UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ISAÍAS PEREIRA DE JESUS

OBSERVAÇÕES SOBRE O CONTROLE HIERÁRQUICO PARA AS EQUAÇÕES DO CALOR E DA ONDA EM DOMÍNIOS ILIMITADOS E EM DOMÍNIOS COM FRONTEIRA VARIÁVEL

FORTALEZA

2012

ISAÍAS PEREIRA DE JESUS

OBSERVAÇÕES SOBRE O CONTROLE HIERÁRQUICO PARA AS EQUAÇÕES DO CALOR E DA ONDA EM DOMÍNIOS ILIMITADOS E EM DOMÍNIOS COM FRONTEIRA VARIÁVEL

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes.

FORTALEZA

2012

Jesus, Isaías Pereira de.

J56o Observações sobre o controle hierárquico para as equações do calor e da onda em domínios ilimitados e em domínios com fronteira variável / Isaías Pereira de Jesus - Fortaleza, 2012.

154f. : il.color., enc.; 30cm.

Orientador: Prof. Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2012.

Área de Concentração : Análise.

CDD 515.25

Ao meu pai Antônio Pereira de Jesus e a minha mãe Anizia Maria de Sousa (in memorian).

Agradecimentos

A Deus, por ser tudo em minha vida.

À minha família, em especial a minha esposa Francy, companheira em momentos difíceis ao longo dessa batalha.

Ao Nefran Sousa Cardoso, pelos longos anos de amizade.

À Andrea pela paciência e prestividade que sempre teve comigo.

À Capes pelo apoio financeiro.

Ao corpo docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí.

À banca examinadora, em especial ao professor Silvano Dias Bezerra de Menezes que mostrou-se sempre solícito nos momentos difíceis.

Aos meus amigos que conheci ao longo desses estudos, entre eles, Antônio Wilson, Rondinelli Marcolino, Ernani Ribeiro Jr, Disson Soares, Adriano Alves , Damião Júnio, Luís Caetano, Wesley Marinho entre outros amigos.

A todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente, meus agradecimentos.

O senhor é o meu pastor e nada me faltará.
(Salmos 23.1).

Resumo

O objetivo desse trabalho é estudarmos a controlabilidade aproximada, via estratégia de Stackeberg-Nash, para equação do calor em domínios ilimitados, bem como para equação da onda e para fluidos micropolares em domínios com fronteira variável .

Palavras-chave: Controle hierárquico, Estratégia de Stackelberg-Nash, Espaços de Sobolev com Peso, Domínios Ilimitados, Fluidos Micropolares.

Abstract

The purpose of this work is study the approximate controllability, via Stackelberg-Nash strategies to heat equation in unlimited domains, as well to wave equation and for micropolars fluids in domains with moving boundary.

Keywords: Hierarchic Control, Stackelberg-Nash Strategies, Sobolev's Spaces with Weight, Unlimited Domains, Micropolar Fluids.

Conteúdo

Introdução

Esta tese aborda o estudo de alguns problemas de controle hierárquico para a equação do calor, da onda e de fluidos micropolares definidos em determinados domínios ilimitados e também em domínios com fronteira variável.

Problemas de otimização aparecem com bastante frequência em uma série de problemas de ciências da engenharia e economia. Muitos modelos matemáticos são formulados em termos de problemas de otimização envolvendo um único objetivo, minimizar custos ou maximizar o lucro, etc. Em situações mais realistas e relevantes, diversos objetivos (em geral conflitantes) devem ser considerados.

Em um problema clássico de controle mono-objetivo para um sistema modelado por uma equação diferencial, existe um controle v, atuando na equação e tentando atingir um objetivo pré-determinado, geralmente consistindo em minimizar um funcional $J(.)$.

Quando não existe uma restrição no espaço de controle e o funcional J satisfaz algumas hipóteses adequadas, existe uma única solução u para o problema de controle, a qual é determinada pela condição de optimalidade $\nabla J(u) = 0$.

Em um problema de controle multi-objetivo existe mais do que um objetivo; possivelmente mais que um controle atuando sobre a equação. Agora, em contraste com o caso de um único objetivo, existem várias estratégias de forma a escolher os controles, dependendo da natureza do problema.

Estas estratégias podem ser cooperativas (quando os controles cooperam entre eles, a fim de alcançar os objetivos), não-cooperativas, hierárquicas, etc. Equilíbrio de Nash define uma estratégia de otimização não-cooperativa múltiplo-objetiva, inicialmente proposto por Nash [41]. Desde que teve origem na teoria dos jogos e economia, a noção de jogador é frequentemente utilizado. Para um problema de otimização com G objetivos (ou funcionais J_i a ser minimizados), uma estratégia de Nash consiste em ter G jogadores (ou controles v_i), cada um deles otimizando seu próprio critério. No entanto, cada jogador tem que otimizar seu critério, uma vez que todos os outros critérios são fixados pelo resto dos jogadores. Quando nenhum jogador pode melhorar ainda mais o seu critério, isso quer dizer que o sistema atingiu um estado de equilíbrio de Nash. Existem outras estratégias para otimização multiobjetiva, como a estratégia de Pareto (cooperativo) [42] e a estratégia de Stackelberg (hierárquico) [48], etc.

Alguns trabalhos anteriores sobre as estratégias para o controle de equações diferenciais parcias são os seguintes. Nos artigos de Lions [32], [33], o autor dá alguns resultados sobre a estratégia de Pareto e estratégias de Stackelberg, respectivamente. No artigo de Díaz-Lions [11], os autores provam um resultado de controlabilidade aproximada para um sistema seguindo a estratégia de Stackelberg-Nash. Este resultado baseia-se na existência e unicidade de um equilibrio de Nash, que é provado pelos autores para alguns casos particulares satisfazendo algumas restrições.

Neste trabalho, estudamos a estratégia de Stackelberg para determinadas equações diferenciais parciais de evolução, considerando um equilíbrio de Nash multi-objetivo (não necessariamente cooperativa) para os "jogadores seguidores"(como é chamado no campo da economia) e um problema ideal para o jogador líder com objetivo de obter controlabilidade aproximada. Nossa motivação baseia-se nos trabalhos de Díaz-Lions [11] e Lions [29].

Quando em 1990, durante as Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sistemas Distribuídos, Jacques Louis Lions[1] introduziu, pela primeira vez, o conceito de controlabilidade aproximada para equação linear do calor [31], criou-se assim uma imensa gama de problemas relacionados com o conceito de controlabilidade aproximada.

Formalizemos agora alguns desses conceitos. Consideremos a equação linear do calor

$$\left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u = h1_w \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e $T > 0$. Em (0.1) u_t denota $\dfrac{du}{dt}$, $u = u(x,t)$ é o estado a ser controlado, $h = h(x,t)$ é o controle e 1_w é a função característica de w, onde w é um subconjunto aberto não vazio de Ω. Notemos

[1]J.L.Lions 1928-2001

que o controle atua no interior de Ω.

Assumindo que $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(Q)$, o sistema (0.1) admite uma única solução $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$. Consideremos o conjunto de estados admissíveis:

$$R_{NL}(T) = \{u_h(T) : u_h \text{ é solução de (0.1) com } h \in L^2(Q)\}.$$

Alguns problemas de controlabilidade podem ser formulados como se segue:

(i) O sistema (0.1) é dito aproximadamente controlável se $R_{NL}(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

(ii) O sistema (0.1) é dito exatamente controlável se $R_{NL}(T) = L^2(\Omega)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

(iii) O sistema (0.1) é dito nulo controlável ou controlável a zero se $0 \in R_{NL}(T)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

O sistema (0.1) é aproximadamente controlável para todo subconjunto aberto não vazio ω de Ω e $T > 0$. Para mostrar isto, aplica-se o Teorema de Hahn Banach ou então se segue uma abordagem variacional desenvolvida em Lions [31]. Em ambos os casos, a controlabilidade aproximada é reduzida a uma propriedade de continuação única para o sistema adjunto de (0.1):

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \varphi(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ \varphi(x,T) = \varphi^0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

Mais precisamente, controlabilidade aproximada vale para o sistema (0.1) se, e somente se, a seguinte propriedade de unicidade é verdadeira: Se φ é solução de (0.2) e $\varphi = 0$ em $\omega \times (0,T)$ então, necessariamente, $\varphi \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$, isto é, $\varphi^0 = 0$.

A questão é que os teoremas de continuação única dependem da natureza do problema estudado. Para tal, muitos autores tem conseguido teoremas de continuação única para diversos problemas, entre as quais pode-se citar, teorema da continuação de Mizohata [40], quando os coeficientes do operador que aparecem no sistema são analíticos. Quando os coeficientes do operador são funções limitadas e mensuráveis, a controlabilidade aproximada foi investigada, entre outros autores, por C. Fabre [18], onde se prova a propriedade de continuação única para equações relacionadas com o sistema de Navier-Stokes. A mesma generalização da continuação única de Mizohata pode ser encontradas em Saut-Scheurer [46]. No presente trabalho, invariavelmente, utilizamos o resultado de continuação única de C. Fabre [18].

Desde a publicação do artigo [31], a controlabilidade aproximada tem sido motivo de estudo de muitos autores, entre os quais pode-se citar : Fabre-Lebeau [19], Fabre [18], Fabre-Puel-Zuazua [20], Fernandez-Zuazua [23], Zuazua [52].

No artigo de Díaz-Lions [11], o qual motivou nosso trabalho, estuda-se o controle hierárquico para um sistema distribuído (no qual o estado é definido pela solução de uma equação de difusão). Eles admitem que se pode agir sobre o sistema por uma hierarquia de controles. Existe um controle global v, o qual é chamado de líder e existem N controles locais $w_1, \ldots, w_N$ que são os seguidores. Os seguidores, assumindo que o líder fez a escolha de sua estratégia (política), procuram um equilíbrio de Nash de suas funções custos e então o líder v faz sua escolha final para todo o sistema, procurando atingir um estado ideal u^T num tempo T por meio de um controle aproximado. Essa é a conhecida estratégia de Stackelberg-Nash.

Nosso trabalho está dividido em três etapas. Inicialmente estudaremos o controle hierárquico para a equação linear do calor

$$\left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u + a(x,t)u + b(x,t)\nabla u = f\chi_{\mathcal{O}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}_i} \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \tag{0.3}$$

onde os potenciais $a(x,t) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,T)\big)$, $b(x,t) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,T)\big)^N$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$ são subconjuntos abertos, limitados, não vazios e disjuntos do $\mathbb{R}^N$, $\chi_{\mathcal{O}}$ a função característica de $\mathcal{O}$, $\chi_{\mathcal{O}_i}$ a função característica de $\mathcal{O}_i$, $1 \leq i \leq n$. Ademais, f é chamado de controle líder e os w_i são chamados de seguidores.

Essencialmente resolvemos dois problemas:

- A existência da solução $w_1(f), \ldots, w_n(f)$ para as desigualdades (1.4), isto é, a existência do equilíbrio de Nash para os funcionais custos $\widetilde{J}_1, \ldots, \widetilde{J}_n$ definidos em (1.3).

- Assumindo a existência e unicidade do equilíbrio de Nash $w_1(f), \ldots, w_n(f)$, mostrar que quando f varia em $L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$, as soluções $u\big(x,t,f,w_1(f),\ldots,w_n(f)\big)$ da equação (0.3), avaliadas em $t = T$, isto é, $u\big(x, T, f, w_1(f), \ldots, w_n(f)\big)$, geram um subconjunto denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Isso permite aproximar u^T.

O método usado adapta as técnicas introduzidas por Díaz-Lions [11] para domínios não limitados por introduzir espaços de Sobolev com peso de M. Escobedo e O. Kavian [17] que garantem as imersões compactas de Sobolev.

Em uma segunda etapa, obtemos basicamente os mesmos resultados para os problemas mencionados acima (estratégia de Stackelberg-Nash), agora para um sistema que modela pequenas vibrações de cordas elásticas com extremidades móveis:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m}\frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

com controles atuando na fronteira do domínio. Naturalmente, observa-se que no modelo proposto o domínio de definição da equação diferencial parcial que descreve estas vibrações de cordas elásticas é um domínio não cilíndrico.

A estratégia utilizada para obtenção de nosso resultado de controle hierárquico é transformar nosso sistema em um outro sistema equivalente, via um difeomorfismo, definido sobre um domínio cilíndrico cujas seções são independentes do tempo (conforme Seção 2.1) e em seguida aplicar as técnicas desenvolvidas no trabalho de Lions [29].

Finalmente, uma terceira etapa consiste em obter resultado de controle hierárquico (de acordo com os problemas formulados acima) agora para fluidos micropolares linearizado

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{z}}_t - \Delta\widehat{\boldsymbol{z}} + (\widehat{\boldsymbol{h}}\cdot\nabla)\widehat{\boldsymbol{z}} + (\widehat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla)\widehat{\boldsymbol{h}} + \nabla\widehat{p} = \nabla\times\widehat{w} + \widehat{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}} \\ +\widehat{\boldsymbol{v}}^{(1)}\boldsymbol{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_1} + \widehat{\boldsymbol{v}}^{(2)}\boldsymbol{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_2} \quad \text{em} \ \ \widehat{Q} \\ \widehat{w}_t - \Delta\widehat{w} + \widehat{\boldsymbol{h}}\cdot\nabla\widehat{w} + \widehat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \nabla\times\widehat{\boldsymbol{z}} + \widehat{g}\widehat{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}} \\ +\widehat{u}^{(1)}\widehat{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_1} + \widehat{u}^{(2)}\widehat{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_2} \quad \text{em} \ \ \widehat{Q} \\ \nabla\cdot\widehat{\boldsymbol{z}} = 0 \quad \text{em} \quad \widehat{Q} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} = 0, \quad \widehat{w} = 0 \quad \text{sobre} \ \ \widehat{\Sigma} \\ \widehat{\boldsymbol{z}}(0) = \widehat{\boldsymbol{z}}^0, \quad \widehat{w}(0) = \widehat{w}^0 \quad \text{em} \quad \Omega_0, \end{cases} \tag{0.4}$$

onde $(\widehat{\boldsymbol{h}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$ pertence a classe

$$\begin{cases} \left(\widehat{\boldsymbol{h}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \in \mathbf{L}^\infty\left(\widehat{Q}\right) \times L^\infty\left(\widehat{Q}\right), \\ \left(\widehat{\boldsymbol{h}}_t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_t\right) \in L^2\left(0, T; \mathbf{L}^r\left(\Omega_t\right)\right) \times L^2\left(0, T; L^r\left(\Omega_t\right)\right), \quad \text{para algum} \quad r > 1. \end{cases} \tag{0.5}$$

e $\widehat{Q}$ representa um domínio (não cilíndrico) com fronteira variável. Vale ressaltar que o resultado de controle hieráquico obtido nesta terceira etapa (capítulo 3 desta tese) foi desenvolvido em colaboração com o professor Geraldo M. de Araújo da UFPA, resultado este oriundo de um projeto de pesquisa mais geral em desenvolvimento.

De um ponto de vista físico, um fluido real é evolutivo, de modo que a região preenchida com um fluido em movimento movem-se geralmente ao longo da trajetória do movimento do fluido incompressível. Assim, o domínio espaço-tempo não é um cilíndro como frequentemente é tratado. Isto justifica, em parte, o tratamento do caso para o domínio espaço-tempo ser um domínio não cilindrico neste trabalho.

Um fluido micropolar é um fluido, não newtoniano viscoso com microestrutura local, que contém suspensões de partículas rígidas. A descrição matemática desses fluidos, a qual não pode ser descrito, reologicamente, por clássicos sistemas de Navier-Stokes, foi dado por Eringen [15]. Sangue de animais, cristais líquidos (com moléculas do tipo haltere), fluidos poliméricos, e certos fluidos coloidais, cujos elementos de fluido exibem micro-rotações e complexas estruturas biológicas, são exemplos de fluidos modelados pela teoria de fluido micropolares (vide Eringen [16] e Popel [44]).

Sobre resultados de controle de fluidos micropolares, podemos citar o trabalho de Fernández-Cara e Guerrero [22], onde eles obtiveram controlabilidade exata local para trajetórias, e também o trabalho de Araruna, Chaves-Silva e Rojas-Medar [2], que estudaram controlabilidade exata global para aproximações de Galerkin deste sistema.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos um estudo sobre a controlabilidade aproximada para a equação do calor em domínios ilimitados.

No capítulo 2 resultados similares de controle hierárquico para a equação da onda em um domínio com fronteira variável do plano $\mathbb{R}^2$ é apresentado.

Finalmente, no capítulo 3 obtemos resultados sobre controle hierárquico para fluidos micropolares linearizado também em domínios com fronteira variável do $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 1

Equação do Calor em Domínios Ilimitados

1.1 Formulação do Problema

Sejam $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$,..., $\mathcal{O}_n$ subconjuntos abertos, limitados, não-vazios e disjuntos de Ω, sendo Ω um domínio ilimitado do espaço $\mathbb{R}^N$. Dados $T > 0$ e potenciais $a(x,t) \in L^\infty\big(\Omega \times (0,T)\big)$ e $b(x,t) \in L^\infty\big(\Omega \times (0,T)\big)^N$, consideremos a equação linear do calor

$$\left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u + a(x,t)u + b(x,t)\nabla u = f\chi_{\mathcal{O}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}_i} \text{ em } Q = \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

onde u_0, f e w_i são funções dadas em espaços apropriados, $i = 1, 2, \ldots, n$ sendo $\chi_{\mathcal{O}}$ e $\chi_{\mathcal{O}_i}$ as funções características de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}_i$, respectivamente. Assumamos que $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2\big(\Omega \times (0,T)\big)$ e os $w_i \in L^2\big(\Omega \times (0,T)\big)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. O subconjunto $\mathcal{O} \subset \Omega$ é o domínio controle (que é suposto ser pequeno como desejado), $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n$ são domínios de controles secundários, a função f é chamada de controle líder e os w_i são chamados de seguidores.

Como a solução u de (1.1) depende de $f, w_1, \ldots, w_n$, então denotamos por $u = u(x,t,f,w_1,\ldots,w_n)$.

Estudaremos o problema de controle para (1.1) no caso de f ser independente e $w_1, \ldots, w_n$ depender de f. Mais explicitamente, o controle f faz uma escolha de sua estratégia e a escolha dos estrategistas $w_1, \dots, w_n$ depende de f. Por esse motivo, o controle f é chamado de líder e os $w_1, \dots, w_n$ são os seguidores. Esse processo de controle é chamado por Lions [29] de controle hierárquico.

Para localizar a ação dos controles w_i, introduzamos as funções $\widetilde{\rho}_i(x)$, definidas em Ω com valores reais, satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} \widetilde{\rho}_i \in L^\infty(\Omega),\ \widetilde{\rho}_i \geq 0 \\ \widetilde{\rho}_i = 1 \text{ em } G_i \subset \Omega, \end{array} \right. \tag{1.2}$$

onde G_i é uma região onde os w_i atuam.

O objetivo é que os controles $f, w_1, , \dots, w_n$ atuem para que a função $u(x,t)$, solução da equação (1.1), atinja no tempo T, um estado ideal $u^T = u^T(x)$, com funcionais custos definidos por:

$$\widetilde{J}_i(f, w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i^2\, dxdt + \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\widetilde{\rho}_i[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T]\right|^2 dx, \tag{1.3}$$

com $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$, $\alpha_i > 0$ constante.

A metodologia é descrita como segue: os seguidores $w_1, \dots, w_n$ supõe que o líder f fez uma escolha para sua estratégia. Em seguida, tentam encontrar um equilíbrio de Nash para seus custos $\widetilde{J}_1, \dots, \widetilde{J}_n$. Isso mostra que eles procuram controles $w_1, \dots, w_n$ dependendo de f, satisfazendo

$$\widetilde{J}_i(f, w_1, \dots, w_i, \dots, w_n) \leq \widetilde{J}_i(f, w_1, \dots, \overline{w}_i, \dots, w_n), \quad \forall\, \overline{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i). \tag{1.4}$$

Os controles $w_1, \dots, w_n$, soluções do sistema de n desigualdades (1.4), são chamados de equilíbrio de Nash para os funcionais custos $\widetilde{J}_1, \dots, \widetilde{J}_n$ e esses controles dependem de f (cf. Aubin [5]).

Observação 1.1 *Em outras palavras, se o líder f faz uma escolha então seus seguidores $w_i(f)$ fazem uma escolha que torna mínimo o custo J_i, isto é,*

$$\widetilde{J}_i(f, w_1, \dots, w_i, \dots, w_n) = \inf_{\overline{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i)} \widetilde{J}_i(f, w_1, \dots, \overline{w}_i, \dots, w_n). \tag{1.5}$$

Isso é equivalente as desigualdades (1.4). Esse processo é chamado de estratégia de Stackelberg–Nash (vide Díaz e Lions [11]).

O problema de controle que será considerado é o seguinte: encontrar controles $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ e estado correspondente u verificando (1.1) e o equilíbrio de Nash relacionado aos funcionais $\widetilde{J}_i$ definidos em (1.3), sujeito a seguinte restrição de controlabilide aproximada

$$u(x, T, f, \mathbf{w}) \in B_{L^2(\mathbb{R}^N)}(u^T, \alpha), \tag{1.6}$$

onde $B_{L^2(\mathbb{R}^N)}(u^T, \alpha)$ denota a bola de $L^2(\mathbb{R}^N)$ com centro em u^T e raio $\alpha > 0$ dado, isto é, se

$$\left| \begin{array}{l} u(x, T, f, \mathbf{w}) \text{ descreve um subconjunto denso de um dado espaço quando} \\ f \text{ abrange o conjunto de todos os controles disponíveis para o líder.} \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Observação 1.2 *Enfatizamos novamente que em (1.7) os controles w_i são escolhidos de modo que (1.4) é satisfeita. Portanto, eles são funções de f.*

Para explicitar esse problema, iremos considerar os seguintes sub-problemas:

Problema 1: A existência da solução $w_1(f), \ldots, w_n(f)$ para as desigualdades (1.4), isto é, a existência do equilíbrio de Nash.

Problema 2: Assumindo a existência e unicidade do equilíbrio de Nash $w_1(f), \ldots, w_n(f)$, mostrar que quando f varia em $L^2\big(\mathcal{O}\times(0,T)\big)$, as soluções $u\big(x, t, f, w_1(f), \ldots, w_n(f)\big)$ da equação (1.1), avaliadas em $t = T$, isto é, $u\big(x, T, f, w_1(f), \ldots, w_n(f)\big)$, geram um subconjunto denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Isso permite aproximar u^T.

Os problemas 1 e 2 foram analizados por Díaz e Lions [11] quando Ω é um domínio limitado. Nosso objetivo é adaptar as técnicas introduzidas em [11] para domínios ilimitados. Para tal propósito, introduziremos os espaços de Sobolev com peso de Escobedo e Kavian [17] para garantir a compacidade das imersões de Sobolev. A utilização destes espaços é interessante pois permite-nos provar o resultado de controlabilidade de uma forma "direta", como também para propósitos numéricos. Todavia, essa prova é válida somente quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou um domínio cônico, pois é necessário fazer uma mudança de variáveis. Por simplicidade, limitaremos ao caso quando $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Nessas condições, a equação linear do calor dado em (1.1) pode ser escrita como

$$\left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u + a(x,t)u + b(x,t)\nabla u = f\chi_{\mathcal{O}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}_i} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Para evitar problemas relacionados a não compacidade de imersões de Sobolev, consideremos o seguinte operador

$$
\begin{aligned}
&L\xi = -\Delta\xi - \frac{y \cdot \nabla\xi}{2} = -\frac{1}{K}\operatorname{div}(K\nabla\xi) \\
&K(y) = \exp\left(\frac{|y|^2}{4}\right) \\
&D(L) \subset L^2(K) = \left\{\xi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N : \int_{\mathbb{R}^N} K(y)|\xi(y)|^2\, dy < \infty\right\}
\end{aligned}
$$

e a equação de evolução

$$
\left|
\begin{aligned}
&v_s + Lv + A(y,s)v + B(y,s)\nabla v - \frac{N}{2}v = g(y,s)\chi_{\mathcal{O}'} + \sum_{i=1}^{n} h_i(y,s)\chi_{\mathcal{O}'_i} \\
&\text{ em } \ \mathbb{R}^N \times (0,S) \\
&v(y,0) = v_0(y) \text{ em } \ \mathbb{R}^N
\end{aligned}
\right.
\tag{1.9}
$$

com $v_0(y) \in L^2(K)$, $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}'_i$ são subconjuntos adequados do $\mathbb{R}^N$ e $s = \log(t+1)$. Uma mudança de variáveis transforma (1.8) em (1.9).

De fato, se definirmos para $s \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^N$

$$
\left|
\begin{aligned}
&v(y,s) = e^{\frac{sN}{2}} u(e^{\frac{s}{2}}y, e^s - 1) \\
&A(y,s) = e^s a(e^{\frac{s}{2}}y, e^s - 1) \\
&B(y,s) = e^s b(e^{\frac{s}{2}}y, e^s - 1) \\
&g(y,s) = e^{\frac{s(N+2)}{2}} f(e^{\frac{s}{2}}y, e^s - 1) \\
&h_i(y,s) = e^{\frac{s(N+2)}{2}} w_i(e^{\frac{s}{2}}y, e^s - 1)
\end{aligned}
\right.
\tag{1.10}
$$

então para $u_0 \in L^2(K)$ e u solução de (1.8), v verifica (1.9) com $v_0 = u_0$, $\mathcal{O}'(s) = e^{\frac{-s}{2}}\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'_i(s) = e^{\frac{-s}{2}}\mathcal{O}_i$.

Com efeito, de $(1.10)_1$, temos

$$
u(x,t) = e^{\frac{-sN}{2}} v(y,s),
$$

onde $y = e^{\frac{-s}{2}}x$, $s = \log(t+1)$, $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{-N}{2} e^{\frac{-sN}{2}} \frac{1}{1+t} v(y,s) + e^{\frac{-sN}{2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial t} + e^{\frac{-sN}{2}} \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} \\
&= \frac{-N}{2} e^{\frac{-sN}{2}} \frac{1}{1+t} v(y,s) - \frac{1}{2} e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} y_i + e^{\frac{-sN}{2}} \frac{\partial v}{\partial s}\frac{1}{1+t},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-N}{2} e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} v(y,s) - e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \frac{y \cdot \nabla v}{2} + e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \frac{\partial v}{\partial s} \tag{1.11}$$

Agora,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = e^{\frac{-sN}{2}} \frac{\partial v}{\partial y_i} e^{\frac{-s}{2}}.$$

Também,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \frac{\partial v}{\partial y_i}\right) = e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial y_i}\right) \\ &= e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial y_i}\right) = e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} = e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}.\end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2},$$

ou seja,

$$\Delta u = e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \Delta v. \tag{1.12}$$

Também,

$$a(x,t)u = a\big(e^{\frac{s}{2}} y, e^s - 1\big) e^{\frac{-sN}{2}} v = A(y,s) e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} v. \tag{1.13}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\nabla u &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_i}\big(e^{\frac{-sN}{2}} v\big) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \frac{\partial v}{\partial y_i} = e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} \\ &= e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \nabla v.\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}b(x,t)\nabla u &= b\big(e^{\frac{s}{2}} y, e^s - 1\big) e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \nabla v = B(y,s) e^{\frac{-sN}{2}} e^{\frac{-s}{2}} e^{\frac{-s}{2}} \nabla v \\ &= B(y,s) e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \nabla v.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Substituindo (1.11)–(1.14) em $(1.8)_1$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{-N}{2} v e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} - e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \frac{y \cdot \nabla v}{2} + A(y,s) e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} v + B(y,s) e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \nabla v \\ &+ e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} v_s - e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \Delta v = f \chi_{\mathcal{O}'} + \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}'_i},\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{-N}{2} v e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} + e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} \underbrace{\left(-\Delta v - \frac{y \cdot \nabla v}{2}\right)}_{Lv} + A(y,s) e^{-s} e^{\frac{-sN}{2}} v$$

$$+ B(y,s) e^{-s} e^{\frac{-sN}{2}} \nabla v + e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} v_s = f \chi_{\mathcal{O}'} + \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}'_i}.$$

Assim,

$$e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} v_s + e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} Lv + A(y,s) e^{-s} e^{\frac{-sN}{2}} v + B(y,s) e^{-s} e^{\frac{-sN}{2}} \nabla v$$

$$- \frac{N}{2} v e^{\frac{-sN}{2}} e^{-s} = f \chi_{\mathcal{O}'} + \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}'_i}.$$

Portanto,

$$v_s + Lv + A(y,s) v + B(y,s) \nabla v - \frac{N}{2} v = g(y,s) \chi_{\mathcal{O}'} + \sum_{i=1}^{n} h_i(y,s) \chi_{\mathcal{O}'_i},$$

onde

$$\begin{aligned} g(y,s) &= e^{\frac{s(N+2)}{2}} f(e^{\frac{s}{2}} y, e^s - 1) \\ h_i(y,s) &= e^{\frac{s(N+2)}{2}} w_i(e^{\frac{s}{2}} y, e^s - 1), \end{aligned}$$

sendo $\chi_{\mathcal{O}'}$ a função característica de $\mathcal{O}'$ e $\chi_{\mathcal{O}'_i}$ a função característica de $\mathcal{O}'_i$, $\mathcal{O}'(s) = e^{\frac{-s}{2}} \mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'_i(s) = e^{\frac{-s}{2}} \mathcal{O}_i$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Reciprocamente, se conhecermos uma solução v de (1.9) e se definirmos para todo $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$

$$\left| \begin{aligned} u(x,t) &= (1+t)^{\frac{-N}{2}} v\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \\ a(x,t) &= (1+t)^{-1} A\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \\ b(x,t) &= (1+t)^{\frac{-1}{2}} B\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \\ f(x,t) &= (1+t)^{\frac{-N}{2}-1} g\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \\ w_i(x,t) &= (1+t)^{\frac{-N}{2}-1} h_i\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \end{aligned} \right. \tag{1.15}$$

então, não é difícil ver que u satisfaz (1.8) com $u_0 = v_0$ e $t = e^s - 1$.

A mudança de variáveis é interessante, pois o operador L definido acima tem inversa compacta em $L^2(K)$ e a equação (1.9) pode ser estudada da mesma forma da equação do calor em uma região limitada Ω do $\mathbb{R}^N$.

1.2 Espaços de Sobolev com Peso

Nesta seção, introduziremos alguns resultados básicos dos espaços de Sbolev com peso a fim de que se possa fazer o estudo do controle para o sistema (1.9). Referimo-nos a [17] para maiores detalhes e desenvolvimentos.

Consideremos a solução $u = u(x,t)$ do problema (1.8). Introduzamos novas variáveis

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+t}} \ ; \ s = \log(1+t) \tag{1.16}$$

Então, dado $u = u(x,t)$ solução de (1.8), introduzamos

$$v(y,s) = e^{\frac{sN}{2}} u\big(e^{\frac{s}{2}} y, e^s - 1\big) \tag{1.17}$$

Segue que u satisfaz (1.8) se, e somente se, v satisfaz (1.9). Na sequência, analizaremos a controlabilidade aproximada do sistema (1.9) similarmente para o sistema (1.8). O operador elíptico dado em (1.9) pode também ser escrito como sendo

$$Lv = -\Delta v - \frac{y \cdot \nabla v}{2}. \tag{1.18}$$

A forma do operador L leva a considerar o peso gaussiano $K = K(y)$ como sendo

$$K(y) = \exp\left(\frac{|y|^2}{4}\right), \ y \in \mathbb{R}^N. \tag{1.19}$$

Com respeito a (1.18), temos o seguinte lema:

Lema 1.2.1 $Lv = -\dfrac{1}{K(y)}\, div\big(K(y)\nabla v\big)$.

Demonstração: Com efeito, seja

$$v_i = \frac{\partial v}{\partial y_i} = \nabla v.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}(K\nabla v) &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_i}(K v_i) = -\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial K}{\partial y_i} v_i + K \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v_i}{\partial y_i}\right] \\
&= -\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial K}{\partial y_i} v_i + K \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}\right] = -\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i K}{2} v_i + K\Delta v\right] \\
&= -K\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i v_i}{2} + \Delta v\right] = -K\left[\frac{y\cdot\nabla v}{2} + \Delta v\right] = KLv.
\end{aligned}
$$

$\square$

Introduzamos os espaços L^p com peso como sendo

$$
L^p(K) = \left\{ f \in L^p(K) : |f|_{L^p(K)} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p K(y)dy\right]^{1/p} < \infty \right\}.
$$

Para $p = 2$, temos que

$$
L^2(K) = \left\{ f \in L^2(K) : \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^2 K(y)dy < \infty \right\}
$$

é um espaço de Hilbert com norma $|\cdot|_{L^2(K)}$ induzida pelo produto interno

$$
(f,g)_{L^2(K)} = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(y)K(y)dy.
$$

Definamos o operador ilimitado L sobre $L^2(K)$ por

$$
Lv = -\Delta v - \frac{y\cdot\nabla v}{2} = -\frac{1}{K(y)} \operatorname{div}\big(K(y)\nabla v\big)
$$

como acima e $D(L) = \{v \in L^2(K) : Lv \in L^2(K)\}$.

Integrando por partes é fácil ver que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} (Lv)vK(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 K(y)dy.
$$

Portanto, é natural introduzirmos o espaço H^1 com peso

$$
H^1(K) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial f}{\partial y_i} \in L^2(K),\ i = 1, 2, \dots, N \right\}
$$

munido da norma

$$
|f|_{H^1(K)} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|f|^2 + |\nabla f|^2)K(y)dy\right]^{1/2}.
$$

De maneira similar, para qualquer $s \in \mathbb{N}$, podemos introduzir o espaço

$$
H^s(K) = \left\{ f \in L^2(K) : D^\alpha f \in L^2(K), \forall\ \alpha \in \mathbb{N},\ |\alpha| \le s \right\}.
$$

Observação 1.3 *Do lema 1.2.1, tem-se que* $L : H^2(K) \subset L^2(K) \longrightarrow L^2(K)$ *é um operador simétrico, ou seja,*

$$(Lu, v)_{L^2(K)} = (u, Lv)_{L^2(K)}, \qquad \forall\, u, v \in L^2(K).$$

Mais precisamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} Lu\, v\, K(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} uLv\, K(y)dy.$$

O operador L como em (1.18), tem inversa compacta em $L^2(K)$ e a equação (1.9) pode ser estudada da mesma forma da equação do calor em uma região limitada Ω do $\mathbb{R}^N$. De fato, as seguintes propriedades são verificadas (vide [17]):

$$\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f^2|y|^2K(y)dy \leq C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f|^2K(y)dy, \forall\, f \in H^1(K) \ \text{ e a imersão} \\
H^1(K) \hookrightarrow L^2(K) \ \text{ é compacta;} \\
\displaystyle\forall\, f \in H^1(K), \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|f|^2dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} K(y)|\nabla f|^2dy; \\
v \in H^1(K) \Leftrightarrow K^{1/2}v \in H^1(\mathbb{R}^N); \\
\displaystyle\varphi_1 = \exp\left(-\frac{|y|^2}{4}\right) \ \text{ é uma autofunção de } \ L \ \text{ correspondente a} \\
\displaystyle\lambda_1 = \frac{N}{2} \ \text{ o primeiro autovalor de } \ L, \ \text{ isto é, } \ L\varphi_1 = \frac{N}{2}\varphi_1; \\
L : H^1(K) \longrightarrow \big(H^1(K)\big)^{-1} \ \text{ é um isomorfismo, } \ D(L) = H^2(K); \\
L^{-1} : L^2(K) \longrightarrow L^2(K) \ \text{ é auto-adjunto e compacto;} \\
\text{Se } \ N = 1, v \in H^1(K) \ \text{ então } \ K^{1/2}v \in L^\infty(\mathbb{R}); \\
\text{Se } \ N = 2, H^1(K) \subset L^q(K)\,\forall\, q \geq 2 \ \text{ e } \ q \geq \infty; \\
\displaystyle\text{Se } \ N = 3, H^1(K) \subset L^{2^*}(K) \ \text{ com } 2^* = \frac{2N}{N-2}.
\end{array}\right. \tag{1.20}$$

Observação 1.4 *Mais ainda,* $L^2(K) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$ *com imersão contínua. Se* $v \in L^2(K)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^N}|v|dy = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{K^{1/2}}K^{1/2}|v|dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} K|v|^2dy\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{K}dy\right)^{1/2} < \infty.$$

Dados dois espaços de Hilbert separáveis V e H tal que $V \subset H$ com imersão contínua, V sendo denso em H, introduzamos um novo espaço de Hilbert

$$W(0,T,V,H) = \big\{\xi \in L^2(0,T,V) : \xi_t \in L^2(0,T,H)\big\}$$

equipado com a norma

$$|\xi|^2_{W(0,T,V,H)} = |\xi|^2_{L^2(0,T,V)} + |\xi_t|^2_{L^2(0,T,H)} \qquad \text{(vide [30]).}$$

Os resultados a seguir podem ser encontrados em [34] (vol. 5, pag. 480).

$$\left|\begin{array}{l} W\big(0,T,H^1(K),H^{-1}(K)\big) \subset L^2\big(0,T,L^2(K)\big) \text{ com imersão compacta} \\ \\ W\big(0,T,H^1(K),H^{-1}(K)\big) \subset C\big([0,T],L^2(K)\big) \text{ com imersão contínua} \\ \\ W\big(0,T,H^2(K),L^2(K)\big) \subset L^2\big(0,T,H^1(K)\big) \text{ com imersão compacta} \\ \\ W\big(0,T,H^2(K),L^2(K)\big) \subset C\big([0,T],H^1(K)\big) \text{ com imersão contínua} \end{array}\right. \tag{1.21}$$

1.3 Controlabilidade Aproximada

Para a mudança de variáveis $(x,t) \longrightarrow (y,s)$ que transforma $u = u(x,t)$ em $v = v(y,s)$, transformamos os funcionais custos $\{\widetilde{J}_1,\ldots,\widetilde{J}_n\}$ nos funcionais custos $\{J_1,\ldots,J_n\}$ definido por

$$\left|\begin{array}{l} J_i : L^2\big(0,S,L^2(K)\big) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \\ J_i(g,h_1,\ldots,h_i,\ldots,h_n) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^S \int_{\mathcal{O}'_i} |D_{y,s}| h_i^2 K(y)dyds \\ +\dfrac{\alpha_i}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |D_y|\, \rho_i^2(y)\, |v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)|^2 K(y)dy, \end{array}\right. \tag{1.22}$$

onde $v^S(y) = (1+t)^{N/2}u^T(x)$ com $\rho_i(y) > 0$, $\rho_i(y) = 1$ em $\mathcal{O}'_i$, $\mathbf{h} = \{h_1,\ldots,h_n\}$, α_i são constantes positivas dadas e $D_{y,s}$, D_y denotam os determinantes das transformações $(x,t) \longrightarrow (y,s)$ e $x \longrightarrow y$, respectivamente. Notemos que existem constantes positivas reais k_1,k_2,k_3,k_4 tais que

$$\left|\begin{array}{l} 0 < k_1 < |D_{y,s}| < k_2, \quad \text{para todo } \ (y,s) \\ \\ 0 < k_3 < |D_y| < k_4, \quad \text{para todo } \ y. \end{array}\right. \tag{1.23}$$

O equilíbrio de Nash para J_i são $h_1, \ldots, h_n$, que depende de g, solução de

$$J_i(g, h_1, \ldots, h_i, \ldots, h_n) \leq J_i(g, h_1, \ldots, \overline{h}_i, \ldots, h_n), \qquad \forall\, \overline{h}_i \in L^2(\mathcal{O}'_i). \tag{1.24}$$

Observação 1.5 *Os resultados de (1.20) e (1.21) provam (conforme Seção 1.6, Teorema (1.5)), que se $g \in L^2\big(0, S, L^2(K)\big)$, $h_i \in L^2\big(0, S, L^2(K)\big)$ e $v_0 \in L^2(K)$, então o sistema (1.9) admite única solução $v \in W\big(0, S, H^2(K), L^2(K)\big)$. Em particular, os funcionais custos J_i, com $1 \leq i \leq n$, estão bem definidos.*

Associado aos funcionais J_i definidos acima, consideremos os seguintes sub-problemas:

• **Problema 3** A existência da solução $h_1(g), \ldots, h_n(g)$ para as desigualdades (1.24), isto é, a existência do equilíbrio de Nash.

• **Problema 4** Assumindo a existência e unicidade do equilíbrio de Nash $h_1(g), \ldots, h_n(g)$, mostrar que, quando g varia em $L^2\big((0, S), L^2(K)\big)$, as soluções $v(y, s, g, \mathbf{h}(g))$ de (1.9), avaliadas em $s = S$, isto é, $v(y, S, g, \mathbf{h}(g))$, geram um subconjunto denso em $L^2(K)$.

Lembremos que nosso problema inicial eram os controles $f, w_1, \ldots, w_n$ atuarem de forma que a função $u(x,t)$, única solução de (1.8), atinja no tempo T um estado ideal $u^T = u^T(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ com funcionais custos definidos por (1.3).

Da mudança de variáveis (1.10), o problema (1.8) foi transformado em um problema equivalente (1.9) em espaço de Sobolev com peso. Portanto, fixado $v^S(y) \in L^2(K)$, os controles $g, h_1, \ldots, h_n$ deverão atuar tal que a única solução $v\big(y, s, g, \mathbf{h}(g)\big)$ de (1.9), avaliada em $s = S$, atinja um estado ideal $v^S(y)$. Isso será feito no sentido da controlabilidade aproximada.

De fato, é suficiente provar que se $h_1, \ldots, h_n$, dependendo de g, é o equilíbrio de Nash para os funcionais (1.22), então temos a controlabilidade aproximada. Isso significa que se existe o equilíbrio de Nash e $v\big(y, s, g, \mathbf{h}(g)\big)$ é a única solução de (1.9), então o conjunto gerado por $v\big(y, S, g, \mathbf{h}(g)\big)$ é denso em $L^2(K)$. Isso permite aproximar $v^S(y)$. É nosso objetivo provar esse fato nessa seção. Na seção 1.5 mostraremos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash .

Observação 1.6 *Graças a linearidade do sistema (1.1), podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u(x, 0) = u_0(x) = 0$ em Ω. Com efeito, se $u_0 \neq 0$, o problema de controlabilidade aproximada para sistema (1.1) pode ser transformado em um outro problema equivalente mas com $u_0 = 0$.*

Lema 1.3.1 *Tem-se a equação (1.24) se, e somente se,*

$$\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}| h_i \widehat{h}_i dy ds + \alpha_i \int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y| \rho_i^2(y) \left[v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y) \right] \widehat{v}_i(S) dy = 0 \quad (1.25)$$

$\forall\, \widehat{h}_i \in L^2(\mathcal{O}_i')$, *onde* $\widehat{v}_i$ *é solução de*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \widehat{v}_i}{\partial s} + L\widehat{v}_i + A(y,s)\widehat{v}_i + B(y,s)\cdot\nabla\widehat{v}_i - \dfrac{N}{2}\widehat{v}_i = \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}_i'} \quad em \ \mathbb{R}^N \times (0,S) \\ \widehat{v}_i(0) = 0 \quad em \ \mathbb{R}^N \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Demonstração: De fato, como cada J_i, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é convexo e semi-contínuo inferiormente (vide seção 1.5), então $h_1, \ldots, h_n$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$J_i'(g, h_1, \ldots, h_i, \ldots, h_n)\widehat{h}_i = 0 \qquad \forall\, \widehat{h}_i \in L^2(\mathcal{O}_i').$$

Observação 1.7 *Como o sistema (1.9) é linear, para qualquer escolha de controles g, h_i, sua única solução no tempo s pode ser escrita como sendo*

$$v(s) = Q_0(s)g + \sum_{i=1}^{n} Q_i(s)h_i, \quad 0 \le s \le S$$

onde Q_i são operadores lineares contínuos dependendo dos controles. No tempo $s = S$, temos

$$v(S) = L_0 g + \sum_{i=1}^{n} L_i h_i,$$

onde L_i são também operadores lineares contínuos.

Agora,

$$\begin{aligned} 0 &= J_i'(g, h_1, \ldots, h_i, \ldots, h_n) = \frac{d}{d\lambda} J_i(g, h_1, \ldots, h_i + \lambda\widehat{h}_i, \ldots, h_n)\Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\Bigg\{ \frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}|(h_i + \lambda\widehat{h}_i)^2 dy ds + \\ &+ \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\, \rho_i^2(y)\big[v(y,S,g,h_1,\ldots,h_i+\lambda\widehat{h}_i,\ldots,h_n) - v^S\big]^2 dy \Bigg\}\Bigg|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\Bigg\{ \frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}|(h_i + \lambda\widehat{h}_i)^2 dy ds + \\ &+ \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\, \rho_i^2(y)\big[L_0 g + L_1 h_1 + \cdots + L_i(h_i + \lambda\widehat{h}_i) + \cdots + L_n h_n - v^S\big]^2 dy \Bigg\}\Bigg|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{1}{2}\int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}|(h_i^2 + 2\lambda h_i\widehat{h}_i + \lambda^2\widehat{h}_i^2)dyds + \right.\\
&\left.\left.+ \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\,\rho_i^2(y)\big[L_0g + L_1h_1 + \cdots + L_ih_i + \lambda L_i\widehat{h}_i + \cdots + L_nh_n - v^S\big]^2dy\right\}\right|_{\lambda=0}\\
&= \left\{\frac{1}{2}\int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}|\frac{d}{d\lambda}(h_i^2 + 2\lambda h_i\widehat{h}_i + \lambda^2\widehat{h}_i^2)dyds + \right.\\
&\left.\left.+ \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\,\rho_i^2(y)\frac{d}{d\lambda}\big[L_0g + L_1h_1 + \cdots + L_ih_i + \lambda L_i\widehat{h}_i + \cdots + L_nh_n - v^S\big]^2dy\right\}\right|_{\lambda=0}\\
&= \left\{\frac{1}{2}\int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}|(2h_i\widehat{h}_i + 2\lambda\widehat{h}_i^2)dyds + \right.\\
&\left.\left.+ \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\,\rho_i^2(y)2\big[L_0g + L_1h_1 + \cdots + L_ih_i + \lambda L_i\widehat{h}_i + \cdots + L_nh_n - v^S\big]L_i\widehat{h}_idy\right\}\right|_{\lambda=0}\\
&= \int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}|h_i\widehat{h}_idyds + \\
&+ \alpha_i\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\,\rho_i^2(y)\big[L_0g + L_1h_1 + \cdots + L_ih_i + \cdots + L_nh_n - v^S\big]L_i\widehat{h}_idy\\
&= \int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}|h_i\widehat{h}_idyds + \\
&+ \alpha_i\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\,\rho_i^2(y)\left[\left(L_0g + \sum_{i=1}^n L_ih_i\right) - v^S\right]L_i\widehat{h}_idy\\
&= \int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'} K(y)|D_{y,s}|h_i\widehat{h}_idyds + \alpha_i\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\,\rho_i^2(y)\left[v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S\right]\widehat{v}_i(S)dy,
\end{aligned}
$$

onde

$$L_i\widehat{h}_i = \widehat{v}_i(S).$$

sendo $\widehat{v}_i$ solução de (1.26). □

Teorema 1.1 *Suponhamos que $g \in L^2\big((0,S),L^2(K)\big)$ e que exista um único equilíbrio de Nash $h_1(g),\ldots,h_n(g)$, dependendo de g, dado pelas desigualdades (1.24). Então, o conjunto das soluções $v(y,s,g,\mathbf{h}(g))$ de (1.9), avaliadas em $s = S$, é denso em $L^2(K)$.*

A demonstração será feita em duas etapas. Inicialmente, encontraremos o sistema adjunto e o sistema otimizado. Em seguida, provaremos a controlabilidade aproximada por meio de um simples argumento de análise funcional e uma propriedade da continuação única devido a C. Fabre (Teorema 1.4 de [18]).

