2008.

BOLSA quer alcançar 5 milhões de pessoas físicas. **Veja**, 7 set. 2014. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/economia/bolsa-quer-alcancar-5-milhoes-de-pessoas-fisicas>.

DAMODARAN, Aswath. **Avaliação de Investimentos:** ferramentas e técnicas para a determinação do valor de qualquer ativo. Rio de Janeiro: Qualitymark Ed., 1996.

ECONOMÁTICA. **Software de Apoio a Investidores Ltda**., 2008.

ELTON, Edwin; GRUBER, Martin. **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

GUJARATI, Damodar. **Econometria Básica**. São Paulo: Makron Books, 2000.

MARKOWITZ, Harry. **Porfolio Selection:** Efficient Diversification of Investment, New York: John Wiley & Sons, 1959.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio Selection:** Efficient Diversification of Investment. 2. ed. Oxford: Basil Blackwell, 1991.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio Selection**. Oxford: Backwell, 1959.

McMILLAN, L. **Options as a Strategic Investment:** A Comprehensive Analysis of Listed Option Strategies. New York: New York Institute of Finance, 1993.

SHARPE, Willian F.; ALEXANDRE, Gordon J.; BAILEY, Jeffery V. **Investments**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.