



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

ÍCARO DANIEL DIAS DE CARVALHO

A DEFLEXÃO DA LUZ E O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

FORTALEZA

2019

ÍCARO DANIEL DIAS DE CARVALHO

A DEFLEXÃO DA LUZ E O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes.

FORTALEZA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

- C323d Carvalho, Ícaro.
A DEFLEXÃO DA LUZ E O TEOREMA DE GAUSS-BONNET / Ícaro Daniel Dias
de Carvalho. - 2019.
79 f. : il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa
de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.
Coorientação: Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes.
1. Relatividade Geral. 2. Ângulo de Deflexão da Luz. 3. Teorema de Gauss-bonnet. I.
Título.

CDD 530

ÍCARO DANIEL DIAS DE CARVALHO

A DEFLEXÃO DA LUZ E O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 16/07/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde, discernimento para superar as dificuldades.

Aos meus pais Maria Alice e José Valdir, pelo amor, dedicação e acima de tudo por confiarem em mim.

Aos meus irmãos Italo, Saruanna e Rafael por todo o apoio e segurança durante toda minha vida.

A minha segunda mãe Maria de Fátima e minhas tias Íris e Iraci por todo carinho e cuidado.

A Sarah Borges pela paciência, compreensão e cuidado durante todo esse período.

A todos os professores que tive por tudo que aprendi e pelo empenho no exercício da docência.

Ao meu orientador Ricardo Renan Landim de Carvalho tanto pelas orientações quanto pelas aulas ministradas.

Ao meu coorientador Wendel Macedo Mendes tanto pelas discussões e observações que foram importantes para realização do trabalho quanto pelas aulas e apoio desde a graduação.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade de participar.

Ao meu amigo Jefferson pelas discussões que me ajudaram a compreender diversos temas.

Ao departamento de física da UFC pela disponibilidade e infraestrutura fornecida.

Ao CNPq pelo apoio financeiro que foi fundamental para realização do trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia de cálculo do ângulo de deflexão da luz causado por um campo gravitacional. Esta metodologia consiste em utilizar o princípio de Fermat generalizado para um espaço-tempo com simetria esférica e estático e o teorema de Gauss-Bonnet, associando a métrica óptica à métrica induzida em uma superfície. No primeiro momento são apresentadas as equações de campo gravitacional, algumas soluções das equações de campo e formulação generalizada do princípio de Fermat. Apresenta-se algumas definições essenciais sobre geometria diferencial e é desenvolvido o teorema de Gauss-Bonnet. Neste trabalho foi possível compreender que a focalização dos raios luminosos tem um caráter topológico, como mostrado por Gibbons e foi possível apresentar uma metodologia que possibilita calcular o ângulo de deflexão da luz tanto para espaços assintoticamente planos quanto não planos.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Ângulo de Deflexão da Luz. Teorema de Gauss-bonnet.

ABSTRACT

This work aims to present a methodology for the calculation of the angle of light deflection caused by a gravitational field. This methodology consists in using the generalized Fermat principle for a space-time with spherical and static symmetry and the Gauss-Bonnet theorem, associating the optical metric with the metric induced in a surface. We present the equations of the gravitational field, some solutions of the field equations and the generalization of the Fermat principle. Some essential definitions of differential geometry are presented and the Gauss-Bonnet theorem is developed. In this work it was possible to understand the focus of the light rays has a topological character, as shown by Gibbons and it was possible to present the methodology that allows to calculate the angle of light deflection that can be used for asymptotically flat spacetime and for non-asymptotically flat spacetime.

Keywords: General Relativity. Deflection Angle of Light. Gauss-Bonnet theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Base vetorial local da superfície	27
Figura 2 – Derivada Covariante	30
Figura 3 – Transporte paralelo sobre caminho fechado	36
Figura 4 – Transporte paralelo sobre caminhos distintos	36
Figura 5 – Ângulos externos	38
Figura 6 – Ângulo externo no caso do vértice ser um "bico"	39
Figura 7 – Triângulos adjacentes com aresta comum com orientação oposta	42
Figura 8 – identificação de arestas e vértices.	43
Figura 9 – Soma dos ângulos internos de um polígono	45
Figura 10 –Aplicação 3 do Teorema de Gauss-Bonnet	46
Figura 11 –Aplicação 4 do Teorema de Gauss-Bonnet	47
Figura 12 –Geometria de deflexão fraca, regiões D_1 e D_2	49
Figura 13 –Característica de Euler-Poincaré para uma região com furo.	50
Figura 14 –Aproximação do caminho do raio luminoso por linha reta.	53
Figura 15 –Representação do triângulo embebido no espaço da métrica ótica ${}^R\nabla_L^S$	61
Figura 16 –Representação do triângulo embebido no espaço da métrica ótica ${}^\infty\nabla_L^\infty$	62
Figura 17 –Representação do triângulo embebido no limite da lente gravitacional muito distantes do observador e da fonte.	73

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SÍMBOLOS

Usa-se a convenção de soma de Einstein que pode ser explicada do seguinte modo: índices repetidos de apenas um lado da igualdade estão somados e os valores dos índices estão implícitos ao contexto e na notação.

Adota-se neste trabalho letras gregas (μ, ν, \dots) tomando os valores 0, 1, 2, 3 e letras latinas (i, j, \dots) tomando valores 1, 2, 3. Caso esta não seja assim será mencionado no corpo do texto.

A assinatura adotada é $(-1, 1, 1, 1)$.

α	Ângulo de deflexão da luz
ε_i	Vetores que formam uma base no espaço
Γ_{jk}^i	Coefficientes de conexão
κ_g	Curvatura geodésica
Λ	Constante Cosmológica
θ_i	i -ésimo ângulo externo de uma curva.
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
τ	Tempo próprio
χ	Característica de Euler-Poincaré
c	Velocidade da luz
$\frac{D\mathbf{w}}{dt}$	Derivada covariante do campo vetorial \mathbf{w} em t
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço tempo curvo
G	Constante da Gravitacional
h_{ij}	Métrica induzida por uma superfície no \mathbb{R}^3
H_{ij}	Métrica óptica
K	Curvatura total
R_{kjl}^i	Componentes do tensor de curvatura
R_{ij}	Componentes do tensor de Ricci
R	Escalar de Ricci
$T_{\mu\nu}$	Componentes do tensor densidade de energia-momento.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRINCÍPIOS DE RELATIVIDADE GERAL	15
2.1	Equações de Campo Gravitacional	15
2.2	Espaço Esfericamente Simétrico e Estático	17
2.3	Espaço de Schwarzschild	18
2.4	Fluido Perfeito	19
2.5	Espaço de Kottler	21
2.6	Princípio de Fermat para um Espaço Curvo Estático	22
3	TEOREMA DE GAUSS-BONNET	25
3.1	Superfície Regular e Plano Tangente	25
3.2	Primeira Forma fundamental e métrica induzida	26
3.3	Vetor Normal, Superfície Orientável	28
3.4	Derivada Covariante, Transporte Paralelo e Curvatura Geodésica	29
3.5	Tensor Curvatura, Teorema Egregium de Gauss e Curvatura Total	34
3.6	Teorema de Gauss-Bonnet	37
3.7	Aplicações elementares do Teorema de Gauss-Bonnet	44
3.7.1	<i>Soma dos ângulos internos de um polígono.</i>	44
3.7.2	<i>Característica de Euler-Poincaré de uma esfera.</i>	45
3.7.3	<i>Verificação do teorema de Gauss-Bonnet para uma região simples de um espaço plano.</i>	46
3.7.4	<i>Verificação do teorema de Gauss-Bonnet para uma região simples sobre a esfera.</i>	47
3.7.5	<i>Um par de geodésicas em um espaço de curvatura não positiva não forma uma região simples.</i>	48
4	CÁLCULO DO ÂNGULO DE DEFLEXÃO DA LUZ VIA TEOREMA DE GAUSS-BONNET	49
4.1	Ângulo de Deflexão para Observador e Fonte distantes da Lente Gravitacional.	49
4.2	Ângulo de deflexão para observador e fonte a uma distância finita da lente gravitacional.	58
4.3	Ângulo de Deflexão da Luz considerando distâncias finitas na geometria de Ellis Wormhole.	67

4.4	Ângulo de Deflexão da Luz considerando distâncias finitas. Implicações no formalismo PPN e na solução tipo Schwarzschild com modelo de Bumblebee.	69
5	CONCLUSÃO	74
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A – IDENTIDADE SOBRE TRIANGULAÇÕES	79

1 INTRODUÇÃO

A *Teoria da Relatividade Geral* formulada por Einstein é provavelmente a mais bonita entre as teorias físicas [1]. A *Teoria da Gravitação Universal* de Newton concordava com a maioria dos dados experimentais, porém existia um inconveniente na teoria de Newton: a ação a distância. Um corpo sob um campo gravitacional devido a uma fonte sente instantaneamente um deslocamento da fonte no espaço e isso estava em desacordo com a *Teoria da Relatividade Especial*. Foi trabalhando nessa inconsistência que Einstein generalizou a *Relatividade Especial*[2].

A *Relatividade Geral* nasceu da inconsistência citada acima, porém o que faz esta teoria elegante é a sua natureza geométrica, além de sua concordância com os dados experimentais. A natureza da *Gravitação Universal* considera a interação gravitacional por meio de uma força em um espaço estático, a *Relatividade Geral* considera a gravidade como sendo a deformação do espaço-tempo dinâmico devido a uma distribuição de matéria e energia. Vale ressaltar que ela recobra a teoria da *Gravitação Universal* quando a fonte geradora do campo gravitacional deforma fracamente o *espaço-tempo*, isso garante que os acertos da *Gravitação Universal* são recobrados pela *Relatividade Geral*, ou seja, a interpretação pelas duas teorias são diferentes, mas os valores numéricos concordam nesse limite. Em alguns casos extremos a *Relatividade Geral* concorda com os dados experimentais e a *Gravitação Universal* não. Por este motivo que atualmente adota-se a *Relatividade Geral* como correta e teoria de Newton como uma aproximação desta [3].

A formulação relativística da gravitação teve sua confirmação experimental primeiramente com precessão do periélio de Mercúrio, desvio gravitacional da frequência de um feixe de luz devido ao campo gravitacional e deflexão da luz devido a um campo gravitacional. A *Teoria da Relatividade Geral* propõe que uma distribuição de matéria ou energia pode deformar o espaço-tempo. A deflexão da luz consiste na mudança de caminho dos raios luminosos devido a essa distribuição de matéria ou energia, quando isso ocorre essa distribuição é chamada de *Lente Gravitacional*, por analogia com a ótica [4].

A deflexão da luz devido a um campo gravitacional é bastante estudada na astronomia, na cosmologia e na física teórica, como exemplo de sua importância está a investigação da sondagem de planetas extrasolares, matéria escura, energia escura e as estruturas nulas do espaço-tempo [5].

Neste trabalho é apresentada uma metodologia que permite calcular a deflexão da luz devido a um campo gravitacional por meio do *Princípio de Fermat* e o *Teorema de Gauss-Bonnet*. A importância da metodologia apresentada é pelo fato de que com ela é possível fazer

cálculos para distâncias finitas.

No segundo capítulo são apresentadas as equações de campo gravitacional. Apresenta-se uma forma para a métrica de um espaço-tempo estático que possui simetria esférica. Com isso resolve-se as equações de campo gravitacional onde serão encontradas as métricas de Schwarzschild e Kottler, além de apresentar algumas relações úteis para um fluido perfeito. No final do capítulo reservou-se uma seção para apresentar a métrica óptica e a generalização do *princípio de Fermat* para espaço estático e esfericamente simétrico. As principais referências foram [1, 3, 6].

O terceiro capítulo tem como objetivo apresentar e compreender o *teorema de Gauss-Bonnet*. Para fazer isso será necessário apresentar alguns conceitos como o de superfície regular e plano tangente, primeira forma fundamental da geometria diferencial e métrica induzida, superfícies orientáveis, curvatura geodésica e curvatura total. Com isso apresenta-se e demonstra-se o *teorema de Gauss-Bonnet* e faz-se algumas aplicações elementares para que o leitor se familiarize com este. A referência fundamental é [7]. Este capítulo é diferente dos outros devido a apresentação dos conceitos de maneira mais formal, pois os conceitos matemáticos apresentados neste capítulo são fundamentais para a formulação das metodologias apresentadas nesse trabalho.

O quarto capítulo consiste em apresentar a metodologia de cálculo do ângulo de deflexão da luz via teorema de Gauss-Bonnet. Na primeira seção apresenta-se as ideias fundamentais de [8]. A metodologia consiste em associar a métrica óptica do espaço-tempo estático e com simetria esférica a métrica induzida por uma superfície. Com isso pode-se usar o teorema de Gauss-Bonnet para calcular o ângulo de deflexão da luz devido a um campo gravitacional de uma lente gravitacional. [8] além de mostrar uma forma para o ângulo de deflexão da luz, também mostra que o foco dos raios luminosos que formam a imagem é uma característica topológica. Na segunda seção apresenta-se o desenvolvimento presente em [5], neste artigo são apresentadas algumas definições e investigações que permitem calcular o ângulo de deflexão da luz no limite fraco para distâncias finitas entre observador, lente e fonte.

A originalidade deste trabalho está presente nas duas últimas seções do quarto capítulo. Na terceira seção apresenta-se um estudo sobre o ângulo de deflexão da luz no limite fraco para distâncias finita na geometria de *Ellis wormhole*. Na quarta e última seção estuda-se as implicações ao considerar distâncias finitas para a métrica de Schwarzschild e suas implicações no parâmetro de deflexão da luz, γ , do formalismo parametrizado pós-newtoniano (PPN). Além de estudar as consequências de considerar distâncias finitas para uma métrica tipo schwarzschild com modelo de quebra de simetria de lorentz por meio do campo de *bumblebee*.

2 PRINCÍPIOS DE RELATIVIDADE GERAL

Este capítulo consiste em apresentar as *Equações de Campo Gravitacional*, citar algumas soluções de interesse e fazer uma apresentação do *Princípio de Fermat* para o caso de um espaço curvo estático. Para um estudo em Teoria da Relatividade Geral pode-se utilizar as referências [3], [1, 6, 9, 10], esta última é uma boa referência para um primeiro contato.

2.1 Equações de Campo Gravitacional

A *Teoria da Relatividade Geral* interpreta a gravidade como sendo uma deformação do *espaço-tempo*, fazendo deste dinâmico, teoria essa que relaciona a geometria do espaço tempo com a matéria e energia. Cabe aqui citar um pensamento de John Archibal Wheeler que pode ser expresso pela seguinte frase "A matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço diz a matéria como se mover". Note por esta frase o quão entrelaçados estão a matéria e o espaço e isso se traduz matematicamente pelas *Equações de Campo Gravitacional*.

Não existe uma dedução rigorosa das *Equações de Campo*. Pode-se encontrar uma dedução heurística em [2]. Neste trabalho é mostrado de forma bastante elegante que uma mistura de razoabilidade física, simplicidade matemática e sensibilidade estética conduz as *Equações de Campo Gravitacional*.

O intervalo infinitesimal ds entre dois eventos - pontos coordenados do espaço-tempo - é responsável pela noção de distância no espaço-tempo. Essa distância é modificada pelo campo gravitacional devido a uma distribuição de matéria e energia, pois como foi dito a matéria modifica o espaço-tempo e com isso a distância entre os eventos, a descrição dessa distorção é dada pelo tensor métrico cujas componentes são $g_{\mu\nu}$, onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ com coordenada 0 sendo temporal e as outras espaciais. O intervalo infinitesimal pode é descrito por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Resolver as equações de campo significa encontrar $g_{\mu\nu}$ uma vez fornecia uma distribuição de matéria e energia. Antes de apresentar *Equações de Campo Gravitacional* é conveniente apresentar a parte da ação que representa a geometria, conhecida como *Ação de Einstein-Hilbert*,

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G/c^4} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.2)$$

onde d^4x é o elemento infinitesimal do *espaço-tempo*, g é o determinante da métrica e R é o escalar de Ricci calculados para a métrica $g_{\mu\nu}$ [3]. Uma maneira fácil para variar esta ação é pelo *Princípio Variacional de Palatini* que pode ser encontrado em [11]. Variando esta ação

com relação as componentes do tensor métrico encontra-se

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.3)$$

sendo $R_{\mu\nu}$ as componentes do tensor de Ricci e $G_{\mu\nu}$ conhecido como as componentes do tensor de Einstein, essas quantidades são construídas por meio da métrica $g_{\mu\nu}$. Com o tensor métrico constrói-se os coeficientes de conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, explicitamente

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\eta} [\partial_\mu g_{\eta\nu} + \partial_\nu g_{\eta\mu} - \partial_\eta g_{\mu\nu}]. \quad (2.4)$$

Assim pode-se construir o tensor de curvatura cujas componentes são $R_{\alpha\beta\gamma}^\xi$, pode-se escrever as componentes do tensor de curvatura em função dos coeficientes de conexão e suas derivadas, a saber

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\xi = \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi - \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\xi + \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi - \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi. \quad (2.5)$$

Com isso o tensor de Ricci é dado por $R_{\mu\nu} = R_{\mu\eta\nu}^\eta$ e o escalar de Ricci é dado por $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, onde $g^{\mu\nu}$ são os elementos da matriz inversa da matriz formada pelas componentes da métrica. O conjunto de equações (2.3) é conhecido como equações de campo na ausência de fonte. Para obter as equações de forma integral é preciso considerar uma ação total somando a *Ação de Einstein-Hilbert* um termo devido a matéria S_m . [3] afirma que a variação da ação devido a matéria só pode ser feita quando se conhece sua forma previamente, mas que de modo geral pode-se representar esta variação por

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.6)$$

onde o δ representa variação e $T_{\mu\nu}$ pode ser identificado como as componentes do Tensor densidade de energia-momento que possui divergência nula, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Com isso, pode-se apresentar as equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Einstein acrescentou um termo a mais na ação S_{EH} , é o termo que envolve a constante cosmológica Λ , que foi introduzido devido ao fato de que as equações de campo previam que o universo estava em expansão e este termo a mais tornaria o universo estático, atualmente sabe-se que o universo está realmente em expansão, mais detalhes podem ser vistos em [12]. A ação com a constante cosmológica torna-se

$$S = S_{EH} + S_m = \frac{1}{16\pi G/c^4} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m. \quad (2.8)$$

A variação desta ação é análoga e a equação de campo gerada com o termo da constante cos-

mológica acrescentado é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

O que será feito nas próximas seções é apresentar algumas soluções das equações de campo que serão necessárias nos próximos capítulos.

2.2 Espaço Esfericamente Simétrico e Estático

Nesta seção busca-se apresentar uma construção do tensor métrico formado pelas componentes $g_{\mu\nu}$ que seja estático e seja esfericamente simétrico. O caminho tomado para fazer isto será baseado em [6].

Tome o conjunto de coordenadas $x^\mu = (t, x^1, x^2, x^3)$ do espaço-tempo tal que as componentes do tensor métrico não dependem do tempo, ou seja, caráter estático e a distância entre dois eventos infinitesimalmente próximos tenha a parte espacial como função só dos invariantes de rotação, $d\mathbf{r}^2$, $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$, r . Logo, o intervalo infinitesimal toma a forma

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + E(r)(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})dt + D(r)(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})^2 + C(r)d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.10)$$

Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ x^2 &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ x^3 &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e algumas redefinições necessárias, pode-se obter uma forma bastante simples para a equação (2.10), a saber

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (2.12)$$

Esta é a forma padrão para apresentar a métrica esfericamente simétrica e estática e também está implícito que a velocidade da luz, c , foi tomada como a unidade ($c = 1$). Busca-se encontrar as formas de $A(r)$ e $B(r)$ para uma fonte com essa simetria. Identificando as componentes do tensor métrico da equação (2.12), pode-se escrever todas as componentes em forma de uma matriz diagonal,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Com isso, pode-se calcular as componentes $G_{\mu\nu}$, as não nulas são

$$G_{00} = \frac{AB'}{rB^2} + \frac{A}{r^2} - \frac{A}{r^2B}, \quad (2.14)$$

$$G_{11} = \frac{A'}{rA} - \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right), \quad (2.15)$$

$$G_{22} = \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{r^2}{2AB} \left[A'' - \frac{A'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right)\right]. \quad (2.16)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta, \quad (2.17)$$

onde linha representa derivação com relação a variável r . Nas próximas seções serão abordadas as soluções e características usadas no desenvolvimento dos capítulos futuros.

2.3 Espaço de Schwarzschild

Uma das soluções mais simples das Equações de Campo Gravitacional é a métrica gerada por um corpo estático, esfericamente simétrico e eletricamente neutro. Tome este corpo na origem do sistema de coordenadas, tendo massa M e esteja em uma região delimitada por $r < R$. Logo o tensor densidade de energia-momento para $r > R$ é nulo, porque não existe matéria nesta região, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$. Com isso, as equações de campo tornam-se $G_{\mu\nu} = 0$, onde $G_{\mu\nu}$ são dados pelas equações (2.14) à (2.17). Logo

$$\frac{B}{A}G_{00} + G_{11} = \frac{1}{r} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0. \quad (2.18)$$

Note que como $r > R$ e $A(r), B(r) \neq 0$ em (2.18) é fácil ver que

$$\frac{dAB}{dr} = 0 \rightarrow A(r) = \frac{C}{B(r)}. \quad (2.19)$$

Quando r é bastante grande, ou seja para um ponto muito distante do corpo, é natural que os efeitos dele sejam nulos. Logo espera-se que muito longe da fonte a métrica seja plana, ou seja, ela deve reproduzir a métrica de Minkowski. Nesse limite $A \rightarrow 1$ e $B \rightarrow 1$, tornando o C da equação (2.19) igual a unidade, $C = 1$.

