



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
CENTRO DE CIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DAMIÃO JÚNIO GONÇALVES ARAÚJO

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELÍPTICAS
NÃO-VARIACIONAIS,
SINGULARES/DEGENERADAS:
UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA**

FORTALEZA
2012

DAMIÃO JÚNIO GONÇALVES ARAÚJO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELÍPTICAS
NÃO-VARIACIONAIS,
SINGULARES/DEGENERADAS: UMA
ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira
Teixeira.

FORTALEZA

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

A668e

Araújo, Damião Júnio Gonçalves

Equações Elípticas Não-Variacionais Singulares/Degeneradas: uma abordagem Geométrica/ Damião Júnio Gonçalves Araújo. -2012.

83f. : il. color., : enc. : 31 cm

Tese(doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.

Área de Concentração: Análise Matemática

Orientação: Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira.

1. Análise matemática. 2 Equações diferenciais parciais. I. Título

CDD 515

Dedicado a *Oslenne*.

”É preciso força pra sonhar e perceber que a estrada vai além do que se vê.”

Marcelo Camelo.

Agradecimento

Agradeço à Deus pela força e perseverança que tem me dado para que eu pudesse concluir mais uma etapa da minha vida.

Aos meus pais Júlio e Lourdes pelo amor, carinho e educação dados ao longo dos anos. As minhas irmãs Jane Kelly e Janielly pelo companheirismo e pelas dificuldades compartilhadas desde o início de nossas vidas.

A minha amada esposa Oslenne, pelo apoio, incentivo, confiança, paciência e acima de tudo pelo o amor recebido.

A todos os amigos que a vida me proporcionou e que foram importantes para que tudo isso tenha se realizado: Flávio, Jocel, Junior Nano, Erasmo, Rondinelle, Wilson, Michel, Gleydson, Marcelo Carvalho, Juscelino, Allana, Vinicius, Rodrigo, Edilberto, Mauro, Wesley, Kelton, Jonatan, Nasareno, Isaias, Tiarlos, Chaves, João Vitor, Jobson, Luiz Antônio, Fabiana, Disson, Adriano, Marcelo Dário, João Francisco, Tiago e Ernani.

A todos os professores que estiveram presente em minha vida acadêmica, em especial aos professores Mário, Humberto, Conceição, Fco. Eduardo, Ricardo, Wilson, Paulo César, Diego, Silvano, Fábio, Abdênago, Caminha, Marcos Melo, Levi, Alexandre, Jorge Herbert, João Lucas e a minha orientadora de mestrado Bianca Calsavara.

Ao meu orientador e amigo Eduardo Teixeira, pelos conselhos e ensinamentos não necessariamente matemáticos, importantes para o meu amadurecimento profissional e pessoal.

Aos professores Fábio Montenegro, Diego Moreira, Boyan Sirakov e José Miguel Urbano, pelas sugestões dadas e pela disponibilidade para participarem da banca examinadora.

Aos funcionários do departamento de matemática, em especial a Andrea Dantas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), órgãos financiadores.

Resumo

Neste presente trabalho, faremos o estudo de importantes propriedades geométricas e analíticas de soluções de equações diferenciais parciais elípticas totalmente não-lineares do tipo: singulares e degeneradas. O estudo de processos de combustão que se degeneram ao longo do conjunto de anulamento da densidade de um gás, um caso particular de problemas do tipo "quenching", apresentam em sua modelagem equações singulares que estão descritas neste trabalho. Nesta primeira parte iremos obter propriedades de uma solução minimal, que vão desde o controle completo ótimo, até a obtenção de estimativas de Hausdorff da fronteira livre singular. Por fim, iremos obter a regularidade ótima de soluções de equações em que suas propriedades de difusão (elipticidade) se deterioram na ordem de uma potência do seu gradiente ao longo do conjunto em que tal taxa de variação se anula.

Palavras-Chaves: estimativas ótimas, regularidade de soluções, EDPs elípticas singulares, EDPs elípticas degeneradas, estimativas Hausdorff.

Abstract

In this work we study important geometric and analytic properties to solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations, both singular and degenerate types. The study of combustion processes that degenerate along the null-set of the density of a gas, a particular case of quenching problems, present in their modeling, equations described in this work. In this first part we obtain properties of a minimal solution, since the complete optimal control until the Hausdorff estimates of the singular free boundary. Ultimately, we obtain the optimal regularity to equation solutions where their diffusion property (ellipticity) deteriorate in a power of their gradient along the set where such rate of variation nullifies.

Key Words: optimal estimates; regularity of solutions; singular elliptic PDEs, degenerate elliptic PDEs, Hausdorff estimates.

Conteúdo

Introdução	1
Uma abordagem geométrica	3
Continuidade ótima do gradiente	5
1 Preliminares	7
1.1 Notações	7
1.2 Soluções no sentido da viscosidade	9
2 Existência e Regularidade	10
2.1 Esquema de aproximação singular	11
2.2 Existência de Soluções Minimais	12
2.3 Regularidade $C^{1,\beta}$	13
3 Não-degenerescência de soluções mínimas	20
3.1 Não-degenerescência	21
3.2 Desigualdades de Harnack	29
4 Estimativas de Hausdorff da Fronteira Livre	32
5 O problema de fronteira livre limite	43
5.1 O problema limite	43
5.2 Estimativas geométricas da fronteira livre	49
6 Continuidade ótima do gradiente	53
6.1 O resultado principal	54
6.2 Aplicações e perspectivas	56
6.2.1 Equações da teoria de supercondutividade	56
6.2.2 Visitando a teoria do ∞ -laplaciano	58
6.2.3 Outras equações elípticas degeneradas	61

6.3	Compacidade universal	63
6.4	Oscilação de decaimento	65
6.5	Regularidade local sob o regime de pequenez	68
6.6	Regime de pequenez	69

Introdução

Conteúdo

Uma abordagem geométrica	3
Continuidade ótima do gradiente	5

A busca por propriedades intrínsecas de soluções de equações diferenciais parciais, se torna uma tema relevante desde a fundação da teoria de análise moderna de EDPs, por volta do século XVIII. Tal estudo se torna necessário na modelagem matemática de fenômenos que são governados por equações diferenciais parciais de segunda ordem.

Como parte central no desenvolvimento desta teoria, destacamos a busca de um módulo de continuidade universal de soluções de tais equações. Dentro dessa temática, temos a teoria de DeGiorgi-Nash-Moser para equações da forma divergente, onde encontramos a obtenção do módulo universal de continuidade para soluções da equação linear homogênea $Lu = 0$. Outro avanço destacável, está na teoria de regularidade para soluções de viscosidade de equações uniformemente elípticas não lineares,

$$F(D^2u) = 0 \tag{1}$$

que atraiu a atenção da comunidade matemática nessas últimas três décadas. É sabido que soluções da equação homogênea (1), são localmente de classe C^{1,α_0} para um expoente universal α_0 , isto é, que depende apenas das constantes N -dimensão e λ, Λ -constantas de elipticidade, veja [3]. Caso nenhuma hipótese estrutural seja imposta para o operador F , a regularidade C^{1,α_0} é de fato ótima, veja [31, 32] e [33]. Sob hipótese de concavidade ou convexidade em F , um teorema devido a Evans e Krylov, estabelece que soluções são $C^{2,\alpha}$. A teoria de regularidade para o caso não-homogêneo

$$F(X, D^2u) = f(X) \tag{2}$$

naturalmente se torna um caso mais delicado. Como consequência, soluções de tais equações podem não ser tão regulares quanto as do caso homogêneo. Em um trabalho inovador, Caffarelli [6], estabelece estimativas $W^{2,p}$ *a priori* para soluções de (2), onde $f \in L^p$, com $p < N$ -dimensão, adicionando ao operador F uma hipótese do tipo VMO para seus coeficientes. Recentemente, E. Teixeira em [44], fornece um módulo de continuidade universal ótimo para equações totalmente não-lineares de coeficientes variáveis, baseado nas propriedades de fraca-integrabilidade que o potencial f em (2) pode assumir.

Apesar da distinta importância dos avanços citados acima, um grande número de modelos matemáticos, que envolvem operadores cuja elipticidade se degenera ao longo de uma região desconhecida *a priori*, que depende de sua própria solução. Tais modelos são chamados de *problemas de fronteira livre*. Esta degradação elíptica próxima dessa região, requer o uso de uma teoria de regularidade pra soluções mais sofisticada do ponto de vista matemático.

Por exemplo, o processo de combustão de um gás em uma certa região, pode ser descrito matematicamente pelo seguinte problema de fronteira livre:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\theta \cdot F(D^2\mathbf{u}) = 1 & \text{em } \{\mathbf{u} > 0\} \\ \mathbf{u} = |\nabla\mathbf{u}| = 0 & \text{em } \partial\{\mathbf{u} > 0\} \end{cases} \quad (3)$$

para $0 < \theta < 1$, onde F representa o processo de combustão e u a densidade do gás. Observe que o processo de combustão se deteriora na região onde a densidade do gás é nula.

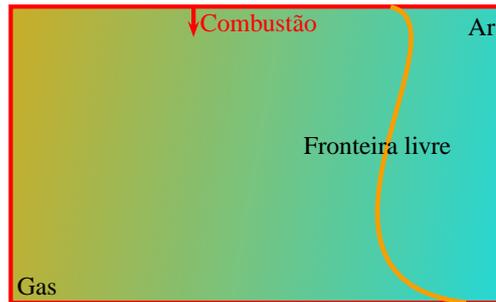


Fig. 0.1: Processo de combustão de um gás.

Podemos observar que soluções dessa equação já não podem ser C^2 , pois sua hessiana se torna ilimitada próxima da fronteira livre singular $\partial\{\mathbf{u} > 0\}$.

De uma forma geral, iremos desenvolver neste presente trabalho, uma abordagem geométrica para equações elípticas totalmente não-lineares singulares/degeneradas do tipo

$$\mathcal{L}(X, \mathbf{u}, D\mathbf{u}, D^2\mathbf{u}) \approx 1, \quad (4)$$

onde veremos que a magnitude da singularidade/degenerescência da equação acima, reflete diretamente nas propriedades geométricas das soluções próximo à fronteira livre singular.

De acordo com a teoria desenvolvida neste trabalho, o mesmo fora dividido em duas partes, que serão tratados de forma preliminar nas próximas seções.

Uma abordagem geométrica

O objetivo maior desta primeira parte, é estudar finas propriedades geométricas de equações elípticas não-variacionais singulares da forma:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\theta \cdot F(D^2\mathbf{u}) \sim \chi_{\{u>0\}} & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} = f & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para $N \geq 2$ é um domínio Lipschitz e limitado, f uma função dada contínua, não negativa e limitada. O operador F é assumido uniformemente elíptico e por fim, $0 < \theta < 1$ é a constante que indica o grau de singularidade que envolve a equação (5).

Voltando ao início desta introdução, mas precisamente para a equação (3), vemos que tal modelagem possui uma estrutura equivalente à equação singular acima, daí podemos ter uma noção da importância (em diversas áreas científicas) dos resultados matemáticos que estão por vir.

A teoria variacional, $F(M) = \text{Traço}(M)$, para o problema de fronteira livre (3) é atualmente bem compreendida. Ela está associada à minimização de funcionais não-diferenciáveis da forma:

$$\int \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}(X)|^2 + \mathbf{u}(X)^\gamma dX \longrightarrow \min. \quad (6)$$

Veja, por exemplo [2, 34, 35] e [47]. O problema acima é bastante diferente daquele tratado no clássico trabalho de Crandall, Rabinowitz e Tartar em [13]. Este último fora recentemente estudado numa versão totalmente não-linear em [17].

Mais do que obter resultados relevantes para este caso, foi percebido que esta abordagem faz uma conexão com o estudo de problemas do tipo Obstáculo e Cavidade, até então tratados como problemas de origens distintas. O caso extremo $\gamma = 1$, relacionado ao problema variacional (6), representa o problema de obstáculo e foi estudado por Caffarelli em [5]. Alguns anos depois, Alt e Caffarelli estudaram o caso $\gamma = 0$, que relata o problema de cavidade, em [1]. A versão totalmente não-linear do problema de obstáculo tem sido estudada em [30] por Lee e Shahgholian. Mais recentemente, o problema de cavidade

não-variacional foi desenvolvido por Ricarte e Teixeira em [37]. A tabela abaixo resume o desenvolvimento da teoria para estes casos.

Casos	Problemas	Variacional	Não-variacional
$\gamma = 0$	Obstáculo	Caffarelli (1977)	Lee-Shahgholian (2001)
$\gamma = 1$	Cavidade	Alt-Caffarelli (1981)	Ricarte-Teixeira (2011)

O delicado caso intermediário, quando $0 < \gamma < 1$, na versão totalmente não-linear, será abordado neste presente trabalho, que traz novas e delicadas adversidades, como exemplo, a não homogeneidade da equação satisfeita no conjunto de positividade $\{\mathbf{u} > 0\}$ e a utilização de técnicas de *blow-up* sobre conjunto singular

$$\mathfrak{F}(\mathbf{u}) = \partial\{\mathbf{u} > 0\} \cap \Omega,$$

desconhecido *a priori*.

A falta de abordagens variacionais e de energia para este caso, geram dificuldades significativas no problema em questão, e assim, soluções não-variacionais foram escolhidas de um modo especial. De fato, uma vez que o problema de fronteira livre considerado neste trabalho tem um caráter não-variacional, não se pode usar a força da linguagem distribucional para configurar uma formulação fraca do problema. Em vez disso, empregaremos um esquema de perturbação e assim obteremos estimativas uniformes com respeito ao parâmetro de aproximação ε . Uma solução para o problema de fronteira livre totalmente não-linear (5) será portanto, obtida como o limite de aproximações apropriadas.

O primeiro grande problema a ser abordado para este caso, fica por parte da regularidade ótima para soluções da equação (5). A busca por estimativas ótimas para equações heterogêneas, $\mathbf{L}\mathbf{u} = f(\mathbf{X}, \mathbf{u})$ é em geral, um caso delicado. Para o tipo de singularidade estudado neste presente trabalho, é importante notarmos que estimativas ótimas podem ser entendidas como equações invariantes (tangencialmente) por um tipo de reescalonamento. Mostraremos na seção 2.3 deste trabalho que tais soluções são localmente $C^{1, \frac{\gamma}{2-\gamma}}$. Esse resultado fora somente obtido num tratamento variacional, para minimizantes do funcional de Euler-Lagrange, veja [2, 34, 35] e [19, 20].

No capítulo 3, temos o segundo resultado destacável desta primeira abordagem, em que soluções mínimas, isto é, soluções obtidas a partir de uma adaptação do método de Perron, crescem precisamente como $\text{dist}(\mathbf{X}, \mathfrak{F}(\mathbf{u}))^{1+\frac{\gamma}{2-\gamma}}$, que corresponde à taxa de crescimento máximo permitido. Tal resultado implica numa geometria bastante restritiva próximo a fronteira livre $\mathfrak{F}(\mathbf{u})$. Como consequência de nossa estimativa gradiente ótima, Teorema 2.3.1 e a taxa de crescimento ótimo, Teorema 3.1.2, uma solução do problema

(5) está "aprisionada" entre o gráfico de dois múltiplos da função $\text{dist}(X, \mathfrak{F}(\mathbf{u}))^{1+\frac{\gamma}{2-\gamma}}$, isto é,

$$\underline{c} \cdot \text{dist}(X, \mathfrak{F}(\mathbf{u}))^{1+\frac{\gamma}{2-\gamma}} \leq \mathbf{u}(X) \leq \overline{C} \cdot \text{dist}(X, \mathfrak{F}(\mathbf{u}))^{1+\frac{\gamma}{2-\gamma}}, \quad X \in \{\mathbf{u} > 0\}.$$

Devido as tais considerações geométricas, no capítulo 3.2 estabelecemos uma desigualdade de Harnack homogênea para soluções de (5) dentro de bolas, $B \subset \{\mathbf{u} > 0\}$, onde B é tangente à $\mathfrak{F}(\mathbf{u})$. No capítulo 4, sob a adição de uma hipótese estrutural do operador F , estabelecemos estimativas Hausdorff da fronteira livre, em particular mostramos que $\chi_{\{\mathbf{u}>0\} \cap \Omega'} \in BV(\Omega)$, ou seja, $\{\mathbf{u} > 0\}$ é localmente um conjunto de perímetro finito. Ainda nessa seção, mostramos que a fronteira reduzida tem \mathcal{H}^{n-1} medida total. Os dois capítulos seguintes fecham a primeira parte deste trabalho através da obtenção de uma solução para o problema de fronteira livre totalmente não-linear (3) com propriedades geométricas e analíticas desejadas.

Continuidade ótima do gradiente

A segunda parte deste trabalho, realizada em conjunto com E. Teixeira e G. Ricarte, tem como principal finalidade a obtenção de estimativas ótimas interiores para equações elípticas degeneradas da forma:

$$\mathcal{H}(X, \nabla \mathbf{u}) F(X, D^2 \mathbf{u}) = f(X) \quad \text{em } B_1 \subset \mathbb{R}^N, \quad (7)$$

onde $f \in L^\infty(B_1)$ e o operador $\mathcal{H}: B_1 \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ degenera com uma taxa comparável a uma potência da magnitude do gradiente, isto é,

$$\lambda |\vec{p}|^\theta \leq \mathcal{H}(X, \vec{p}) \leq \Lambda |\vec{p}|^\theta, \quad (8)$$

para algum $\theta > 0$. O operador de 2ª ordem $F: B_1 \times \text{Sym}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ na equação (7) é o responsável pela difusão, ou seja, F é um operador uniformemente elíptico totalmente não-linear.

Em diversos modelos matemáticos, a degenerescência elíptica ocorre ao longo do conjunto singular:

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}) := \{X : \nabla \mathbf{u}(X) = 0\},$$

de uma solução existente. De fato, um certo número de equações elípticas degeneradas tem seus graus de degenerescência comparados a

$$f(\nabla \mathbf{u}) |D^2 \mathbf{u}| \approx 1, \quad (9)$$

para alguma função $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, com $\text{Zero}(f) = \{0\}$. Assim, compreender o efeito preciso sobre a falta de suavidade imposta pela equação modelo (9) nos guia a uma melhor compreensão sobre a teoria de regularidade ótima para uma quantidade razoável de operadores elípticos degenerados.

Uma rápida inferência na estrutura da equação (7) nos revela que nenhuma teoria de regularidade universal para tal equação pode ir além da regularidade C^{1,α_0} , para α_0 em (1). De fato, o termo de degenerescência $\mathcal{H}(X, \nabla u)$ força as soluções a serem menos regulares que soluções do problema uniformemente elíptico próximo de seu conjunto singular. Esta característica particular indica que a obtenção de estimativas de regularidade ótima para soluções de (7) não deve seguir de técnicas de perturbação. De fato, isto exige novas ideias envolvendo uma interação de equilíbrio entre a teoria de regularidade universal para equações uniformemente elípticas e o efeito de degenerescência atribuídos pelo operador difusão (8).

Sob esta análise estrutural, mostramos que uma solução de viscosidade u , de (7) é pontualmente diferenciável e seu gradiente, é localmente de classe $C^{0,\min\{\alpha_0^-, \frac{1}{1+\theta}\}}$. O expoente ótimo de Hölder-continuidade para o gradiente de soluções,

$$\beta := \min \left\{ \alpha_0^-, \frac{1}{1+\theta} \right\}, \quad (10)$$

nos dá precisamente a regularidade ótima e universal de equações degeneradas do tipo (7).

A originalidade do principal resultado apresentado nesta seção, está precisamente na obtenção do expoente de Hölder-continuidade ótimo do gradiente de uma solução da equação degenerada (7), que por sua vez, é uma importante informação dentro de uma quantidade de análises qualitativas de EDPs, tais como análise de *blow-ups*, problemas de fronteira livre, estimativas geométricas, etc. Ela é uma aquisição extra-qualitativa em relação ao recente resultado de Imbert e Silvestre, [21], onde foi provado que soluções de viscosidade de (7) são continuamente diferenciáveis. O logístico da prova de nosso principal resultado foi inspirado pelos recentes trabalhos de Teixeira, [43, 44] e [45].

Toda essa abordagem está compreendida no capítulo 6 e se encontra organizada da seguinte forma: Na seção 6.1 iremos apresentar o principal resultado relativo à segunda parte deste trabalho. Na seção 6.2 iremos expor algumas implicações que esse resultado tem em relação a resolução de alguns problemas em aberto bastante conhecidos na teoria de regularidade elíptica. A prova do Teorema principal está desenvolvida nas seções finais.

Capítulo 1

Preliminares

Conteúdo

1.1	Notações	7
1.2	Soluções no sentido da viscosidade	9

Neste capítulo, iremos prescrever algumas definições, observações e resultados que, imprescindivelmente serão utilizados no decorrer deste trabalho. Desta forma, partiremos das notações que serão empregadas, passando pela noção de solução no sentido da viscosidade para equações elípticas totalmente não-lineares, indo até a uma breve apresentação de algumas definições relativas à teoria geométrica da medida, que terá sua linguagem fortemente utilizada no capítulo 4. Embora não haja um rigor enquanto à demonstração de tais resultados, todos serão devidamente referenciados para uma possível leitura detalhada. Indicaremos a leitura dos capítulos iniciais da tese de doutorado de G. Ricarte em [36], para um estudo preliminar da teoria de equações elípticas totalmente não-lineares. Para uma leitura mais detalhada sobre a teoria geométrica da medida, recomendamos a dissertação de mestrado de J. Silva, veja [40].

1.1 Notações

No presente trabalho, iremos fazer uso da notação padrão utilizada na literatura clássica. As equações e problemas estudados aqui serão modelados no espaço euclidiano N -dimensional, \mathbb{R}^N . Denotaremos Ω como um domínio limitado em \mathbb{R}^N . Para um domínio $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$, $\partial\mathcal{O}$ será entendido como o bordo do domínio \mathcal{O} . De maneira usual, $\chi_{\mathcal{O}}$ será a função característica do conjunto \mathcal{O} . A bola aberta de raio $r > 0$ centrada

no ponto X_0 será denotada por $B_r(X_0)$. Usualmente, a bola de raio r , centrada na origem será escrito simplesmente como B_r . Além disso, para cada $k > 0$, iremos denotar $kB_r(X_0) := B_{kr}(X_0)$. Já o produto escalar usual em \mathbb{R}^N será representado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado um vetor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, sua norma euclideana será denotada por $|\xi| := \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$. O produto tensorial $\xi \otimes \psi$ denota a matriz cuja entradas são dadas por $\xi_i \psi_j$ onde, $1 \leq i, j \leq N$. Para o traço do produto entre duas matrizes $A = (A_{ij})_{N \times N}$ e $B = (B_{ij})_{N \times N}$, denotaremos

$$\text{traço}(A \cdot B) := A_{ij}B_{ij}. \quad (1.1)$$

Para uma função $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, seu gradiente e sua Hessiana em um ponto $X \in \Omega$ serão denotados respectivamente por

$$\nabla u(X) := (\partial_j u)_{1 \leq j \leq d} \quad \text{e} \quad D^2 u(X) := (\partial_{ij} u)_{1 \leq i, j \leq d},$$

onde $\partial_j u$ e $\partial_{ij} u$ representam a j -ésima derivada direcional de u e a i -ésima derivada direcional de $\partial_j u$, respectivamente.

