



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

JEFFERSON MENDES AGUIAR PAIXÃO

FORMALISMO BPS EM MODELOS BABY-SKYRME

FORTALEZA

2019

JEFFERSON MENDES AGUIAR PAIXÃO

FORMALISMO BPS EM MODELOS BABY-SKYRME

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santo de Almeida.

FORTALEZA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

-
- P172f Paixão, J.M.A.
Formalismo BPS em Modelos Baby-Skyrme / Jefferson Mendes Aguiar Paixão. – Fortaleza, 2019.
86 f.:il. color.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2019.
Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santo de Almeida.
1. Modelo Sigma $O(3)$. 2. Sólitons. 3. Baby-Skyrme. 4. Acoplamento Não-Mínimo. I. Título.

CDD 530

JEFFERSON MENDES AGUIAR PAIXÃO

FORMALISMO BPS EM MODELOS BABY-SKYRME

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 18/07/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santo de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Frankin de Souza Veras
Unichristus

Prof. Dr. Davi Monteiro Dantas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a minha família..

AGRADECIMENTOS

Agradeço a existência, pela oportunidade de poder sentir e entender, mesmo que infimamente, a maravilhosa natureza, da qual faço parte.

Agradeço aos meus pais Adriana e Raimundin, aos meus irmãos Jenim, Jonnata e Rairinha pelo amor incondicional

A minha companheira Natiane por ter tido a paciência e compreensão nesse período em que estive fora, além dos melhores sentimentos e por me levantar nos momentos difíceis.

Gratidão ao meu orientador, professor Carlos Alberto, por ter aceitado me orientar, pela escolha do tema e pela paciência e atenção ao longo desse período.

Aos meus familiares, Vó Marina, Vô ambrosio, Tias e tios, Santana, Rita, Bia, Leôncio, por acreditarem que eu possa conquistar coisas boas.

Aos meus grandes amigos Kevin e Mapse pelo acolhimento, pela forte amizade, pela ajuda e por terem dado mais cores aos meus dias em fortaleza, sem eles tudo seria mais difícil.

Ao amigo Ícaro pela ajuda fundamental em partes desse trabalho e pelas prazerosas e preteniosas conversas e ideias sobre física fundamental.

Aos meus amigos ibiapabanos Carlos, Davi, Lucas, e outros pelas conversas, sensibilidade, reflexões profundas, músicas tocadas, pelo espírito de juventude e por me fazer um ser humano melhor. Sem dúvidas, foram fundamentais pela maturidade e o foco nesse período.

Agradeço a todos os amigos que fiz do departamento, Misael, Cleo, Cleitin, Michelangelo, Adailton, Ramon, Newton, Rubens, Leandro, Lucas, Daniel, Marciano, Luciano, entre outros, pelas boas conversas de física e pelos momentos de descontração.

Agradeço ao professor Renan por me instigar e pelas impressionantes e prazerosas aulas de Mecânica Quântica e Eletrodinâmica.

Ao Professor Maluf pelo acolhimento e ao professor Carlos William pela simpatia e as proveitosas aulas de Mecânica estatística.

Ao professor Helayel, pela humanidade, no melhor sentido da palavra, e pela vontade de transmitir conhecimento, através das valiosas aulas no site Professor Global, que depois que descobri, minhas madrugadas de estudo foram muito mais produtivas.

Ao meu velho e precioso Di Giorgio por dar as notas e acordes que eu penso, e pela companhia diária em Fortaleza.

Ao povo brasileiro que através da FUNCAP e CNPQ financiaram minha pesquisa. Sem esse apoio seria impossível ao menos iniciar esse trabalho.

E por fim, a todos que me ajudaram diretamente ou indiretamente nesse meu período em Fortaleza, sinto apenas satisfação...

*“Todo mundo tem problema
quando vive sem amor”
(Odair José)*

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma revisão sobre o modelo sigma $O(3)$ não-linear e o modelo *Baby-Skyrme* que é uma generalização do primeiro. Além disso, buscamos aplicar o formalismo BPS em modelos com Skyrmons. Introduzimos o conceito de soluções topológicas e sua conexão com a quebra espontânea de simetria. Então, mostramos o mecanismo de Higgs, que permite a geração de massa das partículas de *gauge*. Em seguida, abordamos o modelo sigma não-linear que permite soluções não-triviais de campo com a introdução de um vínculo na lagrangeana e encontramos soluções exatas para o modelo através do formalismo BPS. Visto o problema da invariância de escala dos sólitons, vimos que é possível quebrar essa invariância através da adição de campos de spin 1, junto com um termo de potencial adequado, vimos que tal adição é bastante natural para a descrição de um sistema realista. Nesse sentido, outra escolha interessante é considerar um modelo de Skyrme. Evidenciamos as motivações e aplicações de uma teoria com Skyrmons e vimos os modelos recentes tratados com o Formalismo BPS. Encontraremos as equações BPS de um novo modelo Skyrme-Maxwell-Sigma-Model generalizado através uma função denominada *superpotencial*. Por fim, investigamos as consequências de Skyrmons acoplamentos não-minimamente por meio de um termo de Pauli.

