UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

PROPRIEDADES ESTOCÁSTICAS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Jobson de Queiroz Oliveira

Fortaleza
2012

Jobson de Queiroz Oliveira

PROPRIEDADES ESTOCÁSTICAS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa.

Fortaleza
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

O47p Oliveira, Jobson de Queiroz
Propriedades estocásticas em variedades riemannianas / Jobson de Queiroz Oliveira. - 2012
65 f. : enc. ; 31 cm

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.
Área de Concentração: Geometria Diferencial
Orientação: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

1. Geometria diferencial. 2. Imersões (Matemática). I. Título.

CDD 516.36

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Propriedades Estocásticas em Variedades Riemannianas

Jobson de Queiroz Oliveira

*Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se à disposição na Biblioteca de Matemática da referida Universidade.*

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 16 de abril de 2012.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
UFC
(Orientador)

Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge
UFC

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
UFC

Prof. Dr. Paolo Piccione
USP

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera
UFPB

.

Dedico este trabalho à memória de Francisco Martins da Silva e Francisco Arley Lobo de Carvalho.

.

"O rio atinge seus objetivos porque aprendeu a contornar obstáculos."
(Lao-Tsé)

Agradecimentos

Mesmo correndo o risco de parecer injusto ao eventualmente omitir algum nome, não posso deixar de expressar os meus sinceros agradecimentos às pessoas listadas abaixo.

Inicialmente gostaria de agradecer ao professor Pacelli Bessa pela paciência, confiança e excelente orientação.

Ao professor Jorge Herbert pelas observações e comentários sobre este trabalho e pela oportunidade que se abre adiante.

Aos professores Luquésio Jorge, Paolo Piccione e Pedro Hinojosa por terem aceitado o convite de participar da banca examinadora.

Aos meus professores no Doutorado, em especial à professora Fernanda Camargo e ao professor Antnio Caminha pelas excelentes aulas e pela amizade.

Aos meus amigos em Quixadá: Alcântara, Alisson, Ana Paula, Carlos, Clébio Jr., Elisângelo, José Antônio, Lindauria, Miguel, Pedro Paulo, Roberta e Zaqueu.

Aos amigos da UFC: Alisson Pessoa, Damio, David Carneiro, Flvio, Jonatan, Michel e Nazareno.

Aos amigos Cícero, Carpegiani, Darlan, Feliciano, Marcelo, Silvana e Tony, que tanto me ajudaram nesses anos de UFC. Ao Jânio pela amizade, excelentes conversas e pela ajuda com as correções em inglês do artigo.

Gostaria de expressar um agradecimento especial à Cristiane Brandão, Cris, que além de ser uma amiga de todas as horas e parceira no artigo que deu origem a primeira parte desta Tese, tem sido também um porto seguro em tempos de dificuldade. A ela eu dedico este trabalho.

A Andrea Costa Dantas pela eficiência.

A CAPES e ao Cnpq pelo apoio financeiro, sem o qual esta jornada não teria sido possível.

RESUMO

Esta Tese teve dois objetos de estudo: Propriedades Estocásticas em uma variedade Riemananniana, a saber, Completude Estocástica, Parabolicidade e propriedade Feller, e a geoemtria do tensor de Bakry-Emery. Na primeira parte da tese estudamos tais propriedades estocásticas no contexto de submersões Riemannianas e imersões isométricas, tendo como ponto de partida o trabalho de Pigola e Setti [28] sobre a propriedade Feller. No nosso primeiro resultado, provamos que se uma imersão isométrica em uma variedade Cartan-Hadamard possui vetor curvatura média com norma limitada ento a imersão é Feller. Um análogo desse resultado já era conhecido para o caso de completude estocástica [30]. Em seguida estabelecemos condições necessárias e suficientes para que uma submersão seja estocasticamente completa (respec. parabólica), a saber, se uma submersão Riemanniana tem fibra mínima e o espaço total é estocasticamente completo (respec. parabólico) então a base é estocasticamente completa (respec. parabólica). Reciprocamente, se a submersão Riemanniana tem fibra mínima e compacta e a base é estocasticamente completa (respec. parabólica) então o espaço total é estocasticamente completo (respec. parabólico). Finalmente provamos que uma submersão Riemanniana tem fibra mínima e compacta então o espaço total é Feller se, e somente se, a base é Feller.

Na segunda parte desta Tese estudamos o tensor de Bakry-Emery Ricci, $\mathrm{Ric_f}$, que é uma extensão, no caso de variedades ponderadas, do tensor de Ricci. Estudamos a seguinte situação: $\mathrm{Ric_f} \geq -cG$, onde c é uma constante positiva e $G \geq 0$ é uma função suave. Esta limitação nos permitiu obter algumas consequencias geométricas e topológicas, que passamos a descrever.

Seja M_f uma variedade Riemanniana ponderada e $p_0 \in M_f$ fixado. Nosso primeiro resultado é uma estimativa superior, fora da bola geodésica de raio r_0, para o Laplaciano ponderado da função distância r ao ponto p_0, m_f, em termos da integral da função G. A primeira consequência dessa estimativa é uma estimativa para o volume ponderado $\mathrm{Vol_f(B(R))}$ de uma bola geodésica de raio R em termos da integral da função G. A estimativa de m_f, juntamente com a hipótese de f ser radial e $\partial_r f \geq -a, a \geq 0$ (ou $|f| \leq k$) também nos permite demonstrar um teorema de comparação entre m_f e m_{aG}, Laplaciano da função distância no modelo de curvatura aG, bem como um teorema de comparação entre o volume ponderado de uma bola geodésica de raio R em M_f, $\mathrm{Vol_f(B(R))}$, e o volume da bola geodésica de raio R no modelo M_{aG}, de curvatura aG.

Utilizando uma versão ponderada da fórmula de Bochner provamos que, se $\mathrm{Ric_f} \geq G'$ então M_f satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau, onde G é uma função suave, positiva, não decrescente e tal que G^{-1} não é integrável. Em particular concluímos que M_f é estocasticamente completa.

O próximo resultado que obtivemos estende, para o tensor $\mathrm{Ric_f}$, um teorema de Myers devido a Ambrose [1]. Para tanto, uma hipótese sobre a função f foi necessária. Como aplicação, estendemos um resultado de compacidade de Ricci solitons de Fernandez-Lopes e Garcia-Rio [15].

Em 1976, Yau [36] provou uma estimativa para o gradiente de uma função u, positiva, harmônica em $B(2R)$, no caso de M ser completa e $\mathrm{Ric} \geq -k, k \geq 0$. Tal estimativa depende apenas de R e k e foi estendida, no caso ponderado, para funções f-harmônicas positivas, supondo $\mathrm{Ric_f} \geq -k$ e $\mathrm{Ric} \geq -H$, $k, H \geq 0$. Brighton [9] obteve estimativas para o gradiente de uma função f-harmônica positiva utilizando somente a hipótese $\mathrm{Ric_f} \geq -k$. As estimativas que obtive-

mos estendem as estimativas citas acima e, no caso em que $f = G = 0$ resultam na estimativa original de Yau.

Finalmente, provamos um teorema de comparação entre o primeiro autovalor de Dirichlet da bola geodésica de raio R em M_f e o primeiro autovalor de Dirichlet da bola geodésica de raio R em M_G. Tal resultado estende, para o caso ponderado, um resultado de Bessa e Montenegro [4]

ABSTRACT

In this thesis we studied two objects: stochastic properties in Riemannian manifolds, more precisely stochastic completeness, parabolicity and the Feller property and geometric properties of Bakry Emery Ricci tensor.First, we studied such stochastic properties on Riemannian submersions and isometric immersions. The initial motivation was the work of Pigola and Setti [30] about the Feller property. In our first result, we proved that if a isometric immersion on a Cartan-Hadamard manifold has bounded mean curvature vector then the immersion is Feller. An analogous result was know for stochastic completeness. After, we stabilish necessary and sufficient conditions to a Riemannian submersion be stochastically complete (parabolic). More precisely if a Riemannian submersion has minimal fiber and the total space is stochastically complete (parabolic) then the basis is also stochastically complete (parabolic). Conversely, if the Riemannian submersion has compact minimal fiber and the basis is stochastically complete (parabolic, Feller) then the total space also is. We also proved that if a Riemannian submersion has compact minimal fiber then the total space is Feller if, and only if the the basis is Feller. In the second part we studied the Bakry Emery Ricci tensor $\mathrm{Ric_f}$, wich is a natural extension of the Ricci tensor in the context of weighted manifolds. We studied the following: suppose that $\mathrm{Ric_f}$ has a lower bound $-cG$ where G is a smooth nonnegative function and c a positive constant. Such lower bound allow us to obtain some geometric and topological consequences as we describe below. Consider Mf a weighted Riemannian manifold. The first consequence is an upper estimate, outside a geodesic ball of radius r0, for the weighted Laplacian of the Riemannian distance in terms of the function G.

Let M_f be a weighted Riemannian manifold and $p_0 \in M_f$ fixed. Our first result is an upper bound, outside of a geodesic ball of radius R centered in p_0, for the weighted Laplacian os the Riemannian distance function from p_0 in terms od the function G. The first consequence of this estimate is an estimate for the weighted volume $\mathrm{Vol_f(B(R))}$ of a geodesic ball with radius R in terms of the integral of G. This estimate together the assumption of f be radial and $\partial_r f \geq -a, a \geq 0$ (or $|f| \leq k$) allow us to prove a comparison theorem for m_f e m_{aG}, the Laplacian of distance function on the Riemannian model of curvature aG, as such as a comparison theorem for the weighted volume of a geodesic ball with radius R on M_f, $\mathrm{Vol_f(B(R))}$, and the volume of the geodesic ball with radius R on the Riemannian model M_{aG}, with curvature aG.

Using a weighted version of the Bochner formula we proved that if $\mathrm{Ric_f} \geq G'$ then M_f satisfies the Omori-Yau Maximum Principle, where G is a positive, nondecreasing smooth function, such that G^{-1} does not belong to $L^1(M_f)$. In particular we conclude that M_f is stochastically complete.

The next result we proved extends, for the tensor $\mathrm{Ric_f}$, a type Myers theorem due to Ambrose [1]. For this an additional assumption on f was required. As an aplication of this result we extended a result about compacity of Ricci solitons due to Fernandez-Lopez e García-Rio [15].

In 1976, Yau [36] proved an estimate for the gradient of a positive harmonic function u, defined on $B(2R)$, when M is complete and $\mathrm{Ric} \geq -k, k \geq 0$. Such estimate depends only on R and k and was extended, to the weighted case, to f-harmonic positive functions, when $\mathrm{Ric_f} \geq -k$ and $\mathrm{Ric} \geq -H$, $k, H \geq 0$. Brighton [9] obtained estimates for the gradient of a positive f-harmonic func-

tion assuming only $\mathrm{Ric_f} \geq -k$. We obtained estimates for the case $\mathrm{Ric_f} \geq -G$ where G is a smooth nonnegative function and when $f = G = 0$ we recover the original estimate of Yau.
Finally we proved a comparison theorem between the first eigenvalue of the geodesic ball of radius r on M_f and the first eigenvalue of the geodesic ball of radius r of the model M_G. Such result extends, to the weighted case, a result due to Bessa e Montenegro [4]

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Azencott [2] iniciou o estudo da relação entre completude estocástica e propriedades geométricas em variedades Riemannianas.Lembre que M é estocasticamente completa se, para algum $\lambda > 0$, toda função λ-subharmônica positiva é constante. Ele exibiu um exemplo de uma variedade M geodesicamente completa e estocasticamente imcompleta. Em tal exemplo, a curvatura seccional K_M de M tem descrescimento rápido até $-\infty$ e é tal decrescimento que permite que M seja estocasticamente incompleta. A partir de então, uma série de trabalhos surgiu relacionando propriedades geométricas tais como limitações nas curvaturas seccional e de Ricci e crescimento do volume de bolas geodésicas com a completude estocástica e também parabolicidade. Relembre que uma variedade M é dita parabólica se toda função subharmônica limitada é constante. O estudo dessas relações levou não somente à descoberta de propriedades geométricas que implicam completude estocástica ou parabolicidade como também à criação de critérios para decidir quando uma variedade é estocasticamente completa ou parabólica como, por exemplo, o teste de Khas'minskii e teoremas de comparação via modelos Riemannianos, onde a verificação de tais propriedades em geral é mais simples. No mesmo artigo, Azencott também estudou variedades onde o semi-grupo do calor $e^{t\Delta}$ preserva o conjunto das funções contínuas que se anulam no infinito. Tais variedades são ditas Feller. Após o artigo de Azencott houve uma intensa busca por propriedades geométricas que implicassem que uma variedade é Feller, por exemplo [13], [21], [22], [24], [32], [36]. Uma grande parte dessas condições geométricas era consequencia de limitações na curvatura de Ricci. Uma abordagem bastante interessante foi feita por Pigola and Setti em [28], onde uma caracterização de soluções minimais de um problema elíptico devida a Azencott [2] foi usada de modo a obter um critério mais simples para decidir se uma variedade Riemanniana é Feller (Teorema 3.1.4), similar àqueles usados para provar a parabolicidade e a completude estocástica em variedades Riemannianas.

Em [7], G. P. Bessa, S. Pigola e A. Setti consideraram variedades Riemannianas Feller e estocasticamente completas e estudaram soluções de certas EDP's fora de um conjunto compacto, resultando em um grande número de aplicações geométricas, ver [7, Thms. 16, 18, 20, 21].

Vale lembrar que existe uma ampla gama de variedades Riemannianas que são simultâneamente Feller e estocasticamente completas. Por exemplo, os solitons de Ricci, as variedades de Cartan-Hadamard cuja curvatura seccional possui decaimento quadrático, subvariedades mínmas propriamente imersas em variedades de Cartan-Hadamard, etc.

Em nosso primeiro resultado provamos que toda subvariedade propriamente imersa com vetor curvatura média limitado de uma variedade de Cartan-Hadamard é Feller. Mais precisamente, provamos o seguinte:

Teorema 1.0.1 *Seja $\varphi\colon M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica própria de uma m-subvariedade M com vetor curvatura média H em uma n-variedade Cartan-Hadamard N . Se φ tem vetor curvatura média limitado e $\sup_M |H| < \infty$, então M é Feller.*

Um resultado já conhecido era que subavariedades propriamente imersas com vetor curvatura média limitado são estocasticamente completas, ver [30].
Nós também provamos completude estocástica e a propriedade Feller de uma importante classe de variedades Riemannianas, a saber, as submersões Riemannianas com fibras mínimas compactas. Tal classe de variedades foi inicialmente estudada na década de 1960 por O'Neill [26], [27] e Gray [17] de modo a produzir novos exemplos de variedades com curvatura seccional não-negativa e variedades com curvatura de Ricci positiva.

Nossos segundo estabelece que se $\pi\colon M \to N$ é uma submersão Riemanniana com fibra mínima compacta F, então M é estocasticamente completa (respec. parabólica) se, e somente se, N é estocasticamente completa (respec. parabólica).

Teorema 1.0.2 *Seja $\pi\colon M \to N$ uma submersão Riemanniana com fibra mínima $F_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in N$. Então*

i. Se M é parabólica, então N é parabólica.

ii. Se M é estocasticamente completa, então N é estocasticamente completa.

Se, além disso, as fibras F_p são compactas, então:

iii. Se N é parabólica, então M é parabólica.

iv. Se N é estocasticamente completa, então M é estocasticamente completa.

O próximo teorema estabelece que se uma submersão Riemanniana tem fibra mínima e compacta então o espaço total é Feller se, e somente se, a base for Feller.

Teorema 1.0.3 *Seja $\pi\colon M \to N$ uma submersão Riemanniana com fibra mínima compacta F. Então M é Feller se, e somente se, N é Feller.*

A geometria de comparação via curvatura de Ricci teve como início a tentativa de estender, para a curvatura de Ricci, os resultados obtidos para a curvatura seccional como por exemplo o Teorema de Toponogov e o Teorema da Alma. Tal abordagem se revelou extremamente difícil. Um dos caminhos mais promissores dessas tentativas foi considerar limitações inferiores para o tensor de Ricci por constante. Um dos resultados mais relevantes dessa abordagem é o "Spliting Theorem". A partir daí, a busca de resultados para generalizações do tensor de Ricci teve início. Uma generalização bastante interessante chamado tensor de Bakry Emery Ricci, dentro de um contexto mais geral de variedades ponderadas,que passamos a descrever. Seja $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade geodesicamente completa. Uma variedade ponderada, denotada por M_f, é uma tripla $(M, \langle , \rangle, d\mu)$, com $d\mu = e^{-f} d\nu$ onde f é uma função real, suave em M e $d\nu$ é o elemento de volume Riemanniano de M. Neste contexto, o Laplaciano ponderado $\Delta_f = \Delta - \langle \nabla, \nabla f \rangle$ surge naturalmente. O tensor de Bakry Emery Ricci, denotado por $\mathrm{Ric_f} = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, f$ é uma generalização natural do tensor de Ricci no contexto de variedades ponderadas e é natural indagar quais resultados válidos para o tensor de Ricci podem ser estendidos para o tensor de Bakry Emery Ricci. Assim como no caso do tensor de Ricci, existe uma fórmula de Bochner relacionando o Laplaciano ponderado Δ_f e $\mathrm{Ric_f}$

$$\frac{1}{2}\Delta_f |\nabla u|^2 = |\mathrm{Hess}\, u|^2 + \langle \nabla u, \nabla(\Delta_f u) \rangle + \mathrm{Ric_f}\,(\nabla u, \nabla u) \tag{1.0.1}$$

Vale lembrar que muitos dos resultados obtidos para $\mathrm{Ric_f}$ consideram uma limitação inferior por uma constante, tal qual já havia sido feito para Ric. Aqui, no entanto, estamos interessados uma limitação inferior por uma função suave G. Este relaxamento exige entretanto, uma hipótese sobre a função f.

No primeiro resultado é uma estimativa para a curvatura média das esferas geodésicas m_f em termos de uma estimativa inferior para $\mathrm{Ric_f}$ como em Wey e Willie em [34] trocando a estimativa inferior $(n-1)H$, com H constante, por $(n-1)G$ onde $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Proposição 1.0.1 *Se* $\mathrm{Ric_f}\,(\partial_r, \partial_r) \geq G(r)$ *então dado um segmento geodésico minimal e* $r_0 > 0$ *temos*

$$m_f(r) \leq m_f(r_0) - \int_{r_0}^{r} G(t)dt \tag{1.0.2}$$

para $r \geq r_0$.

Da proposição acima segue a seguinte estimativa de volume

Proposição 1.0.2 *Seja* M_f *variedade ponderada tal que* $\mathrm{Ric_f} \geq G$. *Então existem constantes positivas* A, B, C, D *tais que*

$$\mathrm{Vol_f(B(R))} \leq A + B \int_{r_0}^{R} e^{Cr + \int_{r_0}^{r}\int_{r_0}^{s}[G(t)-D]dtds} dr$$

Note que, no caso que G é constante, reobtemos a estimativa de Wei e Wylie [34].