O espaço de todas matrizes simétricas $N \times N$ será denotado por $\text{Sym}(N)$. Um operador $F: \Omega \times \text{Sym}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ é dito *uniformemente elíptico*, se existem duas constantes positivas $0 < \lambda \leq \Lambda$ tais que, para cada $\mathcal{M} \in \text{Sym}(N)$ e $X \in \Omega$,

$$\lambda \|\mathcal{N}\| \leq F(X, \mathcal{M} + \mathcal{N}) - F(X, \mathcal{M}) \leq \Lambda \|\mathcal{N}\|, \quad \forall \mathcal{N} \geq 0. \quad (1.2)$$

Equivalentemente, um operador (λ, Λ) -elíptico pode ser definido sob a seguinte condição:

$$F(X, \mathcal{M} + \mathcal{N}) \leq F(X, \mathcal{M}) + \Lambda \|\mathcal{N}^+\| - \lambda \|\mathcal{N}^-\| \quad (1.3)$$

para todo $x \in \Omega$ e $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \text{Sym}(N)$, onde $\|\mathcal{N}^+\|$ representa o máximo da parte positiva dos autovalores de \mathcal{N} , e $\|\mathcal{N}^-\| = \|(-\mathcal{N})^+\|$. Tal condição nos garante que $F(X, \mathcal{M})$ é uma função Lipschitz em $\mathcal{M} \in \text{Sym}(N)$ e além disso F é não-decrescente em $\text{Sym}(N)$, isto é, para $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$ ($\mathcal{M} - \mathcal{N} \geq 0$) temos $F(X, \mathcal{N}) \leq F(X, \mathcal{M})$.

Note que, sendo F (λ, Λ) -elíptico, a matriz formada pelas derivadas parciais de F , $(D_{(i,j)} F)_{1 \leq i, j \leq N}$ é uma matriz positiva definida. Para cada $\varepsilon > 0$, defina

$$F_\varepsilon(X, \mathcal{M}) := \varepsilon F\left(X, \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{M}\right) \quad \forall X \in \Omega. \quad (1.4)$$

Podemos observar que o operador F_ε tem as mesmas constantes de elipticidade do operador F , isto é, F_ε é um operador (λ, Λ) -elíptico.

Para o estudo sobre teoria geométrica da medida que será feito no capítulo 4, denotaremos a medida de Lebesgue N -dimensional de um certo conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ por

$\mathcal{L}^N(\mathbf{A})$. Já a notação \mathcal{H}^{N-1} significará a $(N-1)$ -medida de Hausdorff. Por fim, constantes $C, C_1, C_2, \dots > 0$ e $c, c_0, c_1, c_2, \dots > 0$ dependerão somente da dimensão, do grau de singularidade/degenerescência e das constantes de elipticidade λ, Λ as quais chamaremos de universais. Qualquer dependência adicional será devidamente enfatizada.

1.2 Soluções no sentido da viscosidade

O termo "viscosity solutions", surge inicialmente no ano de 1983, em um trabalho de M. Crandall e P. Lions, em [11], relacionado as equação de Hamilton-Jacobi. A origem do termo é justificada pelo uso de um método chamado "vanishing viscosity" para a obtenção da existência de soluções para tais equações. A definição atual para *soluções no sentido da viscosidade* foi dada por Evans no ano de 1980, em [14]. Depois disso, importantes propriedades foram refinadas em um trabalho feito em conjunto por Crandall, Evans e Lions [12], em 1984. A principal dificuldade em definir solução fraca de equações totalmente não-lineares é a ausência de uma estrutura divergente. Veremos na definição de solução no sentido da viscosidade, assim como na linguagem variacional, o uso de funções teste suaves e de um procedimento para fazer as derivadas que aparecem na equação incidirem sobre as funções teste. Entretanto, este procedimento será não-linear, em contraste com o procedimento usado no tratamento variacional.

Para um operador $G: \Omega \times \mathbb{R}^N \times \text{Sym}(N) \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que uma função $u \in C^0(\Omega)$ é uma *sobresolução de viscosidade* de $G(X, \nabla u, D^2 u) = 0$, sempre que ao tocarmos por baixo, o gráfico de u por uma função suave φ em um ponto $Y \in \Omega$ (ou seja, Y mínimo local de $u - \varphi$), então $G(Y, \nabla \varphi(Y), D^2 \varphi(Y)) \leq 0$. Também dizemos que $u \in C^0(B_1)$ é uma *subsolução de viscosidade* para a equação $G(X, \nabla u, D^2 u) = 0$, sempre que ao tocarmos por cima, o gráfico da função u em um ponto $Z \in B_1$, por uma função suave φ (isto é, Z é mínimo local de $\varphi - u$), então $G(Z, \nabla \varphi(Z), D^2 \varphi(Z)) \geq 0$. Dizemos que u é uma *solução no sentido da viscosidade* caso ela seja uma sobresolução e uma subsolução no sentido definido acima.

O fato crucial da definição acima, é que se G é não-decrescente em M (com respeito a ordem parcial das matrizes simétricas $\text{Sym}(N)$), então a noção clássica de solução é equivalente ao da viscosidade. Para uma leitura detalhada, recomendamos o clássico [4].

Capítulo 2

Existência e Regularidade

Conteúdo

2.1	Esquema de aproximação singular	11
2.2	Existência de Soluções Minimais	12
2.3	Regularidade $C^{1,\beta}$	13

Daremos início neste capítulo, ao estudo referente a primeira parte do nosso trabalho, que tem como objetivo mostrar a existência de soluções para a equação singular

$$F(D^2\mathbf{u}) = \gamma\mathbf{u}^{\gamma-1} \cdot \chi_{\{\mathbf{u}>0\}}, \tag{2.1}$$

bem como uma estimativa de regularidade ótima uniforme para soluções de problemas aproximados, seção 2.3. Para a sequência, denotaremos Ω como sendo um domínio Lipschitz e limitado em \mathbb{R}^N , para $N \geq 2$. A função $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ será fixada com um dado de fronteira contínuo, o operador $F \in C^1(\text{Sym}(N) \setminus \{0\})$ será um operador uniformemente elíptico totalmente não linear e $0 < \gamma < 1$ um número real fixado.

Numa abordagem totalmente não linear, o problema de regularidade ótima para soluções da equação (2.1) é uma questão bastante delicada. Parte da sutileza desse problema vem da complexidade intrínseca da teoria de regularidade para soluções de viscosidade de equações uniformemente elípticas. Como mencionado no Capítulo , sabemos da literatura atual que soluções de equações homogêneas

$$F(D^2\mathbf{u}) = 0, \tag{2.2}$$

tem limitação $C^{1,\mu}$ *a priori*, para algum $\mu > 0$ que depende apenas de N, λ e Λ . Sob hipótese de concavidade ou convexidade em F , um Teorema devido a Evans e Krylov,

estabelece que soluções são $C^{2,\alpha}$. Contudo, Nadirashvili e Vladut recentemente mostraram que dado qualquer $0 < \eta < 1$ é possível construir um operador uniformemente elíptico F , cujas soluções da equação homogênea (2.2) não são $C^{1,\eta}$, veja [33], Teorema 1.1.

Portanto, a fim de obter uma estimativa de regularidade ótima referente ao problema de fronteira livre (2.1), é natural assumir que F tem estimativa $C^{2,\tau}$ *a priori* para algum $0 < \tau < 1$ pequeno. Tal hipótese será aplicada na seção 2.3, apesar de que o Teorema 2.3.1 não depende de tal condição.

2.1 Esquema de aproximação singular

Para o devido propósito, iremos desenvolver uma abordagem de aproximação singular que nos permita lidar com a falta de abordagens variacionais naturalmente não disponíveis. Assim, iremos sugerir o seguinte esquema de perturbação singular para o problema de fronteira livre (3):

$$\begin{cases} F(D^2\mathbf{u}) = \beta_\varepsilon(\mathbf{u}), & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} = f & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{E}_\varepsilon)$$

O termo de perturbação singular β_ε é construído da seguinte forma: inicialmente escolha sua função favorita $\rho \in C_0^\infty[0, 1]$ e denote

$$\alpha := 1 + \frac{\gamma}{2 - \gamma}. \quad (2.3)$$

Ao longo do presente trabalho, α será sempre fixado com o valor denotado acima. Na sequência, defina

$$B_\varepsilon(t) = \int_0^{\frac{t - \varepsilon^\alpha \sigma_0}{\varepsilon^\alpha}} \rho(s) ds, \quad (2.4)$$

onde $0 < \sigma_0 < \frac{1}{2}$ é uma escolha técnica arbitrária. Note que B_ε é uma aproximação suave de $\chi_{(0,\infty)}$. Finalmente, iremos definir

$$\beta_\varepsilon(t) = \gamma t^{\gamma-1} B_\varepsilon(t). \quad (2.5)$$

Tal construção é cuidadosamente realizada para preservar o escalonamento natural da equação (2.1). A figura abaixo ilustra a perturbação singular β_ε .

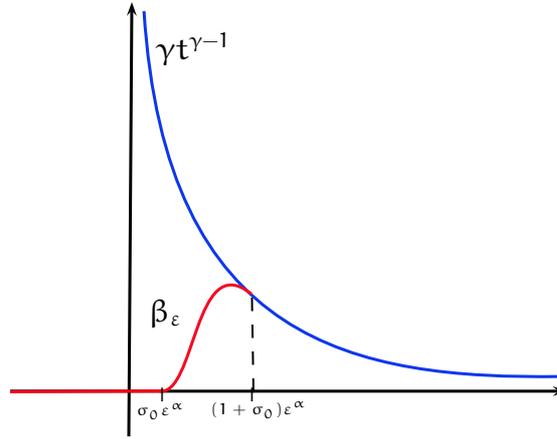


Fig. 2.1: Esquema de aproximação singular

2.2 Existência de Soluções Minimais

Nesta seção iremos discutir a existência de uma solução de viscosidade para a equação (E_ϵ) . Mais além, iremos aqui estabelecer um processo para selecionar soluções especiais de tal equação. Como será mostrado na seção 3, a família constituída por estas soluções irá por fim satisfazer as características geométricas desejadas. Tais propriedades irão nos fornecer estimativas de Hausdorff da fronteira livre (veja 4).

Note que a falta de monotonicidade da equação (E_ϵ) com respeito a variável u , não nos permite fazer uso de uma aplicação direta do método clássico de Perron. O próximo Teorema provado em [37], é uma adaptação do método de Perron.

Teorema 2.2.1. *Seja g uma função Lipschitz, limitada definida em \mathbb{R} . Suponha F uniformemente elíptica e que a equação $F(D^2u) = g(u)$ admite uma subsolução de viscosidade Lipschitz u_\star e uma sobresolução de viscosidade Lipschitz u^\star tais que $u_\star = u^\star = f \in C(\partial\Omega)$. Defina o conjunto de funções,*

$$S := \{w \in C(\overline{\Omega}); \quad u_\star \leq w \leq u^\star \quad \text{e } w \text{ sobresolução de } F(D^2u) = g(u)\}.$$

Então,

$$v(x) := \inf_{w \in S} w(x)$$

é uma solução de viscosidade continua de $F(D^2u) = g(u)$ e $v = f$ continuamente em $\partial\Omega$.

A existência de uma solução minimal para a equação (E_ϵ) se dá escolhendo $u_\star = u_\star(\epsilon)$

e $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\varepsilon)$ soluções dos seguintes problemas de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} F(D^2\mathbf{u}_*) = \zeta, \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u}_* = f \text{ em } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(D^2\mathbf{u}^*) = 0, \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u}^* = f \text{ em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

onde,

$$\zeta := \sup \beta_\varepsilon \sim \varepsilon^{\gamma-1}.$$

A existência das funções \mathbf{u}_* e \mathbf{u}^* é uma consequência natural do clássico método de Perron. Por construção \mathbf{u}_* é subsolução de viscosidade de (E_ε) e \mathbf{u}^* é uma sobresolução de viscosidade da equação (E_ε) . Note que $\mathbf{u}^*, \mathbf{u}_* \in C^{0,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Então, uma aplicação direta do Teorema 2.2.1 nos dá o seguinte resultado de existência:

Teorema 2.2.2 (Existência de soluções mínimas). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio Lipschitz e $f \in C(\partial\Omega)$ um dado de fronteira não-negativo. Então, para cada $\varepsilon > 0$ fixado, a equação (E_ε) tem uma solução minimal de viscosidade $\mathbf{u}_\varepsilon \in C(\bar{\Omega})$.*

Como previamente mencionado, mais do que assegurar a existência de soluções de viscosidade para (E_ε) , o Teorema 2.2.2 nos fornece uma escolha particular de soluções para tal equação. Em comparação com a teoria variacional, esta escolha é uma substituição para a seleção de minimizantes do funcional de Euler-Lagrange (veja por exemplo [42] para mais detalhes). Portanto, salvo indicação do contrário, sempre que falarmos de solução de viscosidade para (E_ε) , estamos nos referimos à solução mínima de viscosidade obtida pelo Teorema 2.2.2, sendo essa denotada por \mathbf{u}_ε .

2.3 Regularidade $C^{1,\beta}$

O primeiro grande resultado obtido neste trabalho é uma estimativa de regularidade ótima, uniforme em ε , disponível para soluções de (E_ε) . Iremos mostrar que \mathbf{u}_ε é uma função localmente $C^{1,\beta}$ e iremos determinar $\beta > 0$ ótimo em termos do grau de singularidade γ . Essa relevante informação tem sido até então conhecida somente para soluções variacionais, [19, 20, 34] e suas provas fazem um uso decisivo em considerações de energia. A princípio, ainda não está claro que se pode esperar a mesma teoria regularidade encontrada em problemas não variacionais.

Assim, começaremos esta seção de uma maneira bastante informal, fazendo uso de considerações heurísticas, que nos guie aos resultados genuínos que serão estabelecidos logo depois. Vamos analisar o problema de fronteira livre limite (3). Suponha que 0 é um ponto da fronteira livre e, $-e_n$ o vetor normal unitário, apontando para a fase $\{\mathbf{u} = 0\}$.

Se \mathbf{u} é $C^{1,\beta}$ em 0 , então, em uma pequena vizinhança, ou melhor, em $B_\rho \cap \{\mathbf{u} > 0\}$, para $\rho \ll 1$, \mathbf{u} comporta-se como $\sim \chi_n^{1+\beta}$. Por outro lado, o potencial singular da equação em (3) é da ordem $\sim \chi_n^{(1+\beta)\cdot(1-\gamma)}$. Tendo em vista a teoria de regularidade para equações totalmente não lineares heterogêneas $F(D^2\mathbf{u}) = f(\mathbf{X})$, estabelecida em [6] e [45], obtemos a seguinte implicação:

$$\chi_n^{(1+\beta)\cdot(1-\gamma)} \in L_{\text{weak}}^\theta \implies \mathbf{u} \in C^{1,1-\frac{1}{\theta}}.$$

O raciocínio acima nos dá o seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} \theta(1+\beta)(\gamma-1) = -1 \\ \beta = 1 - \frac{1}{\theta}. \end{cases}$$

Resolvendo tal sistema em β , obtemos $\beta = \frac{\gamma}{2-\gamma}$, o que guia a obter a mesma regularidade ótima estabelecida na teoria variacional.

Deste modo, o Teorema abaixo irá estabelecer estimativas locais de regularidade $C^{1,\frac{\gamma}{2-\gamma}}$ para a solução \mathbf{u}_ε da equação (E_ε) , uniforme em ε . De fato, iremos obter um controle universal no gradiente de \mathbf{u}_ε próximo à fronteira livre em termos do valor de \mathbf{u}_ε . Como $\mathbf{u}_\varepsilon = 0$ ao longo da fronteira livre, nossa estimativa fornecerá a regularidade desejada sob a interface $\mathfrak{F} = \partial\{\mathbf{u} > 0\} \cap \Omega$. Lembramos que estamos trabalhando sob a hipótese natural de que F possui estimativas $C^{2,\tau}$ a priori.

Teorema 2.3.1 (regularidade ótima uniforme). *Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante C com dependência em, $\|f\|_\infty$, γ , Ω' , dimensão, elipticidade, porém independente de ε , tal que, qualquer família de soluções de viscosidade $\{\mathbf{u}_\varepsilon\}$ da equação (E_ε) satisfaz,*

$$|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X})|^2 \leq C \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X})^\gamma, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega'.$$

Em particular, $\mathbf{u}_\varepsilon \in C_{loc}^{1,\frac{\gamma}{2-\gamma}}$, uniformemente em ε .

Demonstração. Por simplicidade, iremos retirar o subíndice ε em \mathbf{u}_ε , escrevendo simplesmente \mathbf{u} . Iremos analisar a seguinte função auxiliar

$$\mathbf{v} := \psi(\mathbf{u}_\varepsilon) |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2, \quad \text{para } \psi(t) = t^{-\gamma}.$$

O nosso objetivo final é mostrar que \mathbf{v} é localmente limitado em Ω , limitação essa que não depende de ε . Para o que segue, iremos escolher uma função positiva $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $\phi|_{\partial\Omega} \equiv 0$ e satisfaz $|\nabla \phi|^2 = O(\phi)$. Defina, na sequência,

$$\omega := \phi \cdot \mathbf{v} \quad \text{em } \Omega,$$

e seja $X_0 \in \Omega$ o ponto de máximo de ω em $\bar{\Omega}$, isto é

$$\phi(X_0) \cdot \nu(X_0) = \max_{\bar{\Omega}} \omega.$$

Diferenciando ω e usando a equação (E_ε) , obtemos

$$D_i \omega = \phi_i \nu + \phi \nu_i, \quad D_{ij} \omega = \phi_{ij} \nu + \phi_i \nu_j + \phi_j \nu_i + \phi \nu_{ij} \quad (2.6)$$

e

$$\sum_{i,j} F_{ij}(D^2 \mathbf{u}) D_{ij} \mathbf{u}_k = \beta'_\varepsilon(\mathbf{u}) \mathbf{u}_k. \quad (2.7)$$

Seja $A_{ij} := F_{ij}(D^2 \mathbf{u}(X_0))$. Pela elipticidade uniforme do operador F , a matriz (A_{ij}) é estritamente positiva. Além disso, como X_0 é um ponto de máximo, $D^2 \omega(X_0)$ é não positiva. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i,j} A_{ij} D_{ij} \omega(X_0) \\ &= \left[\nu \sum_{i,j} A_{ij} D_{ij} \phi + 2 \operatorname{Tr}((A_{ij}) \nabla \phi \otimes \nabla \nu) + \phi \sum_{i,j} A_{ij} D_{ij} \nu \right] (X_0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Segue de (2.6) e do fato de que X_0 é um ponto crítico de ω ,

$$\nabla \nu(X_0) = -\nu(X_0) \frac{\nabla \phi(X_0)}{\phi(X_0)}. \quad (2.9)$$

Combinando (2.9), a elipticidade de (A_{ij}) e as propriedades analíticas de ϕ , chegamos a

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i,j} A_{ij} D_{ij} \phi + 2 \operatorname{Tr}((A_{ij}) \nabla \phi \otimes \nabla \nu) &\geq - \left| \nu \sum_{i,j} A_{ij} D_{ij} \phi + 2 \operatorname{Tr}((A_{ij}) \nabla \phi \otimes \nabla \nu) \right| \\ &= -\nu \left| \sum_{i,j} A_{ij} D_{ij} \phi + \frac{2}{\phi} \operatorname{Tr}((A_{ij}) \nabla \phi \otimes \nabla \phi) \right| \\ &\geq -C(\Lambda) \max_{\bar{\Omega}} \left\{ |D^2 \phi|, \frac{|\nabla \phi|^2}{\phi} \right\} \nu \\ &=: -C_0 \nu. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Agora, iremos nos ater ao termo $\sum_{i,j} A_{ij} D_{ij} \nu(X_0)$. Diferenciando ν , obtemos

$$D_i \nu = \psi'(\mathbf{u}) u_i |\nabla \mathbf{u}|^2 + 2\psi(\mathbf{u}) \sum_k u_k u_{ki}. \quad (2.11)$$

Novamente diferenciando,

$$\begin{aligned} D_{ij}v &= (\psi''u_i u_j + \psi'(u)u_{ij})|\nabla u|^2 + 2\psi'(u)u_i \sum_k u_k u_{kj} \\ &+ 2\psi'(u)u_j \sum_k u_k u_{ki} + 2\psi(u) \sum_k (u_{kj}u_{ki} + u_k u_{kij}). \end{aligned}$$

Segue-se de (2.9) e (2.11) que, em X_0 , para cada i ,

$$\sum_k u_k u_{ki} = -\frac{1}{2\psi(u)} \left\{ \psi'(u)u_i |\nabla u|^2 + v \frac{\phi_i}{\phi} \right\}.$$

Então, combinando esta igualdade com (2.6), encontramos

$$\begin{aligned} A_{ij}D_{ij}v &= \left[\psi''(u) - 2\frac{(\psi'(u))^2}{\psi(u)} \right] A_{ij}\nabla u \otimes \nabla u |\nabla u|^2 - 2\frac{v}{\phi} \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} A_{ij}\nabla u \otimes \nabla \phi \\ &+ \psi'(u)A_{ij}u_{ij}|\nabla u|^2 + 2\psi(u) (\text{Tr}(D^2u(A_{ij})D^2u) + \beta'_\varepsilon(u)|\nabla u|^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por elipticidade e definição da função ϕ , seguem as estimativas:

$$\begin{aligned} A_{ij}\nabla u \otimes \nabla u &\geq \lambda|\nabla u|^2, \\ |A_{ij}\nabla u \otimes \nabla \phi| &\leq \Lambda|\nabla u| \cdot |\nabla \phi|, \\ |A_{ij}u_{ij}| &\leq \Lambda F(D^2u) = \Lambda\beta_\varepsilon(u), \\ \text{Tr}(D^2u(A_{ij})D^2u) &\geq 0, \\ \left[\psi''(u) - 2\frac{(\psi'(u))^2}{\psi(u)} \right] &= (-\gamma^2 + \gamma)u^{-\gamma-2}. \end{aligned}$$