Palavras-chave: Modelo Sigma $O(3)$. Sólitons. Baby-Skyrme. Acoplamento Não-Mínimo.

ABSTRACT

In this work we present a review on the nonlinear sigma $O(3)$ model and the baby Skyrme model, which is a generalization of the first one. In addition, we seek to apply the BPS formalism in models with Skyrmions. We introduce the concept of topological solutions and their connection to the spontaneous breaking of symmetry. Then, we show the Higgs mechanism, which allows mass generation of the gauge particles. Then, we will approach the non-linear sigma model that allows non-trivial field solutions with the introduction of a link in the Lagrangean. We find exact solutions to the model through BPS formalism. Given the problem of the invariance of scale of the solitons, we see that it is possible to break this invariance by adding spin 1 fields together with a suitable potential term, we see that such an addition is quite natural for the description of a realistic system. In that sense, another interesting choice is to consider a Skyrme model. We demonstrate the motivations and applications of a theory with Skyrmions and we see the recent models treated with BPS Formalism. We find the BPS equations of a new Skyrme-Maxwell-Sigma-Model generalized model through a function called textit superpotential. Finally, we investigate the consequences of non-minimally coupling Skyrmions by means of a Pauli term.

Keywords: $O(3)$ Sigma Model. Solitons. Skyrme. Non-Minimal Coupling.

Lista de Figuras

Figura 1 – (a) estruturas prevista pela simulação de Monte Carlo. (b) esquema de uma configuração de spin de Skyrmons. (c) Imagem reais de estruturas de Skyrmons obtidas experimentalmente para um campo magnético fraco de $50mT$ aplicado em uma placa fina. As cores e as setas representam a direção da magnetização em cada ponto. (d) imagem c ampliada. Fonte [1]	16
Figura 2 – Configuração de campo tipo <i>kink</i> (linha contínua) da solução positiva e <i>anti-kink</i> (linha tracejada) da solução negativa.	20
Figura 3 – Densidade de Energia em função da posição. Fixamos $a = 1$. Temos $\lambda = 1$ (curva azul), $\lambda = 1.5$ (curva laranja) e $\lambda = 2$ (curva verde).	21
Figura 4 – Potencial em função do campo com mínimo degenerado (caso $m < 0$). Por conveniência tomamos $b=1$. Curva preta para $\lambda = 1$, azul para $\lambda = 1.5$ e vermelha para $\lambda = 2$	27
Figura 5 – Potencial tipo "chapéu mexicano" em função dos campos ϕ_1 e ϕ_2 com mínimo degenerado continuamente, onde tomamos $\lambda = 1$ e $\mu = 5$	28
Figura 6 – Em (a) dizemos que o conjunto V é uma vizinhança do ponto a . Já em (b), por menor que seja o aberto, o retângulo não pode ser uma vizinhança dos vértices.	78
Figura 7 – Deformação contínua de uma rosquinha em uma caneca	79
Figura 8 – (a): mapeamento trivial (B.1) do círculo em um ponto. (b): mapeamento não-trivial (B.2) homotópico ao (B.1). (c): mapeamento (B.3), este não pode ser deformado nos anteriores.	80

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{L}	Densidade de Lagrangeana
\mathcal{H}	Densidade de Hamiltoniano
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
γ	Fator de Lorentz
$T^{\mu\nu}$	Tensor Energia-Momento
$\epsilon^{\mu\nu}, \epsilon^{\mu\nu\sigma}$	Pseudo-Tensor de Levi-Civita
$A_\mu = (A_0, \vec{A})$	4-Potencial Vetor
$F_{\mu\nu}$	Tensor do Campo Eletromagnético
D_μ	Derivada Covariante
δ_0	Varição Funcional

LISTA DE SIGLAS

SSB	Spontaneous Symmetry Breaking - Quebra Espôntanea de Simetria
SM	Standard Model - Modelo Padrão
CS	Chern-Simons
MCS	Maxwell-Chern-Simons