Mais precisamente, temos:

Proposição 1.1 *Seja ω um conjunto aberto e não-vazio de $\mathbb{R}^N$, $\widehat{\omega}(s) = e^{-s/2}\omega$ e $\widehat{Q} = \{(y,s); s \in (0,S), y \in \widehat{\omega}(s)\}$. Assumamos que $A(y,s) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,S)\big)$, $B(y,s) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,S)\big)^N$. Seja $p \in L^2\big(0,S;H^1(K)\big)$ tal que*

$$\left| \begin{array}{l} -p_s + Lp + Ap - div(Bp) - \dfrac{N}{2}p - \dfrac{1}{2}y \cdot Bp = 0 \ \ em\ \mathbb{R}^N \times (0,S) \\ p = 0 \quad em \quad \widehat{Q}. \end{array} \right.$$

Então $p \equiv 0$.

Demonstração da proposição 1.1 L, A e B satisfazem as condições do teorema 1.4 devido a C. Fabre [18] e a afirmação sobre p implica que $p \in L^2_{loc}\big(0,S;H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)\big)$. Consequentemente $p \equiv 0$. $\square$

Demonstração do teorema 1.1

Etapa 1 : Suponhamos que exista o equilíbrio de Nash $h_1, \ldots, h_n$, dependendo de g, para os funcionais $J_1, \ldots, J_n$ definidos por (1.22). Isto implica que $h_1, \ldots, h_n$ é a solução da equação de Euler-Lagrange (1.25), condicionado ao sistema linear parabólico (1.26). Para obtermos um sistema otimizado, precisamos do sistema adjunto relacionado a (1.26).

Para tal, multiplicamos $(1.26)_1$ por $K(y)p_i$ e integramos em $\mathbb{R}^N \times (0,S)$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i(S)\widehat{v}_i(S)dy - \int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i(0)\widehat{v}_i(0)dy - \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i'\widehat{v}_i dyds \\ &+ \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)(L\widehat{v}_i)p_i dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)A(y,s)\widehat{v}_i p_i dyds \\ &+ \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)B(y,s)\cdot \nabla\widehat{v}_i p_i dyds - \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)\frac{N}{2}\widehat{v}_i p_i dyds \\ &= \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i\widehat{h}_i\chi_{\mathcal{O}_i'}dyds. \end{aligned}$$

Notando que $\widehat{v}_i(0) = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(y)(L\widehat{v}_i)p_i dy = \int_{\mathbb{R}^N} K(y)(Lp_i)\widehat{v}_i dy$$

e

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(Bp_i)\widehat{v}_i K(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} y \cdot Bp_i \widehat{v}_i K(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} Bp_i \nabla \widehat{v}_i K(y) dy,$$

então da expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i(S)\widehat{v}_i(S)dy - \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)\widehat{v}_i p_i' dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)(Lp_i)\widehat{v}_i dyds \\
&+ \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)A(y,s)\widehat{v}_i p_i dyds - \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(Bp_i)\widehat{v}_i K(y)dyds \\
&- \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} y \cdot Bp_i \widehat{v}_i K(y) dy - \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)\frac{N}{2}\widehat{v}_i p_i dyds = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}_i'} dyds,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\langle \widehat{v}_i(S), p_i(S)\rangle_{L^2(K)} + \\
&+ \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \left[-p_i' + Lp_i + Ap_i - \operatorname{div}(Bp_i) - \frac{N}{2}p_i - \frac{1}{2} y \cdot Bp_i \right] K(y)\widehat{v}_i dyds \qquad (1.27)\\
&= \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}_i'} dyds.
\end{aligned}$$

De (1.27), definimos o sistema adjunto por

$$\left| \begin{array}{l} -p_i' + Lp_i + Ap_i - \operatorname{div}(Bp_i) - \dfrac{N}{2}p_i - \dfrac{1}{2} y \cdot Bp_i = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,S) \\ p_i(y,S) = |D_y|\rho_i^2(y)[v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)] \text{ em } \mathbb{R}^N \end{array} \right. \qquad (1.28)$$

Com a hipótese adicional sobre $A(y,S)$ e $B(y,S)$, temos que para cada $p(y,S) \in H^{-1}(K)$, existe exatamente uma solução p_i de (1.28), com $p_i \in L^2\big(0,S;L^2(K)\big) \cap C\big([0,S];H^{-1}(K)\big)$ (vide Seção 1.6, Teorema 1.6).

A condição para $p_i(y,S)$ em (1.28) é motivada do equilíbrio de Nash (1.25).

Agora, substituindo (1.28) em (1.27), obtemos

$$\left\langle \widehat{v}_i(S), |D_y|\rho_i^2(y)[v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)] \right\rangle_{L^2(K)} = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}_i'} dyds,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\rho_i^2(y)[v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)]\widehat{v}_i(S)dy = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}_i'} dyds.$$

Multiplicando ambos os membros da expressão acima por $\alpha_i > 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\alpha_i \int_{\mathbb{R}^N} K(y)|D_y|\rho_i^2(y)[v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)]\widehat{v}_i(S)dy \\
&= \alpha_i \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}_i'} dyds.
\end{aligned} \qquad (1.29)$$

Agora, notemos que

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y) p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}'_i} dyds = \int_0^S \int_{\mathcal{O}'_i} K(y) p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}'_i}\, dyds$$
$$+ \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}'_i} K(y) p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}'_i}\, dyds$$

isto é,

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y) p_i \widehat{h}_i \chi_{\mathcal{O}'_i} dyds = \int_0^S \int_{\mathcal{O}'_i} K(y) p_i \widehat{h}_i dyds. \tag{1.30}$$

Substituindo (1.25) e (1.30) no lado esquerdo e no lado direito de (1.29), respectivamente, obtemos

$$-\int_0^S \int_{\mathcal{O}'_i} K(y) |D_{y,s}| h_i \widehat{h}_i dyds = \alpha_i \int_0^S \int_{\mathcal{O}'_i} K(y) p_i \widehat{h}_i dyds,$$

isto é,

$$\int_0^S \int_{\mathcal{O}'_i} K(y) \big(|D_{y,s}| h_i + \alpha_i p_i \big) \widehat{h}_i dyds = 0, \quad \forall \widehat{h}_i \in L^2(\mathcal{O}'_i).$$

Do Teorema de Du Bois Raymond, segue que

$$h_i = -\frac{\alpha_i p_i}{|D_{y,s}|} \qquad \text{em} \qquad \mathcal{O}'_i \times (0, S).$$

Portanto, se $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais custos $J_1, \ldots, J_n$ o qual está associado a equação (1.9), então temos o sistema otimizado

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial s} + Lv + Av + B \cdot \nabla v - \dfrac{N}{2} v + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i p_i}{|D_{y,s}|} \chi_{\mathcal{O}'_i} = g \chi_{\mathcal{O}'} \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, S) \\ -p'_i + Lp_i + Ap_i - \text{div } (Bp_i) - \dfrac{N}{2} p_i - \dfrac{1}{2} y \cdot Bp_i = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, S) \\ v(0) = 0, \;\; p_i(y, S) = |D_y| \rho_i^2(y) \left[v(y, S; g, \mathbf{h}) - v^S(y) \right] \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \tag{1.31}$$

Etapa 2 : Suponhamos, no momento, a existência de um par $\{v, p_i\}$ solução de (1.31).

Para simplificar os cálculos, assumamos que $v^S(y) = 0$, pois o sistema é linear (é suficiente usar um argumento de translação).

De fato, decompomos a solução (v, p_i) de (1.31) como

$$(v, p_i) = (V, P_i) + (U, q_i),$$

onde (V, P_i) é solução do sistema

$$(*)\left|\begin{array}{l} V' + LV + AV + B\cdot\nabla V - \dfrac{N}{2}V + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i P_i}{|D_{y,s}|}\chi_{\mathcal{O}_i'} = g\chi_{\mathcal{O}'} \text{ em } \mathbb{R}^N\times(0,S) \\ -P_i' + LP_i + AP_i - \text{div }(BP_i) - \dfrac{N}{2}P_i - \dfrac{1}{2}y\cdot BP_i = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N\times(0,S) \\ V(0) = 0,\ \ P_i(y,S) = |D_y|\rho_i^2(y)\left[V(y,S;g,\mathbf{h}) - V^S(y)\right] \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{array}\right.$$

e (U, q_i) é solução do sistema

$$(**)\left|\begin{array}{l} U' + LU + AU + B\cdot\nabla U - \dfrac{N}{2}U + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i q_i}{|D_{y,s}|}\chi_{\mathcal{O}_i'} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N\times(0,S) \\ -q_i' + Lq_i + Aq_i - \text{div }(Bq_i) - \dfrac{N}{2}q_i - \dfrac{1}{2}y\cdot Bq_i = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N\times(0,S) \\ U(0) = 0,\ \ q_i(y,S) = |D_y|\rho_i^2(y)U(y,S;g,\mathbf{h}) \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{array}\right.$$

Portanto, se V e U são funções definidas pelos sistemas $(*)$ e $(**)$ e se $U(.,S,g,\mathbf{h})$ $\big($note que U é solução do sistema $(**)$ com $U^S(y) = 0$ $\big)$ descreve um conjunto denso em $L^2(K)$, então

$$v(y,S,g,h) = V(y,S,g,\mathbf{h}) + U(y,S,g,\mathbf{h})$$

com V fixado, também descreve um conjunto denso em $L^2(K)$.

Com efeito, dado $x \in L^2(K)$, se $\{U(y,S,g,\mathbf{h})\}$ descreve um conjunto denso em $L^2(K)$, ou seja, se $\overline{\{U(.,S,g,\mathbf{h})\}} = L^2(K)$, então existe uma sequência $(U_n) \subset \{U(.,S,g,\mathbf{h})\}$ tal que

$$||U_n - x||_{L^2(K)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Devemos mostrar que existe uma sequência $(v_n) \subset \{V(.,S,g,\mathbf{h})\}$ tal que

$$||v_n - x||_{L^2(K)} < \varepsilon.$$

Tomemos

$$v_n = V_n + U_n,$$

onde $\{V_n\}$ é uma sequência fixada e $\{U_n\} \subset \{U(.,S,g,\mathbf{h})\}$.

Assim,

$$||v_n - x||_{L^2(K)} = ||V_n + U_n - x||_{L^2(K)} \leq ||U_n - x||_{L^2(K)} + ||V_n||_{L^2(K)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, podemos supor que $v^S(y) = 0$. Agora, dado $\xi \in L^2(K)$, suponhamos que

$$(v(.,S;g,\mathbf{h}(g)),\xi)_{L^2(K)} = 0, \qquad \forall\, g \in L^2\big(\mathcal{O}' \times (0,S)\big).$$

Devemos mostrar que $\xi \equiv 0$. Esse argumento implica na densidade de $v\big(.,S,g,\mathbf{h}(g)\big)$ em $L^2(K)$ para $g \in L^2\big(\mathcal{O}' \times (0,S)\big)$.

Motivados por (1.31), como $v^S(y) = 0$, consideramos a solução $\{\varphi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ do sistema adjunto

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial s} + L\varphi + A\varphi - \operatorname{div}(B\varphi) - \dfrac{N}{2}\varphi - \dfrac{1}{2}y\cdot B\varphi = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,S) \\ \dfrac{\partial \psi_i}{\partial s} + L\psi_i + A\psi_i + B\cdot\nabla\psi_i - \dfrac{N}{2}\psi_i = -\dfrac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i\varphi\chi_{\mathcal{O}'_i} \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,S) \\ \varphi(S) = \xi + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |D_y|\psi_i(S)\rho_i^2 \text{ em } \mathbb{R}^N \\ \psi_i(0) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{array}\right. \tag{1.32}$$

Multiplicando $(1.32)_1$ por $K(y)v$, integrando o resultado em $\mathbb{R}^N \times (0,S)$, e usando que $v(0) = 0$ em $\mathbb{R}^N$ e a equação $(1.32)_3$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} K(y)(L\varphi)v\,dyds &= \int_{\mathbb{R}^N} K(y)\varphi(S)v(S)dy - \int_{\mathbb{R}^N} K(y)\varphi(0)v(0)dy \\ &\quad - \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} K(y)\varphi\frac{\partial v}{\partial s}dyds - \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} K(y)vA\varphi\,dyds \\ &\quad + \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(B\varphi)K(y)v\,dyds + \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} \frac{N}{2}K(y)\varphi v\,dyds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} y\cdot B\varphi K(y)v\,dyds.\end{aligned}$$

Como $v(0) = 0$ em $\mathbb{R}^N$ e notando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(y)(L\varphi)v\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} K(y)(Lv)\varphi\,dy$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(B\varphi)K(y)v\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}y\cdot B\varphi K(y)v\,dy = -\int_{\mathbb{R}^N} K(y)\varphi B\cdot\nabla v\,dy,$$

então, da equação acima, resulta que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(S)v(S)K(y)dy &= \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} \varphi Lv K(y)dyds + \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} K(y)\varphi\frac{\partial v}{\partial s}dyds \\ &\quad + \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} K(y)\varphi Av\,dyds + \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} K(y)\varphi B\cdot\nabla v\,dyds \\ &\quad - \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} \frac{N}{2}K(y)\varphi v\,dyds.\end{aligned}$$

Sendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(S)v(S)K(y)dy = \big(\varphi(S), v(S)\big)_{L^2(K)}$$

e com $\varphi(S) = \xi + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(S){\rho_i}^2|D_y|$ em $\mathbb{R}^N$ $\big($equação $(1.32)_3\big)$, então obtemos que

$$\begin{aligned} &-\big(\xi, v(S)\big)_{L^2(K)} - \sum_{i=1}^{n} \big(\psi_i(S)\rho_i^2|D_y|, v(S)\big)_{L^2(K)} + \\ &\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \varphi K(y) \left(\frac{\partial v}{\partial s} + Lv + Av + B\cdot\nabla v - \frac{N}{2}v\right) dyds = 0. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Por outro lado, multiplicando $(1.32)_2$ por $K(y)p_i$, integrando o resultado em $\mathbb{R}^N \times (0,S)$, notando que $\psi_i(0) = 0$ em $\mathbb{R}^N$ e

$$-p_i' + Lp_i + Ap_i - \text{div }(Bp_i) - \frac{N}{2}p_i - \frac{1}{2}y\cdot Bp_i = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,S),$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \big(\psi_i(S), p_i(S)\big)_{L^2(K)} + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i\varphi p_i K(y)\chi_{\mathcal{O}_i'}dyds = 0. \tag{1.34}$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \psi_i(S)p_i(S)K(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i(0)p_i(0)K(y)dy - \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i p_i' K(y)dyds \\ &+ \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} (L\psi_i)p_i K(y)dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} p_i A\psi_i K(y)dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} B\cdot\nabla\psi_i\, p_i K(y)dyds \\ &- \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)\frac{N}{2}\psi_i p_i ds = -\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i\varphi p_i\chi_{\mathcal{O}_i'}K(y)dyds. \end{aligned}$$

Como $\psi_i(0) = 0$ em $\mathbb{R}^N$ e notando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (L\psi_i)p_i K(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i(Lp_i)K(y)dy,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} B\cdot\nabla\psi_i\, p_i K(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^N} \text{div}(Bp_i)\psi_i K(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}y_i\cdot Bp_i\psi_i K(y)dy,$$

obtemos da última expressão que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \psi_i(S)p_i(S)K(y)dy - \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i p_i' K(y)dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i(Lp_i)K(y)dyds \\ &+ \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i A p_i K(y)dyds - \int_{\mathbb{R}^N} \text{div}(Bp_i)\psi_i K(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}y_i\cdot Bp_i\psi_i K(y)dy \\ &- \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)\frac{N}{2}\psi_i p_i ds = -\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i\varphi p_i\chi_{\mathcal{O}_i'}K(y)dyds. \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\big(\psi(S), p_i(S)\big)_{L^2(K)}+\\
&+\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} K(y)\psi_i \underbrace{\left(-p_i' + Lp_i + Ap_i - \operatorname{div}(Bp_i) - \frac{N}{2}p_i - \frac{1}{2}y\cdot Bp_i\right)}_{=0} dyds\\
&= -\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i'} K(y)dyds
\end{aligned}
$$

Por $(1.31)_2$, a expressão acima fica como sendo

$$\big(\psi_i(S), p_i(S)\big)_{L^2(K)} + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i'} K(y)dyds = 0.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \big(\psi_i(S), p_i(S)\big)_{L^2(K)} + \sum_{i=1}^n \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i'} K(y)dyds = 0.$$

Como

$$\sum_{i=1}^n \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i'} K(y)dyds = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i'} K(y)dyds,$$

então da última equação resulta, que

$$\sum_{i=1}^n \big(\psi_i(S), p_i(S)\big)_{L^2(K)} + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i'} K(y)dyds = 0$$

e portanto, segue (1.34).

Como $v^S(y) = 0$ segue de $(1.31)_3$ que

$$p_i(S) = |D_y|\rho_i^2(y)v(S). \tag{1.35}$$

Substituindo (1.35) em (1.34), temos

$$\sum_{i=1}^n \big(\psi_i(S), \rho_i^2(y)|D_y|v(S)\big)_{L^2(K)} + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i'} K(y)dyds = 0. \tag{1.36}$$

Somando (1.33) e (1.36), resulta que

$$
\begin{aligned}
&-\underbrace{\big(\xi, v(S)\big)}_{=0}{}_{L^2(K)} - \sum_{i=1}^n \big(\psi_i(S)\rho_i^2|D_y|, v(S)\big)_{L^2(K)}\\
&+\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \varphi K(y)\left(\frac{\partial v}{\partial s} + Lv + Av + B\cdot\nabla v - \frac{N}{2}v\right) dyds\\
&+\sum_{i=1}^n \big(\psi_i(S), \rho_i^2|D_y|v(S)\big)_{L^2(K)} + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|D_{y,s}|}\alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i'} K(y)dyds = 0.
\end{aligned}
$$

Então,

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \varphi K(y) \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial s} + Lv + Av + B \cdot \nabla v - \frac{N}{2} v + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|D_{y,s}|} \alpha_i p_i \chi_{\mathcal{O}'_i} \right)}_{= g\chi_{\mathcal{O}'}} dyds = 0.$$

Por $(1.31)_1$, a expressão acima fica como sendo

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \varphi K(y) g \chi_{\mathcal{O}'} dyds = 0, \qquad \forall\, g \in L^2\big(\mathcal{O}' \times (0,S)\big).$$

Notemos que,

$$0 = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \varphi K(y) g \chi_{\mathcal{O}'} dyds = \int_0^S \int_{\mathcal{O}'} \varphi K(y) g \chi_{\mathcal{O}'} dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}'} \varphi K(y) g \chi_{\mathcal{O}'} dyds,$$

ou seja,

$$\int_0^S \int_{\mathcal{O}'} \varphi K(y) g \, dyds = 0, \qquad \forall\, g \in L^2\big(\mathcal{O}' \times (0,S)\big).$$

Então,

$$\varphi = 0 \;\text{ em }\; \mathcal{O}' \times (0,S).$$

Segue do teorema da continuação única de C. Fabre [18] que

$$\varphi = 0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \times (0,S). \tag{1.37}$$

Substituindo (1.37) em $(1.32)_2$ e de $(1.32)_4$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \psi_i}{\partial s} + L\psi_i + A\psi_i + B \cdot \nabla \psi_i - \dfrac{N}{2} \psi_i = 0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \times (0,S) \\ \psi_i(0) = 0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\psi_i = 0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \times (0,S). \tag{1.38}$$

Substituindo (1.37) e (1.38) em $(1.32)_3$, temos

$$\xi = 0$$

e portanto o Teorema 1.1 está concluído. $\square$

Agora vamos retornar ao problema de controle aproximado para o sistema parabólico (1.8) (sistema inicial). Temos o seguinte resultado de controlabilidade aproximada.

Teorema 1.2 *Suponhamos que $f \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$ e que exista um único equilíbrio de Nash $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, dependendo de f, dado pelas desigualdades (1.4). Então, o conjunto das soluções $u\big(x,t,f,w_1(f),\ldots,w_n(f)\big)$ de (1.8), avaliadas no tempo $t = T$, é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Dados $u_0, u^T \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$ e $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe um único equilíbrio de Nash $\mathbf{w} = \mathbf{w}(f)$ tal que a solução u de (1.8) satisfaz

$$||u(T) - u^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \tag{1.39}$$

Observação 1.8 *Se $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ é o único equilíbrio de Nash, dependendo de g, para (1.22), então sua transformação, pela mudança de variáveis (1.15), $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ é o único equilíbrio de Nash para (1.3), que depende de f (isto será provado na Secção 1.4). A existência e unicidade do equilíbrio de Nash $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ para (1.22) será provada na Seção (1.5).*

Dividiremos a prova do Teorema 1.2 em duas etapas.

<u>**Etapa 1**</u>: $u^T \in L^2(K)$

Consideremos a mudança de variáveis

$$v^S(y) = (T+1)^{N/2} u^T\big((T+1)^{1/2} y\big)$$

e

$$S = \log(T+1).$$

Então, $v^S \in L^2(K)$, visto que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|v^S(y)|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}^N} K(y)(T+1)^N |u^T(T+1)^{1/2} y|^2 dy \\ &= (T+1)^N \int_{\mathbb{R}^N} K(y)|u^T(T+1)^{1/2} y|^2 dy < \infty,\end{aligned}$$

uma vez que $u^T \in L^2(K)$.

Além disso, $v^0 = u^0 = 0 \in L^2(K)$. Como $v^S \in L^2(K)$, então pelo teorema 1.1 e a observação 1.8, conhecemos a existência de um único equilíbrio de Nash $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ para (1.22) tal que a solução $v(y,s,g,\mathbf{h})$ de (1.9) satisfaz

$$||v(S) - v^S||_{L^2(K)} \leq \varepsilon.$$

Também,

$$u(x,t) = (1+t)^{-N/2} v\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right)$$

satisfaz (1.8) com

$$\left| \begin{array}{l} f(x,t) = (1+t)^{-N/2-1} g\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \\ w_i(x,t) = (1+t)^{-N/2-1} h_i\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \end{array} \right.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
||u(T) - u^T||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(T) - u^T|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| (1+T)^{-N/2} v\left(\frac{x}{\sqrt{1+T}}, \log(1+T)\right) - (1+T)^{-N/2} v^S\left(\frac{x}{\sqrt{1+T}}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| (1+T)^{-N/2} \left[v\left(\frac{x}{\sqrt{1+T}}, \log(1+T)\right) - v^S\left(\frac{x}{\sqrt{1+T}}\right)\right]\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+T)^{-N} \left| v\left(\frac{x}{\sqrt{1+T}}, \log(1+T)\right) - v^S\left(\frac{x}{\sqrt{1+T}}\right)\right|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (1+T)^{-N} e^{\frac{|x|^2}{4(1+T)}} \left| v\left(\frac{x}{\sqrt{1+T}}, \log(1+T)\right) - v^S\left(\frac{x}{\sqrt{1+T}}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+T)^{-N} e^{\frac{|y|^2}{4}} \left| v(y,S) - v^S(y)\right|^2 (1+T)^{N/2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+T)^{-N/2} K(y) \left| v(y,S) - v^S(y)\right|^2 dy \\
&= (1+T)^{-N/2} ||v(y,S) - v^S(y)||^2_{L^2(K)} \leq \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$||u(T) - u^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon.$$

<u>**Etapa 2**</u>: $u^T \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Como $L^2(K) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ com imersão densa, então existe uma sequência $\{u_n^T\} \subset L^2(K)$ tal que $u_n^T \to u^T$ fortemente em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, existe $\widetilde{N} > 0$ tal que para $n > \widetilde{N}$ implica que

$$||u^T - u_n^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\{u_n^T\} \subset L^2(K)$, então da etapa 1, conhecemos a existência de um único equilíbrio de Nash $\mathbf{w}_n$ tal que $u(x,t,f,\mathbf{w}_n)$ solução de (1.8), $\mathbf{w} = \mathbf{w}_n$, satisfaz

$$||u(T) - u_n^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então $u(x,t,f,\mathbf{w}_{\widetilde{N}})$ solução de (1.8), com $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\widetilde{N}}$ satisfaz

$$\begin{aligned}
||u(T) - u^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= ||u(T) - u_n^T + u_n^T - u^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq ||u(T) - u_n^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} + ||u_n^T - u^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

isto é,

$$||u(T) - u^T||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon,$$

conforme queríamos demonstrar. $\square$

1.4 Equilíbrio de Nash no $\mathbb{R}^N$

Nosso propósito agora é mostrar que $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais $\widetilde{J}_i$ definido por (1.3), desde que $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ é um equilíbrio de Nash, dependendo de g, para (1.22) (e isto será mostrado na próxima seção), isto é, mostremos a observação (1.8). Seja

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+t}}\,, \;\; s = \log(1+t).$$

Então,

$$y = e^{-s/2}x = e^{-s/2}(x_1, \ldots, x_n) = (e^{-s/2}x_1, \ldots, e^{-s/2}x_n) \text{ e } t = e^s - 1.$$

Consideremos o difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc}
\phi \; : & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\
& (x,t) & \longmapsto & (y,s),
\end{array}$$

Portanto,

$$\phi(x,t) = \big(\underbrace{e^{-s/2}x_1}_{\phi_1}, \ldots, \underbrace{e^{-s/2}x_n}_{\phi_n}, \underbrace{\log(1+t)}_{\phi_{n+1}}\big).$$

A matriz jacobiana de ϕ é dada por

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \\
\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial t}
\end{pmatrix} \tag{1.40}$$

Notemos que

$$\phi_1 = y_1$$
$$\phi_2 = y_2$$
$$\vdots$$
$$\phi_n = y_n.$$

Também, temos

$$y_i = e^{-s/2}x_i = \frac{x_i}{e^{s/2}} = \frac{x_i}{\sqrt{e^s}} = \frac{x_i}{\sqrt{1+t}} = \frac{x_i}{(1+t)^{1/2}} = x_i(1+t)^{-1/2}.$$

Logo,

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{1}{2}(1+t)^{-3/2}x_i = -\frac{1}{2}e^{-3s/2}e^{s/2}y_i = -\frac{1}{2}e^{-s}y_i,$$

ou seja,

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{1}{2}e^{-s}y_i,$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t} = -\frac{1}{2}e^{-s}y_1 \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t} = -\frac{1}{2}e^{-s}y_2 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \phi_n}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}e^{-s}y_n
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Substituindo (1.41) em (1.40)

$$\begin{pmatrix}
e^{-s/2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2}e^{-s}y_1 \\
0 & e^{-s/2} & \cdots & 0 & -\frac{1}{2}e^{-s}y_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & e^{-s/2} & -\frac{1}{2}e^{-s}y_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1+t}
\end{pmatrix}$$

Portanto,

$$D_{y,s} = e^{-sN/2}\frac{1}{1+t} = e^{-sN/2}e^{-s},$$

onde $D_{y,s}$, como vimos, é o determinante da transformação de $(x,t) \longrightarrow (y,s)$.

Pelo teorema da mudança de variáveis, temos

$$dyds = |D_{y,s}|dxdt,$$

isto é,

$$dyds = e^{-sN/2}e^{-s}dxdt. \tag{1.42}$$

Também, como

$$y = e^{-s/2}x,$$

então

$$dy = e^{-sN/2}dx. \tag{1.43}$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definamos

$$\widetilde{\rho}_i = \begin{cases} \rho_i & \text{em } G_i \\ 0 & \text{fora de } G_i \end{cases}$$

Com isto, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.3 $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ *é um equilíbrio de Nash para os funcionais* $\widetilde{J}_i$ *definido por (1.3), desde que* $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ *é um equilíbrio de Nash para os funcionais* J_i *definido por (1.22).*

Demonstração: Devemos mostrar que

$$\widetilde{J}_i(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) \le \widetilde{J}_i(f, w_1, \ldots, \overline{w}_i, \ldots, w_n),\ \forall \overline{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i).$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de $(1.10)_5$, temos

$$w_i(x,t) = e^{-sN/2}e^{-s}h_i(y,s).$$

Portanto,

$$\widetilde{J}_i(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i^2 dxdt + \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{\rho}_i[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)]|^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} e^{-sN}e^{-2s}h_i^2 e^{sN/2}e^s dyds + \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\rho}_i^2 e^{sN/2}|e^{-sN/2}v(y,S,g,\mathbf{h}) - e^{-sN/2}v^S(y)|^2 dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} \frac{1}{K}Ke^{-sN}e^{sN/2}e^{-2s}e^s h_i^2 dyds +$$
$$+ \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{K}e^{-sN}e^{sN/2}\widetilde{\rho}_i^2 K|v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)|^2 dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} \frac{1}{K} K e^{-sN/2} e^{-s} h_i^2 dy ds + \frac{\alpha_i}{2}\int_{G_i} \frac{1}{K} K e^{-sN/2} \rho_i^2 |v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)|^2 dy \\
&\leq \frac{1}{|K|_\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} K \underbrace{e^{-sN/2} e^{-s}}_{=|D_{y,s}|} h_i^2 dy ds + \frac{\alpha_i}{2}\int_{G_i} K \underbrace{e^{-sN/2}}_{=|D_y|} \rho_i^2 |v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)|^2 dy\right] \\
&= \frac{1}{|K|_\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} K |D_{y,s}| h_i^2 dy ds + \frac{\alpha_i}{2}\int_{G_i} K |D_y|\, \rho_i^2\, |v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)|^2 dy\right] \\
&\leq \frac{1}{|K|_\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} K |D_{y,s}| h_i^2 dy ds + \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K |D_y|\, \rho_i^2\, |v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)|^2 dy\right] \\
&= \frac{1}{|K|_\infty} J_i(g, h_1, \ldots, h_i, \ldots, h_n),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{J}_i(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) &\leq \frac{1}{|K|_\infty} J_i(g, h_1, \ldots, h_i, \ldots, h_n) \\
&\leq \frac{1}{|K|_\infty} J_i(g, h_1, \ldots, \overline{h}_i, \ldots, h_n) \quad \forall\, \overline{h}_i \in L^2(\mathcal{O}_i),
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

desde que $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais J_i.

Logo, de (1.44), temos

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{J}_i(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) \leq \frac{1}{|K|_\infty} J_i(g, h_1, \ldots, \overline{h}_i, \ldots, h_n) \\
&= \frac{1}{|K|_\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathcal{O}_i'} K |D_{y,s}| \overline{h}_i^2 dy ds + \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K |D_y|\, \rho_i^2\, |v(y,S,g,\mathbf{h}) - v^S(y)|^2 dy\right] \\
&= \frac{1}{|K|_\infty}\Bigg[\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} K e^{-sN/2} e^{-s} e^{sN} e^{2s} \overline{w}_i^2 e^{-sN/2} e^{-s} dx dt + \\
&+ \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K e^{-sN/2} \rho_i^2\, |e^{sN/2} u(x,T,f,\mathbf{w}) - e^{sN/2} u^T(x)|^2 e^{-sN/2} dx\Bigg] \\
&= \frac{1}{|K|_\infty}\Bigg[\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} K \underbrace{e^{-sN/2} e^{-sN/2} e^{sN}}_{=1} \underbrace{e^{-s} e^{-s} e^{2s}}_{=1} \overline{w}_i^2 dx dt \\
&+ \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K \underbrace{e^{-sN} e^{sN}}_{=1} \rho_i^2\, |u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)|^2 dx\Bigg] \\
&= \frac{1}{|K|_\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} K \overline{w}_i^2 dx dt + \frac{\alpha_i}{2}\int_{G_i} K \widetilde{\rho}_i^2\, |u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)|^2 dx\right] \\
&\leq \frac{|K|_\infty}{|K|_\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \overline{w}_i^2 dx dt + \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\rho}_i^2\, |u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)|^2 dx\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \overline{w}_i^2 dxdt + \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\rho}_i^2 \, |u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)|^2 dx \\
&= \widetilde{J}_i(f, w_1, \ldots, \overline{w}_i, \ldots, w_n),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\widetilde{J}_i(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) \leq \widetilde{J}_i(f, w_1, \ldots, \overline{w}_i, \ldots, w_n), \quad \forall\, \overline{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i).
$$

$\square$

1.5 Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash

Consideremos os funcionais custos J_i definidos por (1.22) correspondentes a equação (1.9).

Inicialmente reescrevemos o sistema (1.25). Para isso consideremos os espaços funcionais

$$
\left|
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_i = L^2\big(0, S; L^2(K)\big) \\
&\mathcal{H} = \prod_{i=1}^n \mathcal{H}_i = L^2\big(0, S; L^2(K)\big)^n,
\end{aligned}
\right.
\tag{1.45}
$$

e os operadores (resolvente) $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i, L^2(K))$ definido como (vide Seção 1.3) $L_i h_i = v_i(S)$, solução do problema

$$
\left|
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_i}{\partial s} + Lv_i + Av_i + B\cdot\nabla v_i - \frac{N}{2}v_i = h_i \chi_{\mathcal{O}_i'} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,S) \\
&v_i(0) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.
\end{aligned}
\right.
\tag{1.46}
$$

Note que v_i pertence a $C\big([0,S]; H^1(K)\big)$, com

$$
|v_i|_{C([0,S];H^1(K))} \leq C_i(T)|v_i|_{\mathcal{H}_i},
\tag{1.47}
$$

e $L_i h_i = v_i(S)$ é linear, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, justificando que $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i, H^1(K))$ ou $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i, L^2(K))$.

Fixado $g \in L^2\big(\mathcal{O}' \times (0,S)\big)$, poderemos escrever

$$
v(y, S, g, \mathbf{h}) = z^S(y) + \sum_{i=1}^n L_i h_i(y, S)
$$

onde $z^S(y)$ é fixo.

De fato, lembremos que, na definição de J_i, dado em (1.22), $v(y,S,g,\mathbf{h})$ é a única solução do problema (1.9) cujo lado direito é dado por

$$g(y,s)\chi_{\mathcal{O}'}+\sum_{i=1}^{n}h_i(y,s)\chi_{\mathcal{O}'_i} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N\times(0,S).$$

Portanto, para $g\in L^2\big(\mathcal{O}'\times(0,S)\big)$ fixado, obtemos $z\in C\big([0,T];L^2(K)\big)$ como única solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial s}+Lz+Az+B\cdot\nabla z-\dfrac{N}{2}z=g(y,s)\chi_{\mathcal{O}'} \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^N\times(0,S) \\ z(x,0)=0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \end{array}\right. \tag{1.48}$$

Assim, de (1.46) e (1.48), segue que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}v_i+z$ é também solução de (1.9). Pela unicidade da solução, a solução $v(y,S,g,\mathbf{h})$ de (1.9) pode ser escrita como sendo

$$v(y,s,g,\mathbf{h})=z(y,s,g)+\sum_{i=1}^{n}v_i(y,s,\mathbf{h}).$$

Em $s=S$, temos

$$v(y,S,g,\mathbf{h})=z(y,S,g)+\sum_{i=1}^{n}v_i(y,S,\mathbf{h})=z^S(y)+\sum_{i=1}^{n}L_ih_i(y,S) \tag{1.49}$$

conforme queríamos.

De (1.49), o funcional J_i pode ser escrito como sendo

$$\begin{aligned}
&J_i(g,h_1,\dots,h_i,\dots,h_n)=\\
&=\frac{1}{2}\int_0^S\int_{\mathcal{O}'_i}|D_{y,s}|h_i^2K(y)dyds+\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N}K(y)|D_y|\rho_i^2(y)\left(\sum_{i=1}^{n}L_ih_i+z^S(y)-v^S(y)\right)dy\\
&=\frac{1}{2}\int_0^S\int_{\mathcal{O}'_i}K(y)|D_{y,s}|h_i^2dyds+\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N}K(y)|D_y|\rho_i^2(y)\left(\sum_{i=1}^{n}L_ih_i-\big(v^S(y)-z^S(y)\big)\right)dy\\
&=\frac{1}{2}\left|\left||D_{y,s}|^{1/2}h_i\right|\right|^2_{\mathcal{H}_i}+\frac{\alpha_i}{2}\left|\left||D_y|^{1/2}\rho_i\left(\sum_{i=1}^{n}L_ih_i-\eta^S(y)\right)\right|\right|^2_{L^2(K)},
\end{aligned}$$

onde $\eta^S(y)=v^S(y)-z^S(y)$.

Afirmação : Para cada i, o funcional J_i é conexo e semi-contínuo inferiormente.

Com efeito, a convexidade é dada por

$$
\begin{aligned}
&J_i(g,h_1,\dots,\lambda\overline{h}_i+(1-\lambda)\overline{\overline{h}}_i,\dots,h_n)=\\
&=\frac{1}{2}\Big|\Big||D_{y,s}|^{1/2}\big(\lambda\overline{h}_i+(1-\lambda)\overline{\overline{h}}_i\big)\Big|\Big|^2_{\mathcal{H}_i}\\
&+\frac{\alpha_i}{2}\Big|\Big||D_y|^{1/2}\rho_i\left(\sum_{i=1}^{n}L_i\big(\lambda\overline{h}_i+(1-\lambda)\overline{\overline{h}}_i\big)-\eta^S(y)\right)\Big|\Big|^2_{L^2(K)}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'}K(y)\Big||D_{y,s}|^{1/2}\lambda\overline{h}_i+(1-\lambda)K(y)|D_{y,s}|\overline{\overline{h}}_i\Big|^2_{\mathbb{R}}dyds\\
&+\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N}K(y)\rho_i^2(y)|D_y|\left[\left(\sum_{i=1}^{n}L_i\big(\lambda\overline{h}_i+(1-\lambda)\overline{\overline{h}}_i\big)-\eta^S(y)\right)\right]^2dy\\
&\le\frac{\lambda}{2}\int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'}K(y)\Big||D_{y,s}|^{1/2}\overline{h}_i\Big|^2_{\mathbb{R}}dyds+\frac{(1-\lambda)}{2}\int_0^S\int_{\mathcal{O}_i'}K(y)\Big||D_{y,s}|^{2}\overline{\overline{h}}_i\Big|^2_{\mathbb{R}}dyds\\
&+\lambda\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N}K(y)\rho_i^2(y)|D_y|\left[\sum_{i=1}^{n}L_i\overline{h}_i-\eta^S(y)\right]^2dy\\
&+(1-\lambda)\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathbb{R}^N}K(y)\rho_i^2(y)|D_y|\left[\sum_{i=1}^{n}L_i\overline{\overline{h}}_i-\eta^S(y)\right]^2dy\\
&=\frac{\lambda}{2}\Big|\Big||D_{y,s}|^{1/2}\overline{h}_i\Big|\Big|^2_{\mathcal{H}_i}+\frac{(1-\lambda)}{2}\Big|\Big||D_{y,s}|^{1/2}\overline{\overline{h}}_i\Big|\Big|^2_{\mathcal{H}_i}\\
&+\lambda\frac{\alpha_i}{2}\Big|\Big||D_y|^{1/2}\rho_i\left(\sum_{i=1}^{n}L_i\overline{h}_i-\eta^S(y)\right)\Big|\Big|^2_{L^2(K)}\\
&+(1-\lambda)\frac{\alpha_i}{2}\Big|\Big||D_y|^{1/2}\rho_i\left(\sum_{i=1}^{n}L_i\overline{\overline{h}}_i-\eta^S(y)\right)\Big|\Big|^2_{L^2(K)}\\
&=\lambda\left[\frac{1}{2}\Big|\Big||D_{y,s}|^{1/2}\overline{h}_i\Big|\Big|^2_{\mathcal{H}_i}+\frac{\alpha_i}{2}\Big|\Big|\rho_i|D_y|^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}L_i\overline{h}_i-\eta^S(y)\right)\Big|\Big|^2_{L^2(K)}\right]\\
&+(1-\lambda)\left[\frac{1}{2}\Big|\Big||D_{y,s}|^{1/2}\overline{\overline{h}}_i\Big|\Big|^2_{\mathcal{H}_i}+\frac{\alpha_i}{2}\Big|\Big|\rho_i|D_y|^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}L_i\overline{\overline{h}}_i-\eta^S(y)\right)\Big|\Big|^2_{L^2(K)}\right],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
J_i(g,h_1,\dots,\lambda\overline{h}_i+(1-\lambda)\overline{\overline{h}}_i,\dots,h_n)\le&\lambda J_i(g,h_1,\dots,\overline{h}_i,\dots,h_n)\\
&+(1-\lambda)J_i(g,h_1,\dots,\overline{\overline{h}}_i,\dots,h_n),
\end{aligned}
$$

o que caracteriza a convexidade do funcional J_i.

Agora, como $L_i\in\mathcal{L}\big(\mathcal{H}_i,L^2(K)\big)$, então $L_i:\mathcal{H}_i\to L^2(K)$ é linear e contínuo. Em particular, L_i é semi-contínuo inferiormente e portanto, J_i é semi-contínuo inferiormente e assim segue a afirmação.

Portanto, da afirmação acima, temos que $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\} \in \mathcal{H}$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais J_i se, e somente se, a derivada de Gateaux é zero, ou seja,

$$\frac{d}{d\lambda} J_i(g, h_1, \ldots, h_i + \lambda \widehat{h}_i, \ldots, h_n)\Big|_{\lambda=0} = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\big(h_i|D_{y,s}|, \widehat{h}_i\big)_{\mathcal{H}_i}\\ &+\alpha_i \left(\rho_i |D_y| \left(\sum_{j=1}^{n} L_j h_j - \eta^S(y), \rho_i L_i \widehat{h}_i\right)\right)_{L^2(K)} = 0, \quad \forall\, \widehat{h}_i \in L^2(\mathcal{O}_i'),\end{aligned} \tag{1.50}$$

ou equivalentemente,

$$h_i |D_{y,s}| + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 |D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j\right) = \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 |D_y| \eta^S(y)), \tag{1.51}$$

sendo $i \in \{1, \ldots, n\}$, onde $L_i^* \in \mathcal{L}\big(L^2(K), \mathcal{H}_i\big)$ é a adjunta de L_i.

Mostremos (1.50) e (1.51). Temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\lambda} J_i(g, h_1, \ldots, h_i + \lambda \widehat{h}_i, \ldots, h_n)\Big|_{\lambda=0}\\
&= \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{2}\left\| |D_{y,s}|^{1/2}(h_i + \lambda \widehat{h}_i)\right\|^2_{\mathcal{H}_i} + \frac{\alpha_i}{2}\left\|\rho_i |D_y|^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n} L_j(h_j + \lambda \widehat{h}_j) - \eta^S(y)\right)\right\|^2_{L^2(K)}\right]\Bigg|_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\big(|D_{y,s}|^{1/2}(h_i + \lambda \widehat{h}_i), |D_{y,s}|^{1/2}(h_i + \lambda \widehat{h}_i)\big)\Big|_{\lambda=0} +\\
&+ \frac{\alpha_i}{2}\frac{d}{d\lambda}\left(\rho_i |D_y|^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n} L_j h_j + \lambda L_j \widehat{h}_j - \eta^S\right), \rho_i |D_y|^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n} L_j h_j + \lambda L_j \widehat{h}_j - \eta^S\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{2} 2\big(|D_{y,s}|^{1/2}(h_i + \lambda \widehat{h}_i), \widehat{h}_i\big)\Big|_{\lambda=0} + \frac{\alpha_i}{2} 2\left(\rho_i |D_y|\left(\sum_{j=1}^{n} L_j h_j + \lambda L_j \widehat{h}_j - \eta^S\right), \rho_i L_i \widehat{h}_i\right)\Bigg|_{\lambda=0},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\big(h_i|D_{y,s}|, \widehat{h}_i\big)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i \left(\rho_i |D_y| \left(\sum_{j=1}^{n} L_j h_j - \eta^S, \rho_i L_i \widehat{h}_i\right)\right)_{L^2(K)} = 0$$

e portanto, segue (1.50).