Para essa última igualdade é importante notar que $-\gamma^2 + \gamma > 0$. Usando todas essas estimativas acima em (2.12) obtemos

$$\begin{aligned} A_{ij}D_{ij}v &\geq (-\gamma^2 + \gamma)\lambda v u^{-2} |\nabla u|^2 - 2\gamma \frac{\Lambda v}{u \phi} |\nabla u| \cdot |\nabla \phi| \\ &- \gamma \Lambda u^{-\gamma-1} \beta_\varepsilon(u) |\nabla u|^2 + 2u^{-\gamma} \beta'_\varepsilon(u) |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $t > 0$

$$\beta_\varepsilon(t) = \gamma t^{\gamma-1} B_\varepsilon(t) \leq \gamma t^{\gamma-1}$$

e

$$\begin{aligned}\beta'_\varepsilon(t) &= \gamma(\gamma - 1)t^{\gamma-2}B_\varepsilon(t) + \gamma t^{\gamma-1}B'_\varepsilon(t) \\ &\geq \gamma(\gamma - 1)t^{\gamma-2}B_\varepsilon(t).\end{aligned}$$

Onde temos usado que,

$$B'_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-\beta} \rho \left(\frac{t - \sigma_0 \varepsilon^\beta}{\varepsilon^\beta} \right) > 0.$$

Isso nos dá,

$$\begin{aligned}A_{ij}D_{ij}v &\geq (-\gamma^2 + \gamma)\lambda v \cdot u^{-2}|\nabla u|^2 - 2\gamma \frac{\Lambda v}{u \phi} |\nabla u| \cdot |\nabla \phi| \\ &\quad - \Lambda \gamma^2 u^{-\gamma-1} \cdot u^{\gamma-1} |\nabla u|^2 - 2\gamma(1 - \gamma)u^{\gamma-2} \cdot u^{-\gamma} |\nabla u|^2 \\ &= (-\gamma^2 + \gamma)\lambda v \cdot u^{-2}|\nabla u|^2 - 2\gamma \frac{\Lambda v}{u \phi} |\nabla u| \cdot |\nabla \phi| \\ &\quad - \Lambda \gamma^2 u^{-2} |\nabla u|^2 - 2\gamma(1 - \gamma)u^{-2} |\nabla u|^2.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Combinando (2.8), (2.10) e (2.13), e levando em conta que $|\nabla \phi| = O(\phi)$, temos

$$\begin{aligned}C_0 v &\geq \phi(\lambda(-\gamma^2 + \gamma)v - C_1)u^{-2}|\nabla u|^2 - 2\gamma \Lambda u^{-1}v |\nabla u| \cdot |\nabla \phi| \\ &= \phi(\lambda(-\gamma^2 + \gamma)v - C_1)u^{-2}|\nabla u|^2 - 2\gamma \Lambda u^{-1}u^{-\gamma}u^{\gamma/2}\sqrt{v}|\nabla \phi| \cdot |\nabla u|^2 \\ &\geq \phi(\lambda(-\gamma^2 + \gamma)v - C_1)u^{-2}|\nabla u|^2 - 2C(\phi)\gamma \Lambda u^{-\frac{\gamma}{2}-1}\sqrt{v\phi}|\nabla u|^2,\end{aligned}$$

onde $C_1 := (\gamma^2 \Lambda + 2\gamma(1 - \gamma)) > 0$. Claramente, podemos assumir

$$|\nabla u(X_0)|u(X_0) \neq 0.$$

Daí, como $|\nabla \phi|^2 = O(\phi)$, obtemos

$$C_0 u^{-\gamma+2} \geq \phi(\lambda(-\gamma^2 + \gamma)v - C_1) - 2C(\phi)\gamma \Lambda u^{-\frac{\gamma}{2}+1}\sqrt{v\phi}.\tag{2.14}$$

Na região $|u_\varepsilon| \geq 1$, $F(D^2 u_\varepsilon)$ é uniformemente limitada, independentemente de ε . Assim, pelo princípio do máximo de Alexandroff-Bakeman-Pucci,

$$|u_\varepsilon| \leq C_2,$$

para uma constante C_2 que não depende de ε . Por tais considerações e por (2.14), segue

$$C_3 \geq \lambda(-\gamma^2 + \gamma)\phi(X_0)v(X_0) - C_4 \sqrt{v(X_0)\phi(X_0)}.$$

para constantes universais C_3, C_4 que também não dependem de ε . Claramente a

estimativa acima implica que,

$$v(X)\phi(X) \leq v(X_0)\phi(X_0) \leq C,$$

isto é,

$$\phi u^{-\gamma} |\nabla u|^2 \leq C. \quad (2.15)$$

para constante C que depende apenas da dimensão, elipticidade, γ , $\|f\|_\infty$ e ϕ , mas independe de ε .

Assim, pela estimativa obtida em (2.15), podemos observar que a função $u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ é Lipschitz e por argumentos clássicos, $\|u_\varepsilon\|_{C^{1, \frac{\gamma}{2-\gamma}}}$ é localmente limitada uniforme em ε . Portanto a prova do Teorema 2.3.1 está concluída. \square

A regularidade ótima uniforme estabelecida no Teorema 2.3.1 nos fornece, em particular, compacidade para a família de soluções da Equação (E_ε) . Isso também será importante para nossa análise na seguinte consequência do Teorema 2.3.1:

Corolário 2.1. *Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existem constantes C e $r_0 > 0$ dependendo em γ , Ω' e parâmetros universais tais que para $X_0 \in \Omega'$ e $r \leq r_0$, então*

$$\sup_{B_r(X_0)} u_\varepsilon \leq u_\varepsilon(X_0) + C u_\varepsilon(X_0)^{\gamma/2} r + C r^\alpha$$

onde, $\alpha = 1 + \frac{\gamma}{2-\gamma}$.

Demonstração. Defina a seguinte função auxiliar

$$f(Y) := u_\varepsilon(Y) - u_\varepsilon(X_0) - \nabla u_\varepsilon(X_0) \cdot (Y - X_0).$$

onde $Y \in B_r(X_0)$. Claramente,

$$f(X_0) = |\nabla f(X_0)| = 0$$

e portanto, do Teorema 2.3.1 obtemos

$$|f(Y) - f(X_0)| \leq C \cdot |Y - X_0|^\alpha,$$

o que imediatamente nos fornece, por desigualdade triangular,

$$u_\varepsilon(Y) \leq u_\varepsilon(X_0) + |\nabla u_\varepsilon(X_0)| \cdot |Y - X_0| + C|Y - X_0|^\alpha.$$

Contudo, aplicando mais uma vez o Teorema 2.3.1,

$$\mathbf{u}_\varepsilon(Y) \leq \mathbf{u}_\varepsilon(X_0) + C\mathbf{u}_\varepsilon(X_0)^{\gamma/2} \cdot |Y - X_0| + C|Y - X_0|^\alpha,$$

e a prova do Corolário 2.1 está concluída.

□

Capítulo 3

Não-degenerescência de soluções mínimas

Conteúdo

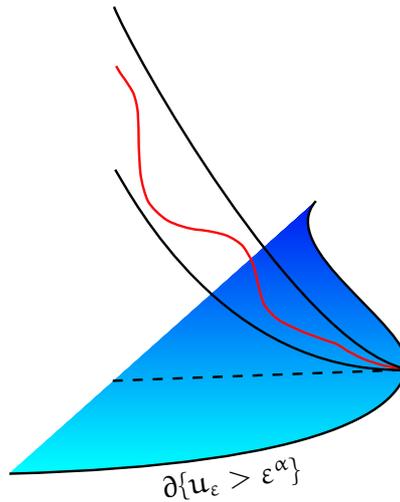
3.1	Não-degenerescência	21
3.2	Desigualdades de Harnack	29

Na seção anterior mostramos que soluções da equação (E_ε) são localmente de classe $C^{1, \frac{\gamma}{2-\gamma}}$. Desse fato, iremos concluir que tal estimativa nos fornece uma limitação superior em quão rápida a solução u_ε decresce próxima superfície de nível $\{u_\varepsilon \sim \varepsilon^\alpha\}$, para α como em (2.3). Ou seja,

$$u_\varepsilon(Z) \lesssim [\text{dist}(Z, \{u_\varepsilon \sim \varepsilon^\alpha\})]^\alpha.$$

O principal resultado que iremos provar neste capítulo, nos diz que soluções mínimas crescem precisamente como $\text{dist}(X_0, \{u_\varepsilon \sim \varepsilon^\alpha\})^\alpha$, veja Corolário 3.2. De fato, iremos estabelecer uma propriedade de não-degenerescência forte para soluções mínimas, que de uma forma adicional terá uma importância fundamental em nossa análise de *blow-up*.

Provado isso, teremos então um controle preciso (tanto inferior como superior) do gráfico de uma solução mínima. De uma forma mais elucidativa, a figura abaixo mostra o comportamento do gráfico dessa solução em uma direção fixada:

Fig. 3.1: Controle completo da solução minimal u_ε .

Para facilitar a compreensão dos argumentos que serão utilizados na sequência, iremos introduzir algumas notações que serão usadas a partir desta seção e em todo o restante deste presente trabalho.

$$\begin{aligned} \{u_\varepsilon > \kappa\} &:= \{x \in \Omega \mid u_\varepsilon(x) > \kappa\}, \\ \{\tau > u_\varepsilon > \lambda\} &:= \{x \in \Omega \mid \tau > u_\varepsilon(x) > \lambda\}, \\ d_\varepsilon(X) &:= \text{dist}(X, \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}), \\ B_\varepsilon(X) &:= B_{d_\varepsilon(X)}(X). \end{aligned}$$

3.1 Não-degenerescência

A obtenção da não-degenerescência de uma solução mínima está baseada na construção de uma sobresolução apropriada, cujo valor em um disco interno é muito menor do que os valores tomados pela solução mínima na mesma região. A figura abaixo mostra o comportamento desta sobresolução, a ser construída na proposição à seguir.

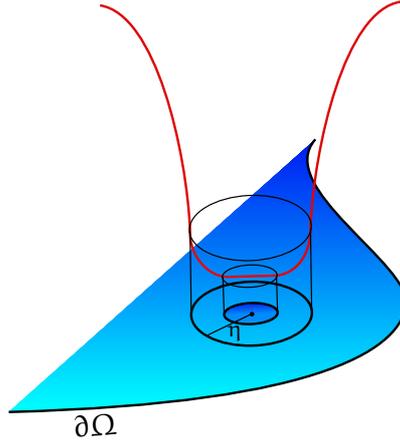


Fig. 3.2: Função barreira.

Proposição 3.1.1. *Assuma, sem perda de generalidade que $0 \in \Omega$. Dado $0 < \eta$, existe uma função simétrica radial $\theta \in C^{1,1}(\Omega)$ e constantes universalmente pequenas $0 < c_2 < 1$ e $0 < c_1 < 1$ tais que*

i. $\theta \equiv 2\sigma_0$ em $B_{c_1\eta}$

ii. $\theta \geq c_2\eta^{1+\frac{\gamma}{2-\gamma}}$ em $\Omega \setminus B_\eta$

iii. θ satisfaz $F(D^2\theta(X)) \leq \beta(\theta(X))$, pontualmente em Ω , onde $\beta = \beta_1$, como em (2.5).

Demonstração. Inicialmente defina,

$$\theta(X) = \begin{cases} 2\sigma_0 & \text{para } 0 \leq |X| \leq c_1\eta; \\ \alpha_0(|X| - c_1\eta)^2 + 2\sigma_0 & \text{para } c_1\eta \leq |X| \leq \eta; \\ A|X|^\alpha + B & \text{para } |X| \geq \eta. \end{cases}$$

onde as constantes α_0, A, B e c_1 serão escolhidas posteriormente. Nosso primeiro objetivo é fazer com que a função seja de fato $C^{1,1}$. Para isto, temos ao longo do conjunto $|X| = \eta$,

$$\alpha_0(1 - c_1)^2\eta^2 + 2\sigma_0 = \theta(X) = A\eta^\alpha + B \quad (3.1)$$

assim, obtemos

$$\alpha_0 = \frac{1}{(1 - c_1)^2} [A\eta^{\alpha-2} + \eta^{-2}(B - 2\sigma_0)].$$

Além disso, diferenciando θ e seu gradiente ao longo de $|X| = \eta$, obtemos

$$2\alpha_0(1 - c_1)X_i = A\alpha\eta^{\alpha-2}X_i. \quad (3.2)$$

Combinando (3.1) e (3.2) encontramos

$$\frac{A\alpha\eta^{\alpha-2}}{2(1-c_1)} = \frac{1}{(1-c_1)^2} [A\eta^{\alpha-2} + \eta^{-2}(B - 2\sigma_0)]. \quad (3.3)$$

Na sequência, tome

$$c_1 := \frac{\gamma}{2} \in (0, 1),$$

que implica na relação $\alpha = \frac{1}{1-c_1}$, onde, como sempre, α é tomado como (2.3). Por fim, definimos

$$B = 2\sigma_0 - \frac{A}{2}\eta^\alpha,$$

de forma que (3.3) seja satisfeita. Voltando à construção inicial, obtemos

$$\theta(X) = \begin{cases} 2\sigma_0 & \text{para } 0 \leq |X| \leq c_1\eta; \\ \frac{A\alpha^2}{2}\eta^{\alpha-2}(|X| - c_1\eta)^2 + 2\sigma_0 & \text{para } c_1\eta \leq |X| \leq \eta; \\ A|X|^\alpha + \left(2\sigma_0 - \frac{A}{2}\eta^\alpha\right) & \text{para } |X| \geq \eta. \end{cases}$$

Podemos observar que por sua própria construção, $\theta \in C^{1,1}$. Note que ainda temos o parâmetro A a ser ajustado. Nosso próximo passo será mostrar que θ é uma sobresolução apropriada, isto é, queremos estabelecer

$$F(D^2\theta) \leq \beta(\theta) \quad (3.4)$$

pontualmente. Para tal propósito, iremos primeiramente analisar tal equação na região $c_1\eta \leq |X| \leq \eta$. Cálculos diretos mostram que,

$$\theta_{ij} = A\alpha^2\eta^{\alpha-2} \left[\frac{X_i X_j}{|X|^2} + \left(1 - \frac{c_1\eta}{|X|}\right) \left(\delta_{ij} - \frac{X_i X_j}{|X|^2}\right) \right],$$

em $c_1\eta \leq |X| \leq \eta$. Para um ponto da forma $\bar{X} = (|X|, 0, \dots, 0)$, temos

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= A\alpha^2\eta^{\alpha-2} \\ \theta_{ii} &= A\alpha^2\eta^{\alpha-2} \left(1 - \frac{c_1\eta}{|X|}\right) \quad \text{se } i > 1 \\ \theta_{ij} &= 0 \quad \text{se } i \neq j. \end{aligned}$$

Por invariância simétrica de θ e elipticidade do operador F , obtemos

$$F(D^2\theta(X)) \leq \Lambda \left[A\alpha^2\eta^{\alpha-2} + (N-1)A\alpha^2\eta^{\alpha-2} \left(1 - \frac{c_1\eta}{|X|}\right) \right] \leq \Lambda N A\alpha^2\eta^{\alpha-2}. \quad (3.5)$$

Lembrando que N é a dimensão do espaço. Contudo, na região $c_1\eta \leq |X| \leq \eta$, temos

$$2\sigma_0 \leq \theta(X) \leq \frac{A}{2}\eta^\alpha + 2\sigma_0.$$

Tendo em conta que a função B_1 definida em (2.4) é não-decrescente na região em questão,

$$\begin{aligned} \beta(\theta(X)) &\geq \gamma\theta(X)^{\gamma-1}B_1(2\sigma_0) \\ &\geq \gamma\theta(\eta)^{\gamma-1}B_1(2\sigma_0) \\ &\geq \gamma\left(\frac{A}{2}\eta^\alpha + 2\sigma_0\right)^{\gamma-1}B_1(2\sigma_0). \end{aligned}$$

Portanto, tomado $0 < A \ll 1$ suficientemente pequeno,

$$\gamma\left(\frac{A}{2}\alpha\eta^\alpha + 2\sigma_0\right)^{\gamma-1}B_1(2\sigma_0) > \frac{1}{2}\gamma(2\sigma_0)^{\gamma-1}B_1(2\sigma_0) > \Lambda N A \alpha^2 \eta^{\alpha-2}$$

e assim, obtemos a desigualdade pontual desejada,

$$F(D^2\theta) \leq \beta(\theta(X)),$$

na região $c_1\eta \leq |X| \leq \eta$. Desta vez, iremos nos ater à região $\eta \leq |X|$. Um cálculo simples nos mostra que,

$$\theta_{ij} = A\alpha [(\alpha - 2)|X|^{\alpha-4}X_iX_j + \delta_{ij}|X|^{\alpha-2}].$$

Então, em um ponto da forma $(|X|, 0, \dots, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= A\alpha(\alpha - 1)|X|^{\alpha-2} \\ \theta_{ii} &= A\alpha|X|^{\alpha-2} && \text{se } i > 1 \\ \theta_{ij} &= 0 && \text{se } i \neq j. \end{aligned}$$

Portanto, novamente por invariância simétrica de θ e a elipticidade do operador F , podemos escrever

$$F(D^2\theta(X)) \leq \Lambda [A\alpha(\alpha - 1) + (N - 1)A\alpha] |X|^{\alpha-2} \leq \Lambda N A \alpha \eta^{\alpha-2}. \quad (3.6)$$

Por outro lado, na região $\eta \leq |X|$, temos para $M \geq \sup_{X \in \Omega} |X|$, que

$$M^\alpha \geq |X|^\alpha - \frac{\eta^\alpha}{2} > 0,$$

e assim,

$$\beta(\theta(X)) \geq \gamma \left(A \left(|X|^\alpha - \frac{1}{2} \eta^\alpha \right) + 2\sigma_0 \right)^{\gamma-1} B(\theta(\eta)) > \gamma (AM^\alpha + 2\sigma_0)^{\gamma-1} B(\theta(\eta)),$$

Então, reajustando $A > 0$ suficientemente pequeno, se necessário, podemos assegurar que

$$AM^\alpha + 2\sigma_0 < 4\sigma_0,$$

e portanto,

$$\beta(\theta(X)) > \gamma (4\sigma_0)^{\gamma-1} B(\theta(\eta)).$$

Finalmente por 3.6 e pela desigualdade acima, bem como diminuindo o valor de $A > 0$ ainda mais, se necessário, iremos obter

$$F(D^2\theta(X)) \leq \Lambda N A \alpha |X|^{\alpha-2} < \gamma (4\sigma_0)^{\gamma-1} B(\theta(\eta)) \leq \beta(\theta(X)).$$

Assim segue (iii). Por construção (ii) é válido, e a prova da Proposição 3.1.1 está concluída. \square

A Proposição 3.1.1 nos fornece a existência de uma barreira apropriada numa escala unitária $\varepsilon = 1$. Para o fornecimento de uma sobresolução desejada para qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno, faremos uso do seguinte argumento: Fixado $\varepsilon > 0$, consideremos o operador elíptico totalmente não-linear

$$F_\varepsilon(\mathcal{M}) := \varepsilon^{2-\alpha} F(\varepsilon^{\alpha-2} \mathcal{M}).$$

Através de uma simples verificação é possível observar que F_ε é uniformemente elíptica e suas constantes de elipticidade são as mesma do operador F . A Proposição 3.1.1 aplicada para F_ε fornece uma função $C^{1,1}$, a qual denotaremos por $\theta = \theta(\varepsilon)$ e que satisfaz a seguinte desigualdade diferencial

$$F_\varepsilon(D^2\theta(X)) = \varepsilon^{2-\alpha} F(\varepsilon^{\alpha-2} D^2\theta(X)) \leq \beta_1(\theta(X)).$$

Finalmente, definamos

$$\theta_\varepsilon(X) := \varepsilon^\alpha \theta(\varepsilon^{-1}X), \tag{3.7}$$

onde, mais uma vez, α é o valor definido em (2.3). Além de tudo, verificamos θ_ε definida acima satisfaz

- ✓ $\theta_\varepsilon = 2\sigma_0 \varepsilon^\alpha$ em $B_{c_1 \varepsilon \eta}$;
- ✓ $\theta_\varepsilon \geq c_2 \eta^\alpha$ em $\Omega \setminus B_{\varepsilon \eta}$;

✓ $\theta_\varepsilon \in C^{1,1}(\Omega)$ satisfazendo a condição de sobresolução para (E_ε) .

Feito isso, estamos em condições de estabelecer a não-degenerescência forte de soluções mínimas para o problema singular perturbado (E_ε) .

Teorema 3.1.1 (Não-degenerescência Forte). *Seja $X_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$. Então existe duas constantes universais $c_0 > 0$ e $r_0 > 0$ tais que se $r < r_0$, então vale,*

$$\sup_{B_r(X_0)} u_\varepsilon \geq c_0 r^\alpha,$$

para α como em (2.3).

Demonstração. Dado $r < r_0$, construímos θ_ε para $\eta = r/\varepsilon$. Por minimalidade de u_ε ,

$$u_\varepsilon(Z) > \theta_\varepsilon(Z),$$

para algum ponto $Z \in \partial B_r(X_0)$. De fato, suponha por contradição que $u_\varepsilon \leq \theta_\varepsilon$ ao longo de ∂B_r . Defina

$$w_\varepsilon = \begin{cases} \min\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\} & \text{em } \overline{B_r}; \\ u_\varepsilon & \text{em } \Omega \setminus \overline{B_r}. \end{cases}$$

Então, w_ε é sobresolução de (E_ε) ; Contudo, em $B_{c_1 r}$, obtemos,

$$u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha > 2\sigma_0 \varepsilon^\alpha \equiv \theta_\varepsilon = w_\varepsilon,$$

o que contradiz a minimalidade de u_ε . Para concluir, temos

$$c_2 r^\alpha \leq \theta_\varepsilon(Z) < u_\varepsilon(Z) \leq \sup_{B_r} u_\varepsilon,$$

assim, o Teorema está provado. □

Um Corolário imediato do Teorema 3.1.1 combinado com o Corolário 2.1 é o controle superior e inferior de u_ε por r^α em $B_r \subset \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$.

Corolário 3.1. *Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante positiva universal $C = C(\Omega')$ tal que para $X_0 \in \Omega' \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$ e $r \leq r_0$,*

$$C^{-1} r^\alpha \leq \sup_{B_r(X_0)} u_\varepsilon \leq u_\varepsilon(X_0) + C u_\varepsilon(X_0)^{\gamma/2} r + C r^\alpha$$

Relembremos que fora definido a seguinte notação: $d_\varepsilon(X) = \text{dist}(X, \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\})$. Nosso próximo passo será mostrar que de fato u_ε cresce a uma taxa ótima relacionada à distância da fronteira, ou seja $\sim d_\varepsilon^\alpha$.