Os Teoremas 1.0.4 e 1.0.5 abaixo, foram obtidos, independentemente, por Pigola et al in [31].

Teorema 1.0.4 *Seja* M_f *uma variedade ponderada e* γ *um segmento geodésico minimal a partir de* $p \in M_f$. *Suponha que* $\mathrm{Ric_f} \geq (n-1)G$ *onde* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, par. Então*

(i) Se $\partial_r f \geq -a, a \geq 0$ *ao longo de* γ *então* $m_f(r) \leq m_{aG}(r)$ *ao longo de* γ

(ii) Se $|f| \leq K$ *ao longo de* γ *então* $m_f(r) \leq m_G^{n+4K}(r)$ *ao longo de* γ.

Como consequencia do Teorema 1.0.4 temos a seguinte comparação de volumes.

Teorema 1.0.5 *Seja M_f uma variedade ponderada e $p \in M_f$ fixado. Suponha que* $\mathrm{Ric_f} \geq (n-1)G$ *onde* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, par. Então*

(i) Se $\partial_r f \geq -a$ ao longo de todo segmento geodésico minimal a partir de p então para $R \geq r > 0$

$$\frac{\mathrm{Vol_f(B(R))}\,)}{\mathrm{Vol_f(B(r))}} \leq e^{aR} \frac{\mathrm{vol}\,^n_G(R)}{\mathrm{vol}\,^n_G(r)}$$

(ii) If $|f| \leq K$ then for $0 < r \leq R$

$$\frac{\mathrm{Vol_f(B(R))}}{\mathrm{Vol_f(B(r))}} \leq \frac{\mathrm{vol}\,^{n+4K}_G(R)}{\mathrm{vol}\,^{n+4K}_G(r)}$$

No próximo teorema provamos que, sob uma limitação inferior adequada para $\mathrm{Ric_f}$, M_f satisfaz o princípio do Máximo de Omori-Yau.

Teorema 1.0.6 *Seja M_f uma variedade ponderada com pólo o e seja uma função suave $G\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $G(0) > 0, G'(t) \geq 0, \frac{1}{G} \notin L^1(+\infty)$. Se $\mathrm{Ric_f}\,(\partial_r\,, \partial_r\,) \geq -C^2 G'(r)$, então o princípio do máximo de Omori Yau é válido em M_f. Em particular M_f é estocasticamente completa.*

O próximo teorema estende um resultado devido a Wraith [35], o qual é equivalente a um resultado clássico de Ambrose [1].

Teorema 1.0.7 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, não-compacta e seja $\gamma(t), t \geq 0$ um raio geodésico de M e f função suave, não negativa, radial à partir de $\gamma(0)$ com $\frac{\partial f}{\partial t} \leq 0$. Se o limite*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{Ric_f}\,(\gamma'(s), \gamma'(s))ds \tag{1.0.3}$$

existe, então tal limite é finito.

O teorema acima é equivalente à

Teorema 1.0.8 *Seja M variedade Riemanniana completa e suponha que existem $q \in M$ e f função suave, não negativa, radial em q com $\frac{\partial f}{\partial t} \leq 0$ tal que, para toda geodésica γ partindo de q vale*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{Ric_f}\,(\gamma'(s), \gamma'(s))ds = \infty \tag{1.0.4}$$

Então M é compacta.

Como consequencia do Teorema acima temos:

Teorema 1.0.9 *Seja M_f uma variedade Riemanniana ponderada, completa e $f \in C^\infty(M)$ como no Teorema acima. Suponha que*

$$\mathrm{Ric_f}\, + \mathcal{L}_X g \geq cg \tag{1.0.5}$$

para alguma função suave c e X campo de vetores suave em M. Se

$$\lim_{t\to\infty} \{\int_0^t c(s)ds - 2|X(t)|\} = \infty$$

Então M é compacta.

No próximo resultado apresentamos algumas estimativa do gradiente de uma função f-harmônica positiva. Note que, quando $f = 0$ e $G = 0$ reobtemos a estimativa devida a Yau [36]

Teorema 1.0.10 *Seja M_f uma variedade ponderada completa com* $\mathrm{Ric_f}\,(\partial_r\,, \partial_r\,) \geq -(n-1)G(r)$ *onde* $G \in C^0(\mathbb{R}_+)$ *é positiva. Se u é uma função f-harmônica positiva definida em* $\overline{B(q,2R)}$ *com* $R \geq 1$*, então em* $B(q,R)$

(i) $\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{\widetilde{C}_1}{R^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{R}\int_1^{2R} G(t)dt + n\{\frac{2}{n}|\nabla f|^2 - 2\frac{\widetilde{C}_3}{R}\}^2 + 2(n-1)\sup\limits_{B(q,R)} G}$

(ii) Se existe $0 \leq a < \frac{1}{2}$ *tal que* $\langle \nabla \ln u, \nabla f\rangle \leq a|\nabla \ln u|^2$ *então*
$\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{\widetilde{C}_1}{R^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{R}\int_1^{2R} G(s)ds + 2(n-1)\sup\limits_{B(q,R)} G}$

(iii) $\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{\widetilde{C}_1}{R^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{R}\int_1^{2R} G(s)ds + C_3(n)\sup\limits_{B(q,R)} G}$

onde $\alpha = \max_{S(q,1)} \Delta_f r$ *e as constantes* $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ *e* $\widetilde{C}_3$ *dependem somente de n e α.*

O próximo resultado, para o caso $f = 0$ é devido a Bessa e Montenegro [4].

Teorema 1.0.11 *Seja M_f uma variedade ponderada e M_G um modelo Riemanniano G.*

i Se $m_f(t,\theta) \leq m_G(t), \forall t \in (0,R), \forall \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ *então* $\lambda_1(B_{M_f}(R)) \leq \lambda_1(B_{M_G}(R))$

ii Se $m_f(t,\theta) \geq m_G(t), \forall t \in (0,R), \forall \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ *então* $\lambda_1(B_{M_f}(R)) \geq \lambda_1(B_{M_G}(R))$

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Operadores Diferenciais em Variedades

Nesta secção serão provados alguns resultados bsicos envolvendo o gradiente e o Laplaciano de funçes reais de classe C^∞ definidos em M e a divergência de campos de vetores em M. Denotaremos por $D(M)$ o conjunto das funções suaves definidas em M e por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores suaves definidos em M.

Definição 1 *Seja $f \in D(M)$ suave. O gradiente de f o campo de vetores em M, definido pela seguinte condição*

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = X(f) \ , \ \forall X \in \mathfrak{X}(M) \ .$$

Decorre da definição que se $f, g \in D(M)$ então:

1. $\text{grad}\,(f+g) = \text{grad } f + \text{grad } g$;
2. $\text{grad}\,(f.g) = f\,\text{grad } g + g\,\text{grad } f$.

Definição 2 *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X a função $\operatorname{div} X : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\operatorname{div} X(p) = tr[Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)].$$

As propriedades abaixo decorrem diretamente da definição.

1. $\operatorname{div}\,(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;
2. $\operatorname{div}\,(f.X) = f.\operatorname{div} X + \langle \text{grad } f, X \rangle$,

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer $f \in D(M)$.

Definição 3 *Seja $f \in D(M)$. O Laplaciano de f é o operador $\Delta : D(M) \longrightarrow D(M)$ definido por*

$$\Delta f = \operatorname{div}\,(\text{grad } f).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, prova-se facilmente que

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

2. $\Delta(f.g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle$,

para quaisquer $f, g \in D(M)$.

Proposição 2.1.1 *Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M e $f \in D(M)$. Então*

$$\text{grad } f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ e (g^{ij}) a inversa da matriz (g_{ij}).

Prova: Como grad $f \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ constitui uma base, podemos escrever

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Portanto

$$\left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i g_{ij} = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} a_i. \qquad (2.1.1)$$

Assim considerando as matrizes $F = \left(\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle\right)_{n\times 1}$, $A = (a_k)_{n\times 1}$ e $G = (g_{ij})_{n\times n}$, decorre que $F = GA$. Então sendo G invertvel temos $A = G^{-1}F$ e com isso um elemento genrico de A se escreve como

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} f_j \ ,$$

onde $f_j = \langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Portanto

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} g^{ij} f_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Proposição 2.1.2 *Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M e $X = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ um campo de vetores em M. Então*

$$\text{div}\, X = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right],$$

onde Γ_{ij}^{k} são os smbolos de Christoffel da mtrica em M.

Prova: Por definição, $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}[Y \mapsto \nabla_Y X]$. Então

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left[\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{j=1}^{n} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left[a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\right].
\end{aligned}$$

Faça $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, para obter

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right] \frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{div} X = \sum\limits_{i,l=1}^{n} g^{il} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle$, temos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^i + \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right].$$

Proposição 2.1.3 *Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M e $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ um campo de vetores em M. Então*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \sqrt{g}),$$

onde $g = det\,(g_{ij})$.

Prova: Temos, inicialmente, que

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}\right] g^{li}.$$

Então

$$\begin{aligned}
2 \sum_{ij=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^i &= \sum_{i,j=1}^{n} a_j \left\{\sum_{l=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}\right] g^{li}\right\} \\
&= \sum_{ij,l=1}^{n} a_j \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} g^{li} + \sum_{i,j,l=1}^{n} a_j \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} g^{li} - \sum_{i,j,l=1}^{n} a_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} g^{li} \qquad (2.1.2)
\end{aligned}$$

Trocando i por l na primeira parcela, temos que (2.2) se reduz a

$$2 \sum_{i,j,l=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^i = \sum_{i,j,l=1}^{n} a_j \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} g^{li} = \sum_{i,j,l=1}^{n} a_i \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} g^{li}. \qquad (2.1.3)$$

Logo, usando (2.3) e a Proposição 2.1.2, temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{2}\sum_{j,l=1}^{n} g^{lj}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{2}\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right].
\end{aligned}
$$

Usando o fato de que $\displaystyle\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_i}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\sqrt{g}+a_i\frac{(\sqrt{g})}{\partial x_i}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(a_i\sqrt{g})}{\partial x_i}\ .
\end{aligned}
$$

Proposição 2.1.4 *Sejam $(x_1,\dots,x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M e $f\in D(M)$. Então*

$$
\Delta f=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\ .
$$

Prova: Por definição temos que

$$
\Delta f=\operatorname{div}(\operatorname{grad}\ f)\ .
$$

Assim, pela Proposição 2.1.1, temos que

$$
\operatorname{grad}\ f=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\ .
$$

Usando a Proposição 2.1.3, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}\ f)=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\sqrt{g}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),
\end{aligned}
$$

onde $g=det\,(g_{ij})$.

Definição 4 *Seja $f \in D(M)$. Definimos o Hessiano de f em $p \in M$ como o operador linear* $\operatorname{Hess} f : T_pM \longrightarrow T_pM$*, dado por*

$$(\operatorname{Hess} f)Y = \nabla_Y \operatorname{grad} f \ , \ \forall Y \in T_pM \ .$$

Podemos considerar $\operatorname{Hess} f$ como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = \langle (\operatorname{Hess} f)(X), Y \rangle.$$

2.2 Modelos Riemannianos

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $o \in M$ fixado e denote por $\operatorname{Cut}(o)$ o cut-locus de o e $\operatorname{Cut}^*(o) = \operatorname{Cut}(o) \bigcup \{o\}$. Em $M \setminus \operatorname{Cut}^*(o)$ é possível definir coordenadas polares com pólo o, isto é, a cada ponto $p \in M \setminus \operatorname{Cut}^*(o)$ podemos associar um raio $r = \operatorname{dist}(x, o)$ e um "ângulo"polar θ, que corresponde à direção da geodésica minimizante ligando o a p.
Em coordenadas polares podemos escrever a métrica g como

$$g = dr^2 + \mathcal{A}_{ij} d\theta^i d\theta^j \tag{2.2.1}$$

onde $(\theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$ são coordenadas em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathcal{A}_{ij}(r, \theta)$ é uma matriz positiva definida.
Se $\mathcal{A} = \sqrt{\det \mathcal{A}_{ij}}$ segue que o elemento de volume da variedade M se escreve

$$dM = \mathcal{A}(r, \theta) dr d\theta$$

Segue da expressão do Laplaciano em um sistema de coordenadas que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\Big(\ln \mathcal{A}\Big)\frac{\partial}{\partial r} + \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \tag{2.2.2}$$

onde $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}$ é o Laplaciano de $\mathbb{S}^{n-1}(r)$.

Definição 5 *Dizemos que M é uma variedade com pólo se existe $o \in M$ tal que* $\operatorname{Cut}(o) = \emptyset$*. O ponto o chamado de pólo.*

Observe que se M possui pólo o então temos coordenadas polares definidas em $M \setminus \{o\}$.
Passamos agora a um caso especial de variedades com pólo, que serão bastante utilizados a longo do texto.

Definição 6 *Uma variedade Riemanniana com pólo o é chamada de modelo Riemanniano se $\mathcal{A}(r, \theta) = \mathcal{A}(r)$, isto é, $\mathcal{A}_{ij}(r, \theta) = \sigma^2(r) d\theta^2$, onde $d\theta^2$ é a métrica de $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\sigma(r)$ é uma função suave, positiva.*

Lema 1 *Seja (M, g) modelo Riemanniano com a métrica g dada por 2.2.1, então, o elemento de volume Riemanniano μ é dado, em coordenadas polares, por*

$$d\mu = \sigma^{n-1}(r) dr d\theta$$

onde $d\theta$ é o elemento de volume Riemanniano de $\mathbb{S}^{n-1}$. O Laplaciano em (M, g) é escrito em coordenadas polares como

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\Big(\ln \sigma^{n-1}(r)\Big)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sigma^2(r)}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Vejamos alguns exemplos de modelos Riemannianos:

Exemplo 1 *Em $\mathbb{R}^n$, tome $\sigma(r) = r$ daí*

$$d\mu = r^{n-1} dr d\theta$$

e

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Exemplo 2 *Em $\mathbb{H}^n$, tome $\sigma(r) = \sinh(r)$, portanto*

$$d\mu = \sinh^{n-1} r dr d\theta$$

e

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\coth(r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sinh^2(r)}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

2.3 Imersões e Submersões

2.3.1 Imersões Isométricas

Nesta seção apresentaremos uma bem conhecida fórmula que será utilizada na primeira parte deste trabalho. Seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica de uma m-variedade Riemanniana M em uma n-variedade N. Faremos aqui, como é usual, a identificaç ão do vetor $X \in T_pM$ com $d\varphi_p X \in T_{\varphi(p)}N$. Seja $g : N \to \mathbb{R}$ uma função suave e considere a função $f = g \circ \varphi$, então, para todo $X \in T_pM$ temos

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = df(X) = dg(X) = \langle \operatorname{grad} g, X\rangle$$

donde $\operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f + (\operatorname{grad} g)\perp$ Denotando por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e N, respectivamente, calculemos o Hessiano de $f = g \circ \varphi$ onde g, é uma função suave em N. Usando a equação de Gauss e a decomposição anterior obtemos, para $X, Y \in T_pM$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} f(X,Y) &= \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X(\operatorname{grad} f - \alpha(X, \operatorname{grad} f)), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} f, Y\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad} f, Y\rangle - \langle \operatorname{grad} f, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} g, Y\rangle + \langle (\operatorname{grad} g)\perp, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\
&= \operatorname{Hess} g(X,Y) + \langle (\operatorname{grad} g)\perp, \alpha(X,Y)\rangle \\
&= \operatorname{Hess} g(X,Y) + \langle \operatorname{grad} g, \alpha(X,Y)\rangle
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\operatorname{Hess} f(p)(X,Y) = \operatorname{Hess} g(\varphi(p))(X,Y) + \langle \alpha(X,Y), \operatorname{grad} g\rangle(\varphi(p)),\ \forall\, X,Y \in T_pM$$

Tomando uma base ortonormal $\{X_1,\ldots,X_m\}$ de T_pM e tomando o traço obtem-se

$$\triangle f(p) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Hess} g(\varphi(x))(X_i,X_i) + \langle H, \operatorname{grad} g\rangle(\varphi(p)), \tag{2.3.1}$$

onde $H = \operatorname{Trace}\alpha$ denota o vetor curvatura média da imersão, ver [23].

2.3.2 Submersões Riemannianas

Nesta seção apresentaremos alguns fatos básicos sobre submersões Riemannianas necessários às nossas demonstrações. Para uma exposição completa do assunto ver [26]. Sejam M e N variedades Riemannianas, uma aplicação suave, sobrejetiva $\pi\colon M \to N$ é uma *submersão* se a diferencial $\mathrm{d}\pi_q$ tem posto máximo para todo $q \in M$. Se $\pi : M \to N$ é uma submersão, então para todo $p \in N$ a pré-imagem $F_p = \pi^{-1}(p)$ subvariedade mergulhada de M, e chamada de *fibra* em p.

Definição 7 *Uma submersão $\pi : M \to N$ é chamada* submersão Riemanniana *se para todo $p \in N$ e todo $q \in F_p$, a restrição de $\mathrm{d}\pi(q)$ ao subespaço ortogonal $T_qF_p^{\perp}$ é uma isometria sobre T_pM.*

Dados $p \in N$ e $q \in F_p$, um vetor tangente $\xi \in T_qM$ é dito *vertical* se ele for tangente à F_p. O vetor tangente $\xi \in T_qM$ é dito *horizontal* se ele pertence ao espaço ortogonal $(T_qF_p)^{\perp}$. Dado $\xi \in TM$, suas componentes horizontal e vertical serão denotadas, respectivamente, por ξ^h and ξ^v. Denotando por $\mathcal{D}$ a $m-n$ distribuição em M formada por campos de vetores horizontais então segue que a segunda forma fundamental das fibras F é um tensor simétrico $\mathcal{S}^F : \mathcal{D}^{\perp} \times \mathcal{D}^{\perp} \to \mathcal{D}$, definido por

$$\mathcal{S}^F(v,w) = (\nabla^M_v W)^h,$$

onde W é uma extensão vertical de w e ∇^M é a conexão de Levi–Civita de M.

Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(N)$, existe um único campo horizontal $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ que é π-relacionado com X, isto é, para todos $p \in N$ e $q \in F_p$, então $\mathrm{d}\pi_q(\widetilde{X}_q) = X_p$, chamado *levantamento horizontal* de X. Por outro lado, um campo horizontal $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado *básico* se ele for π-relacionado com algum campo $X \in \mathfrak{X}(N)$. O lema a seguir é bastante útil.