Agora, sendo L_i^* a adjunta de L_i, temos de (1.50) que

$$\big(h_i|D_{y,s}|,\widehat{h}_i\big)_{\mathcal{H}_i}+\alpha_i\left(L_i^*\rho_i^2|D_y|\left(\sum_{j=1}^n L_jh_j-\eta^S,\widehat{h}_i\right)\right)_{\mathcal{H}_i}=0$$

$$\big(h_i|D_{y,s}|,\widehat{h}_i\big)_{\mathcal{H}_i}+\left(\alpha_iL_i^*\Big(\rho_i^2|D_y|\sum_{j=1}^n L_jh_j\Big)-\alpha_iL_i^*\big(\rho_i^2|D_y|\eta^S\big),\widehat{h}_i\right)_{\mathcal{H}_i}=0$$

$$\left(h_i|D_{y,s}|+\alpha_iL_i^*\Big(\rho_i^2|D_y|\sum_{j=1}^n L_jh_j\Big)-\alpha_iL_i^*\Big(\rho_i^2|D_y|\eta^S\Big),\widehat{h}_i\right)_{\mathcal{H}_i}=0\qquad\forall\,\widehat{h}_i\in L^2(\mathcal{O}_i').$$

Então,

$$h_i|D_{y,s}|+\alpha_iL_i^*\Big(\rho_i^2|D_y|\sum_{j=1}^n L_jh_j\Big)-\alpha_iL_i^*\Big(\rho_i^2|D_y|\eta^S\Big)=0,$$

isto é,

$$h_i|D_{y,s}|+\alpha_iL_i^*\Big(\rho_i^2|D_y|\sum_{j=1}^n L_jh_j\Big)=\alpha_iL_i^*\Big(\rho_i^2|D_y|\eta^S\Big)$$

e portanto segue (1.51).

Para uma melhor formulação do sistema linear (1.51), consideramos a notação

$$\xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\},$$

com $\xi_i=\alpha_iL_i^*\big(\rho_i^2|D_y|\eta^S\big)$, e consideramos também um operador $\mathfrak{L}\in\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ definido por $\mathfrak{L}\mathbf{h}$ com n componentes

$$(\mathfrak{L}\mathbf{h})_i=h_i|D_{y,s}|+\alpha_iL_i^*\left(\rho_i^2|D_y|\sum_{j=1}^n L_jh_j\right).$$

Então (1.51) pode ser escrito como

$$\mathfrak{L}\mathbf{h}=\xi\qquad\text{em}\qquad\mathcal{H}.\tag{1.52}$$

Portanto, provaremos que a equação linear (1.52) tem uma única solução $\mathbf{h}=\{h_1,\ldots,h_n\}$ em $\mathcal{H}$ para cada $\xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ em $\mathcal{H}$. A solubilidade de (1.52) será estabelicida como aplicação do teorema de Lax-Milgran com restrições sobre α_i e ρ_i.

Teorema 1.4 *Suponhamos que*

$$\alpha_i |D_y||\rho_i|_\infty$$

é suficientemente pequeno para quaisquer $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Então* $\mathfrak{L}$ *é um operador invertível. Em outras palavras, existe um único equilíbrio de Nash* $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ *para* J_i.

Demonstração: Definamos

$$\begin{array}{rcccl} a & : & \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) & \longmapsto & a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) = \left(\mathfrak{L}\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}\right)_{\mathcal{H}} \end{array}$$

A demonstração será feita em duas etapas:

Etapa 1: $n = 1$

Nesse caso, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ e $\mathbf{h} = h_1$. Agora,

(i) a é coerciva

De fato, pois

$$\begin{aligned} a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) = (\mathfrak{L}\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathcal{H}} &= \left(h_1 |D_{y,s}| + \alpha_1 L_1^*(\rho_i^2 |D_y| L_1 h_1), h_1\right)_{\mathcal{H}_1} \\ &= \left(h_1 |D_{y,s}|, h_1\right)_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1 \left(L_1^*(\rho_i^2 |D_y| L_1 h_1), h_1\right)_{\mathcal{H}_1} \\ &= \left(h_1 |D_{y,s}|, h_1\right)_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1 \left(\rho_i^2 |D_y| L_1 h_1, L_1 h_1\right)_{L^2(K)} \\ &= \left|\left| |D_{y,s}|^{1/2} h_1 \right|\right|_{\mathcal{H}_1}^2 + \alpha_1 \left|\left| \rho_1 |D_y|^{1/2} L_1 h_1 \right|\right|_{L^2(K)}^2 \\ &\geq \left|\left| |D_{y,s}|^{1/2} h_1 \right|\right|_{\mathcal{H}_1}^2 \\ &\geq k_1 ||h_1||_{H_1}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) \geq k_1 ||h_1||_{\mathcal{H}_1}^2,$$

onde k_1 é definido por (1.23) e assim segue (i).

(ii) a é contínua, pois ξ_1 é contínua.

Com efeito, devemos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$|a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}})| \leq C ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}_1} ||\widetilde{\mathbf{h}}||_{\mathcal{H}_1}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{h},\widetilde{\mathbf{h}})| &= \left|\big(h_1|D_{y,s}| + \alpha_1 L_1^*(\rho_i^2|D_y|L_1h_1),\widetilde{h}_1\big)_{\mathcal{H}_1}\right| \\
&= \left|\big(h_1|D_{y,s}|,\widetilde{h}_1\big)_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1\big(L_1^*(\rho_i^2|D_y|L_1h_1),\widetilde{h}_1\big)_{\mathcal{H}_1}\right| \\
&= \left|\big(h_1|D_{y,s}|,\widetilde{h}_1\big)_{\mathcal{H}_1} + \big(\alpha_1\rho_1|D_y|L_1h_1,\rho_1L_1\widetilde{h}_1\big)_{L^2(K)}\right| \\
&\leq k_2\left|(h_1,\widetilde{h}_1)\right|_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1k_4\left|\big(\rho_1L_1h_1,\rho_1L_1\widetilde{h}_1\big)_{L^2(K)}\right| \\
&\leq k_2||h_1||_{\mathcal{H}_1}||\widetilde{h}_1||_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1k_4||\rho_1||_\infty^2c_1||h_1||_{\mathcal{H}_1}c_2||\widetilde{h}_1||_{\mathcal{H}_1} \\
&= ||h_1||_{\mathcal{H}_1}||\widetilde{h}_1||_{\mathcal{H}_1}\big(k_2+\alpha_1k_4c_1c_2||\rho_1||_\infty^2\big) \\
&= C||h_1||_{H_1}||\widetilde{h}_1||_{\mathcal{H}_1},
\end{aligned}$$

onde $C = k_2 + \alpha_1k_4c_1c_2||\rho_1||_\infty^2$ e k_2 e k_4 são definidos por (1.23). Portanto, segue (ii).

(iii) a é bilinear pois ξ_1 é linear.

Devemos mostrar que

(I) $a(\mathbf{h}+\lambda\widetilde{\mathbf{h}},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) = a(\mathbf{h},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) + \lambda a(\widetilde{\mathbf{h}},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}})$

(II) $a(\mathbf{h},\widetilde{\mathbf{h}}+\lambda\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) = a(\mathbf{h},\widetilde{\mathbf{h}}) + \lambda a(\mathbf{h},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}})$

Basta ver (I), pois (II) é análogo. Temos

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{h}+\lambda\widetilde{\mathbf{h}},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) &= \big(\mathfrak{L}(\mathbf{h}+\lambda\widetilde{\mathbf{h}}),\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}\big)_{\mathcal{H}_1} \\
&= \big((h_1+\lambda\widetilde{h}_1)|D_{y,s}| + \alpha_1L_1^*(\rho_1^2|D_y|L_1(h_1+\lambda\widetilde{h}_1)),\widetilde{\widetilde{h}}_1\big)_{\mathcal{H}_1} \\
&= \big(h_1|D_{y,s}| + \lambda\widetilde{h}_1|D_{y,s}| + \alpha_1L_1^*(\rho_1^2|D_y|L_1h_1 + \lambda\rho_1^2|D_y|L_1\widetilde{h}_1),\widetilde{\widetilde{h}}_1\big)_{\mathcal{H}_1} \\
&= \Bigg(h_1|D_{y,s}| + \alpha_1L_1^*(\rho_1^2|D_y|L_1h_1) + \\
&\quad + \lambda\big(\widetilde{h}_1|D_{y,s}| + \alpha_1L_1^*(\rho_1^2|D_y|L_1\widetilde{h}_1)\big),\widetilde{\widetilde{h}}_1\Bigg)_{\mathcal{H}_1} \\
&= \big(h_1|D_{y,s}| + \alpha_1L_1^*(\rho_1^2|D_y|L_1h_1,\widetilde{\widetilde{h}}_1\big)_{\mathcal{H}_1} \\
&\quad + \lambda\big(\widetilde{h}_1|D_{y,s}| + \alpha_1L_1^*(\rho_1^2|D_y|L_1\widetilde{h}_1),\widetilde{\widetilde{h}}_1\big)_{\mathcal{H}_1} \\
&= \big(\mathfrak{L}\mathbf{h},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}\big)_{\mathcal{H}_1} + \lambda\big(\mathfrak{L}\widetilde{\mathbf{h}},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}\big)_{\mathcal{H}_1} \\
&= a(\mathbf{h},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) + \lambda a(\widetilde{\mathbf{h}},\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}})
\end{aligned}$$

e portanto segue (I).

Agora, de (i), (ii) e (iii), o teorema de Lax-Milgran nos diz que para cada $\xi \in \mathcal{H}'$ existe um único $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) = (\xi, \widetilde{\mathbf{h}}) \;\; \forall\, \widetilde{\mathbf{h}} \in \mathcal{H}.$$

Assim,

$$(\xi, \widetilde{\mathbf{h}}) = a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) = (\mathfrak{L}\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) \;\; \forall\, \widetilde{\mathbf{h}} \in \mathcal{H},$$

isto é, a equação $\mathfrak{L}\mathbf{h} = \xi$ possui única solução $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$.

Etapa 2: $n > 1$

(i) $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ é coerciva.

Com efeito, usando (1.23) e o fato de que $L_i \in \mathcal{L}\big(\mathcal{H}_i, L^2(K)\big)$, obtemos

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) = (\mathfrak{L}\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathcal{H}} &= \sum_{i=1}^{n} \big((\mathfrak{L}\mathbf{h})_i, h_i\big)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(h_i|D_{y,s}| + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 |D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j \right), h_i \right)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (h_i|D_{y,s}|, h_i)_{\mathcal{H}_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 |D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j \right), h_i \right)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{H}_i} K h_i^2 |D_{y,s}| dyds + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \rho_i |D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j, \rho_i L_i h_i \right)_{L^2(K)} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{H}_i} |K|_\infty h_i^2 |D_{y,s}| dyds + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \rho_i |D_y| L_j h_j, \rho_i L_i h_i \right)_{L^2(K)} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{H}_i} k_1 h_i^2 dyds + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \rho_i |D_y| L_j h_j, \rho_i L_i h_i \right)_{L^2(K)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) \geq k_1 ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}}^2 + I, \tag{1.53}$$

onde $I = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \rho_i |D_y| L_j h_j, \rho_i L_i h_i \right)_{L^2(K)}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq \overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ \sum_{i,j=1}^{n} ||L_j h_j||_{L^2(K)} ||L_i h_i||_{L^2(K)} \\
&\leq \overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ C_i(S)\, C_j(S) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ||h_j||_{\mathcal{H}_j} ||h_i||_{\mathcal{H}_i} \\
&\leq \overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ C_S\ C_S \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} ||h_j||^2_{\mathcal{H}_j} + \frac{1}{2} ||h_i||^2_{\mathcal{H}_i} \right) \\
&= \overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ C_S^2\ \frac{1}{2}\, n \left(\sum_{j=1}^{n} ||h_j||^2_{\mathcal{H}_j} + \sum_{i=1}^{n} ||h_i||^2_{\mathcal{H}_i} \right) \\
&= \overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ C_S^2\ \frac{1}{2}\, n\, 2 ||\mathbf{h}||^2_{\mathcal{H}} \\
&= \overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ C_S^2\ n\, ||\mathbf{h}||^2_{\mathcal{H}},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$|I| \leq \overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ C_S^2\ n\, ||\mathbf{h}||^2_{\mathcal{H}},$$

onde k_4 é definido por (1.23), $\overline{\alpha} = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $C_S = \max\{C_i(S)\}$ com $C_i(S)$ definida em (1.47) e $\overline{\rho} = \max\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$. Como por hipótese, $\alpha_i\, |D_y|\, |\rho_i|_\infty$ é suficientemente pequeno, podemos assumir que

$$\overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ n\ C_S^2\ \leq \frac{k_1}{2}.$$

Então,

$$-I \leq |I| \leq \overline{\alpha}\ k_4\ \overline{\rho}\ n\ C_S^2\ ||\mathbf{h}||^2_H \leq \frac{k_1}{2} ||\mathbf{h}||^2_H,$$

ou seja,

$$I \geq -\frac{k_1}{2} ||\mathbf{h}||^2_H. \tag{1.54}$$

Agora, de (1.53) e (1.54), obtemos

$$a(h,h) \geq k_1 ||\mathbf{h}||^2_H + I \geq k_1 ||\mathbf{h}||^2_H - \frac{k_1}{2} ||\mathbf{h}||^2_{\mathcal{H}},$$

isto é,

$$a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) \geq \frac{k_1}{2} ||\mathbf{h}||^2_{\mathcal{H}},$$

e assim segue (i).

(ii) $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, pois ξ_i é contínua.

Devemos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$|a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}})| \leq C||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}}||\widetilde{\mathbf{h}}||_{\mathcal{H}}.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}})| = |(\mathfrak{L}\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}})_{\mathcal{H}}| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \left((\mathfrak{L}\mathbf{h})_i, \widetilde{h}_i\right)_{\mathcal{H}_i}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \left(h_i|D_{y,s}| + \alpha_i L_i^*\left(\rho_i^2 |D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j\right), \widetilde{h}_i\right)_{H_i}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \left(h_i|D_{y,s}|, \widetilde{h}_i\right)_{\mathcal{H}_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i L_i^*\left(\rho_i^2 |D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j\right), \widetilde{h}_i\right)_{\mathcal{H}_i}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \left(h_i|D_{y,s}|, \widetilde{h}_i\right)_{\mathcal{H}_i} + \sum_{i=i}^{n} \left(\alpha_i \rho_i |D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j, \rho_i L_i \widetilde{h}_i\right)_{L^2(K)}\right| \\
&\leq k_2 \sum_{i=1}^{n} \left|(h_i, \widetilde{h}_i)_{\mathcal{H}_i}\right| + \overline{\alpha}\, k_4 \left|\left(\sum_{j=1}^{n} \rho_i L_j h_j, \sum_{i=1}^{n} \rho_i L_i \widetilde{h}_i\right)_{L^2(K)}\right| \\
&\leq k_2 \sum_{i=1}^{n} ||h_i||_{\mathcal{H}_i} ||\widetilde{h}_i||_{\mathcal{H}_i} + \overline{\alpha}\, k_4 ||\rho_i||_\infty^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ||L_j h_j||_{L^2(K)} ||L_i \widetilde{h}_i||_{L^2(K)} \\
&\leq k_2 \sum_{i=1}^{n} \underbrace{||h_i||_{\mathcal{H}_i} ||\widetilde{h}_i||_{\mathcal{H}_i}} + \overline{\alpha}\, k_4\, C_1\, C_2 ||\rho_i||_\infty^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{||h_j||_{\mathcal{H}_i}} ||\widetilde{h}_i||_{\mathcal{H}_i} \\
&\leq k_2 \left(\sum_{i=1}^{n} ||h_i||_{\mathcal{H}_i}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} ||\widetilde{h}_i||_{\mathcal{H}_i}^2\right)^{1/2} \\
&+ \overline{\alpha}\, k_4\, C_1\, C_2 ||\rho_i||_\infty^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ||h_j||_{\mathcal{H}_i}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} ||\widetilde{h}_i||_{\mathcal{H}_i} \\
&= k_2 ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}} ||\widetilde{\mathbf{h}}||_{\mathcal{H}} + \overline{\alpha}\, k_4\, C_1\, C_2 ||\rho_i||_\infty^2\, n^{1/2} ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{||\widetilde{h}_i||_{\mathcal{H}_i}} \\
&\leq k_2 ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}} ||\widetilde{\mathbf{h}}||_{\mathcal{H}} + \overline{\alpha}\, k_4\, C_1\, C_2 ||\rho_i||_\infty^2\, n^{1/2} ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||\widetilde{h}_i||_{\mathcal{H}_i}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \\
&= k_2 ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}} ||\widetilde{\mathbf{h}}||_{\mathcal{H}} + \overline{\alpha}\, k_4\, C_1\, C_2 ||\rho_i||_\infty^2\, n^{1/2}\, n^{1/2} ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}} ||\widetilde{\mathbf{h}}||_{\mathcal{H}} \\
&= ||\mathbf{h}||_{\mathcal{H}} ||\widetilde{\mathbf{h}}||_{\mathcal{H}} \big(k_2 + n\, \overline{\alpha}\, k_4\, C_1\, C_2 ||\rho_i||_\infty^2\big),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}})| \leq C\, ||\mathbf{h}||_H ||\widetilde{\mathbf{h}}||_{\mathcal{H}},$$

onde $C = k_2 + n\,\overline{\alpha}\,k_4\,C_1\,C_2||\rho_i||^2_\infty$, k_2 e k_4 são definidos por (1.23) e $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Portanto, segue (ii).

(iii) $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ é bilinear, pois ξ_i é linear.

De fato, devemos mostrar que

(I) $a(\mathbf{h} + \lambda\widetilde{\mathbf{h}}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) = a(\mathbf{h}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) + \lambda a(\widetilde{\mathbf{h}}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}})$

(II) $a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}} + \lambda\widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) = a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) + \lambda a(\mathbf{h}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}})$

Basta ver (I), pois (II) é análogo. Temos,

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{h} + \lambda\widetilde{\mathbf{h}}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) &= \big(\mathfrak{L}(\mathbf{h} + \lambda\widetilde{\mathbf{h}}), \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}\big)_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} \big(\mathfrak{L}(\mathbf{h} + \lambda\widetilde{\mathbf{h}})_i, \widetilde{\widetilde{h}}_i\big)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big((h_i + \lambda\widetilde{h}_i)|D_{y,s}| + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2|D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j(h_j + \lambda\widetilde{h}_j), \widetilde{\widetilde{h}}_i\big)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(h_i|D_{y,s}| + \lambda\widetilde{h}_i|D_{y,s}| + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2|D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j + \lambda L_j\widetilde{h}_j), \widetilde{\widetilde{h}}_i\big)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Bigg(h_i|D_{y,s}| + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2|D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j h_j) \\
&+ \lambda\big(\widetilde{h}_i|D_{y,s}| + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2|D_y| \sum_{j=1}^{n} L_j\widetilde{h}_j)\big), \widetilde{\widetilde{h}}_i\Bigg)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(h_i|D_{y,s}| + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2|D_y| L_j h_j), \widetilde{\widetilde{h}}_i\big)_{\mathcal{H}_i} \\
&+ \lambda\big(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{h}_i|D_{y,s}| + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2|D_y| L_j\widetilde{h}_j), \widetilde{\widetilde{h}}_i\big)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \big(\mathfrak{L}\mathbf{h}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}\big)_{\mathcal{H}} + \lambda\big(\mathfrak{L}\widetilde{\mathbf{h}}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}\big)_{\mathcal{H}} \\
&= a(\mathbf{h}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}}) + \lambda a(\widetilde{\mathbf{h}}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{h}}})
\end{aligned}$$

e portanto segue (I).

Logo, de (i), (ii), (iii), o teorema de Lax-Milgran nos diz que para cada $\xi \in \mathcal{H}'$ existe um único $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) = (\xi, \widetilde{\mathbf{h}}) \quad \forall\,\widetilde{\mathbf{h}} \in \mathcal{H}.$$

Assim,

$$(\xi, \widetilde{\mathbf{h}}) = a(\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) = (\mathfrak{L}\mathbf{h}, \widetilde{\mathbf{h}}) \quad \forall\,\widetilde{\mathbf{h}} \in \mathcal{H},$$

isto é, a equação $\mathfrak{L}\mathbf{h} = \xi$ possui única solução $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$. $\square$

1.6 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Nessa seção, investigaremos a existência, unicidade e regularidade da solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} v_s + Lv + A(y,s)v + B(y,s)\cdot\nabla v - \dfrac{N}{2}v = \varphi(y,s) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N\times(0,S) \\ v(y,0) = v_0(y) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{1.55}$$

onde $A(y,s)\in L^\infty\big(\mathbb{R}^N\times(0,S)\big)$ e $B(y,s)\in L^\infty\big(\mathbb{R}^N\times(0,S)\big)^N$.

Definição 1.1 *Dizemos que v é solução fraca de (1.55) quando $v\in W\big(0,S,H^1(K),(H^1(K))^*\big)$ e satizfaz a identidade*

$$\begin{aligned} &-\int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} v\psi' K\,dyds + \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\nabla\psi K\,dyds + \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} A(y,s)\,v\psi K\,dyds \\ &+\int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} B\cdot\nabla v\psi K\,dyds - \frac{N}{2}\int_0^S\int_{\mathbb{R}^N} v\psi K\,dyds = \int_0^S\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\psi K\,dyds, \end{aligned}$$

para toda $\psi\in W\big(0,S,H^1(K),L^2(K)\big)$ tal que $\psi(0)=\psi(S)=0$ e satisfaz a condição inicial $v(0)=v_0$.

Definição 1.2 *Dizemos que v é solução forte de (1.55) se $v\in W\big(0,S,H^2(K),L^2(K)\big)$ e*

$$v_s + Lv + Av + B\cdot\nabla v - \frac{N}{2}v = \varphi \qquad \textit{quase sempre em } \ \mathbb{R}^N\times(0,S),$$

com $v(0)=v_0$.

Teorema 1.5 *Temos*

(i) *Se $\varphi\in L^2\big(0,S,L^2(K)\big)$ e $v_0\in L^2(K)$ então (1.55) admite uma única solução fraca v.*

(ii) *Se $\varphi\in L^2\big(0,S,L^2(K)\big)$ e $v_0\in H^1(K)$ então (1.55) admite uma única solução forte v.*

Demonstração:

(i) Aplicaremos o método de Faedo-Galerkin. Para isso, consideremos uma base Hilbertiana $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $H^1(K)$. Represente por $V_m=\text{span}\{w_1,\dots,w_n\}$ o qual é denso em

$H^1(K)$ e considere o problema aproximado finito-dimensional

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } v_m \in V_m \text{ solução de} \\ (v_m', v) + (Lv_m, v) + (Av_m, v) + (B \cdot \nabla v_m, v) - \dfrac{N}{2}(v_m, v) = (\varphi, v), \\ \forall\, v \in V_m \\ v_m(0) = v_{0m} \to v_0 \ \text{ fortemente em } \ L^2(K) \end{array} \right. \tag{1.56}$$

onde $v_m(s) \in V_m$.

Usaremos a notação $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot,\cdot|$, $\big((\cdot,\cdot)\big)$ e $||\cdot,\cdot||$ para indicar o produto interno e norma em $L^2(K)$ e $H^1(K)$ respectivamente.

Pelo Teorema de Caratheodory, o sistema acima possui solução local em algum intervalo $[0, s_m[$, com $0 < s_m < S$, com v_m absolutamente contínua e v_m' existindo quase sempre em $[0, s_m[$.

A estimativa a seguir servirá para estender a solução a todo intervalo $[0, S]$.

Estimativa a Priori: Fazendo $v = v_m(s)$ em (1.56), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|v_m(s)|^2 + ||v_m(s)||^2 \leq A_0|v_m(s)|^2 + B_0||v_m(s)||\,|v_m(s)| + |\varphi(s)|\,|v_m(s)| \tag{1.57}$$

sendo $A_0 = ||A||_{L^\infty\left(\mathbb{R}^N\times(0,S)\right)}$ e $B_0 = ||B||_{L^\infty\left((\mathbb{R}^N\times(0,S))\right)^N}$.

Notemos que

$$|\varphi(s)|\,|v_m(s)| \leq \frac{1}{2}|\varphi(s)|^2 + \frac{1}{2}|v_m(s)|^2,$$
$$B_0||v_m(s)||\,|v_m(s)| \leq \frac{B_0^2}{2}|v_m(s)|^2 + \frac{1}{2}||v_m(s)||^2.$$

Substituindo a expressão acima em (1.57), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|v_m(s)|^2 + \frac{1}{2}||v_m(s)||^2 \leq \frac{1}{2}|\varphi(s)|^2 + \left(A_0 + \frac{B_0^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2}\right)|v_m(s)|^2. \tag{1.58}$$

Fazendo $A_0 + \frac{B_0^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} = \frac{1}{2}c$, resulta que

$$\frac{d}{ds}|v_m(s)|^2 - c|v_m(s)|^2 \leq |\varphi(s)|^2, \tag{1.59}$$

ou seja,

$$|v_m(s)|^2 \leq c_S\left(|v_0|^2 + \int_0^S |\varphi(t)|^2 ds\right). \tag{1.60}$$

De (1.58) e (1.60) obtemos

$$(v_m) \text{ é limitada em } L^\infty\big(0, S, L^2(K)\big) \tag{1.61}$$

e

$$\int_0^S |v_m(s)|^2 ds \leq M \tag{1.62}$$

independente de m, ou seja,

$$(v_m) \text{ é limitada em } L^\infty\big(0, S, H^1(K)\big).$$

Podemos então extrair subsequência (v_μ) de (v_m) tal que

$$\begin{aligned} v_\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty\big(0, S, L^2(K)\big) \\ v_\mu &\rightharpoonup v \text{ fraco em } L^2\big(0, S, H^1(K)\big). \end{aligned} \tag{1.63}$$

De (1.63), temos

$$\int_0^S (v_\mu, z)ds \to \int_0^S (v, z)ds \qquad \forall\, z \in L^1\big(0, S, L^2(K)\big) \tag{1.64}$$

$$\int_0^S \big((v_\mu, z)\big)ds \to \int_0^S \big((v, z)\big)ds \qquad \forall\, z \in L^2\big(0, S, H^1(K)\big). \tag{1.65}$$

Fazendo $z = \psi \in W\big(0, S, H^1(K), L^2(K)\big)$ em (1.64) com $\psi(0) = \psi(S) = 0$, obtemos

$$\int_0^S (v_\mu', \psi)ds = -\int_0^S (v_\mu, \psi')ds.$$

Consideremos v_μ no lugar de v_m em (1.56) com $\mu > m$, m fixado e $\psi = w\theta$, onde $w \in H^1(K)$ e $\theta \in D(0, S)$. Pela densidade de V_m em $H^1(K)$ temos que quando $\mu \to \infty$ em $(1.56)_1$, resulta que

$$\begin{aligned} &-\int_0^S (v, w)\theta' ds + \int_0^S (\nabla v, \nabla w)\theta ds + \int_0^S (Av, w)\theta ds + \int_0^S (B \cdot \nabla v, w)\theta ds \\ &-\frac{N}{2}\int_0^S (v, w)\theta ds = \int_0^S (\varphi, w)\theta ds \end{aligned} \tag{1.66}$$

para todo $w \in H^1(K)$, ou seja,

$$\begin{aligned} &-\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} v\psi' K\, dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \psi K\, dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} Av\psi K\, dyds \\ &+\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} B \cdot \nabla v \psi K\, dyds - \frac{N}{2}\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} v\psi K\, dyds = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\psi K\, dydsds \end{aligned}$$

para todo $\psi \in W\big(0, S, H^1(K), L^2(K)\big)$ com $\psi(0) = \psi(S) = 0$, o que mostra a existência de solução fraca.

Como (1.66) é verificado para todo $w \in H^1(K)$, $\theta \in D(0, S)$ e $v \in H^1(K)$, então

$$v' \in L^2\big(0, S, (H^1(K))^*\big)$$

e

$$v_s = -Lv - Av - B \cdot \nabla v + \frac{N}{2} v + \varphi$$

no sentido de $L^2\big(0, S, (H^1(K))^*\big)$. Da imersão contínua $(1.21)_2$, vem que $v \in C\big([0, S], L^2(K)\big)$.

Podemos então calcular $v(0)$ e mostrarmos que $v(0) = v_0$, bem como a unicidade da solução fraca.

(ii) A solução de (1.56) é definida em $[0, S]$. Façamos $v = v'_m(s)$ em (1.56). Temos

$$\begin{aligned} &|v'_m(s)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}||v_m(s)||^2 \leq A_0 c_0 ||v_m(s)||\,|v'_m(s)| + B_0||v_m(s)||\,|v'_m(s)| \\ &+|\varphi(s)|\,|v'_m(s)| \end{aligned} \tag{1.67}$$

onde foi usado a desigualdade de Poincaré, isto é,

$$|v_m(s)| \leq c_0 ||v_m(s)|| \quad \text{(vide } (1.20)_2).$$

Temos

$$\frac{1}{4}|v'_m(s)|^2 + \frac{d}{ds}||v_m(s)||^2 \leq 2|\varphi(s)|^2 + 2\left(A_0^2 c_0^2 + B_0^2\right)||v_m(s)||^2,$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}||v_m(s)||^2 - \lambda ||v_m|| \leq 2|\varphi(s)|^2, \tag{1.68}$$

onde $\lambda = 2\,(A_0^2 c_0^2 + B_0^2)$. Daí, segue que

$$||v_m(s)||^2 \leq e^{\lambda}\left(||v_0||^2 + 2\int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right). \tag{1.69}$$

De (1.68) e (1.69) obtemos

$$\begin{aligned} &(v_m) \text{ é limitada em } L^\infty\big(0, S, H^1(K)\big) \\ &(v'_m) \text{ é limitada em } L^2\big(0, S, L^2(K)\big). \end{aligned} \tag{1.70}$$

De (1.70) concluímos que existe uma subsequência (v_μ) de (v_m) tal que

$$v_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty\big(0, S, H^1(K)\big) \tag{1.71}$$

$$v'_\mu \rightharpoonup v' \text{ fraco em } L^2\big(0, S, L^2(K)\big) \tag{1.72}$$

e então $v \in W\big(0, S, H^1(K), L^2(K)\big)$.

Por argumento semelhante ao usado na parte (i), obtemos do sistema aproximado (1.56) e convergências de (1.71) e (1.72) que v satisfaz

$$\int_0^S \big((v, \psi)\big)\, dt = \int_0^S \left(-v_s - Av - B \cdot \nabla v + \frac{N}{2} v + \varphi, \psi\right) ds \tag{1.73}$$

para toda $\psi = w\theta$, ou seja,

$$\int_0^S (Lv, \psi)\, dt = \int_0^S \left(-v_s - Av - B \cdot \nabla v + \frac{N}{2} v + \varphi, \psi\right) ds.$$

Como

$$-v_s - Lv - B \cdot \nabla v + \frac{N}{2} v + \varphi \in L^2\big(0, S, L^2(K)\big)$$

então por $(1.20)_5$ conclui-se que

$$v \in L^2\big(0, S, H^2(K)\big).$$

Assim, de (1.73), obtemos

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \left(v_s + Lv + Av + B \cdot \nabla v - \frac{N}{2} v\right) \phi K \, dyds = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \phi K \, dyds$$

para toda $\phi \in D\big((0, S) \times \mathbb{R}^N\big)$ o que implica que

$$v_s + Lv + Av + B \cdot \nabla v - \frac{N}{2} v = \varphi \;\text{ quase sempre em }\; \mathbb{R}^N \times (0, S),$$

o que mostra a existência da solução forte.

Como $v \in W\big(0, S, H^2(K), L^2(K)\big)$ e da imersão $(1.21)_4$ conclui-se que $v \in C\big([0, S], H^1(K)\big)$.

De maneira usual mostra-se que $v(0) = v_0$ e a unicidade. □

Corolário 1.1 *Se v é solução forte de (1.55), então*

$$||v||^2_{C([0,S], H^1(K))} \leq c_S \left(||v_0||^2 + \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right).$$

Demonstração: Vimos anteriormente que

$$v \in W\big(0, S, H^2(K), L^2(K)\big)$$

e

$$\max\left\{||v||_{L^2(0,S,H^2(K))}, ||v'||_{L^2(0,S,L^2(K))}\right\} \leq c_S \left(||v_0||^2 + \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right). \tag{1.74}$$

Pela equivalência das normas, temos

$$||v||_{H^2(K)} \leq c||Lv||_{L^2(K)}.$$

Como v é solução forte de (1.55), segue que

$$|Lv| \leq |v'| + A_0|v| + B_0||v|| + |\varphi|.$$

De (1.74), temos

$$|v'(s)| \leq c\left(|\varphi(s)|^2 + \left(||v_0||^2 + \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right)\right) \tag{1.75}$$

(vide (1.68) e (1.69)), obtemos

$$|Lv| \leq c\left[|\varphi(s)|^2 + \left(||v_0||^2 + \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right)\right]^{1/2}.$$

Pela equivalência das normas citadas acima, esta desigualdade implica, após integração em $[0, S]$, que

$$||v||_{L^2(0,S,H^2(K))} \leq c_S \left(||v_0||^2 + \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right).$$

Integrando (1.75) em $[0, S]$, obtemos

$$||v'||^2_{L^2(0,S,L^2(K))} \leq c_S \left(||v_0||^2 + \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right).$$

Assim,

$$||v||^2_{W(0,S,H^2(K),L^2(K))} \leq c_S \left(||v_0||^2 + \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right).$$

Pela imersão contínua $(1.21)_4$ temos

$$||v||^2_{C([0,S],H^1(K))} \leq c_S \left(||v_0||^2 + \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds\right).$$

$\square$

Vamos agora investigar a existência, unicidade e regularidade de solução ultra fraca ou solução por transposição do sistema (1.55).

A questão consiste em dado $\xi \in H^{-1}(K) = \big(H^1(K)\big)^*$, encontrar p solução do problema parabólico

$$\left| \begin{array}{l} -p_s + Lp + Ap - \operatorname{div}(Bp) - \dfrac{N}{2}p - \dfrac{1}{2}y \cdot Bp = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \times (0,S) \\ p(y,S) = \xi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \tag{1.76}$$

Vamos definir o que entendemos por solução de (1.76).

Fazemos isto através de um processo eurístico. Com efeito, multiplicamos ambos os lados de (1.76) por $K(y)\,v(y,s)$ e integramos em $\mathbb{R}^N \times (0,S)$, obtendo

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} p(y,s) \left[v_s + Lv + Av + B \cdot \nabla v - \frac{N}{2}v \right] K(y)\, dyds = \langle \xi, v(S) \rangle,$$

onde supomos que $v(y,0) = 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Representamos acima $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade $H^1(K) \times (H^1(K))^*$.

Como no sistema (1.76) não temos informação sobre $p(y,0)$, sugere-se escolher v como sendo solução de

$$\left| \begin{array}{l} v_s + Lv + Av + B \cdot \nabla v - \dfrac{N}{2}v = \varphi \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \times (0,S) \\ v(y,0) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \tag{1.77}$$

Se $\varphi \in L^2\big(0,S,L^2(K)\big)$, vimos anteriormente que $v \in W\big(0,S,H^2(K),L^2(K)\big)$ solução forte, pois $v_0 = 0$. Também temos que $v \in C\big([0,S],H^1(K)\big)$ e portanto tem sentido a dualidade $\langle \xi, v(S) \rangle$ para $\xi \in H^{-1}(K)$.

Temos a seguinte definição:

Definição 1.3 *Dado $\xi \in H^{-1}(K)$, chama-se de solução ultra fraca ou solução por transposição de (1.76) a uma função $p \in L^2\big(0,S,L^2(K)\big)$ satisfazendo*

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} p(y,s)\varphi(y,s)K(y)\, dyds = \langle \xi, v(S) \rangle$$

para toda $\varphi \in L^2\big(0,S,L^2(K)\big)$, onde v é solução forte de (1.77) correspondente a φ.

Teorema 1.6 *Se $\xi \in H^{-1}(K)$, $A(y,s) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,S)\big)$, $B(y,s) \in \big(L^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,S)\big)\big)^N$, então existe uma única solução $p \in L^2\big(0,S;L^2(K)\big) \cap C\big([0,S];H^{-1}(K)\big)$ do problema (1.76).*

Demonstração: Consideremos a forma linear

$$F : L^2\big(0, S; L^2(K)\big) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$F(\varphi) = \langle \xi, v(S) \rangle \tag{1.78}$$

para toda $\varphi \in L^2\big(0, S, L^2(K)\big)$, onde $v(y,s)$ é a única solução forte de (1.55) com $v_0 = 0$ correspondente a φ. Temos que

$$|\langle \xi, v(S) \rangle| \leq ||\xi||_{(H^1(K))^*} ||v(S)||.$$

Pelo corolário 1.1, tem-se que

$$||v||^2_{C([0,S],H^1(K))} \leq c_S \int_0^S |\varphi(s)|^2 ds,$$

ou seja,

$$||v(S)|| \leq c_S |\varphi|_{L^2(0,S,L^2(K))}. \tag{1.79}$$

Então,

$$|F(\varphi)| = |\langle \xi, v(S) \rangle| \leq ||\xi||_{(H^1(K))^*} \, ||v(S)|| \leq c_S ||\xi||_{(H^1(K))^*} \, ||\varphi||_{L^2(0,S,L^2(K))}.$$

Portanto, $F \in \Big(L^2\big(0, S, L^2(K)\big)\Big)^*$. Pelo Teorema da Representação de Riez existe uma única $p \in L^2\big(0, S, L^2(K)\big)$ tal que

$$F(\varphi) = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} p\varphi K \, dyds, \tag{1.80}$$

para toda $\varphi \in L^2\big(0, S, L^2(K)\big)$, ou seja, existe uma única $p \in L^2\big(0, S, L^2(K)\big)$ tal que

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} p\varphi K \, dyds = \langle \xi, v(S) \rangle$$

e além disso, vale

$$|F|_{L^2(0,S,L^2(K))} = |p|_{L^2(0,S,L^2(K))}. \tag{1.81}$$

A unicidade é consequência de Du Bois Raymond.

Agora, de (1.78), (1.79) e (1.81), temos que

$$|p|_{L^2(0,S,L^2(K))} \leq c||\xi||_{(H^1(K))^*} \tag{1.82}$$

para alguma constante c.

Como $\xi \in (H^1(K))^*$ então existe uma sequência $(\xi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ com $\xi_m \in L^2(K)$ tal que

$$\xi_m \to \xi \quad \text{forte em} \quad (H^1(K))^*. \tag{1.83}$$

Seja (p_m) a sequência de soluções ultra fraca correspondente a ξ_m. A função $p_n - p_m$ é a solução ultra fraca correspondente a $\xi_n - \xi_m$. Então, de (1.82), obtemos

$$||p_m - p_n||_{L^2(0,S,L^2(K))} \leq c||\xi_m - \xi_n||_{(H^1(K))^*}.$$

De (1.66) e (1.67) temos que (p_m) é uma sequência de Cauchy em $L^2\big(0,S,L^2(K)\big)$. Assim,

$$p_m \to \check{p} \quad \text{forte em} \quad L^2\big(0,S,L^2(K)\big). \tag{1.84}$$

Como p_m é solução ultra fraca correspondente a ξ_m, então

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} p_m \varphi K \, dyds = \langle v(S), \xi_m \rangle \quad \forall \, \varphi \in L^2\big(0,S,L^2(K)\big). \tag{1.85}$$

Notemos que v é solução forte de (1.55) com $v_0 = 0$ e p_m é solução ultra fraca correspondente a ξ_m.

Então, de (1.83) e (1.84), segue que

$$\int_0^S \int_{\mathbb{R}^N} \check{p} \varphi K \, dyds = \langle v(S), \xi \rangle,$$

isto é, $\check{p}$ é solução ultra fraca de (1.55). Pela unicidade das soluções, temos que $p = \check{p}$.

De (1.76), temos

$$p_s = Lp + Ap - \operatorname{div}(Bp) - \frac{N}{2}p - \frac{1}{2}y \cdot Bp.$$

Logo,

$$p'_m - p'_n = L(p_m - p_n) + A(p_m - p_n) - \operatorname{div}\big(B(p_m - p_n)\big) - \frac{N}{2}(p_m - p_n) - \frac{1}{2}y \cdot B(p_m - p_n), \tag{1.86}$$

em $L^2\big(0,S,(H^1(K))^*\big)$, o qual está imerso continuamente em $L^2\big(0,S,(H^2(K))^*\big)$. Isso implica que (1.86) é verdadeiro também no sentido de $L^2\big(0,S,(H^1(K))^*\big)$.

Então, para toda $\psi \in L^2\big(0,S,H^2(K)\big)$ temos

$$\begin{aligned} |\langle p'_m - p'_n, \psi \rangle| &\leq |\langle p_m - p_n, L\psi \rangle| + |\langle A(p_m - p_n), \psi \rangle| + |\langle p_m - p_n, B \cdot \nabla \psi \rangle| \\ &+ \frac{N}{2} |\langle p_m - p_n, \psi \rangle| \\ &\leq c|p_m - p_n|_{L^2(0,S,L^2(K))} \, ||\psi||_{L^2(0,S,H^2(K))}. \end{aligned}$$

Segue que,

$$||\langle p'_m - p'_n, \psi\rangle||_{L^2(0,S,(H^2(K))^*)} \leq c|p_m - p_n|_{L^2(0,S,L^2(K))},$$

o que implica que (p'_m) é uma sequência de Cauchy em $L^2\big(0, S, (H^2(K))^*\big)$. Obtemos então que

$$p'_m \to p' \quad \text{em} \quad L^2\big(0, S, (H^2(K))^*\big).$$

Assim,

$$p \in L^2\big(0, S, L^2(K)\big)$$

e

$$p' \in L^2\big(0, S, (H^2(K))^*\big)$$

e portanto,

$$p \in C\big([0, S], (H^1(K))^*\big).$$

Temos que

$$p_m \to p \quad \text{forte em} \quad C\big([0, S], (H^1(K))^*\big).$$

Em particular,

$$p \in C\big([0, S], (H^1(K))^*\big).$$

Agora, temos

$$p_m(S) \to p(S) \quad \text{em} \quad (H^1(K))^*.$$

Assim,

$$p_m(S) = \xi_m \to \xi \;\; \text{em} \;\; (H^1(K))^*$$

e então por unicidade, resulta que

$$p(S) = \xi.$$

$\square$

Capítulo 2

Equação da Onda em Domínios com Fronteira Variável

2.1 Formulação do Problema

Medeiros-Límaco-Menezes em [38] estudaram o modelo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

para pequenas vibrações de cordas elásticas com extremidades móveis.

Neste capítulo, consideremos um modelo misto linearizado que descreve esse tipo de vibrações com extremidades móveis, que contém o modelo de Kirchhoff como caso particular. Desse modo, para obtermos soluções $u = u(x,t)$ definidas para todo $t \geq 0$, procedemos, como usual, considerando um "damping"$\delta \left[\left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right]$, onde δ é uma constante positiva a ser fixada.

Mais precisamente, consideremos uma corda elástica esticada com extremidades $\alpha_0 < \beta_0$ sobre o eixo dos x com $a < \alpha_0 < \beta_0 < b$, onde a e b são fixados. Suponha que as extremidades α_0 e β_0 movem-se continuamente para a posição $\alpha(t) < \alpha_0$ e $\beta_0 < \beta(t)$, onde $a \leq \ \alpha(t) < \beta(t) \leq b$, e consideremos as vibrações transversais da corda na posição $]\alpha(t), \beta(t)[$.

Nessas condições, consideremos o problema misto

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta\left[\left(\dfrac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}\gamma'(t) + \alpha'(t)\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right] = 0 \ \text{ em } \ \widehat{Q} \\ u(x,t) = \begin{cases} \widetilde{w} \ \text{ sobre } \ \widehat{\Sigma}_0 \\ 0 \ \text{ sobre } \ \widehat{\Sigma}\backslash\widehat{\Sigma}_0 \end{cases} \\ u(x,0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \text{ em } \Omega_0 = (\alpha_0, \beta_0), \end{array}\right. \tag{2.1}$$

sendo

$$a(t) = \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m}\frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0},$$

onde τ_0 é a tensão inicial, m é a massa da corda, k é uma constante que depende do material da corda, $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, $\alpha_0 = \alpha(0)$, $\beta_0 = \beta(0)$ e $\gamma_0 = \gamma(0)$.

Consideremos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funções reais satisfazendo as seguintes condições:

(H1) $\alpha,\, \beta \in C^2([0,\infty);\mathbb{R})$ com $\alpha(t) < \beta(t)$ para todo $t \geq 0$, $\alpha'(t) < 0$, e $\beta'(t) > 0$ para todo $t > 0$; $|\alpha'(t) + \gamma'(t)\, y| < (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}}$ para todo $(y,t) \in [0,1]\times[0,\infty)$, onde $0 < m_0 = \dfrac{\tau_0}{m}$;

(H2) $a(t) \in W^{1,\infty}(0,\infty)$;

(H3) $|\alpha''(t) + \gamma''(t)\, y| < \dfrac{(\alpha'(t) + \gamma'(t)\, y)^2}{\gamma(t)}$, $0 \leq y \leq 1$, $t \geq 0$.

Em (2.1), $\widehat{Q}$ denota o domínio não cilíndrico, do plano $\mathbb{R}^2$, definido como segue

$$\widehat{Q} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha(t) < x < \beta(t),\ \forall\, t \in (0,T)\right\}.$$

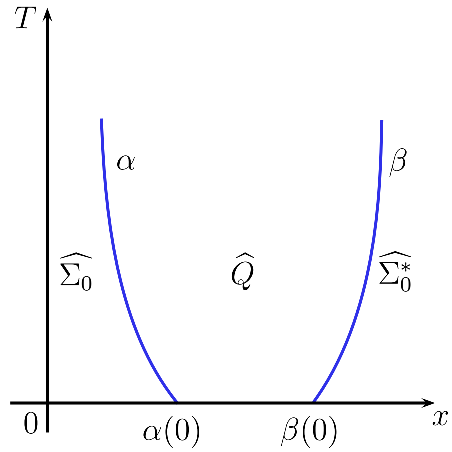
Sua fronteira lateral é definida por

$$\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}_0 \cup \widehat{\Sigma}_0^*,$$

onde

$$\widehat{\Sigma}_0 = \{(\alpha(t),t);\ \forall t \in (0,T)\} \quad \text{ e } \quad \widehat{\Sigma}_0^* = \widehat{\Sigma}\backslash\widehat{\Sigma}_0 = \{(\beta(t),t);\ \forall t \in (0,T)\}.$$

Geometricamente, temos



Também representamos Ω_t e Ω_0 os intervalos $(\alpha(t), \beta(t))$ e (α_0, β_0), respectivamente.