Teorema 3.1.2 (Crescimento ótimo). *Seja $X_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$. Então existe $c_0 > 0$ universal tal que*

$$u_\varepsilon(X_0) \geq c_0 d_\varepsilon(X_0)^\alpha.$$

Demonstração. Vamos supor por contradição que tal constante não existe. Assim, teríamos a existência de uma sequência de pontos $X_n \in \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$, com $d_n := d_\varepsilon(X_n) \rightarrow 0$ e

$$u_\varepsilon(X_n) \leq \frac{1}{d_n} d_n^\alpha.$$

Vamos definir,

$$v_n(Y) := \frac{1}{d_n^\alpha} u_\varepsilon(X_n + d_n Y).$$

A função $v_n \geq 0$ está definida em B_1 , e pela regularidade $C^{1,\alpha-1}$ de u_ε , Teorema 2.3.1, v_n é limitada $C_{loc}^{1,\alpha-1}(B_1)$. Facilmente podemos verificar que v_n é uma solução mínima para

$$F_n(D^2 v_n) = \gamma v_n^{1-\gamma} B_{\frac{\varepsilon}{d_n}}(v_n) \quad \text{em } B_1, \quad (3.8)$$

onde, $F_n(\mathcal{M}) := d_n^{2-\alpha} F(d_n^{\alpha-2} \mathcal{M})$ para todo $\mathcal{M} \in \text{Sym}(\mathbb{N})$ onde $B_{\frac{\varepsilon}{d_n}}$ é uma aproximação suave de t^+ estabelecido em (2.4). Dessas várias definições, podemos constatar que

$$B_{\frac{\varepsilon}{d_n}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon}{d_n}\right)^\alpha, \\ 1 & \text{para } t \leq (1 - \sigma_0) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d_n}\right)^\alpha. \end{cases} \quad (3.9)$$

Como F_n é uniformemente elíptica com as mesmas constantes de elipticidade do operador F , podemos aplicar o Teorema 3.1.1 à v_n , e obtermos

$$\sup_{B_\kappa} v_n \geq c_0 \kappa^\alpha, \quad (3.10)$$

para uma constante universal c_0 e para $\kappa > 0$ qualquer. Portanto, da regularidade $C^{1,\alpha-1}$ para v_n (veja a prova do corolário (2.1)), temos

$$v_n(X) \leq v_n(0) + C v_n(0)^{\frac{\gamma}{2}} |X| + C |X|^\alpha,$$

para uma constante universal $C > 0$. Em particular, para $\kappa_0 \ll 1$,

$$v_n(X) \leq v_n(0) + v_n(0)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\sigma_0}{10}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon + \frac{\sigma_0}{10} \varepsilon^\alpha, \quad \text{em } B_{\kappa_0}.$$

Se tomarmos $n \gg 1$, teremos $v_n(0) \leq \frac{9}{10}\sigma_0\varepsilon^\alpha$ e assim,

$$v_n(X) \leq \sigma_0\varepsilon^\alpha \quad \text{in } B_{\kappa_0}.$$

Em vista da equação (3.8) e de (3.9), vemos que

$$F_n(D^2v_n) = 0 \quad \text{em } B_{\kappa_0},$$

para $n \gg 1$. Porém, pela desigualdade clássica para o caso homogêneo, veja [6], e a não-degenerescência forte, obtida em (3.10)

$$c_0 \left(\frac{\kappa_0}{2} \right)^\alpha \leq \sup_{B_{\frac{\kappa_0}{2}}} v_n \leq C v_n(0) = o(1),$$

o que por fim, nos fornece uma contradição. \square

Uma consequência relevante do Teorema 3.1.2 é o controle completo da solução minimal $u_\varepsilon(X)$ em termos de $d_\varepsilon(X)^\alpha$.

Corolário 3.2. *Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante universal $C = C(\Omega')$ tal que para $X \in \Omega' \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$ e $\varepsilon \leq d_\varepsilon(X)$,*

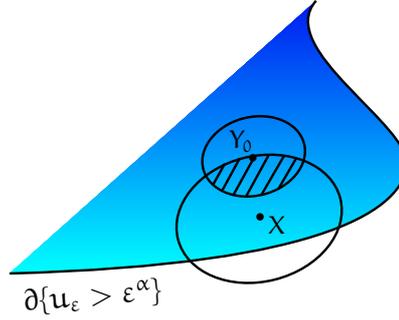
$$C d_\varepsilon(X)^\alpha \leq u_\varepsilon(X) \leq C^{-1} d_\varepsilon(X)^\alpha.$$

Demonstração. A desigualdade inferior segue imediatamente do Teorema 3.1.2. Agora para $Z \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$, segue do Corolário 2.1 que,

$$u_\varepsilon(X) \leq \varepsilon^\alpha + C\varepsilon^{\alpha\frac{\gamma}{2}} d_\varepsilon(X) + C d_\varepsilon(X)^\alpha \leq C d_\varepsilon(X)^\alpha,$$

o que prova o presente resultado. \square

O controle geométrico obtido no Corolário 3.2 nos fornece uma densidade uniformemente positiva da região $\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$. De uma forma mais elucidativa, para qualquer bola $B_\rho(X)$ com $X \in \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$, a *área ocupada* por $\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\} \cap B_\rho(X)$ é no mínimo $C\%$ da *área total* da bola $B_\rho(X)$, para algum $0 < C \leq 100$ universalmente determinado (veja figura 3.3).


 Fig. 3.3: Densidade positiva do conjunto $\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$

Corolário 3.3. *Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe constante $0 < c \leq 1$, dependendo somente de Ω' e parâmetros universais, tal que para quaisquer $X \in \Omega' \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$ e $\varepsilon \ll \delta$, temos*

$$\frac{\mathcal{L}^N(B_\delta(X) \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\})}{\mathcal{L}^N(B_\delta)} \geq c.$$

Demonstração. Pela não-degenerescência forte existe $Y_0 \in \overline{B_\delta(X)} \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$ tal que

$$u_\varepsilon(Y_0) \geq c_0 \delta^\alpha.$$

Por regularidade ótima e o Corolário 3.1, obtemos, para $Y \in B_{\tau\delta}(Y_0) \cap B_\delta(X)$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(Y) &\geq u_\varepsilon(Y_0) - |\nabla u_\varepsilon(Y_0)| \cdot |Y - Y_0| - C_1 |Y - Y_0|^\alpha \\ &\geq c_0 \delta^\alpha - C_1 \delta^{\alpha - \frac{\gamma}{2}} |Y - Y_0| - C_1 |Y - Y_0|^\alpha \\ &\geq (c_0 - C_1(\tau + \tau^\alpha)) \delta^\alpha \\ &> \varepsilon^\alpha, \end{aligned}$$

para $0 < \tau \ll 1$ escolhido universalmente pequeno. Concluindo,

$$\mathcal{L}^N(B_\delta(X) \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}) \geq \mathcal{L}^N(B_\delta(X) \cap B_{\tau\delta}(Y_0)) \geq c \delta^N.$$

para uma certa constante universal $c > 0$. □

3.2 Desigualdades de Harnack

Em relação à teoria de equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem, é sabido que desigualdades de Harnack estão entre os seus temas centrais de estudo da

teoria de EDPs. Para soluções de viscosidade não negativas de equações totalmente não-lineares heterogêneas, isto é,

$$F(D^2v) = f(X), \quad \text{em } Q_1,$$

Krylov-Safonov [28] e Caffarelli [6] (veja também [3], Capítulo 4) provaram a seguinte desigualdade ótima de Harnack:

$$\sup_{Q_{1/2}} v \leq C(n, \lambda, \Lambda) \left(\inf_{Q_{1/2}} v + \|f\|_{L^n(Q_1)} \right). \quad (3.11)$$

Como mencionado nos capítulos anteriores, uma das maiores dificuldades é de fato lidar com equações singulares, como em (5), onde o lado direito dessa equação se torna ilimitado estando cada vez mais próximo de uma certa região singular. Em particular, se tentarmos observar o termo singular $\gamma u^{\gamma-1}(X)$ como o lado direito da equação diferencial acima, isto é, $f(X)$, a desigualdade clássica de Harnack (3.11) não nos dará informações universais próximo da fronteira livre.

O principal objetivo desta seção é estabelecer, estimativas do tipo Harnack Homogênea, uniforme em ε , para soluções da equação (E_ε) .

Teorema 3.2.1 (Desigualdade L^1 -Harnack). *Dado $\Omega' \Subset \Omega$, $X_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\} \cap \Omega'$. Então*

$$\int_{B_\rho(X_0)} u_\varepsilon \, dx \geq c\rho^\alpha,$$

para uma constante universal $c > 0$, que independe de ε .

Demonstração. Do Lema 3.1.1, existem $Y_0 \in \overline{B_\rho(X_0)} \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$ e algum $c_0 > 0$ universal, tal que

$$u_\varepsilon(Y_0) \geq c_0\rho^\alpha.$$

Como na prova do Corolário 3.3, para $\theta \ll 1$ universal, obtemos

$$u_\varepsilon(Y) \geq C\rho^\alpha \quad \text{em } B_{\theta\rho}(Y_0).$$

Finalmente,

$$\int_{B_\rho(X_0)} u_\varepsilon \, dx \geq C_N \int_{B_\rho(X_0) \cap B_{\theta\rho}(Y_0)} u_\varepsilon \, dx \geq C\rho^\alpha,$$

para $C > 0$ uma constante universal. Assim, a prova está concluída. \square

Nosso próximo resultado é uma desigualdade de Harnack homogênea para bolas que tangenciam a fronteira livre aproximada $\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$.

Teorema 3.2.2 (Desigualdade de Harnack em bolas tangentes). *Seja $X_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$ e $\varepsilon \leq d := d_\varepsilon(X_0)$. Então, existe uma constante universal $C > 0$ tal que*

$$\sup_{B_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_\varepsilon \leq C \inf_{B_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_\varepsilon.$$

Demonstração. Seja $\xi_0, \xi_1 \in \overline{B_{\frac{d}{2}}(X_0)}$, tal que

$$\inf_{B_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_\varepsilon = u(\xi_0) \quad \text{e} \quad \sup_{B_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_\varepsilon = u(\xi_1).$$

Como $d_\varepsilon(\xi_0) \geq \frac{d}{2}$, por não-degenerescência

$$u_\varepsilon(\xi_0) \geq C_1 d^\alpha. \tag{3.12}$$

Por outro lado, usando o corolário 3.1, obtemos

$$u_\varepsilon(\xi_1) \leq u_\varepsilon(X_0) + C_2 u_\varepsilon(X_0)^{\frac{\gamma}{2}} d + C_2 d^\alpha.$$

Como na prova do Corolário 2.1, para $Y \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$, temos que

$$u_\varepsilon(X_0) \leq u_\varepsilon(Y) + C_2 u_\varepsilon(Y)^{\frac{\gamma}{2}} d + C_2 d^\alpha \leq C_3 d^\alpha.$$

Assim, pelas três últimas desigualdades, obtemos

$$\sup_{B_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_\varepsilon \leq C \inf_{B_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_\varepsilon.$$

para uma constante $C > 0$ que independe da solução u_ε como também de ε . □

Estimativas de Hausdorff da Fronteira Livre

Nesta seção, iremos mostrar certas propriedades uniformes da medida geométrica das $\sim \varepsilon^\alpha$ -superfícies de nível de \mathbf{u}_ε . Estas superfícies aproximam a fronteira livre limite $\mathfrak{F} := \partial\{\mathbf{u} > 0\} \cap \Omega$, onde \mathbf{u} é a função limite desejada. A partir desta seção trabalharemos sob a seguinte condição estrutural adicional para o operador F :

Definição 4.1. Dizemos que um operador elíptico uniforme $F: \text{Sym}(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ é assintoticamente côncavo se existe uma matriz positiva definida $\mathcal{F} = (f_{ij})_{ij}$ e uma constante não negativa $C_F \geq 0$ tal que

$$f_{ij}\mathcal{M}_{ij} - F(\mathcal{M}) \geq -C_F, \quad (\text{AC})$$

para toda matriz $\mathcal{M} \in \text{Sym}(\mathbf{N})$.

Inicialmente, iremos indicar que, de fato, a hipótese (AC) é uma condição assintótica quando $\|\mathcal{M}\| \gg 1$, que é suficiente para $\|\mathcal{M}\| \rightarrow +\infty$. Ela representa uma espécie de condição de concavidade no infinito para F . No caso de operadores côncavos, $C_F = 0$. A condição estrutural (AC) surge das considerações de alguns trabalhos recentes no que diz respeito ao operador *recessão*

$$F^*(\mathcal{M}) := \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu F(\mu^{-1}\mathcal{M}).$$

O operador limite F^* deve ser interpretado como a equação tangente do escalonamento elíptico natural em F . Por exemplo, para um número relevante de operadores elípticos, é possível verificar a existência do limite

$$\mathbf{b}_{ij} := \lim_{\|\mathcal{M}\| \rightarrow \infty} F_{ij}(\mathcal{M}).$$

Nesse caso, $F^*(\mathcal{M}) = \text{Tr}(\mathbf{b}_{ij}\mathcal{M})$ e assim (AC) é automaticamente satisfeita. Um exemplo particularmente interessante é a classe dos operadores da forma

$$F_\iota(\mathbf{M}) = f_\iota(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) := \sum_{j=1}^N (1 + \lambda_j^\iota)^{1/\iota},$$

onde ι é um número natural par. Para esta família de operadores, temos $F_\iota^* = \Delta$ e a condição (AC) está satisfeita.

Em [37], Ricarte e Teixeira provaram que o operador recessão F^* possui a condição de fronteira livre para problemas de cavitação totalmente não-lineares. Para enfatizar ainda mais tal condição, em [41], estimativas de regularidade de soluções para $F(X, D^2\mathbf{u}) = f(X)$ são bem estabelecidas via propriedades da função recessão.

Um outro exemplo que reforça a condição de concavidade no infinito, vem da classe de operadores que satisfazem a condição

$$F(\lambda\mathbf{M}) \leq \lambda F(\mathbf{M}) + \omega(\mathbf{M})$$

para todo $0 < \lambda < 1$, onde $\lim_{\|\mathcal{M}\| \rightarrow \infty} \omega(\mathbf{M}) = 0$ e $F(0) = 0$. A definição (AC) é imediatamente satisfeita para esta condição.

Antes de continuarmos, iremos fazer algumas observações, para uma melhor organização de argumentos sistemáticos que irão surgir dentro de algumas demonstrações.

Observação 4.1. *Dados $X_0 \in \{\mathbf{u}_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$, onde $\mathbf{u}_\varepsilon(X_0) = C_1\varepsilon^\alpha$ para algum $C_1 > 1$, $\varepsilon \ll \rho$ e ρ universalmente pequeno, temos da regularidade ótima, que em $B_\rho(X_0)$, para $\rho \ll 1$ a ser ajustado em breve, a seguinte estimativa:*

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1} \geq (C_1\varepsilon^\alpha + C_2(C_1\varepsilon^\alpha)^{\frac{\gamma}{2}}\rho + C_2\rho^\alpha)^{\gamma-1}.$$

Além disso, se ε é tomado pequeno de modo que

$$\varepsilon^\alpha < \frac{\rho^\alpha}{C_1}$$

e o raio ρ , escolhido universalmente pequeno, para que tenhamos

$$(1 + 2C_2)\rho^\alpha \leq \sqrt[\gamma-1]{\frac{2}{\gamma}C_F}$$

então obtemos a seguinte desigualdade

$$\gamma\mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1} \geq 2C_F \quad \text{em } B_\rho(X_0),$$

para $C_F > 0$ como em (AC). Além disso, pelo fato de

$$(1 - \sigma_0)\varepsilon^\alpha < C_1\varepsilon^\alpha,$$

temos, (veja (2.5) e (2.4))

$$F(D^2\mathbf{u}_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) = \gamma\mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1}, \quad \text{em } B_\rho(X_0).$$

Como conclusão, obtemos que \mathbf{u}_ε é uma f_{ij} -função subharmônica em $B_\rho(X_0)$ para $\varepsilon \ll 1$, i.e.,

$$f_{ij}D_{ij}\mathbf{u}_\varepsilon \geq F(D^2\mathbf{u}_\varepsilon) - C_F = \gamma\mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1} - 2C_F \geq 0.$$

Estamos agora prontos a estabelecer a primeira estimativa tipo Hausdorff para a superfície de nível $\{\mathbf{u}_\varepsilon \sim \varepsilon^\alpha\}$.

Lema 4.1. *Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante C dependendo de Ω' e parâmetros universais tais que, para $X_0 \in \Omega' \cap \{\mathbf{u}_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$, com $\mathbf{u}_\varepsilon(X_0) = C_1\varepsilon^\alpha$, onde $C_1 > 1$ e $\varepsilon \ll \rho$ para ρ universalmente pequeno, temos*

$$\int_{\{C_1\varepsilon^\alpha < \mathbf{u}_\varepsilon < \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0)} \mathbf{u}_\varepsilon^{-\gamma} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 dX \leq C\mu\rho^{N-1},$$

para quase todo $0 < \rho \ll 1$.

Demonstração. Iniciamos a prova verificando que para ε e ρ universalmente pequenos, vale a seguinte desigualdade diferencial:

$$\sum_{ij} f_{ij} D_{ij} \left(\mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \right) \geq 0 \quad \text{em } \{\mathbf{u}_0 > 0\} \cap B_\rho(X_0). \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{F} = (f_{ij})_{ij}$, como na Definição (4.1). Para mostrar tal estimativa, faremos uso do seguinte argumento: fixe um operador linear não-singular $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{ij} f_{ij} D_{ij} \left(\mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \right) &= \sum_{ij} f_{ij} D_{ij} \left(\left(\mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \circ A \right) \circ A^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-2} \text{Tr} \left(A^{-1} \mathcal{F} (A^{-1})^T \nabla (\mathbf{u}_\varepsilon \circ A) \otimes \nabla (\mathbf{u}_\varepsilon \circ A) \right) \circ A^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1} \text{Tr} \left(A^{-1} \mathcal{F} (A^{-1})^T D^2 (\mathbf{u}_\varepsilon \circ A) \right) \circ A^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Além disso, $\mathbf{u}_\varepsilon \circ A$ resolve a seguinte equação uniformemente elíptica totalmente não-linear,

$$F_A(D^2\mathbf{v}) = \gamma\mathbf{v}^{\gamma-1},$$

onde o operador F_A é dado por

$$F_A(\mathcal{M}) := F((A^{-1})^\top \mathcal{M} A^{-1}).$$

Facilmente podemos verificar que F_A é de fato uniformemente elíptica, com as mesmas constantes de elipticidade do operador F . Assim, pela regularidade ótima, Teorema 2.3.1, obtemos

$$|\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon \circ A)|^2 \leq C(\mathbf{u}_\varepsilon \circ A)^\gamma.$$

Assim,

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) |\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon \circ A)|^2 \geq \frac{C}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) (\mathbf{u}_\varepsilon \circ A)^\gamma. \quad (4.3)$$

Da condição estrutural (AC),

$$\begin{aligned} \text{Tr}((A^{-1})^\top \mathcal{F} A^{-1} D^2(\mathbf{u}_\varepsilon \circ A)) &\geq F((A^{-1})^\top \cdot D^2(\mathbf{u}_\varepsilon \circ A) \cdot A^{-1}) - C_F \\ &\geq F((D^2 \mathbf{u}_\varepsilon) \circ A) - C_F \\ &\geq \gamma(\mathbf{u}_\varepsilon \circ A)^{\gamma-1} - C_F. \end{aligned} \quad (4.4)$$

pois $D^2(\mathbf{u}_\varepsilon \circ A) = (A^\top \cdot D^2 \mathbf{u}_\varepsilon \cdot A) \circ A$. Portanto, escolhendo A satisfazendo

$$\mathcal{F} = \frac{1}{C} A A^\top$$

onde $C > 0$ é a constante da desigualdade (4.3), bem como combinando (4.3), (4.4) e (4.2), obtemos,

$$\begin{aligned} \sum_{ij} f_{ij} D_{ij}(\mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}) &= \frac{C^{-1}}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-2} |\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon \circ A)|^2 \circ A^{-1} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1} (\gamma \mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1} - C_F) \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-2+\gamma} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1} (\gamma \mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1} - C_F) \\ &= \frac{1}{\alpha} \mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\left(\frac{1}{\alpha} + \gamma - 1 \right) \mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1} - C_F \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \mathbf{u}_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\frac{\gamma}{2} \mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1} - C_F \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Finalmente, da Observação 4.1, concluímos que para ε e ρ universalmente pequenos, a inequação diferencial (4.1) é de fato verdadeira.

Agora iremos dar continuidade a prova do Lema 4.1. Defina a seguinte função corte,

$$\Phi = \begin{cases} \varepsilon \sqrt[\alpha]{C_1} & \text{em } \{u_\varepsilon \leq C_1 \varepsilon^\alpha\}; \\ u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} & \text{em } \{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon \leq \mu^\alpha\}; \\ \mu & \text{em } \{u_\varepsilon > \mu^\alpha\}. \end{cases}$$

Claramente temos,

$$\int_{\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon \leq \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0)} f_{ij}(u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_i \cdot (u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_j dX = \int_{B_\rho(X_0)} f_{ij} \Phi_i(u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_j dX. \quad (4.6)$$

Usando a clássica fórmula de integração por partes,

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(X_0)} f_{ij} \Phi_i(u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_j dX &= - \int_{B_\rho(X_0)} \Phi \cdot f_{ij}(u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_{ij} dX \\ &+ \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho(X_0)} f_{ij} \Phi(u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_i \cdot (x^j - x_0^j) d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Além disso, da desigualdade obtida em (4.1), obtemos

$$\int_{\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon \leq \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0)} f_{ij}(u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_i (u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_j dX \leq \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho(X_0)} \Phi \cdot f_{ij}(u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})_i \cdot (x^j - x_0^j) d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Aplicando as derivadas dos integrandos da estimativa acima, podemos escrevê-la da seguinte forma,

$$\int_{\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon \leq \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0)} f_{ij} u_\varepsilon^{-\gamma} D_i u_\varepsilon D_j u_\varepsilon dx \leq \frac{\alpha}{\rho} \int_{\partial B_\rho(X_0)} \Phi \cdot f_{ij} u_\varepsilon^{-\frac{\gamma}{2}} D_i u_\varepsilon \cdot (x^j - x_0^j) d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Finalmente, da elipticidade uniforme e da regularidade ótima de u_ε , temos

$$\int_{\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon \leq \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0)} u^{-\gamma} |\nabla u|^2 dX \leq C \mu \rho^{N-1},$$

como desejado. □

Para o próximo resultado, iremos recordar a seguinte notação clássica: dado um conjunto $G \subset \mathbb{R}^N$, iremos denotar

$$\mathcal{N}_\delta(G) := \{X \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(X, G) < \delta\}.$$

Na sequência, vamos mostrar o principal passo com respeito a obtenção da limitação uniforme da \mathcal{H}^{N-1} -medida de Hausdorff das superfícies de nível $\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$.