Lema 2 *Sejam $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ básicos, então valem as seguintes relações:*

a. $g^M(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = g^N(X,Y)\circ\pi$

b. $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^h$ *é básico e π-relacionado com* $[X,Y]$

c. $\nabla^M_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ *é básico e π-relacionado com* $\nabla^N_X Y$

Observe que as fibras são subvariedades totalmente geodésicas (em M) quando $\mathcal{S}^F = 0$. O vetor *curvatura média* da fibra é o campo horizontal H definido por[1]

$$H(q) = -\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}^F(q)(e_i, e_i) = -\sum_{i=1}^{k} (\nabla^M_{e_i} e_i)^h \tag{2.3.2}$$

onde $(e_i)_{i=1}^k$ é um referencial ortonormal local na fibra de q. Observe que, em geral, H não é básico. Por exemplo, quando as fibras são hipersuperfícies de M, então H é básico se, e somente se, todas as fibras têm curvatura média constante. As fibras são subvariedades *mínimas* de M quando $H \equiv 0$. O Lema a seguir, cuja prova pode ser vista em [5], será bastante útil na prova do Teorema 3.1.2.

Lema 3 *Seja $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores básico , π-relacionado com $X \in \mathfrak{X}(N)$. Então vale a seguinte relação entre as divergências de $\widetilde{X}$ e X em $x \in N$ e em $\widetilde{x} \in \mathcal{F}_x$, respectivamente.*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M(\widetilde{X})(\widetilde{x}) &= \operatorname{div}_N(X)(x) - g_N(\widetilde{X}_{\widetilde{x}}, H_{\widetilde{x}}) \\ &= \operatorname{div}_N(X)(x) - g_N(d\pi_{\widetilde{x}}(\widetilde{X}_{\widetilde{x}}), d\pi_{\widetilde{x}}(H_{\widetilde{x}})) \end{aligned}$$

Em particular, se as fibras são mínimas, então $\operatorname{div}_M \widetilde{X} = \operatorname{div}_N X$.

Seja $u \colon N \to \mathbb{R}$ uma função suave e denote por $\widetilde{u} = u \circ \pi \colon M \to \mathbb{R}$ seu levantamento à M. É imediato mostrar que $\widetilde{\operatorname{grad}_N u} = \operatorname{grad}_M \widetilde{u}$, o levantamento horizontal $\operatorname{grad}_N u$ é o gradiente do levantamento horizontal $\widetilde{u}$, $\operatorname{grad}_M \widetilde{u}$. Sempre usaremos o til sobreescrito $\widetilde{X}, \widetilde{u}$ para denotar o levantamento horizontal de X, u, respectivamente.

2.4 Curvaturas

Nesta seç ão relembraremos definições e propriedades básicas a respeito das curvaturas seccional, escalar e de Ricci.

Definição 8 *O tensor curvatura Rm de uma variedade riemanniana M^n é uma correspondncia que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação linear $Rm(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$Rm(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z \ ,$$

$\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 2.4.1 *Verifica-se que o tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$*

a) $\langle Rm(X,Y)Z, T\rangle + \langle Rm(Y,Z)X, T\rangle + \langle Rm(Z,X)Y, T\rangle = 0$ *(1^aIdentidade de Bianchi);*

b) $\langle Rm(X,Y)Z, T\rangle = -\langle Rm(Y,X)Z, T\rangle$*;*

[1]Por vezes o vetor curvatura média é definido como $H(q) = \sum_{i=1}^k \mathcal{S}^F(q)(e_i, e_i)$

c) $\langle Rm(X,Y)Z,T\rangle = -\langle Rm(X,Y)T,Z\rangle$*;*

d) $\langle Rm(X,Y)Z,T\rangle = \langle Rm(Z,T)X,Y\rangle$*.*

Definição 9 *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bidimensional do espaço tangente* T_pM *e sejam* $x, y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Definimos a curvatura seccional* K *de* M *em* p *segundo* σ *por*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x \wedge y|},$$

onde $|x \wedge y| = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2$*.*

Lema 4 *Sejam* M *uma variedade riemanniana e* $p \in M$*. Defina uma aplicação trilinear* $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ *por*
$\langle R'(X,Y,W),Z\rangle = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle, \forall\ X,Y,Z,W \in T_pM$*.*
Então M *tem curvatura seccional constante* c *se e somente se* $Rm = cR'$*, onde* Rm *a curvatura de* M*.*

Seja $X \in T_pM$ um vetor unitário. Tomemos $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = X\}$ uma base ortonormal de T_pM.

Definição 10 *A curvatura de Ricci de* M *na direção de* X *em* p *definida por*

$$\mathrm{Ric}_{\,p}(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle Rm(X,z_i)X,z_i\rangle\ .$$

Definição 11 *A curvatura escalar de* M *em* p *definida como*

$$S(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ric}_{\,p}(z_j)\ .$$

2.5 Tensor de Ricci

Definição 12 *Define-se o tensor de Ricci* $Rc : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ *por*

$$Rc(Y,Z) = \mathrm{tr}\,\{X \mapsto Rm(X,Y)Z\}$$

Em coordenadas

$$Rc = Rc_{jk}dx^j \otimes dx^k$$

onde

$$\begin{aligned} Rc_{jk} &= Rc(\partial_j, \partial_k) \\ &= \mathrm{tr}\,\{X \mapsto Rm(X,\partial_j)\partial_k\} \end{aligned}$$

Para o cálculo de Rc_{jk} considere a aplicação $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $T(X) = Rm(X,\partial_j)\partial_k$ então a matriz $(T_{i\ell})_{n\times n}$ tem elementos da forma

$$\begin{aligned} T_{i\ell} &= \langle T(\partial_i), \partial_\ell\rangle \\ &= \langle Rm(\partial i, \partial_j)\partial_k, \partial_\ell\rangle \\ &= R_{ijk}^m g_{m\ell} \end{aligned}$$

logo $\operatorname{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} T_{ii} = \sum_{i=1}^{n} R_{ijk}^{m} g_{mi}$ portanto

$$Rc_{jk} = \operatorname{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} R_{ijk}^{m} g_{mi}$$

e o tensor de Ricci se escreve em coordenadas como

$$Rc = \sum_{i=1}^{n} R_{ijk}^{m} g_{mi} dx^{j} \otimes dx^{k}$$

Quando $g_{im} = \delta_{im}$ a expressão do tensor de Ricci fica

$$Rc = R_{ijk}^{i} dx^{j} \otimes dx^{k}$$

Observação 1 *Note que como o tensor de Ricci é definido em termos do traço de uma aplicação então a sua expressão em coordenadas locais não depende das coordenadas escolhidas logo é mais comum o uso da expressão em um "frame"ortonormal(pois em geral tal escolha simplifica os cálculos).*

2.6 Núcleo do Calor e Propriedades Estocásticas

Seja M uma variedade Riemanniana geodesicamente completa e $\triangle = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}$ o operador de Laplace-Beltrami definido no espaço $C_0^{\infty}(M)$ de funções suves com suporte compacto. O operador $\triangle$ é simétrico com respeito ao produto escalar em $L^2(M)$ e admite uma única extensão auto-adjunta a um operador semi-limitado , também denotado por $\triangle$, cujo domínio é o conjunto $W_0^2(M) = \{f \in W_0^1(M), \triangle f \in L^2(M)\}$, (detalhes em [12]), onde $W_0^1(M)$ é o fecho de $C_0^{\infty}(M)$ com respeito a norma

$$(u, v)_1 = \int_M u\, v\, d\mu + \int_M \langle \nabla u,\, \nabla v \rangle\, d\mu.$$

O operador $\triangle$ define o semigrupo do calor $\{e^{t\triangle}\}_{t \geq 0}$, que nada mais é do que uma família de operadores autoadjuntos, positivos definidos e limitados em $L^2(M)$, tais que se $u_0 \in L^2(M)$, então a função $u(x,t) := (e^{t\triangle} u_0)(x) \in C^{\infty}((0,\infty) \times M)$ é solução da equação do calor

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) & = & \triangle_x u(t,x) \\ \\ u(t,x) & \overset{L^2(M)}{\longrightarrow} & u_0(x) \quad \text{as} \quad t \to 0^+ \end{array} \right. \tag{2.6.1}$$

Ademais, existe uma função suave $p \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times M \times M)$, chamada de núcleo do calor de M, tal que

$$e^{t\triangle} u(x) = \int_M p(t,x,y)\, u(y)\, d\mu_y, \tag{2.6.2}$$

detalhes em [13], [19]. O núcleo do calor possui as seguites propriedades:

1. $\dfrac{\partial p}{\partial t} = \triangle_y p;$

2. $p(t,x,y) > 0$;

3. $p(t,x,y) = \int_M p(s,x,z)p(t-s,z,y)dz$;

4. $\int_M p(t,x,y)dy \leq 1$,

para todo $x \in M$ e todo $t > 0$, $s \in (0,t)$.

Em [2], Azencott estudou variedades Riemannianas onde o semigrupo do calor $e^{t\triangle}$ deixa invariante o conjunto das funções contínuas que se anulam no infinito. Ele introduziu o conceito de variedades Feller [2, p. 200], que passamos a descrever:

Definição 13 *Uma variedade Riemanniana completa M é dita Feller se*

$$e^{t\triangle}(C_0(M)) \subset C_0(M), \tag{2.6.3}$$

onde $C_0(M) = \{u \colon M \to \mathbb{R}, \text{ continuous} \colon u(x) \to 0 \text{ as } x \to \infty\}$.

A seguir, apresentamos, sem demonstração, alguns exemplos de variedades Feller

1. $\mathbb{R}^n$ (vide [28])

2. Ricci solitons (vide [7])

3. Variedades Cartan-Hadamard (vide [28] ou Capítulo 3 adiante)

Definição 14 *Uma variedade Riemanniana M é dita estocasticamente completa se, para algum (para todo) $(x,t) \in M \times (0,\infty)$,*

$$\int_M p(x,y,t)dy = 1.$$

São exemplos de variedades estocásticamente completas:

1. $\mathbb{R}^n$

2. Ricci solitons (vide [7])

3. Variedades Cartan-Hadamard (vide [30])

O teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [30] estabelece um série de equivalências a completude estocástica

Teorema 2.6.1 *Seja M variedade Riemanniana. São equivalentes:*

(i) M é estocasticamente completa

(ii) $\forall\ \lambda > 0$, a única solução limitada, não-negativa de $\Delta u \geq \lambda u$ em M é $u \equiv 0$

(iii) $\forall\ \lambda > 0$, a única solução limitada, não-negativa de $\Delta u = \lambda u$ em M é $u \equiv 0$

(iv) $\forall\ T > 0$, a única solução limitada, em $M \times (0, T)$, do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u & = \triangle u \\ u_{|t=0^+} & = 0, \text{ no sentido } L^1_{loc}(M) \end{cases}$$

é $u \equiv 0$

(v) Para toda $u \in C^2(M), u^* < \infty$ e para todo $\gamma < u^*$ vale $\inf_{\Omega_\gamma} \Delta u \leq 0$, onde $\Omega_\gamma = \{x \in M; u(x) > \gamma\}$

(vi) M satisfaz o princípio do máximo fraco de Omori-Yau

O teorema acima nos permite provar o seguinte resultado, conhecido como teste de Khas'minskii

Teorema 2.6.2 *Seja M uma variedade Riemanniana. Se M admite uma função γ de classe C^2 tal que $\gamma(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e, para algum $\lambda > 0$ vale*

$$\Delta\gamma \leq \lambda\gamma$$

fora de um compacto, então M é estocasticamente completa.

Observe que os exemplos acima são variedades geodesicamente completas. No entanto, existem variedades estocasticamente completas que são geodesicamente incompletas, como mostra o exemplo abaixo:

Exemplo 3 *Seja $M = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, m \geq 3$, munido da métrica canônica. Então M é geodesicamente incompleta. Considere a função*

$$\gamma(x) = |x|^2 + |x|^{2-m} = \frac{|x|^m + 1}{|x|^{m-2}}$$

Observe que $\gamma(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$. Ademais, para todo $x \in M$ vale que $|\nabla|x||^2 = 1$ e $|x|\Delta|x| = m - 1$ Donde

$$\begin{aligned} \Delta\gamma(x) &= 2|x|\Delta|x| + 2 + (2-m)|x|^{1-m}\Delta|x| + (2-m)(1-m)|x|^{-m} \\ &= 2m + (2-m)(m-1)|x|^{-m} - (2-m)(m-1)|x|^{-m} \\ &= 2m \end{aligned}$$

para todo $x \in M$, isto é, γ satisfaz as condições do teste de Khas'minskii. Portanto M é estocasticamente completa.

Definição 15 *Uma variedade Riemanniana é dita parabólica se toda função subharmonica limitada é constante.*

Apresentamos, sem demonstração, os seguintes exemplos de variedades parabólicas

1. $\mathbb{R}^2$ (vide [19])

2. $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ não é parabólico (vide [19])

3. Toda variedade compacta (Teorema de Hopf)

O teorema abaixo e sua demonstração podem ser encontrados em Grigor'yan [20].

Teorema 2.6.3 *São equivalentes:*

1. *M é parabólica*

2. *Existe função superharmônica positiva não-constante em M*

3. *A função de Green $G(x, y)$ em M é finita para todo $x \neq y$*

4. *Para algum/todo $x \in M$,*

$$\int_1^\infty p(t, x, y)dt < \infty$$

5. *Existe solução limitada, não nula da equação*

$$\Delta u - q(x)u = 0,$$

para alguma/toda função $q \in C_0^\infty(M)$, com q não negativa e não identicamente nula

Capítulo 3

Propriedades Estocásticas em Submersões Riemannianas

3.1 Propriedade Feller em Imersões Isométricas

Como consequência das relações entre a propriedade Feller e as desigualdades isoperimétricas de Faber-Krahn, Pigola and Setti [28] provaram o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1 (Pigola-Setti) *Seja $\varphi\colon M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica com vetor curvatura média H de uma variedade M^m em uma variedade Cartan-Hadamard N^n. Se*

$$\int_M |H|^m d\mu_M < \infty \tag{3.1.1}$$

então M é Feller. Em particular

a. Toda variedade Cartan-Hadamard é Feller.

b. Toda subvariedade mínima de uma variedade Cartan-Hadamard é Feller.

No nosso caso, a condição $\|H\|_{L^m(M)} < \infty$ no teorema 3.1.1 foi trocada pela condição da imersão ser própria e por uma limitação na norma do vetor curvatura média. Nós provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.2 *Seja $\varphi\colon M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica própria de uma m-subvariedade M com vetor curvatura média H em uma n-variedade Cartan-Hadamard N . Se φ tem vetor curvatura média limitado e $\sup_M |H| < \infty$, então M é Feller.*

Vale notar que subvariedades propriamente imersas em variedades de Cartan-Hadamard que possuem vetor curvatura média com crescimento controlado[1] são estocasticamente completas, ver detalhes em [30].

[1] Significando que $\sup_{B_N(p,t)\cap\varphi(M)} |H| \leq c^2 \cdot t^2 \cdot \log^2(t+2)$, c constante e $t >> 1$.

Antes da demonstração, apresentaremos alguns teoremas que serão utilizados na mesma. Iniciamos com um teorema, devido a Azencott [2], que relaciona a propriedade Feller e o decaimento no infinito de uma solução minimal de um certo problema de Dirichlet.

Teorema 3.1.3 (Azencott) *São equivalentes.*

a. M é Feller.

b. Para todo $\Omega \subset\subset M$ com fronteira suave e para toda constante $\lambda > 0$, a solução minimal $h : M \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = \lambda h, & on \quad M \setminus \Omega \\ h = 1, & on \quad \partial\Omega \\ h > 0, & on \quad M \setminus \Omega \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Satisfaz $h(x) \to 0$, as $x \to \infty$

Observação 2 *O limite $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$ significa que, dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K = K(\varepsilon) \subset M$ tal que $h(x) < \varepsilon$, $\forall x \in M \setminus K$. Uma prova do teorema acima pode ser encontrada em [28, Thm. 3.2].*

Definição 16 *Dizemos que $u\colon M \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ é uma supersolução do problema de Dirichlet 3.1.2 se u satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta u & \leq & \lambda u, & on \quad M \setminus \Omega \\ u & \geq & 1, & on \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Uma subsolução para o problema de Dirichlet acima é definida de maneira análoga, revertendo as desigualdades em 3.1.3.

O próximo teorema, devido a Pigola and Setti [28, Prop. 6.1], estabelece uma comparação entre a solução e a supersolução do problema de Dirichlet 3.1.2.

Teorema 3.1.4 (Pigola-Setti) *Seja Ω um aberto relativamente compacto com fronteira suave $\partial\Omega$ em uma variedade Riemanniana M e seja $\lambda > 0$. Sejam u e h, respectivamente, uma supersolução positiva e uma solução minimal do problema 3.1.2. Então*

$$h(x) \leq u(x), \ \forall x \in M \setminus \Omega.$$

Em particular se $u(x) \to 0$ quando $x \to \infty$ então M é Feller.

Utilizando o Teorema 3.1.4 prova-se o Teorema 3.1.2.
Demonstração Seja $p \in \varphi(M) \subset N$ e seja $\rho_N(x) = \mathrm{dist}_N(p, x)$ a função distância em N. Sejam $\lambda, R > 0$ constantes positivas e defina $G\colon N \setminus B_N(p, R) \to \mathbb{R}$ por $G(x) = g \circ \rho_N(x)$, onde $g : [R, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(t) = e^{-\sqrt{\lambda}(t-R)}$$

e $B_N(p, R)$ é a bola geodésica de raio R e contro p. Seja $\Omega = \varphi(B_N(p, R))$ um aberto relativamente compacto de M, (lembre que φ é uma imersão própria) e defina $u\colon M\setminus\Omega\to\mathbb{R}$ por $u=G\circ\varphi$. Seja $x\in M$ tal que $\varphi(x)\in N\setminus B_N(p,R)$. Pela fórmula 2.3.1, tomando uma base ortonormal de $T_{\varphi(x)}M$ temos que

$$\triangle u(x) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Hess}\,(g\circ\rho_N)(\varphi(x))(e_i,e_i)+\langle H,\mathrm{grad}(g\circ\rho_N)\rangle(\varphi(x))$$

Seja $t=\rho_N(\varphi(x))$ e escolhendo uma base ortonormal $\{e_i\}$ para $T_{\varphi(x)}M$ tal que $e_2,\ldots,e_m$ são tangentes à esfera $\partial B_N(p,t)$ e $e_1=a\cdot(\partial/\partial t)+b\cdot(\partial/\partial\theta)$, $a^2+b^2=1$, onde $\partial/\partial\theta\in[[e_2,\ldots,e_m]]$, $|\partial/\partial\theta|=1$, $\partial/\partial t=\mathrm{grad}\,\rho_N$ obtemos que

$$\begin{aligned}\triangle u(x) &= \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Hess}\,(g\circ\rho_N)(\varphi(x))(e_i,e_i)+\langle H,\mathrm{grad}(g\circ\rho)\rangle(\varphi(x))\\ &= a^2g''(t)+b^2g'(t)\mathrm{Hess}\,\rho_N(\varphi(x))(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta})\\ &\quad +g'(t)\sum_{i=2}^{m}\mathrm{Hess}\,\rho_N(\varphi(x))(e_i,e_i)+g'(t)\langle\mathrm{grad}\,\rho_N,H\rangle\\ &= (1-b^2)g''(t)+b^2g'(t)\mathrm{Hess}\,\rho_N(\varphi(x))(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta})\\ &\quad +g'(t)\sum_{i=2}^{m}\mathrm{Hess}\,\rho_N(\varphi(x))(e_i,e_i)+g'(t)\langle\mathrm{grad}\,\rho_N,H\rangle\\ &\leq g''(t)+g'(t)\langle\mathrm{grad}\,\rho_N,H\rangle \qquad (3.1.4)\end{aligned}$$

Observe que g é positiva, $g'=-\sqrt{\lambda}\,g<0$ e $g''=\lambda\,g>0$. Então

$$\begin{aligned}\triangle u(x) &\leq g''(t)+g'(t)\langle\mathrm{grad}\,\rho,H\rangle\\ &= \lambda g(t)+(-\sqrt{\lambda})g(t)\langle\mathrm{grad}\,\rho,H\rangle\\ &\leq (\lambda+\sqrt{\lambda}\sup_M\cdot|H|)g(t)\\ &= \mu\cdot g(t)\\ &= \mu\cdot u(x)\end{aligned}$$

Além disso, se $x\in\partial\Omega$ então $u(x)=1$, e como $x\to\infty$ em M, $\varphi(x)\to\infty$ em N. Portanto $u(x)\to 0$ quando $x\to\infty$. Seja $h>0$ a solução minimal do problema

$$\left\{\begin{array}{rclll}\Delta h &=& \mu\cdot h, & \text{on} & M\setminus\Omega\\ h &=& 1, & \text{on} & \partial\Omega\\ h &>& 0, & \text{on} & M\setminus\Omega.\end{array}\right.$$

Pelo Teorema 3.1.4

$$h(x)\leq u(x),\ \forall x\in M\setminus\Omega$$

Tomando, na desigualdade acima, o limite quando $x\to\infty$ obtemos

$$0\leq\lim_{x\to\infty}h(x)\leq\lim_{x\to\infty}u(x)=0$$

e conclui-se que M é Feller.