Agora é necessário tomar o limite clássico. A *Teoria da Relatividade Geral* deve recobrar a *Lei da Gravitação Universal* de Newton no limite $c \rightarrow \infty$. Tome uma perturbação da métrica de Minkowski do seguinte modo, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1 + h, 1, 1, 1)$, ($h \ll 0$). Como no limite clássico $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \rightarrow 1$ a quadrivelocidade, $U^\mu = c(1, \mathbf{v}/c)$, que tem as componentes espaciais muito menores que a temporal, torna-se aproximadamente $U^\mu = (c, \mathbf{0})$.

Neste limite pode-se tomar as coordenadas espaciais $x^l = (x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ da equação da geodésica, pois esta equação que fornece a trajetória de uma partícula,

$$\frac{d^2 x^l}{dt^2} = -\Gamma_{00}^l c^2 = -\frac{\partial h}{\partial x^l}. \quad (2.20)$$

Pois, $\Gamma_{00}^l = \partial_l g_{00}/2 = \partial_l h/2$. Usando o fato que a aceleração é igual ao potencial gravitacional $\Phi = GM/r$, onde G é a constante da gravitação universal. Tomando,

$$\frac{\partial h}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{2GM}{rc^2} \right), \quad (2.21)$$

pode-se considerar $c = 1$ e assim escrever

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (2.22)$$

Com a equação (2.22), a (2.19) e a constante igual a unidade, pode-se escrever o intervalo infinitesimal como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.23)$$

Esta solução representada por (2.23) é uma das soluções mais simples das equações de campo e quem a descobriu foi Schwarzschild em 1916, e é conhecida na literatura como *Solução de Schwarzschild*, por motivos óbvios.

2.4 Fluido Perfeito

O objetivo desta seção é apresentar algumas condições que as funções $A(r)$ e $B(r)$ da equação (2.12) devem satisfazer para um fluido perfeito. O desenvolvimento desta seção será feito de acordo com [10] e considerando a velocidade da luz como a unidade, ou seja, $c = 1$. Um fluido perfeito é definido com um fluido que não tem viscosidade e não conduz calor no referencial comóvel a ele. A condução de calor está associada as componentes T_{0i} , para um fluido perfeito a energia só pode fluir se as partículas fluírem e isso implica que $T_{0i} = 0$. A viscosidade está associada a força paralela a interface entre as partículas, a ausência de viscosidade implica que $T_{ij} = 0 (i \neq j)$, observando que T_{ij} neve ser diagonal para todos os referenciais comóveis, então T_{ij} para um fluido perfeito deve ser função só da força por unidade de área, chamada de *pressão* e é representada por p , assim $T_{ij} = p\delta_{ij}$.

Considere um fluido perfeito, com pressão p e densidade ρ , sabe-se que o tensor densidade de energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

Pelas equações de campo (2.7), $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, as componentes fora da diagonal do tensor densidade energia momento são nulas. Logo $U_l U_0 = 0$, assim $U_l = 0$. Como $U^\mu U_\mu = -1$ então $U_0 = \sqrt{A}$, explicitamente, as componentes não nulas de $T_{\mu\nu}$ são

$$T_{00} = \rho A, T_{11} = pB, T_{22} = pr^2, T_{33} = pr^2 \sin^2 \theta. \quad (2.25)$$

Pode-se reunir as equações (2.14), (2.15), (2.16), (2.17), com as equações (2.25) e assim escrever as equações de campo (2.12). Logo, obtém-se

$$\frac{AB'}{rB^2} + \frac{A}{r^2} - \frac{A}{r^2 B} = 8\pi G\rho A, \quad (2.26)$$

$$\frac{A'}{rA} - \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 8\pi GpB, \quad (2.27)$$

$$\frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{r^2}{2AB} \left[A'' - \frac{A'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right)\right] = 8\pi Gpr^2. \quad (2.28)$$

Observe que

$$\frac{rB'}{B} - \frac{1}{B} + 1 = \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - \frac{1}{B}\right) \right].$$

Logo, pode-se escrever $B(r)$ como

$$B(r) = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (2.29)$$

onde $m(r)$ é tal que

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r}. \quad (2.30)$$

Note que $m(0) = 0$, pois $B(r)$ tem que ser finito na origem. Observe que apesar da semelhança $m(r)$ não é a massa própria, pois o trivolume ($t = \text{constante}$) é dado pelo elemento de volume $\sqrt{B}r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$. Uma relação importante sai diretamente do fato da derivada covariante do tensor densidade de energia-momento ser nula. Usando isso juntamente com a definição da métrica (2.12) e das componentes $T_{\mu\nu}$ encontra-se

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \frac{A'}{A} = -\frac{2p'}{\rho + p}. \quad (2.31)$$

Com as funções $\rho(r)$ e $p(r)$ juntamente com a equação $dm/dr = 4\pi r^2 \rho(r)$ e $B = 1 - 2Gm(r)/r$ as funções $A(r)$ e $B(r)$ estão determinadas. Porém é conveniente eliminar $A(r)$ e $B(r)$ na equação de campo pra ter uma relação entre ρ e p . A saber, tome a equação (2.27). Pode-se escrever então

$$\frac{A'}{rA} = \left[8\pi Gp + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right) \right] B. \quad (2.32)$$

Usando (2.31) e (2.29), pode-se reescrever (2.32) como

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(4\pi Gpr^3 + Gm)}{r(r - 2Gm)}. \quad (2.33)$$

Esta equação, (2.33), é conhecida como equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Usando (2.33) em (2.31), e fácil ver

$$\frac{A'}{A} = \frac{8\pi Gpr^3 + 2Gm}{r(r - 2Gm)}. \quad (2.34)$$

O exposto nesta seção já é suficiente para dar continuidade aos capítulos futuros, por economia é conveniente prosseguir para solução de Kottler.

2.5 Espaço de Kottler

O *Espaço de Kottler* [13] se diferencia dos outros dois apresentados acima, pois neste espaço considera-se a constante cosmológica Λ tendo um valor diferente de zero. O conjunto de equações a ser resolvido são os fornecidos por (2.9). Neste espaço além de considerar a deformação causada por uma massa M , que é o caso de Schwarzschild, considera-se também a deformação da métrica devido a constante cosmológica, ou seja, $T_{\mu\nu}$ tem componentes não nulas para um $r > R$. Para que seja utilizado o mesmo formalismo adotado da seção anterior é preciso considerar uma certa mudança neste problema, no sentido de induzir um tensor densidade de energia-momento causado pela constante cosmológica. A obtenção desta solução foi feita de acordo com as indicações de um exercício de [3].

Comece por reescrever a equação (2.9) com $T_{\mu\nu}$ do seguinte modo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -g_{\mu\nu}\Lambda. \quad (2.35)$$

Comparando com as equações (??) e (??) pode-se induzir que $\xi(r) = \zeta(r) = \Lambda$ e com isso utilizar o desenvolvimento da seção passada para encontrar a métrica. Resolvendo a equação (??) é simples ver

$$A(r) = 1 - \frac{a}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2.$$

Observe que a constante a é $2GM$ no caso em que fosse resolvido o problema de um corpo esfericamente simétrico e com massa M com a constante cosmológica $\Lambda = 0$. Então para um corpo com massa, M , obtém-se o espaço de *Kottler*, a saber

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.36)$$

Vale ressaltar que, quando a constante cosmológica é positiva, $\Lambda > 0$, o espaço é chamado de *Espaço de Sitter* e quando ela é negativa, $\Lambda < 0$, o espaço é chamado de *Espaço anti-de*

Sitter.[3]

2.6 Princípio de Fermat para um Espaço Curvo Estático

Agora será desenvolvido o *Princípio de Fermat* generalizado para um espaço curvo e estático. Antes de ir para o desenvolvimento que valida esta generalização é conveniente apresentar alguns conceitos importantes sobre *geodésicas nulas*. O desenvolvimento que será aqui apresentado é baseado em [3].

Dada uma partícula de massa m em uma espaço curvo que possua uma métrica cujas componentes são $g_{\mu\nu}$ onde $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$. O caminho tomado por esta partícula é obtido variando a ação S , com o parâmetro sendo o tempo próprio τ , a saber

$$S = -m \int d\tau^2 = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.37)$$

A equação de movimento é a equação da geodésica neste espaço curvo, dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (2.38)$$

O conceito de geodésica e os coeficientes de conexão Γ são apresentados no capítulo 3 no contexto de métrica induzida, porém a definição é a mesma para um espaço de dimensão maior e pra uma métrica genuína, a única mudança é o valor tomado pelos índices que é igual ao da dimensão do espaço. Esses conceitos estão presente em todas as referências citadas no inicio deste capítulo.

Tome um outro parâmetro λ tal que $\tau = \tau(\lambda)$, fazendo a mudança de τ para λ na equação (2.38) é fácil obter

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \frac{d^2 \tau}{d\lambda^2} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} =: f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (2.39)$$

Se $f(\lambda)$ for nulo, então a equação (2.39) tem a mesma forma que a equação (2.38) e λ é chamado de *parâmetro afim* por sua propriedade de preservar a forma da equação da geodésica neste caso.

Existem outras ações que fornecem a equação da geodésica (2.38). Se λ for um parâmetro afim, então a ação

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d\lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (2.40)$$

fornece a mesma equação de movimento (2.38), porém com λ no lugar de τ . Cabe aqui reforçar que esta ação só pode ser usada se o parâmetro λ for afim. Agora pode-se definir o conceito de geodésicas nulas.

Uma geodésica nula será o caminho tomado por um raio luminoso em um espaço tempo curvo assim como uma geodésica tipo tempo descreve o caminho de uma partícula.

No caso de geodésicas nulas a escolha do parâmetro é delicada no sentido de não poder usar a parametrização do tempo próprio, pois ele é nulo durante todo o caminho. Defina-se geodésicas nulas como curvas integrais do campo vetorial k^α tal que ele seja do tipo luz

$$k^\alpha k_\alpha = 0. \quad (2.41)$$

Além disso este campo vetorial tem que satisfazer a equação (2.39), com $k^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, que pode ser representado como segue

$$k^\alpha \partial_\alpha k^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta k^\alpha k^\nu = f(\lambda) k^\beta. \quad (2.42)$$

Com isso pode-se escolher um parâmetro tal que $f(\lambda) = 0$, de modo que satisfaça a equação da geodésica. Usualmente utiliza-se o momento do fóton como parâmetro. Com isso ,

$$k^\alpha \partial_\alpha k^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta k^\alpha k^\nu = 0. \quad (2.43)$$

Com as informações acima pode-se apresentar o *Princípio de Fermat* generalizado. Tome um espaço curvo estático, isso significa que $g_{0i} = 0$ e $g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t)$. Considere todas as geodésicas nulas que conectam dois eventos P e Q . Cada geodésica pode ser descrita por três funções $x^j(t) = 0$ e que levará Δt para ir de P para Q . O que se pretende mostrar a seguir é que as geodésicas nulas são as curvas que minimizam Δt . Um fato que deve ser usado é que no caso de geodésicas nulas o intervalo infinitesimal fornece

$$0 = dt^2 + \frac{g_{ij}}{g_{00}} dx^i dx^j. \quad (2.44)$$

Tomando a equação da geodésica, mudando o parâmetro de λ para t , de forma análoga a equação (2.39), e multiplicando pela métrica

$$g_{\nu\mu} \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} - \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^{-1} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} g_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{dt} = 0. \quad (2.45)$$

De acordo com as características da métrica pode-se escrever três das quatro equações presentes na (2.45) como segue

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{i00} \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{ijk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^{-1} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} g_{ij} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (2.46)$$

Como $x^0 = t$ a "parte temporal" da equação (2.45) fornece

$$2 \frac{1}{g_{00}} \Gamma_{0k0} \frac{dx^k}{dt} = \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^{-1} \frac{d^2 t}{d\lambda^2}. \quad (2.47)$$

Por outro lado a identidade (2.44) fornece

$$\frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} = -\frac{g_{ij}}{g_{00}} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}. \quad (2.48)$$

Logo usando (2.47) e (2.48) em (2.46), além de usar a notação $\dot{f} := df/dt$, é fácil ver que

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \left(\Gamma_{ijk} - \frac{g_{jk}}{g_{00}}\Gamma_{i00} - 2\frac{g_{ij}}{g_{00}}\Gamma_{0k0} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad (2.49)$$

Observe que o segundo termo do primeiro membro possui $\dot{x}^j \dot{x}^k$ que é simétrico, logo se o termo entre parênteses for anti-simétrico este termo será nulo, logo pode-se simetrizar do seguinte modo

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \left(\Gamma_{ijk} - \frac{g_{jk}}{g_{00}}\Gamma_{i00} - \frac{g_{ij}}{g_{00}}\Gamma_{0k0} - \frac{g_{ik}}{g_{00}}\Gamma_{0j0} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (2.50)$$

Mas uma vez considerando as características da métrica pode-se escrever o termo entre parênteses como

$$\left(\Gamma_{ijk} - \frac{g_{jk}}{g_{00}}\Gamma_{i00} - \frac{g_{ij}}{g_{00}}\Gamma_{0k0} - \frac{g_{ik}}{g_{00}}\Gamma_{0j0} \right) = \frac{-g_{00}}{2} \left[\partial_j \left(-\frac{g_{ik}}{g_{00}} \right) + \partial_k \left(-\frac{g_{ij}}{g_{00}} \right) - \partial_i \left(-\frac{g_{jk}}{g_{00}} \right) \right]. \quad (2.51)$$

Substituindo (2.51) em (2.49) e definindo $H_{ij} = -g_{ij}/g_{00}$

$$H_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \frac{1}{2} [\partial_j H_{ik} + \partial_k H_{ij} - \partial_i H_{jk}] \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0. \quad (2.52)$$

A equação (2.52) nada mais é do que a equação da geodésica com o t sendo o parâmetro afim e com as componentes da métrica H_{ij} , essa métrica é chamada de *Métrica Óptica*. Ou seja, as geodésicas nulas são tais que no espaço da métrica óptica

$$\delta \int dt = 0. \quad (2.53)$$

Este nada mais é que o *Princípio de Fermat* que diz que os raios luminosos percorrem trajetórias de menor tempo. Porém neste caso houve uma generalização para um espaço-tempo curvo e estático.

No próximo capítulo será estudado os conceitos fundamentais da geometria diferencial com foco no teorema de Gauss-Bonnet, teorema este que é fundamental para desenvolver a metodologia do cálculo de deflexão da luz que será desenvolvida no quarto capítulo. Diante disso, a construção do próximo capítulo é diferente dos outros, pois será utilizado um formalismo mais matemático para apresentar os conceitos, de modo que seja possível compreender a natureza do Teorema de Gauss-Bonnet.

3 TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Neste capítulo busca-se apresentar alguns conceitos básicos sobre geometria diferencial, enunciar e demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet tanto na sua versão local quanto global. Além disso, serão feitas algumas aplicações simples para que o leitor possa compreender cada parte que constitui o teorema. Por meio deste teorema que é formulada a metodologia para o cálculo de deflexão da luz.

Este capítulo será baseado no livro "Differential Geometry of Curves and Surfaces" do professor Manfredo, [7]. Outras referências que irão auxiliar são os livros [14–16] onde este último é um ótimo livro para um primeiro contato com geometria diferencial, uma outra referência que fala sobre estes assuntos com um olhar mais intuitivo é [17] de análise tensorial.

As definições a seguir foram retiradas de [7], caso não seja desta referência será indicado.

3.1 Superfície Regular e Plano Tangente

Um conceito fundamental que estará presente em todo o capítulo é o de superfície e é definida por [7] como segue:

Definição 1 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se para cada $p \in S$, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ e um mapa $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ que vai um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ para $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tal que:

- 1 \mathbf{x} é diferenciável. Isso significa que se $\mathbf{x}(q^1, q^2) = (x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2))$ onde $(q^1, q^2) \in U$, as funções $x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens.
- 2 \mathbf{x} é um homeomorfismo. Como 1 garante que \mathbf{x} é contínuo, isso significa que \mathbf{x} tem uma inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ contínua, ou seja, \mathbf{x}^{-1} é a restrição de um mapa contínuo $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em um conjunto aberto W contendo $V \cap S$
- 3 (Condição de regularidade.) Para cada $q \in U$, o mapa diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetivo.

O mapeamento \mathbf{x} é dito uma parametrização de S . Usando esta parametrização é possível definir uma base vetorial local na superfície, esta base vetorial compõe o espaço tangente da superfície no ponto, vamos construir isso como segue.

Seja $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ a base canônica do \mathbb{R}^2 com coordenadas (q^1, q^2) , e seja $\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{f}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)$ a base canônica do \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, z) . Seja $q = (q_0^1, q_0^2) \in U$, o vetor \mathbf{e}_1 é tangente a curva $q^1 = (q^1, q_0^2)$ cuja a imagem é

$$q^1 \rightarrow (x(q^1, q_0^2), y(q^1, q_0^2), z(q^1, q_0^2)), \quad (3.1)$$

que é a curva imagem, chamada de curva coordenada $q^2 = q_0^2$, sobre S e tem em $\mathbf{x}(q)$ o vetor tangente

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^1}, \frac{\partial y}{\partial q^1}, \frac{\partial z}{\partial q^1} \right), \quad (3.2)$$

as derivadas são computadas sempre no ponto q e o vetor (3.2) é dado de acordo com a base $\{f_1, f_2, f_3\}$. De modo análogo, o vetor \mathbf{e}_2 é tangente a curva $q^2 = (q_0^1, q^2)$ cuja a imagem é

$$q^2 \rightarrow (x(q_0^1, q^2), y(q_0^1, q^2), z(q_0^1, q^2)), \quad (3.3)$$

onde (3.3) representa a curva coordenada $q^1 = q_0^1$ sobre S e o vetor tangente é

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^2}, \frac{\partial y}{\partial q^2}, \frac{\partial z}{\partial q^2} \right). \quad (3.4)$$

Uma definição importante que irá nos auxiliar é a seguinte

Definição 2 Dada superfície parametrizada $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, \mathbf{x} é um mapa diferenciável que vai de $U \subset \mathbb{R}^2$ para \mathbb{R}^3 . \mathbf{x} é regular se $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetivo para todo $q \in U$. Isso significa os vetores $\partial \mathbf{x} / \partial q^1$ e $\partial \mathbf{x} / \partial q^2$ são linearmente independentes para todo $q \in U$.

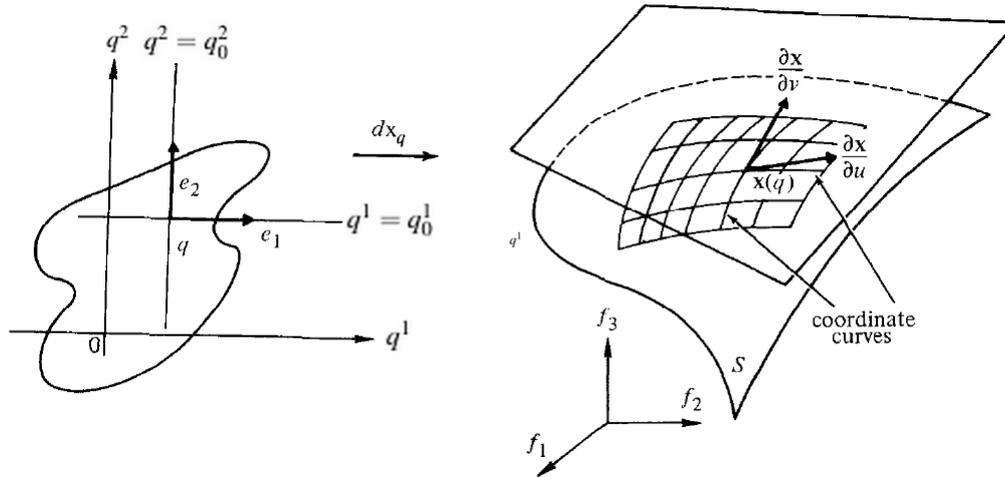
De agora em diante derivadas parciais $\partial f / \partial x$ serão representadas por $\partial_x f$, caso sejam derivadas com relação as coordenadas representa-se por $\partial_{q^i} f = \partial_i f$ e também, baseado em [18] para a base do espaço tangente, $\partial_1 \mathbf{x} =: \varepsilon_1$ e $\partial_2 \mathbf{x} =: \varepsilon_2$. Com essas definições podemos associar a cada ponto $\mathbf{x}(q) \in S$ uma base local $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ de um espaço vetorial. Tal espaço vetorial é o espaço tangente a S em $\mathbf{x}(q)$ e é representado por $T_{\mathbf{x}(q)}(S)$ e com isso qualquer vetor pertencente a $T_{\mathbf{x}(q)}(S)$ pode ser escrito como uma combinação linear da base local $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Observe a figura 1, onde foi modificado apenas os eixos de \mathbb{R}^2 para q^1, q^2 .

Note que o espaço tangente em um ponto $q \in S$ fica completamente definido desde que se conheça a parametrização, pois com ela pode-se construir a base deste espaço.

3.2 Primeira Forma fundamental e métrica induzida

Agora será apresentado o conceito de Primeira forma fundamental da geometria diferencial que permite estudar características geométricas da superfície. Como de costume o desenvolvimento abaixo é baseado em [7] e partes em [17].

Figura 1 – Base vetorial local da superfície



Fonte: [7], modificado

Inicia-se pelo fato de que S é um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Como o produto interno é bem definido em \mathbb{R}^3 basta induzir a noção de produto interno para o espaço tangente de cada ponto da superfície. Seja $\mathbf{x}(q) = p$, assim $T_p S$ é o espaço tangente do ponto $p \in S$, logo o produto interno induzido no espaço tangente $T_p S$ será representado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Dados dois vetores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ então o produto interno $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno do \mathbb{R}^3).