Observação 2.1 *A hipótese **(H1)** implica que a função real $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ é crescente sobre $[0, \infty)$. Isso significa, também, que $\widehat{Q}$ é crescente , no sentido que se $t_1 > t_2$, então a projeção $[\alpha(t_1), \beta(t_1)]$ sobre o subespaço $t = 0$ está contido na projeção de $[\alpha(t_2), \beta(t_2)]$ sobre o mesmo subespaço.*

- **Exemplos de Domínios $\widehat{\mathbf{Q}}$.**

1. Pela hipótese **(H1)** temos

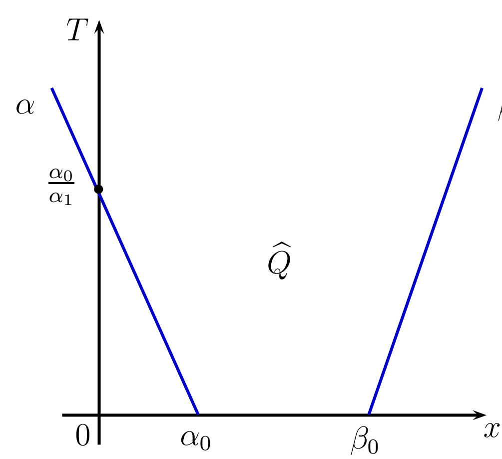
$$-\alpha'(t) \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \boldsymbol{\beta}'(t) \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando, obtemos domínios $\widehat{Q}$

$$\alpha(t) = \alpha_0 - \alpha_1 t, \qquad 0 \leq \alpha_1 \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 t, \qquad 0 \leq \boldsymbol{\beta}_1 \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

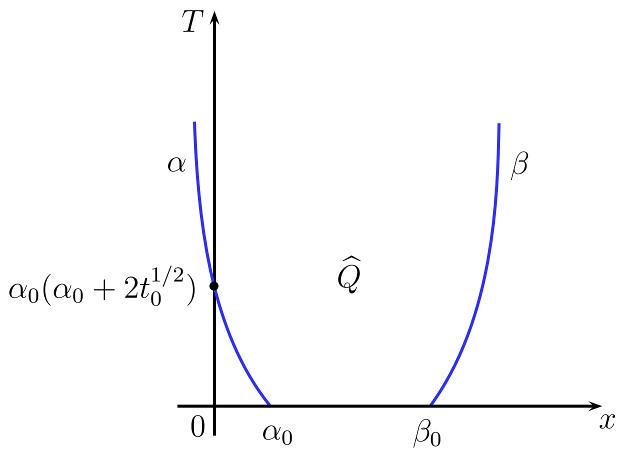
Note que, nesse caso, temos fronteiras lineares.



2. A fronteira

$$\left| \begin{array}{l} \alpha(t) = \alpha_0 + t_0^{\frac{1}{2}} - (t+t_0)^{\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\beta}_0 - t_0^{\frac{1}{2}} - (t+t_0)^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

com $t_0 = 4(\dfrac{m_0}{2})$ é não linear.



Nosso estudo foi motivado no trabalho de J.-L. Lions [29], onde investigamos questão similar do controle hierárquico para a equação (2.1), utilizando a estratégia de Stackelberg no caso de domínios dependendo do tempo.

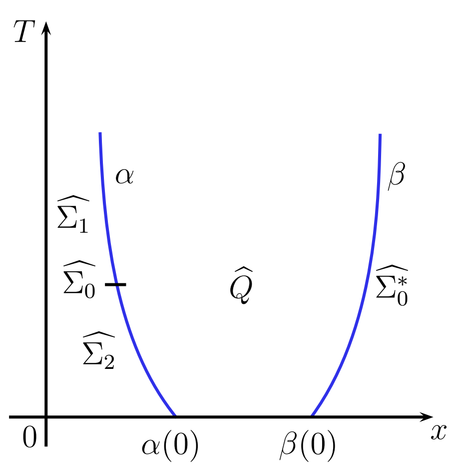
Como em [29], dividiremos $\widehat{\Sigma}_0$ em duas partes disjuntas

$$\widehat{\Sigma}_0 = \widehat{\Sigma}_1 \cup \widehat{\Sigma}_2, \tag{2.2}$$

e consideremos

$$\widetilde{w} = \{\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2\}, \;\; \widetilde{w}_i = \text{função controle em } \; L^2(\widehat{\Sigma}_i), \; i = 1, 2. \tag{2.3}$$

Geometricamente, temos



Portanto, o sistema (2.1) pode ser escrito como sendo

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta\left[\left(\dfrac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}\gamma'(t)+\alpha'(t)\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right] = 0 \ \text{ em } \ \widehat{Q} \\ u(x,t) = \begin{cases} \widetilde{w}_1 & \text{sobre } \ \widehat{\Sigma}_1 \\ \widetilde{w}_2 & \text{sobre } \ \widehat{\Sigma}_2 \\ 0 & \text{sobre } \ \widehat{\Sigma}\backslash\widehat{\Sigma}_0 \end{cases} \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \ \text{ em } \Omega_0. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Na decomposição de (2.2) e (2.3), estabelecemos uma hierarquia. Pensamos $\widetilde{w}_1$ como sendo o controle líder e $\widetilde{w}_2$ como sendo o seguidor, sempre na terminologia de Stackelberg.

• **Funcionais custos no cilindro $\widehat{\mathbf{Q}}$.** Associado a solução $u = u(x,t)$ de (2.4), consideremos o funcional (secundário)

$$\widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, u) = \frac{1}{2}\iint_{\widehat{Q}} (u(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) - \widetilde{u}_2)^2\, dxdt + \frac{\widetilde{\sigma}}{2}\int_{\widehat{\Sigma}_2} \widetilde{w}_2^2\, d\widehat{\Sigma}, \tag{2.5}$$

e o funcional (principal)

$$\widetilde{J}(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = \int_{\widehat{\Sigma}_1} \widetilde{w}_1^2\, d\widehat{\Sigma}, \tag{2.6}$$

onde $\widetilde{\sigma} > 0$ é constante e $\widetilde{u}_2$ é uma função dada em $L^2(\widehat{Q})$.

Observação 2.2 *Da regularidade e unicidade de solução do sistema (2.1) (vide observação 2.4) e, portanto do sistema (2.4) , os funcionais custos $\widetilde{J}_2$ e $\widetilde{J}$ estão bem definidos.*

O problema de controle que consideraremos é o seguinte: o seguidor $\widetilde{w}_2$ assume que o líder $\widetilde{w}_1$ tem feito uma escolha de sua estratégia (política). Em seguida, tenta encontrar um equilíbrio para seu custo $\widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, u)$, isto é, ele procura um controle $\widetilde{w}_2 = \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)$ (dependendo de $\widetilde{w}_1$) tal que

$$\widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, u) = \inf_{\widehat{w}_2 \in L^2(\widehat{\Sigma}_2)} \widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widehat{w}_2, u). \tag{2.7}$$

O controle $\widetilde{w}_2$, solução de (2.7), é chamado de equilíbrio de Nash para seu custo $\widetilde{J}_2$ e ele depende de $\widetilde{w}_1$.

Após isso, consideremos o estado $u\left(\widetilde{w}_1, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)\right)$ dado pela solução de

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta\left[\left(\dfrac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}\gamma'(t) + \alpha'(t)\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right] = 0 \text{ em } \widehat{Q} \\ u(x,t) = \begin{cases} \widetilde{w_1} & \text{sobre } \widehat{\Sigma}_1 \\ \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1) & \text{sobre } \widehat{\Sigma}_2 \\ 0 & \text{on } \widehat{\Sigma}\backslash\widehat{\Sigma}_0 \end{cases} \\ u(x,0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \text{ em } \Omega_0. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Encontraremos um controle ótimo $\widetilde{w_1}$ tal que

$$\widetilde{J}(\widetilde{w_1}, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)) = \inf_{\overline{w}_1 \in L^2(\widehat{\Sigma}_1)} \widetilde{J}(\overline{w}_1, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)), \tag{2.9}$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada do tipo

$$(u(x,T;\widetilde{w_1}, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)), u'(x,T;\widetilde{w_1}, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1))) \in B_{L^2(\Omega_t)}(u^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(\Omega_t)}(u^1, \alpha_1), \tag{2.10}$$

onde, de agora em diante, $B_X(C,r)$ denota a bola em um espaço X com centro C e raio r.

Para explicitar esse problema ótimo, iremos considerar os seguintes sub-problemas:

• **Problema 1** Fixado qualquer controle $\widetilde{w}_1$, encontrar o controle seguidor $\widetilde{w}_2 = \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)$ (dependendo de $\widetilde{w}_1$), associado a solução u de (2.4) satisfazendo a condição (2.7) (equilíbrio de Nash) relacionado a $\widetilde{J}_2$ definido em (2.5).

• **Problema 2** Assumindo a existência e unicidade do equilíbrio de Nash $\widetilde{w}_2$, mostrar que quando $\widetilde{w_1}$ varia em $L^2(\Omega_t)$, as soluções $(u(x,t;\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2), u'(x,t;\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2))$ da equação (2.4), avaliadas em $t = T$, ou seja , $(u(x,T;\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2), u'(x,T;\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2))$, geram um subconjunto denso de $L^2(\Omega_t) \times H^{-1}(\Omega_t)$.

Observe que quando (x,t) varia em $\widehat{Q}$ o ponto (y,t), com $y = \dfrac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}$, varia em $Q = \Omega \times (0,T)$, onde $\Omega = (0,1)$. Então a aplicação

$$\tau : \widehat{Q} \to Q, \quad \tau(x,t) = (y,t)$$

é de classe C^2 com inversa τ^{-1} também de classe C^2. Portanto, a mudança de variáveis $u(x,t) = v(y,t)$, transforma o problema de valor inicial de fronteira (2.1) no sistema equivalente

$$
\left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Lv = 0 \ \text{ em } \ Q \\
\begin{cases} v(0,t) = w \ \text{ sobre } \ \Sigma_0 \\ v(1,t) = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma\backslash\Sigma_0 \end{cases} \\
v(y,0) = v_0(y), \ \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,0) = v_1(y), 0 < y < 1,
\end{array}\right. \tag{2.11}
$$

onde

$$
\left|\begin{array}{l}
Lv = -\dfrac{1}{\gamma^2(t)}\left(-\dfrac{m_0}{2} + a(t)\right)\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\check{a}(y,t)\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \check{b}(y,t)\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \\
+\check{c}(y,t)\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + \delta\dfrac{\partial v}{\partial t} \\
\check{a}(y,t) = \dfrac{m_0}{2\,\gamma^2(t)} - \left(\dfrac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)^2 \\
\check{b}(y,t) = -2\left(\dfrac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right) \\
\check{c}(y,t) = -\left(\dfrac{\alpha''(t) + \gamma''(t)y}{\gamma(t)}\right) \\
\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_0^* \\
\Sigma_0 = \{(0,t) : 0 < t < T\} \\
\Sigma_0^* = \Sigma\backslash\Sigma_0 = \{(1,t) : 0 < t < T\}.
\end{array}\right. \tag{2.12}
$$

Com efeito, usando a regra da cadeia obtemos

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.13}
$$

De (2.13), usando novamente a regra da cadeia, obtemos

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{2.14}
$$

De fato,

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y}.
$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

e assim segue (2.14).

Também,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)\,y}{\gamma(t)}\right), \tag{2.15}$$

visto que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{-\alpha'(t)\,\gamma(t) - (x-\alpha(t))\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}\\
&= \frac{-\alpha'(t)\,\gamma(t) - y\,\gamma(t)\,\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}\\
&= -\left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)\,y}{\gamma(t)}\right).
\end{aligned}$$

Derivando (2.15) em relação a t, obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t)\,y}{\gamma(t)}\right) - \frac{2\gamma'(t)\,y'}{\gamma(t)}, \tag{2.16}$$

pois,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)\,y}{\gamma(t)}\right]\\
&= -\left[\frac{\big(\alpha'(t) + \gamma'(t)\,y\big)'\gamma(t) - \big(\alpha'(t) + \gamma'(t)\,y\big)\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}\right]\\
&= -\left[\frac{\big(\alpha''(t) + \gamma''(t)\,y + \gamma'(t)\,y'\big)\gamma(t) - \big(\alpha'(t) + \gamma'(t)\,y\big)\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}\right]\\
&= -\left[\left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t)\,y}{\gamma(t)}\right) + \frac{\gamma'(t)\,y'}{\gamma(t)} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)\,y}{\gamma(t)}\right)\right]\\
&= -\left[\left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t)\,y}{\gamma(t)}\right) + \frac{\gamma'(t)\,y'}{\gamma(t)} + \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,y'\right]\\
&= -\left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t)\,y + 2\gamma'(t)\,y'}{\gamma(t)}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(y,t)\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y,t)\,\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.17}$$

onde

$$\begin{aligned} a(y,t) &= \left(\frac{\alpha'(t)+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)^2 \\ \check{b}(y,t) &= -2\left(\frac{\alpha'(t)+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right) \\ \check{c}(y,t) &= -\left(\frac{\alpha''(t)+\gamma''(t)y}{\gamma(t)}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{(\gamma(t))^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{2.18}$$

De fato,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(y,t) = \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\gamma(t)}\,\frac{\partial v}{\partial y},$$

isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\gamma(t)}\,\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.19}$$

De (2.19), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\gamma(t)}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{\gamma(t)}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\gamma(t)}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{\gamma(t)}\,\frac{1}{\gamma(t)}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{(\gamma(t))^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

e assim se segue (2.18).

Agora, como

$$x = \alpha(t) + y\gamma(t)$$

então

$$\frac{\partial x}{\partial t} = y\gamma'(t) + \alpha'(t) = \frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}\gamma'(t) + \alpha'(t)$$

Logo,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}\gamma'(t) + \alpha'(t)\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Portanto, o problema (2.1) é transformado pela aplicação $\tau : \widehat{Q} \longrightarrow Q$ no seguinte problema cilíndrico

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\gamma^2(t)} a(t) \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(y,t) \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y,t) \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y,t) \dfrac{\partial v}{\partial y} - 2 \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \dfrac{\partial y}{\partial t} \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ + \delta \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,t) = 0 \text{ em } \ Q \\ \begin{cases} v(0,t) = w \ \text{ sobre } \ \Sigma_0 \\ v(1,t) = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ v(y,0) = v_0(y), \ \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,0) = v_1(y), \ \ 0 < y < 1. \end{array} \right. \tag{2.20}$$

Notemos que de $(2.20)_1$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} a(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(y,t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y,t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y,t) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \\ & + \delta \frac{\partial v}{\partial t} \\ & = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} a(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{m_0}{2\gamma^2(t)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{m_0}{2\gamma^2(t)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(y,t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y,t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \\ & + \check{c}(y,t) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} \\ & = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(- \frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{m_0}{2\gamma^2(t)} - a(y,t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y,t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \\ & + \check{c}(y,t) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} \\ & = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(- \frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \breve{a}(y,t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y,t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y,t) \frac{\partial v}{\partial y} \\ & - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde

$$\begin{aligned} \breve{a}(y,t) &= \frac{m_0}{2\,\gamma^2(t)} - a(y,t) \\ \check{b}(y,t) &= -2 \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t) y}{\gamma(t)} \right) \\ \check{c}(y,t) &= - \left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t) y}{\gamma(t)} \right). \end{aligned}$$

Agora, como

$$\breve{a}(y,t) = \frac{m_0}{2\,\gamma^2(t)} - a(y,t),$$

então

$$\frac{\partial \breve{a}}{\partial y}(y,t) = - \frac{\partial a}{\partial y}(y,t) = -2 \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t) y}{\gamma(t)} \right) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t},$$

isto é,

$$\frac{\partial \breve{a}}{\partial y}(y,t) = 2\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2.22}$$

Substituindo (2.22) na última igualdade de (2.21), obtemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \breve{a}(y,t)\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial \breve{a}}{\partial y}(y,t)\,\frac{\partial v}{\partial y} + \breve{b}(y,t)\,\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \breve{c}(y,t)\,\frac{\partial v}{\partial y} + \delta\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \breve{b}(y,t)\,\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \breve{c}(y,t)\,\frac{\partial v}{\partial y} + \delta\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Portanto, o sistema (2.20) pode ser reescrito como

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\gamma^2(t)}\left(-\dfrac{m_0}{2} + a(t)\right)\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \breve{b}(y,t)\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \\ +\breve{c}(y,t)\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + \delta\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \text{ em } \; Q \\ \left\{\begin{array}{l} v(0,t) = w \;\; \text{sobre} \;\; \Sigma_0 \\[2ex] v(1,t) = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Sigma\backslash\Sigma_0 \end{array}\right. \\ v(y,0) = v_0(y), \;\; \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,0) = v_1(y), \;\; 0 < y < 1, \end{array}\right. \tag{2.23}$$

onde

$$\left|\begin{array}{l} \breve{a}(y,t) = \dfrac{m_0}{2\,\gamma^2(t)} - \left(\dfrac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)^2 \\ \breve{b}(y,t) = -2\left(\dfrac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right) \\ \breve{c}(y,t) = -\left(\dfrac{\alpha''(t) + \gamma''(t)y}{\gamma(t)}\right). \end{array}\right.$$

Considerando o operador

$$Lv = -\frac{1}{\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \breve{b}(y,t)\,\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \breve{c}(y,t)\,\frac{\partial v}{\partial y} + \delta\frac{\partial v}{\partial t},$$

segue (2.11) e (2.12).

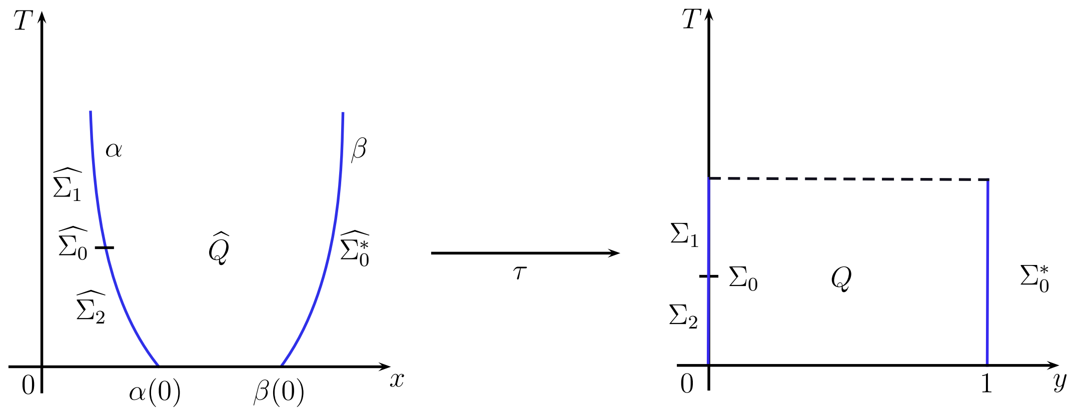
Desse modo, investigaremos o problema de controle para o problema equivalente (2.11). Para isso, dividiremos Σ_0 em duas partes disjuntas

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \tag{2.24}$$

e consideremos

$$w = \{w_1, w_2\}, \quad w_i \in L^2(\Sigma_i), \; i = 1, 2. \tag{2.25}$$

Geometricamente, temos



Também podemos escrever

$$w = w_1 + w_2,$$

com

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_0. \tag{2.26}$$

Então, reescrevemos (2.11) como sendo

$$\left| \begin{array}{l} v'' + Lv = 0 \ \text{ em } \ Q \\ v = \begin{cases} w_1 \ \text{ sobre } \ \Sigma_1 \\ w_2 \ \text{ sobre } \ \Sigma_2 \\ 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ v(y,0) = v_0(y), \ v'(y,0) = v_1(y), \ 0 < y < 1, \end{array} \right. \tag{2.27}$$

onde usamos a notação v' em vez de $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ e v'' em vez de $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ para uma melhor compreensão.

Observação 2.3 *Para efeitos de controle aproximado, pela linearidade do sistema (2.27), podemos assumir, sem perda de generalidade, que* $v_0 = v_1 = 0$.

Na decomposição de (2.24) e (2.25) estabelecemos uma hierarquia. Pensamos w_1 como sendo o controle líder e w_2 é o controle seguidor, sempre na terminologia de Stackelberg.

• **Funcionais Custos no cilindro Q.** Do difeomorfismo τ que transforma $\widehat{Q}$ em Q, transformamos os funcionais custos $\widetilde{J}_2, \widetilde{J}$ nos funcionais custos J_2, J definidos, respectivamente, por

$$J_2(w_1, w_2, v) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \gamma(t)[v(w_1, w_2) - v_2(y,t)]^2 dy\, dt + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 \, d\Sigma \tag{2.28}$$

e

$$J(w_1) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} w_1^2 \, d\Sigma, \tag{2.29}$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante positiva e $v_2(y,t)$ é uma função dada em $L^2(\Omega \times (0,T))$.

Observação 2.4 *Das hipóteses **(H1)** – **(H3)**, para cada* $v_0 \in H_0^1(0,1)$ *,* $v_1 \in L^2(0,1)$ *e* $w_i \in L^2(\widehat{\Sigma}_i)$*,* $i = 1,2$*, existe exatamente uma solução* v *do sistema (2.11) (vide Seção 2.4, Teorema 2.7) e, portanto do sistema (2.27), com* $v \in L^\infty\big(0,\infty; H_0^1(0,1)\big)$*,* $v' \in L^\infty\big(0,\infty; L^2(0,1)\big)$*. Em particular, os funcionais* J_2 *e* J *estão bem definidos. Usando o difeomorfismo* $\tau^{-1}(y,t) = (x,t)$*, de* Q *em* $\widehat{Q}$*, obtemos uma única solução global fraca* u *para o sistema (2.1)(vide Seção 2.4, Teorema 2.8) e portanto para o sistema (2.4), com regularidade* $u \in L^\infty\big(0,\infty; H_0^1(\Omega_t)\big)$*,* $u' \in L^\infty\big(0,\infty; L^2(\Omega_t)\big)$*.*

Associado aos funcionais J_2 e J definidos acima, consideremos os seguintes sub-problemas:

• **Problem 3** Fixado um controle líder w_1, encontrar um controle seguidor w_2 (dependendo de w_1) associado a solução v de (2.27) satisfazendo (equilíbrio de Nash)

$$J_2(w_1, w_2, v) = \inf_{\widehat{w}_2 \in L^2(\Sigma_2)} J_2(w_1, \widehat{w}_2, v), \tag{2.30}$$

relacionado a J_2 definido em (2.28).

• **Problem 4** Assumindo a existência e unicidade do equilíbrio de Nash w_2 , mostrar que quando w_1 varia em $L^2(\Omega)$, as soluções $(v(y,t;w_1,w_2), v'(x,t;w_1,w_2))$ da equação (2.27), avaliadas em $t = T$, ou seja , $(v(y,T;w_1,w_2), v'(y,T;w_1,w_2))$, geram um subconjunto denso de $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$.

Notemos que se w_2 é o único equilíbrio de Nash, dependendo de w_1, para (2.28), então sua transformação , por τ^{-1}, é o único equilíbrio de Nash $\widetilde{w}_2$ para (2.5), que depende de $\widetilde{w}_1$.

Lembremos que nosso problema inicial eram os controles $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}_2$ atuarem tal que a função u, única solução de (2.4), atinja no tempo T um estado ideal $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega_t) \times H^{-1}(\Omega_t)$ com funcional custo definido por (2.5).

Do difeomorfismo τ, esse problema em $\widehat{Q}$ foi transformado num problema equivalente no cilindro Q. Assim, fixado $(v^0, v^1) \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, os controles w_1, w_2 deverão atuar tal que a única solução v de (2.27), avaliada em $t = T$, atinja o estado ideal (v^0, v^1). Isso será feito no sentido da controlabilidade aproximada. De fato, é suficiente provar que se w_2, dependendo de w_1, é o único equilíbrio de Nash para o funcional custo (2.28), então temos controlabilidade aproximada. Isso significa que se existe o único equilíbrio de Nash e v é a única solução de (2.27), então o conjunto gerado por $(v(y,T;w_1,w_2), v'(y,T;w_1,w_2))$ é denso em $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, isto é , aproxima (v^0, v^1). Esse problema será estudado na seção 2.3, isto é, após acharmos o equilíbrio de Nash (Seção 2.2) para cada w_1, encontraremos um controle ótimo $\overline{w}_1$ tal que

$$J(\overline{w}_1) = \inf_{w_1} J(w_1) \tag{2.31}$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada do tipo

$$(v(y,T;w_1,w_2), v'(y,T;w_1,w_2)) \in B_{L^2(0,1)}(v^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(0,1)}(v^1, \alpha_1). \tag{2.32}$$

2.2 Equilíbrio de Nash

Nessa seção, fixado qualquer controle $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, queremos determinar a existência e unicidade da solução para o problema

$$\inf_{w_2 \in L^2(\Sigma_2)} J_2(w_1, w_2), \tag{2.33}$$

e depois obtermos a caracterização dessa solução em termos de um sistema adjunto, para em seguida, obtermos o sistema otimizado para o controle seguidor w_2.

O problema (2.33) admite uma única solução

$$w_2 = \mathfrak{F}(w_1). \tag{2.34}$$

Com efeito, para a solução do problema (2.33), minimizaremos o funcional J_2 fazendo uso do seguinte teorema :

Teorema 2.1 *Seja $F : D \subseteq H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional definido em um subconjunto D de um espaço de Hilbert H. Suponha que F tem as seguintes propriedades:*

(i) *D é um subconjunto convexo fechado não vazio do espaço de Hilbert H;*

(ii) *F é sequencialmente semi-contínuo inferiormente;*

(iii) *Se D é ilimitado, então F é fracamente coercivo.*

Então o problema de minimzação

$$F(u) = \min_{v \in D} F(v) \tag{2.35}$$

tem uma solução e esta será única se adicionarmos a hipótese de F for estritamente convexo.

Demonstração: Vide Zeidler ([51], página 54). $\square$

Seja

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(v, w_2) \in L^2(Q) \times L^2(\Sigma_2) : v \text{ solução de } (2.27)\} \subset \left(L^2(Q)\right)^2$$

e

$$J_2(v, w_2) : \mathcal{U}_{ad} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por (2.28). Escrevemos $v = v(w_1, w_2)$.

Então,

(a) $\mathcal{U}_{ad}$ é não vazio e sendo $\mathcal{U}_{ad}$ um subespaço de um espaço de Hilbert, então $\mathcal{U}_{ad}$ é convexo. É claro, também, que $\mathcal{U}_{ad}$ é fechado, pois dado $(v, w_2) \in \overline{\mathcal{U}_{ad}}$ então $(v, w_2) \in \mathcal{U}_{ad}$.

(b) J_2 é fracamente coercivo.

De fato, usando a desigualdade triangular, temos

$$||v - v_2||_{L^2(Q)} \geq \Big| ||v||_{L^2(Q)} - ||v_2||_{L^2(Q)} \Big|$$

e como v_2 é fixo, segue que

$$\lim_{\substack{||v||_{L^2(Q)} \to \infty \\ ||w_2||_{L^2(\Sigma_2)} \to \infty}} J_2(v, w_2) = \frac{1}{2} \Big|\Big| (\gamma(t))^{\frac{1}{2}} (v - v_2) \Big|\Big|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2} ||w_2||^2_{L^2(\Sigma_2)} \to \infty.$$

Logo, segue a coercividade fraca de J_2.

(c) J_2 é fracamente sequencialmente semi-contínuo inferiormente.

Com efeito, sejam duas sequências (v^n), $(w_2^n) \subset \mathcal{U}_{ad}$ tais que

$$\begin{aligned} v^n &\rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^2(Q) \\ w_2^n &\rightharpoonup w_2 \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma_2) \end{aligned}$$

Portanto, conforme Brezis ([8], página 58), temos

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\big|\big|(\gamma(t))^{\frac{1}{2}}(v^n - v_2)\big|\big|_{L^2(Q)} \geq \frac{1}{2}\big|\big|(\gamma(t))^{\frac{1}{2}}(v - v_2)\big|\big|_{L^2(Q)}$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} ||w_2^n||_{L^2(\Sigma_2)} \geq ||w_2||_{L^2(\Sigma_2)}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J_2(v^n, w_2^n) &= \liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\big|\big|(\gamma(t))^{\frac{1}{2}}(v^n - v_2)\big|\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2}\, ||w_2^n||^2_{L^2(\Sigma_2)}\right\} \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\big|\big|(\gamma(t))^{\frac{1}{2}}(v^n - v_2)\big|\big|^2_{L^2(Q)}\right\} + \liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{\sigma}{2}\, ||w_2^n||^2_{L^2(\Sigma_2)}\right\} \\
&\geq \frac{1}{2}\big|\big|(\gamma(t))^{\frac{1}{2}}(v - v_2)\big|\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2}||w_2||^2_{L^2(\Sigma_2)} \\
&= J_2(v, w_2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\liminf_{n\to\infty} J_2(v^n, w_2^n) \geq J_2(v, w_2),$$

o que caracteriza a semi-continuidade fraca inferior.

(d) J_2 é estritamente convexo.

De fato, sejam $\lambda \in (0,1)$ e (v, w_2), $(\widetilde{v}, \widetilde{w}_2) \in \mathcal{U}_{ad}$ com $(v, w_2) \neq (\widetilde{v}, \widetilde{w}_2)$. Escrevendo v_2 como

$$v_2 = \lambda\, v_2 + (1-\lambda) v_2,$$

temos

$$\begin{aligned}
&J_2[\lambda(v, w_2) + (1-\lambda)(\widetilde{v}, \widetilde{w}_2)] = J_2[\lambda\, v + (1-\lambda)\widetilde{v}, \lambda\, w_2 + (1-\lambda)\widetilde{w}_2] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)[\lambda\, v + (1-\lambda)\widetilde{v} - v_2]^2 dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} [\lambda\, w_2 + (1-\lambda)\widetilde{w}_2]^2 d\Sigma \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)[\lambda\, v + (1-\lambda)\widetilde{v} - \lambda v_2 - (1-\lambda)v_2]^2 dy\, dt \\
&+ \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} [\lambda\, w_2 + (1-\lambda)\widetilde{w}_2]^2 d\Sigma \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)[\lambda(v - v_2) + (1-\lambda)(\widetilde{v} - v_2)]^2 dy\, dt \\
&+ \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} [\lambda\, w_2 + (1-\lambda)\widetilde{w}_2]^2 d\Sigma.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Analisando a última igualdade do lado direito de (2.36), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)[\lambda(v-v_2)+(1-\lambda)(\widetilde{v}-v_2)]^2 dy\,dt\\
&+\frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}[\lambda\, w_2+(1-\lambda)\widetilde{w}_2]^2 d\Sigma\\
&=\frac{\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\,dt\\
&+\lambda(1-\lambda)\underbrace{\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)(\widetilde{v}-v_2)dy\,dt}_{(*)} \qquad (2.37)\\
&+\frac{(1-\lambda)^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(\widetilde{v}-v_2)^2 dy\,dt+\frac{\sigma\,\lambda^2}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\\
&+\sigma\,\lambda(1-\lambda)\underbrace{\int_{\Sigma_2} w_2\widetilde{w}_2\, d\Sigma}_{(**)}+\frac{\sigma(1-\lambda)^2}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\, d\Sigma.
\end{aligned}$$

Vamos majorar $(*)$ e $(**)$ usando a desigualdade de Young. Aplicando a desigualdade de Young na expressão $(*)$ e depois multiplicando o resultado por $\lambda(1-\lambda)>0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\lambda(1-\lambda)\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)(\widetilde{v}-v_2)dydt\\
&<\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dydt+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(\widetilde{v}-v_2)^2 dydt
\end{aligned} \qquad (2.38)$$

Novamente aplicando a desigualdade de Young na expressão $(**)$ e depois multiplicando o resultado por $\sigma\lambda(1-\lambda)>0$, obtemos

$$\sigma\,\lambda(1-\lambda)\int_{\Sigma_2} w_2\widetilde{w}_2\, d\Sigma < \frac{\sigma\,\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma+\frac{\sigma\,\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\, d\Sigma. \qquad (2.39)$$

Substituindo (2.38) e (2.39) no lado direito de (2.36), obtemos a desigualdade estrita

$$\begin{aligned}
&J_2[\lambda(v,w_2)+(1-\lambda)(\widetilde{v},\widetilde{w}_2)] < \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\,dt\\
&+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\,dt+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(\widetilde{v}-v_2)^2 dy\,dt\\
&+\frac{(1-\lambda)^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(\widetilde{v}-v_2)^2 dy\,dt+\frac{\sigma\lambda^2}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma+\frac{\sigma\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\\
&+\frac{\sigma\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\, d\Sigma+\frac{\sigma(1-\lambda)^2}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\, d\Sigma=\frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\,dt\\
&+\frac{\sigma\lambda}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma+\frac{(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(\widetilde{v}-v_2)^2 dy\,dt+\frac{\sigma(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\, d\Sigma
\end{aligned}$$

$$= \lambda \left[\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\right]$$
$$+(1-\lambda)\left[\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \gamma(t)(\widetilde{v}-v_2)^2 dy\, dt \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} \widetilde{w}_2^2\, d\Sigma\right]$$
$$= \lambda\, J_2(v,w_2) + (1-\lambda)J_2(\widetilde{v},\widetilde{w}_2),$$

ou seja,

$$J_2[\lambda(v,w_2)+(1-\lambda)(\widetilde{v},\widetilde{w}_2)] < \lambda J_2(v,w_2) + (1-\lambda)J_2(\widetilde{v},\widetilde{w}_2).$$

Portanto, existe uma única solução w_2 para o problema (2.33). Como para cada w_1 dado encontramos uma única solução w_2, podemos relacionar uma dependência entre w_1 e w_2 de forma que $w_2 = \mathfrak{F}(w_1)$.

Agora, dado w_1, calcularemos a derivada de Gateaux do funcional $J_2(v;w_1,w_2)$ e igualaremos a zero, encontrando assim a equação de Euler-Lagrange associada ao problema (2.33).

Com efeito, sejam $\theta_1 \in L^2\big(\Omega\times(0,T)\big)$ e $\theta_2 \in L^2\big(\Sigma_2\big)$. Para $\varepsilon > 0$, temos

$$J_2'(v;w_2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{ J_2(v+\varepsilon\theta_1; w_2+\varepsilon\theta_2) - J_2(v;w_2)\right\} =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v+\varepsilon\theta_1-v_2)^2 dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}(w_2+\varepsilon\theta_2)^2 d\Sigma - \right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\, dt - \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)\Big[(v-v_2)^2 + 2\varepsilon\theta_1(v-v_2) + \varepsilon^2\theta_1^2\Big] dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}(w_2+\varepsilon\theta_2)^2 d\Sigma\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\, dt - \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\, dt\right.$$
$$+\,\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)\theta_1 dy\, dt + \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)\theta_1^2 dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma + \varepsilon\sigma\int_{\Sigma_2} w_2\theta_2 d\Sigma$$
$$\left. + \frac{\sigma}{2}\varepsilon^2\int_{\Sigma_2}\theta^2 d\Sigma - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)^2 dy\, dt - \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\right\}$$
$$= \int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)\theta_1 dy\, dt + \sigma\int_{\Sigma_2} w_2\theta_2 d\Sigma.$$

Assim, a equação de Euler-Lagrange para (2.28) é dada por

$$\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v-v_2)\widehat{v} dy\, dt + \sigma\int_{\Sigma_2} w_2\widehat{w}_2 d\Sigma = 0, \tag{2.40}$$

$\forall\, \widehat{w}_2 \in L^2(\Sigma_2)$, onde $\widehat{v}$ é solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} \widehat{v}'' + L\widehat{v} = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,T) \\ \widehat{v} = \begin{cases} 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma_1 \\ \widehat{w}_2 \;\text{ sobre }\; \Sigma_2 \\ 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma \backslash (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \end{cases} \\ \widehat{v}(y,0) = 0, \;\; \widehat{v}'(y,0) = 0 \;\text{ em }\; \Omega. \end{array}\right. \tag{2.41}$$

Para obtermos o sistema otimizado, precisamos do sistema adjunto relacionado a (2.41).

Para isso, multipliquemos $(2.41)_1$ por uma função $p = p(y,t)$, $y \in (0,1)$, $t \in (0,T)$, e integramos o resultado obtido de 0 até T. Temos

$$\int_0^T p\,\widehat{v}''dt + \int_0^T p(L\widehat{v})\,dt = 0.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$p(T)\,\widehat{v}'(T) - p(0)\,\widehat{v}'(0) - p'(T)\,\widehat{v}(T) + p'(0)\,\widehat{v}(0) + \int_0^T \widehat{v}\,p''\,dt + \int_0^T p(L\widehat{v})\,dt = 0.$$

Da definição do operador L

$$L\widehat{v} = -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\Delta\widehat{v} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\right) + \breve{b}(y,t)\,\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial y \partial t} + \breve{c}(y,t)\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} + \delta\frac{\partial \widehat{v}}{\partial t},$$

e integrando a expressão acima em $\Omega = (0,1)$, resulta que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega p(T)\,\widehat{v}'(T)\,dy - \int_\Omega p(0)\,\widehat{v}'(0)\,dy - \int_\Omega p'(T)\,\widehat{v}(T)\,dy + \int_\Omega p'(0)\,\widehat{v}(0)\,dy \\ &+ \int_0^T\!\!\int_\Omega \widehat{v}\,p''\,dy\,dt - \int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\Delta\widehat{v}\,p\,dy\,dt \\ &- \int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\right)p\,dy\,dt + \int_0^T\!\!\int_\Omega \breve{b}(y,t)\,\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial y \partial t}\,p\,dy\,dt \\ &+ \int_0^T\!\!\int_\Omega \breve{c}(y,t)\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\,p\,dy\,dt + \delta\int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t}\,p\,dy\,dt = 0. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Pela primeira fórmula de Green, temos

$$-\int_\Omega \Delta\widehat{v}\,p\,dy = \int_\Omega \nabla\widehat{v}\nabla p\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\,p\,d\Gamma. \tag{2.43}$$

Usando novamente a primeira fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\widehat{v}\nabla p\,dy = -\int_\Omega \widehat{v}\Delta p\,dy + \int_{\partial\Omega} \widehat{v}\,\frac{\partial p}{\partial y}\,d\Gamma. \tag{2.44}$$

Substituindo (2.44) em (2.43), segue que

$$-\int_{\Omega} \Delta\widehat{v}\, p\, dy = -\int_{\Omega} \widehat{v}\Delta p\, dy + \int_{\partial\Omega} \widehat{v}\, \frac{\partial p}{\partial y}\, d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\, p\, d\Gamma.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\, \Delta\widehat{v}\, p\, dy = &-\int_{\Omega} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\, \widehat{v}\Delta p\, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\, \widehat{v}\, \frac{\partial p}{\partial y}\, d\Gamma \\ &- \int_{\partial\Omega} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\, p\, d\Gamma. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\, \Delta\widehat{v}\, p\, dy\, dt = &-\int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\, \widehat{v}\Delta p\, dy\, dt + \int_{\Sigma} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\, \widehat{v}\, \frac{\partial p}{\partial y}\, d\Sigma \\ &- \int_{\Sigma} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\, p\, d\Sigma. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Suponhamos que

$$p(1,t) = p(0,t) = 0 \text{ sobre } \Sigma.$$

Agora,

-
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\right) p\, dy &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\right) p\, dy \\ &= \breve{a}(y,t)\, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}(y,t)\, p(y,t)\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \breve{a}(y,t)\, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\, \frac{\partial p}{\partial y}\, dy \\ &= -\int_0^1 \breve{a}(y,t)\, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\, \frac{\partial p}{\partial y}\, dy \\ &= -\breve{a}(y,t)\, \frac{\partial p}{\partial y}\, \widehat{v}(y,t)\Big|_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\, \frac{\partial p}{\partial y}\right) \widehat{v}\, dy \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\, \frac{\partial p}{\partial y}\right) \widehat{v}\, dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\, \frac{\partial p}{\partial y}\right) \widehat{v}\, dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\right) p\, dy\, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\, \frac{\partial p}{\partial y}\right) \widehat{v}\, dy\, dt. \tag{2.46}$$

- $$\int_\Omega \check{b}(y,t)\,\frac{\partial^2\widehat{v}}{\partial y\partial t}\,p\,dy = \int_0^1 \check{b}(y,t)\,p\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}\right)\,dy$$
$$= \check{b}(y,t)\,p(y,t)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}(y,t)\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(\check{b}(y,t)\,p(y,t)\Big)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}\,dy$$
$$= -\int_0^1 \left[\frac{\partial\check{b}}{\partial y}(y,t)\,p(y,t) + \check{b}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}(y,t)\right]\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}\,dy$$
$$= -\int_0^1 \frac{\partial\check{b}}{\partial y}(y,t)\,p(y,t)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}\,dy - \int_0^1 \check{b}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}(y,t)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}\,dy$$
$$= -\int_\Omega \frac{\partial\check{b}}{\partial y}(y,t)\,p(y,t)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}\,dy - \int_\Omega \check{b}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}(y,t)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}\,dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \check{b}(y,t)\,\frac{\partial^2\widehat{v}}{\partial y\partial t}\,p\,dy\,dt = \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\check{b}}{\partial y}(y,t)\,p(y,t)\right)\widehat{v}\,dy\,dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\check{b}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}(y,t)\right)\widehat{v}\,dy\,dt\\
&=\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial^2\check{b}}{\partial t\partial y}\,p(y,t)\widehat{v}(y,t)dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\check{b}}{\partial y}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial t}(y,t)\,\widehat{v}(y,t)dy\,dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\check{b}}{\partial t}\,\frac{\partial p}{\partial y}(y,t)\widehat{v}(y,t)dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega \check{b}(y,t)\,\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial y}\widehat{v}(y,t)dy\,dt
\end{aligned}\tag{2.47}$$

- $$\int_\Omega \check{c}(y,t)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial y}\,p\,dy = \int_0^1 \check{c}(y,t)\,p(y,t)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial y}\,dy$$
$$= \check{c}(y,t)\,p(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(\check{c}(y,t)\,p(y,t)\Big)\widehat{v}(y,t)\,dy$$
$$= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\Big(\check{c}(y,t)\,p(y,t)\Big)\widehat{v}(y,t)\,dy$$
$$= -\int_\Omega \frac{\partial\check{c}}{\partial y}(y,t)\,p(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\,dy - \int_\Omega \check{c}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\,dy,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \check{c}(y,t)\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial y}\,p\,dy\,dt = -\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\check{c}}{\partial y}(y,t)\,p(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\,dy\,dt\\
&-\int_0^T\int_\Omega \check{c}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\,dy\,dt.
\end{aligned}\tag{2.48}$$

•

$$\int_0^T p(y,t)\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial t}\,dt = p(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\Big|_{y=0}^{y=T} - \int_0^T \frac{\partial p}{\partial t}(y,t)\widehat{v}(y,t)\,dt$$
$$= p(T)\,\widehat{v}(T) - p(0)\,\widehat{v}(0) - \int_0^T \frac{\partial \widehat{p}}{\partial t}(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\,dt,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\delta\int_0^T\int_\Omega p(y,t)\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial t}\,dy\,dt &= \delta\int_\Omega p(T)\,\widehat{v}(T)dy - \delta\int_\Omega \underbrace{p(0)\widehat{v}(0)}_{=0}\,dy- \\ &- \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \widehat{p}}{\partial t}(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\,dy\,dt = \\ &= \delta\int_\Omega p(T)\,\widehat{v}(T)dy - \delta\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \widehat{p}}{\partial t}(y,t)\,\widehat{v}(y,t)\,dy\,dt\end{aligned} \tag{2.49}$$

Substituindo $(2.41)_3$, (2.45), (2.46), (2.47), (2.48), (2.49) em (2.42), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega p(T)\,\widehat{v}'(T)\,dy - \int_\Omega p'(T)\,\widehat{v}(T)\,dy + \int_0^T\int_\Omega p''\,\widehat{v}\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\Delta p\,\widehat{v}\,dy\,dt \\ &+ \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y}\,\widehat{v}\,d\Sigma - \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,p\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\,d\Sigma - \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\check{a}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}\right)\widehat{v}\,dy\,dt \\ &+ \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial^2 \check{b}}{\partial y\partial t}\,p\,\widehat{v}\,dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \check{b}}{\partial y}\,\frac{\partial p}{\partial t}\widehat{v}\,dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \check{b}}{\partial t}\,\frac{\partial p}{\partial y}\widehat{v}\,dy\,dt \\ &+ \int_0^T\int_\Omega \check{b}(y,t)\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial t}\,\widehat{v}\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \check{c}}{\partial y}\,p\,\widehat{v}\,dy\,dt \\ &- \int_0^T\int_\Omega \check{c}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}\,\widehat{v}\,dy\,dt + \delta\int_\Omega p(T)v(T)\,dy - \delta\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}\widehat{v}\,dy\,dt = 0\end{aligned} \tag{2.50}$$

Agrupando os membros de (2.50), resulta

$$\begin{aligned}&\int_\Omega p(T)\,\widehat{v}'(T)\,dy - \int_\Omega p'(T)\,\widehat{v}(T)\,dy + \int_0^T\int_\Omega p''\,\widehat{v}\,dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega \Bigg\{ -\frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\Delta p \\ &- \frac{\partial}{\partial y}\left(\check{a}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \check{b}(y,t)\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial t} + \left[\frac{\partial \check{b}}{\partial t} - \check{c}(y,t)\right]\,\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \check{b}}{\partial y}\,\frac{\partial p}{\partial t} \\ &+ \left[\frac{\partial^2 \check{b}}{\partial y\partial t} - \frac{\partial \check{c}}{\partial y}\right]\,p - \delta\frac{\partial p}{\partial t}\Bigg\}\widehat{v}\,dy\,dt \\ &+ \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y}\,\widehat{v}\,d\Sigma - \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,p\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\,d\Sigma + \delta\int_\Omega p(T)\widehat{v}(T)\,dy = 0.\end{aligned}$$

Portanto, da expressão acima, temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega p(T)\,\widehat{v}'(T)\,dy - \int_\Omega p'(T)\,\widehat{v}(T)\,dy + \int_0^T\int_\Omega p''\,\widehat{v}\,dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega (L^*\,p)\widehat{v}\,dy\,dt \\ &+ \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y}\,\widehat{v}\,d\Sigma - \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,p\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}\,d\Sigma + \delta\int_\Omega p(T)\widehat{v}(T)\,dy = 0,\end{aligned} \tag{2.51}$$

onde L^* é a adjunta de L dada formalmente por

$$L^* p = -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\Delta p - \frac{\partial}{\partial y}\left(\check{a}(y,t)\,\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \check{b}(y,t)\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} + \left[\frac{\partial \check{b}}{\partial t} - \check{c}(y,t)\right]\,\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial \check{b}}{\partial y}\,\frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{\partial^2 \check{b}}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \check{c}}{\partial y}\right]\,p - \delta\frac{\partial p}{\partial t}$$

Como não temos informação sobre $\widehat{v}(y,T)$ e $\widehat{v}'(y,T)$, então assumiremos que $p(y,T) = p'(y,T) = 0$ em Ω e $p(y,T) = 0$ sobre Σ, o que juntamente com a separação da fronteira em (2.51), nos dá

$$\int_\Omega \underbrace{p(T)\,\widehat{v}'(T)}_{=0}\,dy - \int_\Omega \underbrace{p'(T)\,\widehat{v}(T)}_{=0}\,dy + \int_0^T\int_\Omega p''\,\widehat{v}\,dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega (L^* p)\widehat{v}\,dy\,dt$$
$$+ \int_{\Sigma_1} \underbrace{\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y}\,\widehat{v}}_{=0}\,d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y}\,\widehat{v}\,d\Sigma - \int_\Sigma \underbrace{\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,p\,\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}}_{=0}\,d\Sigma +$$
$$+ \delta\int_\Omega \underbrace{p(T)\widehat{v}(T)}_{=0}\,dy = 0.$$

Assumindo que

$$p'' + L^* p = \gamma(t)(v - v_2),$$

obtemos da expressão acima que

$$\int_0^T\int_\Omega \gamma(t)(v - v_2)\widehat{v}\,dy\,dt + \int_{\Sigma_2} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y}\,\widehat{w}_2\,d\Sigma = 0. \tag{2.52}$$

Considerando p como solução do <u>sistema</u> <u>adjunto</u> associado

$$\left|\begin{array}{l} p'' + L^* p = \gamma(t)(v - v_2) \text{ em } \quad Q \\ p(T) = p'(T) = 0 \text{ em } \Omega \\ p = 0 \text{ sobre } \Sigma \end{array}\right.$$

e observando que $\widehat{v}$ é solução de (2.41), temos que

$$\int_0^T\int_\Omega (p'' + L^* p)\widehat{v}\,dy\,dt + \int_{\Sigma_2} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y}\,\widehat{w}_2\,d\Sigma = 0. \tag{2.53}$$

De (2.40) e (2.53), obtemos

$$\int_{\Sigma_2}\left(\sigma\,w_2 - \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y}\right)\,\widehat{w}_2\,d\Sigma = 0 \qquad \forall\,\widehat{w}_2 \in L^2(\Sigma_2),$$

donde

$$w_2 = \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma\,\gamma^2(t)}\,\frac{\partial p}{\partial y} \ \text{ sobre } \ \Sigma_2. \tag{2.54}$$

Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.2 *Para cada $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$ existe um único equilíbrio de Nash w_2 no sentido de (2.30). Além disso, o seguidor w_2 é dado por*

$$w_2 = \mathfrak{F}(w_1) = \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma\, \gamma^2(t)} \frac{\partial p}{\partial y} \quad sobre \ \ \Sigma_2, \tag{2.55}$$

onde $\{v, p\}$ é a única solução do sistema otimizado

$$\left| \begin{array}{l} v'' + Lv = 0 \quad em \quad Q \\ p'' + L^* p = \gamma(t)\,(v - v_2) \quad em \quad Q \\ v = \begin{cases} w_1 \quad sobre \ \ \Sigma_1 \\ \dfrac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma\, \gamma^2(t)} \dfrac{\partial p}{\partial y} \quad sobre \ \ \Sigma_2 \\ 0 \quad sobre \ \ \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ p = 0 \quad sobre \ \ \Sigma \\ v(0) = v'(0) = 0 \quad em \quad \Omega \\ p(T) = p'(T) = 0 \quad em \ \ \Omega. \end{array} \right. \tag{2.56}$$

Naturalmente $\{v, p\}$ depende de w_1:

$$\{v, p\} = \{v(w_1), p(w_1)\}. \tag{2.57}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

Como temos provado a existência, unicidade e a caracterização do controle seguidor w_2, o líder w_1 deseja agora que a solução v e v', avaliada no tempo $t = T$, esteja o mais próximo possível de (v^0, v^1). Isso será possível se o sistema (2.56) for aproximadamente controlável. Estamos procurando

$$\inf \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} w_1^2 \, d\Sigma \tag{2.58}$$

onde w_1 está sujeito

$$(v(T; w_1), v'(T; w_1)) \in B_{L^2(0,1)}(v^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(0,1)}(v^1, \alpha_1), \tag{2.59}$$

assumindo que tal w_1 existe, α_0, α_1 números reais positivos arbitrariamente pequenos e $\{v^0, v^1\} \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$.