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	ONDAS SOLITÁRIAS E SÓLITONS	19
2.1	Kinks	19
2.2	Setores Topológicos	22
2.3	Método de Bogomol'nyi	24
2.4	Quebra Espontânea de Simetria	25
2.4.1	Simetrias Globais	25
2.4.1.1	Bósons de Nambu-Goldstone - Quebra Espontânea da Simetria Global $U(1)$	27
2.4.2	Simetrias Locais	30
2.4.2.1	Mecanismo de Higgs	30
3	TERMO DE CHERN-SIMONS	33
4	MODELO SIGMA $O(N)$ NÃO-LINEAR	35
4.1	Teorema de Derrick	35
4.2	Modelo Sigma $O(3)$ Não-Linear	37
4.2.1	Soluções Exatas e Equações BPS	39
5	SÓLITONS EM TEORIAS DE GAUGE	45
5.1	Gaugeamento $U(1)$ com Termo de Maxwell	46
5.1.1	Resolvendo as equações BPS	48
5.2	Gaugeamento $U(1)$ com Termo de Chern-Simons	49
6	MODELO BABY SKYRME	53
6.1	Formalismo BPS no modelo Baby Skyrme	54
6.1.1	Formalismo BPS no modelo Baby Skyrme não-gaugeado	54
6.1.2	Formalismo BPS para Skyrme-Maxwell Restrito	55
6.1.3	Formalismo BPS para Skyrme-Chern-Simons	57
6.1.4	Tentativa de Implementação do Formalismo BPS	60
6.1.5	Um modelo Chern-Simons-Baby-Skyrme BPS	62
6.2	Baby-Skyrme e Corrente de Schroers - Uma Possível Generalização	64
6.3	Modelo Maxwell-Skyrme-Sigma-Model generalizado	66
6.4	Termo de Pauli e Acoplamento não-mínimo	68
6.4.1	Modelo BPS com acoplamento não-mínimo	69
7	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	71
	APÊNDICE A – TEOREMA DE NOETHER	73
A.1	Tensor Energia-Momento	77
	APÊNDICE B – UMA BREVE DISCUSSÃO DA TEORIA DA HOMOTOPIA	78
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

Desde meados do século XX uma abordagem nas interpretações em modelos de teorias quânticas de campos tem sido bastante explorada. Trata-se do estudo de soluções de campo não-lineares que são candidatas a novas partículas de uma teoria [2]. Contudo, diferentemente das partículas elementares que surgem da quantização de modos de vibração das flutuações dos campos clássicos, essas novas partículas são caracterizadas por possuírem uma estrutura topológica.

Geralmente, o caráter topológico dessas estruturas é carregado por grandezas inteiras, a *carga topológica* em $(1 + 1)$ dimensões ou o *winding number* N para dimensões maiores. Essas grandezas são proporcionais a energia. O método de encontrar o mínimo de energia associada com a carga topológica é chamado de formalismo BPS (Bogomolny-Prasad-Sommerfield), a configuração de campo que descreve esse limite de energia satisfaz as chamadas *equações BPS*, ou equações *auto-duais*¹. Nesse sentido, um sistema com $N = 1$ é considerado estável, uma vez que caracteriza a configuração de vácuo (mínima energia). Geralmente a energia desses sistemas é bem definida e localizada numa região do espaço, a configuração de campo devido a essa energia é dita um *sóliton topológico*, ou simplesmente sóliton.

Sólitons podem surgir em sistemas de dimensões diferentes, por exemplo, em um dimensão surgem os *kinks*, em duas dimensões os *vórtices* e *lumps*, em três os monopolos e *Skyrmions*, em quatro dimensões os *instantons*. Além disso, sólitons também surgem em teorias de cordas e são denominados *branas*. Nesse trabalho focaremos apenas nos modelos bidimensionais que apresentam soluções tipo vórtice, muito embora, ao longo do texto abordemos alguns modelos em outras dimensões por motivos didáticos, como é o caso dos *kinks*.

É importante ressaltar que, estruturas solitônicas estão presentes nos mais diversos fenômenos da natureza. Teorias efetivas, teorias de Yang-Mills, espalhamentos de partículas elementares, supersimetria, modelos cosmológicos, modelos de dimensões extras (muitas dessas descrições estão presentes nas referências [2, 3]). Além disso, sólitons podem modelar muitos fenômenos da matéria condensada [4, 5]. Em biofísica, sólitons tem podem modelar cadeias protéicas [6].

Nesse contexto, existe um grande interesse, em teorias de campos, no estudo de sistemas de dimensões mais baixas. Mais especificamente, os chamados modelos sigma não-lineares ganham atenção devido sua possibilidade de aplicações, seja em fenômenos da matéria condensada como o ferromagnetismo isotrópico de Heisenberg [7], ou pela sua conexão com modelos mais abstratos como as teorias de Yang-Mills [8, 9, 10] que dão base ao Modelo Padrão das Partículas Elementares (SM) e em modelos de dimensões extras, como nas teorias de cordas [11, 12, 13].

Inicialmente, o modelo Sigma foi introduzido por Gell-mann e Levy [14], ele descreve o mapeamento dos valores de um campo escalar em alguma variedade denominada de *espaço alvo*, ou *target space*. O nome modelo sigma é devido a um méson escalar homônimo introduzido anteriormente por Schwinger[15].