Lema 4.2. *Fixado $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante C^* que depende apenas de Ω' e parâmetros universais tais que se,*

$$C^* \mu \leq 2\rho \leq \frac{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)}{10}$$

então, para $\rho, \mu, \varepsilon > 0$ universalmente pequenos com $\mu \ll \rho$, temos

$$\mathcal{L}^N(\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0)) \leq \bar{C} \mu \rho^{N-1},$$

onde novamente $\bar{C} = \bar{C}(\Omega')$ depende apenas de Ω' e constantes universais, com $X_0 \in \Omega' \cap \partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\}$, $d_\varepsilon(X_0) \leq \frac{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)}{10}$ e $C_1 > 1$.

Demonstração. Seja $\{B_j\}$ uma família finita de bolas que formam uma cobertura para $\partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\} \cap B_\rho(X_0)$, com raios constantes iguais a $C^* \mu$ e centro $X_j \in \partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\} \cap B_\rho(X_0)$, onde C^* será escolhida *a posteriori*. Pelo Lema Heine-Borel, existe uma constante universal m tal que

$$\sum_j \chi_{B_j} \leq m.$$

Além disso, podemos assumir que

$$\bigcup_j B_j \subset \left[\mathcal{N}_{\frac{d}{8}}(\Omega') \cap B_{4\rho}(X_0) \right].$$

onde $d := \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Como na prova do Lema 4.1, considere

$$\Phi = \begin{cases} \varepsilon \sqrt[\alpha]{C_1} & \text{em } \{u_\varepsilon \leq C_1 \varepsilon^\alpha\}; \\ u_\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} & \text{em } \{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon \leq \mu^\alpha\}; \\ \mu & \text{em } \{u_\varepsilon > \mu^\alpha\}. \end{cases}$$

Iremos agora afirmar que é possível encontrar, para cada j , bolas B_j^1 e B_j^2 , ambas contidas em B_j , satisfazendo:

- (1) os raios de B_j^1 e B_j^2 são da ordem μ (sob uma contração universal)
- (2) $\Phi \geq \sqrt[\alpha]{\frac{3}{4}} \mu$ em B_j^1 e $\Phi \leq \sqrt[\alpha]{\frac{2}{3}} \mu$ em B_j^2 .

Para mostrar a afirmação acima, iremos argumentar da seguinte forma: tome $X_1 \in \frac{1}{4} \overline{B_j}$,

tal que

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X}_1) = \sup_{\frac{1}{4}B_j} \mathbf{u}_\varepsilon.$$

Pela não-degenerescência forte,

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X}_1) \geq c_0 \left(\frac{C^* \mu}{4} \right)^\alpha \geq \mu^\alpha,$$

caso $C^* \gg 1$ seja tomada suficientemente e universalmente grande. Da última estimativa obtida na prova do Corolário 2.1, dado $\mathbf{X} \in B_j$, obtemos

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X}) \geq \mu^\alpha - C_2 \left[\sup_{B_j} \mathbf{u}_\varepsilon \right]^{\frac{\gamma}{2}} \cdot |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}| - C_2 |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}|^\alpha. \quad (4.8)$$

Pelo fato de que $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X}_j) = C_1 \varepsilon^\alpha < \mu^\alpha$ e fazendo uso novamente do Corolário 2.1, temos

$$\begin{aligned} \sup_{B_j} \mathbf{u}_\varepsilon &\leq \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X}_j) + C_2 C^* \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X}_j)^{\frac{\gamma}{2}} \mu + C_2 (C^* \mu)^\alpha \\ &\leq (1 + C_2 C^* + C_2 (C^*)^\alpha) \mu^\alpha. \end{aligned}$$

Combinando a estimativa acima com (4.8) e tomando

$$|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1| < \frac{1}{2C_2} (1 + C_2 C^* + C_2 (C^*)^\alpha)^{-\frac{\gamma}{2}} \mu,$$

obtemos

$$\Phi^\alpha(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{X}) \geq \frac{3}{4} \mu^\alpha \quad \text{em } B_j^1 := B_{r_j^1}(\mathbf{X}_1)$$

onde $r_j^1 := \tilde{C}_1 \mu$ e

$$\tilde{C}_1 := \frac{1}{4C_2} (1 + C_2 C^* + C_2 (C^*)^\alpha)^{-\frac{\gamma}{2}},$$

é uma constante universal. Para finalizar a prova desta primeira afirmação, devemos escolher C^* grande o suficiente, de modo que se tenha

$$\tilde{C}_1 \ll C^* \implies B_j^1 \subset B_j.$$

Observe que essa escolha está sendo feita de modo universal. Similarmente, para $B_j^2 := B_{r_j^2}(\mathbf{X}_j)$ onde $r_j^2 := \tilde{C}_2 \mu \ll C^* \mu$, temos

$$\Phi(\mathbf{X})^\alpha = \mathbf{u}_\varepsilon \leq \frac{2}{3} \mu^\alpha.$$

Da propriedade (2) provada acima, podemos afirmar a existência de uma constante

universal $\kappa > 0$ tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$|\Phi - m_j| > \kappa\mu,$$

em no mínimo uma das bolas $B_j^1, B_j^2 \subset B_j$, onde

$$m_j := \int_{B_j} \Phi(X) dX.$$

De fato, caso tal afirmação não ocorresse, existiriam duas seqüências $X_k \in B_j^1$ e $Y_k \in B_j^2$, tais que

$$\sqrt[\alpha]{\frac{3}{4}} - \sqrt[\alpha]{\frac{2}{3}} \leq \frac{\Phi(X_k) - \Phi(Y_k)}{\mu} \leq \frac{|\Phi(X_k) - m_j| + |\Phi(Y_k) - m_j|}{\mu} \rightarrow 0, \quad (4.9)$$

tomando $k \rightarrow \infty$, ou seja, uma contradição.

Portanto, pela clássica desigualdade de Poincaré em bolas, temos

$$\kappa^2 \mu^2 \leq \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} |\Phi - m_j|^2 dX \leq C_3 \mu^2 \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} |\nabla \Phi|^2 dX,$$

e assim,

$$\int_{\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < \mu^\alpha\} \cap B_j} u_\varepsilon^{-\gamma} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \geq C_4 |B_j|.$$

Além disso, por não-degenerescência, para todo $Y \in \{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0)$, temos

$$C_5 d_\varepsilon(Y)^\alpha \leq u_\varepsilon(Y) \leq \mu^\alpha.$$

Portanto,

$$\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0) \subset \mathcal{N}_{\frac{1}{C_6} \mu}(\partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\} \cap B_{2\rho}(X_0)),$$

para $C_6 = \sqrt[\alpha]{C_5}$. Então, para $\mu \ll \rho$, e $C^* \gg 1$, ambos universais,

$$\mathcal{N}_{\frac{1}{C_6} \mu}(\partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\} \cap B_{2\rho}(X_0)) \subset \bigcup 2B_j \subset B_{4\rho}(X_0),$$

assim,

$$\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0) \subset \bigcup 2B_j \subset B_{4\rho}(X_0). \quad (4.10)$$

Finalmente, aplicando o Lema 4.1 e fazendo uso das inclusões acima, temos

$$\begin{aligned}
C_7 \mu \rho^{N-1} &\geq \int_{B_{4\rho}(X_0) \cap \{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < \mu^\alpha\}} u_\varepsilon^{-\gamma} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{m} \sum \int_{2B_j \cap \{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < \mu^\alpha\}} u_\varepsilon^{-\gamma} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\
&\geq \frac{C_4}{m} \sum |B_j| \\
&\geq \frac{C_4}{m} |B_\rho(X_0) \cup \{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < \mu^\alpha\}|,
\end{aligned}$$

onde C_7 e C_4 são constantes universais, que completam a prova do Lema. \square

Na sequência, relembremos a definição da δ -densidade.

Definição 4.2. Dado um subconjunto $G \subset \mathbb{R}^N$, dizemos que G tem a δ -propriedade de densidade em Ω para $0 < \delta < 1$, se existe $\tau > 0$ tal que

$$\frac{\mathcal{L}^N(B_\delta(X) \cap A)}{\mathcal{L}^N(B_\delta(X))} \geq \tau$$

para todo $X \in \partial G \cap \Omega$. Se a propriedade acima é válida para qualquer $0 < \delta < 1$, dizemos que G tem densidade uniforme em Ω ao longo de ∂G .

Abaixo iremos fazer uso de um resultado, clássico da teoria da medida.

Lema 4.3. Dado um conjunto aberto $A \Subset \Omega$, temos que:

a) Se existe δ tal que A tem a δ -propriedade de densidade, então existe uma constante $C = C(\tau, N)$, onde:

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial A) \cap B_\rho(X)| \leq \frac{1}{2^N \tau} |\mathcal{N}_\delta(\partial G) \cap B_\rho(X) \cap A| + C \delta \rho^{N-1}$$

com $X \in \partial A \cap \Omega$ e $\delta \ll \rho$.

b) Se A tem densidade uniforme em Ω ao longo de A , então $|\partial A \cap \Omega| = 0$.

Com isso, estamos prontos para afirmar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.0.3. Dado $\Omega' \Subset \Omega$ existe uma constante universal $C = C(\Omega') > 0$, tal que

$$\mathcal{L}^N(\mathcal{N}_\mu(\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\}) \cap B_\rho(X_0)) \leq C \mu \rho^{N-1},$$

onde, $C_1 > 1$, $X_0 \in \Omega' \cap \partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\}$, $d_\varepsilon(X_0) < \frac{1}{10} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $\mu \ll \rho$ com ρ universalmente pequeno e $C_1 \varepsilon^\alpha < \mu^\alpha$. Em particular,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\} \cap B_\rho(X_0)) \leq C \rho^{N-1}.$$

Demonstração. Por uma pequena adaptação na estimativa obtida no Corolário 3.3, obtemos

$$\frac{\mathcal{L}^N(B_\mu(X) \cap \{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\})}{\mathcal{L}^N(B_\mu(X))} \geq C_2,$$

para $X \in \partial\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}$. Concluimos que, $\partial\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}$ tem a μ -propriedade de densidade, e pelo Lema 4.3, para uma constante universal $M > 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^N(\mathcal{N}_\mu(\partial\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \cap B_\rho(X_0)) &\leq \frac{1}{2^N C_2} \mathcal{L}^N(\mathcal{N}_\mu(\partial\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \cap B_\rho(X_0) \cap \{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \\ &\quad + M \mu \rho^{N-1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Do Corolário 2.1, dado $Y \in \mathcal{N}_\mu(\partial\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \cap B_\rho(X_0) \cap \{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}$ e $Z \in \partial\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}$, podemos estimar

$$\begin{aligned} u(Y) &\leq u(Z) + C_3 u(Z)^{\frac{\gamma}{2}} |Z - Y| + C_3 |Z - Y|^\alpha \\ &\leq \mu^\alpha + C_3 \mu^{\alpha \frac{\gamma}{2}} \mu + C_3 \mu^\alpha \\ &\leq D \mu^\alpha, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade, vem de $C_1 \varepsilon^\alpha < \mu$. Assim, verificamos que existe $D > 0$ universal, tal que

$$\mathcal{N}_\mu(\partial\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \cap B_\rho(X_0) \cap \{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\} \subset \{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < D \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0). \tag{4.12}$$

Finalmente, do Lema 4.2, concluimos que

$$\mathcal{L}^N(\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon < D \mu^\alpha\} \cap B_\rho(X_0)) \leq C_4 \mu \rho^{N-1}, \tag{4.13}$$

assim, combinando (4.11), (4.12) e (4.13) obtemos,

$$\mathcal{L}^N(\mathcal{N}_\mu(\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \cap B_\rho(X_0)) \leq C_4 \mu \rho^{N-1}.$$

Para concluir a prova da estimativa da medida de Hausdorff \mathcal{H}^{N-1} , seja $\{B_j\}$ uma cobertura de $\partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\} \cap B_\rho(X_0)$, onde cada bola está centrada em $\partial\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\} \cap B_\rho(X_0)$ com raios iguais a μ . Podemos escrever

$$\bigcup B_j \subset \mathcal{N}_\mu(\{C_1 \varepsilon^\alpha < u_\varepsilon\}) \cap B_{\rho+\mu}(X_0).$$

Portanto, existem constantes dimensionais $C_5, C_6 > 0$, tais que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\mu^{N-1}(\partial\{C_1\varepsilon^\alpha < \mathbf{u}_\varepsilon\} \cap B_\rho(\mathbf{X}_0)) &\leq C_5 \sum \text{Area}(\partial B_j) \\
&= \frac{C_5}{\mu} \sum \mathcal{L}^N(B_j) \\
&\leq \frac{C_6}{\mu} \mathcal{L}^N(\mathcal{N}_\mu(\{C_1\varepsilon^\alpha < \mathbf{u}_\varepsilon\}) \cap B_{\rho+\mu}(\mathbf{X}_0)) \\
&\leq C_6 C_4 (\rho + \mu)^{N-1} = C_6 C_4 \rho^{N-1} + o(1)
\end{aligned}$$

Por fim, tomando $\mu \rightarrow 0$, conseguimos finalizar a prova do Teorema. □

Capítulo 5

O problema de fronteira livre limite

Conteúdo

5.1 O problema limite	43
5.2 Estimativas geométricas da fronteira livre	49

5.1 O problema limite

Nesta seção, iremos abordar o problema de fronteira livre da equação totalmente não linear obtida quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Nosso último objetivo será encontrar uma solução para o problema de fronteira livre (3), que goza de todas as propriedades geométricas e analíticas desejadas.

Nossa análise começa pela compacidade de soluções mínimas da equação (E_ε) . De fato, o Teorema 2.3.1 implica que, para qualquer $\Omega' \Subset \Omega$,

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{C^{1, \frac{\gamma}{2-\gamma}}(\Omega')} \leq K, \tag{5.1}$$

para algum K independente de ε . Além disso, $\{\mathbf{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma sequência compacta $C^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e a menos de uma subsequência,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}_\varepsilon =: \mathbf{u}_0. \tag{5.2}$$

Claramente, de (5.1), a função limite \mathbf{u}_0 está em $C^{1, \frac{\gamma}{2-\gamma}}_{\text{loc}}(\Omega)$. Ademais, esta seção será devotada ao estudo da função limite \mathbf{u}_0 e o problema de fronteira livre que ela resolve.

Por questões de conveniência para esta leitura, iremos à seguir, convencionar as

seguintes notações:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_0 > 0\} &:= \{x \in \Omega \mid \mathbf{u}_0(x) > 0\}, \\ \mathfrak{F}(\mathbf{u}_0) &:= \partial\{\mathbf{u}_0 > 0\} \cap \Omega, \\ \mathbf{d}_0(X) &:= \text{dist}(X, \mathfrak{F}(\mathbf{u}_0)). \end{aligned}$$

O próximo Teorema recupera a equação totalmente não-linear satisfeita por \mathbf{u}_0 no seu conjunto de positividade, bem como o seu comportamento próximo à fronteira livre $\mathfrak{F}(\mathbf{u}_0)$.

Teorema 5.1.1. *A função limite \mathbf{u}_0 definida em (5.2) é uma solução de viscosidade para*

$$F(D^2\mathbf{u}) = \gamma\mathbf{u}^{\gamma-1} \quad \text{em } \{\mathbf{u} > 0\}. \quad (5.3)$$

Além disso, para um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$ fixado, existe uma constante $C = C(\Omega')$ que depende apenas de Ω' e constantes universais tais que para qualquer $X \in \Omega' \cap \{\mathbf{u}_0 > 0\}$,

$$C\mathbf{d}_0(X)^\alpha \leq \mathbf{u}_0(X) \leq C^{-1}\mathbf{d}_0(X)^\alpha,$$

para $\mathbf{d}_0(X) \leq \frac{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)}{4}$. Em particular, \mathbf{u}_0 é uma solução para o problema de fronteira livre (3).

Demonstração. Vamos fixar um ponto $X_0 \in \{\mathbf{u}_0 > 0\}$ e seja $\mathbf{u}_0(X_0) := \sigma > 0$. Por continuidade $\mathbf{u}_0 \geq \frac{1}{2}\sigma$ em $B_\rho(X_0)$ para algum $\rho > 0$. Como $\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}_0$ uniformemente sob compactos, então para $\varepsilon \ll 1$ temos

$$\mathbf{u}_\varepsilon \geq \frac{1}{8}\sigma > (1 + \sigma_0)\varepsilon^\alpha.$$

Ou seja, \mathbf{u}_ε satisfaz

$$F(D^2\mathbf{u}_\varepsilon) = \gamma\mathbf{u}_\varepsilon^{\gamma-1} \quad \text{em } B_{\frac{1}{2}\rho}(X_0),$$

por conta de estabilidade de soluções de viscosidade sob convergência uniforme, veja [12]. Daí concluímos que \mathbf{u}_0 é de fato uma solução de viscosidade para a equação (5.3).

Por fim, iremos obter as estimativas que dão conta da taxa de crescimento da solução \mathbf{u}_0 . Para isto, fixemos $X_0 \in \Omega' \cap \{\mathbf{u}_0 > 0\}$, com $\mathbf{d}_0(X_0) \leq \frac{1}{4}\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ e $\mathbf{u}_0(X_0) = s > 0$. Para $\varepsilon \ll 1$ temos

$$\mathbf{u}_\varepsilon(X_0) \geq \frac{s}{2} > \varepsilon^\alpha.$$

Assim, de acordo com o Corolário 3.1.2, obtemos

$$\mathbf{u}_\varepsilon(X_0) \geq C\mathbf{d}_\varepsilon(X_0)^\alpha.$$

Seja $Y_\varepsilon \in \partial\{\mathbf{u}_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$ tal que $\mathbf{d}_\varepsilon(X_0) = |X_0 - Y_\varepsilon|$. Pela convergência uniforme, temos que

$Y_\varepsilon \rightarrow Y_0$, para algum Y_0 onde $\mathbf{u}_0(Y_0) = 0$. Concluimos então que,

$$\mathbf{u}_0(X_0) \geq C|X_0 - Y_0|^\alpha \geq C d_0(X_0)^\alpha.$$

A outra estimativa é obtida de modo similar. \square

A propriedade da não-degenerescência forte obtida para as soluções aproximadas \mathbf{u}_ε também vale para a solução \mathbf{u}_0 do problema limite em questão.

Teorema 5.1.2. *Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existem constantes universais $C, \rho_0 > 0$, dependendo apenas de Ω' e parâmetros universais, tais que para qualquer $X \in \Omega' \cap \overline{\{\mathbf{u}_0 > 0\}}$, $\rho \leq \rho_0$ e $d_0(X) < \frac{\text{dist}(X, \partial\Omega')}{2}$, vale a seguinte estimativa*

$$C^{-1}\rho^\alpha \leq \sup_{B_\rho(X)} \mathbf{u}_0 \leq \mathbf{u}_0(X) + C\mathbf{u}_0(X)^{\gamma/2}\rho + C\rho^\alpha.$$

A prova do Teorema 5.1.2 é bastante similar à prova presente no Teorema 5.1.1 e portanto, iremos omitir os detalhes. Para o que segue, mostraremos que as configurações de aproximação relacionadas a região $\{\mathbf{u}_\varepsilon > \varepsilon^\alpha\}$ convergem na métrica de Hausdorff para uma configuração limite, relacionada com o conjunto de positividade $\{\mathbf{u}_0 > 0\}$.

Teorema 5.1.3. *Dado $\delta > 0$ e $\varepsilon \ll 1$, valem as seguintes inclusões:*

$$\{\mathbf{u}_0 > 0\} \cap \Omega' \subset \mathcal{N}_\delta(\{\mathbf{u}_\varepsilon > C_1\varepsilon^\alpha\}) \cap \Omega' \quad e \quad \{\mathbf{u}_\varepsilon > C_1\varepsilon^\alpha\} \cap \Omega' \subset \mathcal{N}_\delta(\{\mathbf{u}_0 > 0\}) \cap \Omega'.$$

Demonstração. Iremos primeiramente mostrar a segunda desigualdade. Suponha, por contradição, que tal inclusão é falsa. Assim, teríamos $\delta_0 > 0$ e uma sequência de pontos $\{X_\varepsilon\}$, satisfazendo

- a) $X_\varepsilon \in \Omega' \cap \{\mathbf{u}_\varepsilon > C_1\varepsilon^\alpha\}$;
- b) $\text{dist}(X_\varepsilon, \{\mathbf{u}_0 > 0\}) > \delta_0$;
- c) $X_\varepsilon \rightarrow X_0$, e $\text{dist}(X_0, \{\mathbf{u}_0 > 0\}) > \delta_0$.

Segue diretamente da propriedade c) que X_0 não está no conjunto de positividade $\{\mathbf{u}_0 > 0\}$, isto é, $\mathbf{u}_0(X_0) = 0$. Contudo, pelo item a) podemos fazer uso da não-degenerescência forte, Teorema 3.1.1, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $Z_\varepsilon \in \overline{B_{\frac{1}{2}\delta_0}(X_\varepsilon)}$, tal que

$$\mathbf{u}_\varepsilon(Z_\varepsilon) = \sup_{B_{\frac{1}{2}\delta_0}(X_\varepsilon)} \mathbf{u}_\varepsilon \geq C\delta_0^\alpha. \quad (5.4)$$

para algum $C > 0$ universal. Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, a menos de uma subsequência, $Z_\varepsilon \rightarrow Z_0 \in \overline{B_{\frac{1}{2}\delta_0}(X_0)}$, onde

$$\{\mathbf{u}_0 > 0\} \cap \overline{B_{\frac{1}{2}\delta_0}(X_0)} \neq \emptyset. \quad (5.5)$$

O que, pelo ítem c), nos leva a uma contradição, .

Para mostrar a desigualdade que falta, iremos seguir os mesmos argumentos. Novamente iremos supor que tal desigualdade não é válida. Assim, existiria $\delta_1 > 0$ e uma seqüência de pontos $\{Y_\varepsilon\}$, tais que:

$$d) Y_\varepsilon \in \{u_0 > 0\};$$

$$e) \text{dist}(Y_\varepsilon, \{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) > \delta_1;$$

Portanto, devido ao ítem d) e pela não-degenerescência forte, Teorema 5.1.2, temos que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $Z_\varepsilon \in \overline{B_{\frac{1}{4}\delta_1}(Y_\varepsilon)}$ tal que

$$u_0(Z_\varepsilon) = \sup_{B_{\frac{1}{4}\delta_1}(Y_\varepsilon)} u_0 \geq C \delta_1^\alpha. \quad (5.6)$$

Como $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ sob compactos, temos da desigualdade acima que, para $\varepsilon \ll 1$,

$$u_\varepsilon(Z_\varepsilon) > \frac{C}{4} \delta_1 > C_1 \varepsilon^\alpha,$$

o que nos dá,

$$\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\} \cap \overline{B_{\frac{1}{4}\delta_1}(Y_\varepsilon)} \neq \emptyset. \quad (5.7)$$

Onde, pelo ítem e), temos uma contradição. \square

Com algumas propriedades obtidas acima para a solução u_0 , basta apenas uma repetição fiel da prova do Corolário 3.3 para mostrar que o conjunto $\{u_0 > 0\}$ tem densidade uniforme positiva ao longo da fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$. Segue abaixo o respectivo Teorema:

Teorema 5.1.4. *Dado $\Omega' \Subset \Omega$ existe uma constante $0 < c \leq 1$, dependendo de Ω' e de parâmetros universais, tais que*

$$\frac{\mathcal{L}^N(B_\delta(X) \cap \{u_0 > 0\})}{\mathcal{L}^N(B_\delta(X))} \geq c,$$

para todo $X \in \mathfrak{F}(u_0) \cap \Omega'$.