Podemos reescrever (2.59) como sendo

$$\left| \begin{array}{l} v(T; w_1) \in v^0 + \alpha_0 \, B_{L^2(0,1)} \\ v'\,(T; w_1) \in v^1 + \alpha_1 \, B_{H^{-1}(0,1)} \end{array} \right. \tag{2.60}$$

Para estudarmos (2.58), suponhamos que

$$T > \frac{2}{\sqrt{k_0}}, \quad \text{com } k_0 = \frac{\tau_0 {\gamma_0}^2}{32m(b-a)^4}. \tag{2.61}$$

Enunciaremos o seguinte teorema que será útil para o nosso propósito.

Teorema 2.3 *(Critério de Densidade) Seja D um subconjunto de um espaço de Hilbert H. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *D gera um subespaço que é denso em H;*

(ii) *Todo funcional linear contínuo f em H que se anula em D é identicamente nulo em H.*

Demonstração: Veja Aubin ([4], página 30). □

Agora, mostraremos que no caso (2.26), o seguinte teorema é verdadeiro:

Teorema 2.4 *Assumamos que vale (2.61). Sejam $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$ e w_2 um equilíbrio de Nash no sentido de (2.30). Então as funções $(v(T), v'(T)) = (v(., T, w_1, w_2), v'(., T, w_1, w_2))$, onde v é solução do sistema (2.27), geram um subconjunto denso de $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$.*

Demonstração: Decompomos a solução (v, p) de (2.56) por

$$\left| \begin{array}{l} v = v_0 + g \\ p = p_0 + q, \end{array} \right. \tag{2.62}$$

onde v_0 é solução de

$$\left| \begin{array}{l} v_0'' + L\, v_0 = 0 \text{ em } \quad Q \\ v_0 = \begin{cases} 0 \text{ sobre } \Sigma_1 \\ \dfrac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma\, \gamma^2(t)} \dfrac{\partial p_0}{\partial y} \text{ sobre } \Sigma_2 \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ v_0(0) = v_0'(0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.63}$$

p_0 satisfaz

$$\left|\begin{array}{l} p_0'' + L^* p_0 = \gamma(t)(v_0 - v_2) \text{ em } \quad Q \\ p_0 = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ p_0(T) = p_0'(T) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.64}$$

e $\{g, q\}$ em (2.62) satisfazem

$$\left|\begin{array}{l} g'' + L\, g = 0 \text{ em } \quad Q \\ g = \begin{cases} w_1 \text{ sobre } \Sigma_1 \\ \dfrac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma\,\gamma^2(t)} \dfrac{\partial q}{\partial y} \text{ sobre } \Sigma_2 \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ g(0) = g'(0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.65}$$

e

$$\left|\begin{array}{l} q'' + L^* q = \gamma(t) g \text{ em } \quad Q \\ q = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ q(T) = q'(T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.66}$$

Definamos o operador

$$\begin{array}{rcl} A \ : \ L^2(\Sigma_1) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ w_1 & \longmapsto & A\, w_1 = \big\{ g'(T; w_1) + \delta g(T), -g(T; w_1) \big\}. \end{array} \tag{2.67}$$

Observemos que $A \in \mathcal{L}\big(L^2(\Sigma_1), H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)\big)$.

Usando (2.62) e (2.67), temos que (2.60) pode ser escrita como sendo

$$Aw_1 \in \big\{ v^1 - v_0(T, w_1) + \delta g(T) + \alpha_1\, B_{H^{-1}(0,1)}, -v^0 + v_0(T, w_1) - \alpha_0\, B_{L^2(0,1)} \big\} \tag{2.68}$$

Seja $f = \{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e introduzamos estados adjuntos φ e ψ definidos como solução única de

$$\left|\begin{array}{l} \varphi'' + L^* \varphi = \gamma(t)\psi \text{ em } \quad Q \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \varphi(T) = f^0, \ \varphi'(T) = f^1 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.69}$$

com ψ satisfazendo

$$\left|\begin{array}{l} \psi'' + L\,\psi = 0 \text{ em } \quad Q \\ \psi = \begin{cases} 0 \text{ sobre } \Sigma_1 \\ \dfrac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma\,\gamma^2(t)}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \text{ sobre } \Sigma_2 \\ 0 \text{ sobre } \Sigma\backslash\Sigma_0 \end{cases} \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.70}$$

Multiplicamos $(2.70)_1$ por q, solução de (2.66), e integramos o resultado de 0 até T, para obtermos

$$\int_0^T \psi''\,q dt + \int_0^T (L\,\psi) q dt = 0.$$

Usando integração por partes:

$$q(T)\,\psi'(T) - q(0)\,\psi'(0) - q'(T)\psi(T) + q'(0)\psi(0) + \int_0^T \psi\,q''\,dt + \int_0^T (L\,\psi)q\,dt = 0.$$

Integrando a expressão acima em $\Omega = (0,1)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega q(T)\,\psi'(T)dy - \int_\Omega q(0)\,\psi'(0)dy - \int_\Omega q'(T)\psi(T)dy + \int_\Omega q'(0)\psi(0)dy \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \psi\,q''\,dy\,dt + \int_0^T \int_\Omega (L\,\psi)q\,dy\,dt = 0. \end{aligned}$$

De $(2.66)_3$ e $(2.70)_3$, a última expressão torna-se

$$\int_0^T \int_\Omega \psi\,q''\,dy\,dt + \int_0^T \int_\Omega (L\,\psi)q\,dy\,dt = 0. \tag{2.71}$$

Substituindo

$$L\psi = -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\Delta\psi - \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \breve{b}(y,t)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} + \breve{c}(y,t)\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + \delta\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

em (2.71):

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \psi\,q''\,dy\,dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\Delta\psi\,q\,dy\,dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) q\,dy\,dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \breve{b}(y,t)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}\,q\,dy\,dt + \int_0^T \int_\Omega \breve{c}(y,t)\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\,q\,dy\,dt + \int_0^T \int_\Omega \delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dy\,dt = 0. \end{aligned}$$

Usando $(2.70)_2$, um cálculo análogo como em (2.43)–(2.49), a última igualdade acima resulta em

$$\int_0^T \int_\Omega \psi\,q''\,dy\,dt + \int_0^T \int_\Omega (L^*\,q)\psi\,dy\,dt + \int_\Sigma \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2}\,\frac{\partial q}{\partial y}\,\psi\,d\Sigma - \int_\Sigma \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2}\,q\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\,d\Sigma = 0,$$

que juntamente com $(2.66)_2$, tem-se

$$\int_0^T \int_\Omega \psi\, q''\, dy\, dt + \int_0^T \int_\Omega (L^* q)\psi\, dy\, dt + \int_\Sigma \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2} \frac{\partial q}{\partial y} \psi\, d\Sigma = 0.$$

Separando a integral sobre a fronteira na última igualdade acima:

$$\int_0^T \int_\Omega \psi(q'' + L^* q)\, dy\, dt + \int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2} \frac{\partial q}{\partial y} \psi\, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2} \frac{\partial q}{\partial y} \psi\, d\Sigma = 0. \quad (2.72)$$

De $(2.66)_1$, $(2.70)_2$ e (2.72), obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega \gamma(t) g\, \psi\, dy\, dt = -\frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{(a(t) - \frac{m_0}{2})^2}{\gamma^4} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Sigma. \quad (2.73)$$

Por outro lado, multiplicamos $(2.69)_1$ por g, solução de (2.65), integramos o resultado obtido em ambos os membros em $\Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,1)$, e, finalmente, usamos integração por partes para obtermos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega g(T)\, \varphi'(T)\, dy - \int_\Omega g(0)\, \varphi'(0)\, dy - \int_\Omega g'(T)\, \varphi(T)\, dy + \int_\Omega g'(0)\, \varphi(0)\, dy \\ &+ \int_0^T \int_\Omega g''\, \varphi\, dy\, dt + \int_0^T \int_\Omega (L^* \varphi) g\, dy\, dt = \int_0^T \int_\Omega \gamma(t) \psi\, g\, dy\, dt. \end{aligned}$$

De $(2.65)_3$ e $(2.69)_3$, a última igualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} &\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega g''\, \varphi\, dy\, dt + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega (L^* \varphi) g\, dy\, dt = \int_0^T \int_\Omega \gamma(t) g\, \psi\, dy\, dt. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Substituindo

$$\begin{aligned} L^* \varphi = &- \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \breve{b}(y,t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \left[\frac{\partial \breve{b}}{\partial t} - \breve{c}(y,t) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial \breve{b}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left[\frac{\partial^2 \breve{b}}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \breve{c}}{\partial y} \right] \varphi - \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \end{aligned}$$

em (2.74), temos

$$\begin{aligned} &\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega g''\, \varphi\, dy\, dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta\varphi\, g\, dy\, dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y} \left(\breve{a}(y,t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) g\, dy\, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 \breve{b}}{\partial y \partial t} \varphi\, g\, dy\, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \breve{b}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} g\, dy\, dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \breve{b}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y} g\, dy\, dt + \int_0^T \int_\Omega \breve{b}(y,t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} g\, dy\, dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \breve{c}}{\partial y} \varphi\, g\, dy\, dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \breve{c}(y,t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} g\, dy\, dt - \delta \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} g\, dy\, dt = \int_0^T \int_\Omega \gamma(t)\, g\, \psi\, dy\, dt. \end{aligned}$$

Um cálculo análogo como em (2.43)–(2.49), a última igualdade acima resulta em

$$
\begin{aligned}
&\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \delta \int_\Omega g(T)\varphi(T)\,dy + \int_0^T\int_\Omega g''\,\varphi\,dy\,dt \\
&-\int_0^T\int_\Omega \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\varphi\,\Delta g\,dy\,dt + \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\varphi\,\frac{\partial g}{\partial y}\,d\Sigma \\
&-\int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,g\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\check{a}(y,t)\,\frac{\partial g}{\partial y}\right)\varphi\,dy\,dt \\
&+\int_0^T\int_\Omega \check{b}(y,t)\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial t}\,\varphi\,dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega \check{c}(y,t)\,\frac{\partial g}{\partial y}\,\varphi\,dy\,dt \\
&+\delta\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial t}\varphi\,dy\,dt = \int_0^T\int_\Omega \gamma(t)\,g\,\psi\,dy\,dt,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \delta\langle g(T), f^0\rangle_{L^2(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_0^T\int_\Omega g''\,\varphi\,dy\,dt \\
&+\int_0^T\int_\Omega \Bigg[\underbrace{-\frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\Delta g - \frac{\partial}{\partial y}\left(\check{a}(y,t)\,\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \check{b}(y,t)\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial t} + \check{c}(y,t)\,\frac{\partial g}{\partial y} + \delta\frac{\partial g}{\partial t}}_{=Lg}\Bigg]\varphi\,dy\,dt \\
&+\int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\varphi\,\frac{\partial g}{\partial y}\,d\Sigma - \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,g\,dy\,dt = \int_0^T\int_\Omega \gamma(t)\,g\,\psi\,dy\,dt,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T)+\delta g(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_0^T\int_\Omega \big(g'' + L\,g\big)\,\varphi\,dy\,dt \\
&+\int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\varphi\,\Delta g\,d\Sigma - \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,g\,dy\,dt = \int_0^T\int_\Omega \gamma(t)\,g\,\psi\,dy\,dt,
\end{aligned}
$$

que juntamente com $(2.65)_1$ e $(2.69)_2$, vem

$$
\begin{aligned}
&\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T)+\delta g(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_\Sigma \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,g\,dy\,dt \\
&= \int_0^T\int_\Omega \gamma(t)\,g\,\psi\,dy\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

Agora, separando a integral com termos de fronteira em (2.75) e combinando com (2.73), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T)+\delta g(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_1} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,g\,d\Sigma \\
&-\int_{\Sigma_2} \frac{a(t)-\frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,g\,d\Sigma = -\frac{1}{\sigma}\int_{\Sigma_2} \frac{(a(t)-\frac{m_0}{2})^2}{\gamma^4(t)}\,\frac{\partial q}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Sigma,
\end{aligned}
$$

que novamente combinando agora com $(2.65)_2$, obtemos

$$\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T) + \delta g(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} w_1 \, d\Sigma$$
$$-\frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{(a(t) - \frac{m_0}{2})^2}{\gamma^4(t)} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Sigma = -\frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{(a(t) - \frac{m_0}{2})^2}{\gamma^4(t)} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Sigma,$$

ou seja,

$$-\int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} w_1 \, d\Sigma = \langle g'(T) + \delta g(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1\big) \tag{2.76}$$

Definamos a dualidade entre $H^{-1}(0,1) \times L^2(0,1)$ e $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ por

$$\Big\langle \big\{g'(T) + \delta g(T), -g(T)\big\}, \big\{f^0, f^1\big\}\Big\rangle = \langle g'(T) + \delta g(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1\big).$$

Assim, podemos escrever (2.76) por

$$\Big\langle\Big\langle A\, w_1, f\Big\rangle\Big\rangle = -\int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} w_1 \, d\Sigma,$$

onde $\Big\langle\Big\langle ., .\Big\rangle\Big\rangle$ denota a dualidade entre os espaços $H^{-1}(0,1) \times L^2(0,1)$ e $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$.

Agora recorrendo ao resultado do Teorema 2.3, se

$$\Big\langle\Big\langle A\, w_1, f\Big\rangle\Big\rangle = \langle g'(T) + \delta g(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1\big) = 0$$

para todo $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma_1. \tag{2.77}$$

Portanto, no caso da hipótese (2.26), segue de $(2.70)_2$ e (2.77) que

$$\psi = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma. \tag{2.78}$$

Combinando (2.78) e (2.70), temos

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' + L\,\psi = 0 \ \text{ em } \ Q \\ \psi = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega, \end{array} \right. \tag{2.79}$$

que pela unicidade de solução, vem que

$$\psi \equiv 0. \tag{2.80}$$

Substituindo (2.80) em $(2.69)_1$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \varphi'' + L^* \varphi = 0 \ \text{ em } \ Q \\ \varphi = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \\ \varphi(T) = f^0, \ \varphi'(T) = f^1 \ \text{ em } \ \Omega, \end{array} \right. \tag{2.81}$$

$\Omega = (0, 1)$. Pelo Teorema da Unicidade de Holmgren (cf. [1]), temos

$$\varphi = 0 \quad em \quad Q,$$

e portanto de $(2.81)_3$, implica que

$$f^0 = f^1 = 0,$$

e assim, pelo Teorema 2.3, segue o Teorema 2.4. □

Para finalizarmos esta seção, temos como propósito a procura do controle líder w_1, isto é, queremos encontrar w_1, solução de (2.58) restrito a (2.60).

Antes, enunciaremos alguns resultados que serão essenciais para o desenvolvimento do nosso estudo.

Teorema 2.5 (*Fenchel-Rochafellar*) *Suponha que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ onde X e Y são espaços de Hilbert e que $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ são funcionais não-triviais convexos e semicontínuos inferiormente. Suponha que exista $x \in \mathrm{Dom}(\varphi) \cap \mathrm{Dom}(\psi)$ tal que φ é contínua em x e ψ é contínua em Ax. Então*

$$\inf_{x \in X} [\varphi(x) + \psi(Ax)] = - \inf_{q \in Y^*} [\varphi^*(A^* q) + \psi^*(-q)] = - \min_{q \in Y^*} [\varphi^*(A^* q) + \psi^*(-q)],$$

onde φ^* é a adjunta de φ e é dada por

$$\varphi^*(p) = \sup_{x \in X} [\langle p, x \rangle - \varphi(x)]$$

Demonstração: Veja Brezis ([8], página 15). □

Proposição 2.1 (*Caracterização de Solução*) *Suponha que $H = H_1 + H_2$ e que H_1 e H_2 são funcionais convexos e semi-contínuos inferiormente de um subconjunto convexo C em $\mathbb{R}$, com H_1 sendo gâteaux-diferenciável com derivada H_1'. Então, se $\mu \in C$, as condições são equivalentes:*

(i) *μ é solução do problema*

$$\inf_{\mu \in C} H(\mu)$$

(ii) $\left\langle H_1'(\mu), \xi - \mu \right\rangle + H_2(\xi) - H_2(\mu) \geq 0 \qquad \forall \xi \in C;$

(iii) $\left\langle H_1'(\xi), \mu - \xi \right\rangle + H_2(\mu) - H_2(\xi) \geq 0 \qquad \forall \xi \in C;$

Demonstração: Vide Ekeland ([14], página 38). □

Com isso, o seguinte resultado é verdadeiro:

Teorema 2.6 *Assumamos que as hipóteses* (**H1**) − (**H3**)*, (2.26) e (2.61) são satisfeitas. Então o controle líder ótimo w_1 é dado por*

$$w_1 = -\frac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_1$$

em que φ é dado pela solução única $\{\varphi, \psi, v, p\}$ do sistema otimizado

$$\left| \begin{array}{l} \varphi'' + L^*\varphi = \gamma(t)\psi \quad \textit{em} \;\; Q \\ \psi'' + L\psi = 0 \quad \textit{em} \;\; Q \\ v'' + Lv = 0 \quad \textit{em} \;\; Q \\ p'' + L^*p = \gamma(t)(v - v_2) \quad \textit{em} \;\; Q \\ \varphi = 0 \quad \textit{sobre} \quad \Sigma \\ \psi = \begin{cases} 0 \;\; \textit{sobre} \;\; \Sigma_1 \\ \dfrac{a(t) - m_0/2}{\sigma\gamma^2(t)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_2 \\ 0 \quad \textit{sobre} \quad \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ v = \begin{cases} -\dfrac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_1 \\ \dfrac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \dfrac{\partial p}{\partial y} \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_2 \\ 0 \quad \textit{sobre} \quad \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ p = 0 \quad \textit{sobre} \quad \Sigma \\ \varphi(.,T) = f^0, \, \varphi'(.,T) = f^1 \quad \textit{em} \;\; \Omega \\ v(0) = v'(0) = 0 \quad \textit{em} \;\; \Omega \\ p(T) = p'(T) = 0 \quad \textit{em} \;\; \Omega \end{array} \right. \tag{2.82}$$

e $\{f^0, f^1\} \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ é definido como solução única da desigualdade variacional

$$\begin{aligned} &\left\langle v'(T,f) - v^1, \widehat{f}^0 - f^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left(v(T,f) - v^0, \widehat{f}^1 - f^1 \right) \\ &+ \alpha_1 \left(||\widehat{f}^0|| - ||f^0|| \right) + \alpha_0 \left(|\widehat{f}^1| - |f^1| \right) \geq 0, \, \forall \, \widehat{f} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{2.83}$$

onde em (2.83) escrevemos $v(T,f)$ para explicitar o fato que a solução $\{\varphi,\psi,v,p\}$ de (2.82) depende de f.

Demonstração: Introduzamos dois funcionais próprios convexos

$$F_1 : L^2(\Sigma_1) \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

e

$$F_2 : H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

como sendo

$$F_1(w_1) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} w_1^2\, d\Sigma \quad \forall\, w_1 \in L^2(\Sigma_1) \tag{2.84}$$

e

$$\begin{aligned} F_2(Aw_1) &= F_2\big(\{g'(T,w_1)+\delta g(T,w_1), -g(T,w_1)\}\big) = \\ &= \begin{cases} 0, \text{ se} \begin{cases} g'(T)+\delta g(T) \in v^1 - v_0'(T) + \delta g(T) + \alpha_1\, B_{H^{-1}(0,1)} \\ -g(T) \in -v^0 + v_0(T,w_1) - \alpha_0\, B_{L^2(0,1)} \end{cases} \\ \infty, \text{ de outro modo} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.85}$$

Observemos também que por (2.67) e (2.76) podemos definir explicitamente o operador A^*.

De fato, $\forall\, w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, temos

$$\begin{aligned} -\int_{\Sigma_1} \frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial y} w_1\, d\Sigma &= \big\langle g'(T)+\delta g(T), f^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1\big) \\ &= \big\langle\langle\{\underbrace{g'(T)+\delta g(T), -g(T)}_{=Aw_1}\}, \{\underbrace{f^0,f^1}_{=f}\}\rangle\big\rangle \\ &= \big\langle Aw_1, f\big\rangle \\ &= \big(w_1, A^*f\big)_{L^2(\Sigma_1)} \\ &= \int_{\Sigma_1} A^*f w_1\, d\Sigma. \end{aligned}$$

Então, A^* é dado por

$$\begin{aligned} A^* \;:\; H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Sigma_1) \\ (f^0,f^1) &\longmapsto A^*f = -\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2.86}$$

em que φ é dada em (2.69).

Com essas notações, juntamente com o fato da imagem do operador A ser densa em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, encontrar (2.58) é equivalente

$$\left| \text{Encontrar } \inf_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(w_1) + F_2(Aw_1)]. \right. \tag{2.87}$$

Aplicando o teorema 2.5 ao problema (2.87) com $X = L^2(\Sigma_1)$, $Y = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\varphi = F_1 : L^2(\Sigma_1) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $\psi = F_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, obtemos

- Sendo $\left\{ g'\big(T, w_1, \mathcal{F}(w_1)\big) + \delta g\big(T, w_1, \mathcal{F}(w_1)\big), -g'\big(T, w_1, \mathcal{F}(w_1)\big) \right\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$ de modo que $Aw_1 = \big\{ g'(T, w_1) + \delta g(T, w_1), -g(T, w_1) \big\}$ satisfaz

  $$Aw_1 \in \left\{ v^1 - v_0'(T, w_1) + \delta g(T) + \alpha_1 B_{H^{-1}(0,1)}, -v^0 + v_0(T, w_1) - \alpha_0 B_{L^2(0,1)} \right\} \Rightarrow$$
  $F_2(Aw_1) = 0.$

  Logo,

  $$w_1 \in \text{ Dom}(F_1) \cap \text{ Dom}(F_2 \circ A). \tag{2.88}$$

- Temos também que F_1 é contínuo em w_1.

  De fato, seja $|w_1^n - w_1|_{L^2(\Sigma_1)} \to 0$. Assim, temos

  $$\begin{aligned} |F_1(w_1^n) - F_1(w_1)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma_1} (w_1^n)^2 d\Sigma - \int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma_1} w_1^n (w_1^n - w_1) d\Sigma + \int_{\Sigma_1} w_1 (w_1^n - w_1) d\Sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \left(\int_{\Sigma_1} (w_1^n)^2 d\Sigma \right)^{1/2} \left(\underbrace{\int_{\Sigma_1} (w_1^n - w_1)^2 d\Sigma}_{\to 0} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\underbrace{\int_{\Sigma_1} (w_1^n - w_1)^2 d\Sigma}_{\to 0} \right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma \right)^{1/2} \right|, \end{aligned}$$

  o que implica em

  $$|F_1(w_1^n) - F_1(w_1)| \to 0,$$

  o que caracteriza a continuidade de F_1 em w_1.

Então, temos

$$\begin{aligned}&\inf_{w_1\in L^2(\Sigma_1)}[F_1(w_1)+F_2(Aw_1)]=\\&-\min_{(\widehat{f}^0,\widehat{f}^1)\in H_0^1\times L^2(\Omega)}[F_1^*\big(A^*(\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\})\big)+F_2^*\big(-\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\}\big)].\end{aligned}\tag{2.89}$$

Observemos que

$$F_1^*(w_1)=F_1(w_1),\tag{2.90}$$

visto que,

$$\begin{aligned}F_1^*(w_1)&=\sup_{w_1\in L^2(\Sigma_1)}\big\{(w_1,w_1^*)_{L^2(\Sigma_1)}-F_1(w_1):w_1^*\in L^2(\Sigma_1)\big\}\\&=\sup_{w_1\in L^2(\Sigma_1)}\left\{\int_{\Sigma_1}w_1^2\,d\Sigma-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}w_1^2\,d\Sigma\right\}\\&=\sup_{w_1\in L^2(\Sigma_1)}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}w_1^2\,d\Sigma\right\}.\\&=F_1(w_1),\quad\forall\,w_1\in L^2(\Sigma_1)\end{aligned}$$

Temos também que $\forall\,\widehat{f}=\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}&F_2^*(\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\})\\&=\sup_{Aw_1\in H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)}\Big\{\big\langle\langle\{g'(T)+\delta g(T),-g(T)\},\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle-F_2(Aw_1)\Big\}\\&=\sup_{Aw_1\in H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)}\Big\{\big\langle g'(T)+\delta g(T),\widehat{f}^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\big(g(T),\widehat{f}^1\big)-F_2(Aw_1)\Big\}\\&=\sup_{(\gamma_1,\gamma_0)\in B_{H^{-1}(0,1)}\times B_{L^2(0,1)}}\Big\{\big\langle v^1-v_0'(T)+\delta g(T)+\alpha_1\gamma_1,\widehat{f}_0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\\&-\big(v^0-v_0(T)-\alpha_0\gamma_0,\widehat{f}^1\big)\Big\}\\&=-\big(v^0-v_0(T),\widehat{f}^1\big)+\langle v^1-v_0'(T)+\delta g(T),\widehat{f}^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\\&+\alpha_1\sup_{\gamma_1\in B_{H^{-1}(0,1)}}\langle\gamma_1,\widehat{f}^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}+\alpha_0\sup_{\gamma_0\in B_{L^2(0,1)}}\big(\gamma_0,\widehat{f}^1\big)\\&=\big(v_0(T)-v^0,\widehat{f}^1\big)+\langle v^1-v_0'(T)+\delta g(T),\widehat{f}^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}+\alpha_1||\widehat{f}^0||+\alpha_0|\widehat{f}^1|.\end{aligned}\tag{2.91}$$

Por (2.86), temos

$$A^*(\widehat{f})=-\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y},\tag{2.92}$$

e usando (2.90), obtemos

$$
\begin{aligned}
F_1^*\big(A^*\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\}\big) &= F_1^*\left(-\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y}\right)\\
&= F_1\left(-\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\right)^2\left(\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y}\right)^2 d\Sigma,
\end{aligned}
$$

com $\dfrac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y}\in L^2(\Sigma_1)$. Portanto, (2.89) é equivalente a

$$
\begin{aligned}
&\inf_{w_1\in L^2(\Sigma_1)}[F_1(w_1)+F_2(Aw_1)] =\\
&= -\min_{\widehat{f}\in H_0^1\times L^2(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\right)^2\left(\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y}\right)^2 d\Sigma+\big(v^0-v_0(T),\widehat{f}^1\big)\right.\\
&\left.-\langle v^1-v_0'(T)+\delta g(T),\widehat{f}^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}+\alpha_1||\widehat{f}^0||+\alpha_0|\widehat{f}^1|\right\}
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

em que φ é dada em (2.69). Sendo assim, (2.93) é o problema dual de (2.58).

Fazendo

$$
\begin{aligned}
\eta^0 &= v^0-v_0(T)\\
\eta^1 &= v^1-v_0'(T)+\delta g(T),
\end{aligned}
$$

e considerando a dualidade entre $H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, temos

$$
\big\langle\langle\{-\eta^1,\eta^0\},\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle = (\eta^0,\widehat{f}^1)-\langle\eta^1,\widehat{f}^0\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}. \tag{2.94}
$$

Então, associamos a solução do problema dual do lado direito de (2.93) à minimização do funcional

$$
\Theta : H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}
$$

definido por

$$
\begin{aligned}
\Theta\big(\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\}\big) &= \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\right)^2\left(\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y}\right)^2 d\Sigma+\big\langle\langle\{-\eta^1,\eta^0\},\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle\\
&+\alpha_1||\widehat{f}^0||+\alpha_0|\widehat{f}^1|.
\end{aligned}
\tag{2.95}
$$

Assim, temos

$$
\inf\big[F_1(w_1)+F_2(Aw_1)\big] = -\min_{\widehat{f}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\Theta\big(\{\widehat{f}^0,\widehat{f}^1\}\big). \tag{2.96}
$$

Agora, tomando $0 < \varepsilon = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ e usando a norma do gráfico, reescrevemos o funcional (2.95) como sendo

$$\begin{aligned}&\Theta\big(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\right)^2\left(\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y}\right)^2 d\Sigma + \big\langle\langle\{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle \\ &+\varepsilon\big|\big|(\widehat{f}^0, \widehat{f}^1)\big|\big|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.97}$$

Pelo teorema 2.1, temos que o funcional definido em (2.97) atinge um mínimo $\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, solução do problema dual (2.95), e este é único, pois o funcional Θ_ε é estritamente convexo.

De fato, sejam $\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}$, $\{g^0, g^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Pelos mesmos argumentos utilizados na prova da convexidade estrita do funcional (2.28), temos

$$\begin{aligned}\Theta_\varepsilon\big[\lambda\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} + (1-\lambda)\{g^0, g^1\}\big] &= \lambda\Theta_\varepsilon\big(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big) + (1-\lambda)G_\varepsilon\big(\{g^0, g^1\}\big) \\ &- \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\right)^2\left|\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2 d\Sigma.\end{aligned}$$

Portanto, para $\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \neq \{g^0, g^1\}$ e $\lambda \in (0,1)$, obtemos

$$\Theta_\varepsilon\big[\lambda\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} + (1-\lambda)\{g^0, g^1\}\big] < \lambda\Theta_\varepsilon\big(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big) + (1-\lambda)\Theta_\varepsilon\big(\{g^0, g^1\}\big).$$

Assim, provamos que o funcional Θ_ε tem um único mínimo $\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que é solução do problema dual (2.95). Portanto, de (2.58) e (2.93), segue que

$$\begin{aligned}&\inf_{w_1\in L^2(\Sigma_1)}\int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma = \\ &= -\min_{(\widehat{f}\in H_0^1\times L^2(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{a(t)-m_0/2}{\gamma^2(t)}\right)^2\left(\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial y}\right)^2 d\Sigma + \big(v^0 - v_0(T), \widehat{f}^1\big)\right. \\ &\left. - \langle v^1 - v_0'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \alpha_1||\widehat{f}^0|| + \alpha_0|\widehat{f}^1|\right\},\end{aligned} \tag{2.98}$$

restrito a (2.60).

Seja então $\widehat{f} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}$ a única solução do seguinte problema dual:

$$-\min_{\widehat{f}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}(A^*\widehat{f})^2 d\Sigma + \big\langle\langle\{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle + \alpha_1||\widehat{f}^0|| + \alpha_0|\widehat{f}^1|\right\}, \tag{2.99}$$

onde $A^*\widehat{f}$ é dada em (2.92).

Façamos $\mu = \widehat{f}$, $\xi = f$ e $H = \Theta$ com

$$\left|\begin{aligned}&H_1 = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}(A^*\widehat{f})^2 d\Sigma \\ &H_2 = \big\langle\langle\{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle + \alpha_1||\widehat{f}^0|| + \alpha_0|\widehat{f}^1|.\end{aligned}\right.$$

Agora, temos

$$
\begin{aligned}
\left\langle H_1'(\xi), \mu - \xi \right\rangle &= \left\langle H_1'(f), \widehat{f} - f \right\rangle \\
&= \frac{d}{d\lambda} H_1\left(f + \lambda(\widehat{f} - f) \right) \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} \left(A^*(f + \lambda(\widehat{f} - f) \right)^2 d\Sigma \right] \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\Sigma_1} 2\left(A^*(f + \lambda(\widehat{f} - f) \right) A^*(\widehat{f} - f) d\Sigma \right] \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \left[\int_{\Sigma_1} (A^* f + \lambda A^* \widehat{f} - \lambda A^* f)(A^* \widehat{f} - A^* f) d\Sigma \right] \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \int_{\Sigma_1} A^* f (A^* \widehat{f} - A^* f) d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\Sigma.
\end{aligned}
$$

Pela proposição 2.1, obtemos a desigualdade variacional

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_1} \underbrace{\left(\frac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}_{**} d\Sigma + \left\langle \langle \{ \widehat{f}^0, \widehat{f}^1 \}, \{ -\eta^1, \eta^0 \} \rangle \right\rangle + \alpha_1 || \widehat{f}^0 || \\
&+ \alpha_0 | \widehat{f}^1 | - \left\langle \langle \{ f^0, f^1 \}, \{ -\eta^1, \eta^0 \} \rangle \right\rangle - \alpha_1 || f^0 || - \alpha_0 | f^1 | \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.100}
$$

Analisemos o termo $(**)$ em (2.100). Notemos que, por (2.76) com

$$
w_1 = -\frac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y},
$$

obtemos

$$
\int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 d\Sigma = \left\langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left(g(T), f^1 \right). \tag{2.101}
$$

Também,

$$
\int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} d\Sigma = \left\langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left(g(T), \widehat{f}^1 \right). \tag{2.102}
$$

Portanto, de (2.101) e (2.102), segue que

$$\int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - m_0/2}{\gamma^2(t)} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\Sigma$$
$$= -\big(g(T), \widehat{f}^1 - f^1\big) + \big\langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 - f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{2.103}$$

Substituindo (2.103) em (2.100), obtemos

$$-\big(g(T), \widehat{f}^1 - f^1\big) + \big\langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 - f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \big\langle \widehat{f}^0, \eta^1 \big\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}$$

$$+\big(\widehat{f}^1, \eta^0\big) + \big\langle f^0, \eta^1 \big\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} - \big(f^1, \eta^0\big) + \alpha_1\big(||\widehat{f}^0|| - ||f^0||\big) + \alpha_0\big(|\widehat{f}^1| - |f^1|\big) \geq 0.$$

Assim,

$$-\big(g(T), \widehat{f}^1 - f^1\big) + \big\langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 - f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \big\langle \widehat{f}^0 - f^0, \eta^1 \big\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}$$

$$+\big(\widehat{f}^1 - f^1, \eta^0\big) + \alpha_1\big(||\widehat{f}^0|| - ||f^0||\big) + \alpha_0\big(|\widehat{f}^1| - |f^1|\big) \geq 0,$$

ou seja,

$$\big\langle g'(T) + \delta g(T) - \eta^1, \widehat{f}^0 - f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \big(g(T) - \eta^0, \widehat{f}^1 - f^1\big) + \alpha_1\big(||\widehat{f}^0|| - ||f^0||\big)$$

$$+\alpha_0\big(|\widehat{f}^1| - |f^1|\big) \geq 0.$$

Portanto,

$$\big\langle g'(T) + \delta g(T) - v^1 + v_0'(T) - \delta g(T), \widehat{f}^0 - f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \big(g(T) + v_0(T) - v^0, \widehat{f}^1 - f^1\big)$$

$$+\alpha_1\big(||\widehat{f}^0|| - ||f^0||\big) + \alpha_0\big(|\widehat{f}^1| - |f^1|\big) \geq 0,$$

isto é,

$$\big\langle v_0'(T) + g'(T) - v^1, \widehat{f}^0 - f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \big(v_0(T) + g(T) - v^0, \widehat{f}^1 - f^1\big)$$

$$+\alpha_1\big(||\widehat{f}^0|| - ||f^0||\big) + \alpha_0\big(|\widehat{f}^1| - |f^1|\big) \geq 0, \qquad \forall\, \widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Agora, tomando

$$v = v_0 + g$$

como em $(2.62)_1$, a prova está concluída. $\square$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Nessa seção, objetivando a completude de nossa exposição, investigaremos a existência, unicidade e regularidade de solução para os sistemas (2.11) e (2.1). Iniciamos com algumas observações:

Observação 2.5 *A hipótese **(H1)** implica que* $\breve{a}(y,t) > 0$.

Observação 2.6 *Temos*

$$|\alpha' + \gamma' y| \leq |\gamma'| \Leftrightarrow -\gamma' \leq \alpha' + \gamma' y \leq \gamma'.$$

Com efeito, temos que $\alpha' + \gamma' y \leq \gamma'$, *pois* $\alpha' < 0$ *e* $0 \leq y \leq 1$. *Também, temos que* $-\gamma' \leq \alpha' + \gamma' y$ *equivale a* $0 \leq \alpha' + \gamma' y + \gamma'$ *ou* $0 \leq \beta' + \gamma' y$ *que é verdade desde que* $|\gamma'| = \gamma'$.

Observação 2.7 *Da hipótese **(H3)** e da observação 2.6, temos que*

$$|\alpha''(t) + \gamma''(t)\, y| \leq \frac{(\gamma')^2}{\gamma}$$

o que implica em

$$\max\{|\alpha''|, |\beta''|\} \leq \frac{(\gamma')^2}{\gamma}$$

e

$$|\gamma''| < 2\frac{(\gamma')^2}{\gamma}.$$

Representaremos por $((,))$, $||\cdot||$; $(,)$, $|\cdot|$, respectivamente, o produto escalar e a norma em $H_0^1(0,1)$ e $L^2(0,1)$. Denotaremos por $a(t,v,z)$ a forma bilinear definida em $H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$ por

$$a(t,v,z) = \int_0^1 \breve{a}(y,t)\, \frac{\partial v}{\partial y}\, \frac{\partial z}{\partial y}\, dy.$$

Note que $a(t,v,z)$ é contínua, simétrica, positiva.

Definição 2.1 *Consideremos o problema (2.11) com dados* $v_0 \in H_0^1(0,1)$ *e* $v_1 \in L^2(0,1)$. *Dizemos que uma função* $v : (0,1) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é solução global fraca do problema (2.11) quando*

$$v \in L^\infty\big(0,\infty, H_0^1(0,1)\big)$$

$$v' \in L^\infty\big(0,\infty, L^2(0,1)\big)$$

e satisfaz, para todo $T > 0$, a equação integral

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega v'\xi' dy\, dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\gamma^2(t)} \Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big) v\Delta\xi dy\, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\gamma^2(t)} \Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big) v\frac{\partial \xi}{\partial y} dy\, dt + \int_0^T \int_\Omega \check{a}(y,t)\, \frac{\partial v}{\partial y}\, \frac{\partial \xi}{\partial y} dy\, dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \check{b}(y,t)\, \frac{\partial v'}{\partial y} \xi dy\, dt + \int_0^T \int_\Omega \check{c}(y,t)\, \frac{\partial v}{\partial y} \xi dy\, dt + \int_0^T \int_\Omega \delta \frac{\partial v}{\partial t} \xi dy\, dt = 0,
\end{aligned}
$$

$\forall \xi \in L^2\big(0,T,H_0^1(0,1)\big)$, $\xi' \in L^2\big(0,T,L^2(0,1)\big)$, $\xi(0) = \xi(T) = 0$ *e satisfazendo as condições iniciais*

$$v(0) = v_0,\ v'(0) = v_1.$$

Agora enunciaremos o resultado que nos garante a existência e unicidade da solução global fraca para o problema (2.11), no sentido da definição (2.1).

Teorema 2.7 *Sejam $v_0 \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ e $v_1 \in H_0^1(0,1)$. Suponhamos que as hipóteses $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ são satisfeitas com*

$$0 < \gamma' < \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\pi + 1}\right) \left(\frac{m_0}{10}\right)^{1/2} \tag{2.104}$$

e

$$\frac{\delta}{2} > \left[\frac{1}{2\gamma_0} + \frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{\pi^2 + 1}{\pi}\right) + \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{\pi^2 + 4}{2\pi^2}\right)\right] \left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}. \tag{2.105}$$

Então o sistema (2.11) possui uma única solução global fraca $v(y,t)$ (isto é, definida para todo $t \geq 0$ e $0 < y < 1$).

Demonstração:

Existência : Para a existência da solução global de (2.11), utilizaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em três etapas:

1. Construção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita;
2. Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas;
3. Passagem ao limite das soluções aproximadas.

Dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1: $w = 0$ sobre Σ_0.

Soluções Aproximadas

Consideremos $\{z_\nu, \lambda_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, soluções do problema espectral

$$((z_\nu, v)) = \lambda_\nu (z_\nu, v), \qquad \forall v \in H_0(0,1).$$

Sabemos que $z_\nu = sen(\nu\pi x)$, $\lambda_\nu = (\nu\pi)^2$ e que $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma base Hilbertiana de $H_0^1(0,1)$. Representaremos por $V_m = [z_1, z_2, ..., z_m]$ o subespaço gerado pelos vetores $z_1, z_2, ..., z_m$. Se $v_m(t) \in V_m$, temos a representação

$$v_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t) z_\nu(x).$$

Seja $v_m(t) \in V_m$ solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left| \begin{array}{l} (v_m''(t), v) + \dfrac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\dfrac{m_0}{2} + a(t) \right) (\nabla v_m, \nabla v) + a(t, v_m, v) + (\check{b}(y,t)\, \dfrac{\partial v_m'}{\partial y}, v) \\ +(\check{c}(y,t)\, \dfrac{\partial v_m}{\partial y}, v) + \delta \left(\dfrac{\partial v_m}{\partial t}, v \right) = 0, \qquad \forall\, v \in V_m \\ v_m(0) = v_{0m} \to v_0 \;\text{ em }\; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1), \\ v_m'(0) = v_{1m} \to v_1 \;\text{ em }\; H_0^1(0,1). \end{array} \right. \tag{2.106}$$

O sistema (2.106) tem uma solução real em algum intervalo $(0, t_m)$. As estimativas a priori a seguir permitirão estender as soluções ao intervalo $(0, \infty)$ e tomar os limites nas soluções aproximadas de (2.106).