3.2 Completude Estocástica e Parabolicidade em Submersões Riemannianas

Para melhor ilustrar o segundo resultado deste capítulo, considere um recobrimento Riemanniano $\pi\colon \widetilde{M} \to M$. É sabido que $\widetilde{M}$ é estocasticamente completa se, e somente se M é estocasticamente completa. Uma prova deste resultado, baseada no fato que o movimento Browniano em M é levantado em um movimento Browniano em $\widetilde{M}$ e, reciprocamente o movimento Browniano em $\widetilde{M}$ se projeta em um movimento Browniano em M, pode ser encontrada no livro de D. K. Elworthy [14]. A situação é diferente se, ao invés de completitude estocástica, considerarmos parabolicidade.

Se $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ é um recobrimento Riemanniano e $\widetilde{M}$ é parabólica, então M é parabólica, ver[28, Sec. 9]. No entanto, a recíproca não é verdadeira em geral, como observado em [28, p.24]. Por exemplo, o disco "duplamente furado"é parabólico e tem como recobrimento o disco de Poincaré, que não é parabólico.

No próximo teorema nós consideramos parabolicidade e completitude estocástica em uma submersão Riemanniana $\pi\colon M \to N$ com fibra mínima $F_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in N$.

Teorema 3.2.1 *Seja $\pi\colon M \to N$ uma submersão Riemanniana com fibra mínima $F_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in N$. Então*

i. Se M é parabólica, então N é parabólica.

ii. Se M é estocasticamente completa, então N é estocasticamente completa.

Se, além disso, as fibras F_p são compactas, então:

iii. Se N é parabólica, então M é parabólica.

iv. Se N é estocasticamente completa, então M é estocasticamente completa.

Observações

- Um recobrimento Riemanniano é um caso particular de submersão Riemanniana com fibra mínima compacta, daí os itens i. and ii. estendem os supracitados resultados sobre parabolicidade e completitude estocástica.

- A compacidade das fibras nos itens iii. and iv. é necessária como mostram os exemplos a seguir.

  1. $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é submersão Riemanniana com fibra mínima não-compacta $\mathbb{R}$. Note que a base $\mathbb{R}^2$ é parabólica enquanto que $\mathbb{R}^3$ não é.
  2. O produto $M_1 \times M_2$, de uma variedade estocasticamente incompleta M_1 por uma variedade estocasticamente completa M_2 é estocasticamente incompleta. A projeção $\pi\colon M_1 \times M_2 \to M_2$ é uma submersão Riemanniana com fibra totalmente geodésica M_1, (necessariamente não-compacta). A base M_2 é estocasticamente completa mas o espaço total $M_1 \times M_2$ não é.

No caso da propriedade Feller, Pigola and Setti provaram o seguinte resultado.

Teorema 3.2.2 (Pigola-Setti) *Seja $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ um k-recobrimento Riemanniano, $k < \infty$. Então $\widetilde{M}$ é Feller se, e somente se, M é Feller.*

Ademais, eles exibiram um exemplo de um ∞-recobrimento $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ tal que $\widetilde{M}$ é Feller enquanto M não é Feller. Eles também provaram que se M é Feller então todo k-recobrimento Riemanniano, $k \leq \infty$ $\widetilde{M}$ é Feller, ver [28, Thm. 9.5]. A demonstração dos itens i. e ii. segue da caracterização de parabolicidade e completude estocástica em termos do princípio do máximo fraco de Omori-Yau no infinito, provado por Pigola-Rigoli-Setti em [29], [30]. Em resumo, eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 3.2.3 (Pigola-Rigoli-Setti) *Uma variedade Riemanniana M é parabólica, (resp. estocasticamente completa) se, e somente se, para toda $u \in C^2(M)$, $u^* = \sup_M u < \infty$, e para todo $\eta > 0$ valer*

$$\inf_{\Omega_\eta} \triangle u < 0, \ \ (resp. \leq 0) \tag{3.2.1}$$

onde $\Omega_\eta = \{u > u^* - \eta\}$.

Demonstração(itens i. e ii.) Seja $\pi\colon M \to N$ uma submersão Riemanniana com fibra mínima F, onde M é parabólica (resp. estocasticamente completa). Suponha, por contradição, que N é não-parabólica (resp. estocasticamente incompleta). Pelo Teorema 3.3 existem $\eta > 0$ e $u \in C^2(N)$ com $u^* < \infty$ tais que $\inf_{\Omega_\eta} \triangle u \geq 0$, $(resp. > 0)$.

Seja $\widetilde{u} \in C^2(M)$ o levantamento horizontal de u. Aplicando o Lema 3 a $X = \operatorname{grad} u$ e $\widetilde{X} = \operatorname{grad} \widetilde{u}$, temos que $\operatorname{div}_N X = \triangle_N u(x) = \operatorname{div}_M \widetilde{X} = \triangle_M \widetilde{u}(y)$ para todo $y \in F_x = \pi^{-1}(x)$.

Claramente $\widetilde{u}^* = \sup_M \widetilde{u} = u^* < \infty$, e definindo $\widetilde{\Omega}_\eta = \{\widetilde{u} > \widetilde{u}^* - \eta\}$ temos que

$$\inf_{\widetilde{\Omega}_\eta} \triangle_M \widetilde{u} = \inf_{\Omega_\eta} \triangle u \geq 0, \ \ (resp. > 0),$$

isto mostra que M é não-parabólica, (resp. estocasticamente incompleta) contradizendo a hipótese de M ser parabólica, (resp. estocasticamente completa). De fato, pode ser mostrado que se M é L^∞-Liouville então N é L^∞-Liouville. Lembre que M é L^∞-Liouville se toda função harmônica limitada $u\colon M \to \mathbb{R}$ é constante. Basta tomar o levantamento à M de $u \in C^\infty(N)$ harmônica limitada. O levantamento $\widetilde{u} \in C^\infty(M)$ é limitado e harmônico, donde constante , implicando que u também é constante.

Iniciamos a demonstração do item iii. com duas definições.

Definição 17 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $v : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que v é uma função exaustão se todos os conjuntos de nível $B_r^v = \{x \in M; v(x) < r\}$ são pré-compactos.*

Se a função exaustão v é suave, $C^\infty(M)$, então os conjuntos de nível B_r^v são hipersuperfícies suaves para quase todo $r \in v(M) \subset \mathbb{R}$.

Definição 18 *Sejam Ω aberto précompacto de M e $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$. O fluxo da função v através de $\Gamma = \partial\Omega$ é definido por*

$$\operatorname{flux}_\Gamma v = \int_\Gamma \langle \operatorname{grad} v,\, \nu \rangle d\sigma$$

onde ν é o campo normal unitário exterior à Γ.

O próximo resultado, devido a Grigor'yan [18, Thm. 7.6], é fundamental na prova do item iii.

Teorema 3.2.4 (Grigor'yan) *Uma variedade M é parabólica se, e somente se, existe uma exaustão suave v em M tal que*

$$\int_1^\infty \frac{dr}{\operatorname{flux}_{\partial B_r^v} v} = \infty.$$

Demonstração[item iii] Seja $\pi\colon M \to N$ uma submersão Riemanniana com fibra mínima compacta F. Seja $v\colon N \to \mathbb{R}$ uma função exaustão e B_r^v, $r > 0$, seus conjuntos de nível. Como as fibras são compactas é imediato que o levantamento $\widetilde{v}$ de v é uma função exaustão de M. Além disso, o conjunto de nível $B_r^{\widetilde{v}}$ de $\widetilde{v}$ é precisamente o conjunto $\widetilde{B_r^v} = \pi^{-1}(B_r^v) = \{F_p = \pi^{-1}(p),\, p \in B_r^v\}$. Seja ν o campo normal unitário exterior à ∂B_r^v. O levantamento $\widetilde{\nu}$ de ν é o campo normal unitário exterior à $\partial\widetilde{B_r^v}$. Ademais,

$$\langle \operatorname{grad}_M \widetilde{v}, \widetilde{\nu}\rangle(q) = \langle \operatorname{grad}_N v, \nu\rangle(p),\ \forall p \in \partial B_r^v \text{ and } \forall q \in F_p$$

Portanto,

$$\operatorname{flux}_{\partial B_r^{\widetilde{v}}}(\widetilde{v}) = \int_{\partial B_r^{\widetilde{v}}} \langle \operatorname{grad}_M \widetilde{v}, \widetilde{\nu}\rangle\, \widetilde{d\sigma} = \int_{F_p}\int_{\partial B_r^v} \langle \operatorname{grad}_N v, \nu\rangle d\sigma(p)\, dF_p = \operatorname{vol}(F_p)\cdot \operatorname{flux}_{\partial B_r^v}(v)$$

Daí,

$$\int_1^\infty \frac{dr}{\operatorname{flux}_{\partial B_r^{\widetilde{v}}}} = vol(F_p)^{-1}\cdot \int_1^\infty \frac{dr}{\operatorname{flux}_{\partial B_r^v}} = \infty$$

Isto prova que M é parabólica. Note que usamos o fato de que em uma submersão Riemanniana com fibra mínima compacta, o volume das fibras é constante, ver [5] para maiores detalhes.

Demonstração(item iv.) A demonstração do item iv. é uma aplicação de um recente resultado de L. Mari e D. Valtorta [25] que estabelece uma equivalencia entre o critério de Khas'minskii e a completude estocástica. Em resumo, eles provaram o seguinte.

Teorema 3.2.5 (Khas'minskii-Mari-Valtorta) *Uma variedade Riemanniana aberta M é estocasticamente completa se, e somente se, existe uma função exaustão suave, (denotada função de Khas'minskii), $\gamma\colon M \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\triangle\gamma \le \lambda\,\gamma$ fora de um compacto, para algum/todo $\lambda > 0$.*

Por hipótese, temos uma submersão Riemanniana $\pi\colon M \to N$ com fibra mínima compacta com base N estocasticamente completa.

Pelo Thorema 3.2.5, existe uma função de Khas'minskii γ em N. É imediato que o levantamento $\widetilde{\gamma}$ é uma função de Khas'minskii em M. Isto mostra que M é estocasticamente completa. Observe que em [6] os autores provaram o item iv. com uma hipótese de controle no crescimento do vetor curvatura média das fibras.

3.3 Propriedade Feller em Submersões Riemannianas

Nosso terceiro resultado é uma extensão de um teorema devido a Pigola-Setti 3.2.2, no entanto, ele não estende o teorema 9.5 de [28]. Nós provamos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.1 *Seja $\pi\colon M \to N$ uma submersão Riemanniana com fibra mínima compacta F. Então M é Feller se, e somente se, N é Feller.*

A ideia da demonstração é explorar a relação entre a solução minimal do problema de Dirichlet em $N \setminus \Omega$ e $M \setminus \widetilde{\Omega}$ via um argumento de exaustão que nos permite concluir a validade da propriedade Feller para N usando a validade da propriedade Feller para M.

Demonstração Seja $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma exaustão de N por compactos com fronteira suave. Tome $\Omega \subset \Omega_1$ um aberto com fronteira suave fixado e $\lambda > 0$. Denotando por $\widetilde{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$ e tomando $\widetilde{\Omega}_n = \pi^{-1}(\Omega_n)$, obtemos uma exaustão de M por compactos com fronteira suave. Para cada $n \geq 1$, considerere h_n a solução minimal do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle_N h_n = \lambda h, & \text{on} \quad \Omega_n \setminus \Omega \\ h_n = 1, & \text{on} \quad \partial\Omega \\ h = 0, & \text{on} \quad \Omega_n \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Seja $\widetilde{h}_n = h_n \circ \pi$ o levantamento de h_n. Como as fibras são mínimas, os levantamentos $\widetilde{h}_n$ satisfazem o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle_M \widetilde{h}_n = \lambda \widetilde{h}, & \text{on} \quad \widetilde{\Omega}_n \setminus \widetilde{\Omega} \\ \widetilde{h}_n = 1, & \text{on} \quad \partial\widetilde{\Omega} \\ \widetilde{h} = 0, & \text{on} \quad \widetilde{\Omega}_n \end{cases} \tag{3.3.2}$$

De fato, como as fibras $\mathcal{F}_p$ são mínimas temos por [5] que $\operatorname{div}_M(\widetilde{X}) = \operatorname{div}_N(X)$ onde $\widetilde{X}$ e X são π-relacionados. Em particular

$$\begin{aligned} \triangle_M \widetilde{h}_n(\widetilde{x}) &= \operatorname{div}_M(\operatorname{grad}_M \widetilde{h}_n)(\widetilde{x}) \\ &= \operatorname{div}_N(\operatorname{grad}_N h_n)(\pi(\widetilde{x})) \\ &= \triangle_N h_n(\pi(\widetilde{x})) \\ &= \lambda h_n(\pi(\widetilde{x})) \\ &= \lambda \widetilde{h}_n(\widetilde{x}) \end{aligned}$$

De $\pi(\partial\pi^{-1}(\Omega)) \subset \partial\Omega$, $\pi(\partial\pi^{-1}(\Omega_n)) \subset \partial\Omega_n$ concluímos que $\widetilde{h}_n = 1$ in $\partial\widetilde{\Omega}$, e $\widetilde{h}_n = 0$ em $\partial\widetilde{\Omega}_n$. Aplicando o Teorema 3.1.4, temos que, para cada $n \geq 1$, a função $\widetilde{h}_n$ é a solução minimal do problema de Dirichlet (3.8).

Agora, suponha que M é Feller. Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset N$ tal que $h(x) < \varepsilon$ para todo $x \in N \setminus K$. Como M é Feller, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\widetilde{K} \subset M$ tal que $\widetilde{h}(\widetilde{x}) < \varepsilon, \forall \widetilde{x} \in M \setminus \widetilde{K}$. Tome $K = \pi(\widetilde{K})$ e $\widetilde{K}_0 = \pi^{-1}(K)$. Então temos que $\widetilde{K} \subset \widetilde{K}_0$ portanto $M \setminus \widetilde{K}_0 \subset M \setminus \widetilde{K}$, isto é, $\widetilde{h}(\widetilde{x}) < \varepsilon, \forall \widetilde{x} \in M \setminus \widetilde{K}_0$. Mas $\widetilde{h} = h \circ \pi$ logo, para todo $x \in N \setminus K$ temos

$$h(x) = h(\pi(\widetilde{x})) = \widetilde{h}(\widetilde{x}) < \varepsilon$$

Pelo Teorema 3.1.3, concluímos que N é Feller.
Agora, suponha que N é Feller, então

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$$

Como a fibra $\mathcal{F}_p$ é compacta, se $\widetilde{x} \to \infty$ em M então $x \to \infty$ em N daí

$$\lim_{\widetilde{x}\to\infty} \widetilde{h}(\widetilde{x}) = \lim_{\widetilde{x}\to\infty} h(\pi(\widetilde{x})) = \lim_{x\to\infty} h(x) = 0$$

isto é, M é Feller.

Capítulo 4

A Geometria do tensor de Bakry-Emery

4.1 Do Tensor de Bakry Emery

Iniciaremos esta seção com algumas definições:

Definição 19 *Uma variedade ponderada é uma tripla* $(M, g, d\mu)$ *onde* (M, g) *é uma variedade Riemanniana e* $d\mu = e^{-f}dM$*, onde* dM *é o elemento de volume Riemanniano de* M *e* f *é uma função suave em* M*. Denotaremos a variedade ponderada por* M_f*.*

Definição 20 *O Laplaciano ponderado de uma função* u *é dado por*

$$\Delta_f u = \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle$$

Observação 3 *Ao longo deste trabalho denotaremos o Laplaciano ponderado da função distância a um ponto fixado por* m_f*.*

O tensor de Bakry Emery, denotado por $\mathrm{Ric_f} = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, f$, é uma generalização natural do tensor de Ricci no contexto de variedades ponderadas e é natural indagar quais resultados válidos para o tensor de Ricci podem ser estendidos para o tensor de Bakry Emery Ricci. Um resultado que será de extrema utilidade é a fórmula de Bochner ponderada, que é inteiramente análoga à fórmula de Bochner clássica, como podemos ver abaixo.

Lema 5 *(Bochner)Se* M^n *é uma variedade Riemanniana e* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}\, f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \mathrm{Ric}\,(\nabla f, \nabla f) \tag{4.1.1}$$

Passemos agora a fórmula de Bochner ponderada.