Definição 3 A primeira forma quadrática I_p em $T_p S$ é chamada de primeira forma fundamental das superfícies regulares $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$. $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = |\mathbf{w}|^2 > 0. \quad (3.5)$$

Como existe uma base para cada $T_p S$ pode-se reescrever os vetores de $T_p S$ como uma combinação linear da base e com isso efetuar o produto interno. Note que dada uma origem em \mathbb{R}^3 a parametrização \mathbf{x} de S é um vetor posição que varre os pontos da superfície. Logo tomando dois pontos pertencentes a S infinitesimalmente próximos, tome $p = \mathbf{x}(q)$ e $p + dp = \mathbf{x}(q + dq)$, e usando a regra da cadeia, o vetor que liga esses dois pontos e que pertence ao espaço tangente é dado por

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} dq^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 dq^1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 dq^2. \quad (3.6)$$

Basta agora usar a primeira forma quadrática para calcular o quadrado dessa distância infinitesimal, assim

$$ds^2 = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rangle (dq^1)^2 + 2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle dq^1 dq^2 + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle (dq^2)^2. \quad (3.7)$$

Cabe agora introduzir algumas nomenclaturas e definir uma representação para os produtos internos acima. Da geometria riemannianna toma-se "emprestado" o conceito de métrica e define

a chamada métrica induzida em S . Para isso tome a seguinte representação:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle &=: h_{11} \\ \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle &=: h_{12}(= h_{21}) \\ \langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle &=: h_{22}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Onde h_{11}, h_{12}, h_{22} são chamadas de componentes da métrica induzida. Usando a convenção de Einstein que diz que índices repetidos de um dos lados da igualdade estão somados e o somatório é suprimido, a soma varre valores que são previamente conhecidos, no caso abaixo os índices tomam valores de 1 e 2. A equação (3.7), pode ser reescrita como

$$ds^2 = h_{ij}dq^i dq^j.\tag{3.9}$$

Uma parametrização \mathbf{x} é dita ser ortogonal se $h_{12} = 0$ para todo $(q^1, q^2) \in U$. As vezes os h_{ij} são representados como uma matriz quadrada simétrica que tem determinante representado por $\det(h_{ij}) =: h$ e tem elementos de sua inversa denotados por $(h_{ij})^{-1} =: h^{ij}$.

3.3 Vetor Normal, Superfície Orientável

De posse do espaço tangente e sua base é possível definir a aplicação normal de Gauss, que associa a cada ponto p pertencente a S um vetor unitário normal a $T_p S$, diz que este vetor unitário normal é ortogonal a S em p .

Da geometria analítica sabe-se que o produto vetorial no \mathbb{R}^3 (representado por \wedge) de dois vetores resulta em um outro vetor que é ortogonal aos outros dois. Logo fazendo o produto vetorial dos dois vetores de base do espaço tangente de S em um ponto p pode-se obter o vetor que é normal a S em p , onde $p = \mathbf{x}(q)$ ($q \in U$). Seja $\mathbf{N} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, logo

$$\mathbf{N} = \frac{\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2}{|\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2|}(q).\tag{3.10}$$

Agora é conveniente definir o conceito de área de uma região pertencente a superfície. Uma região $R \subset S$ é a união de um domínio com seu bordo, uma região é dita limitada se pode ser envolvida por uma bola do \mathbb{R}^3 . Tome uma parametrização $\mathbf{x}(U) \rightarrow S$, tome R como contida dentro de uma vizinhança da parametrização, isso significa que existe $W \subset U$ uma região limitada de U tal que a restrição $\mathbf{x}(W) = R$, logo $W = \mathbf{x}^{-1}(R)$.

Por outro lado é conhecido da geometria analítica que a norma do produto vetorial de dois vetores é numericamente igual a área do paralelogramo formado por eles, logo tomando o produto vetorial dos dois vetores de base do espaço tangente e integrando teremos a área da região. Pode-se definir área do seguinte modo

Definição 4 *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular contida dentro de uma*

vizinhança de uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo

$$A(R) = \int \int_{W=\mathbf{x}^{-1}(R)} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2| dq^1 dq^2 \quad (3.11)$$

é chamado de área da região R .

Esta definição tem fortes indicações para ser adotada, note que usando as operações de vetores no \mathbb{R}^3 é fácil mostrar que

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_1 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2 = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rangle \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle^2. \quad (3.12)$$

Reescrevendo em termos da métrica induzida é fácil ver que $|\boldsymbol{\varepsilon}_1 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2| = \sqrt{h}$ e a definição de área torna-se:

$$A(R) = \int \int_{W=\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{h} dq^1 dq^2. \quad (3.13)$$

Um conceito importante que será necessário é o de superfície orientável. Define-se como

Definição 5 *Uma superfície regular S é orientável se é possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças desta família, então a mudança de parâmetros tem jacobiano positivo. A escolha de uma família acima é chamada de uma orientação para S se for possível fazê-lo. Se não for possível escolher uma família a superfície é dita não orientável.*

Para que S seja orientável basta que exista o campo vetorial normal unitário $\mathbf{N} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ contínuo em toda a superfície.

3.4 Derivada Covariante, Transporte Paralelo e Curvatura Geodésica

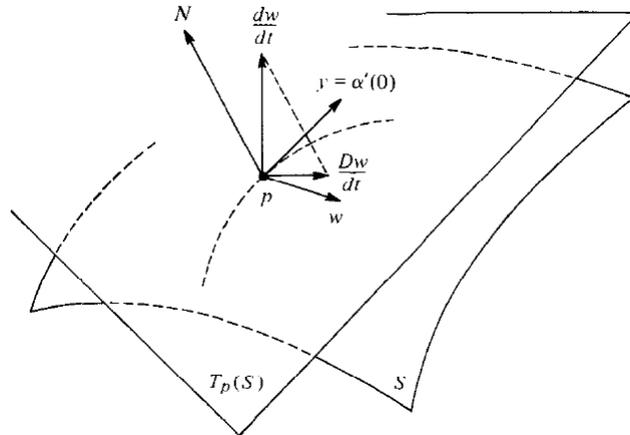
O conceito que será apresentado agora é o de Derivada Covariante, este conceito é fundamental pois é com ele que se define a curvatura geodésica de uma curva, esta por sua vez está presente no teorema de Gauss-Bonnet. Primeiro será dada uma definição geométrica da derivada covariante e após será apresentado uma forma de calcular esta quantidade.

Definição 6 *Seja \mathbf{w} um campo vetorial diferenciável em um aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $\mathbf{y} \in T_p S$. Considere a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ com $\alpha(0) = p$ e $\mathbf{y} = d\alpha/dt(0)$. Seja $\mathbf{w}(t)$ a restrição de $\mathbf{w} : (-\varepsilon, \varepsilon)$ a curva α . O vetor obtido pela projeção de $d\mathbf{w}/dt$ no plano tangente $T_p S$ é chamado de derivada covariante em p do vetor \mathbf{w} relativo a \mathbf{y} . Denotado por $D\mathbf{w}/dt(0)$.*

Note que a superfície S está contida no \mathbb{R}^3 logo a derivação de campos vetoriais diferenciáveis é bem definida. Derivar um campo vetorial sobre a superfície não garante que

este novo vetor pertença ao espaço tangente no ponto, esta definição está dizendo que deve-se pegar apenas a componente deste novo vetor que pertence ao espaço tangente. Observe a figura 2.

Figura 2 – Derivada Covariante



Fonte: [7]

Agora mostra-se como calcula a derivada covariante de um campo vetorial com relação a outro e também que as componentes independem da curva α , de modo que a derivada covariante seja um conceito intrínseco.

A derivada parcial de um vetor de base do espaço tangente pode ser escrita como uma combinação linear da própria base, pois pela definição de derivada covariante caso apareça alguma parte que não pertença ao espaço tangente basta tomar a projeção desta parte sobre ele. Assim pode-se escrever

$$\nabla_i \varepsilon_j = \Gamma_{ij}^k \varepsilon_k, \quad (3.14)$$

onde i, j, k assumem os valores $\{1, 2\}$, Γ_{ij}^k são conhecidos como símbolos de Christoffel de segunda espécie, ou coeficiente de conexão, e ∇_i representa a derivada parcial com relação a coordenada i do vetor de base ε projetada no espaço tangente. Como $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle_p = h_{ij}$ de acordo com os coeficientes da métrica induzida que pode ser visto em (3.8) é fácil mostrar usando a (3.14) que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} h^{kl} [\partial_i h_{jl} + \partial_j h_{il} - \partial_l h_{ij}]. \quad (3.15)$$

Assim, os símbolos Γ_{ij}^k dependem só da primeira forma diferencial, ou seja, da métrica induzida (h_{ij}). Com isso, pode-se obter a derivada covariante do campo vetorial $\mathbf{w} = w^i \varepsilon_i$. Note que tanto as componentes w^i quanto a base são funções das coordenadas (q^1, q^2) que por sua vez são funções do parâmetro da curva t . Logo derivando \mathbf{w} e usando (3.14), além de notar o fato que a derivada de \mathbf{w} no plano tangente é a própria derivada covariante de \mathbf{w} ,

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw^i}{dt} \varepsilon_i + w^i \Gamma_{li}^k \frac{dq^l}{dt} \varepsilon_k. \quad (3.16)$$

Usando o fato de que no ultimo termo do lado direito os índices k e i são mudos(estão somados) então pode-se permuta-los e notando que de acordo com a definição $dq^i/dt = y^i$ pode-se reescrever (3.16) como

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \left[\frac{dw^i}{dt} + w^k \Gamma_{ik}^i y^l \right] \epsilon_i. \quad (3.17)$$

Observe que a derivada covariante não depende da curva e é um conceito intrínseco. Outra definição importante é o de transporte paralelo. Primeiro se define o conceito de campo paralelo ao longo de uma curva.

Definição 7 *Um campo \mathbf{w} sobre uma curva parametrizada $\alpha(t) : I \rightarrow S$ é dito paralelo se para todo $t \in I$ a derivada covariante é nula ($D\mathbf{w}/dt = 0$).*

Com isso pode-se definir transporte paralelo de um vetor sobre uma curva.

Definição 8 *Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $\mathbf{w}_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$, $t_0 \in I$. Desde que \mathbf{w} seja paralelo ao longo de α , com $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0$. O vetor \mathbf{w}_1 , $t_1 \in I$, é chamado de transporte paralelo de \mathbf{w}_0 ao longo de α até o ponto t_1 .*

Esta definição pode ser compreendida de modo direto no caso euclidiano. Por exemplo, pense em um campo vetorial no \mathbb{R}^2 , como os símbolos de Christoffel são nulos a derivada covariante é a derivadas simples do vetor com relação ao parâmetro da curva. Como a derivada covariante do campo vetorial é nula, este campo é um campo constante que é transportado por toda a curva apenas trasladando ele.

Convém agora definir a derivada covariante de um campo vetorial unitário ao longo de uma curva pertencente a uma superfície orientada em termos de um vetor unitário e seu módulo. Para isso, será apresentada a definição de derivada covariante

Definição 9 *Seja \mathbf{w} um campo de velocidades unitário(unitário significa que $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 1$ para todo ponto onde o campo está definido) ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$, onde S é uma superfície orientável. Desde que $\mathbf{w}(t)$, $t \in I$, é um vetor unitário, $d\mathbf{w}/dt$ é normal a \mathbf{w} e desta forma*

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \lambda(t)(\mathbf{N} \wedge \mathbf{w}), \quad (3.18)$$

onde $\lambda(t) = [D\mathbf{w}/dt]$ é o valor algébrico da derivada covariante de \mathbf{w} em t .

Note que \mathbf{N} é o vetor normal a superfície no ponto, logo a derivada covariante é ortogonal tanto a \mathbf{N} quando a \mathbf{w} .

Agora pode-se definir o conceito de curvatura geodésica que é análogo a curvatura de uma curva plana

Definição 10 *Seja C uma curva regular e orientada contida em uma superfície também orientada S , e seja $\alpha(s)$ uma parametrização de C por comprimento de arco na vizinhança de $p \in S$.*

O valor algébrico da derivada covariante $[D\alpha'/ds] = \kappa_g$ de $\alpha'(s)$ em p é a chamada curvatura geodésica de C em p .

Pode-se definir geodésicas por curvas que tenham curvatura geodésica nula, $\kappa_g = 0$, se $\alpha(s) = \alpha^i \varepsilon_i$, pode-se facilmente encontrar a equação da geodésica, a saber

$$\frac{d^2 \alpha^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\alpha^j}{ds} \frac{d\alpha^k}{ds} = 0. \quad (3.19)$$

A partir de agora será apresentada uma forma de calcular o valor algébrico da derivada covariante e com isso encontrar a curvatura geodésica.

Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} dois campos vetoriais unitários ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$. Busca-se definir uma função $\varphi : I \rightarrow S$ tal que $\varphi, t \in I$ determina o ângulo de \mathbf{v} para \mathbf{w} na orientação de S . Considere também $\bar{\mathbf{v}}$ ao longo de α de modo que $\{\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}\}$ é uma base ortonormal positiva para todo $t \in I$. Logo, para todo ponto \mathbf{w} pode ser escrito nessa base como

$$\mathbf{w}(t) = a(t)\mathbf{v}(t) + b(t)\bar{\mathbf{v}}(t) \quad \leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 1. \quad (3.20)$$

Para definir este ângulo, basta fixa-lo em um ponto e estender ele por todo o intervalo de acordo com o lema abaixo

Lema 1 *Sejam a e b duas funções diferenciáveis em I , $a^2 + b^2 = 1$, e φ_0 tal que $a(t_0) = \cos \varphi_0$ e $b(t_0) = \sin \varphi_0$. Então a função diferenciável*

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - a'b) dt \quad (3.21)$$

é tal que $a(t) = \cos \varphi$, $b(t) = \sin \varphi$, $t \in I$, e $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Prova: É suficiente mostrar que $A = a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$. Usando o fato de $a^2 + b^2 = 1$ que implica em $aa' + bb' = 0$, basta agora derivar A . Derivando encontra-se que $A' = 0$ o que mostra que A é constante. Como $A' = 0$ implica que $a^2 + b^2 = 1$ então $A = a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$. (Q.E.D.)

Pode-se relacionar as derivadas covariantes de dois vetores por meio do ângulo formado entre eles. Veja o lema abaixo.

Lema 2 *Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} dois campos vetoriais diferenciáveis unitários ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$, então*

$$\left[\frac{D\mathbf{v}}{dt} \right] = \left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.22)$$

onde φ é dado pelo lema 1.

Prova: Sejam $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{v}$ e $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{w}$. Logo, escrevendo \mathbf{w} na base $\{\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}\}$

$$\mathbf{w} = \cos \varphi \mathbf{v} + \sin \varphi \bar{\mathbf{v}}, \quad (3.23)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \cos \varphi \mathbf{N} \wedge \mathbf{v} + \sin \varphi \mathbf{N} \wedge \bar{\mathbf{v}}, \quad (3.24)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \cos \varphi \bar{\mathbf{v}} - \sin \varphi \mathbf{v}. \quad (3.25)$$

Notando que $\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle = 0$, e $\langle \mathbf{v}', \bar{\mathbf{v}} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}' \rangle$. Ao derivar \mathbf{w} e tomar o produto interno com $\bar{\mathbf{w}}$ fornecido por (3.25) é fácil ver que

$$\langle \mathbf{w}', \bar{\mathbf{w}} \rangle = \frac{d\varphi}{dt} + \langle \mathbf{v}', \bar{\mathbf{v}} \rangle. \quad (3.26)$$

Por fim, olhando a definição de valor algébrico da derivada covariante a (3.26) se torna

$$\left[\frac{D\mathbf{v}}{dt} \right] = \left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}.$$

(Q.E.D.)

A proposição a seguir permite computar o valor algébrico da derivada covariante ao longo de uma curva com parametrização ortogonal apenas conhecendo as componentes da métrica induzida.

Proposição 1 *Seja $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ uma parametrização ortogonal ($h_{12} = 0$) de uma vizinhança em S orientada, e $\mathbf{w}(t)$ um campo de velocidades unitário ao longo de $\mathbf{x}(q^1(t), q^2(t))$, então*

$$\left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ \partial_1 h_{22} \frac{dq^2}{dt} - \partial_2 h_{11} \frac{dq^1}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.27)$$

onde $\varphi(t)$ é o ângulo que \mathbf{e}_1 faz com \mathbf{w} de acordo com a orientação.

Prova: A princípio \mathbf{e}_i , para $i = 1, 2$ não é unitário, usando a ortogonalidade pode-se definir o unitário dele como $\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i / \sqrt{h_{ii}}$. Além disso, $\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{N}$, onde \mathbf{N} é dado pela orientação de S e $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \mathbf{N}\}$ forma uma base local positivamente orientada. Usando o lema 2, pode-se escrever

$$\left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] = \left[\frac{D\hat{\mathbf{e}}_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.28)$$

Analisando o primeiro termo do lado direito pode-se escrever pela definição de valor algébrico da derivada covariante que

$$\left[\frac{D\hat{\mathbf{e}}_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{dt}, \mathbf{N} \wedge \hat{\mathbf{e}}_1 \right\rangle = \left\langle \frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{dt}, \hat{\mathbf{e}}_2 \right\rangle = \langle \partial_1 \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2 \rangle \frac{dq^1}{dt} + \langle \partial_2 \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2 \rangle \frac{dq^2}{dt}. \quad (3.29)$$

Note que, derivando $h_{11} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle$ com relação a q^2 e usando o fato que $\partial_i \mathbf{e}_j = \partial_j \mathbf{e}_i$, tem-se que

$$\frac{1}{2} \partial_2 h_{11} = \langle \partial_2 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \partial_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = \partial_1 (\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle) - \langle \partial_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle,$$

lançando mão de que $h_{12} = 0$, conclui-se

$$\langle \partial_1 \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = -\frac{1}{2} \partial_2 h_{11}. \quad (3.30)$$

Agora pode-se substituir $\varepsilon_i = \sqrt{h_{ii}} \hat{\varepsilon}_i$. Assim,

$$\langle \partial_1 \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2 \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{h}} \partial_2 h_{11}. \quad (3.31)$$

De modo análogo

$$\langle \partial_2 \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{h}} \partial_1 h_{22}. \quad (3.32)$$

Substituindo (3.31) e (3.32) em (3.30)

$$\left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ \partial_1 h_{22} \frac{dq^2}{dt} - \partial_2 h_{11} \frac{dq^1}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Assim a proposição está demonstrada. (Q.E.D)

Com esta proposição pode-se apresentar a curvatura geodésica apresentada na definição 8 usando $\mathbf{w} = \alpha'(s)$, a saber

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ \partial_1 h_{22} \frac{dq^2}{dt} - \partial_2 h_{11} \frac{dq^1}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.33)$$

3.5 Tensor Curvatura, Teorema Egregium de Gauss e Curvatura Total

Nesta secção será apresentado de maneira heurística o conceito de curvatura gaussiana de uma superfície, apresentar o teorema Egregium e por fim definir a curvatura gaussiana por meio do tensor curvatura usando uma definição encontrada em [17].

Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ existem dois tipos de curvaturas. Uma é a curvatura média e está relacionada com a propriedades da superfície quando estudada como estando imersa no \mathbb{R}^3 . A outra é a curvatura gaussiana ou curvatura total que fornece informação da superfície por si só e é uma característica intrínseca. Um exemplo simples é o caso de um cilindro reto imerso no \mathbb{R}^3 . Observando esta superfície como imersa no \mathbb{R}^3 é fácil deduzir que ela tem alguma curvatura, pois de fato ela não é um plano, e a curvatura média dessa superfície é realmente diferente de zero.

Agora observando este mesmo cilindro de forma intrínseca e levando em consideração que um cilindro reto nada mais é do que um plano enrolado pode ver que as características como distâncias entre dois pontos são iguais, ou seja, de modo intrínseco uma região do cilindro é equivalente a um plano, deste modo pode-se mostrar que a curvatura total é nula.

Convém apresentar o Teorema Egregium de Gauss, egregium vem do latim e significa excelente. O fato da curvatura total ser intrínseca a superfície é algo notável, pois não era

esperado que fosse, por isso Gauss nomeou o teorema como egregium, "teorema notável". Em [7] este teorema é definido como segue.

Teorema 1 (*Teorema Egregium de Gauss*) *A Curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização de S e $p \in S$. Se $\varphi : V \subset S \rightarrow S$, onde $V \subset \mathbf{x}(U)$ é a vizinhança do ponto p , é uma isometria local em p , então $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \varphi$ é uma parametrização de S em $\varphi(p)$. Desde que φ seja uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental (ou seja, as componentes da métrica induzida) nas parametrizações \mathbf{x} e \mathbf{y} concordam nos pontos q e $\varphi(q)$. Como os coeficientes da métrica induzida concordam os coeficientes de conexão também concordam pois são função dos h_{ij} de acordo com (3.15). A descoberta de Gauss é que a curvatura gaussiana é função só da primeira forma fundamental, pois antes deste teorema ela era função da primeira e segunda formas fundamentais. Mais detalhes podem ser encontrados em [7].

Agora será apresentado o tensor curvatura e será dado uma definição para a curvatura total.

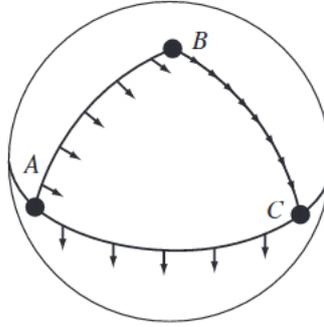
Uma maneira de encontrar o tensor curvatura é transportando um vetor via transporte paralelo por dois caminhos distintos que possuam a origem e final em comum. O vetor no final depende do caminho que foi adotado se o espaço tiver alguma curvatura. Note o exemplo retirado de [10] abaixo.