Nas últimas décadas houve uma frequente investigação dos aspectos clássicos de alguns modelos, no que diz respeito a busca de soluções solitônicas, que basicamente são soluções estáticas de campo no espaço de Minkowski com energia finita e localizada. Tal busca pode ser justificada pelo questionamento "é possível existir estados ligados estáveis

¹tais equações devem reproduzir as equações dinâmicas do sistema, isto é, as equações de Euler-Lagrange

que não são inerentemente quânticos?" A resposta é sim. Através dos sólitons que são soluções de equações não-lineares. Veremos que sua estabilidade está associada a uma quantidade chamada *carga topológica*, que está diretamente relacionada ao valores assintóticos dos campos.

Um fato interessante é que os modelos sigma possuem soluções exatas em (2+1) dimensões, tais soluções são chamadas de *vórtices*. Contudo, existe um critério, denominado teorema de Derrick [16], que analisa o comportamento da energia quando são feitas transformações de escala. Assim, o teorema mostra que tais soluções apresentam um problema de invariância de escala, isto é, elas podem crescer ou decair infinitamente durante uma evolução temporal sem que a energia varie, tornando-se inadequada sua interpretação como partícula. Por outro lado, o teorema de Derrick também fornece caminhos para contornar a invariância de escala, entre eles estão o gaugeamento $U(1)$, que consiste em acoplar um campo de *gauge* ao campo escalar através da introdução de uma derivada covariante, e acrescentar uma dinâmica para esse campo na lagrangeana além de um potencial específico. Outra maneira é através a introdução de termos que contém derivadas de ordem superior. Nesse contexto, a introdução de um termo de *Skyrme* [17] pode garantir a estabilidade das soluções, além de fornecer um maior panorama de aplicações.

Modelos planares envolvendo sólitons topológicos vêm realizando um papel imprescindível nas mais diversas áreas da física teórica, seja em baixas energias em sistemas da matéria condensada como na spintrônica, ou em altas energias como a cosmologia e a física de partículas. Um desses modelos que vem sendo investigado recentemente é uma generalização do modelo sigma $O(3)$ não-linear em $(2 + 1)$ dimensões, conhecido por modelo *Baby Skyrme* e suas soluções solitônicas por *Skyrmions*.

O termo *baby Skyrme* foi designado a redução dimensional planar do modelo *Skyrme* [18], em que bárions são descritos por sólitons topológicos. Assim, tal redução é interessante pelo fato de emular características do modelo em $(3 + 1)$ dimensões [19], além de simplificar significativamente os cálculos numéricos. O modelo foi inicialmente obtido a partir da Cromodinâmica Quântica (QCD) como uma teoria efetiva de baixas energias no limite que o número de cor é muito grande [20]. Mais recentemente, foi mostrado que o modelo *baby Skyrme* num espaço Ads surge em teoria de cordas como um análogo de dimensão mais baixa do modelo de Sakai-Sugimoto da QCD holográfica [21, 22].

No contexto da matéria condensada, *skyrmions* têm sido bastante investigados, sendo promissores sobretudo na *spintrônica*², pois podem descrever estruturas de spin em termos de vórtices em um material magnético. Tais estruturas são denominadas *Skyrmions magnéticos* [23, 24]. É importante ressaltar que recentemente *Skyrmions magnéticos* foram observados em materiais ferromagnéticos e semicondutores³ [25, 26, 23, 27]. A primeira observação (figura 1) foi feita num filme fino de $Fe_{0.5}Co_{0.5}Si$ usando um microscópio eletrônico de transmissão (MET), as estruturas surgiram quando foi aplicado um campo magnético de $50 - 70mT$ normal ao fio [1]. Um único vórtice tem tamanho entre $10nm$ a $100nm$, tendo assim um altíssimo potencial para futuros dispositivos revolucionários de armazenamento informação. Se supormos que cada vórtice num material de alta densidade magnética armazena 1bit de informação, uma estrutura da ordem de $1cm^2$ pode armazenar aproximadamente 1Terabyte de dados. Além disso, podem descrever excitações de quase-partículas associadas ao efeito Hall quântico fracionário em um gás de elétrons bidimensional [28, 29], que também são de interesse para novas tecnologias.

²é uma tecnologia emergente que explora a o spin do elétron, grandeza inerentemente quântica. Isso difere da conhecida *eletrônica* que diz respeito as propriedades do movimento translacional.

³ou seja, geralmente em temperaturas baixas.