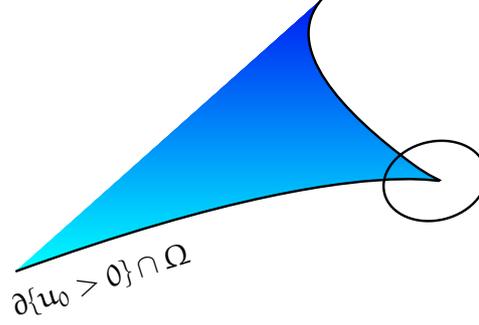


Fig. 5.1: A fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$ não possui pontos de cúspide como na figura acima.

É possível concluir que a região $\{u_0 > 0\}$ não pode apresentar cúspides ao longo da fronteira livre no sentido da fase $\{u = 0\}$. De fato, caso existisse algum ponto de cúspide da fronteira livre (veja a figura 7.1) teríamos:

$$\frac{\mathcal{L}^N(\mathbb{B}_\rho(X) \cap \{u_0 > 0\})}{\mathcal{L}^N(\mathbb{B}_\rho(X))} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Assim, a propriedade de densidade acima corresponde, em termos qualitativos, a um resultado de regularidade para a fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$.

Como consequência dos resultados obtidos no Capítulo 3.2, iremos mostrar que uma desigualdade de Harnack homogênea é válida próxima à fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$. Como mencionado na seção 3.2, esse resultado é bastante surpreendente à primeira vista, pois se tentarmos observar o termo singular $\gamma u^{\gamma-1}(X)$ como o lado direito da equação diferencial acima, a desigualdade clássica de Harnack (3.11) não nos daria informações universais próximo da fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$.

Teorema 5.1.5 (Desigualdade de Harnack em bolas tangentes). *Seja $X_0 \in \{u_0 > 0\}$ e $d := d_0(X_0)$. Então, existe uma constante universal $C > 0$ tal que*

$$\sup_{\mathbb{B}_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_0 \leq C \inf_{\mathbb{B}_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_0.$$

Demonstração. Seja $\xi_0, \xi_1 \in \overline{\mathbb{B}_{\frac{d}{2}}(X_0)}$, tais que

$$\inf_{\mathbb{B}_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_0 = u_0(\xi_0) \quad \text{e} \quad \sup_{\mathbb{B}_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_0 = u_0(\xi_1).$$

Como $d_0(\xi_0) \geq \frac{d}{2}$, pelo Teorema 5.1.1, temos

$$u_0(\xi_0) \geq C_1 d^\alpha. \tag{5.8}$$

Por outro lado, do Teorema 5.1.2,

$$u_0(\xi_1) \leq u_0(X_0) + C_2 u_0(X_0)^{\frac{\gamma}{2}} d + C_2 d^\alpha.$$

Como na demonstração do Corolário 2.1, para qualquer $Y \in \partial\{u_0 > 0\}$, temos

$$u_0(X_0) \leq u_0(Y) + C_2 u_0(Y)^{\frac{\gamma}{2}} d + C_2 d^\alpha = C_2 d^\alpha.$$

Então, das duas últimas desigualdades,

$$u_0(\xi_1) \leq C_3 d^\alpha,$$

portanto,

$$\sup_{B_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_0 \leq C_4 \inf_{B_{\frac{d}{2}}(X_0)} u_0.$$

para uma constante $C_4 > 0$ que não depende de u_0 . \square

Como na prova do Corolário 3.2.1, podemos estabelecer uma limitação inferior para integrais sólidas de u_0 : para todo $X_0 \in \partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega'$

$$C_1 \rho^\alpha \leq \int_{B_\rho(X_0)} u_0 dx, \quad (5.9)$$

onde $C_1 = C_1(\Omega') > 0$. Para o que segue, iremos estabelecer um controle inferior e superior para integrais esféricas de u_0 .

Teorema 5.1.6. *Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante universal $C = C(\Omega')$, tal que para todo $X_0 \in \partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega'$,*

$$C^{-1} \rho^\alpha \leq \int_{\partial B_\rho(X_0)} u_0 d\mathcal{H}^{N-1} \leq C \rho^\alpha.$$

Demonstração. Para mostrar a estimativa superior, basta usar diretamente, que

$$u_0(Y) \leq u_0(X_0) + C u_0(X_0)^{\frac{\gamma}{2}} \rho + C \rho^\alpha,$$

obtida do Teorema 5.1.2 para todo $Y \in \partial B_\rho(X_0)$.

Para o que falta, iremos mostrar a limitação inferior por meio de contradição. Deste modo, suponha que a estimativa inferior não seja válida. Existiria então, $\rho_m > 0$ e $X_m \in \partial\{u_0 > 0\}$, tais que

$$\frac{1}{\rho_m^\alpha} \int_{\partial B_{\rho_m}(X_m)} u_0 d\mathcal{H}^{N-1} = o(1), \quad (5.10)$$

quando $m \rightarrow \infty$. Usando o Teorema da mudança de variáveis, (5.10) implica em

$$\frac{1}{\rho_m^\alpha} \int_{\partial B_{r\rho_m}(X_m)} u_0 d\mathcal{H}^{N-1} = o(1), \quad (5.11)$$

para todo $0 < r \leq 1$. Defina

$$v_m(X) := \rho_m^{-\alpha} u_0(X_m + \rho_m X).$$

Pela regularidade uniforme obtida em (5.1), a menos de uma subsequência, temos que v_m converge uniformemente sob conjuntos compactos de \mathbb{R}^N a uma função v_0 . Além disso,

$$F_m(D^2 v_m) = \gamma v_m^{\gamma-1} \quad \text{em } \{v_m > 0\}, \quad (5.12)$$

onde $F_m(\mathcal{M}) := \rho_m^\alpha F(\rho_m^{-\alpha} \mathcal{M})$. Para todo $0 < r \leq 1$,

$$\int_{\partial B_{r\rho_m}(X_m)} u_0(Y) d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial B_r(0)} u_0(X_m + \rho_m X) d\mathcal{H}^{N-1} = \rho_m^\alpha \int_{\partial B_r(0)} v_m(X) d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Então, de (5.11), e fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\int_{\partial B_r(0)} v_0 d\mathcal{H}^{N-1} = \rho_m^{-\alpha} \int_{\partial B_{r\rho_m}(X_m)} u_0 d\mathcal{H}^{N-1} = 0, \quad \forall 0 < r \leq 1.$$

Portanto, $v_0 \equiv 0$ em B_1 o que contradiz a propriedade (5.9) para cada v_m . \square

5.2 Estimativas geométricas da fronteira livre

Nesta seção iremos obter finas propriedades relacionadas a teoria geométrica da medida para a fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$. Como no Capítulo 4, iremos trabalhar sob a hipótese estrutural (AC). O primeiro resultado nos fornece a finitude local da medida \mathcal{H}^{N-1} -Hausdorff da fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$.

Teorema 5.2.1. *Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$ existe uma constante universal $C = C(\Omega') > 0$, dependendo de Ω' e constantes universais, tais que*

$$\mathcal{L}^N(\mathcal{N}_\mu(\{u_0 > 0\}) \cap B_\rho(X_0)) \leq C\mu\rho^{N-1},$$

onde, $X_0 \in \Omega' \cap \partial\{u_0 > 0\}$, $d_0(X_0) < \frac{1}{10} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $\mu \ll \rho$ e ρ universalmente pequeno. Em particular,

$$\mathcal{H}^{N-1}(B_\rho(X_0) \cap \mathfrak{F}(u_0)) \leq C\rho^{N-1}.$$

Demonstração. Dos Teoremas (4.0.3) and (5.1.3), temos para $\varepsilon \ll 1$

$$|\mathcal{N}_{2\mu}(\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \cap B_\rho(X_0)| \leq C\mu\rho^{N-1}$$

e

$$\{u_0 > 0\} \cap B_\rho(X_0) \subset \mathcal{N}_\mu(\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \cap B_\rho(X_0).$$

Daí, facilmente obtemos

$$\mathcal{N}_\mu(\{u_0 > 0\}) \cap B_\rho(X_0) \subset \mathcal{N}_{2\mu}(\{u_\varepsilon > C_1 \varepsilon^\alpha\}) \cap B_\rho(X_0),$$

o que nos dá a estimativa desejada. \square

Uma consequência do Teorema 5.2.1 é que a região $\{u_0 > 0\}$ tem perímetro localmente finito. O resultado chave que mostraremos no próximo teorema, nos diz que a fronteira livre reduzida, $\partial_{\text{red}}\{u_0 > 0\}$ tem medida total. Mais importante, provaremos que em torno de pontos Z da fronteira reduzida, vale o seguinte comportamento,

$$\mathcal{H}^{N-1}(B_\rho(Z) \cap \mathfrak{F}(u_0)) \sim \rho^{N-1}.$$

Em particular, a fronteira livre tem vetor normal no sentido da medida geométrica em quase todos os pontos de $\mathfrak{F}(u_0)$. Para uma consulta acerca da definição de vetor normal no sentido da medida geométrica, veja [40].

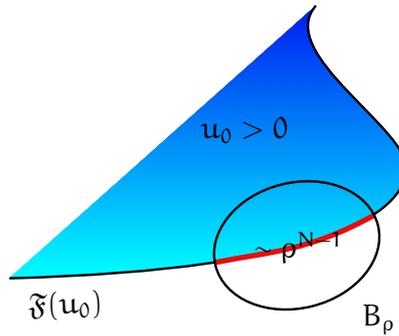


Fig. 5.2: $\mathfrak{F}(u_0)$ tem perímetro localmente finito.

Teorema 5.2.2. *Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante positiva $C = C(\Omega')$, que depende somente de Ω' e constantes universais, tais que para qualquer $B_\rho(X_0)$, com ρ universalmente pequeno, centrada num ponto da fronteira livre $x_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$, então*

$$C^{-1}\rho^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\partial_{\text{red}}\{u_0 > 0\} \cap B_\rho(X_0)) \leq C\rho^{N-1}.$$

Em particular,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial\{u_0 > 0\} \setminus \partial_{\text{red}}\{u_0 > 0\}) = 0.$$

Demonstração. A estimativa superior segue do Teorema 5.2.1. Nos falta então verificar a estimativa inferior. Fixado X_0 , iremos definir a função normalizada $v_0: B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v_0(X) := \frac{u_0(X_0 - \rho X)}{\rho^\alpha}.$$

Argumentando de modo totalmente análogo à prova do Teorema 4.1, para ρ universalmente pequeno, obtemos,

$$L(v_0^{\frac{1}{\alpha}}) := \rho^{2-\alpha} \sum_{ij} f_{ij} D_{ij}(u_0^{\frac{1}{\alpha}}) \geq 0 \quad \text{em} \quad \{v_0 > 0\} \cap B_1. \quad (5.13)$$

Nosso próximo passo é construir uma barreira apropriada. Seja ψ uma função não negativa em B_1 , com $\psi \equiv 1$ em $B_{1/5}$ e $\psi \equiv 0$ fora de $B_{1/4}$. Seja Φ a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} L\Phi = -\psi & \text{em} \quad B_1 \\ \Phi = 0 & \text{em} \quad \partial B_1. \end{cases}$$

Pela teoria de regularidade elíptica clássica, Φ é suave e, em particular, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\|\Phi\|_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C_1, \quad (5.14)$$

para uma constante universal $C_1 > 0$. Também pelo princípio do máximo $\Phi > 0$ em B_1 e pelo princípio do máximo de Hopf,

$$f_{ij} \partial_i \Phi \nu_j \geq C_2 > 0, \quad \text{ao longo de} \quad \partial B_1, \quad (5.15)$$

onde ν_j é a j -ésima coordenada do vetor normal exterior de $\partial B_1(0)$. Aplicando a fórmula de Gauss-Green generalizada, chegamos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \int_{\{v_0 > 0\} \cap B_1} \left\{ \Phi L(v_0^{\frac{1}{\alpha}}) - v_0^{\frac{1}{\alpha}} L\Phi \right\} dx &= \int_{\partial_{\text{red}}\{v_0 > 0\} \cap B_1} \left\{ \Phi f_{ij} \partial_i (v_0^{\frac{1}{\alpha}}) - v_0^{\frac{1}{\alpha}} f_{ij} \partial_i \Phi \right\} \eta_j d\mathcal{H}^{N-1} \\ &- \int_{\{v_0 > 0\} \cap \partial B_1} v_0^{\frac{1}{\alpha}} f_{ij} \partial_i \Phi \nu_j d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Como $\Phi L(v_0^{\frac{1}{\alpha}}) \geq 0$, temos

$$\int_{\{v_0 > 0\} \cap B_1} \left\{ \Phi L(v_0^{\frac{1}{\alpha}}) - v_0^{\frac{1}{\alpha}} L\Phi \right\} dx \geq \int_{B_1} \psi v_0^{\frac{1}{\alpha}} dx \geq \int_{B_{1/5}} v_0^{\frac{1}{\alpha}} dx. \quad (5.17)$$

Da limitação uniforme do gradiente para v_0 , da elipticidade e (5.14), estimamos

$$\left| \int_{\partial_{\text{red}}\{v_0 > 0\} \cap B_1} \Phi f_{ij} \partial_i (v_0^{\frac{1}{\alpha}}) \eta_j d\mathcal{H}^{N-1} \right| \leq C_1 \mathcal{H}^{N-1}(\partial_{\text{red}}\{v_0 > 0\} \cap B_1). \quad (5.18)$$

Além disso, olhando para a região de integração, obtemos

$$\int_{\partial_{\text{red}}\{v_0 > 0\} \cap B_1} v_0^{\frac{1}{\alpha}} f_{ij} \partial_i \Phi \eta_j d\mathcal{H}^{N-1} = 0, \quad (5.19)$$

e por (5.15),

$$\int_{\{v_0 > 0\} \cap \partial B_1} v_0^{\frac{1}{\alpha}} f_{ij} \partial_i \Phi v_j d\mathcal{H}^{N-1} \geq 0. \quad (5.20)$$

Combinando (5.16), (5.17), (5.18) e (5.19), concluímos que

$$\int_{B_{1/5}} v_0^{\frac{1}{\alpha}} dx \leq C_1 \mathcal{H}^{N-1}(\partial_{\text{red}}\{v_0 > 0\} \cap B_1). \quad (5.21)$$

Por outro lado, pela não-degenerescência, como na prova do Teorema 3.2.1, temos

$$\int_{B_{1/5}(0)} v_0^{\frac{1}{\alpha}} dx \geq C_3. \quad (5.22)$$

para uma constante universal $C > 0$. Finalmente de (5.21) e (5.22) obtemos

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial_{\text{red}}\{v_0 > 0\} \cap B_1) \geq c_0,$$

para uma constante universal $c_0 > 0$, assim a estimativa inferior está provada. A medida total da fronteira reduzida segue por considerações clássicas da teoria geométrica da medida. \square

Capítulo 6

Continuidade ótima do gradiente

Conteúdo

6.1	O resultado principal	54
6.2	Aplicações e perspectivas	56
6.2.1	Equações da teoria de supercondutividade	56
6.2.2	Visitando a teoria do ∞ -laplaciano	58
6.2.3	Outras equações elípticas degeneradas	61
6.3	Compacidade universal	63
6.4	Oscilação de decaimento	65
6.5	Regularidade local sob o regime de pequenez	68
6.6	Regime de pequenez	69

Nesta seção iremos fazer o estudo referente à segunda parte deste trabalho, que trata da obtenção da regularidade ótima para equações elípticas degeneradas da forma:

$$\mathcal{H}(X, \nabla u)F(X, D^2u) = f(X) \quad \text{em } B_1, \quad (6.1)$$

onde F é uniformemente elíptica, $f \in L^\infty$ e para algum $\theta > 0$, \mathcal{H} satisfaz a seguinte condição de degenerescência,

$$\lambda|\vec{p}|^\theta \leq \mathcal{H}(X, \vec{p}) \leq \Lambda|\vec{p}|^\theta \quad (6.2)$$

para cada $\vec{p} \in \mathbb{R}^N$ e $X \in B_1$. Para efeito de normalização, assumiremos sem perda de generalidade que $F(X, 0) = 0$ para todo $X \in B_1$.

Como mencionado outras vezes nesse presente trabalho, segue da teoria de Krylov-Safanov, veja [3], que soluções de viscosidade de uma equação homogênea de

coeficientes constantes

$$F(D^2u) = 0,$$

são localmente de classe C^{1,α_0} , para algum expoente $\alpha_0 = \alpha_0(N, \lambda, \Lambda)$ universal. No decorrer deste capítulo, α_0 será entendido como tal expoente. Caso não tenha sido imposta nenhuma condição adicional à F , α_0 é de fato o expoente ótimo. Veja [31, 32] e [33]. Para a classe de equações com coeficientes variáveis, soluções são em geral, somente de classe C^{0,α_0} e esta regularidade é ótima, a menos que alguma condição de continuidade em seus coeficientes (ou seja, na aplicação $X \mapsto F(X, \cdot)$) seja imposta. Tal condição é bastante natural, estando sempre presente na teoria linear: $Lu = a_{ij}D_{ij}u$. Para o nosso objetivo de encontrar uma estimativa $C^{1,\alpha}$ para soluções da equação (6.1), iremos daqui em diante, assumir uma hipótese de continuidade nos coeficientes de F , a saber:

$$\sup_{\|M\| \leq 1} \frac{|F(X, M) - F(Y, M)|}{\|M\|} \leq C \cdot \omega(|X - Y|), \quad (6.3)$$

onde $C \geq 0$ é uma constante positiva e ω é um módulo de continuidade normalizado, isto é, $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é não-decrescente com $\omega(0^+) = 0$ e $\omega(1) = 1$. Tal condição pode ser relaxada, é suficiente tomar alguma condição do tipo VMO, veja [5]. Iremos optar pela condição (6.3) por questões de simplicidade. Para uma notação conveniente, iremos denotar

$$\|F\|_\omega := \inf \left\{ C > 0 : \sup_{\|M\| \leq 1} \frac{|F(X, M) - F(Y, M)|}{\|M\|} \leq C\omega(|X - Y|), \forall X, Y \in B_1 \right\}. \quad (6.4)$$

Para concluir os nossos comentários iniciais sob a condição de continuidade (6.3), soluções de viscosidade da equação

$$F(X, D^2u) = f(X) \in L^\infty(B_1),$$

são localmente de classe $C^{1,\beta}$, para todo $0 < \beta < \alpha_0$. Veja [5, 44].

6.1 O resultado principal

Nesta seção, iremos apresentar o principal resultado acerca da teoria que será desenvolvida neste capítulo. Tal resultado fornecerá uma estimativa de regularidade ótima para funções u , satisfazendo

$$|\nabla u|^\theta \cdot |F(D^2u)| \lesssim 1, \quad \theta > 0, \quad (6.5)$$

no sentido da viscosidade, para algum operador uniformemente elíptico F . Como comentado no início deste capítulo, para o caso não-degenerado, isto é, $\theta = 0$, a melhor regularidade possível é $C_{\text{loc}}^{1+\alpha_0^-}$. O ponto delicado, está em obter uma estimativa universal precisa o suficiente para que o grau de singularidade $\theta > 0$, que surge da equação (6.5) seja explicitamente sentido, ao longo do conjunto singular $(\nabla \mathbf{u})^{-1}(0)$.

Para entender alguns fatos acerca do que devemos esperar neste estudo, vamos olhar de um modo ingênuo para a seguinte EDO:

$$\begin{cases} \mathbf{u}''(t) = (\mathbf{u}')^{-\theta}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}'(0) = 0, \end{cases}$$

que pode ser resolvida de uma maneira simples para $t \in (0, \infty)$. A solução é $\mathbf{u}(t) = t^{\frac{2+\theta}{1+\theta}}$. Após algumas inferências heurísticas, torna-se razoável aceitar que $C^{\frac{2+\theta}{1+\theta}}$ é uma barreira superior para qualquer estimativa de regularidade universal para a equação (6.5). Portanto, a estimativa de regularidade ótima ideal que se deve esperar para funções satisfazendo a Equação (6.5) deve ser $C^{1, \min\{\alpha_0^-, \frac{1}{1+\theta}\}}$.

Após esses comentários técnicos e didáticos, estamos aptos a formular o principal resultado o qual foi dedicado este capítulo.

Teorema 6.1.1. *Seja \mathbf{u} uma solução de viscosidade de*

$$\mathcal{H}(X, \nabla \mathbf{u})F(X, D^2 \mathbf{u}) = f(X) \quad \text{em } B_1. \quad (6.6)$$

Assuma $f \in L^\infty(B_1)$, \mathcal{H} satisfaz (6.2) e $F: B_1 \times \text{Sym}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente elíptico com coeficientes contínuos, isto é, satisfazendo (1.2) e (6.3). Fixado um expoente

$$\alpha \in (0, \alpha_0) \cap \left(0, \frac{1}{1+\gamma}\right],$$

então existe uma constante $C(N, \lambda, \Lambda, \gamma, \|F\|_\omega, \|f\|_\infty, \alpha) > 0$, dependente apenas de $N, \lambda, \Lambda, \gamma, \|F\|_\omega, \|f\|_\infty$ e α , tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(N, \lambda, \Lambda, \gamma, \|F\|_\omega, \|f\|_\infty, \alpha) \cdot \|\mathbf{u}\|_{L^\infty}.$$

Segue no Corolário abaixo, uma importante consequência do Teorema 6.1.1.

Corolário 6.1. *Seja \mathbf{u} solução de viscosidade de*

$$\mathcal{H}(X, \nabla \mathbf{u})F(D^2 \mathbf{u}) = f(X) \quad \text{in } B_1. \quad (6.7)$$

Assuma $f \in L^\infty(B_1)$, \mathcal{H} satisfazendo (6.2), F uniformemente elíptica e côncava. Então \mathbf{u}

é localmente $C^{1, \frac{1}{1+\gamma}}$ e essa regularidade é ótima.