Tome três caminhos, arcos de grandes círculos, sobre uma esfera. Tome um vetor transportado paralelamente pelo ponto $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$. De acordo com a figura 3 pode-se ver de forma clara que após o vetor ser transportado por este caminho ele diferente do vetor inicial, isto se dá pelo fato do espaço ter curvatura gaussiana não nula.

Para que seja possível encontrar uma forma para o tensor curvatura em função dos coeficientes da métrica induzida, o que será feito aqui é tomar dois caminhos infinitesimais de um ponto P até um ponto $P + dP + \delta P$ sobre uma superfície S com uma parametrização \mathbf{x} . Observe a figura 4. Tome um vetor \mathbf{A} com componentes A^i em P e transporte \mathbf{A} paralelamente pelos caminhos $C_1 : P \rightarrow P + dP \rightarrow P + dP + \delta P$ e $C_2 : P \rightarrow P + \delta P \rightarrow P + dP + \delta P$. Faz-se agora uma investigação sobre a diferença do vetor \mathbf{A} transportado paralelamente pelos dois caminhos. Transportando paralelamente o vetor \mathbf{A} pelo caminho C_1 , tomando variações até ordem dois, $O_2(dq\delta q)$, e tomando $\Gamma_{mn}^l(P + dP) = \Gamma_{mn}^l(P) + \partial_k \Gamma_{mn}^l(P) dq^k$, obtém-se

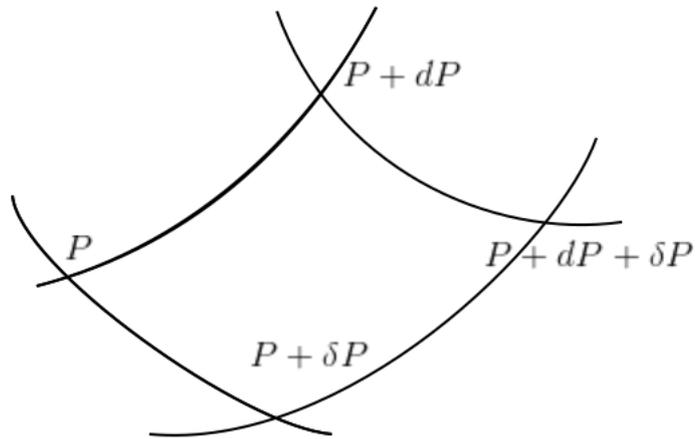
$$C_1 : A^i(P + dP + \delta P) = A^i - \Gamma_{kl}^i A^k dq^l - A^m \Gamma_{mn}^i \delta q^n - A^m \partial_r \Gamma_{mn}^i dq^r \delta q^n + A^k dq^l \delta q^n \Gamma_{kl}^m \Gamma_{mn}^i. \quad (3.34)$$

Figura 3 – Transporte paralelo sobre caminho fechado



Fonte: [10]

Figura 4 – Transporte paralelo sobre caminhos distintos



Fonte: Elaborado pelo autor

Analogamente transportando o vetor \mathbf{A} pelo caminho C_2 , tem-se

$$C_2 : A^i(P + dP + \delta P) = A^i - A^k \Gamma_{kl}^i dq^l - A^m \Gamma_{mn}^i \delta q^n - A^k \delta q^r dq^l \partial_r \Gamma_{kl}^i - A^k \delta q^r dq^l \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ml}^i. \quad (3.35)$$

Tomando a diferença do vetor \mathbf{A} , ΔA^i , pelos dois caminhos e organizando os índices mudos é fácil obter

$$\Delta A^i = (\partial_r \Gamma_{kl}^i - \partial_l \Gamma_{kr}^i + \Gamma_{kl}^m \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ml}^i) A^k dq^l \delta q^r. \quad (3.36)$$

O termo entre parenteses é conhecido como tensor curvatura e é denotado por R_{krl}^i , assim

$$R_{krl}^i := \partial_r \Gamma_{kl}^i - \partial_l \Gamma_{kr}^i + \Gamma_{kl}^m \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ml}^i. \quad (3.37)$$

Agora é conveniente apresentar este tensor como contraído com a métrica induzida, note

$$R_{ijkl} := h_{in}R_{jkl}^n. \quad (3.38)$$

Definindo o símbolo de Christoffel de primeira espécie $\Gamma_{ijk} := \frac{1}{2}(\partial_j h_{ki} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk})$, os dois últimos índices são simétricos, pode-se reescrever a equação (3.38) como

$$R_{ijkl} = \partial_k \Gamma_{ijl} - \partial_l \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jk}^n \Gamma_{nli} - \Gamma_{jl}^n \Gamma_{nki}. \quad (3.39)$$

Como de costume os índices variam de 1 a 2. Pode-se definir a curvatura gaussiana de acordo com [17]:

$$K = \frac{R_{1212}}{h} = \frac{\partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma_{21}^n \Gamma_{n21} - \Gamma_{22}^n \Gamma_{n11}}{h}. \quad (3.40)$$

Os outros componentes são nulos, observe $R_{1111} = R_{2222} = 0$. Esta curvatura gaussiana está de acordo com [7] e pode ser encontrada na seção denominada *The Gauss theorem and the Equations of Compatibility* e pode ser encontrado em [17]. Com a equação (3.40) pode-se encontrar a curvatura gaussiana para uma parametrização \mathbf{x} ortogonal, $h_{12} = 0$, desenvolvendo esta equação usando o fato de que $h = h_{11}h_{22}$ e $h^{ii} = h_{ii}^{-1}$ encontra-se

$$K = -\frac{1}{2h_{11}h_{22}} \left\{ \left[\partial_{22}h_{11} - \frac{1}{2}\partial_2 h_{11} \left(\frac{\partial_2 h_{11}}{h_{11}} + \frac{\partial_2 h_{22}}{h_{22}} \right) \right] + \left[\partial_{11}h_{22} - \frac{1}{2}\partial_1 h_{22} \left(\frac{\partial_1 h_{22}}{h_{22}} + \frac{\partial_1 h_{11}}{h_{11}} \right) \right] \right\}. \quad (3.41)$$

Ainda pode-se simplificar esta expressão por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ \partial_2 \left(\frac{\partial_2 h_{11}}{\sqrt{h}} \right) + \partial_1 \left(\frac{\partial_1 h_{22}}{\sqrt{h}} \right) \right\}. \quad (3.42)$$

Esta ultima equação fornece a curvatura gaussiana em termo dos componentes da métrica induzida na superfície por uma parametrização ortogonal.

O desenvolvimento realizado nesta seção foi, apesar de preciso, superficial. Um estudo mais aprofundado sobre as curvaturas de uma superfície pode ser encontrado nas referências dadas no início deste capítulo.

3.6 Teorema de Gauss-Bonnet

Antes de começar esta seção convém citar uma frase presente em [7] que mostra a grandiosidade do *Teorema de Gauss-Bonnet*, o autor diz que o *Teorema de Gauss-Bonnet* é provavelmente o teorema mais importante no estudo de geometria diferencial de superfícies.

Esta é a seção mais importante do capítulo. Porém, fez-se necessário apresentar todo o exposto acima, mesmo que de forma rápida. Esta seção, não diferenciando-se das outras,

será baseada em [7]. Antes de enunciar o teorema nas suas duas versões é preciso ainda definir mais algumas entidades que são apresentadas abaixo.

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ um mapa contínuo de um intervalo fechado $[0, l]$. Este mapa é chamado de curva parametrizada simples, fechada e regular por partes se

- $\alpha(0) = \alpha(l)$, (curva fechada)
- $t_1 \neq t_2; t_1, t_2 \in [0, l] \rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ (sem auto-interseção)
- Existe uma subdivisão

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$$

de $[0, l]$, tal que α é diferenciável e regular ($\alpha'(t) \neq 0$) em todo intervalo do tipo $[t_i, t_{i+1}]$; $i = 0, \dots, k$ e $\alpha'(t)$ é bem definido exceto em um número finito de pontos.

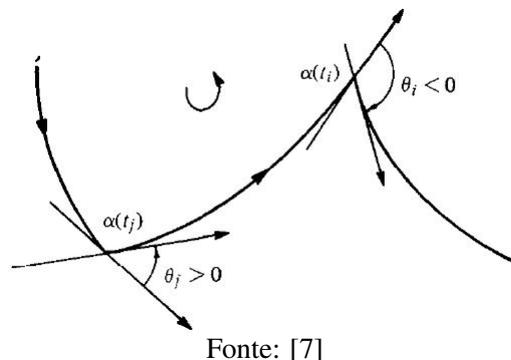
Os pontos $\alpha(t_i)$ ($i = 0, \dots, k$) são chamados de vértices da curva α , $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ são os arcos regulares da curva α e $\alpha([0, l])$ é chamado de curva fechada regular por partes. Convém investigar os vértices e definir os ângulos externos da curva.

Por regularidade, para cada vértice $\alpha(t_i)$ existe limite pela direita e esquerda de $\alpha'(t_i)$. Tome $\varepsilon > 0$ infinitesimal:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) &= \alpha'(t_i^-) \neq 0, \\ \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) &= \alpha'(t_i^+) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

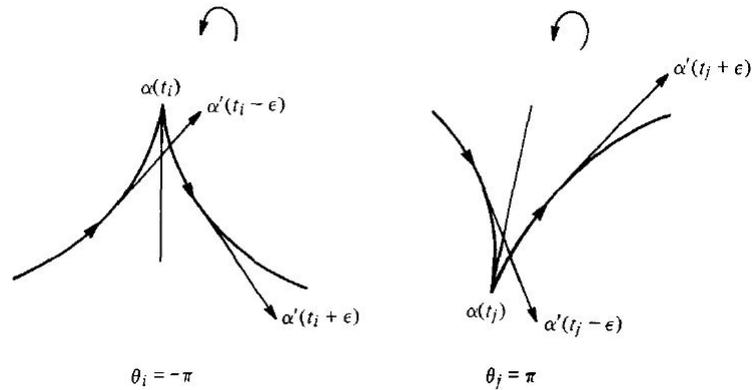
Tome S orientada e seja $\theta_i, 0 < |\theta_i| \leq \pi$, o menor ângulo formado por $\alpha'(t_i^-)$ até $\alpha'(t_i^+)$. Se $|\theta_i| \neq \pi$ o sinal de θ_i é dado por $\det(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), \mathbf{N})$. Ou seja, se $\alpha'(t_i)$ não é um bico o sinal de θ_i é dado pela orientação de S . Os ângulos θ_i são chamados de ângulos externos dos vértices $\alpha'(t_i)$. Observe a figura 5.

Figura 5 – Ângulos externos



Se $\alpha(t_i)$ for um vértice que forma um "bico", $|\theta_i| = \pi$, escolhe-se θ_i do seguinte modo. Por regularidade, existe $\varepsilon' > 0$ tal que $\det(\alpha'(t_i - \varepsilon), \alpha'(t_i + \varepsilon), \mathbf{N})$ não muda de sinal para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. O determinante dá o sinal de θ_i . Observe a figura 6.

Figura 6 – Ângulo externo no caso do vértice ser um "bico"



Fonte: [7]

Seja $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis que fornecem para cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ o ângulo positivo de ε_1 para $\alpha'(t)$, de acordo com o lema 1, página 31.

Alguns fatos vindos da topologia serão apresentados sem prova, pois as demonstrações fogem do escopo deste trabalho. Um fato que será preciso para demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet na sua versão local é o "Teorema do Índice de Rotação".

Teorema 2 (Teorema do Índice de Rotação) De acordo com as definições acima

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi, \quad (3.44)$$

em que \pm é de acordo com a orientação de α .

Este teorema diz que a variação total do ângulo dos vetores tangentes de α com uma direção dada mais a soma dos ângulos externos dos vértices é 2π . Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [14].

Outro teorema importante e que deve ser conhecido de todo aluno que possui conhecimento de cálculo diferencial e integral é o Teorema de Gauss-Green.

Teorema 3 (Teorema de Gauss-Green) Se $P(q^1, q^2)$ e $Q(q^1, q^2)$ são funções diferenciáveis em uma região simples $A \subset \mathbb{R}^2$, e com o contorno dado por $q^1 = q^1(s)$ e $q^2 = q^2(s)$, então

$$\sum_{i=0}^k \int_i^{s_{i+1}} \left[P \frac{dq^1}{ds} + Q \frac{dq^2}{ds} \right] ds = \int \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial q^1} - \frac{\partial P}{\partial q^2} \right) dq^1 dq^2. \quad (3.45)$$

Tanto a demonstração quanto exercícios sobre este teorema podem ser encontrados em [19] ou em [20]. Por fim, uma região $R \subset S$ é chamada de região simples se ela é homeomorfa ao disco e seu bordo é o traço de uma curva parametrizada simples, regular por partes e fechada.

Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização de S compatível com a orientação e seja $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região simples de S . Se f é uma função diferenciável em S , então escolhida a

orientação de \mathbf{x} a integral

$$\int \int_{W=\mathbf{x}^{-1}(R)} f(q^1, q^2) \sqrt{h} dq^1 dq^2 \quad (3.46)$$

independe da parametrização. A integral de f sobre a região R é denotada por

$$\int \int_R f d\sigma, \quad (3.47)$$

onde $d\sigma$ é o elemento infinitesimal de área.

Com todo o exposto acima pode-se enunciar o teorema de Gauss-Bonnet na sua versão local.

Teorema 4 TEOREMA DE GAUSS-BONNET (LOCAL). *Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal, $h_{12} = 0$, de uma superfície orientada S , $U \in \mathbb{R}^2$ é homeomorfo a um disco aberto e \mathbf{x} é compatível com a orientação da superfície S . Seja $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região simples de S e seja $\alpha : I \rightarrow S$, tal que $\partial R = \alpha(I)$. Assumindo que α é positivamente orientada, parametrizado por comprimento de arco s , e seja $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ e $\theta_0, \dots, \theta_k$, respectivamente, os vértices e ângulos externos de α . Então*

$$\int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_{g_i}(s) ds + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi \quad (3.48)$$

onde K é a curvatura gaussiana da superfície S e $\kappa_g(s)$ é a curvatura geodésica do arco regular da curva α .

Antes de partir para a demonstração do teorema vale ressaltar que a parametrização ser ortogonal é apenas para simplificar a demonstração deste e como se pode ver a equação (3.48) não depende de parametrização. Com isso pode-se ir para a demonstração.

Demonstração: *Como a parametrização é ortogonal, pode-se usar a equação (3.42) e (3.46) de modo que*

$$\int \int_R K d\sigma = -\frac{1}{2} \left\{ \partial_2 \left(\frac{\partial_2 h_{11}}{\sqrt{h}} \right) + \partial_1 \left(\frac{\partial_1 h_{22}}{\sqrt{h}} \right) \right\} dq^1 dq^2. \quad (3.49)$$

Agora usando a equação (3.45) do Teorema de Gauss-Green com

$$P = -\left(\frac{\partial_2 h_{11}}{\sqrt{h}} \right), \\ Q = \left(\frac{\partial_1 h_{22}}{\sqrt{h}} \right).$$

Obtém-se que

$$\int \int_R K d\sigma = -\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ -\partial_2 h_{11} \frac{dq^1}{ds} + \partial_1 h_{22} \frac{dq^2}{ds} \right\} ds. \quad (3.50)$$

Agora usando a equação da curvatura geodésica dada por (3.33)

$$\int \int_R K d\sigma = - \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_{g_i}(s) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (3.51)$$

Note que pode-se usar o teorema fundamental do cálculo e após usar o teorema do índice de rotação no último termo do lado direito. Como α está orientado positivamente,

$$\int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_{g_i} ds + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Que está de acordo com a equação (3.48) e com isso o teorema está demonstrado. (Q.E.D.)

Com o teorema local demonstrado serão fornecidos alguns fatos topológicos e definições para que seja possível apresentar e demonstrar o teorema de forma global.

Seja S uma superfície regular. Uma região $R \subset S$ é dita regular se R é compacta e se o seu contorno é formado por uma união finita de curvas simples e regular por partes que não se intersectam.

Um triângulo é uma região simples que possui apenas três vértices com ângulos externos $\alpha_i \neq 0$, ($i = 1, 2, 3$).

Uma triangulação de uma superfície regular R é uma decomposição em triângulos, uma família finita de triângulos $\{T_i\}_{i=1}^N$, tal que

- $R = \bigcup_{i=1}^N T_i$.
- Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, então é um vértice ou uma aresta em comum. Os triângulos que compõem uma triangulação não se sobrepõem.

Dada uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S . Será usada a seguinte notação: F é o número de faces (como cada triângulo possui uma face F também será o número de triângulos), V é o número de vértices, A é o número de arestas. A característica de Euler-Poincaré de uma triangulação é representada por χ e é calculada do seguinte modo:

$$\chi = F - A + V. \quad (3.52)$$

Um estudo mais preciso em topologia e característica de Euler-Poincaré pode ser visto em [11]. Faz-se necessário apresentar quatro proposições sem demonstração retiradas de [7]. As proposições são

Proposição 2 *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

Proposição 3 *Seja S uma superfície orientada e $\{\mathbf{x}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, a família de parametrizações com orientação compatíveis com a orientação de S . Seja $R \subset S$ uma região regular de S . Então*

existe uma triangulação tal que todo triângulo está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{\mathbf{x}_\alpha\}$. E se o contorno de todo triângulo é positivamente orientado, triângulos adjacentes tem orientações opostas em arestas em comum. Observe a figura 7.

Figura 7 – Triângulos adjacentes com aresta comum com orientação oposta



Fonte: [7]

Proposição 4 Se $R \subset S$ é uma região regular da superfície S , a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de R . Denota-se convenientemente $\chi = \chi(R)$.

Por fim, considere uma região R regular contida em uma superfície orientável S e seja \mathbb{T} uma triangulação de R tal que todo triângulo $T_j \in \mathbb{T}$, $j = 1, \dots, k$, está contido em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}_j(U_j)$ de uma família $\{\mathbf{x}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, compatível com a orientação de S . Seja f uma função diferenciável em S , a integração de f sobre a região R não depende da triangulação em do mapeamento de acordo com a seguinte proposição

Proposição 5 De acordo com a notação acima, a soma

$$\sum_{i=0}^k \int \int_{\mathbf{x}_j^{-1}(T_j)} f(q_j^1, q_j^2) \sqrt{h_j} dq_j^1 dq_j^2$$

não depende da triangulação \mathbb{T} ou da família $\{\mathbf{x}_j\}$ de parametrização de S

Ou seja, esta soma tem o significado geométrico da integral sobre a região regular R da função f . Com isso pode-se enunciar o teorema de forma global.

Teorema 5 TEOREMA DE GAUSS-BONNET (GLOBAL). Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e C_1, \dots, C_n as curvas fechadas simples e regulares por partes que formam o bordo ∂R de R . Supondo que cada C_i é positivamente orientado e seja $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_1, \dots, C_n . Então

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=0}^p \theta_l = 2\pi\chi(R), \quad (3.53)$$

aqui s denota os comprimentos de arco de C_i , e as integrais sobre C_i representa a soma das integrais sobre os arcos regulares de C_i .

Demonstração: Pela proposição 3, considere uma triangulação onde cada triângulo esteja contido em uma vizinhança coordenada de uma família de parametrizações ortogonais. Deste modo, se cada triângulo está positivamente orientado as arestas que são comuns a triângulos adjacentes tem orientações opostas.

Pode-se usar o Teorema de Gauss-Bonnet local em cada triângulo da triangulação e somar os resultados usando a proposição 5 e como cada aresta interior terá duas orientações que são opostas, obtém-se

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F, \quad (3.54)$$

onde F denota o número de faces, ou triângulos, da triangulação \mathbb{T} e para cada triângulo T_j existem os três ângulos externos θ_{j1} , θ_{j2} , θ_{j3} .

Definindo por $\phi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ os ângulos internos da triangulação T_j , pode-se escrever que

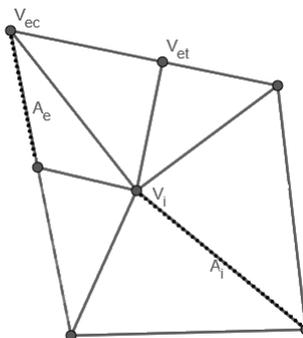
$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 (\pi - \phi_{jk}) = 3\pi F - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \phi_{jk}. \quad (3.55)$$

Agora é importante usar uma notação que segue abaixo,

- A_e representa o número de arestas externas
- A_i representa o número de arestas internas
- V_e representa o número de vértices externos
- V_i representa o número de vértices internos

Os vértices externos se subdividem, $V_e = V_{et} + V_{ec}$, onde V_{et} são os vértices devido a triangulação e V_{ec} são os devido as curvas que formam o contorno da região. Para compreender melhor a notação acima, veja a figura 8. Um fato simples de se verificar é que se uma curva C_i

Figura 8 – identificação de arestas e vértices.



Fonte: Elaborado pelo autor.

é fechada, então $A_e = V_e$. E pode-se provar por indução que

$$3F = 2A_i + A_e. \quad (3.56)$$

Para um esboço da demonstração veja o Apêndice A. Antes de retomar a equação (3.54) convém analisar a soma dos ângulos interno. Com o auxílio da figura 8 para que se possa ter uma noção é fácil ver que para cada vértice interno a soma dos ângulos internos ao redor dele é 2π , para cada vértice externo da triangulação a soma dos ângulos internos ao redor dele é π e para cada vértice externo da curva o ângulo interno dele é por definição π menos o ângulo externo. Somando todas as parcelas,

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \phi_{jk} = 2\pi V_i + \pi V_{et} + \pi V_{ec} - \sum_{l=1}^p \theta_l. \quad (3.57)$$

Usando as equações (3.55),(3.56),(3.57) em (3.54) e organizando é fácil ver que

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi F - \pi(2A_i + A_e) + 2\pi V_i + \pi V_e. \quad (3.58)$$

Usando que $A = A_i + A_e$ e $V = V_i + V_e$ em (3.56), tem-se

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi F - 2\pi A + 2\pi V - \pi(A_e - V_e). \quad (3.59)$$

Por fim, usando o fato que $A_e = V_e$ e a definição da característica de Euler-Lagrange

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \chi(R).$$

Que está de acordo com a equação (3.53) (Q.E.D.)