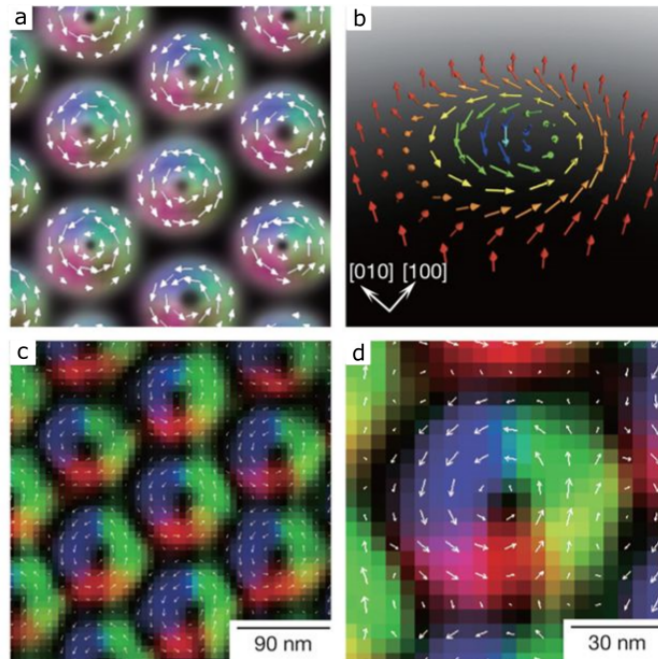


Figura 1: (a) estruturas prevista pela simulação de Monte Carlo. (b) esquema de uma configuração de spin de Skyrmions. (c) Imagem reais de estruturas de Skyrmions obtidas experimentalmente para um campo magnético fraco de $50mT$ aplicado em uma placa fina. As cores e as setas representam a direção da magnetização em cada ponto. (d) imagem c ampliada. Fonte [1]

Nesse sentido, uma vez que tais efeitos são considerados, os *Skyrmions* devem possuir carga elétrica bem como fluxo magnético. Então, a extensão do modelo *baby Skyrme* fazendo um acoplamento com o campo eletromagnético - um termo de Maxwell - através de um *gaugeamento* surge de uma forma natural. Entretanto, em [30] foi mostrado que o campo elétrico das soluções tipo Maxwell-Skyrme planares é sempre nulo. Contudo, podemos obter Skyrmions eletricamente carregados trocando a dinâmica do campo de gauge por um termo de Chern-Simons. Um modelo Maxwell-Chern-Simons-Skyrme foi investigado recentemente em [31, 32]. Um fato interessante nesse modelo é que o fluxo magnético total e a carga elétrica associados ao termo de Chern-Simons são quantizáveis, embora não-topológicas.

De outro ponto de vista, é importante ressaltarmos que a configuração solitônica associada ao modelo *baby Skyrme* é bastante sensível à escolha de um potencial, por exemplo, as propriedades de transição entre a fase cristalina de *skyrmions* localizados de alta densidade e a fase de baixa densidade dependem primordialmente da escolha de um potencial específico [33].

Algumas investigações de soluções de vórtice foram feitas no modelo Maxwell-Chern-Simons, porém sem o termo de Skyrme, acrescentando um termo de acoplamento não-mínimo ou acoplamento de Pauli [34], introduzindo um momento magnético anômalo. Outra possibilidade interessante é a introdução de uma função em alguns termos na lagrangeana com o intuito de generalizar a teoria e investigar as consequências das soluções de vórtice associadas. Por exemplo, em [35], foi investigado um modelo Maxwell-Chern-Simons generalizado acoplado não-minimamente, onde uma função foi incorporada junto ao termo de Maxwell bem como no termo de Pauli na derivada covariante. Nessa perspec-

tiva, buscaremos investigar algumas dessas possibilidades em teorias com Skyrmons.

Embora nas últimas décadas houvessem muitas investigações de Skyrmons em teorias de campos topológicas, a obtenção das soluções de vórtice era feita através de técnicas de minimização numéricas [30, 31], pois não se conseguia implementar o formalismo BPS para sistemas de Skyrmons. Somente em 2010 o primeiro modelo BPS de Skyrmons foi obtido com o auxílio de uma função chamada de *superpotencial* [36]. Portanto, devido a esses avanços tanto no âmbito teórico, quanto no experimental e tecnológico, os skyrmions vêm sendo amplamente investigados na comunidade científica [23, 24, 1, 28, 29].

Num primeiro momento, este trabalho tem como objetivo fornecer uma base para a construção desses modelos e encontrar suas soluções numa perspectiva da teoria clássica de campos. Mais adiante, num segundo momento, mostraremos as principais implementações do formalismo BPS em baby-Skyrmions existentes na literatura e evidenciaremos os meios de uma possível aplicação BPS num modelo que leva em conta o Momento Magnético Anômalo (MMA) do elétron.

A organização desse trabalho está da seguinte forma: no primeiro capítulo discutiremos com mais detalhes a respeito da teoria dos sólitons, como exemplo encontraremos soluções tipo *kink* em $(1 + 1)$ dimensões. Veremos a relação entre soluções solitônicas com uma degenerescência na configuração de campo de menor energia. Em seguida, classificaremos as soluções de campo em setores caracterizados por meio de uma grandeza chamada *carga topológica* que está intimamente relacionada aos valores assintóticos do vácuo de um campo escalar. Então, será enfatizado a relação entre soluções topológicas e o fenômeno da *Quebra Espontânea de Simetria*. Nesse sentido, dedicaremos uma sessão para o estudo desse fenômeno e exemplificaremos com os *bósons de Goldstone*, bem como a geração de massa pelo *mecanismo de Higgs*.