Lema 6 *Seja* M_f *uma variedade Riemannaniana ponderada e* $u\colon M_f \to \mathbb{R}$ *uma função suave, então*

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla u|^2 = |\mathrm{Hess}\, u|^2 + \langle \nabla u, \nabla(\Delta_f u)\rangle + \mathrm{Ric_f}\,(\nabla u, \nabla u) \tag{4.1.2}$$

Demonstração: Inicialmente, observe que, pela fórmula de Bochner temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla u|^2 &= \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|\nabla u|^2\rangle \\ &= |\mathrm{Hess}\, u|^2 + \langle\nabla u, \nabla(\Delta u)\rangle + \mathrm{Ric}\,(\nabla u, \nabla u) - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|\nabla u|^2\rangle\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\langle\nabla u, \nabla\Delta_f u\rangle &= \langle\nabla u, \nabla(\Delta u - \langle\nabla f, \nabla u\rangle)\rangle \\ &= \langle\nabla u, \nabla\Delta u\rangle - \langle\nabla u, \nabla\langle\nabla f, \nabla u\rangle\rangle \\ &= \langle\nabla u, \nabla\Delta u\rangle - \nabla u\langle\nabla f, \nabla u\rangle \\ &= \langle\nabla u, \nabla\Delta u\rangle - \langle\nabla_{\nabla u}\nabla f, \nabla u\rangle + \langle\nabla f, \nabla_{\nabla u}\nabla u\rangle\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla u|^2 = |\mathrm{Hess}\, u|^2 + \langle\nabla u, \nabla\Delta_f u\rangle + \mathrm{Ric_f}\,(\nabla u, \nabla u) + \langle\nabla f, \nabla_{\nabla u}\nabla u\rangle - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|\nabla u|^2\rangle$$

Afirmação 1 $\langle\nabla f, \nabla_{\nabla u}\nabla u\rangle = \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|\nabla u|^2\rangle$

De fato, note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|\nabla u|^2\rangle &= \frac{1}{2}\nabla f(\langle\nabla u, \nabla u\rangle) \\ &= \langle\nabla_{\nabla f}\nabla u, \nabla u\rangle \\ &= \mathrm{Hess}\, u(\nabla f, \nabla u) \\ &= \mathrm{Hess}\, u(\nabla u, \nabla f) \\ &= \langle\nabla f, \nabla_{\nabla u}\nabla u\rangle\end{aligned}$$

Donde segue o resultado.

Nosso primeiro resultado é uma estimativa para a curvatura média das esferas geodésicas m_f em termos de uma estimativa inferior para $\mathrm{Ric_f}$ como em Wey e Willie em [34] trocando a estimativa inferior $(n-1)H$, com H constante, por $(n-1)G$ onde $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Proposição 4.1.1 *Se* $\mathrm{Ric_f}\,(\partial_r\,, \partial_r\,) \geq G(r)$ *então dado um segmento geodésico minimal e* $r_0 \geq 0$ *temos*

$$m_f(r) \leq m_f(r_0) - \int_{r_0}^{r} G(t)dt \tag{4.1.3}$$

para $r \geq r_0$.

Demonstração: Aplicando a fórmula de Bochner formula 4.1.2 para o caso $f = 0$ a função $r(x) = \mathrm{dist}\,(p, x)$ obtemos

$$\begin{aligned}0 &= |\mathrm{Hess}\, r|^2 + \frac{\partial}{\partial r}(\Delta r) + \mathrm{Ric}\,(\nabla r, \nabla r) \\ &\geq \frac{1}{n-1}(\Delta r)^2 + \frac{\partial}{\partial r}(\Delta r) + \mathrm{Ric}\,(\nabla r, \nabla r)\end{aligned}$$

Como $\Delta r = m(r)$ é a curvatura média da esfera geodésica de raio r vem que

$$m' \leq -\frac{m^2}{n-1} - \mathrm{Ric}\,(\partial_r\,, \partial_r\,) \tag{4.1.4}$$

Observe que

$$\begin{aligned} m_f(r) &= \Delta_f r \\ &= \Delta r + \langle \nabla f, \nabla r \rangle \\ &= \Delta r - \partial_r\,(f) \\ &= m(r) - \partial_r\,(f) \end{aligned}$$

e $\mathrm{Ric_f}\,(\partial_r\,, \partial_r\,) = \mathrm{Ric}\,(\partial_r\,, \partial_r\,) + \mathrm{Hess}\, f(\partial_r\,, \partial_r\,) \geq G(r)$ donde

$$\begin{aligned} m_f'(r) &= -\frac{m^2}{n-1} - \mathrm{Ric}\,(\partial_r\,, \partial_r\,) - \mathrm{Hess}\, f(\partial_r\,, \partial_r\,) \\ &= -\frac{m^2}{n-1} - \mathrm{Ric_f}\,(\partial_r\,, \partial_r\,) \\ &\leq -\frac{m^2}{n-1} - G(r) \\ &\leq -G(r) \end{aligned}$$

Integrando de r_0 a r obtemos o resultado. Uma consequencia imediata da proposição acima é seguinte estimativa de volume

Proposição 4.1.2 *Seja M_f variedade ponderada tal que* $\mathrm{Ric_f} \geq G$. *Então existem constantes positivas A, B, C, D tais que*

$$\mathrm{Vol_f(B(R))} \leq A + B \int_{r_0}^{R} e^{Cr + \int_{r_0}^{r} \int_{r_0}^{s} [G(t) - D] dt ds} dr$$

Demonstração: Segue, da fórmula de Bochner ponderada que

$$m_f'(t, \theta) \leq -\frac{1}{n} m^2(t, \theta) + G(t) \tag{4.1.5}$$

Integrando de r_0 a R temos

$$m_f(R, \theta) \leq m_f(r_0, \theta) - \frac{1}{n} \int_{r_o}^{R} m^2(t, \theta) dt + \int_{r_0}^{R} G(t) dt \tag{4.1.6}$$

Lembre que $m_f(r, \theta) = \frac{\mathcal{A}_f'(r, \theta)}{\mathcal{A}(r, \theta)}$ portanto

$$e^{\int_{r_0}^{R} m_f(t, \theta) dt} = \frac{\mathcal{A}_f(R, \theta)}{\mathcal{A}_f(r_0, \theta)}$$

Daí

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_f(R, \theta) &\leq \mathcal{A}_f(r_0, \theta) e^{\int_{r_0}^{R} m_f(t, \theta) dt} \\ &\leq \mathcal{A}_f(r_0, \theta) e^{\int_{r_0}^{R} m_f(r_0, \theta) dt - \frac{1}{n} \int_{r_0}^{R} \int_{r_o}^{s} m^2(t, \theta) dt ds + \int_{r_0}^{R} \int_{r_0}^{s} G(t) dt ds} \end{aligned}$$

Denotando por $\mathfrak{A}(r_0, R) = B(R) \setminus B(r_0)$ temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol_f}\, \mathfrak{A}(r_0, R) &= \int_{r_0}^{R} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{A}_f(r,\theta) d\theta dr \\ &\leq \int_{r_0}^{R} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{A}_f(r_0,\theta) e^{\{\int_{r_0}^{r} m_f(r_0,\theta)dt - \frac{1}{n}\int_{r_0}^{r}\int_{r_o}^{s} m^2(t,\theta)dtds + \int_{r_0}^{r}\int_{r_0}^{s} G(t)dtds\}} d\theta dr \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\frac{e^{\int_{r_0}^{r} m_f(r_0,\theta)dt} e^{\int_{r_0}^{r}\int_{r_0}^{s} G(t)dtds}}{e^{\frac{1}{n}\int_{r_0}^{r}\int_{r_o}^{s} m^2(t,\theta)dtds}} \leq \frac{e^{Cr} e^{\int_{r_0}^{r}\int_{r_0}^{s} G(t)dtds}}{e^{\frac{1}{n}\int_{r_0}^{r}\int_{r_o}^{s} m^2(t,\theta)dtds}} \tag{4.1.7}$$

onde $C = \max\{0, \sup\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} m_f(r_0,\theta)\} \geq 0$ donde, tomando $D = \inf\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \dfrac{m^2(t,\theta)}{n}$ temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol_f}\, \mathfrak{A}(r_0, R) &\leq \int_{r_0}^{R} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{A}_f(r_0,\theta) e^{\{Cr + \int_{r_0}^{r}\int_{r_0}^{s}[G(t) - \frac{m^2(t,\theta)}{n}]dtds\}} d\theta dr \\ &\leq \int_{r_0}^{R} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{A}_f(r_0,\theta) e^{\{Cr + \int_{r_0}^{r}\int_{r_0}^{s}[G(t) - D]dtds\}} d\theta dr \\ &= B \int_{r_0}^{R} e^{\{Cr + \int_{r_0}^{r}\int_{r_0}^{s}[G(t) - D]dtds\}} dr \end{aligned}$$

onde $B = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{A}_f(r_0,\theta) d\theta$.
Finalmente

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol_f(B(R))} &= \mathrm{Vol_f}\, B(r_0) + \mathrm{Vol_f}\, \mathfrak{A}(r_0, R) \\ &\leq \mathrm{Vol_f}\, B(r_0) + B \int_{r_0}^{R} e^{\{Cr + \int_{r_0}^{r}\int_{r_0}^{s}[G(t) - D]dtds\}} dr \end{aligned}$$

Tomando $A = \mathrm{Vol_f}\, B(r_0)$ segue o resultado.

Os Teoremas 4.1.1 e 4.1.2 abaixo, foram obtidos, independentemente, por Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti em [31].

Teorema 4.1.1 *Seja M_f uma variedade ponderada e γ um segmento geodésico minimal a partir de $p \in M_f$. Suponha que* $\mathrm{Ric_f} \geq (n-1)G$ *onde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave, par. Então*

(i) Se $\partial_r f \geq -a, a \geq 0$ ao longo de γ então $m_f(r) \leq m_{aG}(r)$ ao longo de γ

(ii) Se $|f| \leq K$ ao longo de γ então $m_f(r) \leq m_G^{n+4K}(r)$ ao longo de γ.

Demonstração(item (i)) Considere sn_G a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} sn_G'' + G sn_G = 0 \\ sn_G(0) = 0 \\ sn_G'(0) = 1 \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Note que

$$m_G = (n-1)\frac{sn'_G}{sn_G} \tag{4.1.9}$$

Daí temos

$$\begin{aligned}
(sn_G^2 m)' &= 2sn_G sn'_G m + sn_G^2 m' \\
&\leq 2sn_G sn'_G m + sn_G^2(-\frac{m^2}{n-1} - \mathrm{Ric}\,(\partial_r\,,\partial_r\,)) \\
&= 2sn_G sn'_G m - sn_G^2 \frac{m^2}{n-1} - sn_G^2 \mathrm{Ric}\,(\partial_r\,,\partial_r\,) \\
&= -\Big(\frac{sn_G m}{\sqrt{n-1}} - \sqrt{n-1} sn'_G\Big)^2 + (n-1)(sn'_G)^2 - sn_G^2 \mathrm{Ric}\,(\partial_r\,,\partial_r\,) \\
&\leq (n-1)(sn'_G)^2 - sn_G^2 \mathrm{Ric}\,(\partial_r\,,\partial_r\,) \\
&\leq (n-1)(sn'_G)^2 - sn_G^2 f'' - sn_G^2(n-1)G
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(sn_G^2 m_G)' &= 2sn_G sn'_G m_G + sn_G^2 m'_G \\
&= 2(n-1)(sn'_G)^2 + sn_G^2\Big((n-1)\frac{sn'_G}{sn_G}\Big)' \\
&= 2(n-1)(sn'_G)^2 + sn_G^2(n-1)\Big(sn''_G sn_G - (sn'_G)^2\Big) \\
&= 2(n-1)(sn'_G)^2 + (n-1)sn''_G sn_G - (n-1)(sn'_G)^2 \\
&= (n-1)(sn'_G)^2 + (n-1)sn_G(-G sn_G) \\
&= (n-1)(sn'_G)^2 - (n-1)G(r)sn_G^2
\end{aligned}$$

Concluímos estão que $(sn_G^2 m)' \leq (sn_G^2 m_G)' + sn_G^2 \partial_r^2(f)$ e, integrando de 0 a r

$$sn_G^2(r)m(r) \leq sn_G^2(r)m_G(r) + \int_0^r sn_G^2(t)f''(t)dt \tag{4.1.10}$$

Aplicando integração por partes no lado direito da desigualdade acima

$$\begin{aligned}
\int_0^r sn_G^2(t)f''(t)dt &= sn_G^2(t)f'(t)\Big|_0^r - \int_0^r f'(t)(sn_G^2(t))'dt \\
&= sn_G^2(r)f'(r) - \int_0^r f'(t)(sn_G^2(t))'dt
\end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$sn_G^2(r)m_f(r) \leq sn_G^2(r)m_G(r) - \int_0^r f'(t)(sn_G^2(t))'dt \tag{4.1.11}$$

Como $\partial_r\,(f) = f'(r) \geq a$ então

$$sn_G^2(r)m_f(r) \leq sn_G^2(r)m_G(r) + a sn_G^2(r)$$

portanto

$$m_f(r) \leq m_G(r) + a = m_{aG}(r)$$

onde m_{aG} é a curvatura média da esfera geodésica do modelo Riemanniano ponderado M_{aG}

Demonstração(item ii.)

Aplicando integração por partes na desigualdade 4.1.11 obtemos

$$\begin{aligned}
sn_G^2(r)m_f(r) &\leq sn_G^2(r)m_G(r) - \int_0^r f'(t)(sn_G^2(t))'dt \\
&\leq sn_G^2(r)m_G(r) - (sn_G^2(t))'f(r) + \int_0^r (sn_G^2)''(t)f(t)dt \\
&\leq sn_G^2(r)m_G(r) - (sn_G^2(t))'f(r) + K\int_0^r (sn_G^2)''(t)dt \\
&\leq sn_G^2(r)m_G(r) + 2K(sn_G^2(r))'
\end{aligned}$$

Da Equação 4.1.9 vem que

$$sn_G^2(r)m_f(r) \leq sn_G^2(r)m_G(r) + 2K2sn_G(r)sn'_G(r)$$

Finalmente segue que

$$\begin{aligned}
m_f(r) &\leq m_G(r) + 4K\frac{sn'_G(r)}{sn_G(r)} \\
&= m_G(r) + 4K\frac{m_G(r)}{n-1} \\
&= m_G(r)\Big(1 + \frac{4K}{n-1}\Big) \\
&= m_G^{n+4K}(r)
\end{aligned}$$

O próximo lema será crucial no demonstração do Teorema 4.1.2

Lema 7 *Sejam f e g funções contínuas tais que $f(s) > 0$, $g(s) > 0$ e $\dfrac{f(s)}{g(s)}$ é não-crescente para $s > 0$. Defina $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ and $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$ então $\dfrac{F(t)}{G(t)}$ é não-crecente para $s > 0$*

Como consequencia do Teorema 4.1.1 temos a seguinte comparação de volumes.

Teorema 4.1.2 *Seja M_f uma variedade ponderada e $p \in M_f$ fixado. Suponha que $\mathrm{Ric_f} \geq (n-1)G$ onde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave, par. Então*

(i) Se $\partial_r f \geq -a$ ao longo de todo segmento geodésico minimal a partir de p então para $R \geq r > 0$

$$\frac{\mathrm{Vol_f(B(R))}\,)}{\mathrm{Vol_f(B(r))}} \leq e^{aR}\frac{\mathrm{vol}\,^n_G(R)}{\mathrm{vol}\,^n_G(r)}$$

(ii) If $|f| \leq K$ then for $0 < r \leq R$
$\frac{\mathrm{Vol_f(B(R))}}{\mathrm{Vol_f(B(r))}} \leq \frac{\mathrm{vol}\,_G^{n+4K}(R)}{\mathrm{vol}\,_G^{n+4K}(r)}$

Demonstração(item i.) Seja $M^n_{G,a} = (M^n_G, g_G, e^{-h}, O)$ onde (M^n_G, g_G) é o modelo Riemanniano com curvatura seccional G, $O \in M^n_G$ e $h(x) = -ar(x) = -a\mathrm{dist}\,(x, O)$. Denotando por $dM_{G,a} = \mathcal{A}^a_G dt d\theta^{n-1}$ o elemento de volume de $M^n_{G,a}$ então $\mathcal{A}^a_G(r) = e^{ar}\mathcal{A}_G(r)$ onde $\mathcal{A}_G(r)$ é o elemento de volume de M^n_G. Como $\mathrm{Ric_f} \geq (n-1)G$ e $\partial_r f \geq -a$ concluímos que $m_f(r) \leq a + m_G(r)$.

Observe que

$$\Big(\ln \mathcal{A}_f(r,\theta)\Big)' = m_f(r) =\leq a + m_G(r) = \Big(\ln(\mathcal{A}^a_G(r,\theta))\Big)'$$

isto é, $\frac{\mathcal{A}'_f(r,\theta)}{\mathcal{A}_f(r,\theta)} \leq \frac{(\mathcal{A}^a_G)'(r,\theta)}{\mathcal{A}^a_G(r,\theta)}$

Afirmação 2 *Se $0 < r < R$ então* $\frac{\mathcal{A}_f(R,\theta)}{\mathcal{A}_f(r,\theta)} \leq \frac{(\mathcal{A}^a_G)(R,\theta)}{\mathcal{A}^a_G(r,\theta)}$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{A}_f(R,\theta)}{\mathcal{A}_f(r,\theta)} &= e^{\int_r^R m_f(s)ds} \\
&\leq e^{\int_r^R (a+m_G(s))ds} \\
&= e^{\int_r^R \Big(\ln(\mathcal{A}^a_G(r,\theta))\Big)' ds} \\
&= \frac{(\mathcal{A}^a_G)(R,\theta)}{\mathcal{A}^a_G(r,\theta)}
\end{aligned}$$

Daí, a função $r \mapsto \frac{\mathcal{A}_f(.,\theta)}{\mathcal{A}^a_G(.,\theta)}$ é não-crescente. Pelo Lema 7 concluímos que a função $t \mapsto \frac{\int \mathcal{A}_f(t,\theta)}{\int \mathcal{A}^a_G(t,\theta)}$ é não-crescente para $t > 0$. Se $0 < r_1 < r, 0 < R_1 < R$ com $r_1 \leq R_1, r \leq R$ obtemos

$$\frac{\int_{R_1}^R \mathcal{A}_f(t,\theta)dt}{\int_{r_1}^r \mathcal{A}_f(t,\theta)dt} \leq \frac{\int_{R_1}^R \mathcal{A}^a_G(t,\theta)dt}{\int_{r_1}^r \mathcal{A}^a_G(t,\theta)dt}$$

Observe que $m_f(r,\theta) = m_f(r)$ daí $m_f(r) = \Delta_f r$. Da mesma forma, tem-se $m(r,\theta) = m(r)$ donde $\mathcal{A}_f(r,\theta) = \mathcal{A}_f(r)$ e $\mathcal{A}_G(r,\theta) = \mathcal{A}_G(r)$. Escrevendo

$A(p,R_1,R) = B(p,R)\setminus B(p,R_1) = B(R)\setminus B(R_1)$ então

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol_f}\,(A(p,R_1,R)) &= \int_{B(R)\setminus B(R_1)} \mathcal{A}_f(s)dsd\theta\\ &= \int_{\mathbb{S}(1)}\int_{R_1}^{R} \mathcal{A}_f(s)dsd\theta\\ &= \omega_n\int_{R_1}^{R}\mathcal{A}_f(s)ds\end{aligned}$$

onde $\omega_n = \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^{n-1}(1))$. Analogamente temos

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\,^a_G(R_1,R) &= \int_{B_G(R)\setminus B_G(R_1)} e^{as}\mathcal{A}_G(s)dsd\theta\\ &= \int_{\mathbb{S}(1)}\int_{R_1}^{R} e^{as}\mathcal{A}_G(s)dsd\theta\\ &= \omega_n\int_{R_1}^{R} e^{as}\mathcal{A}_G(s)ds\\ &\le e^{aR}\omega_n\int_{R_1}^{R}\mathcal{A}_G(s)ds\\ &= e^{aR}\mathrm{vol}\,_G(R_1,R)\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Vol_f}\,(A(p,R_1,R))}{\mathrm{Vol_f}\,(A(p,r_1,r))} &= \frac{\omega_n\displaystyle\int_{R_1}^{R}\mathcal{A}_f(s)ds}{\omega_n\displaystyle\int_{r_1}^{r}\mathcal{A}_f(s)ds}\\ &\le \frac{\omega_n\displaystyle\int_{R_1}^{R}\mathcal{A}^a_G(s)ds}{\omega_n\displaystyle\int_{r_1}^{r}\mathcal{A}^a_G(s)ds}\\ &= \frac{\mathrm{vol}\,^a_G(R_1,R)}{\mathrm{vol}\,^a_G(r_1,r)}\\ &\le e^{aR}\frac{\mathrm{vol}\,_G(R_1,R)}{\mathrm{vol}\,_G(r_1,r)}\end{aligned}$$

Fazendo $r_1 = R_1 = 0$ temos o resultado.