Estimativa 2.1 Tomando $v = v_m'(t)$ em $(2.106)_1$, obtemos

$$\begin{aligned} &(v_m'', v_m'(t)) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) (\nabla v_m, \nabla v_m') + a(t, v_m, v_m') \\ &+ \left(\check{b}(y,t)\, \frac{\partial v_m'}{\partial y}, v_m' \right) + \left(\check{c}(y,t)\, \frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m' \right) + \delta \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m' \right) = 0. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Agora,

$$(v_m''(t), v_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_0^1 |v_m'(y,t)|^2\, dy = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt} |v_m'(t)|^2 \tag{2.108}$$

$$(\nabla v_m(t), \nabla v_m'(t)) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt} \int_0^1 |\nabla v_m(y,t)|^2\, dy = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\, ||v_m(t)||^2 \tag{2.109}$$

$$\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m' \right) = (v_m'(t), v_m'(t)) = |v_m'(t)|^2. \tag{2.110}$$

Substituindo (2.108), (2.109) e (2.110) em (2.107), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,|v'_m(t)|^2+\frac{1}{2\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\,\frac{d}{dt}\,||v_m(t)||^2+a(t,v_m,v'_m)\\&+\left(\check{b}(y,t)\,\frac{\partial v'_m}{\partial y},v'_m\right)+\left(\check{c}(y,t)\,\frac{\partial v_m}{\partial y},v'_m\right)+\delta|v'_m|^2=0.\end{aligned} \tag{2.111}$$

Notemos que

$$a(t,v_m,v'_m)=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,a(t,v_m,v_m)-\frac{1}{2}\,a'(t,v_m,v_m) \tag{2.112}$$

$$a'(t,v_m,v_m)=\int_0^1\check{a}'(y,t)\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2\,dy \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned}\left(\check{b}(y,t)\,\frac{\partial v'_m}{\partial y},v'_m\right)&=\frac{1}{2}\,\check{b}(y,t)\,(v'_m(y,t))^2\Big|_{y=0}^{y=1}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial\check{b}}{\partial y}(v'_m(t))^2\,dy\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial\check{b}}{\partial y}(v'_m(t))^2\,dy.\end{aligned} \tag{2.114}$$

Também,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_m||^2\right]&=\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\left(-\frac{\gamma'}{\gamma^3}\right)||v_m||^2\\&\quad+a'(t)\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_m||^2\\&\quad+\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\frac{1}{2\gamma^2(t)}\frac{d}{dt}||v_m||^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\frac{d}{dt}||v_m||^2&=\frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_m||^2\right]\\&\quad-\;a'(t)\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_m||^2\\&\quad+\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\left(\frac{\gamma'}{\gamma^3}\right)||v_m||^2.\end{aligned} \tag{2.115}$$

Substituindo (2.112), (2.113), (2.114) e (2.115) em (2.111), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,|v'_m(t)|^2+\frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_m||^2\right]\\&+\left[-a'(t)\frac{1}{2\gamma^2(t)}+\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\frac{\gamma'}{\gamma^3}\right]||v_m||^2+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}a(t,v_m,v_m)\\&-\frac{1}{2}\,a'(t,v_m,v_m)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial\check{b}}{\partial y}(v'_m(t))^2\,dy+\int_0^1\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial t}\,dy\\&+\delta|v'_m(t)|^2\;=\;0.\end{aligned} \tag{2.116}$$

Obtemos, tomando $m_0 = \dfrac{\tau_0}{m}$, que

$$\begin{aligned}
\left[-a'(t)\frac{1}{2\gamma^2(t)} + \left(a(t) - \frac{m_0}{2}\right)\frac{\gamma'}{\gamma^3}\right]||v_m||^2 &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t) - m_0/2}{2\gamma^2(t)}\right)||v_m||^2\\
&= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\tau_0}{4m\gamma^2} + \frac{k}{m}\frac{\gamma - \gamma_0}{2\gamma^2\gamma_0}\right)||v_m||^2\\
&= -\left[\frac{-\tau_0\gamma'}{2m\gamma^3} + \frac{k}{m\gamma_0}\left(-\frac{\gamma'}{2\gamma^2} + \frac{\gamma'}{\gamma^3}\gamma_0\right)\right]||v_m||^2\\
&= -\left[\frac{\gamma'\gamma}{2m\gamma^3}\left(\frac{2k - \tau_0}{\gamma} - \frac{k}{\gamma_0}\right)\right]||v_m||^2
\end{aligned}$$

Queremos que $\dfrac{2k - \tau_0}{\gamma} - \dfrac{k}{\gamma_0} < 0$ ou $\gamma(t) > \left(\dfrac{2k - \tau_0}{k}\right)\gamma_0$. Como $\gamma(t) \geq \gamma_0$, então $1 \geq \dfrac{2k - \tau_0}{k}$ ou $\tau_0 \geq k$, onde $k = E\sigma$, onde E é o módulo de Young do material e σ é a seção transversal da corda.

Portanto, se $\tau_0 \geq k$, então

$$\left[-\frac{a'(t)}{2\gamma^2} + \left(a(t) - \frac{m_0}{2}\right)\frac{\gamma'}{\gamma^3}\right]||v_m||^2 \geq 0,$$

o que substituindo a expressão acima em (2.116), concluimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m'|^2 + \frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_m||^2\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t, v_m, v_m)\\
&-\frac{1}{2}a'(t, v_m, v_m) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \check{b}}{\partial y}\big(v_m'(t)\big)^2\,dy + \int_0^1 \check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}v_m'\,dy\\
&+\delta|v_m'(t)|^2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Notemos que

- $-\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial \check{b}}{\partial y}\big(v_m'(t)\big)^2 \geq 0.$

  Agora,
  $$-\frac{1}{2}\check{a}'(y,t) = \frac{m_0}{2}\frac{\gamma'}{\gamma^3} - (\alpha' + \gamma' y)^2\frac{\gamma'}{\gamma^3} + \frac{(\alpha' + \gamma' y)(\alpha'' + \gamma'' y)\gamma}{\gamma^3}$$

  Sabemos que $(\alpha' + \gamma' y)^2 \leq (\gamma')^2 < \dfrac{m_0}{8}$ o que implica em

  $$-(\alpha' + \gamma' y)^2\frac{\gamma'}{\gamma^3} \geq -\frac{m_0}{8}\frac{\gamma'}{\gamma^3}.$$

  Pela observação (2.6) e da hipótese **(H3)**, temos

  $$\left|\frac{(\alpha' + \gamma' y)(\alpha'' + \gamma'' y)\gamma}{\gamma^3}\right| \leq \gamma'\frac{|\alpha'' + \gamma'' y|\gamma}{\gamma^3} \leq \gamma'\frac{(\alpha' + \gamma' y)^2}{\gamma}\frac{\gamma}{\gamma^3} \leq \frac{\gamma'}{\gamma^3}\frac{m_0}{8}$$

e assim,

$$\frac{(\alpha' + \gamma' y)(\alpha'' + \gamma'' y)\gamma}{\gamma^3} \geq -\frac{m_0}{8}\frac{\gamma'}{\gamma^3}.$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2}\breve{a}'(y,t) \geq \frac{m_0}{4}\frac{\gamma'}{\gamma^3}$$

e

- $-\dfrac{1}{2}a'(t, v_m, v_m) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \breve{a}'(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\, dy \geq \frac{m_0}{4}\frac{\gamma'}{\gamma^3}||v_m||^2.$

  Temos que

$$\check{c}(y,t) = -\frac{\alpha'' + \gamma'' y}{\gamma}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}v_m'\, dy\right| &\leq \int_0^1 \frac{|\alpha' + \gamma' y|^2}{\gamma^2}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right| |v_m'|\, dy \\
&\leq \int_0^1 \frac{|\gamma'|^2}{\gamma^2}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right| |v_m'|\, dy \\
&\leq \int_0^1 \lambda\frac{(\gamma')^4}{\gamma^4}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2 dy + \frac{1}{4\lambda}\int_0^1 |v_m'|^2\, dy,
\end{aligned}$$

onde $\lambda > 0$. Tomando λ tal que

$$\lambda\frac{(\gamma')^4}{\gamma^4} = \frac{m_0}{4}\frac{\gamma'}{\gamma^3},$$

então

$$\frac{1}{4\lambda} = \frac{(\gamma')^3}{m_0\gamma}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}v_m'\, dy\right| &\leq \frac{m_0}{4}\frac{\gamma'}{\gamma^3}||v_m||^2 + \frac{(\gamma')^3}{m_0\gamma}|v_m'|^2 \\
&\leq \frac{m_0}{4}\frac{\gamma'}{\gamma^3}||v_m||^2 + \frac{1}{m_0\gamma_0}\frac{m_0}{8}\frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}|v_m'|^2 \\
&= \frac{m_0}{4}\frac{\gamma'}{\gamma^3}||v_m||^2 + \frac{1}{16\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}|v_m'|^2,
\end{aligned}$$

e assim obtemos

$$-\frac{1}{2}a'(t, v_m, v_m) + \int_0^1 \check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}v_m'\, dy \geq -\frac{1}{16\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}|v_m'(t)|^2. \tag{2.118}$$

Substituindo (2.118) em (2.117), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m'(t)|^2+\frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_m(t)||^2\right]\\&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,v_m,v_m)+\left[\delta-\frac{1}{16\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}\right]|v_m'(t)|^2\leq 0.\end{aligned}\tag{2.119}$$

Escolhamos $\delta>0$ tal que

$$\frac{\delta}{2}>\frac{1}{16\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}\tag{2.120}$$

e assim, obtemos de (2.119) que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m'(t)|^2+\frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_m(t)||^2\right]+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,v_m,v_m)\\&+\frac{\delta}{2}|v_m'(t)|^2\leq 0,\qquad \text{para todo}\quad t\geq 0.\end{aligned}\tag{2.121}$$

Integrando a expressão de 0 até t, $t>0$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{ds}|v_m'(s)|^2\,ds+\int_0^t\frac{d}{ds}\left[\left(-\frac{m_0}{2}+a(s)\right)\frac{1}{2\gamma^2(s)}||v_m(s)||^2\right]ds\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{ds}[a(s,v_m,v_m)]ds+\frac{\delta}{2}\int_0^t|v_m'(s)|^2ds\leq 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2-\frac{1}{2}|v_m'(0)|^2+\frac{1}{2\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2}+a(t)\right)||v_m(t)||^2\\&-\frac{1}{2\gamma^2(0)}\left(-\frac{m_0}{2}+a(0)\right)||v_m(0)||^2+\frac{1}{2}a(t,v_m,v_m)\\&-\frac{1}{2}a(0,v_m,v_m)+\frac{\delta}{2}\int_0^t|v_m'(s)|^2ds\leq 0.\end{aligned}$$

Como $\gamma(t)$ é limitada para $t\geq 0$ e $a(t)\in W^{1,\infty}(0,\infty)$, então existe uma constante $c_1>0$ tal que $\dfrac{1}{2\gamma^2(t)}\left(-\dfrac{m_0}{2}+a(t)\right)\geq c_1$. Sendo assim, tomemos

$$c_2=\min\left\{\frac{1}{2},c_1\right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}c_2\big(|v_m'(t)|^2+||v_m(t)||^2\big)&\leq\frac{1}{2}|v_m'(0)|^2+\frac{1}{2\gamma^2(0)}\left(-\frac{m_0}{2}+a(0)\right)||v_m(0)||^2\\&-\frac{1}{2}a(t,v_m,v_m)+\frac{1}{2}a(0,v_m,v_m)-\frac{\delta}{2}\int_0^t|v_m'(s)|^2ds\end{aligned}$$

Assim, obtemos a Estimativa 2.1, a saber,

$$|v_m'(t)|^2+||v_m(t)||^2\leq C,\tag{2.122}$$

onde

$$C = \frac{1}{c_2}\left[\frac{1}{2}|v_1|^2 + \left(-\frac{m_0}{2} + a(0)\right)\frac{1}{2\gamma_0}||v_0||^2 + \frac{1}{2}a(0, v_0, v_0)\right].$$

Estimativa 2.2 Tomemos $v = -\dfrac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2} = -\Delta v_m'$ em $(2.106)_1$. Logo,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_m'(t)||^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{d}{dt}|\Delta v_m|^2 + a\left(t, v_m, -\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}\right) \\ &+ \left(\breve{b}(y,t)\,\frac{\partial v_m'}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}\right) + \left(\breve{c}(y,t)\,\frac{\partial v_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}\right) + \delta||v_m'||^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.123}$$

Analizaremos os termos da equação acima.

- $$\begin{aligned} a\left(t, v_m, -\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}\right) =& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \breve{a}(y,t)(\Delta v_m)^2 dy - \frac{1}{2}\int_0^1 \breve{a}'(y,t)(\Delta v_m)^2 dy \\ &- \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy + \frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}\Bigg|_{y=0}^{y=1}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \left(\breve{b}(y,t)\frac{\partial v_m'}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}\right) &= -\int_0^1 \breve{b}(y,t)\frac{\partial v_m'}{\partial y}\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}dy \\ &= -\int_0^1 \breve{b}(y,t)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \breve{b}(y,t)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy \\ &= -\frac{1}{2}\left[\breve{b}(y,t)\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial \breve{b}}{\partial y}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \breve{b}}{\partial y}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{1}{2}\breve{b}(y,t)\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{y=0}^{y=1}. \end{aligned}$$

Observação 2.8 *Sabemos que* $\breve{b}(y,t) = -2\left(\dfrac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)$ *com* $\alpha'(t) < 0$, $\beta'(t) > 0$ *e* $\gamma(t) > 0$. *Então*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\breve{b}(y,t)\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{y=0}^{y=1} &= -\frac{1}{2}\breve{b}(1,t)\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right)^2 + \frac{1}{2}\breve{b}(0,t)\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right)^2 \\ &= \frac{(\alpha' + \gamma')}{\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right)^2 - \frac{\alpha'}{\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Também temos,

- $$\left(\check{c}(y,t)\,\frac{\partial v_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2}\right) = -\int_0^1 \check{c}(y,t)\,\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2}dy$$
$$= -\int_0^1 \check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)dy$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy - \check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}\bigg|_{y=0}^{y=1},$$

  onde a última igualdade é uma consequência da integração por partes.

Substituindo as expressões acima em (2.123), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v'_m(t)||^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{d}{dt}|\Delta v_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \breve{a}(y,t)\,(\Delta v_m)^2\,dy\\
&-\frac{1}{2}\int_0^1 \breve{a}'(y,t)\,(\Delta v_m)^2\,dy - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy + \frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}\bigg|_{y=0}^{y=1}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \check{b}}{\partial y}\left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{1}{2}\check{b}(y,t)\left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)^2\bigg|_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy\\
&-\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}\bigg|_{y=0}^{y=1} + \delta||v'_m||^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.124}$$

Temos visto que

- $$-\frac{1}{2}\int_0^1 \breve{a}'(y,t)\,(\Delta v_m)^2\,dy \;\geq\; \frac{m_0}{2}\frac{\gamma'}{\gamma^3}|\Delta v_m|^2.$$

Também temos,

$$\breve{a}(y,t) = \frac{m_0}{2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)^2$$
$$\frac{\partial \breve{a}}{\partial y} = -2\left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)\frac{\gamma'}{\gamma}$$
$$\frac{\partial^2 \breve{a}}{\partial y^2} = -2\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2.$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy = \int_0^1 \frac{\partial^2 \breve{a}}{\partial y^2}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy + \int_0^1 \frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy$$
$$= -2\int_0^1 \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy$$
$$- 2\int_0^1 \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)\frac{\gamma'}{\gamma}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy.$$

Obtemos
$$\left|-2\int_0^1 \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| \leq 4\lambda\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^4 ||v_m||^2 + \frac{1}{4\lambda}||v_m'||^2.$$
Tomando
$$4\lambda\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^4 = \frac{m_0}{32}\frac{\gamma'}{\gamma^3}\pi^2$$
resulta que
$$\frac{1}{4\lambda} = \frac{32(\gamma')^3}{\pi^2 m_0 \gamma}.$$
Como $\pi^2||v_m||^2 < |\Delta v_m|^2$, $(\gamma')^3 \leq \frac{m_0}{16}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}$ e $\frac{1}{\gamma} < \frac{1}{\gamma_0}$, temos que

- $$\left|-2\int_0^1 \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| \leq \frac{m_0\gamma'}{32\gamma^3}|\Delta v_m|^2 + \frac{2}{\pi^2\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}||v_m'||^2.$$

Também temos,
$$\begin{aligned}\left|-2\int_0^1 (\alpha'+\gamma' y)\frac{\gamma'}{\gamma^2}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| &\leq 2\int_0^1 |\alpha'+\gamma' y|\frac{\gamma'}{\gamma^2}\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|dy\\ &\leq 2\int_0^1 \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|dy\\ &\leq 4\lambda\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^4|\Delta v_m|^2 + \frac{1}{4\lambda}||v_m'||^2.\end{aligned}$$
Tomando
$$4\lambda\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^4 = \frac{m_0\gamma'}{32\gamma^2},$$
obtemos
$$\frac{1}{4\lambda} = \frac{32(\gamma')^3}{m_0\gamma} \leq \frac{2}{\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}.$$
Portanto,
$$\left|-2\int_0^1 (\alpha'+\gamma' y)\frac{\gamma'}{\gamma^2}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| \leq \frac{m_0\gamma'}{32\gamma^3}|\Delta v_m|^2 + \frac{2}{\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}||v_m'||^2$$
e

- $$\left|\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| \leq \frac{m_0\gamma'}{16\gamma^3}|\Delta v_m|^2 + \frac{2}{\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2}\right)||v_m'||^2.$$

  Temos que $\frac{\partial \breve{b}}{\partial y} = -2\frac{\gamma'}{\gamma}$ e

- $$\left|\frac{1}{2}\int_0^1 \check{b}(y,t)\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy\right| \leq \frac{1}{2\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}||v_m'||^2.$$

De

$$\begin{aligned}\check{c}(y,t) &= -\frac{(\alpha'' + \gamma'' y)}{\gamma}\\ \frac{\partial \check{c}}{\partial y}(y,t) &= -\frac{\gamma''}{\gamma},\end{aligned}$$

segue que

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy = \int_0^1 \frac{\partial \check{c}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy + \int_0^1 \check{c}(y,t)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy.$$

Temos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{\partial \check{c}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| &\leq \int_0^1 \frac{|\gamma''|}{\gamma}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|dy\\ &\leq \int_0^1 2\frac{(\gamma')^2}{\gamma}\frac{1}{\gamma}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|dy\\ &\leq 4\lambda\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^4|\Delta v_m|^2 + \frac{1}{4\lambda}||v_m'||^2\\ &\leq \frac{m_0\gamma'}{32\gamma^3}|\Delta v_m|^2 + \frac{2}{\pi^2\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}||v_m'||^2.\end{aligned}$$

Também, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \check{c}(y,t)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| &\leq \int_0^1 \frac{|\alpha'' + \gamma'' y|}{\gamma}\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|dy\\ &\leq \int_0^1 \frac{(\alpha' + \gamma' y)^2}{\gamma}\frac{1}{\gamma}\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|dy\\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|dy\\ &\leq \lambda\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^4|\Delta v_m|^2 + \frac{1}{4\lambda}||v_m'||^2.\end{aligned}$$

Tomando $\lambda\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^4 = \frac{m_0\gamma'}{32\gamma^3}$ e $\frac{1}{4\lambda} = \frac{8(\gamma')^3}{m_0\gamma} \leq \frac{1}{2\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}$, obtemos

$$\left|\int_0^1 \check{c}(y,t)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| \leq \frac{m_0\gamma'}{32\gamma}|\Delta v_m|^2 + \frac{1}{2\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}||v_m'||^2.$$

Portanto, obtemos a estimativa

- $$\left|\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy\right| \leq \frac{m_0\gamma'}{16\gamma^3}|\Delta v_m|^2 + \frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{4+\pi^2}{2\pi^2}\right)\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}||v_m'||^2.$$

De $\check{b}(y,t) = -\left(\dfrac{\alpha'+\gamma' y}{\gamma}\right)$, obtemos

- $$-\check{b}(y,t)\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{2\beta'}{\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right)^2 + \frac{2(-\alpha)}{\gamma}\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right)^2.$$

Temos
$$\frac{\partial \check{a}}{\partial y} = -2\left(\frac{\alpha'+\gamma' y}{\gamma}\right)\frac{\gamma'}{\gamma}$$
e
$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \check{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right| &\leq 2\frac{\beta'}{\beta}\frac{\gamma'}{\gamma}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right| + 2\frac{|\alpha'|}{\gamma}\frac{\gamma'}{\gamma}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right| \\
&= \frac{2}{4}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^{1/2}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right|\frac{4\beta'\gamma'}{\gamma^2}\left(\frac{\gamma}{\beta'}\right)^{1/2}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right| \\
&+ \frac{2}{4}\left(\frac{|\alpha'|}{\gamma}\right)^{1/2}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right|\frac{4|\alpha'|\gamma'\gamma^{1/2}}{\gamma^2|\alpha'|^{1/2}}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right| \\
&\leq \frac{\beta'}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right|^2 + \frac{8(\beta'\gamma')^2\gamma}{\gamma^4\beta'}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|^2 \\
&+ \frac{|\alpha'|}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right|^2 + \frac{8(|\alpha'|\gamma')^2\gamma}{\gamma^4|\alpha'|}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right|^2 \\
&\leq \frac{\beta'}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right|^2 + \left(\frac{2\gamma'}{\gamma}\right)^3\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|^2 \\
&+ \frac{|\alpha'|}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right|^2 + \left(\frac{2\gamma'}{\gamma}\right)^3\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right|^2.
\end{aligned}$$

Notemos que $\beta' = \gamma' + \alpha' < \gamma'$ e $|\alpha' + \gamma' y| < \gamma'$ implica $|\alpha'| < \gamma'$.

Temos
$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dy = \int_0^1 \frac{\partial v_m}{\partial y}dy + \int_0^1 y\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}dy \\
&\leq \int_0^1 \frac{\partial v_m}{\partial y}dy + \int_0^1 \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}dy \leq ||v_m|| + |\Delta v_m| \leq \left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)|\Delta v_m|.
\end{aligned}$$

Portanto,

- $$\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|^2 \leq \left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)^2|\Delta v_m|^2.$$

Pelo mesmo argumento, temos

- $$\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right|^2 \leq \left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)^2 |\Delta v_m|^2.$$

Portanto, obtemos

- $$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|_{y=0}^{y=1}\right| \leq & \frac{\beta'}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right|^2 + \left(\frac{2\gamma'}{\gamma}\right)^3\left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)^2|\Delta v_m|^2 \\ & + \frac{|\alpha'|}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right|^2 + \left(\frac{2\gamma'}{\gamma}\right)^3\left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)^2|\Delta v_m|^2.\end{aligned}$$

Da hipótese **(H3)** obtemos que $|\alpha''| \leq \dfrac{(\alpha')^2}{\gamma}$ e $|\beta''| \leq \dfrac{(\beta')^2}{\gamma}$, e como $\check{c}(y,t) = -\dfrac{(\alpha''+\gamma''y)}{\gamma}$, temos

- $$\begin{aligned}\left|\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right|_{y=0}^{y=1}\right| \leq & \frac{|\beta''|}{\gamma}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right| + \frac{|\alpha''|}{\gamma}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right|\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right| \\ \leq & \left(\frac{\beta'}{\gamma}\right)^2\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right|\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right| + \left(\frac{\alpha'}{\gamma}\right)^2\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right|\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right| \\ = & \frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\gamma}\right)^{1/2}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right| \frac{2(\beta')^2\gamma^{1/2}}{\gamma^2(\beta')^{1/2}}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right| \\ & + \frac{|\alpha'|^{1/2}}{2\gamma^{1/2}}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right| \frac{2(\alpha')^2\gamma^{1/2}}{\gamma^2|\alpha'|^{1/2}}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right| \\ \leq & \frac{\beta'}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right|^2 + \frac{2(\beta')^4}{\gamma^4\beta'}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|^2 \\ & + \frac{|\alpha'|}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right|^2 + \frac{2(\alpha')^4\gamma}{\gamma^4|\alpha'|}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right|^2 \\ \leq & \frac{\beta'}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right|^2 + \frac{2(\gamma')^3}{\gamma^3}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|^2 \\ & + \frac{|\alpha'|}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right|^2 + \frac{2(\gamma')^3}{\gamma^3}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right|^2 \\ \leq & \frac{\beta'}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right|^2 + \frac{2(\gamma')^3}{\gamma^3}\left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)|\Delta v_m|^2 \\ & + \frac{|\alpha'|}{8\gamma}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right|^2 + \frac{2(\gamma')^3}{\gamma^3}\left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)|\Delta v_m|^2.\end{aligned}$$

Notemos que consideramos $\dfrac{(\alpha')^4}{|\alpha'|} = |\alpha'|^3 < (\gamma')^3$.

Também obtemos

•
$$\begin{aligned}
&\frac{2\beta'}{\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right)^2 + \frac{2(-\alpha')}{\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right)^2 - \frac{\beta'}{4\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right)^2 - \frac{|\alpha'|}{4\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right)^2 \\
&= \frac{7\beta'}{4\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right)^2 + \frac{-8\alpha' - |\alpha'|}{4\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right)^2 \\
&= \frac{7\beta'}{4\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(1,t)\right)^2 + \frac{-7\alpha'}{4\gamma}\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}(0,t)\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em (2.124), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_m'(t)||^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{d}{dt}|\Delta v_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \check{a}(y,t)\big(\Delta v_m(t)\big)^2 dy \\
&+ \left[\frac{m_0}{4}\frac{\gamma'}{\gamma^3} - \frac{m_0\gamma'}{16\gamma^3} - 16\left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)^2\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^3 - 4\left(\frac{\pi+1}{\pi}\right)^2\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^3\right]|\Delta v_m(t)|^2 \\
&+ \left[\delta - \frac{1}{2\gamma_0}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2} - \frac{2}{\gamma_0}\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2}\right)\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{\pi^2+4}{2\pi^2}\right)\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}\right] \\
&||v_m'(t)||^2 \\
&\leq 0, \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Portanto, de (2.125), da observação 2.7 e das hipóteses sobre γ' e δ, obtemos a Estimativa 2.2, a saber

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_m'(t)||^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{d}{dt}|\Delta v_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \check{a}(y,t)\big(\Delta v_m(t)\big)^2 dy \\
&+\frac{\delta}{2}||v_m'(t)||^2 \leq 0, \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Estimativa 2.3 Tomemos $v = -\dfrac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} = -\Delta v_m$ em $(2.106)_1$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\nabla v_m', \nabla v_m) - ||v_m'||^2 + \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)|\Delta v_m(t)|^2 + a(t, v_m, -\Delta v_m) \\
&+\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}||v_m||^2 + \left(\check{b}(y,t)\frac{\partial v_m'}{\partial y}, -\Delta v_m\right) + \left(\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, -\Delta v_m\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.127}$$

Como

$$\begin{aligned}
\check{a}(y,t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)^2 \\
\frac{\partial \check{a}}{\partial y} &= -2\frac{(\alpha' + \gamma' y)}{\gamma}\frac{\gamma'}{\gamma},
\end{aligned}$$

então

$$
\begin{aligned}
a(t, v_m, -\Delta v_m) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}dy \\
&= \int_0^1 \frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}dy + \int_0^1 \breve{a}(y,t)\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right)^2 dy.
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{\partial \breve{a}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}dy\right| &\leq \int_0^1 2\frac{|\alpha' + \gamma' y|}{\gamma^2}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|dy \\
&\leq 2\int_0^1 \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|dy \\
&\leq 2\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2||v_m|||\Delta v_m| \\
&\leq \frac{2}{\pi}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2|\Delta v_m|^2 \\
&\leq \frac{m_0}{4\pi\gamma^2}|\Delta v_m|^2.
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
\int_0^1 \breve{a}(y,t)\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right)^2 dy &= \frac{m_0}{2\gamma^2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right)^2 dy - \int_0^1 \frac{(\alpha' + \gamma' y)^2}{\gamma^2}\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right)^2 dy \\
&= \frac{m_0}{2\gamma^2}|\Delta v_m|^2 - \int_0^1\left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right)^2 dy.
\end{aligned}
$$

No entanto,

$$
-\int_0^1\left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right)^2 dy \geq -\frac{m_0}{8\gamma^2}|\Delta v_m|^2
$$

e

$$
a(t, v_m, -\Delta v_m) \geq \left(-\frac{m_0}{4\pi\gamma^2} + \frac{m_0}{2\gamma^2} - \frac{m_0}{8\gamma^2}\right)|\Delta v_m|^2.
$$

Também, temos que

- $$
\begin{aligned}
\left|\left(\breve{b}(y,t)\frac{\partial v_m'}{\partial y}, -\Delta v_m\right)\right| &= \left|\int_0^1 \breve{b}(y,t)\Delta v_m\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right| \\
&\leq \int_0^1\left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)^2(\Delta v_m)^2 dy + \int_0^1\left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy \\
&\leq \frac{m_0}{8\gamma^2}|\Delta v_m|^2 + ||v_m'||^2.
\end{aligned}
$$

e

- $$\left|\left(\check{c}(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, -\Delta v_m\right)\right| = \int_0^1 \frac{|\alpha' + \gamma' y|}{\gamma}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right||\Delta v_m|dy$$
$$\leq \int_0^1 \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 \left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right||\Delta v_m|dy$$
$$\leq \frac{m_0}{8\pi\gamma^2}|\Delta v_m|^2.$$

Substituindo as estimativas acima em (2.127), obtemos

$$\frac{d}{dt}(\nabla v_m', \nabla v_m) + \frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}||v_m||^2 + \frac{m_0}{8\gamma^2}|\Delta v_m|^2 - 2||v_m'||^2 \leq 0, \tag{2.128}$$

pois $-\dfrac{m_0}{2} + a(t) \geq \dfrac{m_0}{2}$.

Multiplicando (2.128) por $\dfrac{\delta}{4}$ e somando a (2.126) da Estimativa 2.2, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{4}\frac{d}{dt}(\nabla v_m', \nabla v_m) + \frac{\delta^2}{8}\frac{d}{dt}||v_m||^2 + \frac{\delta}{32}\frac{m_0}{\gamma^2}|\Delta v_m|^2 - \frac{\delta}{2}||v_m'||^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_m'||^2\\ &+\frac{1}{2\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{d}{dt}|\Delta v_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \breve{a}(y,t)(\Delta v_m)^2 dy + \frac{\delta}{2}||v_m'||^2 \leq 0,\end{aligned} \tag{2.129}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg[||v_m'||^2 + \frac{\delta}{2}(\nabla v_m', \nabla v_m) + \frac{\delta^2}{4}||v_m||^2 + \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)|\Delta v_m|^2\\ &+ \int_0^1 \breve{a}(y,t)(\Delta v_m)^2 dy\Bigg] + \frac{m_0\delta}{32\gamma^2}|\Delta v_m|^2 \leq \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\right]|\Delta v_m|^2\\ &\leq 0.\end{aligned} \tag{2.130}$$

A última desigualdade decorre dos cálculos vistos na desigualdade (2.117).

Consideremos a função numérica definida por

$$\begin{aligned}H(t) =&||v_m'(t)||^2 + \frac{\delta}{2}\big(\nabla v_m'(t), \nabla v_m(t)\big) + \frac{\delta^2}{4}||v_m(t)||^2 + \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)|\Delta v_m(t)|^2\\ &+ \int_0^1 \breve{a}(y,t)(\Delta v_m)^2 dy\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever (2.130) como sendo

$$\frac{1}{2}H'(t) \leq -\frac{m_0\delta}{32}\frac{|\Delta v_m|^2}{\gamma^2} \tag{2.131}$$

Lema 2.4.1 *Para todo $t \geq 0$, temos que $0 \leq H(t) \leq H(0)$.*

Demonstração: De fato, temos que

$$\left|\frac{\delta}{2}(\nabla v_m', \nabla v_m)\right| \leq \frac{\delta^2}{2}||v_m||^2 + \frac{1}{8}||v_m'||^2$$

e

$$\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right) \geq \frac{m_0}{2} \geq 0 \ ; \ \breve{a}(y,t) > 0.$$

Portanto,

$$H(t) \geq \frac{\delta^2}{2}||v_m(t)||^2 + \frac{1}{8}||v_m'(t)||^2 \geq 0.$$

Agora, como

$$-\frac{m_0\delta}{32}\frac{|\Delta v_m|^2}{\gamma^2} < 0,$$

então de (2.131), temos que

$$H'(t) \leq 0$$

para todo $t \geq 0$. Logo, $H(t)$ é decrescente para todo $t \geq 0$, isto é,

$$H(t) \leq H(0)$$

□

Como $H(t) \leq H(0)$ para todo $t \geq 0$, obtemos estimativas para $||v_m'(t)||$ e $|\Delta v_m(t)|$ independente de t.

Passagem ao Limite : Das estimativas obtidas acima, extraímos uma subsequência $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} v \ \text{ em } \ L^\infty\big(0,\infty\,; H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1)\big)$$

$$v_\nu' \overset{*}{\rightharpoonup} v' \ \text{ em } \ L^\infty\big(0,\infty\,; H_0^1(0,1)\big).$$

Pelo teorema de compacidade de Aubin-Lions [30], extraímos uma subsequência $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, que representamos ainda por $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que

$$v_\nu \to v \ \text{ fortemente em } \ L^2\big(0,\infty\,; L^2(0,1)\big).$$

Para $\theta \in D(0,T)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_\Omega v_\nu'' z\theta \, dydt &= \int_0^\infty (v_\nu'', z)\theta(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(v_\nu', z)\theta(t)\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{d}{dt}(v_\nu', z)\theta(t)\, dt = -\lim_{T\to\infty} \int_0^T (v_\nu', z)\theta'(t)\, dt \\
&= -\int_0^\infty (v_\nu', z)\theta'(t)\, dt \to -\int_0^\infty (v', z)\theta'(t)\, dt \\
&= -\lim_{T\to\infty} \int_0^T (v', z)\theta'(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{d}{dt}(v', z)\theta(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(v', z)\theta(t)\, dt = \int_0^\infty (v'', z)\theta(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_\Omega v'' z\theta(t)\, dydt
\end{aligned}$$

isto é,

$$(v_\nu'', z) \rightharpoonup (v'', z) \qquad \text{em} \qquad L^2\big(0,\infty\,; L^2(0,1)\big).$$

Da hipótese **(H1)** e das Estimativas 2.1 e 2.2, temos

$$\left| \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right) \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial y^2} \right| < C \qquad \text{em} \qquad [0,\infty).$$

Então,

$$\frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right) \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial y^2} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad \text{em} \qquad L^\infty\big(0,\infty\,; L^2(0,1)\big).$$

Integração por partes nos dá que

$$a(t, v_\nu, z) \rightharpoonup a(t, v, z) \qquad \text{em} \qquad L^2\big(0,\infty\,; H_0^1(0,1)\big),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad \text{em} \qquad L^2\big(0,\infty\,; L^2(0,1)\big).$$

De fato, para $z \in D(0,1)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty a(t, v_\nu, z) dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 \breve{a}(y,t) \frac{\partial v_\nu}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dt \\
&= -\int_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right) z\, dy \right) dt \\
&\to -\int_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) z\, dy \right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^1 \breve{a}(y,t) \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dt \\
&= \int_0^\infty a(t, v, z) dt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$a(t, v_\nu, z) \rightharpoonup a(t, v, z) \text{ em } L^2\big(0, \infty\,; H_0^1(0,1)\big).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad \text{em} \qquad L^2\big(0, \infty\,; L^2(0,1)\big).$$

Pelo mesmo argumento, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{b}(y,t)\frac{\partial v'_\nu}{\partial y}\right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{b}(y,t)\frac{\partial v'}{\partial y}\right) \qquad \text{em} \qquad L^2\big(0, \infty\,; L^2(0,1)\big),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{c}(y,t)\frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{c}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad \text{em} \qquad L^2\big(0, \infty\,; L^2(0,1)\big).$$

Também,

$$\delta\left(\frac{\partial v_\nu}{\partial t}, z\right) \rightharpoonup \delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}, z\right) \qquad \text{em} \qquad L^2\big(0, \infty\,; L^2(0,1)\big).$$

Das convergências acima, tomando $m = \nu$ na equação aproximada, temos

$$\begin{aligned}&(v''_\nu, z) + \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big)\big(\nabla v_\nu, \nabla z\big) + a(t, v_\nu, z) + \left(\breve{b}(y,t)\frac{\partial v'_\nu}{\partial y}, z\right)\\ &+ \left(\breve{c}(y,t)\frac{\partial v_\nu}{\partial y}, z\right) + \delta\left(\frac{\partial v_\nu}{\partial t}, z\right) = 0\end{aligned}$$

Ao limite com $\nu \to \infty$, temos

$$\begin{aligned}&(v'', z) + \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big)\big(\nabla v, \nabla z\big) + a(t, v, z) + \left(\breve{b}(y,t)\frac{\partial v'}{\partial y}, z\right)\\ &+ \left(\breve{c}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}, z\right) + \delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}, z\right) = 0, \qquad \forall z \in L^2\big(0, \infty\,; L^2(0,1)\big),\end{aligned}$$

ou seja,

$$v'' - \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(t, v, z) + \breve{b}(y,t)\frac{\partial v'}{\partial y} + \breve{c}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y} + \delta\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

em $L^2\big(0, \infty\,; L^2(0,1)\big)$.

Das convergências obtidas, concluimos que

$$v(0) = 0 \text{ e } v'(0) = v_1 \text{ em } (0,1)$$

provando que v é a solução fraca do sistema (2.11) para o caso $w = 0$.

Unicidade : Sejam v e $\widehat{v}$ duas soluções do teorema 2.7. Logo,

$$(v'', \varphi) + \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big)\,(\nabla v, \nabla\varphi) + a(t, v, \varphi) + \left(\check{b}(y,t)\frac{\partial v'}{\partial y}, \varphi\right)$$
$$+ \left(\check{c}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}, \varphi\right) + \delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \varphi\right) = 0$$

e

$$(\widehat{v}'', \varphi) + \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big)\,(\nabla \widehat{v}, \nabla\varphi) + a(t, \widehat{v}, \varphi) + \left(\check{b}(y,t)\frac{\partial \widehat{v}'}{\partial y}, \varphi\right)$$
$$+ \left(\check{c}(y,t)\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y}, \varphi\right) + \delta\left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial t}, \varphi\right) = 0$$

Assim,

$$(v'' - \widehat{v}'', \varphi) + \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big)\,\big(\nabla(v - \widehat{v}), \nabla\varphi\big) + a(t, v - \widehat{v}, \varphi)$$
$$+ \left(\check{b}(y,t)\frac{\partial(v' - \widehat{v}')}{\partial y}, \varphi\right) + \left(\check{c}(y,t)\frac{\partial(v - \widehat{v})}{\partial y}, \varphi\right) + \delta\left(\frac{\partial(v - \widehat{v})}{\partial t}, \varphi\right) = 0.$$

Tomando $z = v - \widehat{v}$ na equação acima, resulta que

$$\begin{aligned}&(z'', \varphi) + \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big)\,(\nabla z, \nabla\varphi) + a(t, z, \varphi) + \left(\check{b}(y,t)\frac{\partial z'}{\partial y}, \varphi\right)\\ &+ \left(\check{c}(y,t)\frac{\partial z}{\partial y}, \varphi\right) + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial t}, \varphi\right) = 0 \ \text{ em } \ L^2\big(0, \infty\,; L^2(0,1)\big)\end{aligned} \tag{2.132}$$

e

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 0. \tag{2.133}$$

Tomando $\varphi = z'$ na equação (2.132), obtemos

$$\begin{aligned}&(z'', z') + \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big(-\frac{m_0}{2} + a(t)\Big)\,(\nabla z, \nabla z') + a(t, z, z') + \left(\check{b}(y,t)\frac{\partial z'}{\partial y}, z'\right)\\ &+ \left(\check{c}(y,t)\frac{\partial z}{\partial y}, z'\right) + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial t}, z'\right) = 0.\end{aligned} \tag{2.134}$$

Agora,

$$(z'', z') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |z'|^2 dy = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z'|^2 \tag{2.135}$$

$$\big(\nabla z, \nabla z'\big) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |\nabla z|^2 dy = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||z(t)||^2 \tag{2.136}$$

$$\begin{aligned}a(t, z, z') &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t, z, z) - \frac{1}{2}a'(t, z, z)\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \check{a}(y,t)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{1}{2}\int_0^1 \check{a}'(y,t)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy\end{aligned} \tag{2.137}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\check{b}(y,t)\frac{\partial z'}{\partial y}, z'\right) &= \int_0^1 \check{b}(y,t)\frac{\partial z'}{\partial y} z' dy \\
&= \frac{1}{2}\check{b}(y,t)(z'(y,t))^2\Big|_{y=0}^{y=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \check{b}}{\partial y}(z')^2 dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \check{b}}{\partial y}(z')^2 dy.
\end{aligned} \tag{2.138}
$$

Substituindo (2.135) – (2.138) em (2.134), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\frac{d}{dt}||z(t)||^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,z,z) - \frac{1}{2}a'(t,z,z) \\
&-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \check{b}}{\partial y}(z')^2 dy + \left(\check{c}(y,t)\frac{\partial z}{\partial y}, z'\right) + \delta|z'(t)|^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.139}
$$

Um cálculo análogo conforme visto na Estimativa 2.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|z'(t)|^2 - \frac{1}{2}|z'(0)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)||z(t)||^2 \\
&-\frac{1}{2\gamma^2(0)}\left(-\frac{m_0}{2} + a(0)\right)||z(0)||^2 + \frac{1}{2}a(t,z,z) - \frac{1}{2}a(0,z,z) \\
&+\frac{\delta}{2}\int_0^t |z'(s)|^2 ds \leq 0.
\end{aligned}
$$

Como $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$, $a(t,z,z) \geq 0$ e $a(0,z,z) \leq 0$, então da expressão acima, temos

$$
\frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)||z(t)||^2 = 0
$$

e como

$$
\frac{1}{2\gamma^2(t)}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)||z(t)||^2 \geq \frac{1}{2\gamma^2(t)}\frac{m_0}{2} > 0,
$$

então, da expressão acima, temos

$$
|z'(t)| = ||z(t)|| = 0 \quad \text{em} \quad [0,\infty),
$$

isto é,

$$
z(t) = 0.
$$

Logo,

$$
v = \widehat{v},
$$

o que mostra a unicidade no caso $w = 0$.

Caso 2: $w \neq 0$ sobre Σ_0

Inicialmente, tomemos $w \in H_0^2\big(0,\infty; H^{3/2}(\Gamma)\big)$.

Seja $q \in H_0^2\big(0,\infty; H^2(\Omega)\big)$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} q(0,t) = w \ \text{ sobre } \ \Sigma_0 \\ q(1,t) = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma\backslash\Sigma_0 \end{array} \right.$$

e que $q(y,0) = \dfrac{\partial q}{\partial t}(y,0) = 0$ com $0 < y < 1$.

A existência de q é garantida pelo teorema do traço.

Observemos que q'' e Lq são objetos de $L^2\big(0,\infty; L^2(0,1)\big)$.

Consideremos o problema misto

$$\left| \begin{array}{l} p'' + Lp = -q'' - Lq \ \text{ em } \ Q \\ \begin{cases} p(0,t) = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma_0 \\ p(1,t) = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma\backslash\Sigma_0 \end{cases} \\ p(y,0) = 0, \ \dfrac{\partial p}{\partial t}(y,0) = 0, \ 0 < y < 1. \end{array} \right.$$

Desde que $-q'' - Lq \in L^2\big(0,\infty; L^2(0,1)\big)$, segue do caso 1 visto anteriormente, que o sistema acima possui uma única solução fraca p.

Por definição de solução fraca, $\forall T > 0$, p satisfaz

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega p''(t)\xi dydt - \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\Delta p\,\xi dydt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial p}{\partial y}\right)\xi dydt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \breve{b}(y,t)\frac{\partial p'}{\partial y}\xi dydt + \int_0^T \int_\Omega \breve{c}(y,t)\frac{\partial p}{\partial y}\xi dydt + \delta\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}\xi dydt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (-q'' - Lq)\xi dydt, \end{aligned}$$

em $D'(0,T)$, $\forall \xi \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$.

Então

$$v = p + q$$

satisfaz

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega v''\xi dydt - \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\Delta v\xi dydt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\breve{a}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)\xi dydt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \breve{b}(y,t)\frac{\partial v'}{\partial y}\xi dydt + \int_0^T \int_\Omega \breve{c}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\xi dydt + \delta\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\xi dydt = 0, \end{aligned}$$

em $D'(0,T)$, $\forall\, \xi \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$, ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega \left[v'' - \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right)\Delta v - \frac{\partial}{\partial y}\left(\check{a}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \check{b}(y,t)\frac{\partial v'}{\partial y} \right.$$
$$\left. + \check{c}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y} + \delta\frac{\partial v}{\partial t}\right]\xi dydt = 0,$$

em $D'(0,T)$, $\forall\, \xi \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$, isto é,

$$\int_0^T \int_\Omega \big(v'' + Lv\big)\xi dydt = 0, \qquad \forall\, \xi \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big).$$

Logo,

$$v'' + Lv = 0 \ \text{ em } \ Q.$$

Também, notemos que

$$\begin{cases} v(0,t) = w \ \text{ sobre } \ \Sigma_0 \\ v(1,t) = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \backslash \Sigma_0. \end{cases}$$

Com efeito, sobre Σ_0, vale

$$v(0,t) = (p+q)(0,t) = p(0,t) + q(0,t) = 0 + w = w.$$

Agora, sobre $\Sigma\backslash\Sigma_0$, temos

$$v(1,t) = (p+q)(1,t) = p(1,t) + q(1,t) = 0 + 0 = 0.$$

Finalmente, em Ω, vale

$$v(y,0) = 0\ ,\ \frac{\partial v}{\partial t}(y,0) = 0,$$

visto que,

$$v(y,0) = (p+q)(y,0) = p(y,0) + q(y,0) = p(y,0) = 0$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y,0) = \frac{\partial (p+q)}{\partial t}(y,0) = \frac{\partial p}{\partial t}(y,0) + \frac{\partial q}{\partial t}(y,0) = \frac{\partial p}{\partial t}(y,0) = 0.$$

Portanto, v é a única solução fraca do problema (2.11) para todo $t \geq 0$. $\square$

Para finalizarmos esta seção, como consequência do teorema 2.7, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.8 *Sejam* $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$ *e* $u_1 \in H_0^1(\Omega_0)$*. Assumamos que as hipóteses* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *são satisfeitas com*

$$0 < \gamma' < \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)\left(\frac{m_0}{10}\right)^{1/2}$$

e

$$\frac{\delta}{2} > \left[\frac{1}{2\gamma_0} + \frac{2}{\gamma_0}\left(\frac{\pi^2+1}{\pi}\right) + \frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{\pi^2+4}{2\pi^2}\right)\right]\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}.$$

Então o sistema (2.1) possui uma única solução global fraca $u(x,t)$ *definida para todo* $t \geq 0$ *e* $x \in \Omega_t$*.*

Demonstração: Sabemos que $u(x,t) = v(y,t)$, $x = \alpha(t) + \gamma(t)y$, $v(y,0) = v_0(y)$ com

-
$$v_0(y) = u(\alpha_0 + \gamma_0 y, 0) = u_0(\alpha_0 + \gamma_0).$$

Também temos que $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\alpha' + \gamma' y) + \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Portanto,

$$v_1(y) = \frac{\partial v}{\partial t}(y,0) = \big(\alpha'(0) + \gamma'(0)y\big)\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha_0 + \gamma_0 y, 0) + u'(\alpha_0 + \gamma_0 y, 0)$$

e então

-
$$v_1(y) = u_1(\alpha_0 + \gamma_0 y, 0) + \big(\alpha'(0) + \gamma'(0)y\big)\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha_0 + \gamma_0 y, 0).$$

Temos que $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \gamma\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e

-
$$||v_0||^2 = \int_0^1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 dy = \int_0^1 \left(\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 \frac{1}{\gamma_0} dx = \gamma_0 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 dx = \gamma_0 ||u_0||^2_{H_0^1(\Omega_0)}$$

com $\Omega_0 = (\alpha_0, \beta_0)$.