No segundo capítulo, construiremos uma teoria com um termo de Chern-Simons (CS) em $(2 + 1)$ dimensões, onde investigaremos o acoplamento de um termo de CS acoplado a campos de matéria, bem como o acoplamento com um termo de Maxwell, conhecido como Maxwell-Chern-Simons (MCS).

No terceiro capítulo, introduziremos o modelo sigma $O(N)$ não-linear. Através do formalismo BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld), encontraremos as soluções de campo sem resolver a equação de movimento, bastando resolver duas equações acopladas de primeira ordem - Equações BPS. Veremos que, matematicamente, as soluções do modelo sigma consistem no mapeamento entre duas variedades que são superfícies esféricas. Assim, será dedicada uma sessão para uma breve discussão de alguns conceitos simples da teoria da homotopia - sem muito rigor - fundamental para a classificação das soluções do modelo.

No quarto capítulo, mostraremos as possibilidades de quebrar a invariância de escala das soluções solitônicas do modelo sigma $O(3)$. Introduziremos o termo de *Skyrme* bem como a forma do *gaugeamento* por meio adição de um termo de Maxwell e uma derivada covariante.

No quinto capítulo, apresentaremos o cerne desse trabalho, o Modelo de Skyrme e sua redução planar. Mostraremos sua motivação teórica, origem bem como suas aplicações promissoras. Em seguida, estudaremos a implementação do formalismo BPS nesses modelos. Por fim, mostraremos as perspectivas futuras do trabalho.

Este trabalho apresenta um apêndice com alguns tópicos importantes para o melhor entendimento do texto. Nele apresentamos uma revisão detalhada do teorema de Noether que enfatiza a conservação de grandezas dinâmicas devido simetrias. Mostraremos o teorema de Derrick que fornece informações prévias de como o sistema deve ser para comportar soluções solitônicas. Além disso, abordamos uma pequena discussão sobre al-

gus elementos de topologia e homotopia.

2 ONDAS SOLITÁRIAS E SÓLITONS

Sabe-se que é de grande importância o estudo de equações diferenciais não-lineares em sistemas físicos. Particularmente, em teoria de campos, soluções de campo com energia localizada que se propagam sem dissipação e com velocidade constante são conhecidas por *Ondas Solitárias* [37]. Ondas solitárias que, assintoticamente, mantêm suas formas originais após colisões, são chamadas de *sólitons* [38].

2.1 Kinks

Soluções solitônicas estão intimamente ligadas a equações não-lineares em teorias relativísticas, ou seja, no espaço de Minkowski. Inicialmente, o modelo mais simples que podemos analisar é um campo escalar em (1 + 1) dimensões. De fato, para o *toy model* $\lambda\phi^4$, por exemplo, a única solução que minimiza a energia é a trivial, isto é, $\phi = 0$. No entanto se pensarmos num potencial do tipo,

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8}(\phi^2 - a^2)^2, \quad (2.1)$$

onde a é uma constante, o sistema passa a aceitar soluções de campo não-triviais que minimizam a energia. Nessa perspectiva, consideremos a densidade de lagrangeana da forma ¹

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\lambda^2}{8}(\phi^2 - a^2)^2. \quad (2.2)$$

Podemos observar que a densidade hamiltoniana dada por (ver apêndice A.1)

$$T^{00} = \mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{8}(\phi^2 - a^2)^2 \quad (2.3)$$

é sempre maior ou igual a zero assim como na teoria $\lambda\phi^4$ sem o parâmetro a . É razoável buscarmos as configurações de campo que possuem energia mínima. Elas são justamente quando $\phi(x, t) = \pm a$. Consequentemente, na linguagem da teoria quântica de campos, temos uma teoria com uma degenerescência do estado de vácuo.

Nosso próximo passo é buscar soluções estáticas para as equações de campo. Variando funcionalmente a equação (2.2), obteremos a seguinte equação de movimento

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2}(\phi^2 - a^2)\phi = 0. \quad (2.4)$$

Buscamos soluções do tipo $\phi = \phi_0(x)$. Assim podemos reescrever a equação (2.4) como

$$-\phi_0'' + \frac{\lambda^2}{2}(\phi_0^2 - a^2)\phi_0 = 0, \quad (2.5)$$

onde as linhas representam derivadas com relação à x . Multiplicando a equação acima

¹observe que $c = 1$, seguiremos com essa convenção ao decorrer do texto.