O Corolário 6.1 segue do Teorema 6.1.1 onde soluções de equações côncavas são localmente de classe $C^{1,1}$ pelo Teorema de Evans-Krylov.

É interessante compreender o Teorema 6.1.1 como um modelo de classificação para equações elípticas degeneradas, conectando a magnitude da degenerescência do operador à regularidade ótima de suas respectivas soluções. De fato, como mencionado anteriormente, várias equações tem seus graus de degenerescência comparável a uma equação modelo da forma $|\nabla \mathbf{u}|^\theta |F(D^2 \mathbf{u})| \lesssim 1$. Iremos explorar essa perspectiva na próxima seção.

6.2 Aplicações e perspectivas

A heurística da classificação de degenerescência mencionado no parágrafo anterior, possui de fato um vasto campo de aplicabilidade. Nesta seção intermediária, iremos comentar sobre algumas consequências que a estimativa de regularidade ótima mostrada na Seção 6.1 dispõe para teoria de regularidade elíptica.

Na sequência, iremos usar o Teorema 6.1.1 e o Corolário 6.1 para solucionar casos particulares de alguns problemas abertos bastante conhecidos. O resultado obtido nesta seção nos dá a esperança de que progressos decisivos possam ser contemplados para casos mais gerais em um futuro próximo.

6.2.1 Equações da teoria de supercondutividade

Começaremos nesta seção, comentando sobre algumas aplicações que o Teorema 6.1.1 fornece para a teoria de supercondutividade, onde as equações totalmente não-lineares do tipo:

$$F(X, D^2 \mathbf{u}) = g(X, \mathbf{u}) \chi_{\{|\nabla \mathbf{u}| > 0\}} \quad (6.8)$$

regem os modelos matemáticos desta teoria. A equação (6.8) representa a equação estacionária para a "mean field theory of superconducting vortices" quando a função de fluxo escalar admite uma dependência funcional no potencial magnético escalar, veja [9]. Propriedades de existência e regularidade da Equação (6.8) foram estudadas em [7] e [8]. A novidade no estudo da Equação (6.8) está em testar a equação apenas por polinômios que tocam a solução com $|\nabla P(X_0)| \neq 0$. Foi provado em [7], corolário 7, que soluções são localmente $C^{0,\alpha}$ para algum $0 < \alpha < 1$. Para operadores côncavos, foi provado em [7] corolário 8, que soluções estão em $W^{2,p}$. Uma aplicação da fórmula de monotonicidade de

Alt-Caffarelli-Friedman [7], Lema 9, fornece regularidade $C^{1,1}$ para o problema particular

$$\Delta \mathbf{u} = c \mathbf{u} \chi_{\{|\nabla \mathbf{u}| > 0\}}. \quad (6.9)$$

A Equação (6.8) pode ser obtida como o problema limite, quando $\delta \rightarrow 0$, para a família de equações singulares da forma

$$|\nabla \mathbf{u}_\delta|^\delta \cdot F(\mathbf{X}, D^2 \mathbf{u}_\delta) = g(\mathbf{X}, \mathbf{u}_\delta), \quad B_1. \quad (E_\delta)$$

De fato, segue do Teorema 6.1.1 que se \mathbf{u}_δ é uma solução normalizada de (E_δ) , para δ suficientemente pequeno, isto é, para

$$\delta < 1 - \alpha_0^-,$$

então podemos estimar

$$\|\mathbf{u}\|_{C_{loc}^{1, \alpha_0^-}} \leq C, \quad (6.10)$$

para uma constante $C > 1$, que não depende de δ . Em particular, a estimativa (6.10) nos dá compacidade local para a família de soluções $\{\mathbf{u}_\delta\}_{\delta > 0}$ de (E_δ) . Seja \mathbf{u}_0 a função limite de tal sequência, ou seja,

$$\mathbf{u}_0 = \lim_{j \rightarrow 0} \mathbf{u}_{\delta_j},$$

para $\delta_j = o(1)$. De (6.10), temos,

$$\nabla \mathbf{u}_{\delta_j} \longrightarrow \nabla \mathbf{u}_0 \quad \text{localmente uniforme}, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{u}_0 \in C_{loc}^{1, \alpha_0^-}(B_1). \quad (6.12)$$

Agora, fixemos um ponto regular $Z \in B_1$ de \mathbf{u}_0 , isto é,

$$|\nabla \mathbf{u}_0(Z)| > 0.$$

A convergência gradiente (6.11) e a estimativa (6.12) nos dá a existência de $\eta > 0$ pequeno, tal que

$$\inf_{B_\eta(Z)} |\nabla \mathbf{u}_\delta| \geq \frac{1}{10} |\nabla \mathbf{u}_0(Z)| =: c_0,$$

para todo $\delta \ll 1$. Assim,

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{u}_\delta) \cdot |\nabla \mathbf{u}_\delta|^{-\delta} \longrightarrow g(\mathbf{X}, \mathbf{u}_0), \quad \text{uniformemente em } B_\eta(Z).$$

Resumimos a discussão acima com o seguinte Teorema:

Teorema 6.2.1. *Seja $u_\delta \in C^0(B_1)$ uma solução de viscosidade de (E_δ) , com $|u_\delta| \leq 1$, $\delta \ll 1$, onde g é contínua em u e mensurável e limitada em X . Assuma que o operador F está sob as hipóteses do Teorema 6.1.1. Então, fixado um número $\alpha < \alpha_0(N, \lambda, \Lambda)$, para δ suficientemente pequeno, temos*

$$\|u_\delta\|_{C^{1,\alpha}(B_{4/5})} \leq C(N, \lambda, \Lambda, \alpha).$$

Em particular,

$$u_\delta \rightarrow u_0 \in C^{1,\alpha}(B_{1/2}),$$

e u_0 é uma solução de viscosidade de (6.8).

A principal vantagem do Teorema 6.2.1, em comparação com a teoria de regularidade desenvolvida em [7], é que ela nos dá a estimativa $C^{1,\alpha}$ ótima, para o caso mais geral de operadores totalmente não lineares, não necessariamente côncavos.

6.2.2 Visitando a teoria do ∞ -laplaciano

Iremos agora visitar a teoria do operador ∞ -laplaciano ,

$$\Delta_\infty v := \sum_{i,j} v_i v_j v_{ij} \tag{6.13}$$

a qual está relacionada ao problema de melhor extensão Lipschitz para um dado de fronteira fixado. Além disso, o operador acima tem como características a não-linearidade e alta degenerescência. A teoria das funções infinito-harmônicas, isto é, soluções da EDP homogênea

$$\Delta_\infty h = 0,$$

tem recebido uma grande atenção. Um dos principais problemas em aberto da teoria moderna de EDPs está em mostrar que funções infinito-harmônicas são de classe C^1 . Essa conjectura tem sido respondida positivamente por O. Savin [39] no plano. Evans e Savin, [15] melhoraram o resultado para $C^{1,\alpha}$ para algum $\alpha > 0$ pequeno, porém somente em duas dimensões. Muito recentemente, Evans e Smart provaram que funções infinito-harmônicas são q.t.p. diferenciáveis independentemente da dimensão, veja [16]. Não obstante, características de não-continuidade de ∇u podem ser inferidos por argumentos ingênuos. O famoso exemplo de função infinito-harmônica

$$a(x, y) := x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \tag{6.14}$$

devido a Aronsson por volta dos anos 60, determina a regularidade ótima ideal para tal problema. Ou seja, a teoria de regularidade universal para funções infinito-harmônicas

não pode ir além de $C^{1, \frac{1}{3}}$. Até onde sabemos, não houve antes qualquer resultado significativo de que funções infinito-harmônicas devem ou não ter uma regularidade $C^{1, \frac{1}{3}}$ universal, a menos de especulações baseadas no exemplo de Aronsson. De outra maneira, porém, a desconfiança para a validade da conjectura da regularidade $C^{1, \frac{1}{3}}$ para funções infinito-harmônicas se confirma explorando as propriedades de escalonamento da equação. Por exemplo, podemos escrever o operador infinito-laplaciano como

$$\Delta_\infty v = (\nabla v)^t \cdot D^2 v \cdot \nabla v,$$

e desta forma, torna-se tentador comparar suas características de degenerescência com

$$|\nabla u|^2 \cdot |\Delta u| \lesssim 1, \quad (6.15)$$

que possui as mesmas propriedades de escalonamento de Δ_∞ e cujas soluções são $C^{1, \frac{1}{1+2}}$ regulares, do Corolário 6.1. Embora, em geral não seja verdade que funções infinito-harmônicas satisfazem (6.15), essa observação nos leva a um interessante guia heurístico.

Note que o exemplo de Aronsson - como quaisquer exemplos populares na teoria de EDPs - é uma função de variáveis separáveis. Na sequência, como uma aplicação do Corolário 6.1, mostraremos que qualquer função infinito-harmônica com variáveis separáveis é de fato, localmente $C^{1, \frac{1}{3}}$.

Proposição 6.2.1. *Seja $u: B_1 \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função infinito-harmônica. Assuma u uma função de variáveis separáveis, i.e.,*

$$u(X) = \sigma_1(x_1) + \sigma_2(x_2) + \cdots + \sigma_d(x_N),$$

para $\sigma_i \in C^0(B_1)$. Então $u \in C^{1, \frac{1}{3}}(B_{1/2})$.

Demonstração. Um cálculo direto nos mostra que

$$0 = \Delta_\infty u = |\sigma_1'(x_1)|^2 \sigma_1''(x_1) + |\sigma_2'(x_2)|^2 \sigma_2''(x_2) + \cdots + |\sigma_N'(x_N)|^2 \sigma_N''(x_N). \quad (6.16)$$

De forma rotineira, justificamos o cálculo acima usando a maquinaria da solução de viscosidade. Notamos, contudo, que o i -ésimo termo na equação (6.16) depende apenas da variável x_i . Portanto, como a soma acima é nula, cada termo deve ser constante, isto é,

$$|\sigma_i'(x_i)|^2 \sigma_i''(x_i) = \tau_i, \quad \sum_{i=1}^N \tau_i = 0. \quad (6.17)$$

Aplicando a regularidade $C^{1,\frac{1}{3}}$ para cada σ_i que segue do Corolário 6.1, temos que a prova da Proposição 6.2.1 está concluída. \square

Em um número de problemas físicos e geométricos, soluções herdam a simetria radial do dado de fronteira. Portanto, é bastante razoável analisarmos a regularidade ótima para soluções radialmente simétricas.

Proposição 6.2.2. *Seja $u \in C^0(B_1)$ uma função radialmente simétrica, isto é, $u(X) = v(r)$ para $r := |X|$, satisfazendo*

$$\Delta_\infty u = f(|X|, u), \text{ em } B_1$$

no sentido da viscosidade. Assuma $f \in C^0([0, 1] \times \mathbb{R})$. Então $v \in C_{loc}^{1,\frac{1}{3}}$.

Demonstração. Um cálculo direto nos mostra

$$\begin{aligned} \nabla u(X) &= v'(r) \frac{X}{|X|}, \\ D^2 u(X) &= \frac{1}{|X|^2} v''(r) X \otimes X + v'(r) \left[\frac{1}{|X|} \text{Id} - \frac{1}{|X|^3} X \otimes X \right]. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que v satisfaz,

$$v'(r)^2 \cdot v''(r) = f(r, v(r)), \quad (6.18)$$

no sentido da viscosidade. Como

$$f(r, v(r)) \in L_{loc}^\infty(B_1),$$

podemos aplicar o Corolário 6.1 para obtermos $v \in C_{loc}^{1,\frac{1}{1+2}}$ o que prova a proposição. \square

Comentamos que a regularidade da Proposição 6.2.2 é ótima quando

$$\Delta_\infty |X|^{\frac{4}{3}} = \text{constante}.$$

Ainda iremos mencionar que, para funções com o infinito-laplaciano limitados, E. Lindgren, seguindo as ideias de [16], estabeleceu recentemente estimativas Lipschitz e diferenciabilidade q.t.p. .

6.2.3 Outras equações elípticas degeneradas

Um outro exemplo interessante a ser explorado é o operador p -laplaciano:

$$\Delta_p \mathbf{u} := \operatorname{div} (|\nabla \mathbf{u}|^{p-2} \nabla \mathbf{u}) \quad \text{para } p \geq 2. \quad (6.19)$$

Ele aparece por exemplo na equação de Euler-Lagrange associada a integral p -energia

$$\int (\mathbf{D}\mathbf{u})^p d\mathbf{X} \rightarrow \min.$$

O estudo de equações envolvendo o operador p -laplaciano tem recebido uma grande atenção nos últimos 50 anos. Em particular, a teoria de regularidade para funções p -harmônicas tem sido um assunto de intensa investigação, desde o final dos anos 60, quando Uraltseva em [46] provou que soluções fracas da equação homogênea

$$\Delta_p \mathbf{h} = 0, \quad (6.20)$$

é localmente de classe $C^{1,\alpha(\mathbf{N},p)}$, para algum $\alpha(\mathbf{N},p) > 0$. A regularidade ótima para funções p -harmônicas no plano foi obtida por Iwanec e Manfredi, em [23]. O expoente ótimo de Hölder continuidade do gradiente de funções p -harmônicas em altas dimensões, $d \geq 3$, tem sido o maior problema em aberto desde então.

O operador p -laplaciano pode ser escrito na forma não-divergente, simplesmente aplicando formalmente as derivadas da seguinte forma:

$$\Delta_p \mathbf{u} = |\nabla \mathbf{u}|^{p-2} \Delta \mathbf{u} + (p-2)|\nabla \mathbf{u}|^{p-4} \Delta_\infty \mathbf{u}. \quad (6.21)$$

A noção de soluções fracas, usando a estrutura divergente em (6.19), e na forma não-divergente em (6.21) são equivalentes, veja [25].

Dentro do contexto de funções com o p -laplaciano limitado, é conjecturado que a regularidade ótima deve ser $C^{p'}$, onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Nosso próximo resultado nos dá uma resposta parcial para esta conjectura.

Proposição 6.2.3. *Seja $p \geq 2$ e \mathbf{u} satisfazendo*

$$|\Delta_p \mathbf{u}| \leq C, \quad \text{em } B_1.$$

Assuma u radialmente simétrica, i.e. $u(X) = v(r)$ para $r := |X|$. Então $v \in C_{loc}^{p'}(B_1)$.

Demonstração. Um cálculo direto, como na prova da Proposição 6.2.2 nos revela a seguinte limitação

$$|v'|^{p-2}|v''| + |v'|^{p-4} \cdot v'^2|v''| \leq C,$$

no sentido da viscosidade. Portanto, como uma aplicação do Corolário 6.1, obtemos

$$v \in C_{loc}^{1, \frac{1}{1+(p-2)}} \cong C_{loc}^{p'},$$

e a proposição em questão está provada. \square

Estimativas da forma $|\nabla u|^{p-2}|D^2 u| < C$ não são raras em um certo número de problemas envolvendo o operador p -laplaciano, veja por exemplo [30]. Vamos mencionar também que estimativas da forma $(\epsilon + |\nabla v|^2)^{\frac{p-1}{2}}|D^2 v| < C$ são comumente obtidas para soluções fracas de equações da forma divergente, $D_i(A^i(Dv)) = 0$, veja [18], Capítulo 8.

Iremos encerrar esta seção, revisitando o operador infinito-laplaciano como o limite do operador p -laplaciano, quando $p \rightarrow \infty$. Seja $h \in C^0(B_1)$ uma função infinito-harmônica. Para cada $p \gg 1$, seja h_p a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta_p h_p = 0, & \text{in } B_{3/4} \\ h_p = h, & \text{on } B_{3/4}. \end{cases}$$

É sabido que h_p forma uma sequência de funções equicontínuas e $h_p \rightarrow h$ localmente uniforme para h . Em particular

$$\Delta_\infty h_p = o(1), \quad \text{quando } p \rightarrow \infty.$$

Dessa forma, iremos denotar h_p como a aproximação p -harmônica da função infinito-harmônica h em $B_{3/4}$.

Proposição 6.2.4. *Seja $h \in C^0(B_1)$ uma função infinito-harmônica h_p sua aproximação p -harmônica. Assuma $|\Delta_\infty h_p| = O(p^{-1})$ quando $p \rightarrow \infty$. Então $h \in C^{1, \frac{1}{3}}(B_{1/2})$.*

Demonstração. Como h_p é p -harmônica, ela satisfaz

$$|\nabla h_p|^2 \Delta h_p = (2 - p) \Delta_\infty h_p.$$

Pelo princípio do máximo,

$$\|h_p\|_{L^\infty(B_{4/5})} \leq \|h\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Da hipótese de aproximação e do Corolário 6.1, temos

$$\|\mathbf{h}_p\|_{C^{1, \frac{1}{3}}(B_{1/2})} \leq C,$$

para uma constante C que independe de p . A prova da proposição segue por argumentos padrões. \square

Outra interessante Proposição relaciona funções p -harmônicas com infinito-laplaciano limitado.

Proposição 6.2.5. *Seja u uma função p -harmônica $B_1 \subset \mathbb{R}^N$. Assuma $\Delta_\infty u \in L^\infty(B_1)$. Então $u \in C^{1, \frac{1}{3}}(B_{1/2})$.*

Demonstração. A prova segue por argumentos similares aos da prova da Proposição 6.2.4. \square

Segue como um problema em aberto, se a Proposição 6.2.5 vale mesmo sem a hipótese extra de limitação do infinito-laplaciano. É plausível conjecturar que se $\alpha(N, p)$ é o expoente de Hölder continuidade ótimo (universal) para funções p -harmônicas, então

$$\alpha(N, p) > \frac{1}{3} + o(1), \quad \text{quando } p \rightarrow \infty.$$

6.3 Compacidade universal

A partir desta seção começaremos a desenvolver a prova da principal estimativa de regularidade ótima apresentada na seção 6.1, a saber, Teorema 6.1.1. Nesta primeira etapa, iremos obter um tipo compacidade universal que nos dará acesso à teoria de regularidade ótima para soluções da equação (6.1). Na prova que iremos apresentar, faremos uso da principal ferramenta técnica obtida no recente trabalho de Imbert e Silvestre, [21].

Lema 6.1. *Seja $\vec{q} \in \mathbb{R}^N$ um vetor arbitrário e $u \in C(B_1)$, uma solução de viscosidade de*

$$|\vec{q} + \nabla u|^\theta F(X, D^2 u) = f(X), \tag{E_{\vec{q}}}$$

satisfazendo $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$. Dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$, dependendo somente de N, λ, Λ , e γ , tal que se

$$\|M\|^{-1} \cdot \|F(X, M) - F(0, M)\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)} < \varepsilon, \tag{6.22}$$

então podemos existir uma função \mathbf{h} , solução de uma equação (λ, Λ) -uniformemente elíptica de coeficientes constantes

$$\mathfrak{F}(D^2\mathbf{h}) = 0, \quad B_{1/2} \quad (6.23)$$

tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{h}\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq \delta. \quad (6.24)$$

Demonstração. Iremos supor por contradição, que a tese do Lema em questão falha. Assim, devemos encontrar um certo número $\delta_0 > 0$ e sequências, $F_j(X, M)$, f_j , \vec{q}_j e \mathbf{u}_j , satisfazendo

- ✓ $F_j(X, M)$ é (λ, Λ) -elíptico,
- ✓ $\|M\|^{-1} \cdot \|F(X, M) - F(0, M)\|_{L^\infty(B_1)} = o(1)$,
- ✓ $\|f_j\|_{L^\infty(B_1)} = o(1)$,
- ✓ $\|\mathbf{u}_j\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e
- ✓ $|\vec{q}_j + \nabla \mathbf{u}_j|^\gamma F_j(X, D^2 \mathbf{u}_j) = f_j$,

onde,

$$\sup_{B_{1/2}} |\mathbf{u}_j - \mathbf{h}| \geq \delta_0, \quad (6.25)$$

para todo \mathbf{h} satisfazendo uma certa equação diferencial (λ, Λ) -uniformemente elíptica homogênea de coeficientes constantes como em (6.23).

Inicialmente, argumentando como em [21], a sequência \mathbf{u}_j é pre-compacta na topologia- $C^0(B_{1/2})$. De fato, como em [21] Lema 4, existe uma constante universalmente grande $A_0 > 0$, tal que, se para alguma subsequência $\{\vec{q}_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, tivermos,

$$|\vec{q}_{j_k}| \geq A_0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

então, a sequência de soluções correspondentes, $\{\mathbf{u}_{j_k}\}_{j \in \mathbb{N}}$, é limitada em $C^{0,1}(B_{2/3})$. Caso tenhamos

$$|\vec{q}_j| < A_0, \quad \forall j \geq j_0,$$

então, pela desigualdade de Harnack, veja [22], $\{\mathbf{u}_j\}_{j \geq j_0}$ é limitado em $C^{0,\beta}(B_{2/3})$ para algum $0 < \beta < 1$ universal.

Da compacidade acima mencionada, a menos de uma subsequência,

$$\mathbf{u}_j \longrightarrow \mathbf{u}_\infty, \quad \text{localmente uniforme em } B_{2/3},$$

para algum $\mathbf{u}_\infty \in C^{0,\beta}(B_{2/3})$. Nosso principal objetivo é provar que a função limite \mathbf{u}_∞ é solução de uma equação do tipo (6.23). Para isso iremos mais uma vez dividir nossa análise em dois casos.

Se $|\vec{q}_j|$ é limitado, podemos extrair uma subsequência de $\{\vec{q}_j\}$, que converge para algum $\vec{q}_\infty \in \mathbb{R}^N$. Além disso, pela elipticidade uniforme e pelo segundo item das propriedades listadas acima, a menos de uma subsequência $F_j(\mathbf{X}, \cdot) \rightarrow \mathfrak{F}(\cdot)$, e

$$|\vec{q}_\infty + \nabla \mathbf{u}_\infty|^\gamma \mathfrak{F}(D^2 \mathbf{u}_\infty) = 0,$$

Argumentando como em [21], Seção 6, concluímos que \mathbf{u}_∞ é uma solução de uma equação elíptica de coeficientes constantes e homogênea, o que contradiz (6.25).