Demonstração(item ii.)

Considere $\mathcal{A}^{n+4K}_G$ o elemento de volume do modelo Riemanniano ponderado M^{n+4K}_G, portanto o mesmo cálculo do item (i) permanece válido. Como

$$\frac{\mathrm{Vol_f}\,(A(p,R_1,R))}{\mathrm{Vol_f}\,(A(p,r_1,r))} \le \frac{\mathrm{vol}\,^a_G(R_1,R)}{\mathrm{vol}\,^a_G(r_1,r)} \tag{4.1.12}$$

fazendo $r_1 = R_1 = 0$ obtemos

$$\frac{\mathrm{Vol_f}\,(B(p,R))}{\mathrm{vol}\,^{n+4K}_G}(R) \le \frac{\mathrm{Vol_f}\,(B(p,r)))}{\mathrm{vol}\,^{n+4K}_G(r)} \tag{4.1.13}$$

4.2 Propriedades Estocásticas e $\mathrm{Ric_f}$

Definição 21 *Dizemos que uma variedade Riemanniana satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau se, para toda função* $u \in C^2(M)$, *com* $u^* = \sup_M u < \infty$, *existe uma sequencia* $\{x_n\} \subset M$ *com as seguintes propriedades*

(a) $u(x_k) > u - \frac{1}{k}$

(b) $|\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}$

(c) $\Delta u(x_k) < \frac{1}{k}$

O próximo resultado estabelece condições para que uma variedade satisfaça o pricípio do máximo de Omori-Yau

Teorema 4.2.1 *(Borbély, Bessa, Pigola, Rigoli, Rimoldi, Setti) Seja* M_f *uma variedade Riemanniana ponderada, completa e suponha que existe uma função* γ, *não negativa, de classe* C^2 *e constantes* $A, B > 0$ *satisfazendo as seguintes condições*

(a) $\gamma(x) \to \infty$ *quando* $x \to \infty$

(b) $|\nabla\gamma| \leq A$ *fora de um compacto*

(c) $\Delta_f \gamma \leq BG(\gamma)$ *fora de um compacto*

onde G *é uma função suave definida em* $[0, +\infty)$ *e tal que*
(i) $G(0) = 0$ *(ii)* $G'(t) \geq 0$ *on* $[0, +\infty)$ *(iii)* $G(t)^{-1} \notin L^1(+\infty)$

Então o princípio do máximo de Omori-Yau para Δ_f *é válido. O resultado é válido quando* $\gamma(r) = r(x)$ *é a função distância a um ponto o fixado e assumimos que a desigualdade* (c) *ocorre fora do cut locus de o (note que, neste caso,* (a) *e* (b) *são automaticamente satisfeitas).*

Definição 22 *Dizemos que uma variedade Riemanniana satisfaz o princípio do máximo fraco de Omori-Yau se, para toda* $u \in C^2(M)$, *com* $u^* = \sup_M u < \infty$, *existe uma sequencia* $\{x_n\} \subset M$ *satisfazendo as condições (a) e (c) da definição 21.*

Em [7] Bessa, Pigoli e Setti provaram o seguinte resultado:

Teorema 4.2.2 *Seja* M_f *uma variedade ponderada completa e suponha que*

$$\mathrm{Ric_f} \geq -k^2 \tag{4.2.1}$$

para algum $k \geq 0$ *ou*

$$\begin{cases} \mathrm{Ric_f}(x) \geq -k_1^2(r(x)) \\ |\nabla f|(x) \leq -k_2^2(r(x)) \end{cases} \tag{4.2.2}$$

onde $k_i(r)$ *são funções contínuas, não-decrescentes tais que* $k_i(r) \to \infty$ *quando* $r \to \infty$ *e*

$$\frac{1}{\sqrt{k_1^2(t) + k_2^2(t)}} \notin L^1(+\infty)$$

Então M_f *é estocasticamente completa.*

O Teorema 4.2.1, juntamente com a fórmula de Bochner nos permite concluir que, sob uma limitação inferior adequada para $\mathrm{Ric_f}$, M_f é estocasticamente completa. Observe que o Teorema abaixo não exige um controle da norma do gradiente de função f. No entanto, é necessário que M_f possua pólo.

Teorema 4.2.3 *Seja M_f uma variedade ponderada com pólo o e seja G como no Teorema 4.2.1. Suponha que $\mathrm{Ric_f}(\partial_r, \partial_r) \geq -C^2G'(r)$. Então o princípio do máximo de Omori Yau é válido em M_f. Em particular M_f é estocasticamente completa.*

Demonstração
Aplicando a fórmula de Bochner 4.1.2 a função distância r temos

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathrm{Hess}\, r|^2 + \langle \nabla r, \nabla(\Delta_f r)\rangle + \mathrm{Ric_f}(\nabla r, \nabla r) \\ &= |\mathrm{Hess}\, r|^2 + \frac{\partial}{\partial r}(\Delta_f r) + \mathrm{Ric_f}(\nabla r, \nabla r) \\ &\geq \frac{\partial}{\partial r}(\Delta_f r) + \mathrm{Ric_f}(\nabla r, \nabla r) \end{aligned}$$

daí

$$\frac{\partial}{\partial r}(\Delta_f r) \leq C^2 G'(r)$$

Integrando a desigualdade de t_0 a t acima obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_f r(t,\theta) &\leq \Delta_f r(t_0,\theta) + C^2G(r(t)) - C^2G(r(t_0)) \\ &\leq \widetilde{C}G(r(t)) \end{aligned}$$

para todo $t > t_0$, i.e, fora da bola $B(t_0)$. Pelo Teorema 4.2.1 concluímos que o princípio do máximo de Omori-yau para Δ_f vale para M_f,isto é, M_f é estocasticamente completa.

4.3 Teorema de Myers para $\mathrm{Ric_f}$

Em [1] Ambrose provou o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1 *Seja M variedade Riemanniana completa e suponha que existe $p \in M$ tal que para toda geodésica γ partindo de p vale*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{Ric}(\gamma'(s), \gamma'(s))ds = \infty \tag{4.3.1}$$

Então M ćompacta.

Observação 4 *Em [16] Galloway provou a compacidade de M sob a condição*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t s^\lambda \mathrm{Ric}(\gamma'(s), \gamma'(s))ds = \infty, 0 \leq \lambda < 1 \tag{4.3.2}$$

Wraith [35] provou o seguinte teorema, o qual é equivalente ao teorema de Ambrose.

Teorema 4.3.2 *Seja M variedade Riemanniana completa e não compacta e seja $\gamma(s), s \geq 0$ raio geodésico em M. Se*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{Ric}\,(\gamma'(s),\gamma'(s))ds \tag{4.3.3}$$

existe, tal limite é finito.

A seguinte pergunta surge naturalmente no contexto de variedades ponderadas: é possível, no Teorema de Ambrose, substituir Ric por $\mathrm{Ric_f}$? O exemplo a seguir mostra que a simples substituição de Ric por $\mathrm{Ric_f}$ não é possível.

Exemplo 4 *Seja $M = \mathbb{R}^n$ e tome $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ então $\mathrm{Hess}\, f = Id$. Seja γ geodésica normalizada partindo da origem então*

$$\mathrm{Ric_f}\,(\gamma',\gamma') = \mathrm{Ric}\,(\gamma',\gamma') + \mathrm{Hess}\, f(\gamma',\gamma') = 0 + \mathrm{Hess}\, f(\gamma',\gamma') = 1$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{Ric_f}\,(\gamma'(s),\gamma'(s))ds = \lim_{t\to\infty}\int_0^t 1ds = \infty$$

mas $\mathbb{R}^n$ não é compacto.

Observe que, no exemplo acima, a função f é radial, não negativa e crescente. Tais condições sugerem que uma extensão do Teorema de Ambrose para $Ricf$ requer uma condição sobre a função f (e sua derivada radial). Tais condições são dadas no teorema abaixo.

Teorema 4.3.3 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, não-compacta e seja $\gamma(t), t \geq 0$ um raio geodésico de M e f função suave, não negativa, radial à partir de $\gamma(0)$ com $\frac{\partial f}{\partial t} \leq 0$ e tal que o limite*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{Ric_f}\,(\gamma'(s),\gamma'(s))ds \tag{4.3.4}$$

existe, então tal limite é finito.

Demonstração
Da equação 4.1.4 segue a equação de Ricatti

$$\mathrm{Ric_f}\,(\partial_r\,,\partial_r\,) \leq -m_f' - \frac{1}{n-1}(m)^2 \tag{4.3.5}$$

Integrando a desigualdade acima de 1 a t e tomando o limite quando t tende ao infinito obtemos

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \mathrm{Ric_f}\,(\gamma'(s),\gamma'(s))ds \leq \lim_{t\to\infty}\int_1^t (-m_f'(s) - \frac{1}{n-1}(m)^2(s))ds$$

Se o limite no lado esquerdo da desigualdade acima é infinito então o limite no lado direito também é infinito. Em particular, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty}(-m_f(t) - \int_1^t (m)^2(s)ds) = \infty \tag{4.3.6}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} -m_f(t) = \infty$$

Afirmação 3 *Existe um* t_∞ *tal que* $\lim_{t\to t_\infty^-} -m_f(t) = \infty$

Como $\lim_{t\to\infty}(-m_f(t) - \int_1^t (m)^2(s)ds) = \infty$ então existe um $t_1 > 1$ tal que $-m_f(t) - \int_1^t (m)^2(s)ds > 10, \forall t \geq t_1$

Defina a sequencia $\{t_n\}$ por $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{10^{n-1}}$ então $\lim_{n\to\infty} t_n = t_1 + \dfrac{10}{9}$. Observe que, se $-m_f(t) \geq k, \forall t \geq t_{n-1}$ então, para todo $t \geq t_n$ temos

$$\begin{aligned}
-m_f(t) &> \int_1^t m^2(s)ds \\
&> \int_{t_{n-1}}^{t_n} (m_f(s) + \frac{\partial f}{\partial s})^2 ds \\
&\geq \int_{t_{n-1}}^{t_n} (m_f^2(s) + 2m_f(s)\frac{\partial f}{\partial s})ds
\end{aligned}$$

Como$\frac{\partial f}{\partial s} \leq 0$ e $-m_f(t) \geq k$ segue que $2m_f(s)\frac{\partial f}{\partial s} \geq -2k\frac{\partial f}{\partial s} \geq 0$ donde

$$\begin{aligned}
-m_f(t) &\geq \int_{t_{n-1}}^{t_n} (m_f^2(s) + 2m_f(s)\frac{\partial f}{\partial s})ds \\
&\geq \int_{t_{n-1}}^{t_n} (k^2 - 2k\frac{\partial f}{\partial s})ds \\
&= k^2(t_n - t_{n-1}) - 2k[f(t_n) - f(t_{n-1})] \\
&\geq k^2(t_n - t_{n-1}) \\
&= k^2\frac{1}{10^{n-2}}
\end{aligned}$$

Observe que $-m_f(t) \geq 10^n, \forall t \geq t_n$.
De fato, usando um argumento de indução temos que, para $n = 1$ o resultado é verdadeiro, isto é, $-m_f(t) \geq 10, \forall t \geq t_1$. Assuma, por hipótese de indução, que $-m_f(t) \geq 10^n, \forall t \geq t_n$ então, o cálculo acima nos permite concluir que, para $t \geq t_{n+1} > t_n$

$$-m_f(t) \geq (10^n)^2\frac{1}{10^{n-1}} = 10^{n+1}, \forall t \geq t_{n+1}$$

Finalmente, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} -m_f(t_n) = \lim_{x\to\frac{10}{9}} -m_f(t_1 + x) \geq \lim_{n\to\infty} 10^n = \infty$$

Mas isso contradiz o fato de $-m_f$ ser suave fora de uma vizinhança de $\gamma(0)$, portanto, o limite em 4.3.4 é finito.

Observe que podemos enunciar o Teorema acima de maneira equivalente:

Teorema 4.3.4 *Seja M variedade Riemanniana completa e suponha que existem $q \in M$ e f função suave, não negativa, radial em q com $\frac{\partial f}{\partial t} \leq 0$ tal que, para toda geodésica γ partindo de q vale*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{Ric_f}\,(\gamma'(s), \gamma'(s))ds = \infty \qquad (4.3.7)$$

Então M é compacta.

Como consequencia do Teorema acima temos:

Teorema 4.3.5 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $f \in C^\infty(M)$ como no Teorema acima. Suponha que*

$$\mathrm{Ric_f} + \mathcal{L}_X g \geq cg \tag{4.3.8}$$

para alguma função suave c e X campo de vetores suave em M. Se

$$\lim_{t\to\infty}\{\int_0^t c(s)ds - 2|X(t)|\} = \infty$$

Então M é compacta.

Demonstração: Seja γ geodésica partindo de p então

$$\mathcal{L}_X g(\gamma',\gamma') = 2\frac{d}{ds}g(\gamma',\gamma')$$

da´

$$\mathrm{Ric_f}(\gamma'(s),\gamma'(s)) + \mathcal{L}_X g(\gamma'(s),\gamma'(s)) \geq c(\gamma(s))$$

Integrando de 0 a t obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathrm{Ric_f}(\gamma'(s),\gamma'(s))ds &\geq \int_0^t c(\gamma(s))ds - \int_0^t \mathcal{L}_X g(\gamma'(s),\gamma'(s))ds \\
&= \int_0^t c(\gamma(s))ds - \int_0^t 2\frac{d}{ds}g(\gamma',\gamma')ds \\
&= \int_0^t c(\gamma(s))ds - 2g(\gamma'(t),\gamma'(t)) + 2g(\gamma'(0),\gamma'(0)) \\
&\geq \int_0^t c(\gamma(s))ds - 2|X(\gamma(t))| + 2g(\gamma'(0),\gamma'(0))
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $t \to \infty$ obtemos

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{Ric_f}(\gamma'(s),\gamma'(s))ds \geq \lim_{t\to\infty}\{\int_0^t c(\gamma(s))ds - 2|X(\gamma(t))|\} + 2g(\gamma'(0),\gamma'(0))$$

Como, por hipótese, o limite do lado esquerdo da desigualdade tende a infinito quando $t \to \infty$ então

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{Ric_f}(\gamma'(s),\gamma'(s))ds = \infty$$

Pelo teorema anterior segue que M_f é compacta.

Observação 5 *O teorema acima foi provado por Fernadez-Lopes e Garcia-Rio[REFERENCIA], no caso do tensor de Ricci com a condição de c ser uma constante positiva e X ser um campo limitado.*

4.4 Estimativa do Gradiente

Em [**?**], Yau provou a seguinte estimativa para o gradiente de uma função harmônica positiva:

Teorema 4.4.1 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com* Ric $\geq -(n-1)K$ *onde $K \geq 0$ é constante. Suponha que u é uma função harmônica positiva em M e que $B(p,R)$ é bola geodésica em M, então*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C(n)\Big(\frac{1+R\sqrt{K}}{R}\Big) \tag{4.4.1}$$

em $B(p,\frac{R}{2})$, onde $C(n)$ é uma constante que depende somente de n.

Como consequencia temos que se M é tal que Ric ≥ 0 então M não admite função harmõnica positiva não constante.
Uma extensão desse resultado para $\mathrm{Ric_f}$ foi obtida por Chen e Chen [10]

Teorema 4.4.2 *Seja M_f variedade ponderada completa tal que* $\mathrm{Ric_f} \geq -H$, *com $H \geq 0$ constante. Suponha que* Ric $\geq K, K \geq 0$. *Se u é uma função f-harmônica positiva definida na bola geodésica $B(p,2R)$ ento, em $B(p,R)$ vale*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C(n)\Big(\sqrt{H+K} + \sup_{B(p,2R)} |\nabla f| + \frac{1}{R}\Big) \tag{4.4.2}$$

onde $C(n)$ é uma constante que depende somente de n.

Observe que quando f é constante, a estimativa acima se reduz à estimativa de Yau. Em [9] Brighton obteve duas estimativas para o gradiente de uma função f-harmônica positiva sob a hipótese de $\mathrm{Ric_f} \geq -H^2$, onde $H \geq 0$ é constante. Vale ressaltar que, ao contrário da estimativa obtida por Chen e Chen, as estimativas obtidas por Brighton não se reduzem à estimativa de Yau no caso de f constante e $H = 0$.
No próximo resultado apresentamos algumas estimativa do gradiente de uma função f-harmônica positiva. Note que, em qualquer dos casos abaixo, quando $f = 0$ e $G \geq 0$ constante é possível reobter a estimativa devida a Yau Y1.

Teorema 4.4.3 *Seja M_f uma variedade ponderada completa com* $\mathrm{Ric_f}(\partial_r, \partial_r) \geq -(n-1)G(r)$ *onde $G \in C^0(\mathbb{R}_+)$ é positiva. Se u é uma função f-harmonica positiva definida em $\overline{B(q,2R)}$ com $R \geq 1$, então em $B(q,R)$*

(i) $\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{\widetilde{C}_1}{R^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{R}\int_1^{2R} G(t)dt + n\{\frac{2}{n}|\nabla f|^2 - 2\frac{\widetilde{C}_3}{R}\}^2 + 2(n-1)\sup\limits_{B(q,R)} G}$

(ii) Se existe $0 \leq a < \frac{1}{2}$ tal que $\langle \nabla \ln u, \nabla f\rangle \leq a|\nabla \ln u|^2$ então
$\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{\widetilde{C}_1}{R^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{R}\int_1^{2R} G(s)ds + 2(n-1)\sup\limits_{B(q,R)} G}$

(iii) $\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{\widetilde{C}_1}{R^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{R}\int_1^{2R} G(s)ds + C_3(n)\sup\limits_{B(q,R)} G}$

onde $\alpha = \max_{S(q,1)} \Delta_f r$ e as constantes $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ e $\widetilde{C}_3$ dependem somente de n e α.