por ϕ'_0 , teremos

$$-\phi''_0\phi'_0 + \frac{\lambda^2}{2}(\phi_0^2 - a^2)\phi_0\phi'_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(\phi'_0)^2 - \frac{\lambda^2}{8}(\phi_0^2 - a^2)^2 \right] = 0.$$

Logo, o termo entre colchetes deve ser uma constante que chamaremos de K , isto é

$$(\phi'_0)^2 - \frac{\lambda^2}{4}(\phi_0^2 - a^2)^2 = K. \quad (2.7)$$

Agora, vamos impor a condição que assintoticamente ($x \rightarrow \pm\infty$) a energia seja a mínima (zero), isso acontece quando $\phi_0 \rightarrow \pm a$. Usando essa condição na equação acima obteremos que o valor da constante K é igual a zero. Assim,

$$\frac{d\phi_0}{dx} = \pm \frac{\lambda}{2}(\phi_0^2 - a^2). \quad (2.8)$$

A solução dessa equação diferencial é

$$\phi_0(x) = \pm A \tanh\left(\frac{\lambda a(x - x_0)}{2}\right). \quad (2.9)$$

Por questão de simplicidade podemos tomar $x_0 = 0$. Podemos ver o comportamento dos campos no gráfico abaixo.

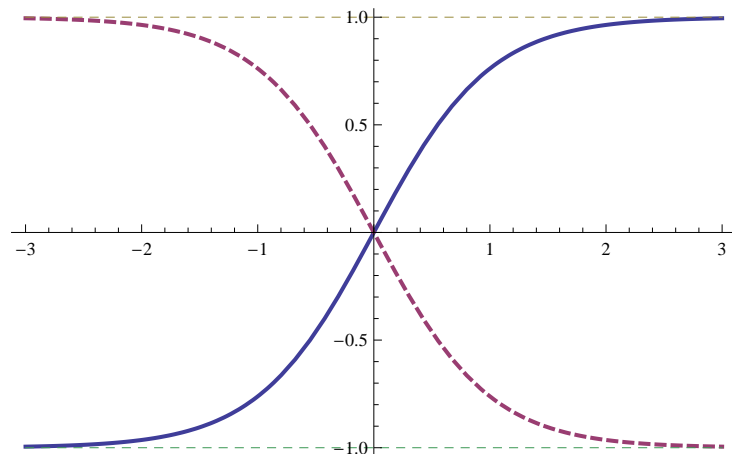


Figura 2: Configuração de campo tipo *kink* (linha contínua) da solução positiva e *anti-kink* (linha tracejada) da solução negativa.

Essas configurações de campo conectam os dois estados fundamentais distintos $\phi_0 = a$ e $\phi_0 = -a$ a $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$, respectivamente. A primeira configuração é conhecida como *kink* e a segunda *anti-kink* [39]. Observe que temos um efeito de invariância translacional, pois uma mudança de x_0 é basicamente um *shift* da solução no espaço. Outra simetria surge quando escolhemos $x_0 = 0$ e fazemos transformações $x \rightarrow -x$ e, separadamente, $\phi \rightarrow -\phi$, claramente, obteremos

$$\phi_{kink}(x) = -\phi_{antikink}(x) = \phi_{antikink}(-x). \quad (2.10)$$

Agora, analisaremos o comportamento da energia para essas configurações. Pri-

meiramente, a densidade hamiltoniana para uma configuração de campo estática qualquer, será

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\phi_0^2 - a^2)^2. \quad (2.11)$$

Aplicando a solução (2.9) para a equação acima, e usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sech}^2 u = 1 - \tanh^2 u$, teremos

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\lambda^2 a^4}{4} \frac{1}{\cosh^4 \frac{\lambda a x}{2}}. \quad (2.12)$$

Podemos ver no gráfico (3) que conseguimos construir um sistema com uma distribuição de energia localizada, bem como estávamos buscando.