Com o Teorema de Gauss-Bonnet demonstrado esta seção teve seu objetivo realizado. Cabe agora fazer algumas aplicações deste teorema.

3.7 Aplicações elementares do Teorema de Gauss-Bonnet

3.7.1 Soma dos ângulos internos de um polígono.

A primeira aplicação se refere a encontrar qual é a soma dos ângulos internos de um Polígono. Pode-se usar o Teorema de Gauss-Bonnet na sua forma local.

Como um polígono é uma figura plana cujo interior forma uma região homeomorfa a um disco e é formado por segmento de retas fica evidente que ele está imerso no plano. Logo, a curvatura total de Gauss é nula e como é formado por retas que são as geodésicas portanto a curvatura geodésica é nula. Com isso o teorema local de Gauss-Bonnet (3.48) para um polígono

de n torna-se

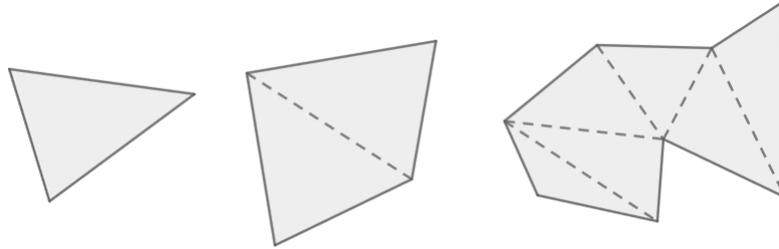
$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi. \quad (3.60)$$

Note que este resultado já é notável pelo fato de mostrar que para qualquer polígono a soma dos ângulos externos é igual a 2π , usando agora a definição de ângulo interno, $\theta_i = \pi - \phi_i$,

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = (n-2)\pi. \quad (3.61)$$

Este resultado pode ser encontrado nos livros de ensino fundamental, observe a figura 9 que ilustra este fato para alguns casos.

Figura 9 – Soma dos ângulos internos de um polígono



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.7.2 Característica de Euler-Poincaré de uma esfera.

Outra aplicação interessante consiste em utilizar o teorema no caso de S ser uma superfície orientável compacta, com isso o teorema se torna

$$\int \int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S). \quad (3.62)$$

Agora como aplicação procura-se saber qual é a *característica de Euler-Poincaré* de uma esfera de raio a . Como a métrica induzida por uma esfera é dada por

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.63)$$

usando a $\theta =: q^1 \in [0, \pi]$ e $\varphi = q^2 \in [0, 2\pi]$. A partir a equação (3.42) é fácil ver que $K = 1/a^2$ e o elemento de área $d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Logo (3.61) torna-se

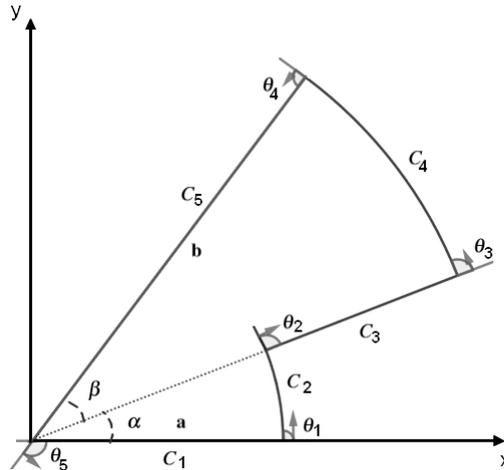
$$2\pi\chi(S) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{1}{a^2} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \rightarrow \chi(S) = 2. \quad (3.64)$$

Este resultado que é conhecido, de fato uma esfera pode ser deformada continuamente para um tetraedro ou um cubo e como χ é um invariante topológico o tetraedro compartilha o mesmo valor de χ de uma esfera. No caso do tetraedro $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$.

3.7.3 Verificação do teorema de Gauss-Bonnet para uma região simples de um espaço plano.

Como exercício cabe verificar a validade do *Teorema de Gauss-Bonnet* de uma região formada por dois arcos de círculo, o primeiro com raio a e ângulo α e o segundo com raio b e ângulo β . Veja a figura 10.

Figura 10 – Aplicação 3 do Teorema de Gauss-Bonnet



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como trata-se de uma figura plana, a curvatura gaussiana é zero. Uma vez que retas são as geodésicas no plano as curvaturas geodésicas das curvas C_1, C_3, C_5 são nulas. Desse modo, o teorema toma a seguinte forma

$$\int_{C_2} \kappa_{g2} ds_2 + \int_{C_4} \kappa_{g4} ds_4 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi. \quad (3.65)$$

Observa-se pela figura que foi adotado o sentido anti-horário. Com isso $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = -\pi/2$, $\theta_3 = \pi/2$, $\theta_4 = \pi/2$ e $\theta_5 = \pi - \alpha - \beta$. Como o espaço é plano, a derivada covariante é a própria derivada e parametrizando por comprimento de arco, a curvatura geodésica nada mais é que a norma da derivada com relação ao comprimento de arco do vetor tangente.

Como as duas curvas são arcos de círculo é conveniente fazer o caso de uma curva que é um arco de círculo com raio r . A curva pode ser parametrizada como

$$\alpha(s) = r \cos(s/r) \hat{x} + r \sin(s/r) \hat{y}.$$

Assim o vetor tangente é dado por

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\sin(s/r) \hat{x} + \cos(s/r) \hat{y}.$$

Para encontrar a curvatura geodésica basta derivar novamente, pois o espaço é plano, e calcular

a norma do vetor, logo

$$\left| \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right| = \kappa_g(s) = \frac{1}{r}. \quad (3.66)$$

Sabendo disso e substituindo o elemento de linha $ds = rd\phi$, a equação (3.65) torna-se

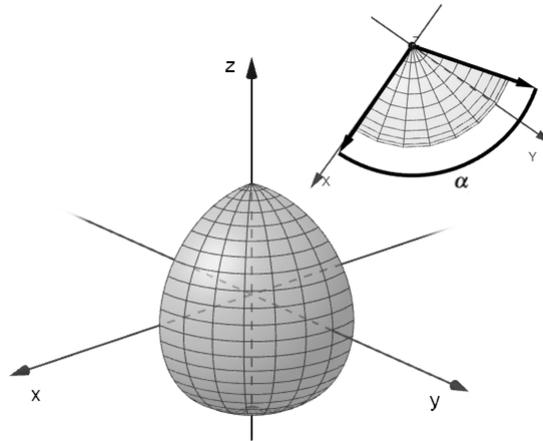
$$\int_0^\alpha \frac{1}{a} ad\phi + \int_\alpha^{\beta+\alpha} \frac{1}{b} bd\phi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi - \alpha - \beta = 2\pi. \quad (3.67)$$

Integrando e ajustando os termos fica claro que $2\pi = 2\pi$ e o como era óbvio o *Teorema de Gauss-Bonnet* é válido.

3.7.4 Verificação do teorema de Gauss-Bonnet para uma região simples sobre a esfera.

Um outro exercício consiste em verificar a validade do teorema em um caso semelhante ao da *Aplicação 2*, porém tomando uma parte da casca esférica, usando coordenadas esféricas esta parte consiste em considerar uma esfera de raio a , $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, \alpha]$, de acordo com a figura 11

Figura 11 – Aplicação 4 do Teorema de Gauss-Bonnet



Fonte: Elaborado pelo autor.

Primeiro só existem duas curvas que são o bordo dessa superfície, ambas são arcos de grandes círculos logo são geodésicas. E como é uma região simples, $\chi = 1$. Tome a normal apontando na direção radial, da origem para a superfície, logo pode-se orientar o caminho fechado do bordo da região como: quando $\phi = 0$, θ vai de 0 a π e quando $\phi = \alpha$, θ vai de π a 0. Por fim é fácil notar que os ângulos externos são ambos $\pi - \alpha$. Então, o teorema toma a forma

$$\int_0^\alpha d\phi \int_0^\pi d\theta \frac{1}{a^2} a^2 \sin \theta d\theta d\phi + 2\pi - 2\alpha = 2\pi. \quad (3.68)$$

Com isso $2\pi = 2\pi$ e o teorema se mostrou consistente.

3.7.5 *Um par de geodésicas em um espaço de curvatura não positiva não forma uma região simples.*

Por fim, uma aplicação apresentada em [7] que será útil no próximo capítulo, isso faz com que esta aplicação seja a mais importante. Avalie a afirmação abaixo.

Seja S uma superfície orientada com curvatura gaussiana negativa ou nula. Então duas geodésicas γ_1 e γ_2 que começam em um ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em outro ponto $q \in S$ de modo que os traços de γ_1 e γ_2 possam a formar uma região R simples de S .

Assumindo que elas se encontrem em $q \in S$. Pelo *Teorema de Gauss-Bonnet* no caso em que R seja simples

$$\int \int_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \quad (3.69)$$

Como as duas geodésicas não são mutuamente tangentes, $\theta_1 < \pi$ e $\theta_2 < \pi$. Logo

$$\int \int_R K d\sigma = 2\pi - \theta_1 - \theta_2 \geq 0. \quad (3.70)$$

Porém $K \leq 0$, o que é uma contradição.

Isso mostra que dado uma superfície com curvatura não positiva, por exemplo um plano ou uma superfície hiperbólica, duas geodésicas que são concorrentes em um ponto não se encontram em nenhum outro formando uma região simples, sem furos. Este resultado será importante no próximo capítulo, pois ele será usado.

Com isso os objetivos deste capítulo foram concluídos. Mais aplicações sobre o *Teorema de Gauss-Bonnet* podem ser encontradas nas referências citadas neste capítulo.

4 CÁLCULO DO ÂNGULO DE DEFLEXÃO DA LUZ VIA TEOREMA DE GAUSS-BONNET

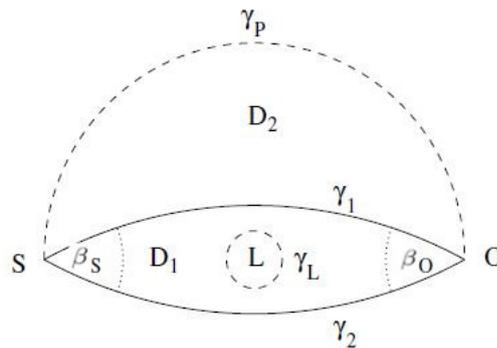
Este capítulo tem por finalidade calcular o ângulo de deflexão da luz ao passar por uma lente gravitacional utilizando o *Teorema de Gauss-Bonnet*. A primeira vez que essa abordagem apareceu na literatura foi em [8]. O que será apresentado na próxima seção são as ideias e as condições utilizadas neste artigo. As duas seções últimas deste capítulo são referentes aos resultados que foram obtidos durante a realização deste trabalho.

4.1 Ângulo de Deflexão para Observador e Fonte distantes da Lente Gravitacional.

Em [8] considera-se o limite astronômico de deflexão fraca, ou seja, o campo gravitacional gerado pela lente é fraco, de modo que o caminho dos raios de luz desviam pouco de uma linha reta - geodésicas em um espaço-tempo plano. Dada esta condição, a teoria é desenvolvida tratando os raios de luz como geodésicas espaciais da métrica óptica e aplicando o *Teorema de Gauss-Bonnet* no espaço da métrica óptica.

Neste artigo o autor modelou as galáxias atuando como lentes gravitacionais por um fluido perfeito com simetria esférica e estático. Para aplicar o *Teorema de Gauss-Bonnet* o artigo apresenta duas regiões D_1 e D_2 que representam a deflexão fraca dos raios de luz. Observe a figura 12.

Figura 12 – Geometria de deflexão fraca, regiões D_1 e D_2



Fonte: [8]

A região D_1 tem como contorno as geodésicas γ_1 e γ_2 que se cruzam em dois vértices onde S representa a localização da fonte e O o observador. O contorno ∂D_1 é tal que o γ_2 vai de S até O e γ_1 vai de O até S fazendo um caminho fechado e orientado. Considera-se que D_1 tem a lente gravitacional L no centro e tanto a fonte S quando o observador O estão muito distantes de L de modo que os ângulos internos são positivos e muito pequenos.

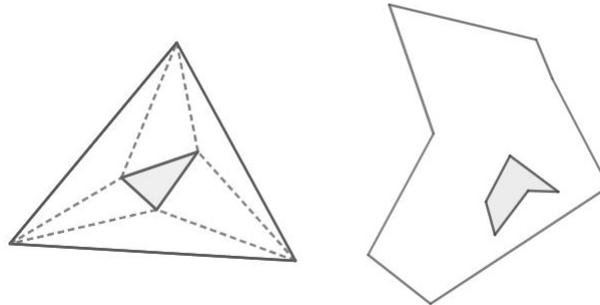
Note que D_1 tem a lente gravitacional L responsável pela curvatura do espaço-tempo

e ela pode ter singularidade ou não. Se a lente não for singular D_1 é uma região simples e $\chi(D_1) = 1$. Como os contornos são geodésicas as curvaturas geodésicas são nulas por fim pode-se usar cada ângulo externo como função do respectivo ângulo interno, com essas considerações *Teorema de Gauss-Bonnet* apresentado no capítulo anterior torna-se

$$\beta_0 + \beta_S = \int \int_{D_1} K d\sigma. \quad (4.1)$$

Se a lente for singular D_1 não será mais simples e a *característica de Euler-Poincaré* não será mais igual a unidade. Para ver isso basta tomar uma região simples e em seu interior tome alguma região e retire de modo que a região terá um furo, essa região pode ser levada a um triângulo que seja triangulado por triângulos menores onde um foi retirado por deformações contínuas. Observe a figura 13.

Figura 13 – Característica de Euler-Poincaré para uma região com furo.



Fonte: [8]

Assim, pode-se calcular a *característica de Euler-Poincaré* da região que é igual a da região do triângulo com a dada triangulação sem um triângulo interno, logo $\chi(D_1) = 6 - 12 + 6 = 0$. Considerando agora que o contorno de D_1 além de ser formado por γ_1 e γ_2 é formado também por γ_L que é uma curva fechada que engloba a lente o *Teorema de Gauss-Bonnet* torna-se

$$\beta_0 + \beta_S = 2\pi + \oint_{\gamma_L} \kappa_g ds + \int \int_{D_1} K d\sigma. \quad (4.2)$$

Observe agora a região D_2 que tem contorno formado por γ_1 que vai de S a O e γ_p vai de O para S . Como a lente gravitacional não está nesta região a região é simples com *característica de Euler-Poincaré* $\chi(D_2) = 1$. Se a região D_2 for assintoticamente plana e tanto S quanto O estejam neste regime o caminho do contorno γ_p pode ser tomado com um setor circular centrado em L e intersekte γ_1 em O e S .

Tome ϕ a coordenada angular com centro em L , no caso do regime de região assintoticamente plana os ângulos externos formados por pelos contornos da região D_2 são aproximadamente $\pi/2$ e a variação angular de ϕ do caminho γ_p é $\alpha + \pi$ onde α é o ângulo de deflexão

da luz, α é positivo e muito menor que π . Assim, o *Teorema de Gauss-Bonnet* torna-se

$$\int_0^{\pi+\alpha} \kappa_g(\gamma_p) \frac{ds}{d\phi} d\phi - \pi = - \int \int_{D_2} K d\sigma. \quad (4.3)$$

Onde foi usado que o caminho γ_1 é geodésico de modo que $\kappa_g(\gamma_1) = 0$. Uma característica importante desta região D_2 é que por não ter a fonte em seu interior faz com que o ângulo de deflexão da luz não dependa diretamente da possível singularidade da lente L que possa ocorrer em D_1 .

De posse da construção acima pode-se agora analisar o caso de um fluido perfeito estático e que é esfericamente simétrico. Primeiro passo é tomar a métrica óptica de um de um espaço com essas características, ou seja, espaço de acordo com a métrica (2.12). Usando o plano equatorial $\theta = \pi/2$, isso pode ser feito sem perda de generalidade pela simetria da métrica. Escrevendo a métrica óptica desse espaço, $H_{ij} = -g_{ij}/g_{00}$ ($i = 1, 2$, onde $1 = r, 2 = \varphi$), cujas geodésicas fornecem a projeção espacial dos caminhos dos raios de luz, pelo *Princípio de Fermat*. A métrica óptica relacionada a (2.12) é

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(r)/A(r) & 0 \\ 0 & r^2/A(r) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Com essa métrica pode-se desenvolver todo o procedimento do capítulo 3, substituindo h_{ij} por H_{ij} . Para usar o *teorema de Gauss-Bonnet* nas formas apresentadas nas equações acima, é preciso conhecer a curvatura total.

A curvatura total pode ser obtida em termo da parametrização dada pela métrica óptica que é ortogonal usando a equação (3.42) e para o caso do fluido perfeito desenvolvidos na seção 2.2 usa-se também (2.29), (2.30), (2.33) e (2.34). Após algumas manipulações, pode-se escrever

$$K = -\frac{2Gm}{r^3} \frac{A(r)/B(r)}{\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^2} \left[1 - \frac{3Gm}{2r} - \frac{4\pi Gr^3}{2Gm} \left(\rho \left(1 - \frac{2Gm}{r} \right) + p \left(1 - \frac{3Gm}{r} - 2\pi Gpr^2 \right) \right) \right]. \quad (4.5)$$

Tendo a curvatura agora é interessante conhecer o elemento de área, observando a equação (3.46),

$$d\sigma = \sqrt{H} dr d\varphi \quad \rightarrow \quad d\sigma = \frac{\sqrt{B}}{A} r dr d\varphi. \quad (4.6)$$

O artigo afirma que como seu desenvolvimento está interessado em deflexões fracas é conveniente utilizar o limite de estrela de fluidos não relativística de modo que a pressão pode ser negligenciada, $p = 0$. [10] classifica esse fluido como "poeira" e o define como uma coleção de partículas que estão em repouso em um dado referencial de Lorentz e seu tensor densidade de energia momento é dado pelo de um fluido perfeito com $p = 0$.

Observando mais uma vez a definição de $B(r)$ dada por (2.29) e tomando $p = 0$ pode-se escrever $Kd\sigma$ como

$$Kd\sigma = -\frac{2Gm}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-3/2} \left[1 - \frac{3Gm}{2r} - \frac{4\pi Gr^3}{2Gm} \rho \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)\right] drd\phi. \quad (4.7)$$

Nesse sentido, pode-se fazer aplicações que são consolidadas na literatura para testar a metodologia adotada até o momento.

O caso mais simples é o caso usando a *métrica de Schwarzschild* apresentada no capítulo 2. Neste caso $m(r) = M$ e como esta métrica é válida a partir de um dado $2GM$ que é o horizonte de eventos gerado pela distribuição de matéria da fonte. Logo, para $r > 2GM$ a métrica é válida e $\rho = 0$. Assim pode-se reescrever a equação (4.7) do seguinte modo

$$Kd\sigma = -\frac{2Gm}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-3/2} \left[1 - \frac{3Gm}{2r}\right] drd\phi. \quad (4.8)$$

Observando o integrando de (4.8) representado, de forma grosseira, por $Kd\sigma/drd\phi$, pode se ver que

$$\frac{Kd\sigma}{drd\phi} = -\frac{2Gm}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-3/2} \left[1 - \frac{3Gm}{2r}\right] < 0. \quad (4.9)$$

Observe que a integração de (4.9) no intervalo dado por r e ϕ será negativa.

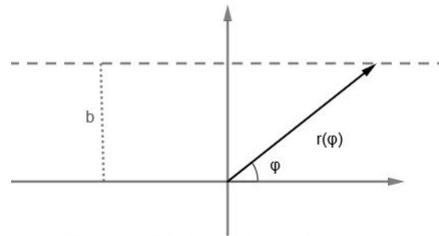
Analisando que a curvatura total é negativa juntamente com a aplicação 5 do capítulo 3 que diz que duas geodésicas num espaço com curvatura não positiva nunca tem dois pontos em comum formando assim a fronteira de uma região simples, $\chi(R) = 1$. Fica evidente que neste caso vai ocorrer o encontro dos raios luminosos descritos por D_1 por causa do horizonte de eventos que faz com que $\chi(D_1) = 0$, ou seja, é por causa da topologia não trivial que os raios luminosos são focados no observador, O . Isso significa que a região D_1 não pode ser formada nesse caso se não houver singularidade. Mas é importante deixar claro que mesmo tento singularidade a deflexão da luz ocorre, por exemplo, o Sol deflete os raios luminoso e não possui singularidade.

Usando o contorno D_2 que conduz a equação (4.3). Como a métrica óptica no caso em questão é assintoticamente plana, o caminho definido por γ_p é um arco de circunferência com um raio muito grande a , logo $\kappa_g(\gamma_p) = 1/a$ e $ds = ad\phi$. Além disso, como o limite de deflexão é fraco, considere o parâmetro de impacto, b , muito maior que $2GM$ ($b \gg 2GM$). Então pode-se aproximar o caminho da luz por uma reta de acordo com a figura 14 de modo que $r(\phi) = b/\sin(\phi)$ e $r > b$. Tomando o limite de $r > b \gg 2GM$ em (4.8) a equação (4.3) torna-se

$$\alpha \approx -\int_0^\pi d\phi \int_{b/\sin\phi}^\infty \left(-\frac{2GM}{r^2}\right) drd\phi. \quad (4.10)$$

Após uma integração simples e retomando a velocidade da luz por meio de uma análise dimen-

Figura 14 – Aproximação do caminho do raio luminoso por linha reta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

sional é fácil obter

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}. \quad (4.11)$$

Este ângulo de deflexão é bastante conhecido na literatura e é o resultado encontrado para deflexão fraca por outros métodos, mostrando que a metodologia está consistente para este caso.