Obtemos,

$$a(0, v_0, v_0) = \int_0^1 \breve{a}(y,0)\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 dy \leq \frac{m_0}{2\gamma_0^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 dy = \frac{m_0}{2\gamma_0^2}||v_0||^2 = \frac{m_0}{2\gamma_0}||u_0||^2_{H_0^1(\Omega_0)},$$

pois

$$\breve{a}(y,t) = \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right)^2 \leq \frac{m_0}{2\gamma^2}.$$

Portanto,

- $$a(0,v_0,v_0) \leq \frac{m_0}{2\gamma_0}||u_0||^2_{H^1_0(\Omega_0)}.$$

Como $\alpha'(0)+\gamma'(0)y<\gamma'(0)$, então

$$|v_1|^2 = \int_0^1 \big(v_1(y)\big)^2 dy \leq \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(u_1 + \gamma'(0)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{1}{\gamma_0}dx,$$

e assim

- $$|v_1|^2 \leq \frac{2}{\gamma_0}|u_1|^2_{L^2(\Omega_0)} + \frac{2\big(\gamma'(0)\big)^2}{\gamma_0}||u_0||^2_{H^1_0(\Omega_0)}.$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(\alpha_0+\gamma_0 y)\gamma_0 + \gamma'(0)\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha_0+\gamma_0 y) + \big(\alpha'(0)+\gamma'(0)y\big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\alpha_0+\gamma_0 y)\gamma_0 \\ &\leq \gamma_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + \gamma'(0)\frac{\partial u_0}{\partial x} + \gamma'(0)\gamma(0)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Logo,

- $$\begin{aligned}||v_1||^2_{H^1_0(0,1)} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2 dy \\ &\leq 2\gamma_0||u_1||_{H^1_0(\Omega_0)} + \frac{4\big(\gamma'(0)\big)^2}{\gamma_0}||u_0||^2_{H^1_0(\Omega_0)} + 4\big(\gamma'(0)\big)^2\gamma_0|\Delta u|^2_{L^2(\Omega_0)}.\end{aligned}$$

Como $\Delta v_0 = \gamma_0 \Delta u_0$ e $\check{a}(y,0) \leq \dfrac{m_0}{2\gamma_0^2}$, então

- $$\int_0^1 \check{a}(y,0)(\Delta v_0)^2 dy \leq \frac{m_0\gamma_0}{2}|\Delta u_0|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

e

$$|\Delta v_0|^2 = \int_0^1 (\Delta v_0)^2 dy = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (\gamma_0\Delta u_0)^2\frac{1}{\gamma_0}dx = \gamma_0|\Delta u_0|^2_{L^2(\Omega_0)}.$$

□

Capítulo 3

Fluidos Micropolares em Domínios com Fronteira Variável

3.1 Definições e Notações

Este capítulo é destinado ao estudo do controle hierárquico para fluidos micropolares linearizado, no caso bi-dimensional, em um domínio $\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t$ cuja fronteira é variável com respeito a t, para $t \in [0, T]$ e $T > 0$. Mais precisamente, consideremos um aberto limitado $\widehat{Q}$ do $\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t$, que é a união de abertos limitados $\Omega_t \subset \mathbb{R}_x^2$, onde Ω_t são deformações de um conjunto fixo Ω do $\mathbb{R}_x^2$ por um difeomorfirmo τ a ser definido. Portanto, escreveremos $\mathbb{R}^2$ em vez de $\mathbb{R}_x^2$.
Assim, seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^2$ fixado, não-vazio, cujos pontos são representados por $y = (y_1, y_2)$, onde os y_i são números reais para $i = 1, 2$.
Seja Ω_t as imagens difeomorfas de Ω pela função

$$\begin{array}{ccc} [0, T] & \rightarrow & \mathbb{R}^{2^2} \\ t & \longmapsto & K(t). \end{array}$$

Os vetores de Ω_t são representados por $x = (x_1, x_2)$, onde x_i são números reais para cada $i = 1, 2$. Portanto, temos

$$x = K(t)y, \quad \text{for} \;\; i = 1, 2.$$

O domínio não cilíndrico $\widehat{Q}$ de $\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t$ é definido por

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\Omega_t \times \{t\}\}.$$

Se a fronteira de Ω_t é Γ_t, então a fronteira lateral de $\widehat{Q}$ é

$$\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}.$$

Representaremos por Q o cilindro $Q = \Omega \times [0, T[$, com fronteira lateral Σ dada por $\Sigma = \Gamma \times [0, T[$, onde Γ é a fronteira de Ω.

Assumimos a seguinte hipótese sobre $K(t)$:

$$K(t) = k(t)M,$$

onde k é uma função real $k : [0, T] \to \mathbb{R}$, tal que $k \in C^2([0, T])$, $k(t) \geq k_0 > 0$, k_0 sendo constante e M uma matriz invertível 2×2 cujas entradas são números reais.

Assim temos o difeomorfismo natural $\tau : Q \to \widehat{Q}$ definido por

$$(y, t) \in Q \to (x, t) \in \widehat{Q}, \quad \text{onde} \quad x = K(t)y.$$

Representaremos por $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ and $\mathcal{O}$, subconjuntos abertos, não-vazios e disjuntos de Ω. Isso significa que $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_i$, para $i = 1, 2$, e $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ é vazio para $i \neq j$.

Denotemos por $\mathcal{O}_t, \mathcal{O}_{it},\ i = 1, 2$, a transformação de $\mathcal{O}, \mathcal{O}_i$, pela deformação da aplicação τ. Suponhamos as interseções $\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{it},\ \mathcal{O}_{it} \cap \mathcal{O}_{jt},\ i \neq j$, vazias para $1 \leq i, j \leq 2$. Nessas condições, definimos domínios não-cilíndricos

$$\widehat{\mathcal{O}} = \bigcup_{0<t<T} \{\mathcal{O}_t \times \{t\}\}, \quad \widehat{\mathcal{O}}_1 = \bigcup_{0<t<T} \{\mathcal{O}_{1t} \times \{t\}\}, \widehat{\mathcal{O}}_2 = \bigcup_{0<t<T} \{\mathcal{O}_{2t} \times \{t\}\}$$

que estão contidos em $\widehat{Q}$ e são imagens por τ dos cilindros de Q com bases sobre $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$.

Consideramos o sistema de fluidos micropolares linearizado (em torno de $(\widehat{\boldsymbol{h}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$)

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{z}}_t - \Delta \widehat{\boldsymbol{z}} + (\widehat{\boldsymbol{h}} \cdot \nabla)\widehat{\boldsymbol{z}} + (\widehat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla)\widehat{\boldsymbol{h}} + \nabla \widehat{p} = \nabla \times \widehat{w} + \widehat{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}} \\ + \widehat{\boldsymbol{v}}^{(1)} \boldsymbol{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_1} + \widehat{\boldsymbol{v}}^{(2)} \boldsymbol{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_2} \quad \text{em } \widehat{Q} \\ \widehat{w}_t - \Delta \widehat{w} + \widehat{\boldsymbol{h}} \cdot \nabla \widehat{w} + \widehat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla \widehat{\boldsymbol{\theta}} = \nabla \times \widehat{\boldsymbol{z}} + \widehat{g} \widehat{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}} \\ + \widehat{u}^{(1)} \widehat{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_1} + \widehat{u}^{(2)} \widehat{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_2} \quad \text{em } \widehat{Q} \\ \nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{z}} = 0 \quad \widehat{Q} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} = 0, \quad \widehat{w} = 0 \quad \text{sobre } \widehat{\Sigma} \\ \widehat{\boldsymbol{z}}(0) = \widehat{\boldsymbol{z}}^0, \quad \widehat{w}(0) = \widehat{w}^0 \quad \text{em } \Omega_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $(\widehat{\boldsymbol{h}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$ pertence a classe

$$\begin{cases} \left(\widehat{\boldsymbol{h}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \in \mathbf{L}^{\infty}\left(\widehat{Q}\right) \times L^{\infty}\left(\widehat{Q}\right), \\ \left(\widehat{\boldsymbol{h}}_t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_t\right) \in L^2\left(0, T; \mathbf{L}^r\left(\Omega_t\right)\right) \times L^2\left(0, T; L^r\left(\Omega_t\right)\right), \quad \text{para algum} \quad r > 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

No sistema (3.1), $\widehat{\boldsymbol{z}} = \widehat{\boldsymbol{z}}(x,t) = (\widehat{\boldsymbol{z}}_1(x,t), \widehat{\boldsymbol{z}}_2(x,t))$ representa o campo velocidade do fluído, $\widehat{w} = \widehat{w}(x,t)$ é a velocidade angular, $\widehat{z}^0$ e $\widehat{w}^0$ são a velocidade e a velocidade angular no tempo $t = 0$. O subconjunto $\widehat{\mathcal{O}} \subset \Omega_t$ é o domínio controle (que é suposto pequeno como desejado), $\widehat{\mathcal{O}}_1$, $\widehat{\mathcal{O}}_2 \subset \widehat{\mathcal{O}}$ são domínios de controles secundários, as funções $\widehat{\boldsymbol{f}}$, $\widehat{g}$ são chamadas de controles líderes e $\widehat{\boldsymbol{v}}^{(i)}$, $\widehat{u}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ são os controles seguidores. As quantidades $(\widehat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla)\widehat{\boldsymbol{z}}$, $\nabla \times \widehat{\boldsymbol{z}}$ e $\nabla \times \widehat{w}$ são definidas, respectivamente, por

$$(\widehat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla)\widehat{\boldsymbol{z}} = (\widehat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla\widehat{z}_1, \widehat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla\widehat{z}_2)$$

e $\nabla \times \widehat{\boldsymbol{z}}$ é o rotacional usual do campo $\widehat{\boldsymbol{z}}$, isto é,

$$\nabla \times \widehat{\boldsymbol{z}} = \frac{\partial \widehat{z}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \widehat{z}_1}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \nabla \times \widehat{w} = (\frac{\partial \widehat{w}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \widehat{w}}{\partial x_1}).$$

Por $\widehat{\boldsymbol{\chi}}_{\widehat{\mathcal{O}}}, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_{\widehat{\mathcal{O}}_{it}}, i = 1, 2$, denotamos as funções características sobre $\widehat{\mathcal{O}}$ e $\widehat{\mathcal{O}}_{it}$.

3.2 Formulação do Problema

Como usual, no contexto de fluidos incompressíveis, usaremos os seguintes espaços de vetores:

$$\mathbf{V}_t = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_t);\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ em } \Omega_t\right\}$$

e

$$\mathbf{H}_t = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(\Omega_t);\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ em } \Omega_t,\ \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_t\right\},$$

onde $\boldsymbol{\nu}$ é a normal unitária exterior de Ω_t num ponto $x \in \Gamma_t$. Sejam $\widehat{\mathcal{O}}_{1,d}$, $\widehat{\mathcal{O}}_{2,d}$ subconjuntos abertos de Ω_t, representando os domínios de observabilidade para os seguidores, que estão localizados de forma arbitrária em Ω_t.

Funcionais custos em $\widehat{\boldsymbol{Q}}$. Associado a solução $(\widehat{\boldsymbol{z}}, \widehat{w})$ de (3.1), consideremos os funcionais (secundários)

$$\widehat{J}_i\left(\widehat{\boldsymbol{f}}, \widehat{g}; \widehat{\boldsymbol{v}}, \widehat{u}\right) = \frac{\widehat{\alpha}_i}{2} \int_0^T \int_{\widehat{\mathcal{O}}_{i,d}} \left|\widehat{\boldsymbol{z}} - \widehat{\boldsymbol{z}}_{i,d}\right|^2 dxdt + \frac{\widehat{\mu}_i}{2} \int_0^T \int_{\widehat{\mathcal{O}}_i} |\widehat{\boldsymbol{v}}^{(i)}|^2 dxdt, \quad i = 1, 2, \tag{3.3}$$

$$\widetilde{\widetilde{J}}_i\left(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{\boldsymbol{v}},\widehat{u}\right)=\frac{\widetilde{\widetilde{\alpha}}_i}{2}\int_0^T\int_{\widehat{\mathcal{O}}_{i,d}}|\widehat{w}-\widehat{w}_{i,d}|^2\,dxdt+\frac{\widetilde{\widetilde{\mu}}_i}{2}\int_0^T\int_{\widehat{\mathcal{O}}_i}|\widehat{u}^{(i)}|^2dxdt,\quad i=1,2,\tag{3.4}$$

e o funcional (principal)

$$\widehat{J}\left(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g}\right)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\widehat{\mathcal{O}}}(\left|\widehat{\boldsymbol{f}}\right|^2+|\widehat{g}|^2)dxdt,\tag{3.5}$$

onde $\widehat{\boldsymbol{v}}=(\widehat{\boldsymbol{v}}^{(1)},\widehat{\boldsymbol{v}}^{(2)})$, $\widehat{u}=(\widehat{u}^{(1)},\widehat{u}^{(2)})$, $\widehat{\alpha}_i,\widetilde{\widetilde{\alpha}}_i>0$, $\widehat{\mu}_i,\widetilde{\widetilde{\mu}}_i>0$ são constantes, e $\widehat{\boldsymbol{z}}_{i,d}$, $\widehat{w}_{i,d}$ são funções dadas em $L^2(\widehat{\mathcal{O}}_{i,d}\times(0,T))$.

Observação 3.1 *Da regularidade e unicidade da solução $(\widehat{\boldsymbol{z}},\widehat{w})$ de (3.1) (vide observação 3.2) os funcionais custos $\widehat{J}_i$, $\widetilde{\widetilde{J}}_i$ e $\widehat{J}$ estão bem definidos.*

Os seguidores $\widehat{\boldsymbol{v}}^{(i)}$, $\widehat{u}^{(i)}$ $(i=1,2)$ assumem que os líderes $\widehat{\boldsymbol{f}}$ e $\widehat{g}$ têm feito escolhas em suas estratégias (políticas) e eles, respectivamente, tentam encontrar um equilíbrio de Nash para seus custos $\widehat{J}_i$ e $\widetilde{\widetilde{J}}_i$ $(i=1,2)$, isto é, eles procuram controles $\widehat{\boldsymbol{v}}^{(i)}$, $\widehat{u}^{(i)}$ $(i=1,2)$, dependendo de $\widehat{\boldsymbol{f}}$ e $\widehat{g}$, tais que

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{J}_1(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{\boldsymbol{v}},\widehat{u})=\min\limits_{\widetilde{\widehat{\boldsymbol{v}}}^{(1)}}\widehat{J}_1(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widetilde{\widehat{\boldsymbol{v}}}^{(1)},\widehat{\boldsymbol{v}}^{(2)},\widehat{u})\\ \widehat{J}_2\left(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{v},\widehat{u}\right)=\min\limits_{\widetilde{\widehat{\boldsymbol{v}}}^{(2)}}\widehat{J}_2(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{v}^{(1)},\widetilde{\widehat{\boldsymbol{v}}}^{(2)},\widehat{u})\end{array}\right.\tag{3.6}$$

e

$$\left\{\begin{array}{l}\widetilde{\widetilde{J}}_1\left(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{\boldsymbol{v}},\widehat{u}\right)=\min\limits_{\widetilde{\widehat{u}}^{(1)}}\widehat{J}_1(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{\boldsymbol{v}},\widetilde{\widehat{u}}^{(1)},\widehat{u}^{(2)})\\ \widetilde{\widetilde{J}}_2\left(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{\boldsymbol{v}},\widehat{u}\right)=\min\limits_{\widetilde{\widehat{u}}^{(2)}}\widehat{J}_2(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{\boldsymbol{v}},\widehat{u}^{(1)},\widetilde{\widehat{u}}^{(2)}).\end{array}\right.\tag{3.7}$$

O par $(\widehat{\boldsymbol{v}},\widehat{u})$ que satisfaz (3.6) and (3.7) é chamado equilíbrio de Nash.

Note que, como os funcionais $\widehat{J}_i$ e $\widetilde{\widetilde{J}}_i$ são convexos, então $(\widehat{\boldsymbol{v}},\widehat{u})$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$\left\langle\frac{\partial\widehat{J}_i}{\partial\widetilde{\widehat{\boldsymbol{v}}}^{(i)}}(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{\boldsymbol{v}}^{(1)},\widehat{\boldsymbol{v}}^{(2)},\widehat{u}),\widetilde{\widehat{\boldsymbol{v}}}^{(i)}\right\rangle=0,\quad i=1,2\tag{3.8}$$

e

$$\left\langle\frac{\partial\widetilde{\widetilde{J}}_i}{\partial\widetilde{\widehat{u}}^{(i)}}(\widehat{\boldsymbol{f}},\widehat{g};\widehat{\boldsymbol{v}},\widehat{u}^{(1)},\widehat{u}^{(2)}),\widetilde{\widehat{u}}^{(i)}\right\rangle=0,\quad i=1,2,\tag{3.9}$$

para todo $(\widetilde{\widehat{\boldsymbol{v}}}^{(i)},\widetilde{\widehat{u}}^{(i)})\in\mathbf{L}^2(\widehat{\mathcal{O}}_i\times(0,T))\times L^2(\widehat{\mathcal{O}}_i\times(0,T))$.

Após acharmos o equilíbrio de Nash para cada $(\widehat{\boldsymbol{f}}, \widehat{g})$, encontraremos um controle ótimo $(\overline{\widehat{\boldsymbol{f}}}, \overline{\widehat{g}})$ tal que

$$J(\overline{\widehat{\boldsymbol{f}}}, \overline{\widehat{g}}) = \min_{(\widehat{\boldsymbol{f}}, \widehat{g})} J\left(\widehat{\boldsymbol{f}}, \widehat{g}\right), \tag{3.10}$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada do tipo

$$(\widehat{\boldsymbol{z}}(\cdot, T, \widehat{\boldsymbol{f}}, \widehat{g}, \widehat{\boldsymbol{v}}, \widehat{u}), \widehat{w}(\cdot, T, \widehat{\boldsymbol{f}}, \widehat{g}, \widehat{\boldsymbol{v}}, \widehat{u})) \in B_{\mathbf{L}^2(\Omega_t)}(\widehat{\boldsymbol{z}}^T, \epsilon) \times B_{L^2(\Omega_t)}(\widehat{w}^T, \epsilon), \tag{3.11}$$

onde $B_X(C, \epsilon)$ denota a bola em X com centro C e raio ϵ.

A metodologia consiste numa mudança da equação não-cilíndrica (3.1) em uma equação cilíndrica (3.17) pelo difeomorfismo τ. Sua inversa é dada por

$$\tau^{-1} : \widehat{Q} \to Q \text{ tal que } (x,t) \in \widehat{Q} \to (y,t) \in Q, \quad \text{com} \quad y = K^{-1}(t)x.$$

Seja

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{\boldsymbol{z}}(x,t) = \boldsymbol{z}(K^{-1}(t)x, t) \\ \widehat{w}(x,t) = w(K^{-1}(t)x, t) \\ \widehat{p}(x,t) = p(K^{-1}(t)x, t). \end{array} \right. \tag{3.12}$$

De (3.12) e usando as notações

$$K(t) = k(t)M = (\alpha_{ij}(t)), \quad K^{-1}(t) = \frac{1}{k(t)}M^{-1} = (\beta_{ij}(t)).$$

$$x = K(t)y, \quad y = K^{-1}(t)x$$

$$x_r = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{rj}(t)y_j, \quad y_l = \sum_{r=1}^{2} \beta_{lr}(t)x_r,$$

obtemos as seguintes identidades

$$\frac{\partial y_l}{\partial t} = \sum_{r,j=1}^{2} \beta'_{lr}(t)\alpha_{rj}(t)y_j \text{ e } \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \beta_{lj}(t).$$

Então,

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{z}}_i}{\partial t}(x,t) = \sum_{j,l,r=1}^{2} \beta'_{lr}(t)\alpha_{rj}(t)y_j \frac{\partial \boldsymbol{z}_i}{\partial y_l}(y,t) + \frac{\partial \boldsymbol{z}_i}{\partial t}(y,t). \tag{3.13}$$

Por (3.13) , temos

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{z}}}{\partial t}(x,t) = -yK'(t)K^{-1}(t)\nabla \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}_t, \tag{3.14}$$

pois $K(t).(K'(t))' = -k'(t)k^{-1}(t)$. Como $\dfrac{\partial y_l}{\partial x_j} = \beta_{lj}(t)$, obtemos

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{z}}_i}{\partial x_j}(x,t) = \sum_{l=1}^{2} \beta_{lj}(t) \frac{\partial \boldsymbol{z}_i}{\partial y_l}(y,t), \tag{3.15}$$

que implica

$$\frac{\partial^2 \widehat{\boldsymbol{z}}_i}{\partial x_j^2}(x,t) = \sum_{l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t) \frac{\partial^2 \boldsymbol{z}_i}{\partial y_l \partial y_r}(y,t).$$

Assim,

$$\Delta \widehat{\boldsymbol{z}}_i(x,t) = \sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t) \frac{\partial^2 \boldsymbol{z}_i}{\partial y_l \partial y_r}(y,t), \tag{3.16}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{k(t)} \nabla \cdot (M^{-1} \boldsymbol{z}^T).$$

Além disso,

$$\left(\widehat{\boldsymbol{h}}.\nabla\right) \widehat{\boldsymbol{z}} = (\boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T) \cdot \nabla)\boldsymbol{z}, \;\; (\widehat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla)\, \widehat{\boldsymbol{h}} = (\boldsymbol{z}(K^{-1}(t))^T).\nabla)\boldsymbol{h}$$

$$\nabla \widehat{p} = \nabla p(y,t) K^{-1}(t), \;\; \nabla \times \widehat{\boldsymbol{w}} = \overline{K^{-1}(t)} \nabla \times \boldsymbol{w},$$

onde $\overline{K^{-1}(t)}$ é o cofator da matriz $K^{-1}(t)$.

Também,

$$\left|\begin{array}{l}
\widehat{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}} = \boldsymbol{f} \boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O} \times [0,T]} \\
\widehat{\boldsymbol{v}}^{(1)} \boldsymbol{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_1} = \boldsymbol{v}^{(1)} \boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_1 \times [0,T]} \\
\dfrac{\partial \widehat{w}}{\partial t}(x,t) = -yK'(t)K^{-1}(t)\nabla w + w_t \\
\Delta \widehat{w}(x,t) = \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\
\widehat{\boldsymbol{h}} \cdot \nabla \widehat{w} = \boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T \cdot \nabla w \\
\widehat{w} \cdot \nabla \widehat{\boldsymbol{\theta}} = z(K^{-1}(t))^T \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \\
\nabla \times \widehat{\boldsymbol{z}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \beta_{ii} \nabla \times \boldsymbol{z} + \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{j+1} \beta_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{z}_i}{\partial y_{3-j}}.
\end{array}\right.$$

Portanto a mudança de variáveis (3.12), transforma o problema de valor inicial de fronteira (3.1) no sistema equivalente:

$$
\left|\begin{array}{l}
\boldsymbol{z}_t - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{z} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 \boldsymbol{z}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) + ((\boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{z} \\
+(\boldsymbol{z}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{h} + \nabla p(y,t)K^{-1}(t) = \overline{K^{-1}(t)}\nabla\times w + \boldsymbol{f}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}\times[0,T]} \\
+\boldsymbol{v}^{(1)}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_1\times[0,T]} + \boldsymbol{v}^{(2)}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_2\times[0,T]} \quad \text{em} \quad Q \\
w_t - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla w - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) + \boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla w \\
+\boldsymbol{z}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\boldsymbol{\theta} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}\nabla\times\boldsymbol{z} + \sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{z}_i}{\partial y_{3-j}} \\
+g\chi_{\mathcal{O}\times[0,T]} + u^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_1\times[0,T]} + u^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_2\times[0,T]} \quad \text{em} \quad Q \\
\nabla\cdot(M^{-1}\boldsymbol{z}^T) = 0 \quad \text{em} \quad Q \\
\boldsymbol{z} = 0, \;\; w = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\
\boldsymbol{z}(y,0) = \boldsymbol{z}_0(y), \quad w(y,0) = w_0(y) \quad \text{em} \quad \Omega,
\end{array}\right. \tag{3.17}
$$

onde $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\theta})$ pertence a classe

$$
\begin{cases}
(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\theta}) \in \mathbf{L}^\infty(Q)\times L^\infty(Q), \\
(\boldsymbol{h}_t,\boldsymbol{\theta}_t) \in L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))\times L^2(0,T;L^r(\Omega)) \quad \text{para algum} \quad r>1.
\end{cases} \tag{3.18}
$$

Observação 3.2 *Usando as hipóteses sobre $K(t)$, concluímos que as formas bilineares*

$$
\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\varrho}) = \sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial y_r}\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial y_l}(y,t)\,dy,
$$

$$
\alpha(z,\varrho) = \sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial y_r}\frac{\partial \varrho}{\partial y_l}(y,t)\,dy
$$

são limitadas e coercivas em $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\times\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ e em $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, respectivamente. Usando uma técnica similar em Belmiloudi [7] (Capítulo 12), podemos provar que :

Para qualquer $\left(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)},g,u^{(1)},u^{(2)}\right)\in\left(\boldsymbol{L}^2(Q)\right)^3\times\left(L^2(Q)\right)^3$ e qualquer $(\boldsymbol{z}_0,w_0)\in \boldsymbol{H}\times L^2(\Omega)$, o sistema (3.17) possui uma única solução $(\boldsymbol{z},w)$ na classe

$$
(\boldsymbol{z},w)\in\left(\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{H})\cap\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V})\right)\times\left(L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)\right),
$$

$$
\mathbf{V} = \left\{\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}=0 \text{ em } \Omega\right\},\ \mathbf{H} = \left\{\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{L}^2(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}=0 \text{ em } \Omega,\ \boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\nu}=0 \text{ sobre } \Gamma\right\}.
$$

Usando o difeomorfismo $(y,t)\to(x,t)$, de Q em $\widehat{Q}$, obtemos uma única solução $(\widehat{\boldsymbol{z}},\widehat{w})$

para o problema (3.1) com regularidade

$$(\widehat{\boldsymbol{z}}, \widehat{w}) \in \left(\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{H}_t) \cap \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V}_t)\right) \times \left(L^\infty(0,T;H_t) \cap L^2(0,T;V_t)\right).$$

Funcionais Custos em $\boldsymbol{Q}$. Do difeomorfismo τ^{-1} que transforma $\widehat{Q}$ em Q, transformamos os funcionais custos $\widehat{J}_i$, $\widehat{\widetilde{J}}_i$ e $\widehat{J}$ nos funcionais custos J_i, $\widetilde{J}_i$ and J definidos por

$$\begin{aligned} J_i(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}, u) &= \frac{\alpha_i}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_{i,d}} |\det K(t)|\, |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{i,d}|^2\, dydt \\ &+ \frac{\mu_i}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |\det K(t)| |\boldsymbol{v}^{(i)}|^2 dydt, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_i(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}, u) &= \frac{\widetilde{\alpha}_i}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_{i,d}} |\det K(t)|\, |w - w_{i,d}|^2\, dydt \\ &+ \frac{\widetilde{\mu}_i}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |\det K(t)| |u^{(i)}|^2 dydt, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$J(\boldsymbol{f}, g) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\det K(t)|(|\boldsymbol{f}|^2 + |g|^2) dydt, \tag{3.21}$$

onde $\boldsymbol{z}_{i,d}$, $w_{i,d}$ são as imagens de $\widehat{\boldsymbol{z}}_{i,d}$ e $\widehat{w}_{i,d}$ pelo difeomorfismo τ^{-1}, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)})$, $u = (u^{(1)}, u^{(2)})$, $\mathcal{O}_{1,d}$, $\mathcal{O}_{2,d}$ são as tranformações de $\widehat{\mathcal{O}}_{1,d}$, $\widehat{\mathcal{O}}_{2,d}$ pela deformação τ^{-1}, e $\alpha_i, \widetilde{\alpha}_i, \mu_i, \widetilde{\mu}_i > 0$ são constantes positivas.

Observação 3.3 *Da regularidade e unicidade da solução $(\boldsymbol{z}, w)$ de (3.17), os funcionais J_i, $\widetilde{J}_i$ e J estão bem definidos.*

O equilíbrio de Nash para os custos J_i e $\widetilde{J}_i$ $(i = 1, 2)$ é o par $(\boldsymbol{v}, u)$, que depende de $\boldsymbol{f}$ and g, solução de

$$\begin{cases} J_1(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}, u) = \min\limits_{\overline{\boldsymbol{v}}^{(1)}} J_1(\boldsymbol{f}, g; \overline{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, u), \\ J_2(\boldsymbol{f}, g; v, u) = \min\limits_{\overline{\boldsymbol{v}}^{(2)}} J_2(\boldsymbol{f}, g; v^{(1)}, \overline{\boldsymbol{v}}^{(2)}, u) \end{cases} \tag{3.22}$$

e

$$\begin{cases} \widetilde{J}_1(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}, u) = \min\limits_{\overline{u}^{(1)}} J_1(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}, \overline{u}^{(1)}, u^{(2)}), \\ \widetilde{J}_2(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}, u) = \min\limits_{\overline{u}^{(2)}} J_2(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}, u^{(1)}, \overline{u}^{(2)}). \end{cases} \tag{3.23}$$

Observação 3.4 *Como os funcionais J_i e $\widetilde{J}_i$ são convexos e semi-contínuos inferiormente, então $(\boldsymbol{v}, u)$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais custos J_i e $\widetilde{J}_i$ se, e somente se, verificam a equação de Euler-Lagrange (vide Seção 3.3), isto é,*

$$\left\langle \frac{\partial J_i}{\partial \overline{\boldsymbol{v}}^{(i)}}(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, u), \overline{\boldsymbol{v}}^{(i)} \right\rangle = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.24}$$

e

$$\left\langle \frac{\partial \widetilde{J}_i}{\partial \overline{u}^{(i)}}(\boldsymbol{f}, g; \boldsymbol{v}, u^{(1)}, u^{(2)}), \overline{u}^{(i)} \right\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3.25}$$

para todo $(\overline{\boldsymbol{v}}^{(i)}, \overline{u}^{(i)}) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)) \times L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$, onde a derivada acima é no sentido de Gateaux.

Notemos que se $(\boldsymbol{v}, u)$ é o único equilíbrio de Nash , dependendo de $\boldsymbol{f}$ and g, para (3.19) e (3.20), então sua transformação , por τ^{-1}, é o único equilíbrio de Nash $(\widehat{\boldsymbol{v}}, \widehat{u})$ para (3.3) e (3.4), que depende de $\widehat{\boldsymbol{f}}$ e $\widehat{g}$.

Lembremos que nosso problema inicial eram os controles $\widehat{\boldsymbol{f}}$, $\widehat{g}$, $\widehat{\boldsymbol{v}}^{(1)}$, $\widehat{\boldsymbol{v}}^{(2)}$, $\widehat{u}^{(1)}$, $\widehat{u}^{(2)}$ atuarem tal que a função $(\widehat{\boldsymbol{z}}, \widehat{w})$, única solução de (3.1), atinja em um tempo T, o estado ideal $(\widehat{\boldsymbol{z}}^T, \widehat{w}^T) \in \mathbf{L}^2(\Omega_t) \times L^2(\Omega_t)$, com funcionais custos definidos por (3.3) e (3.4).

Do difeomorfismo τ, esse problema em $\widehat{Q}$ foi transformado num problema equivalente em Q. Assim , fixado $(\boldsymbol{z}^T, w^T) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, os controles $\boldsymbol{f}$, g, $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ deverão atuar tal que a única solução $(\boldsymbol{z}, w)$ de (3.17), avaliada em $t = T$, atinja o estado ideal $(\boldsymbol{z}^T, w^T)$. Isso será feito no sentido da controlabilidade aproximada.

De fato, é suficiente provar que se $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, dependendo de $\boldsymbol{f}$ e g, é o único equilíbrio de Nash para os funcionais custos (3.19) e (3.20), então temos a controlabilidade aproximada. Isso significa que se existe o equilíbrio de Nash e $(\boldsymbol{z}, w)$ é a única solução de (3.17), então o conjunto gerado por $(\boldsymbol{z}(\cdot, T, \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{v}, u), w(\cdot, T, \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{v}, u))$ é denso em $\mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, isto é , aproximar $(\boldsymbol{z}^T, w^T)$. Isso será provado na seção 3.4, ou seja, após acharmos o equilíbrio de Nash (na Seção 3.3) para cada $(\boldsymbol{f}, g)$, encontraremos um controle ótimo $(\overline{\boldsymbol{f}}, \overline{g})$ tal que

$$J(\overline{\boldsymbol{f}}, \overline{g}) = \min_{(\boldsymbol{f}, g)} J(\boldsymbol{f}, g), \tag{3.26}$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada do tipo

$$(\boldsymbol{z}(\cdot, T, \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{v}, u), w(\cdot, T, \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{v}, u)) \in B_{\mathbf{L}^2(\Omega)}(\boldsymbol{z}^T, \epsilon) \times B_{L^2(\Omega)}(w^T, \epsilon). \tag{3.27}$$

3.3 Equilíbrio de Nash

Nessa seção, mostraremos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash no sentido (3.22), (3.23). Definamos os espaços

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_i = \mathbf{L}^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)), \quad \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_1 \times \boldsymbol{\mathcal{H}}_2, \quad \mathcal{H}_i = L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)) \quad \text{and} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2,$$

e consideremos os operadores

$$L_i \in \mathcal{L}\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_i; \mathbf{L}^2(Q)\right) \quad \text{definido como} \quad L_i(\boldsymbol{v}^{(i)}) = \boldsymbol{z}, \quad i = 1, 2 \tag{3.28}$$

e

$$\widetilde{L}_i \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_i; L^2(Q)\right) \quad \text{definido como} \quad \widetilde{L}_i(u^{(i)}) = w, \quad i = 1, 2, \tag{3.29}$$

onde $(\boldsymbol{z}, w)$ é uma solução do seguinte sistema:

$$\left|\begin{array}{l}
\boldsymbol{z}_t^{(i)} - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{z}^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 \boldsymbol{z}^{(i)}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\
+(\boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T) \cdot \nabla)\boldsymbol{z}^{(i)} + (\boldsymbol{z}^{(i)}(K^{-1}(t))^T) \cdot \nabla)\boldsymbol{h} + \nabla p^{(i)}(y,t)K^{-1}(t) \\
= \overline{K^{-1}(t)}\nabla \times w^{(i)} + \boldsymbol{v}^{(i)}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_i \times [0,T]} \quad \text{em} \quad Q \\
w_t^{(i)} - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla w^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\
+\boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T \cdot \nabla w^{(i)} + \boldsymbol{z}^{(i)}(K^{-1}(t))^T \cdot \nabla\boldsymbol{\theta} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \beta_{ii}\nabla \times \boldsymbol{z}^{(i)} \\
+ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{j+1}\beta_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{z}_i^{(i)}}{\partial y_{3-j}} + u^{(i)}\chi_{\mathcal{O}_i \times [0,T]} \quad \text{em} \quad Q \\
\nabla \cdot (M^{-1}(\boldsymbol{z}^{(i)})^T) = 0 \quad \text{em} \quad Q \\
\boldsymbol{z}^{(i)} = 0, \quad w^{(i)} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\
\boldsymbol{z}^{(i)}(y,0) = \boldsymbol{z}_0^{(i)}(y), \quad w^{(i)}(y,0) = w_0^{(i)}(y) \quad \text{em} \quad \Omega
\end{array}\right. \tag{3.30}$$

Podemos escrever a solução $(\boldsymbol{z}, w, p)$ of (3.17) como sendo

$$(\boldsymbol{z}, w, p) = (L_1\boldsymbol{v}^{(1)} + L_2\boldsymbol{v}^{(2)} + \boldsymbol{q}, \widetilde{L}_1 u^{(1)} + \widetilde{L}_2 u^{(2)} + r, p^{(1)} + p^{(2)} + s), \tag{3.31}$$

onde $(\boldsymbol{q}, r, s)$ é solução do sistema:

$$
\left|\begin{array}{l}
\boldsymbol{q}_t - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{q} - \sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{q}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) + (\boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{q} \\
+(\boldsymbol{q}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{h} + \nabla s(y,t)K^{-1}(t) = \overline{K^{-1}(t)}\nabla\times r + \boldsymbol{f}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}\times[0,T]} \text{ em } Q \\
r_t - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla r - \sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 r}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) + \boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla r \\
+\boldsymbol{q}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}\nabla\times\boldsymbol{q} + \sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}\frac{\partial\boldsymbol{q}_i}{\partial y_{3-j}} + g\chi_{\mathcal{O}\times[0,T]} \quad \text{em} \quad Q \\
\nabla\cdot(M^{-1}\boldsymbol{q}^T) = 0 \quad \text{em} \quad Q \\
\boldsymbol{q} = 0, \quad r = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\
\boldsymbol{q}(y,0) = \boldsymbol{q}_0(y), \qquad r(y,0) = r_0(y) \quad \text{em} \quad \Omega
\end{array}\right. \tag{3.32}
$$

Podemos reescrever os funcionais definidos em (3.3) e (3.4) por

$$
\begin{aligned}
J_i(\boldsymbol{f},g;\boldsymbol{v},u) &= \frac{\alpha_i}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_{i,d}}|\det K(t)|\left|L_1\boldsymbol{v}^{(1)} + L_2\boldsymbol{v}^{(2)} - (\boldsymbol{z}_{i,d} - \boldsymbol{q})\right|^2 dydt \\
&+ \frac{\mu_i}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_i}|\det K(t)||\boldsymbol{v}^{(i)}|^2 dydt, \quad i = 1,2
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\widetilde{J}_i(\boldsymbol{f},g;\boldsymbol{v},u) &= \frac{\widetilde{\alpha}_i}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_{i,d}}|\det K(t)|\left|\widetilde{L}_1 u^{(1)} + \widetilde{L}_2 u^{(2)} - (w_{i,d} - r)\right|^2 dydt \\
&+ \frac{\widetilde{\mu}_i}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_i}|\det K(t)||u^{(i)}|^2 dydt, \quad i = 1,2.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Assim, por (3.24) e (3.25), os vetores $((\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}),(u^{(1)},u^{(2)})) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H}$ é um equilíbrio de Nash se

$$
\alpha_i(L_1\boldsymbol{v}^{(1)} + L_2\boldsymbol{v}^{(2)} - (\boldsymbol{z}_{i,d} - \boldsymbol{q}), L_i\breve{\boldsymbol{v}}^{(i)})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} + \mu_i(\boldsymbol{v}^{(i)},\breve{\boldsymbol{v}}^{(i)})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}_i} = 0, \quad i = 1,2 \tag{3.35}
$$

e

$$
\widetilde{\alpha}_i(\widetilde{L}_1 u^{(1)} + \widetilde{L}_2 u^{(2)} - (w_{i,d} - r), \widetilde{L}_i\breve{u}^{(i)})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} + \widetilde{\mu}_i(u^{(i)},\breve{u}^{(i)})_{\mathcal{H}_i} = 0, \quad i = 1,2, \tag{3.36}
$$

para todo $((\breve{\boldsymbol{v}}^{(1)},\breve{\boldsymbol{v}}^{(2)}),(\breve{u}^{(1)},\breve{u}^{(2)})) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H}$. Consequentemente,

$$
\alpha_i(L_i^*[L_1\boldsymbol{v}^{(1)} + L_2\boldsymbol{v}^{(2)} - (\boldsymbol{z}_{i,d} - \boldsymbol{q})], \breve{\boldsymbol{v}}^{(i)})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} + \mu_i(\boldsymbol{v}^{(i)},\breve{\boldsymbol{v}}^{(i)})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}_i} = 0, \quad i = 1,2 \tag{3.37}
$$

e

$$
\widetilde{\alpha}_i(\widetilde{L}_i^*[\widetilde{L}_1 u^{(1)} + \widetilde{L}_2 u^{(2)} - (w_{i,d} - r)], \breve{u}^{(i)})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} + \widetilde{\mu}_i(u^{(i)},\breve{u}^{(i)})_{\mathcal{H}_i} = 0, \quad i = 1,2, \tag{3.38}
$$

para todo $((\breve{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \breve{\boldsymbol{v}}^{(2)}), (\breve{u}^{(1)}, \breve{u}^{(2)})) \in \boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathcal{H}$, onde $L_i^* \in \mathcal{L}\left(\mathbf{L}^2\left(Q\right); \boldsymbol{\mathcal{H}}_i\right)$ e $\widetilde{L}_i^* \in \mathcal{L}\left(L^2\left(Q\right); \mathcal{H}_i\right)$ são, respectivamente, os operadores adjuntos de L_i e $\widetilde{L}_i$ definidos em (3.28) e (3.29).