Se $|\vec{q}_j|$ é ilimitado, então a menos de subsequência, $|\vec{q}_j| \rightarrow \infty$. Neste caso, defina $\vec{e}_j = \vec{q}_j/|\vec{q}_j|$, então \mathbf{u}_j satisfaz será solução de

$$\left| \vec{e}_j + \frac{\nabla \mathbf{u}_j}{|\vec{q}_j|} \right|^\gamma F_j(\mathbf{X}, D^2 \mathbf{u}_j) = \frac{f_j(\mathbf{X})}{|\vec{q}_j|^\gamma}.$$

Tomando $j \rightarrow \infty$ e outra subsequência, caso necessite, iremos também encontrar uma função limite \mathbf{u}_∞ , satisfazendo $\mathfrak{F}_\infty(D^2 \mathbf{u}_\infty) = 0$ para algum operador (λ, Λ) -uniformemente elíptico, \mathfrak{F}_∞ . Como no caso anterior, isto nos leva a uma contradição com (6.25). Assim, o Lema está provado. \square

6.4 Oscilação de decaimento

Nesta seção, iremos desenvolver a oscilação de decaimento, que irá finalmente nos fornecer a estimativa de regularidade ótima $C^{1,\alpha}$ para soluções da equação (7). A primeira tarefa será obter uma versão discreta da estimativa de regularidade, e é justamente isto que o lema seguinte nos fornecerá.

Lema 6.2. *Seja $\vec{q} \in \mathbb{R}^N$ um vetor arbitrário e $\mathbf{u} \in C(B_1)$ normalizada, i.e., $|\mathbf{u}| \leq 1$, solução de viscosidade de*

$$|\vec{q} + \nabla \mathbf{u}|^\theta F(\mathbf{X}, D^2 \mathbf{u}) = f(\mathbf{X}). \quad (E_{\vec{q}})$$

Dado $\alpha \in (0, \alpha_0) \cap (0, \frac{1}{\theta+1}]$, existem constantes $0 < \rho_0 < 1/2$ e $\epsilon_0 > 0$, dependendo somente de $N, \lambda, \Lambda, \theta$ e α , tais que se

$$\|\mathbf{M}\|^{-1} \cdot \|F(\mathbf{X}, \mathbf{M}) - F(0, \mathbf{M})\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \epsilon_0, \quad (6.26)$$

então existe uma função afim $\ell(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \vec{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{X}$, tal que

$$\sup_{B_{\rho_0}} |\mathbf{u}(\mathbf{X}) - \ell(\mathbf{X})| \leq \rho_0^{1+\alpha}.$$

Além disso,

$$|\mathbf{a}| + |\vec{\mathbf{b}}| \leq C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda),$$

para uma constante universal $C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda)$ que depende apenas da dimensão e das constantes de elipticidade.

Demonstração. Para um $\delta > 0$ a ser escolhido *a posteriori*, seja \mathbf{h} uma solução de uma equação (λ, Λ) -uniformemente elíptica homogênea com coeficientes constantes, que está δ -próxima de \mathbf{u} em $L^\infty(B_{1/2})$. A existência de tal função é assegurada pelo Lema 6.1, para algum ε_0 escolhido suficientemente pequeno, dependendo apenas de δ e parâmetros universais. A partir da escolha do δ , que será universalmente escolhido logo depois, iremos concluir que a escolha do ε_0 será também universal.

De (6.24) e da condição de normalização de \mathbf{u} , segue que

$$\|\mathbf{h}\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq 1 + \delta < 2;$$

entretanto, da teoria de regularidade disponível para \mathbf{h} , veja por exemplo [3], capítulos 4 e 5, podemos estimar

$$\sup_{B_r} |\mathbf{h}(\mathbf{X}) - (\nabla \mathbf{h}(0) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{h}(0))| \leq C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda) \cdot r^{1+\alpha_0} \quad \forall r > 0, \quad (6.27)$$

$$|\nabla \mathbf{h}(0)| + |\mathbf{h}(0)| \leq C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda), \quad (6.28)$$

para alguma constante universal $0 < C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda)$. Iremos denotar

$$\ell(\mathbf{X}) := \nabla \mathbf{h}(0) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{h}(0). \quad (6.29)$$

Prontamente, segue da desigualdade triangular que

$$\sup_{B_{\rho_0}} |\mathbf{u}(\mathbf{X}) - \ell(\mathbf{X})| \leq \delta + C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda) \cdot \rho_0^{1+\alpha_0}. \quad (6.30)$$

Agora, fixado um expoente $\alpha < \alpha_0$, iremos escolher ρ_0 e δ de modo que

$$\rho_0 := \alpha_0^{-\alpha} \sqrt[\alpha_0 - \alpha]{\frac{1}{2C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda)}}, \quad (6.31)$$

$$\delta := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda)} \right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha_0 - \alpha}}, \quad (6.32)$$

onde $0 < C(N, \lambda, \Lambda)$ é a constante universal que aparece em (6.27). Ressaltamos que as escolhas acima dependem somente de N, λ, Λ e do expoente $0 < \alpha < \alpha_0$ fixado. Finalmente, combinando (6.27), (6.30), (6.31) e (6.32), obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\rho_0}} |\mathbf{u}(\mathbf{X}) - \ell(\mathbf{X})| &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2C(N, \lambda, \Lambda)} \right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha_0-\alpha}} + C(N, \lambda, \Lambda) \cdot \rho_0^{1+\alpha} \cdot \rho_0^{\alpha_0-\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \rho_0^{1+\alpha} + \frac{1}{2} \rho_0^{1+\alpha} \\ &= \rho_0^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

e o Lema está provado. \square

Na sequência, iremos iterar o Lema 6.2 em bolas diádicas para obtermos a precisa oscilação de decaimento da diferença entre \mathbf{u} e as funções afim ℓ_k que serão definidas abaixo.

Lema 6.3. *Sob as condições do Lema anterior, existe uma sequência de funções afim $\ell_k(\mathbf{X}) := \mathbf{a}_k + \vec{\mathbf{b}}_k \cdot \mathbf{X}$ satisfazendo*

$$|\mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_k| + \rho_0^k |\vec{\mathbf{b}}_{k+1} - \vec{\mathbf{b}}_k| \leq C_0 \rho_0^{(1+\alpha)k}, \quad (6.33)$$

tal que

$$\sup_{B_{\rho_0^k}} |\mathbf{u}(\mathbf{X}) - \ell_k(\mathbf{X})| \leq \rho_0^{k(1+\alpha)}. \quad (6.34)$$

onde α é um expoente fixado, tal que

$$\alpha \in (0, \alpha_0) \cap \left(0, \frac{1}{1+\gamma} \right] \quad (6.35)$$

e C_0 uma constante universal que depende apenas da dimensão e elipticidade.

Demonstração. Para esta demonstração iremos utilizar indução finita. O caso $k = 1$ segue exatamente do Lema 6.2. Suponha que as estimativas (6.33) e (6.34) sejam válidas para $j = 1, 2, \dots, k$. Defina seguinte função reescalada

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}) := \frac{(\mathbf{u} - \ell_k)(\rho_0^k \mathbf{X})}{\rho_0^{k(1+\alpha)}}.$$

Segue da hipótese de indução que $|\mathbf{v}| \leq 1$. Além disso, \mathbf{v} satisfaz a seguinte equação diferencial

$$|\rho^{-k\alpha} \mathbf{b}_k + \nabla \mathbf{v}|^\theta F_k(\mathbf{X}, D^2 \mathbf{v}) = f_k(\mathbf{X}),$$

onde

$$f_k(\mathbf{X}) = \rho_0^{k[1-\alpha(1+\theta)]} f(\rho_0^k \mathbf{X})$$

e

$$F_k(\mathbf{X}, \mathbf{M}) := \rho_0^{k(1-\alpha)} F\left(\rho_0^k \mathbf{X}, \frac{1}{\rho_0^{k(1-\alpha)}} \mathbf{M}\right).$$

Podemos observar que o operador F_k é (λ, Λ) -elíptico. Além disso, a ω -norma da oscilação dos respectivos coeficientes de F_k , como definido em (6.4), que posteriormente serão chamados de β_k , não aumenta. Ademais, temos a seguinte estimativa

$$\|f_k\|_{L^\infty(B_1)} \leq \rho_0^{k[1-\alpha(1+\theta)]} \|f\|_{L^\infty(B_{\rho_0^k})}. \quad (6.36)$$

Devido a escolha do expoente feita em (6.35), a saber $\alpha \leq \frac{1}{1+\gamma}$, concluímos que (F_k, f_k) satisfazem as hipóteses de pequenez (6.26), do Lema 6.2.

Desta forma, mostramos que v está sob as hipóteses do Lema 6.2, que garante a existência de uma função afim $\tilde{\ell}(\mathbf{X}) := \mathbf{a} + \vec{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{X}$ com $|\mathbf{a}| + |\vec{\mathbf{b}}| \leq C(\mathbf{N}, \lambda, \Lambda)$, tal que

$$\sup_{B_{\rho_0}} |v(\mathbf{X}) - \tilde{\ell}(\mathbf{X})| \leq \rho_0^{1+\alpha}. \quad (6.37)$$

Na sequência, definamos a $(k+1)$ -ésima função afim, $\ell_{k+1}(\mathbf{X}) := \mathbf{a}_{k+1} + \vec{\mathbf{b}}_{k+1} \cdot \mathbf{X}$, da seguinte forma:

$$\mathbf{a}_{k+1} := \mathbf{a}_k + \rho_0^{(1+\alpha)k} \mathbf{a} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{b}}_{k+1} := \vec{\mathbf{b}}_k + \rho_0^{\alpha k} \vec{\mathbf{b}}.$$

Desfazendo o reescalonamento em (6.37), obtemos

$$\sup_{B_{\rho_0^{k+1}}} |u(\mathbf{X}) - \ell_{k+1}(\mathbf{X})| \leq \rho_0^{(k+1)(1+\alpha)}$$

e a prova do Lema 6.3 está completa. □

6.5 Regularidade local sob o regime de pequenez

Nesta seção, ainda sob as hipóteses dos Lemas 6.2 e 6.3, iremos estabelecer, para um expoente fixado α satisfazendo a condição (6.35), a existência de uma função afim

$$\ell_\star(\mathbf{X}) := \mathbf{a}_\star + \vec{\mathbf{b}}_\star \cdot \mathbf{X},$$

tal que

$$|\vec{\mathbf{b}}_\star| + |\mathbf{a}_\star| \leq C,$$

onde

$$\sup_{B_r} |u(X) - \ell_*(X)| \leq Cr^{1+\alpha}, \quad \forall r \ll 1, \quad (6.38)$$

para uma constante positiva C que depende somente das constantes $N, \lambda, \Lambda, \theta$ e α .

Inicialmente, segue de (6.33), que os coeficientes da sequência de funções afim ℓ_k geradas no Lema 6.3, ou seja, \vec{b}_k e a_k , são sequências de Cauchy em \mathbb{R}^N e em \mathbb{R} , respectivamente. Sejam \vec{b}_* e a_* os coeficientes limites, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{b}_k =: \vec{b}_* \in \mathbb{R}^N \quad (6.39)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k =: a_* \in \mathbb{R}. \quad (6.40)$$

Além disso, segue da estimativa obtida em (6.33) que

$$|a_* - a_k| \leq \frac{C_0}{1 - \rho_0} \rho_0^{k(1+\alpha)}, \quad (6.41)$$

$$|\vec{b}_* - \vec{b}_k| \leq \frac{C_0}{1 - \rho_0} \rho_0^{k\alpha}. \quad (6.42)$$

Agora, fixado $0 < r < \rho_0$, iremos escolher $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_0^{k+1} < r \leq \rho_0^k.$$

Por fim, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \sup_{B_r} |u(X) - \ell_*(X)| &\leq \sup_{B_{\rho_0^k}} |u(X) - \ell_*(X)| \\ &\leq \sup_{B_{\rho_0^k}} |u(X) - \ell_k(X)| + \sup_{B_{\rho_0^k}} |\ell_k(X) - \ell_*(X)| \\ &\leq \rho_0^{k(1+\alpha)} + \frac{C_0}{1 - \rho_0} \rho_0^{k(1+\alpha)} \\ &\leq \frac{1}{\rho_0^{1+\alpha}} \left[1 + \frac{C_0}{1 - \rho_0} \right] \cdot r^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

e a prova do Teorema 6.1.1 está completa. \square

6.6 Regime de pequenez

Nesta última seção iremos mostrar que para concluirmos a prova do Teorema 6.1.1 é suficiente obter que a estimativa (6.38) é válida na origem para uma solução u sob as hipóteses dos Lemas 6.2 e 6.3.

Seja $v \in C(B_1)$ uma solução de viscosidade de

$$\mathcal{H}(X, \nabla v)F(X, D^2v) = f(X),$$

onde \mathcal{H} satisfaz (8) e F é um operador (λ, Λ) -elíptico com coeficientes contínuos, ou seja, que satisfazem (1.2) e (6.3). Fixado um ponto $Y_0 \in B_{1/2}$ e definindo $u: B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$u(X) := \frac{v(\eta X + Y_0)}{\tau},$$

para parâmetros η e τ a serem determinados, podemos observar que u é solução no sentido da viscosidade para

$$\mathcal{H}_{\eta, \tau}(X, \nabla u)F_{\eta, \tau}(X, D^2u) = f_{\eta, \tau}(X),$$

onde

$$F_{\eta, \tau}(X, M) := \frac{\eta^2}{\tau} F\left(\eta X + Y_0, \frac{\tau}{\eta^2} M\right) \quad (6.43)$$

$$\mathcal{H}_{\eta, \tau}(X, \vec{p}) := \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^\theta \mathcal{H}\left(\eta X + Y_0, \frac{\tau}{\eta} \vec{p}\right) \quad (6.44)$$

$$f_{\eta, \tau}(X) := \frac{\eta^{\theta+2}}{\tau^{\theta+1}} f(\eta X + Y_0). \quad (6.45)$$

Assim, como comentado na seção 1, $F_{\eta, \tau}$ é uniformemente elíptica com as mesmas constantes de elipticidade do operador original F , ou seja, tal operador é (λ, Λ) -elíptico. Por uma análise similar, $\mathcal{H}_{\eta, \tau}$ satisfaz a mesma condição de degenerescência (8), com as mesmas constantes. Vamos inicialmente escolher

$$\tau := \max\{1, \|v\|_{L^\infty(B_1)}\},$$

para que tenhamos, $|u| \leq 1$ em $B_1(Y_0)$. Agora, para o ε_0 universal que surge nas hipóteses do Lema 6.2, faremos a seguinte escolha

$$\eta := \min\left\{1, \lambda \cdot (\varepsilon_0 \|f\|_{L^\infty}^{-1})^{\frac{1}{\theta+2}}, \omega^{-1}\left(\frac{\varepsilon_0}{\|F\|_\omega}\right)\right\},$$

onde $\omega^{-1}\left(\frac{\varepsilon_0}{\|F\|_\omega}\right)$ foi tomado pelo simples fato da função ω ser crescente em $(0, 1)$. A partir de tais escolhas teremos,

- ✓ $|u| \leq 1$ em B_1 ;
- ✓ $\|f_{\eta, \tau}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_0$;
- ✓ $\|M\|^{-1} \|F_{\eta, \tau}(X, M) - F_{\eta, \tau}(0, M)\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0$.

Feito tais escolhas, \mathbf{u} estará sob as hipóteses do Lema 6.2. Provada a estimativa (6.38) para \mathbf{u} em \mathcal{O} , obteremos a estimativa $C^{1,\beta}$ apropriada para a função original \mathbf{v} em termos de $\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(B_1)}$ e $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(B_1)}$ em um ponto genérico $Y_0 \in B_{1/2}$. De fato, por (6.38) temos

$$\sup_{B_r(Y_0)} |\mathbf{v}(Y) - \ell_\star(Y)| \leq C \frac{\tau}{\eta^{1+\alpha}} r^{1+\alpha}, \quad \forall r \ll 1. \quad (6.46)$$

Em suma, a estratégia acima atesta que, para mostramos o Teorema 6.1.1, é suficiente trabalhar sob o regime de pequenez posto como hipótese na demonstração do Lema 6.2. Uma vez estabelecida a estimativa regularidade ótima para a função normalizada \mathbf{u} , a estimativa correspondente para \mathbf{v} será prontamente obtida.

Referências Bibliográficas

- [1] ALT, H. M.; CAFFARELLI, L. A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.* , v. 325, p. 105-144, 1981.
- [2] ———; PHILLIPS, D. A free boundary problem for semilinear elliptic equations. *J. Reine Angew. Math.*, v. 368, p. 63-107, 1986.
- [3] CABRE, X.; CAFFARELLI, L.A. *Fully nonlinear elliptic equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. (American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 43)
- [4] ———; ———. Interior $C^{2,\alpha}$ regularity theory for a class of nonconvex fully nonlinear elliptic equations. *J. Math. Pures Appl.*, v. 82, p. 573-612, 9, 2003.
- [5] CAFFARELLI, L. A. The regularity of free boundaries in higher dimensions. *Acta Math.*, v. 139, n. 3-4, p. 155-184, 1977.
- [6] ———. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. *Ann. of Math.* (2), v. 130, n. 1, p. 189-213, 1989.
- [7] ———; SALAZAR, J. Solutions of fully nonlinear elliptic equations with patches of zero gradient: existence, regularity and convexity of level curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 354, n. 8, p. 3095-3115, 2002.
- [8] ———; ———; SHAHGHOIAN, H. Free-boundary regularity for a problem arising in superconductivity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, v. 171, n. 1, p. 115-128, 2004.
- [9] CHAPMAN, S.J. A mean-field model of superconducting vortices in three dimensions. *SIAM J. App. Math.*, v. 55, p. 1259-1274, 1995.
- [10] CRANDALL, M. G.; EVANS, M; LIONS, P.L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Transactions of the A.M.S.*, v. 182, p. 487-502, 1984.

- [11] ———; LIONS, P.L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Transactions of the A.M.S.*, v. 277, p. 1-42, 1983.
- [12] ———; ———; ISHII, H. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, v. 27, n. 1, p. 1-67, 1992.
- [13] ———; RABINOWITZ, P. H.; TARTAR, L. On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity. *Comm. Partial Differential Equations*, v. 2, n. 2, p. 193-222, 1977.
- [14] EVANS, L.C. On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods. *Israel Journal of Mathematics*, v. 36, n. 3, p. 225-247, 1980.
- [15] ———; SAVIN, O. $C^{1,\alpha}$ regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, v. 32, p. 325-347, 2008.
- [16] ———; SMART C.K. Everywhere differentiability of infinity harmonic functions. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, v. 42, p. 289-299, 2011.
- [17] FELMER, P.; QUAAS, A.; SIRAKOV, B. Existence and regularity results for fully nonlinear equations with singularities. *Math. Ann.*, p. 1-24, 2011.
- [18] GIUSTI, E. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. New Jersey: World Scientific Publishing, 2003.
- [19] GIAQUINTA, M.; GIUSTI, E. Differentiability of minima of non-differentiable functionals. *Invent. Math.*, v. 72, p. 285-298, 1983.
- [20] ———; ———. Sharp estimates for the derivatives of local minima of variational integrals. *Bollettino U.M.I.*, v. 6, 3-A, p. 239-248, 1984.
- [21] IMBERT, C.; SILVESTRE L. $C^{1,\alpha}$ regularity of solutions of degenerate fully non-linear elliptic equations. Preprint.
- [22] ———. Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and Harnack inequality for degenerate/singular fully non-linear elliptic equations. *J. Differential Equations*, v. 250, p. 1553-1574, 2011.
- [23] WANIEC, T.; MANFREDI J. Regularity of p-harmonic functions in the plane. *Revista Matematica Iberoamericana*, v. 5, p. 1-9, 1989.
- [24] JENSEN, R.; LINDQVIST, P.; MANFREDI, J. Uniqueness criteria for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 38, p. 629-667, 1989.

- [25] JUUTINEN, P.; LINDQVIST, P.; MANFREDI, J.J. On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear elliptic equation. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 33, p. 699-717, 2001.
- [26] KRYLOV, N. V. Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, v. 46, n. 3, p. 487-523, 1982.
- [27] ———. Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, v. 47, p. 75-108, 1983.
- [28] ———; SAFONOV, M. V. An estimate of the probability that a diffusion process hits a set of positive measure. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, v. 245, p. 235-255, 1979.
- [29] LEE, K.; SHAHGOLIAN, H. Regularity of a free boundary for viscosity solutions of nonlinear elliptic equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, v. 54, n. 1, p. 43-56, 2001.
- [30] ———; ———. Hausdorff dimension and stability for the p-obstacle problem ($2 < p < \infty$). *J. Differential Equations*, v. 195, n. 1, p. 14-24, 2003.
- [31] NADIRASHVILI, N.; VLADUT, S. Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations. *Geom. Funct. Anal.*, v. 17, n. 4, p. 1283-1296, 2007.
- [32] ———; ———. Singular viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations. *J. Math. Pures Appl.*, v. 89, n. 2, p. 107-113, 2008.
- [33] ———; ———. Nonclassical Solutions of Fully Nonlinear Elliptic Equations II. Hessian Equations and Octonions. *Geom. Funct. Anal.*, v. 21, p. 483-498, 2011.
- [34] PHILLIPS, D. A minimization problem and the regularity of solutions in the presence of a free boundary. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 32, p. 1-17, 1983.
- [35] ———. Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem. *Comm. Partial Differential Equations*, v. 8, p. 1409-1454, 1983.
- [36] RICARTE, G. *Teoria de regularidade para equações elípticas totalmente não-lineares com potenciais singulares e problemas de fronteira livre associado*. 2011. Tese 145 f. (Doutorado em Matemática), Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, 2011.
- [37] ———; TEIXEIRA, E. Fully nonlinear singularly perturbed equations and asymptotic free boundaries. *J. Funct. Anal.*, v. 261, n. 6, p. 1624-1673, 2011.

- [38] ROSSI, J.; TEIXEIRA, E.; URBANO, J. Optimal regularity at the free boundary for the infinity obstacle problem. Preprint. <http://arxiv.org/abs/1206.5652>.
- [39] SAVIN, O. C^1 regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, v. 176, p. 351-361, 2005.
- [40] SILVA, J. *Teoria geométrica da medida e aplicações*. 2011. Dissertação 209 f. (Mestrado em Matemática). Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, 2011.
- [41] SILVESTRE, L.; TEIXEIRA, E. Asymptotic regularity estimates for fully nonlinear equations. Preprint.
- [42] TEIXEIRA, E. A variational treatment for general elliptic equations of the flame propagation type: regularity of the free boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, v. 25, n. 4, p. 633-658, 2008.
- [43] ———. Sharp regularity for general Poisson equations with borderline sources. To appear in *J. Math. Pures Appl.*
- [44] ———. Universal moduli of continuity for solutions to fully nonlinear elliptic equations. Preprint. <http://arxiv.org/abs/1111.2728>.
- [45] ———. Regularity for quasilinear equations on degenerate singular sets. Preprint. <http://arxiv.org/abs/1204.6607>.
- [46] URALTSEVA, N. Degenerate quasilinear elliptic systems. *Zap. Na. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, v. 7, p. 184-222, 1968.
- [47] WEISS, G. *Partial regularity for weak solutions of an elliptic free boundary problem*. *Comm. Partial Differential Equations*, v.23, no. 3-4, p. 439-455, 1998.
- .