Uma outra aplicação é usando *Plummer Model*, [8] apresenta esta aplicação por ser um dos modelos mais simples que possui realidade física de fato. Este sistema é modelado por uma densidade ρ , tal que

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{5}{2}}. \quad (4.12)$$

Onde ρ é a densidade central e r_0 é um raio de escala de modo que

$$m(r) = m_\infty \left(\frac{r}{r_0}\right)^3 \left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.13)$$

A métrica correspondente é solução interior com m_∞ finito e proporcional a massa newtoniana total deste modelo no limite não relativístico $Gm_\infty/r_0 \ll 1$. Pode-se com isso calcular $Kd\sigma/dr d\phi$. Fazendo a mudança de variável $u = r/r_0$, obtem-se

$$\frac{Gm}{r} = \frac{Gm_\infty}{r_0} u^2 (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.14)$$

Note que (4.13) juntamente com derivada da definição de $m(r)$ conduz a

$$\frac{G}{r^2} \frac{dm}{dr} = 4\pi G\rho \rightarrow 4\pi G\rho r^3 = 3Gm(1 + u^2)^{-1}. \quad (4.15)$$

Expandindo (4.7) até primeira ordem de m/r pois é proporcional a $Gm_\infty/r_0 \ll 1$ e usando (4.15) pode-se escrever o integrando do seguinte modo

$$\frac{Kd\sigma}{dud\phi} \approx -\frac{2Gm_\infty}{r_0} \frac{u}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{3}{(1 + u^2)}\right) + O\left[\frac{G^2 m_\infty^2}{r_0^2}\right]. \quad (4.16)$$

Pode-se utilizar a região D_2 e apresentar o ângulo de deflexão da luz nesse limite. Desse modo,

basta integrar no limite de linha reta analogamente ao que foi feito no caso de Schwarzschild. Fazendo uma mudança de variável r para u , a saber,

$$\alpha \approx \int_0^\pi d\phi \int_{b/r_0 \sin \phi}^\infty du \frac{2Gm_\infty}{r_0} \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{3}{(1+u^2)}\right), \quad (4.17)$$

e computando a integração encontra-se

$$\alpha \approx 4 \frac{Gm_\infty}{r_0} \frac{b}{r_0} \left[1 + \frac{b^2}{r_0^2}\right]^{-1}. \quad (4.18)$$

Este limite está de acordo com a literatura e é interessante observar que o caso $b \ll r_0$ recobra o ângulo de deflexão de Schwarzschild.

Por ultimo o [8] apresenta um exemplo buscando o ângulo de deflexão do modelo *singular isothermal sphere*. O artigo continua usando o limite não relativístico, ou seja, resolvendo a equação Tolman-Oppenheimer-Volkoff (2.33) para a primeira ordem de velocidade isotrópica de dispersão do fluido estelar Σ^2 . Ao resolver mostra-se que

$$\rho = \frac{\Sigma^2}{2\pi G r^2} \rightarrow m(r) = \frac{2r\Sigma^2}{G}. \quad (4.19)$$

Então, cabe agora resolver a equação (4.3) e encontrar δ . Dado (4.9) e a forma da curvatura total em (4.5) se atentando pelo fato de no limite estudado $p = 0$ e $\Sigma^2 \ll 0$, de modo direto pode-se encontrar que

$$\frac{Kd\sigma}{drd\phi} = -\frac{4\Sigma^4}{r}(1+6\Sigma^2), \quad (4.20)$$

claramente tende a zero se $r > 0$, pois $\Sigma^2 \ll 0$. Cabe agora analisar a outra integração, da equação (4.3) onde faz-se necessário analisar a curvatura geodésica. A métrica utilizada é a métrica óptica H_{ij} , tal que

$$dt^2 = \frac{B(r)}{A(r)} dr^2 + \frac{r^2}{A(r)} d\phi^2. \quad (4.21)$$

Um caminho circular é definido por ter um vetor tangente apenas na direção angular. Representando por $\dot{\gamma}_p$ o vetor tangente unitário ao caminho circular. Logo pode-se escrever

$$\dot{\gamma} = (0, \dot{\gamma}_p^\phi). \quad (4.22)$$

Como ele é unitário pode-se tomar o produto escalar dele por ele mesmo, de acordo com a métrica induzida (ou seja, a métrica óptica). A saber

$$H_{ij}\dot{\gamma}_p^i\dot{\gamma}_p^j = H_{22}(\dot{\gamma}_p^\phi)^2 \rightarrow (\dot{\gamma}_p^\phi)^2 = \frac{r^2}{A}. \quad (4.23)$$

Como este vetor tangente a curva é unitário a curvatura geodésica é o valor algébrico da derivada covariante. Tomado a parametrização e o vetor normal de modo que $\kappa_g > 0$, pode-se

encontrar as componentes da derivada covariante e depois tomar a sua norma. Encontrando as componentes ($i = 1 \rightarrow r, i = 2 \rightarrow \phi$):

$$\left[\frac{D\dot{\gamma}_p}{dt} \right]^1 = \dot{\gamma}_p^j \partial_i \dot{\gamma}_p^1 + \Gamma_{nk}^1 \dot{\gamma}_p^n \dot{\gamma}_p^k, \quad (4.24)$$

$$\left[\frac{D\dot{\gamma}_p}{dt} \right]^2 = \dot{\gamma}_p^j \partial_i \dot{\gamma}_p^2 + \Gamma_{nk}^2 \dot{\gamma}_p^n \dot{\gamma}_p^k. \quad (4.25)$$

Como os coeficientes de conexão não nulos são $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{12}^2$ e como $\dot{\gamma}_p^r = 0$, então a componente angular dada na equação (4.25) é nula e a componente radial dada por (4.24) torna-se

$$\left[\frac{D\dot{\gamma}_p}{dt} \right]^1 = -\frac{1}{2} H^{11} \partial_1 H_{22} (\dot{\gamma}_p^2)^2 = \frac{1}{2} \frac{A}{B} \partial_r \left(\frac{r^2}{A} \right) \frac{A}{r^2}. \quad (4.26)$$

Logo tomando a norma ao quadrado da derivada covariante pode-se escrever

$$\kappa_g^2 = H_{ij} \left[\frac{D\dot{\gamma}_p}{dt} \right]^i \left[\frac{D\dot{\gamma}_p}{dt} \right]^j = H_{11} \left(\left[\frac{D\dot{\gamma}_p}{ds} \right]^1 \right)^2. \quad (4.27)$$

Substituindo (4.26) em (4.27) e usando as equações (2.34) e após (4.19) tem-se

$$\kappa_g = \sqrt{\frac{A}{B} \frac{1}{r} \frac{(1 - 6\Sigma^2)}{(1 - 4\Sigma^2)}}. \quad (4.28)$$

Da métrica dada em (4.21) é fácil ver que para um caminho circular $dt = (dt/d\phi)d\phi = r/\sqrt{A}$. Com isso pode-se escrever a equação (4.3), para a primeira ordem de Σ^2 .

$$\int_0^{\pi+\alpha} \kappa_g dt - \pi = 0. \quad (4.29)$$

Substituindo (4.28), dt , e a definição em função de m (que pode ser escrito como função de Σ^2) pode-se reescrever (4.29) como

$$\frac{(1 - 6\Sigma^2)}{(1 - 4\Sigma^2)^{1/2}} \int_0^{\pi+\alpha} d\phi - \pi = 0. \quad (4.30)$$

A integração é trivial e com isso pode-se encontrar o ângulo de deflexão em primeira ordem de Σ^2 . A saber

$$\alpha = 4\pi\Sigma^2. \quad (4.31)$$

Este resultado está de acordo a literatura. Em [3] existe um exercício para encontrar este ângulo de deflexão por meio de outra metodologia. Uma referência que fale sobre a solução *singular isothermal sphere* é [21].

Agora é conveniente apresentar os resultados de [22] que utiliza a metodologia apresentada acima realizada por [8] para calcular o ângulo de deflexão da luz no limite de

aproximação fraca para o caso de duas geometrias de *wormholes*. [22] abordou a geometria de *Ellis wormhole* e *Janis-Newman-Winnicour wormhole*.

A geometria de *Ellis wormhole* pode ser descrita pelo elemento infinitesimal entre dois eventos do seguinte modo

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a^2)d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2. \quad (4.32)$$

Em que para $r = 0$ a "garganta" do wormhole é recuperada. A variável r varia de menos a mais infinito, porém o artigo restringe para $r > 0$. Assim como nos casos acima pode-se construir a métrica óptica H_{ij} e tomando $\theta = \pi/2$. Pode-se escrever

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (r^2 + a^2) \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Os índices 1 e 2 representam respectivamente r e ϕ , pode-se calcular a curvatura total de acordo com a equação (3.42).

$$K = -\frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2}. \quad (4.34)$$

Visando calcular o ângulo de deflexão de acordo com a região D_2 e usando a equação (4.3) é preciso calcular tanto o ds quanto a curvatura geodésica do caminho circular com raio tendendo ao infinito, pois γ_1 é uma geodésica. De modo análogo estuda-se este caminho circular que tem vetor tangente unitário a curva na forma da equação (4.22). A partir disso e usando a equação (4.43) que fornece a métrica óptica, conclui-se

$$(\dot{\gamma}_p^\phi)^2 = \frac{1}{(r^2 + a^2)}. \quad (4.35)$$

Calculando as componentes da derivada covariante, a componente não nula é

$$\left[\frac{D\dot{\gamma}_p}{dt} \right]^1 = -\frac{r}{(r^2 + a^2)}. \quad (4.36)$$

Em vista disto a curvatura geodésica do caminho é

$$\kappa_g = \sqrt{H_{11} \left(\left[\frac{D\dot{\gamma}_p}{dt} \right]^1 \right)^2} = \frac{r}{(r^2 + a^2)}. \quad (4.37)$$

Agora como se pode escrever o elemento infinitesimal do caminho como $dt = \sqrt{r^2 + a^2}d\phi$. Pode-se escrever, tomando o limite de $r \rightarrow \infty$,

$$\kappa_g dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} d\phi = d\phi. \quad (4.38)$$

Desta maneira, pode-se usar as equações (4.44) e (4.48) para resolver a equação (4.3) além de

notar usar o fato que $d\sigma = \sqrt{r^2 + a^2} dr d\phi$. por este motivo e usando a aproximação de linha reta pode-se reescrever (4.3) como

$$\alpha = \int_0^\pi d\phi \int_{b/\sin\phi}^\infty dr \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \pi - \text{EllipticF}\left(-\frac{a^2}{b^2}\right). \quad (4.39)$$

Onde EllipticF representa a *integral elíptica do primeiro tipo*, mas detalhes podem ser encontrados em [18]. Agora expandindo a integral elíptica assumindo que o parâmetro de impacto suficientemente grande para que a luz passe distante da "garganta" do wormhole, $a^2/b^2 \ll 0$, para obter um valor aproximado α . Logo

$$\alpha \approx \int_0^\pi d\phi \left[\frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \sin^2\phi - \frac{3}{8} \frac{a^4}{b^4} \sin^4\phi \right]. \quad (4.40)$$

Integrando (4.40) é fácil obter

$$\alpha \approx \frac{\pi a^2}{4b^2} - \frac{9\pi a^4}{64b^4}. \quad (4.41)$$

O resultado que [22] apresenta no artigo como valor consolidado na literatura é

$$\alpha \approx \frac{\pi a^2}{4b^2} + O\left(\frac{a^4}{b^4}\right). \quad (4.42)$$

Logo comparando o valor aproximado de α das equações (4.41) e (4.42), é possível ver que eles concordam em primeira ordem de a^2/b^2 . O resultado não concorda em segunda ordem e o autor do artigo argumenta que é pelo fato da aproximação da trajetória por linha reta. Isso está presente no intervalo de integração $b/\sin\phi$, e que correções de segunda ordem não fazem parte dos objetivos do artigo. Com isso [22] apresenta a geometria de *Janis-Newman-Winnicour wormhole* pelo elemento infinitesimal entre dois eventos

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^\beta + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\beta} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1-\beta} r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]. \quad (4.43)$$

Tomando o plano $\theta = \pi/2$ pode-se escrever a matriz formada pelo elementos da métrica óptica como

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2\beta} & 0 \\ 0 & r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1-2\beta} \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Assim, pode-se calcular a curvatura total de acordo com a equação (3.41), a saber

$$K = \frac{m(2m\beta + m - 2\beta r)}{r^2(r - 2m)^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{2\beta}. \quad (4.45)$$

A curvatura deste modo é muito rebuscada e é conveniente tomar o limite para ela ser linear em m , pois o caso estudado é no limite de deflexão fraca, $m \ll r$. Desse modo, pode-se aproximar

a curvatura total por

$$K \approx -\frac{2\beta m}{r^3} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{2\beta}. \quad (4.46)$$

Tomando o limite do caminho circular centrado da lente L e ter raio que tende ao infinito, pelos mesmos procedimentos pode-se ver que $\kappa_g ds = d\phi$. Desse modo, pode-se resolver a equação (4.3), ou seja

$$\alpha \approx \int_0^\pi d\phi \int_{b/\sin\phi}^\infty dr \left[\frac{2\beta m}{r^3} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{2\beta} \right] r \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{(1-4\beta)/2}. \quad (4.47)$$

Expandindo o integrando de (4.47) em termos de m/r , pois $m/r < m/b \ll 1$, pode-se ver que

$$\alpha \approx \int_0^\pi d\phi \int_{b/\sin\phi}^\infty dr \left(\frac{1}{r^2} - \frac{m}{r^3} \right) 2m\beta. \quad (4.48)$$

Integrando (4.48) é fácil ver que

$$\alpha \approx \frac{4\beta m}{b} - \frac{\beta m^2 \pi}{b^2}. \quad (4.49)$$

Assim como no caso da geometria de Ellis wormhole, [22] apresenta o valor do ângulo de deflexão no limite de deflexão fraca da geometria de Janis-Newman-Winnicour wormhole que consta na literatura, a saber

$$\alpha \approx \frac{4m\beta}{b} + O\left(\frac{m^2}{b^2}\right). \quad (4.50)$$

Mais uma vez o resultado obtido pela metodologia nova concorda apenas no primeiro termo o que deve ser devido a aproximação de linha reta para a trajetória do raio de luz.

A metodologia de cálculo do ângulo de deflexão da luz formulada em [8] foi utilizada para abordar em diversos tipos de geometrias do espaço-tempo, [23–27]. Um artigo que aborda o ângulo de deflexão da luz com essa metodologia para o caso de uma geometria de Schwarzschild com quebra de simetria de lorentz por meio do campo de bumblebee é [28]. Na última seção deste capítulo será abordada o estudo do ângulo de deflexão da luz por meio de outra metodologia, tal metodologia é apresentada a seguir.

4.2 Ângulo de deflexão para observador e fonte a uma distância finita da lente gravitacional.

Esta seção tem o intuito de apresentar a metodologia e características presentes em [5]. Neste artigo os autores discutem a extensão do cálculo do ângulo de deflexão para um espaço que não seja assintoticamente plano. Cabe aqui também afirmar que o artigo utiliza ($c = G = 1$), logo o desenvolvimento abaixo preserva essa escolha.

O artigo apresenta a métrica para um espaço estático e esfericamente simétrico,

apresentado pelo elemento infinitesimal entre dois eventos de acordo com (2.12),

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2.$$

Após, são definidos os elementos da métrica ótica usando a simetria para tomar $\theta = \pi/2$, seguindo a mesma representação dos índices (1 representa r e 2 representa ϕ), logo a matriz que representa a métrica ótica é igual a apresentada em (4.4), a saber

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(r)/A(r) & 0 \\ 0 & r^2/A(r) \end{pmatrix}.$$

De acordo com a métrica ótica pode-se apresentar os vetores unitários tangentes aos raios luminosos, pode-se definir como

$$k^i = \frac{dx^i}{dt}. \quad (4.51)$$

Como a métrica ótica é a que minimiza o tempo t , e o elemento infinitesimal é igual ao apresentado em (4.21) pode-se ver que k^i de fato é unitário, a saber

$$dt^2 = \left(H_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) dt^2 \rightarrow H_{ij}k^ik^j = 1. \quad (4.52)$$

Vale ressaltar que a k^i são as componentes do vetor tangente unitário com relação ao caminho do raio luminoso e ele é unitário se for tomado o produto interno de acordo com a métrica ótica e não com a métrica do espaço tempo estático e esfericamente simétrico fornecida por (2.12).

Em seguida, o artigo apresenta o parâmetro de impacto, para isso é conveniente tomar um parâmetro afim λ , de acordo com o exposto no capítulo 2, e a ação S_1 apresentada em (2.40),

$$S_1 = \int d\lambda \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}.$$

Tomando as constantes de movimento de interesse pode-se escrever

$$E = A(r) \frac{dt}{d\lambda}, \quad (4.53)$$

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (4.54)$$

Com isso o pode-se definir o parâmetro de impacto b como segue

$$b = \frac{L}{E} = \frac{r^2}{A} \frac{d\phi}{dt}. \quad (4.55)$$

Observe que com uma álgebra simples pode-se definir as componentes do vetor unitário tan-

gente k^i como função do parâmetro de impacto,

$$(k^1, k^2) = \left(\frac{dr}{d\phi}, 1 \right) \frac{bA}{r^2}. \quad (4.56)$$

De posse de todo o exposto é fácil obter a equação da órbita, basta tomar (4.56) juntamente com o fato de que o vetor tangente é unitário. Então, a equação da órbita é

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{r^2}{B} = \frac{r^4}{ABb^2}. \quad (4.57)$$

O leitor deve se perguntar se de fato b definido por (4.55) é de fato o parâmetro de impacto. Para responder isso, tome o caso em que a métrica do espaço tempo estático e esférico seja assintoticamente plana, ou seja, $A \rightarrow 1$ e $B \rightarrow 1$ se $r \rightarrow \infty$. Tomando este limite em (4.57) fica claro que o menor r é b que legitima a escolha desta definição.

Construindo agora os vetores unitários que estão nas direções radial, onde a lente na origem, e angular. Pode-se construir como segue

$$e_{rad}^i = \left(\frac{1}{\sqrt{H_{11}}}, 0 \right), \quad (4.58)$$

$$e_{ang}^i = \left(0, \frac{1}{\sqrt{H_{22}}} \right). \quad (4.59)$$

Com essas definições fica fácil calcular o ângulo que o raio luminoso faz com a direção radial, Ψ . Basta que se tome o produto escalar entre e_{rad}^i e k^i , pois como os dois são unitários pode-se definir o cosseno deste ângulo do seguinte modo

$$\cos \Psi = H_{ij} e_{rad}^i k^j = \frac{\sqrt{H_{11}} b A}{r^2} \frac{dr}{d\phi}. \quad (4.60)$$

Porém, como $\cos \Psi$ envolve uma derivada é mais conveniente utilizar a função seno para deixar em termo apenas das funções e não de derivadas. Para isso, basta usar a equação da órbita presente em (4.57) e a relação fundamental da trigonometria, desse modo,

$$\sin \Psi = \frac{b\sqrt{A}}{r}. \quad (4.61)$$

Agora cabe fazer algumas definições para se prosseguir. Representa-se a fonte por S , e o observador por R e a lente por L , não haverá abuso de notação pois o momento angular não aparecerá mais. Sejam Ψ_S e Ψ_R os ângulos entre o raio luminoso e a direção radial na posição da fonte e observador, respectivamente. Sejam ϕ_S e ϕ_R as posições angulares da fonte e observador, respectivamente, de modo que $\phi_{RS} = \phi_R - \phi_S$ é a separação angular entre os dois. Pode-se definir a quantidade α que os autores do artigo dizem que é a equação fundamental de todo o

desenvolvimento.

$$\alpha = \Psi_R - \Psi_S + \phi_{RS}. \quad (4.62)$$

Tome geodésicas que ligam, dois a dois tanto fonte quanto observador quanto a lente formando o triângulo embebido no espaço formado pela métrica ótica representado por ${}^R\nabla_L^S$.

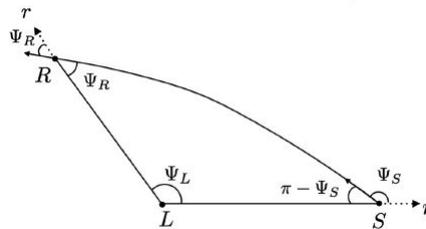
Note que α é definido como a soma de três escalares em pontos diferentes o que não garante que ele seja bem definido. Faz-se necessário estudar se ele está bem definido.

Primeiro tome Ψ_L o angulo interno ao ponto L onde está a lente gravitacional e com isso pode-se definir outra quantidade,

$$\alpha_\Psi = \Psi_R - \Psi_S + \Psi_L. \quad (4.63)$$

Observe a figura 15 para ver uma representação deste triângulo embebido no espaço gerado pela métrica ótica.

Figura 15 – Representação do triângulo embebido no espaço da métrica ótica ${}^R\nabla_L^S$.



Fonte: [5].

Observe que se o espaço for plano a soma dos ângulos internos totalizam π o que faz da quantidade α_Ψ ser nula neste caso.

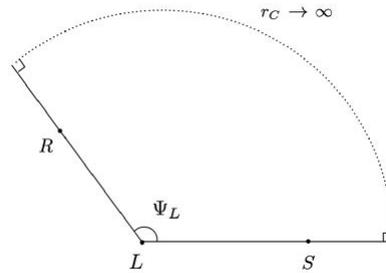
Lançando mão do *Teorema de Gauss-Bonnet*, aplica-se o teorema no triângulo geodésico representado na figura 15 é fácil ver

$$\alpha_\Psi = \int \int_{{}^R\nabla_L^S} K d\sigma. \quad (4.64)$$

Pode-se ver que α_Ψ é um invariante da geometria diferencial. Porém, existe um possível problema que possa ocorrer. Observe que se caso L seja uma singularidade, um buraco negro por exemplo, torna-se difícil definir Ψ_L . Devido a esse fato é conveniente do ponto de vista prático trabalhar com ϕ_{RS} , pois por este ser definido fora de um possível horizonte de eventos ele parece ser mais simples de ser computado.