Seguindo a ideia original de Yau, multiplicamos $|\nabla h|^2$ por uma função "cut-off" de modo a obter uma função que possui um máximo no interior de $B(p, 2R)$. Para isso, considere a função $\phi : \overline{B(p, 2R)} \to [0, 1]$ dada por $\phi(x) = j(r(x))$ onde $r(x) = \operatorname{dist}(p, x)$ e a função $j : [0, 2R] \to [0, 1]$ é uma função de classe C^3 que satisfaz, para algum $c > 0$, as propriedades abaixo:

(i) $j \equiv 1$ on $[0, R]$

(ii) $\operatorname{supp} j \subset [0, 2R]$

iii) $-\frac{c}{R}\sqrt{j} \leq j' \leq 0$

(iv) $|j''| \leq \frac{c}{R^2}$

Escrevendo $J = \phi|\nabla h|^2$ temos

$$\nabla J = |\nabla h|^2 \nabla\phi + \phi\nabla|\nabla h|^2 \tag{4.4.3}$$

e

$$\nabla|\nabla h|^2 = \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2} \tag{4.4.4}$$

O Laplaciano ponderado de J é dado por

$$\Delta_f J = \phi\Delta_f|\nabla h|^2 + |\nabla h|^2\Delta_f\phi + 2\langle\nabla\phi, \nabla|\nabla h|^2\rangle \tag{4.4.5}$$

Observe que $J \geq 0$ e que $J_{|\partial B(q,2R)} = 0$ daí o máximo de J é atingido em $q_0 \in B(q, 2R)$ e no ponto q_0 temos $\nabla J(q_0) = 0$ e $\nabla|\nabla h|^2(q_0) = -J\frac{\nabla\phi}{\phi}(q_0)$.
Demonstração (i):
Seja $h = \ln u$ então $\operatorname{grad} h = \frac{1}{u}\nabla u$ e $\Delta_f h = -|\nabla w|^2$. Observe que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Hess} h|^2 &\geq \frac{1}{n}(\Delta h)^2 \\
&= \frac{1}{n}(\Delta_f h + \langle\nabla h, \nabla f\rangle)^2 \\
&\geq \frac{1}{n}(\Delta_f h)^2 + \frac{2}{n}\Delta_f h\langle\nabla h, \nabla f\rangle \\
&= \frac{1}{n}|\nabla h|^4 - \frac{2}{n}|\nabla h|^2\langle\nabla h, \nabla f\rangle
\end{aligned}$$

Segue da fórmula de Bochner que

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 \geq \frac{1}{n}|\nabla h|^4 - \frac{2}{n}|\nabla h|^2\langle\nabla h, \nabla f\rangle - \langle\nabla h, \nabla|\nabla h^2\rangle + \mathrm{Ric_f}(\nabla h, \nabla h) \tag{4.4.6}$$

Em particular, no ponto q_0 temos

$$\phi\Delta_f|\nabla h|^2(q_0) \leq -|\nabla h|^2\Delta_f\phi(q_0) + 2\frac{J}{\phi}\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}(q_0) \tag{4.4.7}$$

Sendo $\mathrm{Ric_f} \geq -(n-1)G, G \geq 0$ segue da Proposição 4.1.1 que
$\Delta_f r(q_0) \leq \Delta_f r(p) + (n-1)\int_1^{r(q_0)} G(t)dt \leq \alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(t)dt$
onde $\alpha = \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \Delta_f r(p,\theta), r(p) = 1$.
Observe que

$$\Delta_f \phi = j'' + j'\Delta_f r \geq -\frac{C_2}{R^2} - \frac{C_1}{R}\Big[\alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(t)dt\Big] \tag{4.4.8}$$

donde, substituindo na equação 4.4.7 e usando que $\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \leq \frac{C_1^2}{R^2}$ obtemos

$$\phi\Delta_f|\nabla h|^2(q_0) \leq \frac{J}{\phi}\Big\{\frac{2C_1^2 + C_2}{R^2} + \frac{C_1}{R}\Big[\alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(t)dt\Big]\Big\}(q_0) \tag{4.4.9}$$

Calculando 4.4.6 em q_0 e fazendo $\mathrm{Ric_f} \geq -(n-1)G$ e $J = \phi|\nabla h|^2$ vem que

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2(q_0) \geq \Big[\frac{1}{n}\frac{J^2}{\phi^2} - \frac{2}{n}\frac{J}{\phi}\langle\nabla h, \nabla f\rangle - \langle\nabla h, \nabla|\nabla h^2\rangle - (n-1)G\frac{J}{\phi}\Big](q_0) \tag{4.4.10}$$

Em q_0 temos

$$2\frac{J}{\phi}\langle\nabla f, \nabla h\rangle \leq 2\frac{J}{\phi}|\nabla f||\nabla h| = 2\frac{J^{\frac{3}{2}}}{\phi^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle &= \langle\nabla h, -J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle \\
&\leq |\nabla h|| - \frac{J}{\phi}|\frac{|\nabla\phi|}{\phi} \\
&= \frac{J^{\frac{3}{2}}}{\phi^{\frac{3}{2}}}\frac{|\nabla\phi|}{\phi} \\
&\leq \frac{J^{\frac{3}{2}}}{\phi^{\frac{3}{2}}}\frac{C_1}{R}\phi^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{J^{\frac{3}{2}}}{\phi^2}\frac{C_1}{R}
\end{aligned}$$

Denotando por $\mathcal{E} = \frac{2C_1^2+C_2}{R^2} + \frac{C_1}{R}\Big[\alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(t)dt\Big]$ segue das equações 4.4.6 e 4.4.9 que,

$$\begin{aligned}
J(q_0)\{\mathcal{E}\} &\geq \phi^2\Delta_f|\nabla h|^2(q_0) \\
&\geq \Big\{\frac{2}{n}J^2 - \frac{2}{n}2\phi^2\frac{J}{\phi}\langle\nabla f, \nabla h\rangle - 2\phi^2\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle - 2(n-1)GJ\phi\Big\}(q_0) \\
&\geq \Big\{\frac{2}{n}J^2 - \frac{2}{n}\phi^2 2\frac{J^{\frac{3}{2}}}{\phi^{\frac{3}{2}}}|\nabla f| - 2J^{\frac{3}{2}}\frac{C_1}{R} - 2(n-1)GJ\Big\}(q_0) \\
&= \Big\{\frac{2}{n}J^2 \underbrace{- 2\frac{J^{\frac{3}{2}}}{\phi}\Big[\frac{2\phi^{\frac{1}{2}}}{n}|\nabla f| - 2\frac{C_1}{R}\phi\Big]}_{(*)} - 2(n-1)GJ\Big\}(q_0)
\end{aligned}$$

Vamos estimar o termo $(*)$ (omitiremos q_0 por conveniência)

$$\begin{aligned} 2\frac{J^{\frac{3}{2}}}{\phi}\Big[\frac{2\phi^{\frac{1}{2}}}{n}|\nabla f| - 2\frac{C_1}{R}\phi\Big] &= 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\frac{J}{\phi}J^{\frac{1}{2}}\Big[\frac{2\phi^{\frac{1}{2}}}{n}|\nabla f| - 2\frac{C_1}{R}\phi\Big] \\ &\leq \frac{J^2}{n} + \Big[\frac{2\phi^{\frac{1}{2}}}{n}|\nabla f| - 2\frac{C_1}{R}\phi\Big]^2 n\frac{J}{\phi^2} \end{aligned}$$

Concluímos então

$$\begin{aligned} J(q_0)\{\mathcal{E}\} &\geq \Big\{\frac{2}{n}J^2 - \frac{J^2}{n} - \Big[\frac{2\phi^{\frac{1}{2}}}{n}|\nabla f| - 2\frac{C_1}{R}\phi\Big]^2 n\frac{J}{\phi^2} - 2(n-1)GJ\Big\}(q_0) \\ &= \frac{J^2}{n}(q_0) - n\Big[\frac{2\phi^{-\frac{1}{2}}}{n}|\nabla f| - 2\frac{C_1}{R}\Big](q_0) - 2(n-1)G(r(q_0))J(q_0) \end{aligned}$$

Ou seja

$$n\Big\{\mathcal{E} + n\Big[\frac{2\phi^{-\frac{1}{2}}}{n}|\nabla f| - 2\frac{C_1}{R}\Big] + 2(n-1)G(r(q_0))\Big\} \geq J(q_0) \qquad (4.4.11)$$

Restrigindo-se à bola $B(q,R)$ temos que, para todo $p \in B(q,R)$ vale

$$\frac{|\nabla u|}{u}(p) \leq \sqrt{n\Big\{\frac{2C_1^2 + C_2}{R^2} + \frac{C_1}{R}\Big[\alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(t)dt\Big] + n\Big[\frac{2\phi^{-\frac{1}{2}}}{n}|\nabla f| - 2\frac{C_1}{R}\Big] + 2(n-1)G(r(q_0))\Big\}}$$

Demonstração (ii):
Tome novamente $h = \ln u$. Por hipótese temos que existe $0 \leq a < \frac{1}{2}$ tal que $\langle \nabla h, \nabla f\rangle \leq a|\nabla h|^2$. Neste caso, sendo $\mathrm{Ric_f} \geq -(n-1)G$, a equação 4.4.6 fica

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 \geq \frac{(1-2a)}{n}|\nabla|^4 - \langle \nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle - (n-1)G|\nabla h|^2 \qquad (4.4.12)$$

Resolvendo a equação 4.4.5 para $\Delta_f|\nabla h|^2$ obtemos

$$\Delta_f|\nabla h|^2 = \frac{1}{\phi}\Delta_f J - \frac{J}{\phi^2}\Delta_f\phi - 2\langle\nabla\phi, \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle \qquad (4.4.13)$$

Substituindo a equação acima e as expressões de J e $\nabla|\nabla h|^2$ em 4.4.12 tem-se:

$$\frac{1}{\phi}\Delta_f|\nabla h|^2 \geq \frac{J}{\phi^2}\Delta_f\phi + 2\langle\frac{\nabla\phi}{\phi}, \frac{\nabla J}{\phi}\rangle - 2\langle\frac{\nabla\phi}{\phi}, J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle + 2\frac{(1-2a)}{n}\frac{J^2}{\phi^2} - 2\langle\nabla h, \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle - 2(n-1)G\frac{J}{\phi} \qquad (4.4.14)$$

Novamente, seja $q_0 \in B(q,2R)$ ponto de máximo de J, então, a equação acima, calculada em q_0 fica

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{\phi}\Delta_f J(q_0) \\ &\geq \frac{J}{\phi^2}\Big[\Delta_f\phi - 2\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} + 2\frac{(1-2a)}{n}J + 2\langle\nabla h, \nabla\phi\rangle - 2(n-1)G\phi\Big](q_0) \end{aligned}$$

Como $\frac{J}{\phi^2} \geq 0$ segue que

$$2\frac{(1-2a)}{n}J(q_0) \leq \Big[-\Delta_f\phi + 2\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} - 2\langle\nabla h, \nabla\phi\rangle + 2(n-1)G\phi\Big](q_0) \quad (4.4.15)$$

Perceba que, se $q_0 \in B(q,1)$ então sendo $\phi \equiv 1$ em $B(q,R)$ segue que q_0 é ponto de máximo de $|\nabla h|^2$ daí, 4.4.15 fica

$$2\frac{(1-2a)}{n}J(q_0) \leq 2(n-1)G(r(q_0))$$

Restingindo-se à bola $B(q,R)$ concluímos que

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{2n(n-1)}{2(1-2a)}G(r(q_0))} \quad (4.4.16)$$

Suponha agora que $q_0 \in B(q,2R) \setminus B(q,1)$ e seja $\delta > 0$ a ser escolhido posteriormente, então

$$\begin{aligned} 2|\langle\nabla h, \nabla\phi\rangle| &\leq 2|\nabla h||\nabla\phi| \\ &= 2\frac{\sqrt{\phi\delta}}{\sqrt{\phi\delta}}|\nabla h||\nabla\phi| \\ &\leq \delta\phi|\nabla h|^2 + \frac{|\nabla\phi|^2}{\delta\phi} \\ &= \delta J + \frac{1}{\delta}\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \end{aligned}$$

Usando a equação 4.4.8 e a última desigualdade acime vem que

$$2\frac{(1-2a)}{n}J(q_0) \leq \frac{C_1}{R}\alpha + \frac{C_1}{R}(n-1)\int_1^{2R} G(t)dt + \frac{C_2}{R^2} + \Big(2+\frac{1}{\delta}\Big)\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}(q_0) + \delta J(q_0) + 2(n-1)G(r(q_0))\phi(q_0) \quad (4.4.17)$$

Donde

$$\Big(\frac{2(1-2a)}{n} - \delta\Big)J(q_0) \leq \Big[\alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(t)dt\Big]\frac{C_1}{R} + \frac{C_2}{R^2} + \Big(2+\frac{1}{\delta}\Big)\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}(q_0) + 2(n-1)G(r(q_0))\phi(q_0) \quad (4.4.18)$$

Como $\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \leq \frac{C_1^2}{R^2}$ e escolhendo $\delta = \frac{(1-2a)}{2n}$ finalmente obtemos

$$\frac{3(1-2a)}{2n}J(q_0) \leq \Big[\alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(t)dt\Big]\frac{C_1}{R} + \frac{C_2}{R^2} + \Big(\frac{2-4a+2n}{1-2a}\Big)\frac{C_1^2}{R^2} + 2(n-1)G(r(q_0)) \quad (4.4.19)$$

Restringindo-se à bola $B(q,R)$ concluímos

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{2n}{3(1-2a)}\Big\{\Big[\alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(t)dt\Big]\frac{C_1}{R} + \frac{C_2}{R^2} + \Big(\frac{2-4a+2n}{1-2a}\Big)\frac{C_1^2}{R^2} + 2(n-1)G(r(q_0))\Big\}} \quad (4.4.20)$$

Demonstração (iii):
Sejam $\varepsilon \in (0,1)$ e $h = u^\varepsilon$ então

$$\nabla h = \varepsilon u^{\varepsilon-1}\nabla u$$

$$\Delta h = \varepsilon u^{\varepsilon-1}\Delta u + \varepsilon(\varepsilon-1)u^{\varepsilon-2}|\nabla u|^2$$

and

$$\begin{aligned}\Delta_f h &= \varepsilon(\varepsilon-1)u^{\varepsilon-2}|u|^2\\ &= \varepsilon^2\frac{u^{2\varepsilon}}{u^2}\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon u^\varepsilon}|u|^2\\ &= \frac{(\varepsilon-1)|h|^2}{\varepsilon h}\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess}\, h|^2 &\geq \frac{(\Delta h)^2}{n}\\ &= \frac{(\Delta_f h + \langle\nabla f, \nabla h\rangle)^2}{n}\\ &= \frac{1}{n}\Big(\frac{(\varepsilon-1)|h|^2}{\varepsilon h} + \langle\nabla f, \nabla h\rangle\Big)^2\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}\langle\nabla h, \nabla\Delta_f h\rangle &= \langle\nabla h, \nabla(\frac{(\varepsilon-1)|h|^2}{\varepsilon h})\rangle\\ &= \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h}|h|^2(-\frac{1}{h^2}|h|^2)\\ &= \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h^2}|\nabla h|^4\end{aligned}$$

Como $\mathrm{Ric_f} \geq -(n-1)G$ segue da fórmula de Bochner que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 &\geq \frac{1}{n}\Big(\frac{(\varepsilon-1)|h|^2}{\varepsilon h} + \langle\nabla f, \nabla h\rangle\Big)^2 + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h^2}|\nabla h|^4 - (n-1)G(r)|\nabla h|^2\\ &= \frac{(\varepsilon-1)^2|\nabla h|^4}{n\varepsilon^2h^2} + \frac{2(\varepsilon-1)|\nabla h|^2}{n\varepsilon h}\langle\nabla f, \nabla h\rangle + \frac{\langle\nabla f, \nabla h\rangle^2}{n} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle\\ &\quad -\frac{(\varepsilon-1)|\nabla h|^4}{\varepsilon h^2} - (n-1)G(r)|\nabla|^2\end{aligned}$$

Desejamos obter uma estimativa inferior para $\Delta_f|\nabla h|^2$ por termos envolvendo apenas h e $|\nabla h|$. Para tanto, considere um ponto $q \in \overline{B(p, 2R)}$ tal que $\langle\nabla h, \nabla f\rangle(q) \leq a\frac{|\nabla h|^2}{h}(q)$, para alguma constante a a ser escolhida *a posteriori*. Então, no ponto q temos:

$$\begin{aligned}(*)\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 &\geq \frac{(\varepsilon-1)^2|\nabla h|^4}{n\varepsilon^2h^2} + \frac{2(\varepsilon-1)|\nabla h|^2}{n\varepsilon h}\langle\nabla f, \nabla h\rangle + \frac{\langle\nabla f, \nabla h\rangle^2}{n} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle\\ &\quad -\frac{(\varepsilon-1)|\nabla h|^4}{\varepsilon h^2} - (n-1)G(r)|\nabla|^2\\ &\geq \Big[\frac{(\varepsilon-1)^2 + 2a\varepsilon(\varepsilon-1) - n\varepsilon(\varepsilon-1)}{n\varepsilon^2}\Big]\frac{|\nabla h|^4}{h^2} + \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle - (n-1)G(r)|\nabla h|^2\end{aligned}$$

Observe que o coeficiente de $\frac{|\nabla h|^4}{h^2}$ é positivo se, e somente se

$$a < \frac{n\varepsilon - \varepsilon + 1}{2\varepsilon} \tag{4.4.21}$$

Agora, suponha que no ponto q temos $\langle \nabla f, \nabla h\rangle(q) \geq a\frac{|\nabla h|^2}{h}$ então

$$\begin{aligned}
(**)\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 \quad &\geq \quad \frac{(\varepsilon-1)^2|\nabla h|^4}{n\varepsilon^2 h^2} + \frac{2(\varepsilon-1)}{n\varepsilon h}\Big(\frac{h}{a}\langle\nabla f,\nabla h\rangle\Big)\langle\nabla f,\nabla h\rangle + \frac{\langle\nabla f,\nabla h\rangle^2}{n} \\
&\quad + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle - (n-1)G(r)|\nabla|^2 \\
&= \quad \frac{(\varepsilon-1)^2 - n\varepsilon(\varepsilon-1)}{n\varepsilon^2}\frac{|\nabla h|^4}{h^2} + \frac{2(\varepsilon-1)+\varepsilon a}{an\varepsilon}\langle\nabla f,\nabla h\rangle^2 \\
&\quad + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle - (n-1)G(r)|\nabla|^2
\end{aligned}$$

Neste caso, o coeficiente de $\langle\nabla f,\nabla h\rangle^2$ é positivo se, e somente se

$$a > \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{4.4.22}$$

Observe que as equações 4.4.21 e 4.4.22 são satisfeitas simultâneamente quando

$$\frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon} < a < \frac{n\varepsilon-\varepsilon+1}{2\varepsilon}$$