De (3.37) e (3.38) podemos deduzir que

$$\alpha_i L_i^*[L_1\boldsymbol{v}^{(1)} + L_2\boldsymbol{v}^{(2)}]\chi_{\mathcal{O}_{i,d}} + \mu_i \boldsymbol{v}^{(i)} = \alpha_i L_i^*[(\boldsymbol{z}_{i,d} - \boldsymbol{q})\chi_{\mathcal{O}_{i,d}}] \quad \text{em} \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_i, \quad i = 1, 2$$

e

$$\widetilde{\alpha}_i \widetilde{L}_i^*[\widetilde{L}_1 u^{(1)} + \widetilde{L}_2 u^{(2)}]\chi_{\mathcal{O}_{i,d}} + \widetilde{\mu}_i u^{(i)} = \widetilde{\alpha}_i \widetilde{L}_i^*[(w_{i,d} - r)\chi_{\mathcal{O}_{i,d}}] \quad \text{em} \quad \mathcal{H}_i, \quad i = 1, 2.$$

Se considerarmos o operador $\mathbb{L} \in \mathcal{L}\left(\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathcal{H}; \boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathcal{H}\right)$ definido como

$$\begin{aligned} \mathbb{L}((\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}), (u^{(1}, u^{(2)})) = \quad & (\alpha_1 L_1^*[L_1\boldsymbol{v}^{(1)} + L_2\boldsymbol{v}^{(2)}]\chi_{\mathcal{O}_{1,d}} + \mu_1\boldsymbol{v}^{(1)}, \\ & \alpha_2 L_2^*[L_1\boldsymbol{v}^{(1)} + L_2\boldsymbol{v}^{(2)}]\chi_{\mathcal{O}_{2,d}} + \mu_2\boldsymbol{v}^{(2)}, \\ & \widetilde{\alpha}_1 \widetilde{L}_1^*[\widetilde{L}_1 u^{(1)} + \widetilde{L}_2 u^{(2)}]\chi_{\mathcal{O}_{1,d}} + \widetilde{\mu}_1 u^{(1)}, \\ & \widetilde{\alpha}_2 \widetilde{L}_2^*[\widetilde{L}_1 u^{(1)} + \widetilde{L}_2 u^{(2)}]\chi_{\mathcal{O}_{2,d}} + \widetilde{\mu}_2 u^{(2)}), \end{aligned}$$

então, $\Xi = ((\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}), (u^{(1)}, u^{(2)})) \in \boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathcal{H}$ é um equilíbrio de Nash se

$$\mathbb{L}\left(\Xi\right) = \Psi, \tag{3.39}$$

com

$$\Psi = (\alpha_1 L_1^*[(\boldsymbol{z}_{1,d} - \boldsymbol{q})\chi_{\mathcal{O}_{1,d}}, \alpha_2 L_2^*[(\boldsymbol{z}_{2,d} - \boldsymbol{q})\chi_{\mathcal{O}_{2,d}}, \widetilde{\alpha}_i \widetilde{L}_1^*[(w_{1,d} - r)\chi_{\mathcal{O}_{1,d}}, \widetilde{\alpha}_2 \widetilde{L}_2^*[(w_{2,d} - r)\chi_{\mathcal{O}_{2,d}}).$$

Assim, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1 *Suponhamos que*

$$\alpha_1\|L_2\|^2 < 4\mu_2, \quad \alpha_2\|L_1\|^2 < 4\mu_1, \quad \widetilde{\alpha}_2\|\widetilde{L}_2\|^2 < 4\widetilde{\mu}_2, \quad \widetilde{\alpha}_2\|\widetilde{L}_1\|^2 < 4\widetilde{\mu}_1, \tag{3.40}$$

onde $\|\cdot\|$ *denota a norma do operador linear correspondente. Então* $\mathbb{L}$ *é um operador invertível. Em particular, para cada* $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{L}^2\left(\mathcal{O} \times (0,T)\right) \times L^2\left(\mathcal{O} \times (0,T)\right),$ *existe um único equilíbrio de Nash* $((\boldsymbol{v}^{(1)}(\boldsymbol{f}, g), \boldsymbol{v}^{(2)}(\boldsymbol{f}, g)), (u^{(1)}(\boldsymbol{f}, g), u^{(2)}(\boldsymbol{f}, g)))$ *no sentido de (3.22) e (3.23).*

Demonstração: Observemos que

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{L}((\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}),(u^{(1},u^{(2)}))),(\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}),(u^{(1},u^{(2)})))_{\boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H}}\\
&=\mu_1\|\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+\alpha_1(\sum_{j=1}^{2}L_j\boldsymbol{v}^{(j)},L_1\boldsymbol{v}^{(1)})_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}+\mu_2\|\boldsymbol{v}^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2}\\
&+\alpha_2(\sum_{j=1}^{2}L_j\boldsymbol{v}^{(j)},L_2\boldsymbol{v}^{(2)})_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}+\widetilde{\mu}_1\|u^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+\widetilde{\alpha}_2(\sum_{j=1}^{2}\widetilde{L}_ju^{(j)},\widetilde{L}_1u^{(1)})_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}\\
&+\widetilde{\mu}_2\|u^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2}+\widetilde{\alpha}_2(\sum_{j=1}^{2}\widetilde{L}_ju^{(j)},\widetilde{L}_1u^{(2)})_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}=\mu_1\|\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+\mu_2\|\boldsymbol{v}^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2}\\
&+\alpha_1\|L_1\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}+\alpha_1(L_2\boldsymbol{v}^{(2)},L_1\boldsymbol{v}^{(1)})_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}\\
&+\alpha_2(L_1\boldsymbol{v}^{(1)},L_2\boldsymbol{v}^{(2)})_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}+\alpha_2\|L_2\boldsymbol{v}^{(2)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}+\widetilde{\mu}_1\|u^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+\widetilde{\mu}_2\|u^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2}\\
&+\widetilde{\alpha}_1\|\widetilde{L}_1u^{(1)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}+\widetilde{\alpha}_1(\widetilde{L}_2u^{(2)},\widetilde{L}_1u^{(1)})_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}+\widetilde{\alpha}_2\|\widetilde{L}_2u^{(2)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}\\
&+\widetilde{\alpha}_2(\widetilde{L}_1u^{(1)},\widetilde{L}_2u^{(2)})_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1(L_2\boldsymbol{v}^{(2)},L_1\boldsymbol{v}^{(1)})_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}\geq-\alpha_1\|L_1\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}-\frac{\alpha_1}{4}\|L_2\boldsymbol{v}^{(2)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))},\\
&\alpha_2(L_1\boldsymbol{v}^{(1)},L_2\boldsymbol{v}^{(2)})_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}\geq-\alpha_2\|L_2\boldsymbol{v}^{(2)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}-\frac{\alpha_2}{4}\|L_1\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))},\\
&\widetilde{\alpha}_1(\widetilde{L}_2u^{(2)},\widetilde{L}_1u^{(1)})_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}\geq-\widetilde{\alpha}_1\|\widetilde{L}_1u^{(1)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}-\frac{\widetilde{\alpha}_1}{4}\|\widetilde{L}_2u^{(2)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}
\end{aligned}
$$

e

$$
\widetilde{\alpha}_2(\widetilde{L}_1u^{(1)},\widetilde{L}_2u^{(2)})_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}\geq-\widetilde{\alpha}_2\|\widetilde{L}_2u^{(2)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}-\frac{\widetilde{\alpha}_2}{4}\|\widetilde{L}_1u^{(1)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{L}((\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}),(u^{(1)},u^{(2)})),((\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}),(u^{(1)},u^{(2)})))_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}\\
&\geq\mu_1\|\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+\mu_2\|\boldsymbol{v}^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_1}-\frac{\alpha_1}{4}\|L_2\boldsymbol{v}^{(2)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}-\frac{\alpha_2}{4}\|L_1\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}\\
&+\widetilde{\mu}_1\|u^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+\widetilde{\mu}_2\|u^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2}-\frac{\widetilde{\alpha}_1}{4}\|\widetilde{L}_2u^{(2)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}-\frac{\widetilde{\alpha}_2}{4}\|\widetilde{L}_1u^{(1)}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}\\
&\geq(\mu_1-\frac{\alpha_2}{4}\|L_1\|^2)\|\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+(\mu_2-\frac{\alpha_1}{4}\|L_2\|^2)\|\boldsymbol{v}^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2}\\
&+(\widetilde{\mu}_1-\frac{\widetilde{\alpha}_2}{4}\|\widetilde{L}_1\|^2)\|u^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+(\widetilde{\mu}_2-\frac{\widetilde{\alpha}_1}{4}\|\widetilde{L}_2\|^2)\|u^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2}\\
&\geq\gamma(\|\boldsymbol{v}^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+\|v^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2}+\|u^{(1)}\|^2_{\mathcal{H}_1}+\|u^{(2)}\|^2_{\mathcal{H}_2})\\
&=\gamma\|((\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}),(u^{(1)},u^{(2)}))\|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}},
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

onde $\gamma = \min\{\mu_1 - \frac{\alpha_2}{4}\|L_1\|^2, \mu_2 - \frac{\alpha_1}{4}\|L_2\|^2, \widetilde{\mu}_1 - \frac{\widetilde{\alpha}_2}{4}\|\widetilde{L}_1\|^2, \widetilde{\mu}_2 - \frac{\widetilde{\alpha}_1}{4}\|\widetilde{L}_2\|^2\} > 0$, (vide (3.40)).

Agora, definamos o funcional $a : (\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathcal{H}) \times (\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ por

$$
\begin{aligned}
&a((\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}), (u^{(1)}, u^{(2)})), (\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \breve{\boldsymbol{v}}^{(2)}), (\widetilde{u}^{(1)}, \widetilde{u}^{(2)})) \\
&= (\mathbb{L}((\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}), (u^{(1)}, u^{(2)})), ((\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \breve{\boldsymbol{v}}^{(2)}), (\widetilde{u}^{(1)}, \widetilde{u}^{(2)}))_{\boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Obviamente, da definição do operador $\mathbb{L}$ e da desigualdade (3.41), $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Consequentemente, pelo teorema de Lax-Milgram, implica que para todo $\varphi \in (\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathcal{H})'$ vale

$$
a(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \langle \varphi, \widetilde{y} \rangle_{(\boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H})'\times(\boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H})}, \ \forall \widetilde{y} \in \boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathcal{H}, \tag{3.42}
$$

com $\widetilde{x} = ((\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}), (u^{(1)}, u^{(2)}))$ e $\widetilde{y} = ((\widetilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \widetilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}), (\widetilde{u}^{(1)}, \widetilde{u}^{(2)}))$. Por outro lado, como

$$
\langle \varphi, \widetilde{y} \rangle_{(\boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H})'\times(\boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H})} = (\mathbb{L}\widetilde{x}, \widetilde{y})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathcal{H}},
$$

a prova da proposição 3.1 está completa. □

Em seguida, para efeitos de completude de nossa exposição, obtemos a caracterização do equilíbrio de Nash (obtido na proposição 3.1) em termos de solução do sistema adjunto. Observemos que a caracterização (3.24), (3.25) do equilíbrio de Nash pode ser escrito como segue: $(\boldsymbol{v}, u) = ((\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}), (u^{(1)}, u^{(2)}))$ é um equilíbrio de Nash se

$$
\begin{cases}
\alpha_i(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{i,\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{(i)})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} + \mu_i(\boldsymbol{v}^{(i)}, \breve{\boldsymbol{v}}^{(i)})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}_i} = 0, \quad \mathrm{i} = 1, 2, \\
\widetilde{\alpha}_i(w - w_{i,\alpha}, \gamma^{(i)})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} + \widetilde{\mu}_i(u^{(i)}, \breve{u}^{(i)})_{\mathcal{H}_i} = 0, \quad \mathrm{i} = 1, 2,
\end{cases} \tag{3.43}
$$

para todo $(\breve{\boldsymbol{v}}^{(i)}, \breve{u}^{(i)}) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_i \times \mathcal{H}_i$, onde $(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \gamma^{(i)})$ (i $= 1, 2$) é a solução forte do problema

$$
\left|
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_t^{(i)} - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{\beta}^{(i)} - \sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{\beta}^{(i)}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\
&+(\overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{\beta}^{(i)} + (\boldsymbol{\beta}^{(i)}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{h}} + \nabla\overline{p}^{(i)}(y,t)K^{-1}(t) \\
&= \overline{K^{-1}(t)}\nabla\times\gamma^{(i)} + \boldsymbol{v}^{(i)}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_i\times[0,T]} \quad \text{em} \quad Q \\
&\gamma_t^{(i)} - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\gamma^{(i)} - \sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\gamma^{(i)}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) + \overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\gamma^{(i)} \\
&+\boldsymbol{\beta}^{(i)}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\overline{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}(t)\nabla\times\boldsymbol{\beta}^{(i)} + \sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}(t)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}_i^{(i)}}{\partial y_{3-j}} \\
&+u^{(i)}\chi_{\mathcal{O}_i\times[0,T]} \quad \text{em} \quad Q \\
&\nabla\cdot(M^{-1}(\boldsymbol{\beta}^{(i)})^T) = 0 \quad \text{em} \quad Q \\
&\boldsymbol{\beta}^{(i)} = 0, \quad \gamma^{(i)} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\
&\boldsymbol{\beta}^{(i)}(0) = 0, \quad \gamma^{(i)}(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega,
\end{aligned}
\right. \tag{3.44}
$$

com $(\overline{\boldsymbol{h}}, \overline{\theta})$ na classe (3.18).

Para expressarmos (3.43) de forma conveniente, introduzamos estados adjuntos $(\boldsymbol{q}^{(i)}, r^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ como soluções do problema:

$$
\left|\begin{array}{l}
-\boldsymbol{q}_t^{(i)} + yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{q}^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{q}^{(i)}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) \\
-(K^{-1}(t))^T)D\boldsymbol{q}^{(i)}\overline{\boldsymbol{h}} + \nabla\pi^{(i)}(y,t)K^{-1}(t) = \overline{K^{-1}(t)}\nabla\times r^{(i)} \\
+\overline{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla r + \alpha_i(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{i,\alpha})\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_{i,d}} \quad \text{em} \quad Q \\
-r_t^{(i)} + yK'(t)K^{-1}(t)\nabla r^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 r^{(i)}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) \\
-\overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla r^{(i)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}(t)\nabla\times\boldsymbol{q}^{(i)} + \sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}(t)\frac{\partial\boldsymbol{q}_i^{(i)}}{\partial y_{3-j}} \\
+\widetilde{\alpha}_i(w - w_{i,\alpha})\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_{i,d}} \quad \text{em} \quad Q \\
\nabla\cdot(M^{-1}(\boldsymbol{q}^{(i)})^T) = 0 \quad \text{em} \quad Q \\
\boldsymbol{q}^{(i)} = 0, \quad r^{(i)} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\
\boldsymbol{q}^{(i)}(T) = 0, \quad r^{(i)}(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{array}\right. \tag{3.45}
$$

Aqui, $D\varphi$ significa o gradiente simétrico de φ:

$$D\varphi = \nabla\varphi + \nabla\varphi^t.$$

Multiplicando $(3.45)_1$ por $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$, $(3.45)_2$ por $\gamma^{(i)}$, e integrando por partes, obtemos

$$
\begin{cases}
\Bigg(\boldsymbol{q}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}_t^{(i)} - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{\beta}^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{\beta}^{(i)}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) \\
\quad +(\overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{\beta}^{(i)} + (\boldsymbol{\beta}^{(i)}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla\overline{\boldsymbol{h}} - \left(\overline{K^{-1}(t)}\nabla\times\gamma^{(i)}\right)\Bigg)_{\boldsymbol{L}^2(Q)} \\
\quad = \alpha_i\left(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{i,\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{(i)}\right)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} \\
\Bigg(r^{(i)}, \gamma_t^{(i)} - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\gamma^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\gamma^{(i)}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) \\
\quad +\overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\gamma^{(i)} + \boldsymbol{\beta}^{(i)}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\overline{\boldsymbol{\theta}} - \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}(t)\nabla\times\boldsymbol{\beta}^{(i)} \\
\quad - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}(t)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}_i^{(i)}}{\partial y_{3-j}}\Bigg)_{L^2(Q)} \\
\quad = \widetilde{\alpha}_i\left(w - w_{i,\alpha}, \gamma^{(i)}\right)_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}.
\end{cases} \tag{3.46}
$$

Por outro lado, multiplicando $(3.44)_1$ por $\boldsymbol{q}^{(i)}$ e $(3.44)_2$ por $r^{(i)}$, segue que

$$\begin{cases} \Bigg(\boldsymbol{q}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}_t^{(i)} - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{\beta}^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{\beta}^{(i)}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\ +(\overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{\beta}^{(i)} +(\boldsymbol{\beta}^{(i)}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla\overline{\boldsymbol{h}} - \left(\overline{K^{-1}(t)}\nabla\times\gamma^{(i)}\right)\Bigg)_{\boldsymbol{L}^2(Q)} \\ = \left(\boldsymbol{q}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(i)}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{H}}_i} \\ \Bigg(r^{(i)}, \gamma_t^{(i)} - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\gamma^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\delta^{(i)}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) \\ +\overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\gamma^{(i)} + \boldsymbol{\beta}^{(i)}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\overline{\boldsymbol{\theta}} - \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}(t)\nabla\times\boldsymbol{\beta}^{(i)} \\ -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}(t)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}_i^{(i)}}{\partial y_{3-j}}\Bigg)_{L^2(Q)} \\ = \left(r^{(i)}, u^{(i)}\right)_{\mathcal{H}_i}. \end{cases} \tag{3.47}$$

Portanto, de(3.46) e (3.47), obtemos

$$\begin{cases} \alpha_i(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{i,\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{(i)})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} = (\boldsymbol{q}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(i)})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}_i}, \\ \widetilde{\alpha}_i(w - w_{i,\alpha}, \gamma^{(i)})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} = (r^{(i)}, u^{(i)})_{\mathcal{H}_i}, \end{cases} \tag{3.48}$$

para qualquer $(\boldsymbol{v}^{(i)}, u^{(i)}) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_i \times \mathcal{H}_i$.

Combinando as identidades acima e (3.43), obtemos

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}^{(i)} = -\dfrac{1}{\mu_i}\boldsymbol{q}^{(i)}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_i}, \\ u^{(i)} = -\dfrac{1}{\widetilde{\mu}_i}r^{(i)}\chi_{\mathcal{O}_i}, \end{cases} \tag{3.49}$$

com $i = 1, 2$.

Em resumo, dado $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T)) \times L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$, o par $(\boldsymbol{v}, u) = ((\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}), (u^{(1)}, u^{(2)}))$ é um equilíbrio de Nash no sentido de (3.22), (3.23) se, e somente se, vale (3.49), onde $(\boldsymbol{z}, w, \boldsymbol{q}^{(1)}, \boldsymbol{q}^{(2)}, r^{(1)}, r^{(2)})$ é a solução do sistema aclopado:

$$
\left|\begin{array}{l}
\boldsymbol{z}_t - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{z} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{z}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) + (\boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{z} \\
+(\boldsymbol{z}(K^{-1}(t))^T)\cdot\nabla)\boldsymbol{h} + \nabla p(y,t)K^{-1}(t) = \overline{K^{-1}(t)}\nabla\times w + \boldsymbol{f}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}} \\
-\dfrac{1}{\mu_1}\boldsymbol{q}^{(1)}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_1} - \dfrac{1}{\mu_2}\boldsymbol{q}^{(2)}\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_2} \quad \text{em } Q \\
w_t - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla w - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) + \boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla w \\
+\boldsymbol{z}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\boldsymbol{\theta} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}\nabla\times\boldsymbol{z} + \sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}\frac{\partial\boldsymbol{z}_i}{\partial y_{3-j}} + g\chi_{\mathcal{O}} \\
-\dfrac{1}{\widetilde{\mu}_1}r^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_1} - \dfrac{1}{\widetilde{\mu}_2}r^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_2} \quad \text{em} \quad Q \\
-\boldsymbol{q}_t^{(i)} + yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{q}^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{q}^{(i)}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) \\
-(K^{-1}(t))^T)D\boldsymbol{q}^{(i)}\overline{\boldsymbol{h}} + \nabla\pi^{(i)}(y,t)K^{-1}(t) = \overline{K^{-1}(t)}\nabla\times r^{(i)} \\
+\overline{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla r + \alpha_i(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_{i,\alpha})\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_{i,d}} \quad \text{em} \quad Q \\
-r_t^{(i)} + yK'(t)K^{-1}(t)\nabla r^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 r^{(i)}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t) \\
-\overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla r^{(i)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}(t)\nabla\times\boldsymbol{q}^{(i)} + \sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}(t)\frac{\partial\boldsymbol{q}_i^{(i)}}{\partial y_{3-j}} \\
+\widetilde{\alpha}_i(w-w_{i,\alpha})\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{O}_{i,d}} \quad \text{em} \quad Q \\
\nabla\cdot(M^{-1}\boldsymbol{z}^T) = 0, \quad \nabla\cdot(M^{-1}(\boldsymbol{q}^{(i)})^T) = 0 \quad \text{em} \quad Q \\
\boldsymbol{z} = \boldsymbol{q}^{(i)} = 0, \quad w = r^{(i)} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma \\
\boldsymbol{z}(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad \boldsymbol{q}^{(i)}(T) = 0, \quad r^{(i)}(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega
\end{array}\right. \tag{3.50}
$$

3.4 Controlabilidade Aproximada

Como temos provado a existência, unicidade e a caracterização dos seguidores $\boldsymbol{v}^{(i)}$ e $u^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, os líderes $\boldsymbol{f}$ e g querem agora que a solução $(\boldsymbol{z}, w)$ de (3.17), avaliada no tempo $t = T$, esteja o mais próximo possível de $(\boldsymbol{z}^T, w^T)$. Isso é possível se o sistema (3.17) for aproximadamente controlável.

Obtivemos o seguinte resultado de controlabilidade aproximada.

Teorema 3.1 *Suponhamos* $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))\times L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ *e sejam* $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{f}, g), u(\boldsymbol{f}, g))$

um equilíbrio de Nash no sentido de (3.22), (3.23). Então as funções

$$(\boldsymbol{z}(T), w(T)) = (\boldsymbol{z}(\cdot, T, \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{v}, u), w(\cdot, T, \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{v}, u)),$$

onde $(\boldsymbol{z}, w)$ *é solução do sistema (3.17), geram um subconjunto denso de* $\boldsymbol{H} \times L^2(\Omega)$.

Demonstração: Pela linearidade do sistema de otimalidade (3.50), podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\boldsymbol{z}_{i,d} = 0 \quad \text{and} \quad w_{i,d} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Para provarmos a densidade desejada, consideremos $(\boldsymbol{\xi}, \eta) \in \boldsymbol{H} \times L^2(\Omega)$ tal que

$$(\boldsymbol{z}(T), \boldsymbol{\xi})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (w(T), \eta)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\, (\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T)). \tag{3.51}$$

Devemos mostrar que $(\boldsymbol{\xi}, \eta) = 0$. Para isso, consideremos o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}
-\boldsymbol{\varphi}_t + yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{\varphi} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\
-(K^{-1}(t))^T (D\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{h} + \nabla\pi K^{-1}(t) = \overline{K^{-1}(t)}\nabla \times \psi + \overline{K^{-1}(t)}\boldsymbol{\theta}\nabla\psi \\
+\alpha_1 \boldsymbol{\beta}^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_{1,d}} + \alpha_2 \boldsymbol{\beta}^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_{2,d}} \ \text{ em } \ Q, \\
-\psi_t + yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\psi - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\
-\boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T \cdot \nabla\psi = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \beta_{ii}\nabla \times \boldsymbol{\varphi} - \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{j+1}\beta_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial y_{3-j}} \\
+\widetilde{\alpha}_1 \gamma^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_{1,d}} + \widetilde{\alpha}_2 \gamma^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_{2,d}} \ \text{ em } \ Q, \\
\boldsymbol{\beta}^{(i)}_t - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{\beta}^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 \boldsymbol{\beta}^{(i)}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\
+(\overline{h}(K^{-1}(t)^T.\nabla))\boldsymbol{\beta}^{(i)} + (\boldsymbol{\beta}^{(i)}(K^{-1}(t)^T) \cdot \nabla)\overline{h} + \nabla\overline{p}^{(i)}(y,t)K^{-1}(t) \\
-\overline{K^{-1}(t)}\nabla \times \gamma^{(i)} = -\dfrac{1}{\mu_i}\boldsymbol{\varphi}\chi_{\mathcal{O}_i} \ \text{ em } \ Q, \\
\gamma^{(i)}_t - yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\gamma^{(i)} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2 \gamma^{(i)}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) \\
+\overline{\boldsymbol{h}}(K^{-1}(t))^T \cdot \nabla\gamma^{(i)} + \boldsymbol{\beta}^{(i)}(K^{-1}(t))^T \cdot \nabla\overline{\boldsymbol{\theta}} - \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \beta_{ii}(t)\nabla \times \boldsymbol{\beta}^{(i)} \\
-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{j+1}\beta_{ij}(t)\frac{\partial \boldsymbol{\beta}^{(i)}_i}{\partial y_{3-j}} = -\frac{1}{\tilde{\mu}_i}\psi\chi_{\mathcal{O}_i} \ \text{ em } \ Q, \\
\nabla \cdot (M^{-1}\boldsymbol{\varphi}^T) = 0, \quad \nabla \cdot (M^{-1}(\boldsymbol{\beta}^{(i)})^T) = 0 \ \text{ em } \ Q, \\
\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\beta}^{(i)} = 0, \quad \psi = \gamma^{(i)} = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\
\boldsymbol{\varphi}(T) = \boldsymbol{\xi}, \quad \psi(T) = \eta, \quad \boldsymbol{\beta}^{(i)}(0) = 0, \quad \gamma^{(i)}(0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega.
\end{array}\right. \tag{3.52}$$

Multiplicamos $(3.52)_1$ por $\boldsymbol{z}$, $(3.52)_2$ por w, $(3.52)_3$ por $\boldsymbol{q}$ e $(3.52)_4$ por r, onde $(\boldsymbol{z}, w, \boldsymbol{q}, r)$ é solução de (3.50) (com $(z_{i,d}, w_{i,d}) = 0$, $i = 1, 2$), e integramos os resultados obtidos em Q, para obtermos

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{f}\chi_{\mathcal{O}} - \dfrac{1}{\mu_1}\boldsymbol{q}^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_1} - \dfrac{1}{\mu_2}\boldsymbol{q}^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_2})_{\mathbf{L}^2(Q)} - (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}(T))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ = (\alpha_1\boldsymbol{\beta}^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_{1,d}} + \alpha_2\boldsymbol{\beta}^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_{2,d}}, \boldsymbol{z})_{\mathbf{L}^2(Q)}, \\ (\psi, g\chi_{\mathcal{O}} - \dfrac{1}{\widetilde{\mu}_1}z^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_1} - \dfrac{1}{\widetilde{\mu}_2}z^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_2})_{L^2(Q)} - (\eta, w(T))_{L^2(\Omega)} \\ = (\widetilde{\alpha}_1\gamma^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_{1,d}} + \widetilde{\alpha}_2\gamma^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_{2,d}}, w)_{L^2(Q)} \end{cases} \tag{3.53}$$

e

$$\begin{cases} (-\dfrac{1}{\mu_i}\boldsymbol{\varphi}\chi_{\mathcal{O}_i}, \boldsymbol{q}^{(i)})_{\mathbf{L}^2(Q)} = \alpha_i(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \boldsymbol{z})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}, \quad i = 1, 2, \\ (-\dfrac{1}{\widetilde{\mu}_i}\psi\chi_{\mathcal{O}_i}, z^{(i)})_{L^2(Q)} = \widetilde{\alpha}_i(\gamma^{(i)}, w)_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}, \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.54}$$

De (3.54), temos

$$\begin{cases} (-\dfrac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\varphi}\chi_{\mathcal{O}_1}, \boldsymbol{q}^{(1)})_{\mathbf{L}^2(Q)} = \alpha_1(\boldsymbol{\beta}^{(1)}, \boldsymbol{z})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))}, \\ (-\dfrac{1}{\mu_2}\boldsymbol{\varphi}\chi_{\mathcal{O}_2}, \boldsymbol{q}^{(2)})_{\mathbf{L}^2(Q)} = \alpha_2(\boldsymbol{\beta}^{(2)}, \boldsymbol{z})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}, \\ (-\dfrac{1}{\widetilde{\mu}_1}\psi\chi_{\mathcal{O}_1}, z^{(1)})_{L^2(Q)} = \widetilde{\alpha}_1(\gamma^{(1)}, w)_{L^2(\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T))} \\ (-\dfrac{1}{\widetilde{\mu}_2}\psi\chi_{\mathcal{O}_2}, z^{(2)})_{L^2(Q)} = \widetilde{\alpha}_2(\gamma^{(2)}, w)_{L^2(\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T))}. \end{cases}$$

Somando a primeira e a segunda equação e, logo após a terceira e a quarta equação da expressão acima, obtemos

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\varphi}, -\dfrac{1}{\mu_1}\boldsymbol{q}^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_1} - \dfrac{1}{\mu_2}\boldsymbol{q}^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_2})_{\mathbf{L}^2(Q)} = (\alpha_1\boldsymbol{\beta}^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_{1,d}} + \alpha_2\boldsymbol{\beta}^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_{2,d}}, \boldsymbol{z})_{\mathbf{L}^2(Q)} \\ (\psi, -\dfrac{1}{\widetilde{\mu}_1}z^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_1} - \dfrac{1}{\widetilde{\mu}_2}z^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_2})_{L^2(Q)} = (\widetilde{\alpha}_1\gamma^{(1)}\chi_{\mathcal{O}_{1,d}} + \widetilde{\alpha}_2\gamma^{(2)}\chi_{\mathcal{O}_{2,d}}, w)_{L^2(Q)} \end{cases} \tag{3.55}$$

Substituindo (3.55) em (3.53), segue que

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}(T))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{f}\chi_{\mathcal{O}})_{\mathbf{L}^2(Q)}, \quad \forall \boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T)), \\ (\eta, w(T))_{L^2(\Omega)} = (\psi, g\chi_{\mathcal{O}})_{L^2(Q)}, \quad \forall g \in L^2(\mathcal{O}\times(0,T)). \end{cases} \tag{3.56}$$

Da identidade acima e da condição (3.51), temos

$$(\boldsymbol{\varphi}, \psi) \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{O}\times(0, \mathrm{T}). \tag{3.57}$$

Segue de (3.57) juntamente da hipótese $\mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$ $(i = 1, 2)$, que o lado direito do sistema para $(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \gamma^{(i)})$ em (3.52) é nulo . Portanto,

$$(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \gamma^{(i)}) \equiv 0 \quad \text{in} \quad Q, \tag{3.58}$$

pois $(\boldsymbol{\beta}^{(i)}(0), \gamma^{(i)}(0)) = 0$. Substituindo (3.58) em (3.52), obtemos que $(\boldsymbol{\varphi}, \psi)$ é solução do seguinte sistema:

$$
\begin{cases}
-\boldsymbol{\varphi}_t + yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\boldsymbol{\varphi} - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) - (K^{-1}(t))^T(D\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{h} \\
+\nabla\pi K^{-1}(t) = \overline{K^{-1}(t)}\nabla\times\psi + \overline{K^{-1}(t)}\boldsymbol{\theta}\nabla\psi \ \text{ em } \ Q, \\
-\psi_t + yK'(t)K^{-1}(t)\nabla\psi - \displaystyle\sum_{j,l,r=1}^{2} \beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial y_l \partial y_r}(y,t) - \boldsymbol{h}(K^{-1}(t))^T\cdot\nabla\psi \\
= \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\beta_{ii}\nabla\times\boldsymbol{\varphi} - \sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{j+1}\beta_{ij}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial y_{3-j}} \quad \text{em} \quad Q, \\
\nabla\cdot(M^{-1}\boldsymbol{\varphi}^T) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\
\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{O}\times(0,T), \\
\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\
\boldsymbol{\varphi}(T) = \boldsymbol{\xi}, \quad \psi(T) = \eta \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{cases}
\tag{3.59}
$$

De (3.57), (3.59) e a condição de observabilidade provada por Fernandez-Cara e Guerrero [22] (Lemma 1, pp. 433), obtemos

$$
(\boldsymbol{\varphi}, \psi) \equiv 0 \quad \text{in} \quad Q. \tag{3.60}
$$

De fato, os coeficientes da parte principal

$$
-\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}}{\partial y_l\partial y_r}(y,t), \ \ -\sum_{j,l,r=1}^{2}\beta_{lj}(t)\beta_{rj}(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial y_l\partial y_r}(y,t)
$$

de acordo com as afirmações sobre $K(t)$ são de classe C^2.

Em particular, $(\boldsymbol{\xi}, \eta) \equiv 0$. Isso completa a prova do teorema 3.1. $\square$

Devido aos resultados obtidos na Seção 3.3, podemos tomar, para cada par $(\boldsymbol{f}, g)$, o equilíbrio de Nash $(\boldsymbol{v}, w)$ associado a solução $(\boldsymbol{z}, w)$ de (3.17). Mostraremos que existe um par de controle líder $(\overline{\boldsymbol{f}}, \overline{g})$ solução do seguinte problema:

$$
\inf_{(\boldsymbol{f},g)\in\mathcal{U}_{ad}} \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}} |\det K(t)|\big(|\boldsymbol{f}|^2 + |g|^2\big)dydt \tag{3.61}
$$

onde $\mathcal{U}_{ad}$ é o conjunto de controles admissíveis

$$
\mathcal{U}_{ad} = \{(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{L}^2\big(\mathcal{O}\times(0,T)\big)\times L^2\big(\mathcal{O}\times(0,T)\big); (\boldsymbol{z}, w) \text{ solução de (3.17) e satisfaz (3.27)}\}
$$

Para isso, consideremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *O controle líder ótimo, isto é, o controle líder que resolve o problema (3.61), é dado por* $(\overline{\boldsymbol{f}}, \overline{g}) = (\boldsymbol{\varphi}, \psi)$*, onde* $(\boldsymbol{\varphi}, \psi, \boldsymbol{\beta}^{(i)}, \gamma^{(i)})$ *é solução de (3.52).*

Demonstração: Usaremos um argumento de dualidade. Definamos o operador linear contínuo $L : \mathbf{L}^2\big(\mathcal{O} \times (0,T) \times L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ como sendo

$$L(\boldsymbol{f}, g) = \big(\boldsymbol{z}(\cdot, T; \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{v}, w), w(\cdot, T; \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{v}, w)\big)$$

e introduzamos

$$F_1(\boldsymbol{f}, g) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\det K(t)| \big(|\boldsymbol{f}|^2 + |g|^2\big) dy dt$$

e

$$F_2(\boldsymbol{\xi}, \eta) = \begin{cases} 0, \text{ se } \big(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{z}(T), \eta + w(T)\big) \in B_{\mathbf{L}^2}(\boldsymbol{z}^T, \epsilon) \times B_{L^2}(w^T, \epsilon), \\ \infty, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então, o problema (3.61) equivale a

$$\inf_{(\boldsymbol{f}, g)} \big[F_1(\boldsymbol{f}, g) + F_2(L(\boldsymbol{f}, g))\big], \tag{3.62}$$

e pelo teorema da dualidade de Fenchel - Rockfellar [45], temos

$$\inf_{(\boldsymbol{f}, g)} \big[F_1(\boldsymbol{f}, g) + F_2(L(\boldsymbol{f}, g))\big] = \inf_{(\boldsymbol{\xi}, \eta)} \big[F_1^*(L^*(\boldsymbol{\xi}, \eta)) + F_2^*(-(\boldsymbol{\xi}, \eta))\big] \tag{3.63}$$

onde $L^* : \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big) \times L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$ é a adjunta de L.
De (3.52) obtemos (3.56). Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \big(L^*(\boldsymbol{\xi}, \eta), (\boldsymbol{f}, g)\big)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} &= \big((\boldsymbol{\xi}, \eta), L(\boldsymbol{f}, g)\big)_{\mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ &= \big((\boldsymbol{\varphi}, \psi), (\boldsymbol{f}, g)\big)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} \end{aligned}$$

e, portanto

$$L^*(\boldsymbol{\xi}, \eta) = (\boldsymbol{\varphi}, \psi). \tag{3.64}$$

Como

$$F_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\det K(t)| \big(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2\big) dy dt$$

e

$$F_2^*\big(-(\boldsymbol{\xi}, \eta)\big) = \epsilon ||(\boldsymbol{\xi}, \eta)||_{\mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} - \big((\boldsymbol{\xi}, \eta), (\boldsymbol{z}^T, w^T)\big)_{\mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)},$$

então

$$\inf_{(\boldsymbol{f}, g)} \big[F_1(\boldsymbol{f}, g) + F_2(L(\boldsymbol{f}, g))\big] = -\inf_{(\boldsymbol{\xi}, \eta)} \Theta(\boldsymbol{\xi}, \eta), \tag{3.65}$$

onde o funcional $\Theta : \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\Theta(\boldsymbol{\xi}, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\det K(t)| \big(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2\big) dydt + \epsilon ||(\boldsymbol{\xi}, \eta)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}$$
$$- \big((\boldsymbol{\xi}, \eta), (\boldsymbol{z}^T, w^T)\big)_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

O funcional Θ é contínuo e estritamente convexo. Assim, para resolvermos o problema (3.65) e consequentemente (3.61), é suficiente provarmos que o funcional Θ é coercivo. Mais precisamente, mostremos que

$$\liminf_{||(\boldsymbol{\xi},\eta)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\to\infty} \frac{\Theta(\boldsymbol{\xi}, \eta)}{||(\boldsymbol{\xi}, \eta)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}} \geq \epsilon. \tag{3.66}$$

Com efeito, consideramos uma sequência $(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$||(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \to \infty, \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{3.67}$$

Denotemos por $(\boldsymbol{\varphi}_n, \psi_n, \boldsymbol{\beta}_n^{(i)}, \gamma_n^{(i)})$ a sequência correspondente da solução de (3.52).

Para $(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_n, \widehat{\eta}_n) = (\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)/||(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}$, escrevamos

$$(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n, \widehat{\psi}_n, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^{(i)}, \widehat{\gamma}_n^{(i)}) = \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_n}{||(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}}, \frac{\psi_n}{||(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}}, \boldsymbol{\beta}_n^{(i)}, \gamma_n^{(i)} \right)$$

a solução de (3.52) com $\big(\boldsymbol{\varphi}_n(T), \psi_n(T)\big) = (\widehat{\boldsymbol{\xi}}_n, \widehat{\eta}_n)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Theta(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)}{||(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}} = \\
&= \frac{||(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}}{2} \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\det K(t)| \big(|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n|^2 + |\widehat{\psi}_n|^2\big) dydt \\
&+\epsilon ||(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_n, \widehat{\eta}_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} - \big((\widehat{\boldsymbol{\xi}}_n, \widehat{\eta}_n), (\boldsymbol{z}^T, w^T)\big)_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{||(\boldsymbol{\xi}_n, \eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}}{2} \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\det K(t)| \big(|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n|^2 + |\widehat{\psi}_n|^2\big) dydt \\
&+\epsilon - \big((\widehat{\boldsymbol{\xi}}_n, \widehat{\eta}_n), (\boldsymbol{z}^T, w^T)\big)_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Analizaremos dois casos :

Caso 1: $\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\det K(t)| \big(|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n|^2 + |\widehat{\psi}_n|^2\big) dydt > 0;$

Caso 2: $\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\det K(t)| \big(|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n|^2 + |\widehat{\psi}_n|^2\big) dydt = 0.$

No primeiro caso, devido a (3.67), obtemos por (3.68) que

$$\liminf_{||(\boldsymbol{\xi}_n,\eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\to\infty} \frac{\Theta(\boldsymbol{\xi}_n,\eta_n)}{||(\boldsymbol{\xi}_n,\eta_n)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

Agora analizaremos o segundo caso. Consideremos uma subsequência (ainda denotada pelo índice n para simplificar a notação) tal que , quando $n\to\infty$,

$$\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\det K(t)|\big(|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n|^2+|\widehat{\psi}_n|^2\big)dydt \to 0 \tag{3.69}$$

e

$$(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_n,\widehat{\eta}_n)\to(\widehat{\boldsymbol{\xi}},\widehat{\eta}) \text{ fracamente em } \mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{3.70}$$

Consequentemente,

$$(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n,\widehat{\psi}_n,\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^{(i)},\widehat{\gamma}_n^{(i)})\to(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\widehat{\psi},\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)},\widehat{\gamma}^{(i)}) \text{ fracamente em } L^2\big(0,T;(\mathbf{V}\times H_0^1(\Omega))^2\big),$$

onde $(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\widehat{\psi},\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)},\widehat{\gamma}^{(i)})$ é a solução de (3.52) com $\big(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(T),\widehat{\psi}(T)\big)=\big(\widehat{\boldsymbol{\xi}},\widehat{\eta}\big)$.

De (3.69) deduzimos que

$$(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\widehat{\psi})\equiv 0 \;\text{ in }\; \mathcal{O}\times(0,T).$$

Desse modo, seguindo os mesmos argumentos para obter (3.60), temos

$$(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\widehat{\psi})\equiv 0 \text{ in } Q$$

e, portanto, $(\widehat{\boldsymbol{\xi}},\widehat{\eta})\equiv 0$. Logo, de (3.70) deduzimos

$$(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_n,\widehat{\eta}_n)\to 0 \text{ fracamente em } \mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{3.71}$$

Como uma consequência de (3.71), podemos tomar o limite em (3.68) para obtermos (3.66). Isso completa a prova. □

Bibliografia

[1] ARARUNA, F.D.; ANTUNES, G.O.; MEDEIROS, L.A. Exact controllability for the semilinear string equation in non cylindrical domains.*Control and Cybernetics*, Poland, v.33, p.237–257, 2004.

[2] ARARUNA, F.D.; CHAVES-SILVA, F.W.; ROJAS-MEDAR, M.A. Exact Controllability of Galerkin's Approximations of Micropolar Fluids.*Proc. Amer.Math. Soc.*, v.138, p. 1361–1370, 2010.

[3] ARARUNA, F.D.; MENEZES, S.B.; ROJAS-MEDAR, M.A . On the Approximate Controllability of Stackelberg-Nash Strategies for Linearized Micropolar Fluids. *System and Control Letters*. Submitted, 2012.

[4] AUBIN, J.P. *Applied Functional Analysis, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Second Edition, 2000.

[5] AUBIN, J.P. *L'analyse non Linéaire et ses Motivations Economiques*, Masson, Paris, 1984.

[6] AUBIN, J.P. Un théorème de compacité, *C.R. Acad. Sc. Paris*, v.256, p.5042–5044, 1963.

[7] BELMILOUDI, A . *Stabilization, optimal and robust control-theory and applications in biological and physical sciences*, Springer-Verlag, 2008.

[8] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2011.

[9] CALMELET-ELUHU, C.; ROSENHAUS, V . Symmetries and solution of a micropolar fluid flow through a cylinder.*Acta Mechanica* v. 147, p.59-72, 2001.

[10] DAUTRAY, R.; LIONS, J.L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Springer–Verlag, 1992.

[11] DÍAZ, J.; LIONS, J.L. On the approximate controllability of Stackelberg–Nash strategies, in: J.I. Díaz (Ed). *Ocean Circulation and Pollution Control Mathematical and Numerical Investigations*, Springer, 2005.

[12] DOUBOVA, A.; FERNÁNDEZ–CARA, E.; GONZÁLEZ–BURGOS,M; ZUAZUA, E. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient, *SIAM J. Control Optimiz*, v.41, n^o 3, p.798–819, 2002.

[13] DUPUY, D.; PANASENKO, G.P.; STAVRE, R. Asymptotic methods formicropolar fluids in a tube structure.*Math. Models Methods Appl. Sci.* , v.14 n^o 5, p. 735–758, 2004.

[14] EKELAND, I.; TEMAN, R. *Convex Analysis and Variational Problems*, Classics in Applied Mathematics 28, SIAM, 1999.

[15] ERINGEN, A.C. Micropolar theory of liquid crystals.*In: Liquid Crystaland Ordered Fluids*, p. 443-471. Plenum, New York, 1978.

[16] ERINGEN, A.C. Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, v. 16, p. 1-18, 1996.

[17] ESCOBEDO, M.; KAVIAN, O. Variational problems related to self-similar solutions of heat equation, *Nonlinear Anal.*, v.11, p.1103–1133, 1987.

[18] FABRE, C. Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, *ESAIM: COCV*, v.1, p.267–302, 1996.

[19] FABRE, C.; LEBEAU, G. Prolongemente unique des solutions de l'equation de Stokes.*Communications in Partial Differential Equations*, 21(3&4), p. 573–596, 1996.

[20] FABRE, C.; PUEL, J.–P; ZUAZUA, E. Approximate controllability of the semilinear heat equations,*Proc. Royal Soc. Edinburgh*, v. 125A, p.31–61, 1995.

[21] FERNÁNDEZ–CARA, E.; GUERRERO, S. Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability, *SIAM J. Control Optim.*, v.45, n^o 4, p.1395–1446, 2006.

[22] FERNÁNDEZ–CARA, E.; GUERRERO, S. Local exact controllability of micropolar fluids,*J. Math. Fluid. Mech.*, v.9, p. 419-453, 2007.

[23] FERNÁNDEZ–CARA, E.; ZUAZUA, E. Approximate controllability of the semi-linear heat equation involving gradient terms,*Departament of Mathematics.* Prepint 2 University of Cantabria, Spain, 1997.

[24] JESUS, I.P.; MENEZES, S.B. On the approximate controllability of Stackelberg–Nash strategies for linear heat equations in $\mathbb{R}^N$ with potentials. *Jornal of Mathematical Analysis and Applications*. Submitted 2011.

[25] JESUS, I.P.; MENEZES, S.B. Remarks on hierarchic control to the wave equation. Prepint, 2012.

[26] JESUS, I.P.; MENEZES, S.B.; ARAÚJO, G.M. On the Approximate Controllability of Stackelberg-Nash Strategies for Linearized Micropolar Fluids in Moving Domains. Prepint, 2012.

[27] LÍMACO, J.; CLARK, H.R.; MEDEIROS, L.A. Remarks on hierarchic control, *J. Math. Anal. Appl.*, v. 359, p.368–383, 2009.

[28] LÍMACO, J.; MEDEIROS, L.A. Remarks on approximate controllability in noncylindrical domains. *Eletronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, n°16, p.1–32, 2003.

[29] LIONS, J.–L. Hierarchic control, *Proc. Indian Academic Science Mathematical Science*, v. 104, n° 1, p.295–304, 1994.

[30] LIONS, J.–L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux Limites non-Linéaires,* Dunod, Paris, 1960.

[31] LIONS, J.–L. *Remarks sur la controlabilite approchee*. Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sitemas Distribuídos, Octubre 1990.

[32] LIONS, J.–L. Contrôle de Pareto de Systèmes Distribués: Le Cas d'Évolution, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Serie I, Vol. 302, pp. 413-417, 1986.

[33] LIONS, J.–L. Some Remarks on Stackelberg's Optimization. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 4, n° 4, pp. 477–487, 1994.

[34] LIONS, J.–L.; MAGENES, E. *Non–Homogenous Boundary Value Problems and Applications*, Springer–Verlag, 1972.

[35] LIONS, J.–L.; ZUAZUA,E. Contrôlabilité exacte desapproximations de Galerkin des équations de Navier-Stokes.*C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 234, Ser I, p. 1015-1021, 1997.

[36] LIONS, J.–L.; ZUAZUA,E. Exact boundary controllability of Galerkin's approximations of Navier-Stokes equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, v.4, XXVI, p. 605-621, 1998.

[37] LUKASZEWICZ, G. *Micropolar fluids, Theory and applications, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, Birkhauser Boston,Inc., Boston, MA, 1999.

[38] MEDEIROS, L.A.; LIMACO, J.; MENEZES, S.B. Vibrations of Elastic Strings (Mathematical Aspects). *Journal of Computational Analysis and Applications*, Part 1, v.4, nº 2, p.91-127; Part 2, v.4, nº 3, p.212-263, 2002.

[39] MENEZES, S.B. Approximate controllability for the semilinear heat equation in $\mathbb{R}^N$ involving gradient terms.*Comp. and Applied Mathematics*, vol. 22, nº 1, pp. 123–148, 2003.

[40] MIZOHATA, S. Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs diférentiels paraboliques. *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto* Ser. A31, p. 219–239,1958.

[41] NASH, J. Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, v.54, p.286-295, 1951.

[42] PARETO, V. *Cours d'économie politique, Rouge, Laussane*, Switzerland, 1896.

[43] PIMENTEL, S.G. Controlabilidade aproximada para um sistema acoplado de equações semilineares do calor.*Tese de Doutorado em Matemática*, IM-UFRJ, T1101, P6445c, 2002.

[44] POPEL, A.S.; REGIRER, S.A.; USICK, P.I. A continuum model of blood flow.*Biorheology*, v. 11, p. 427-437, 1974.

[45] ROCKAFELLAR, R.T. *Convex Analysis*, Princeton UniversityPress, Princeton, N. J., 1969.

[46] SAUT, J.C.; SHEURER, B. Unique continuation for some Evavolution Equations.*J. Differential Equations*, v.66, p.118–139, 1987.

[47] SIMON, J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*,v.4, CXLVI, p. 65-96, 1987.

[48] STACKELBERG, H. Von. *Marktform un Gleichgewicht*, Springer, Berlin, Germany, 1934.

[49] STAVRE, R. The control of the pressure for a micropolar fluid, Dedicated to Eugen Soós, Z. Angew. *Math. Phys*, v.53, nº 6, p. 912-922, 2002.

[50] YAMAGUCHI, N. Existence of global strong solution to the micropolar fluid system in a bounded domain. *Math. Meth. Appl. Sci.*, v.28, p. 1507-1526, 2005.

[51] ZEIDLER, E. *Applied Functional Analysis, Applied Mathematical Sciences* 109, Springer Verlag, 1995.

[52] ZUAZUA, E. Finite Dimensional Null Controllability for the Semilinear Heat Equation.*J. Math. Pures Appl.*, v. 76, p.237–264, 1997.