Considere agora outro triângulo ${}^\infty\nabla_L^\infty$ embebido no espaço gerado pela métrica ótica de acordo com a figura 16. Este triângulo como tendo dois lados análogos ao da figura 15, mas com o caminho de S a R sendo um arco de círculo de raio r_c . Se $r_c \rightarrow \infty$ e a métrica ótica seja

Figura 16 – Representação do triângulo embebido no espaço da métrica ótica ${}^{\infty}\nabla_L^{\infty}$.



Fonte: [5].

assintoticamente plana. Então $\kappa_g \rightarrow 1/r_c$ e $dt = r_c d\phi$. Desse modo,

$$\int_S^R \kappa_g dt = \phi_{RS}. \quad (4.65)$$

Aplicando o *Teorema de Gauss-Bonnet* neste triângulo, é fácil ver que

$$\int \int_{{}^{\infty}\nabla_L^{\infty}} K d\sigma + \phi_{RS} - (\pi + \Psi_L) + 3\pi = 2\pi.$$

Organizando a equação acima e pode-se escrever Ψ_L como função de ϕ_{RS} e da integração da curvatura total. Assim,

$$\Psi_L = \phi_{RS} + \int \int_{{}^{\infty}\nabla_L^{\infty}} K d\sigma. \quad (4.66)$$

Usando a equação (4.66), a definição de α_{Ψ} e (4.64) é possível escrever α definido em (4.63) como

$$\alpha = \int \int_{R\nabla_L^S} K d\sigma - \int \int_{{}^{\infty}\nabla_L^{\infty}} K d\sigma = - \int \int_{R\Box_S^{\infty}} K d\sigma. \quad (4.67)$$

Onde ${}^{\infty}\Box_S^{\infty}$ é a região do triângulo embebido que possui o caminho circular menos o triângulo embebido que tem a fonte, a lente e o observador. Note que a equação (4.67) mostra que α é também um invariante da geometria diferencial. No caso em que R e S estão muito distantes da lente L a equação (4.67) está de acordo com a (4.3) mostrando que α é o ângulo de deflexão da luz neste caso. Após, [5] apresentar todas as definições acima mencionadas ele apresenta a metodologia.

Existem duas maneiras de calcular α , pois as equações (4.62) e (4.67) sempre concordam. Usando a equação (4.62) o que é necessário é calcular os três ângulos que compõem α . No caso de (4.67) o autor afirma que é mais trabalhoso pois não se conhece a geodésica a princípio que liga S a R . Desse modo, o autor divide em dois casos, o caso de uma geometria assintoticamente plana e o caso da geometria não ser assintoticamente plana.

No caso da geometria ser assintoticamente plana, ou seja, $A \rightarrow 1$ e $B \rightarrow 1$ se $r \rightarrow \infty$. Assumindo que a fonte e o observador estão muito distantes da lente gravitacional. Busca-se mostrar que nesse caso o a fórmula que fornece o ângulo de deflexão luz pode ser deduzido.

Tome $\Psi_R = 0$ e $\Psi_S = \pi$ mantendo o parâmetro de impacto constante com $r_R \rightarrow \infty$ e $r_S \rightarrow \infty$. Logo a equação (4.62) torna-se

$$\alpha = \phi_{RS} - \pi. \quad (4.68)$$

Agora é necessário computar ϕ_{RS} . Tomando a equação da órbita e fazendo a mudança de variável de $u = 1/r$. Pode-se escrever

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = F(u). \quad (4.69)$$

Seja $u_0 = 1/r_0$, onde r_0 é a menor distância da trajetória, pode-se integrar a equação (4.69) de modo que

$$\phi_{RS} = 2 \int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{F(u)}} du. \quad (4.70)$$

Reescrevendo α em função de (4.70) encontra-se a equação presente na literatura que fornece o ângulo de deflexão da luz, aqui será representado por α_0 , a saber

$$\alpha_0 = 2 \int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{F(u)}} du - \pi. \quad (4.71)$$

Este resultado pode ser encontrado, com as devidas analogias em [29]. Em seguida, [5] apresenta a metodologia para distâncias finitas.

A motivação de assumir distâncias finitas é de buscar melhorar os resultados teóricos feitos para a aproximação de distâncias infinitas e com isso refinar os resultados. Observe que por mais que as distâncias sejam finitas elas ainda serão muito maiores que o tamanho da lente. Assim, pode-se integrar (4.69) e reescrever α considerando $u_R = 1/r_R$ e $u_S = 1/r_S$. Desse modo

$$\alpha = \int_{u_R}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{F(u)}} du + \int_{u_S}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{F(u)}} du + \Psi_R - \Psi_S. \quad (4.72)$$

A equação (4.72) leva em consideração distâncias finitas e é equivalente a (4.67).

O artigo apresenta o intervalo de Schwarzschild, usando $r_g = 2GM$, fazendo a modificação

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.73)$$

Pode-se usar a equação da órbita para determinar $F(u)$ em (4.69), neste caso

$$F(u) = \frac{1}{b^2} - u^2 + r_g u^3, \quad (4.74)$$

para o calcular a quantidade $\Psi_R - \Psi_S$ neste espaço o artigo expande em serie de potencias de r_g . Usando a equação (4.61) pode-se tomar a função $\arcsin(x)$ dos dois lados da equação. Além

disso, como $\sin(x - \pi) = \sin -x$ pode-se encontrar escrevendo

$$-\Psi = \arcsin\left(\frac{b}{r}\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\right) - \pi.$$

Expandindo em série de potências de r_g encontra-se

$$\begin{aligned} \Psi_R - \Psi_S &= [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) - \pi] - \\ &- \frac{br_g}{2} \left[\frac{u_R^2}{\sqrt{1 - (bu_R)^2}} + \frac{u_S^2}{\sqrt{1 - (bu_S)^2}} \right] + O(r_g^2 bu_R^3; r_g^2 bu_S^3) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Observe que no caso de $u_R \rightarrow 0$ e $u_S \rightarrow 0$ A equação (4.71) é recobrada.

Agora partindo para o caso não assintoticamente plano. Para exemplificar o artigo apresenta o elemento de linha do espaço de Kottler que foi apresentada no capítulo 2. A equação que apresenta este elemento de linha é (2.36), usando $r_g = 2GM$ pode-se reescrever-lo como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.76)$$

Com esta métrica pode-se usar a equação (4.72) pois serão consideradas distâncias finitas. Para calcular a diferença $\Psi_R - \Psi_S$ usa-se uma expansão em série de potências, em termo de r_g e Λ . De modo geral, para uma função de $f(x, y)$ com as derivadas contínuas expandida até segunda ordem tem-se

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 0) + x \partial_x f|_{(0,0)} + y \partial_y f|_{(0,0)} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[x^2 \partial_{xx} f|_{(0,0)} + 2xy \partial_{xy} f|_{(0,0)} + y^2 \partial_{yy} f|_{(0,0)} \right]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Usando procedimento análogo ao usado no caso de Schwarzschild para escrever $-\Psi_S$. Observando a equação (4.51) e escrevendo de forma genérica o ângulo Ψ como

$$\Psi = \arcsin \left[bu \left(1 - r_g u - \frac{\Lambda}{3u^2}\right)^{1/2} \right]. \quad (4.78)$$

Pode-se expandir Ψ apresentado em (4.78) de acordo com (4.77) e usar o artifício para reescre-

ver $-\Psi_S$. Após algumas manipulações

$$\begin{aligned}
\Psi_R - \Psi_S &= [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) - \pi] - \\
&- \frac{br_g}{2} \left[\frac{u_R^2}{\sqrt{1-(bu_R)^2}} + \frac{u_S^2}{\sqrt{1-(bu_S)^2}} \right] - \\
&- \frac{b\Lambda}{6u_R} \frac{1}{(1-(bu_R)^2)^{1/2}} - \frac{b\Lambda}{6u_S} \frac{1}{(1-(bu_S)^2)^{1/2}} + \\
&+ \frac{bu_R}{8} \frac{(-1+2b^2u_R^2)}{(1-(bu_R)^2)^{3/2}} \left[u_R^2 r_g^2 + \frac{2r_g\Lambda}{3u_R} + \frac{\Lambda^2}{9u_R^4} \right] + \\
&+ \frac{bu_S}{8} \frac{(-1+2b^2u_S^2)}{(1-(bu_S)^2)^{3/2}} \left[u_S^2 r_g^2 + \frac{2r_g\Lambda}{3u_S} + \frac{\Lambda^2}{9u_S^4} \right] + \\
&+ O(r_g^2; r_g\Lambda; \Lambda^2). \tag{4.79}
\end{aligned}$$

Expandindo o integrando e fazendo a integração de cada termo e considerando que $bu_S \ll 0$ e $bu_R \ll 0$ na equação (4.72). Após algumas manipulações é possível obter ϕ_{RS} , a saber

$$\begin{aligned}
\phi_{RS} &= \pi - \arcsin(bu_R) - \arcsin(bu_S) + \\
&+ \frac{r_g}{b} \left[\frac{1-(bu_R)^2/2}{(1-(bu_R)^2)^{1/2}} + \frac{1-(bu_S)^2/2}{(1-(bu_S)^2)^{1/2}} \right] + \\
&+ \frac{\Lambda b^3}{6} \left[\frac{u_R}{(1-(bu_R)^2)^{1/2}} + \frac{u_S}{(1-(bu_S)^2)^{1/2}} \right] + \\
&+ \frac{\Lambda r_g b}{12} \left[\frac{2-3(bu_R)^2}{(1-(bu_R)^2)^{3/2}} + \frac{2-3(bu_S)^2}{(1-(bu_S)^2)^{3/2}} \right] + O(r_g^2, \Lambda^2). \tag{4.80}
\end{aligned}$$

Com isso pode-se construir o α . Somando as equações (4.79) e (4.80). A saber

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{r_g}{b} \left[\sqrt{1-(bu_R)^2} + \sqrt{1-(bu_S)^2} \right] - \\
&- \frac{\Lambda b}{6} \left[\frac{\sqrt{1-(bu_R)^2}}{u_R} + \frac{\sqrt{1-(bu_S)^2}}{u_S} \right] + \\
&+ \frac{\Lambda r_g b}{12} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(bu_R)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(bu_S)^2}} \right] + O(r_g^2, \Lambda^2). \tag{4.81}
\end{aligned}$$

Este é o ângulo de deflexão para distâncias finitas no limite fraco para a métrica de Kottler que não é assintoticamente plana. Observe que α diverge para $bu_R \rightarrow 0$ e $bu_S \rightarrow 0$, mas as distâncias apesar de grandes são finitas.

Antes de analisar um caso assintótico é interessante apresentar outra geometria que também não é assintoticamente plana. Em [5] é apresentada a métrica conforme de Weyl, cujo

elemento de linha é

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -A(r)dt^2 + \frac{1}{A(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin(\theta)^2d\phi^2 \\
 A(r) &= 1 - 3m\gamma - \frac{2m}{r} + \gamma r - kr^2 \\
 m &= \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Usando o mesmo procedimento adotado no espaço de Kottler pode-se encontrar após a expansão e omitindo o termo de r^2 , pois a contribuição é igual a da constante cosmológica, com isso

$$\begin{aligned}
 \Psi_R - \Psi_S &= \arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) - \pi - \\
 &- mb \left[\frac{u_R^2}{(1 - (bu_R)^2)^{1/2}} + \frac{u_S^2}{(1 - (bu_S)^2)^{1/2}} \right] + \\
 &+ \frac{b\gamma}{2} \left[\frac{1}{(1 - (bu_R)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1 - (bu_S)^2)^{1/2}} \right] - \\
 &- \frac{m\gamma}{2} \left[\frac{bu_R(2 - (bu_R)^2)}{(1 - (bu_R)^2)^{3/2}} + \frac{bu_S(2 - (bu_S)^2)}{(1 - (bu_S)^2)^{3/2}} \right] + O(m^2, \gamma^2).
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Observe mais uma vez que se as distâncias da fonte e do observador tendem ao infinito, então $\Psi_R - \Psi_S$ diverge, mas isso não é problema pois as distâncias são grandes porém finitas. Agora no mesmo contexto que foi empregado para o espaço de Kottler pode-se computar ϕ_{RS} nessa métrica, a saber

$$\begin{aligned}
 \phi_{RS} &= \pi - \arcsin(bu_R) - \arcsin(bu_S) + \\
 &+ \frac{m}{b} \left[\frac{2 - (bu_R)^2}{(1 - (bu_R)^2)^{1/2}} + \frac{2 - (bu_S)^2}{(1 - (bu_S)^2)^{1/2}} \right] - \\
 &- \frac{b\gamma}{2} \left[\frac{1}{(1 - (bu_R)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1 - (bu_S)^2)^{1/2}} \right] + \\
 &+ \frac{m\gamma}{2} \left[\frac{(bu_R)^3}{(1 - (bu_R)^2)^{3/2}} + \frac{(bu_S)^3}{(1 - (bu_S)^2)^{3/2}} \right] + O(m^2, \gamma^2).
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

De posse das equações (4.83) e (4.84) pode-se computar o ângulo de deflexão α . A saber

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{2m}{b} \left[\sqrt{1 - (bu_R)^2} + \sqrt{1 - (bu_S)^2} \right] - \\
 &- \gamma m \left[\frac{bu_R}{(1 - (bu_R)^2)^{3/2}} + \frac{bu_S}{(1 - (bu_S)^2)^{3/2}} \right] + O(\gamma^2, m^2)
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

De posse do ângulo de deflexão α pode-se estudar o limite da fonte e observador muito longes da lente gravitacional para os dois casos acima. Observe que no caso do espaço de Kottler, o

ângulo de deflexão torna-se

$$\alpha \approx \frac{2r_g}{b} - \frac{\Lambda b}{6} \left(\frac{1}{u_R} + \frac{1}{u_S} \right) + \frac{\Lambda r_g b}{6}. \quad (4.86)$$

O trabalho [5] sugere que este seja o resultado corrigido. Já no caso da no espaço de Weyl essa aproximação o ângulo de deflexão fornece

$$\alpha \approx \frac{4m}{b}. \quad (4.87)$$

Com isso o artigo apresentou uma generalização da utilização da métrica ótica para mensurar o ângulo de deflexão da luz para distâncias finitas tornando possível para espaços que não são planos no infinito.

4.3 Ângulo de Deflexão da Luz considerando distâncias finitas na geometria de Ellis Wormhole.

Esta seção tem como objetivo mostrar resultados obtidos neste trabalho sobre a aplicação da metodologia desenvolvida em [5] que foi apresentada na seção 4.2 para a geometria de *Ellis Wormhole* fornecida pela métrica de (4.32)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a^2)d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2.$$

Observe que essa geometria não é do tipo (2.12) devido ao fator $(r^2 + a^2)$ multiplicando o elemento de ângulo sólido. Cabe aqui fazer uma transformação de coordenadas para que seja possível calcular o ângulo de deflexão da luz por meio de metodologia de [5] que foi apresentada acima. Para isso, tome a seguinte transformação de coordenadas:

$$t = \bar{t}, \quad r^2 = \bar{r}^2 - a^2, \quad \theta = \bar{\theta}, \quad \phi = \bar{\phi}. \quad (4.88)$$

Com isso pode-se calcular o Jacobiano da transformação de coordenadas e ver a condição que a coordenadas tem que obedecer para que ele seja positivo.

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - (a/\bar{r})^2)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - (a/\bar{r})^2)^{-1/2} \neq 0 \rightarrow \bar{r} > a \quad (4.89)$$

Como o Jacobiano é diferente de zero pode-se calcular os componentes do tensor métrico no sistema de coordenadas \bar{x}^μ por meio da relação

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\partial}_\mu x^\rho \bar{\partial}_\nu x^\sigma g_{\rho\sigma} \quad \text{onde,} \quad \left(\bar{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} \right). \quad (4.90)$$

Calculando cada componente do tensor métrico pode-se escrever o elemento de linha no sistema de coordenadas \bar{x} . Após retirar as barras das coordenadas o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = -dt^2 + (1 - (a/r)^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.91)$$

Observe que essa transformação forneceu uma forma esférica e estática para a geometria de Ellis. Agora pode-se aplicar a metodologia de [5].

O primeiro procedimento adotado aqui será descobrir quem é u_0 , que é o inverso da distância de maior aproximação da trajetória do raio luminoso e a lente gravitacional e o centro do wormhole de Ellis. Usando a equação (4.59) para a geometria fornecida por (4.81) e igualando $F(u)$ a zero, obtém-se

$$F(u) = a^2 (1/b^2 - u^2) (1/a^2 - u^2) = 0. \quad (4.92)$$

Combinando as raízes da equação (4.82) com o fato do jacobiano ser positivo (4.79) se encontra que a raiz possível para o jacobiano ser positivo é $u_0 = 1/b$. De posse do u_0 pode-se buscar as outras quantidades que compõe o ângulo de deflexão da luz α que é fornecido pela equação (4.62).

Usando a equação (4.51), o fato de $\sin(x - \pi) = \sin -x$, e a equação (4.81),

$$\Psi_R - \Psi_S = \arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) - \pi. \quad (4.93)$$

Para obter a forma do ângulo de deflexão da luz falta computar ϕ_{RS} , que é função direta de uma integração que tem como primitiva a *Função Elíptica do Primeiro Tipo Imcompleta* representada por $\text{EllipticF}(x|m)$.

$$\int \frac{b du}{\sqrt{1 - a^2 u^2} \sqrt{1 - b^2 u^2}} = \frac{b}{a} \text{EllipticF}\left(\arcsin(au) \mid \frac{b^2}{a^2}\right). \quad (4.94)$$

Como pelo fato de $\int_a^b dx df/dx = f(b) - f(a)$ o ângulo de deflexão da luz para a geometria de *Ellis wormhole* é

$$\begin{aligned} \alpha &= \arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) - \pi + \\ &+ 2\frac{b}{a} \text{EllipticF}\left(\arcsin(a/b) \mid \frac{b^2}{a^2}\right) - \\ &- \frac{b}{a} \left[\text{EllipticF}\left(\arcsin(au_R) \mid \frac{b^2}{a^2}\right) + \text{EllipticF}\left(\arcsin(au_S) \mid \frac{b^2}{a^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Este resultado é analítico e depende diretamente do inverso das distâncias entre observador e lente gravitacional e entre a fonte e lente gravitacional além de depender do raio da garganta do

wormhole, a , e da menor distância da trajetória até o centro do wormhole.

Agora é interessante que se encontre esse valor de forma aproximada e comparar com o encontrado na literatura. Tome o caso em que $a \ll b$, ou seja, a trajetória do raio luminoso passa bastante longe da garganta do wormhole. Neste limite, pode-se fazer uma expansão em Série de Taylor de $F(u)^{-1/2}$ com ordens de a em 0 e integrando com relação a u obtém-se

$$\int \frac{b du}{\sqrt{1-a^2u^2}\sqrt{1-b^2u^2}} = \arcsin(bu) + \frac{a^2}{4b^2} \left(\arcsin(bu) - bu\sqrt{1-b^2u^2} \right) + \frac{a^4}{64b^4} \left(9\arcsin(bu) - 3bu\sqrt{1-b^2u^2} (2b^2u^2 + 3) \right) + O\left(a^5\right). \quad (4.96)$$

Neste limite o ângulo de deflexão da luz torna-se

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi a^2}{4b^2} + \frac{9a^4}{64b^4} - \\ &- \frac{a^2}{4b^2} \left(\arcsin(bu_R) - bu_R\sqrt{1-b^2u_R^2} \right) - \\ &- \frac{a^4}{64b^4} \left(9\arcsin(bu_R) - 3bu_R\sqrt{1-b^2u_R^2} (2b^2u_R^2 + 3) \right) - \\ &- \frac{a^2}{4b^2} \left(\arcsin(bu_S) - bu_S\sqrt{1-b^2u_S^2} \right) - \\ &- \frac{a^4}{64b^4} \left(9\arcsin(bu_S) - 3bu_S\sqrt{1-b^2u_S^2} (2b^2u_S^2 + 3) \right) + O\left(\frac{a^5}{b}\right). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Considerando que tanto a fonte quanto o observador estão muito distantes da lente gravitacional de modo que $bu_R \ll 1$ e $bu_S \ll 1$, o ângulo de deflexão da luz torna-se

$$\alpha = \frac{\pi a^2}{4b^2} + \frac{9a^4}{64b^4}. \quad (4.98)$$

Observe que esse resultado difere do resultado obtido pela equação (4.41), onde foi utilizada a metodologia de que envolve o teorema de Gauss-Bonnet porém foi feita a aproximação de linha reta. O resultado apresentado em (4.98) está de acordo com a literatura como em [30] e [31]. Isso faz com que a solução analítica (4.85) seja consistente com a literatura e seja mais precisa que a solução obtida em (4.41).

4.4 Ângulo de Deflexão da Luz considerando distâncias finitas. Implicações no formalismo PPN e na solução tipo Schwarzschild com modelo de Bumblebee.

Durante os estudos sobre o ângulo de deflexão da luz devido a um campo gravitacional foi possível investigar e obter resultados sobre a deflexão da luz no caso da métrica de Schwarzschild e as implicações no formalismo parametrizado pós-newtoniano (PPN) e na solução tipo Schwarzschild com quebra de simetria de Lorentz por meio do modelo de Bumblebee.