Resolvendo para ε obtemos $\frac{3}{3+n} < \varepsilon$. Como $n \geq 1$ concluímos que $\varepsilon > \frac{3}{4}$. Logo, se $\varepsilon \in (\frac{3}{4}, 1)$ existe um a satisfazendo $(*)$ e $(**)$. Tome $\varepsilon = \frac{7}{8}$ e $a = \frac{1}{2}$ daí, segue de $(*)$ ou $(**)$ que

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 \geq \Big(\frac{7n-6}{49nh^2}\Big)\frac{|\nabla h|^4}{h^2} - \frac{1}{7h}\langle\nabla h, \nabla|\nabla h|^2\rangle - (n-1)G(r)|\nabla h|^2 \tag{4.4.23}$$

Resolvendo a equaç ão 4.4.5 para $\Delta_f|\nabla h|^2$ obtemos

$$\Delta_f|\nabla h|^2 = \frac{1}{\phi}\Delta_f J - \frac{J}{\phi^2}\Delta_f\phi - 2\langle\frac{\nabla\phi}{\phi}, \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle \tag{4.4.24}$$

Substituindo 4.4.3, 4.4.4 e 4.4.24 in 4.4.23 temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 \quad &= \quad \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\phi}\Delta_f J - \frac{J}{\phi^2}\Delta_f\phi - 2\langle\frac{\nabla\phi}{\phi}, \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle\Big] \\
&\geq \quad \Big(\frac{7n-6}{49nh^2}\Big)\frac{J^2}{\phi^2} - \frac{1}{7h}\langle\nabla h, \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2} - (n-1)G(r)\frac{J}{\phi}
\end{aligned}$$

Agora, resolvendo para $\Delta_f J$ segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi}\Delta_f J &\geq \frac{J}{\phi^2}\Delta f\phi + 2\langle\frac{\nabla\phi}{\phi}, \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle + \Big(\frac{7n-6}{49nh^2}\Big)\frac{J^2}{\phi^2}\\ &\quad -\frac{2}{7h}\langle\nabla h, \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle - (n-1)G(r)\frac{J}{\phi}\\ &= \frac{J}{\phi^2}\Delta_f\phi + 2\langle\frac{\nabla\phi}{\phi}, \frac{\nabla J}{\phi}\rangle - 2\langle\frac{\nabla\phi}{\phi}, J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle + \Big(\frac{14n-12}{49nh^2}\Big)\frac{J^2}{\phi^2}\\ &\quad -\frac{2}{7h}\langle\nabla h, \frac{\nabla J}{\phi} - J\frac{\nabla\phi}{\phi^2}\rangle - 2(n-1)G(r)\frac{J}{\phi}\end{aligned}$$

Como $J \geq 0$ e $J = 0$ em $\partial B(p, 2R)$ segue que o máximo de J é atingido em algum ponto $q_0 \in B(p, 2R)$. Suponha que $q_0 \notin Cut(p)$ então, calculando a desigualdade acima em q_0 e resolvendo para J obtemos

$$\Big(\frac{14n-12}{49nh^2}\Big)J(q_0) \leq \Big[-\Delta_f\phi + 2\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} - \frac{2}{7h}\langle\nabla h, \nabla\phi\rangle + 2(n-1)G(r)\phi\Big](q_0) \tag{4.4.25}$$

Há dois casos a considerar:
Se $q_0 \in B(p, 1)$ então, segue de $R \geq 1$ que $\phi \equiv 1$ e q_0 é o ponto de máximo de $J = |\nabla h|^2$ em $\overline{B(p, R)}$, daí, a equação 4.4.25 fica

$$\Big(\frac{14n-12}{49nh^2}\Big)J(q_0) \leq 2(n-1)G(r)$$

Segue da definição de J que

$$|\nabla u|(q_0) \leq \sqrt{\frac{64n(n-1)}{7n-6}G(r)}\sup_{B(p,2R)} u \tag{4.4.26}$$

Suponha agora que $q_0 \notin B(p, 1)$. Como ϕ é radial temos que

$$\nabla\phi = j'\nabla r$$

e

$$\Delta_f\phi = j'' + j'\Delta_f r$$

Lembre que $\mathrm{Ric_f} \geq -(n-1)G$, em particular, $\mathrm{Ric_f}(\partial_r, \partial_r) \geq -(n-1)G(r)$ e, pelo Teorema 4.1.1 segue que

$$\begin{aligned}\Delta_f r(q_0) &\leq \Delta_f r(1) + (n-1)\int_1^{r(q_0)} G(s)ds\\ &\leq \alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(s)ds\end{aligned}$$

onde $\alpha = \sup_{S(p,1)} \Delta_f r$.

Da construção de j segue

$$\begin{aligned}
\Delta_f\phi &= j'' + j'\Delta_f r \\
&\geq -\frac{c}{R^2} - \frac{c}{R}\Big(\alpha + (n-1)\int_1^{2R} G(s)ds\Big) \\
&= -\frac{c\alpha}{R} - \frac{c(n-1)}{R}\int_1^{2R} G(s)ds - \frac{c}{R^2}
\end{aligned}$$

Seja $\delta > 0$ então $2|\langle\nabla h, \nabla\phi\rangle| \leq \frac{\delta\phi}{h}|\nabla h|^2 + \frac{h}{\delta\phi}|\nabla\phi|^2$.
Substituindo ambas as desigualdades acima em 4.4.25 obtemos que

$$\Big(\frac{14n-12}{49nh^2} - \frac{\delta}{7h^2}\Big)J(q_0) \leq \Big[\frac{c\alpha}{R} + \frac{c}{R^2} + \frac{c(n-1)}{R}\int_1^{2R} G(s)ds + \Big(2 + \frac{1}{7\delta}\Big)\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} + 2(n-1)G(r)\phi\Big](q_0)$$

Sendo $R \geq 1$ e $\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \leq \frac{c^2}{R^2}$ tomando $\delta = \frac{1}{7}$ vem que

$$\Big(\frac{13n-12}{49n}\Big)\frac{J}{h^2}(q_0) \leq \frac{c\alpha + 3c^2}{R} + \frac{c}{R^2} + \frac{c(n-1)}{R}\int_1^{2R} G(s)ds + 2(n-1)G(r)\phi(q_0) \tag{4.4.27}$$

Restrinjindo-se à bola $B(p,R)$ e usando $h = u^{\frac{7}{8}}$ finalmente obtemos

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq \sqrt{\frac{64n(c\alpha + 3c^2)}{13n-12}\frac{1}{R} + \frac{64n}{13n-12}\frac{c}{R^2} + \frac{64n}{13n-12}\frac{c(n-1)}{R}\int_1^{2R} G(s)ds + \frac{128n(n-1)}{13n-12}\sup_{B(p,R)} G}$$

4.5 Autovalores

Seja $B_M(R)$ a bola geodésica de raio R em uma variedade Riemanniana completa M e $\lambda_1(B_M(R))$ o primeiro autovalor de Dirichlet de $B_M(R)$. Analogamente denote por $B_{\mathbb{M}(k)}(R)$ e $\lambda_1(B_{\mathbb{M}(k)}(R))$, respectivamente, a bola geodésica de raio R na forma espacial $\mathbb{M}(k)$ de curvatura constante k e o primeiro autovalor de Dirichlet de $B_{\mathbb{M}(k)}(R)$.
Em [11] Cheng provou que, se a curvatura seccional de M é limitada superiormente $K_M \leq k$ e $R < \min\{\operatorname{inj}(p), \frac{\pi}{\sqrt{k}}\}$ ($\frac{\pi}{\sqrt{k}} = \infty$ se $k \leq 0$) então $\lambda_1(B_M(R)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}(k)}(R))$. Ademais, ele também provou que se $\operatorname{Ric} \geq (n-1)k$ então $\lambda_1(B_M(R)) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}(k)}(R))$ para todo $R > 0$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $R < \operatorname{inj}(p)$ e $B_{\mathbb{M}(k)}(R)$ e $B_M(R)$ são isométricas.
Denote por $m(t,\theta)$ e $m_k(t)$, respectivamente, as curvaturas médias das esferas geodésicas $\partial B_M(R)$ e $\partial B_{\mathbb{M}(k)}(R)$ em (t,θ), relativamente ao campo normal unitário $-\partial_t$. Bessa e Montenegro [4] provaram o seguinte resultado:

Teorema 4.5.1 *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $\mathbb{M}(k)$ a forma espacial de curvatura constante k.*

(i) Se $m(t,\theta) \leq m_k(t), \forall t \in (0,R), \forall\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ então $\lambda_1(B_M(R)) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}_k}(R))$

(ii) Se $m(t,\theta) \geq m_k(t), \forall t \in (0,R), \forall\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ então $\lambda_1(B_M(R)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}_k}(R))$

Em qualquer dos casos acima, a igualdade ocorre se, e somente se, $m(t,\theta) = m_k(t)$ *para todo* $0 < t \leq R$ *e todo* $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Observe que, como $K_M \leq k$ implica $m(t,\theta) \geq m_k(t)$ e Ric $\geq (n-1)k$ implica $m(t,\theta) \leq m_k(t)$, o teorema de Cheng decorre do resultado de Bessa e Montenegro. No caso de variedades ponderadas Setti [S] provou um resultado análogo ao teorema de Cheng acima, sob a hipótese de $\mathrm{Ric_f} \geq \alpha$, com α constante.
O resultado a seguir é uma versão ponderada do teorema de Bessa e Montenegro.

Teorema 4.5.2 *Sejam* M_f *uma variedade ponderada completa e* $M(G)$ *um modelo Riemanniano com curvatura seccional* G. *Então*

(i) *Se* $m_f(t,\theta) \leq m_G(t), \forall t \in (0,R), \forall \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ *então* $\lambda_1(B_{M_f}(R)) \leq \lambda_1(B_{M_G}(R))$

(ii) *Se* $m_f(t,\theta) \geq m_G(t), \forall t \in (0,R), \forall \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ *então* $\lambda_1(B_{M_f}(R)) \geq \lambda_1(B_{M_G}(R))$

Em qualquer dos casos acima, a igualdade ocorre se, e somente se, $m_f(t,\theta) = m_G(t)$ *para todo* $0 < t \leq R$ *e todo* $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Demonstração
Seja $u : B_{M_G}(R) \to \mathbb{R}$ a primeira autofunção de Dirichlet positiva. Sabemos que u é radial e que $u'(t) \leq 0$. Ademais, u satisfaz a equação

$$u''(s) + (n-1)\frac{sn'_G}{sn_G}u'(s) + \lambda_1(B_{M_G}(R))u(s) = 0 \qquad (4.5.1)$$

para todo $s \in [0,R]$.
Defina $v : B_{M_f}(R) \to \mathbb{R}$ por $v(t,\theta) = u(t)$, onde $t = r(q) = \mathrm{dist}\,(p,q)$ então $\nabla v = u'\nabla r$ and $\Delta v = u'' + u'\Delta r$.
Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta_f v &= \Delta v - \langle \nabla v, \nabla f\rangle \\
&= u'' + u'\Delta r - u'\langle, \nabla r, \nabla f\rangle \\
&= u'' + u'\Delta r - u'f' \\
&= u'' + u'\Delta_f r
\end{aligned}$$

da equação 4.5.1 segue

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta_f v}{v} &= \frac{-u'' - u'\Delta_f r}{u} \\
&= (n-1)\frac{sn'_G}{sn_G}\frac{u'}{u} + \lambda_1(B_{M_G}(R)) - \Delta_f r\frac{u'}{u} \\
&= [m_G(t) - m_f(t,\theta)]\frac{u'}{u} + \lambda_1(B_{M_G}(R))
\end{aligned}$$

Do teorema de Barta temos que

$$\sup_\Omega\left(-\frac{\Delta_f v}{v}\right) \geq \lambda_1(\Omega) \geq \inf_\Omega\left(-\frac{\Delta_f v}{v}\right)$$

Daí
$\lambda_1(B_{M_f}(R)) \leq \sup_{B_{M_f}(R)}[(m_G(t) - m_f(t,\theta))\dfrac{u'}{u}] + \lambda_1(B_{M_G}(R))$
e
$\lambda_1(B_{M_f}(R)) \geq \inf_{B_{M_f}(R)}[(m_G(t) - m_f(t,\theta))\dfrac{u'}{u}] + \lambda_1(B_{M_G}(R))$

No primeiro caso, se $(m_G(t)-m_f(t,\theta)) \geq 0$ então $\sup_{B_{M_f}(R)}[(m_G(t)-m_f(t,\theta))\frac{u'}{u}] \leq 0$ donde $\lambda_1(B_{M_f}(R)) \leq \lambda_1(B_{M_G}(R))$.
No segundo caso, se $(m_G(t)-m_f(t,\theta)) \leq 0$ então $\inf_{B_{M_f}(R)}[(m_G(t)-m_f(t,\theta))\frac{u'}{u}] \geq 0$ donde $\lambda_1(B_{M_f}(R)) \geq \lambda_1(B_{M_G}(R))$.
Observe que se $m_G(t) = m_f(t,\theta)$ para todo t, θ então, novamente pelo teorema de Barta temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(B_{M_G}(R)) &= \inf_{B_{M_f}(R)}(-\frac{\Delta_f v}{v}) \\
&\leq \lambda_1(B_{M_f}(R)) \\
&\leq \sup_{B_{M_f}(R)}(-\frac{\Delta_f v}{v}) \\
&= \lambda_1(B_{M_G}(R))
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] AMBROSE, W. A theorem of Myer's. *Duke Math. J.*, v. 24, p. 345-348, 1957.

[2] AZENCOTT, R. Behavior of Diffusion Semi-groups at Infinity. *Bull. Soc. Math. France*, vol 102, p. 193-240, 1974.

[3] BAKRY, D.; EMERY, M. Diffusions hypercontractives. In : *Séminaire de probabilités*, XIX, 1983/84. Berlin : Springer, 1985. (*Lecture Notes in Math*, v. 1123, p. 177-206)

[4] BESSA, G.P.; MONTENEGRO, J.F. On Cheng's eigenvalue comparison theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 144, n. 3, p. 673682, 2008.

[5] BESSA, G.P.; MONTENEGRO, J.F.; PICCIONE, P. Riemannian Submersions with Discrete Spectrum. ArXiv:1001.0853v1. To appear in *Journal of Geometric Analysis.*

[6] BESSA, G.P.; PICCIONE, P. On the Omori-Yau Maximum Principle in Riemannian submersions.*J. Math. Sci.*, v.5, n. 1, p. 101-110, 2011.

[7] BESSA, G.P.; PIGOLA, S.; SETTI, A. Spectral and stochastic properties of the f-Laplacian, solution of PDE's at infinity and geometric applications. ArXiv:1107.1172. To appear in *Revista Matematica Iberoamericana.*

[8] BORBÉLY, A. *A remark on the Omori Yau maximum principle.* Preprint.

[9] BRIGHTON, K. *A Liouville-type theorem on smooth metric measure spaces.* ArXiv: 1006.0751v2 [math.DG] 13 Jan 2011.

[10] CHEN, L.; CHEN, W. Gradient estimates for positive smooth f-harmonic functions.*Acta Math. Sci., Ser. B*, v. 30, n. 5, p. 1614-1618, 2010.

[11] CHENG, S.Y. Eigenvalues comparison theorems and its geometric applications. *Math. Z.*, v. 143, p. 289-297, 1975.

[12] DAVIES, E.B. *Spectral theory and differential operators.* Cambridge: Cambrigde University Press, 1995.

[13] DODZIUK, J. Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds.*Indiana Univ. Math. J.*, v. 32, n. 5, p. 703-716, 1983.

[14] ELWORTHY, K.D. *Stochastic differential equations on manifolds.* Cambridge: Cambridge University Press, 1982. 326 p. (London Matheamtical Society Lecture Note Series, v. 70)

[15] M. FERNADES-LOPEZ, M; GARCIA-RIO, E. A remark on compact Ricci solitons.*Math. Ann.*, v. 340, p. 893-896, 2008.

[16] GALLOWAY, G. *Compactness criteria for Rimannian manifolds.* Proceedings of the American Mathematical Society, v. 84, n. 1,1982.

[17] GRAY, A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. *J. Math. Mech.* , v. 16, p. 715-737, 1967.

[18] GRIGOR'YAN, A. Analytic and Geometric background or recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, v. 36, p. 135-249, 1999.

[19] ——, *Heat Kernel and Analysis on Manifolds.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2009. (AMS/IP Studies in Advanced Mathematics : v. 47)

[20] ——, Heat kernels on weighted manifolds and applications. *Cont. Math.*, v. 398, p. 93-191, 2006.

[21] HSU, E.P. Heat semi-group on a Riemannian manifold. *Ann. Probab.*, v. 17, n. 3, p. 1248-1254, 1989.

[22] ——, *Stochastic Analysis on Manifolds.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2002. (Graduate Studies in Mathematics ; v. 38)

[23] JORGE, L.; KOUTROFIOTIS, D. An Estimate For The Curvature of Bounded Submanifolds.*Amer. J. Math.*, v. 103, n. 4, p. 711-725, 1980.

[24] LI, P.; KARP, L. *The Heat Equation on Complete Riemannian Manifolds.* Unpublished. http://www.math.uci.edu/ pli/

[25] MARI, L.; VALTORTA, D. *On the equivalence of stochastic completeness, Liouville and Khas'minskii condition in linear and nonlinear setting* . ArXiv:1106.1352.

[26] O'NEILL, B. The fundamental equations of a submersion.*Michigan Math. J.* v. 13, p.459-469, 1966.

[27] ——, Submersions and geodesics.*Duke Math. J.*, v. 34, p. 363-373, 1967.

[28] PIGOLA, S.; SETTI, A. *The Feller property on Riemannian manifolds.* ArXiv:1010.1653v1 [Math.DG] 8 October 2010.

[29] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. A remark on the maximum principle and stochastic completeness.*Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 131, n. 4, p. 1283-1288, 2002.

[30] ——, Maximum Principles on Riemannian Manifolds an Applications.*Mem. Amer. Math. Soc.*, v. 174, n. 822, 2005.

[31] PIGOLA, S. ET AL. Ricci almost solitons.*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci.* 5, v. 10, p. 757-799, 2011.

[32] PINSKY, M. Isotropic transport process on a Riemannian manifold.*Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 128, p. 353-360, 1976.

[33] SCOTT, P.The geometries of 3-manifolds.*Bull. London Math. Soc.*, v. 15, n. 5, p. 401-487, 1983.

[34] WEI, G.; WILLIE, W. Comparison Geometry for the Bakry-Emery Ricci Tensor.*Journal of Diff. Geom.*, v. 83, n. 2, p. 377-405, 2009.

[35] WRAITH, D.J. On a theorem of Ambrose.*J. Aust. Math. Soc.*, v. 81, p. 149-152, 2006.

[36] YAU, S.T. On the Heat Kernel of a Complete Riemannian manifold.*J. Math. Pures Appl.*, v. 57, n. 2, p. 191-201, 1978.