Como já foi deduzido no capítulo 2 e já foi apresentado na equação (4.63), a métrica de Schwarzschild é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Em 2018 foi encontrada uma solução exata de uma geometria tipo schwarzschild com quebra de simetria de lorentz por meio do modelo de bumblebee, essa solução foi apresentada em [32] e é apresentada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + (1+l) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.99)$$

Onde r_g continua sendo o raio de schwarzschild e l é diretamente proporcional a norma quadrada do campo de bumblebee. Observe que essa métrica não é assintoticamente plana, pois quando para r muito grande, a métrica não se torna a de minkowski devido ao termo $(1+l)$.

Desde o surgimento da *Teoria da Relatividade Geral*, varias outras teorias surgiram como tentativas de modifica-la. Essas teorias e a *Teoria da Relatividade Geral* tem em comum que o campo gravitacional se manifesta por meio da deformação do espaço-tempo. Essas teorias possuem uma solução para um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico similar a solução de Schwarzschild, a única diferença é a presença de coeficientes numéricos, um modo conveniente de discutir essas teorias é acrescentando dois parâmetros β e γ , a métrica de Schwarzschild modifica-se do seguinte modo

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r} + 2(\beta - \gamma) \frac{r_g^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \gamma \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.100)$$

Para a *Teoria da Relatividade Geral*, $\beta = \gamma = 1$. Chama-se a inclusão desses parâmetros como formalismo pós-newtoniano parametrizado (parametrised post-Newtonian formalism). Alguns autores gostam de tratar os testes da *Teoria da Relatividade Geral* para a métrica (4.100), ou seja, adotando o formalismo PPN e com isso obter as previsões teóricas em função desses parâmetros.[33]

O ângulo de deflexão da luz também é estudado no formalismo PPN e o parâmetro γ está diretamente relacionado com o ângulo de deflexão da luz. Este formalismo pode ser encontrado em [9]. Um artigo que apresenta o ângulo de deflexão da luz por esse formalismo é [34]. Tomando a distância angular mensurado pelo observador entre a lente gravitacional e a fonte seja nula, o ângulo de deflexão da luz considerando as distâncias muito grandes, torna-se

$$\alpha = \frac{r_g}{b} (1 + \gamma). \quad (4.101)$$

A equação acima também pode ser vista em [6].

Com isso pode-ser feito o estudo do ângulo de deflexão da luz com a metodologia apresentada por [5] que considera distâncias finitas tanto do observador como da fonte.

Antes de calcular o ângulo de deflexão da luz para distâncias finitas no caso de Schwarzschild é interessante calcular algumas quantidades importantes que o compõe. Como já foi apresentado antes, o $F(u)$ que foi definido de acordo com a equação (4.74),

$$F(u) = \frac{1}{b^2} - u^2 + r_g u^3.$$

É conveniente calcular uma quantidade que compõe ϕ_{RS} , essa quantidade pode ser encontrada na expressão do ângulo de deflexão da luz para distâncias de fonte e observador muito distantes onde o ângulo de deflexão, α_0 , é dado por (4.71). Escrevendo as funções em termo das primitivas,

$$\alpha_0 = 2\mathbf{F}(u_0) - 2\mathbf{F}(0) - \pi, \text{ onde } \mathbf{F}(u) = \int \frac{du}{\sqrt{F(u)}} \quad (4.102)$$

Fazendo a expansão em séries de Taylor de $F(u)^{-1/2}$ em r_g e integrando encontra-se uma forma pra $\mathbf{F}(u)$, a saber

$$\mathbf{F}(u) = \arcsin(bu) + \frac{r_g}{2b} \frac{b^2 u^2 - 2}{\sqrt{1 - b^2 u^2}} + O\left(\frac{r_g^2}{b^2}\right). \quad (4.103)$$

Como é conhecido da literatura, o ângulo de deflexão da luz no caso de observador e fonte estejam muito distantes da lente gravitacional o ângulo de deflexão da luz é $\alpha_0 = 2r_g/b$. Combinando este fato com a equação a cima pode-se mensurar $\mathbf{F}(u_0)$ até primeira ordem utilizando a equação (4.102). A saber

$$2\mathbf{F}(u_0) = \pi + O\left(\frac{r_g^2}{b^2}\right). \quad (4.104)$$

Desse modo, pode-se estudar o ângulo de deflexão para distâncias finitas. Agora cabe escrever todas as partes que compõem o ângulo de deflexão. O ângulo de deflexão da luz em termo de $\mathbf{F}(u_0)$, pode ser dado utilizando a equação (4.72), a saber

$$\alpha = (2\mathbf{F}(u_0) - \pi) - \mathbf{F}(u_R) - \mathbf{F}(u_S) + \Psi_R + \Psi_S. \quad (4.105)$$

Assim, basta utilizar as equações (4.75), (4.103) e (4.104) e obter o ângulo de deflexão da luz na métrica de Schwarzschild, a saber

$$\alpha = \frac{r_g}{b} \left[\sqrt{1 - b^2 u_R^2} + \sqrt{1 - b^2 u_S^2} \right] + O\left(\frac{r_g^2}{b^2}\right). \quad (4.106)$$

Observe que tomando $bu_S \ll 1$ e $bu_R \ll 1$, pode-se fazer a aproximação $(1+x)^n \approx 1+nx$. Com

isso a equação (4.106) torna-se

$$\alpha = 2\frac{r_g}{b} - \frac{r_g}{2b} [b^2 u_R^2 + b^2 u_S^2] + O\left(\frac{r_g^2}{b^2}\right). \quad (4.107)$$

Primeira consideração a ser feita com esse resultado é quando se compara com a equação (4.101) isso fornece

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2} [b^2 u_R^2 + b^2 u_S^2]. \quad (4.108)$$

Este resultado é bastante importante, pois considerando apenas a métrica de Schwarzschild é possível obter um valor diferente de γ , pois para a teoria da Relatividade geral esse parâmetro seria igual a unidade, porém considerando distâncias finitas o valor de γ deixa de ser a unidade e passa a depender das características do sistema formado pelo observador, lente gravitacional e fonte de acordo com a equação (4.108).

Cabe agora analisar o sistema fonte, Terra, Sol e confrontar o valor experimental de γ que pode ser visto em [35] com a equação (4.108). Observe que as fontes emissoras de luz estão muito mais distantes que a distância Terra-Sol, definida como a unidade astronômica, neste caso será considerado $u_S = 0$. O parâmetro de impacto b será tomado como o raio do Sol. Os valores experimentais das quantidades necessárias podem ser vistas em [36]. A saber $au = 149597870700(3)m$ e $b = 6.9551(4)10^8 m$. Com isso pode-se mensurar o valor de γ como

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2} \frac{(6.95514 \cdot 10^8)^2}{(1495978707003)^2} = 1.000000. \quad (4.109)$$

O que mostra que devido a precisão dos dados, o γ devido ao ângulo de deflexão da luz para métrica de Schwarzschild com distâncias finitas não influencia no valor obtido pela Relatividade Geral, $\gamma = 1$. Esse resultado concorda com os valores experimentais de γ que podem ser vistos em [35, 37, 38].

De modo análogo ao que foi feito nesta seção pode-se fazer o estudo do ângulo de deflexão da luz para a métrica tipo Schwarzschild com quebra de simetria de lorentz por meio do campo de bumblebee, dado pela equação (4.99),

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + (1+l) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Cabe aqui ressaltar que essa métrica não é assintoticamente plana o que legitima estudar o ângulo de deflexão da luz considerando distâncias finitas. Observa-se que o único componente da métrica que muda com relação a métrica de Schwarzschild é o $g_{rr} = (1+l)(1 - a/r)^{-1}$. Neste caso fica evidente que a única coisa que irá mudar é o $F(u)$, pois irá aparecer um fator de $(1+l)^{1/2}$. Como no caso de l ser nulo, a métrica de Schwarzschild é recobrada, então a equação (4.104) continua válida, só que a integrais serão multiplicadas por $(1+l)^{1/2} \approx 1 + l/2$. Com

isso o ângulo deflexão da luz torna-se

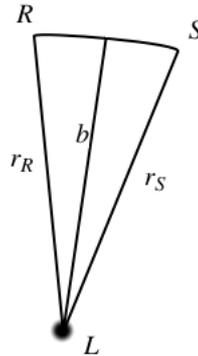
$$\alpha = \left(1 + \frac{l}{2}\right) 2\mathbf{F}(u_0) - \left(1 + \frac{l}{2}\right) [\mathbf{F}(u_R) + \mathbf{F}(u_S)] + \Psi_R + \Psi_S - \pi. \quad (4.110)$$

Tomando só os fatores de primeira ordem é fácil obter

$$\alpha = \frac{r_g}{b} \left[\sqrt{1 - b^2 u_R^2} + \sqrt{1 - b^2 u_S^2} \right] + \frac{\pi l}{2} - \frac{l}{2} (\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)) + O\left(\frac{r_g^2}{b^2}, l \frac{r_g}{b}\right). \quad (4.111)$$

Acreditamos que esse seja o valor correto para o caso tipo schwarzschild com campo de bumblebee. O que pode parecer estranho é o fator $l\pi/2$, pois parece que ele independe do parâmetro de impacto o que pode gerar o falso resultado que mesmo para a lente muito distante do observador e da fonte o ângulo de deflexão da luz seja não nulo. Porém observe que no limite de observador e fonte muito distantes da lente, $b \approx r_R \approx r_S$, de acordo com a figura 17.

Figura 17 – Representação do triângulo embebido no limite da lente gravitacional muito distantes do observador e da fonte.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dado o limite, o ângulo de deflexão da luz torna-se nulo, pois o termo de schwarzschild torna-se nulo e $\arcsin 1 = \pi/2$, desse modo,

$$\alpha = \frac{\pi l}{2} - \frac{l}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (4.112)$$

O que é o esperado, pois se a lente gravitacional está muito distante do subsistema observador-fonte espera-se que a deformação do espaço-tempo devido a lente gravitacional nesse subsistema seja muito fraca, ou seja, quanto mais longe esteja a lente desse subsistema mais fraca deve ser a deformação do espaço tempo no subsistema. Com isso, considerando o limite da lente muito distante do subsistema espera-se que o ângulo de deflexão da luz seja nulo.

5 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou apresentar uma metodologia de cálculo da deflexão da luz causada por uma lente gravitacional que foi baseada em [8] e [5]. Para que fosse possível abordar essa metodologia foi preciso apresentar as equações que fornecem a dinâmica do campo gravitacional, apresentar algumas soluções de interesse e apresentar uma generalização do *Princípio de Fermat* para um espaço curvo estático e esfericamente simétrico, todo esse desenvolvimento se encontra no segundo capítulo. Além disso, foi necessário apresentar alguns conceitos essenciais de geometria diferencial para que pudesse ser apresentado e demonstrado o *teorema de Gauss-Bonnet* tanto na sua forma local como global.

O quarto capítulo foi reservado para apresentar a metodologia de cálculo da deflexão da luz que consistiu em associar a métrica óptica de um espaço tempo estático e esfericamente simétrico a uma métrica induzida por uma superfície em um espaço euclidiano tridimensional. Com essa associação foi possível tratar os raios luminosos como curvas no espaço tridimensional de acordo com o *Princípio de Fermat* e utilizar o *teorema de Gauss-Bonnet*. Na penúltima seção do capítulo 4 foi possível investigar o ângulo de deflexão da luz para a geometria de *Ellis wormhole* para distâncias finitas. Nesta investigação encontrou-se uma forma analítica para o ângulo de deflexão da luz em termo das distâncias finitas. Quando foi tomado o limite de distâncias muito grandes para a solução encontrada foi visto que no limite dos raios luminosos passando muito distantes da garganta do wormhole o ângulo de deflexão da luz

$$\alpha = \frac{\pi a^2}{4b^2} + \frac{9a^4}{64b^4},$$

é consistente com o obtido para a mesma geometria, mas com a utilização de outros métodos de investigação e isso reforça a validade da solução encontrada.

Na última seção do capítulo 4 foi apresentada a investigação que consiste em estudar o ângulo de deflexão da luz com distâncias finitas para o espaço de Schwarzschild e com isso foi apresentada uma forma para o parâmetro γ diferente da unidade para a Teoria da Relatividade Geral, em termo das distâncias do sistema Lente-Observador-Fonte,

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2} [b^2 u_R^2 + b^2 u_S^2].$$

Além disso, foi estudado o ângulo de deflexão da luz para a solução tipo Schwarzschild acoplado com o campo de *bumblebee* que é responsável pela quebra espontânea de simetria de Lorentz. Neste estudo, foi considerado distâncias finitas devido ao fato dessa solução não ser assintoticamente plana. Com isso foi aplicada a metodologia de [5] e foi visto que o

ângulo de deflexão da luz tomou a forma

$$\alpha = \frac{r_g}{b} \left[\sqrt{1 - b^2 u_R^2} + \sqrt{1 - b^2 u_S^2} \right] + \frac{\pi l}{2} - \frac{l}{2} (\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)) + O\left(\frac{r_g^2}{b^2}, l \frac{r_g}{b}\right).$$

acredita-se que este seja o resultado correto para esta solução e como foi visto mesmo com o fator $l\pi/2$ não sendo função do parâmetro de impacto, o outro termo que possui l cancela o termo independente no limite da lente muito distante do subsistema observador-fonte, o que é esperado, pois quanto mais longe a lente gravitacional do subsistema observador-fonte mais fraca são os efeitos gerados no subsistema devido a ela.

Como perspectivas futuras, busca-se expandir este estudo para o campo da cosmologia, buscando maneiras de aplicar essa metodologia para as métricas que tentam modelar o universo como a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker e para teorias F(R) e teoria da gravitação de Brans-Dicke.

REFERÊNCIAS

- [1] LANDAU, L. D. *The classical theory of fields*. [S.l.]: Elsevier, v. 2, 2013.
- [2] CHANDRASEKHAR, S. On the “derivation” of einstein’s field equations. *American Journal of Physics*, v. 40, n. 2, p. 224–234, 1972.
- [3] PADMANABHAN, T. *Gravitation: foundations and frontiers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- [4] BARTELMANN, M.; SCHNEIDER, P. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, Elsevier, v. 340, n. 4-5, p. 291–472, 2001.
- [5] ISHIHARA, A. et al. Gravitational bending angle of light for finite distance and the gauss-bonnet theorem. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 8, p. 084015, 2016.
- [6] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: Wiley, 1972. v. 67.
- [7] MANFREDO, P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. [S.l.]: Prentice Hall, 1976.
- [8] GIBBONS, G.; WERNER, M. Applications of the gauss–bonnet theorem to gravitational lensing. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 25, n. 23, p. 235009, 2008.
- [9] MISNER, T.; THORNE, K. *Wheeler.: 1973, Gravitation*. [S.l.]: WH Freeman, 1973.
- [10] SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- [11] NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: CRC Press, 2003.
- [12] BAHCALL, N. A. et al. The cosmic triangle: Revealing the state of the universe. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 284, n. 5419, p. 1481–1488, 1999.
- [13] KOTTLER, F. Über die physikalischen grundlagen der einsteinschen gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 361, n. 14, p. 401–462, 1918.
- [14] KLINGENBERG, W. A course in differential geometry, translated from the german by david hoffman. *Graduate Texts in Mathematics*, v. 51, 1978.
- [15] PRESSLEY, A. N. *Elementary differential geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- [16] TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. [S.l.]: Ed Edgard Blücher, 2008.
- [17] SOKOLNIKOFF, I. S. *Tensor analysis: theory and applications*. [S.l.]: Wiley, 1951.
- [18] ARFKEN, G.; WEBER, H. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- [19] GUIDORIZZI, H. Volume 3, 5a edição. *Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro*, 2001.

- [20] LEITHOLD, L. Cálculo com geometria analítica, vol. 2. *Harbra Ltda., Sao Paulo, 3a. edição*, 1994.
- [21] STRAUMANN, N. *General relativity with applications to astrophysics (General relativity with applications to astrophysics, by Norbert Straumann. Springer Texts and monographs in physics. Berlin. [S.l.]: Springer, 2004.*
- [22] JUSUFI, K. Deflection angle of light by wormholes using the gauss–bonnet theorem. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 14, n. 12, p. 1750179, 2017.
- [23] JUSUFI, K.; ÖVGÜN, A.; BANERJEE, A. Light deflection by charged wormholes in einstein-maxwell-dilaton theory. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 8, p. 084036, 2017.
- [24] ÖVGÜN, A. Light deflection by damour-solodukhin wormholes and gauss-bonnet theorem. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 4, p. 044033, 2018.
- [25] JUSUFI, K. Quantum effects on the deflection of light and the gauss–bonnet theorem. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 14, n. 10, p. 1750137, 2017.
- [26] JUSUFI, K. et al. Light deflection by a rotating global monopole spacetime. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 10, p. 104012, 2017.
- [27] CRISNEJO, G.; GALLO, E. Weak lensing in a plasma medium and gravitational deflection of massive particles using the gauss-bonnet theorem. a unified treatment. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 12, p. 124016, 2018.
- [28] ÖVGÜN, A.; JUSUFI, K.; SAKALLI, İ. Gravitational lensing under the effect of weyl and bumblebee gravities: Applications of gauss–bonnet theorem. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 399, p. 193–203, 2018.
- [29] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*. [S.l.]: Pergamon Press, v. 1, 1969.
- [30] BHATTACHARYA, A.; POTAPOV, A. A. Bending of light in ellis wormhole geometry. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 25, n. 28, p. 2399–2409, 2010.
- [31] NAKAJIMA, K.; ASADA, H. Deflection angle of light in an ellis wormhole geometry. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 10, p. 107501, 2012.
- [32] CASANA, R. et al. Exact schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018.
- [33] RYDER, L. *Introduction to general relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [34] WILL, C. M. The 1919 measurement of the deflection of light. *Classical and Quantum Gravity*, v. 32, 09 2014.
- [35] LAMBERT, S.; PONCIN-LAFITTE, C. L. Determining the relativistic parameter γ using very long baseline interferometry. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 499, n. 1, p. 331–335, 2009.
- [36] BERINGER, J. et al. Review of particle physics. *Physical Review D-Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 86, n. 1, p. 010001, 2012.

[37] SHAPIRO, S. S. et al. Measurement of the solar gravitational deflection of radio waves using geodetic very-long-baseline interferometry data, 1979–1999. *Physical Review Letters*, APS, v. 92, n. 12, p. 121101, 2004.

[38] LAMBERT, S.; PONCIN-LAFITTE, C. L. Improved determination of γ by vlbi. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 529, p. A70, 2011.

APÊNDICE A – IDENTIDADE SOBRE TRIANGULAÇÕES

Um esboço de demonstração pode ser dado pelo método de indução. Para cada caso que aparecerá será retirado um triângulo da triangulação e a identidade continuará sendo válida de acordo com a hipótese de indução.

Dada uma triangulação a identidade $3F = 2A_i + A_e$ é verdadeira. Por indução, tome a triangulação formada por um triângulo, este caso $F = 1$, $A_i = 0$ e $A_e = 3$, logo é verdadeiro.

Agora é necessário dividir em casos e usar a hipótese de indução. A hipótese consiste em que se for verdadeira a identidade para uma triangulação com um triângulo a menos, também vale para a triangulação original.

Caso 1: O triângulo retirado tem apenas um vértice em comum com outro triângulo, de acordo com a figura 1. Usando linha a triangulação sem um triângulo (F', A'_i, A'_e) e sem linha

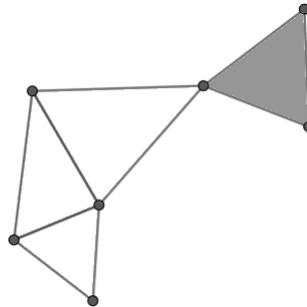


Figura 1.

para a triangulação original (F, A_i, A_e) é fácil ver que $F' = F - 1$, $A'_i = A_i$ e $A'_e = A_e - 3$, logo

$$3F' = 2A'_i + A'_e \rightarrow 3F = 2A_i + A_e$$

Caso 2: O triângulo retirado tem uma aresta em comum com outro triângulo, de acordo com a figura 2. Assim $F' = F - 1$, $A'_i = A_i - 1$, $A'_e = A_e - 2 + 1$, logo

$$3F' = 2A'_i + A'_e \rightarrow 3F = 2A_i + A_e$$

Caso 3: O triângulo retirado tem duas arestas em comum com a triangulação, de acordo com a figura 3. Assim $F' = F - 1$, $A'_i = A_i - 2$, $A'_e = A_e - 1 + 2$, logo

$$3F' = 2A'_i + A'_e \rightarrow 3F = 2A_i + A_e$$

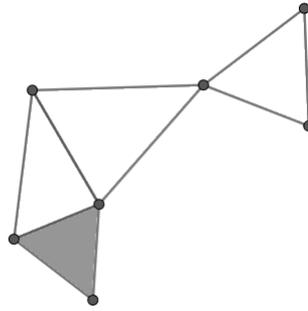


Figura 2.

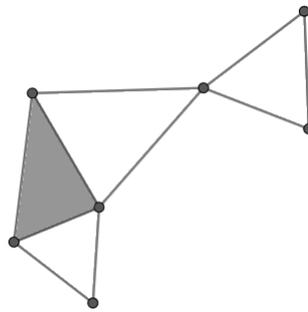


Figura 3.

Caso 4: O triângulo retirado tem três arestas em comum com a triangulação, de acordo com a figura 4. Assim $F' = F - 1$, $A'_i = A_i - 3$, $A'_e = A_e + 3$, logo

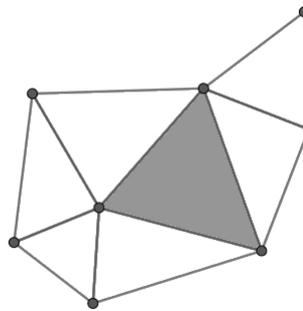


Figura 4.

$$3F' = 2A'_i + A'_e \rightarrow 3F = 2A_i + A_e$$

E com isso a demonstração está completa, e a relação é verdadeira para qualquer triangulação.