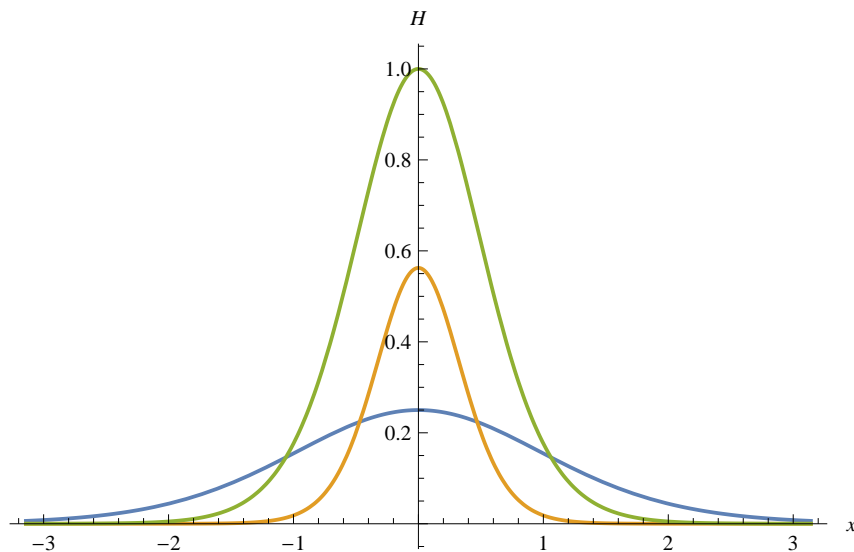


Figura 3: Densidade de Energia em função da posição. Fixamos $a = 1$. Temos $\lambda = 1$ (curva azul), $\lambda = 1.5$ (curva laranja) e $\lambda = 2$ (curva verde).

Com isso, podemos obter a energia total do sistema calculando a integral em todo o espaço da densidade hamiltoniana, isto é

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0 dx = \frac{\lambda^2 a^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\cosh^4 \frac{\lambda a x}{2}}. \quad (2.13)$$

fazendo uma mudança de variáveis no argumento, teremos

$$E_0 = \frac{\lambda a^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\cosh^4 u} \quad (2.14)$$

$$E_0 = \frac{2\lambda a^3}{3}. \quad (2.15)$$

Portanto, obtivemos uma energia finita e positiva para a solução de campo estática *kink*. Uma solução que se propaga pode ser obtida através de um *boost* de Lorentz, uma vez que a teoria é relativística [38]. Para isso, imaginemos um referencial que está com velocidade $-v$, onde nela o pulso está se propagando com velocidade v . Assim, basta fazermos uma transformação $x \rightarrow \gamma(x - vt)$, onde γ é o fator de Lorentz dado por $(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. Fazendo o

boost na equação (2.9), teremos

$$\phi(x, t) = \pm B \tanh\left(\frac{\gamma\lambda a}{2}(x - vt)\right). \quad (2.16)$$

Pode-se verificar que a solução acima também satisfaz a equação (2.8).

Analogamente ao procedimento anterior, podemos obter a energia para a solução viajante. Logo,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0 dx = \frac{2\lambda a/3}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2.17)$$

Esse resultado nos mostra que uma onda solitária viajante tem o comportamento análogo ao de uma partícula relativística [40]. Isso fortalece a ideia que podemos associar partículas a campos. Contudo, essa analogia não é totalmente válida, pois apesar das soluções encontradas (*kink* e *anti-kink*) serem ondas solitárias, elas não podem ser consideradas sólitons, pois duas ondas desse tipo não mantêm suas formas após uma colisão [37].

2.2 Setores Topológicos

Em teorias físicas, geralmente buscamos grandezas que se conservam para o melhor entendimento do sistema. No caso de modelos solitônicos também é possível identificar tais grandezas fazendo uma classificação topológica das soluções de campo de um determinado sistema. Nesse sentido, o que se faz é definir uma grandeza chamada *índice topológico*.

Sabemos que uma condição necessária para a finitude da energia é que o potencial $V(\phi)$ tenda ao valor mínimo quando $|x| \rightarrow \infty$. Para o sistema definido pela lagrangeana (a partir daqui, por simplicidade, chamaremos apenas lagrangeana, ao invés de densidade lagrangeana) (2.2), tal condição é satisfeita se $\phi \rightarrow \pm a$ para $|x| \rightarrow \infty$. Suponha que em algum instante τ em $x \rightarrow \infty$ o valor do campo é a , tal que minimiza o potencial. A medida que o sistema evolui temporalmente a partir de τ , o sistema mudará continuamente governado pela equação de movimento. Contudo, pela finitude e conservação da energia, assintoticamente, o valor do campo deve permanecer o estacionário, ou seja, em um dos mínimos de $V(\phi)$, não podendo pular para outro valor.

Por meio dessa discussão, podemos dividir as soluções de campo em setores caracterizados por dois índices que são os valores assintóticos no campo, ou seja, $(\phi(x \rightarrow -\infty), \phi(x \rightarrow \infty))$. Se imaginarmos a evolução temporal como um tipo de deformação contínua da curva dos campos, tais setores devem ser topologicamente desconexos, isto é, um setor não pode ser deformado continuamente em outro. No modelo (2.2), os valores assintóticos do campo são $\phi = \pm a$. Com a definição de setores topológicos podemos classificar as quatro soluções não-singulares e de energia finita do sistema conforme a tabela abaixo

Tabela 1: Índices Topológicos - *Kinks*

	Setores	Tipo de solução
1	$(-a, a)$	<i>kink</i>
2	$(a, -a)$	<i>anti-kink</i>
3	(a, a)	trivial
4	$(-a, -a)$	trivial

Observe que esses setores representam as soluções *kink*, *anti-kink* e as soluções triviais $\phi = \pm a$, respectivamente. Aqui, podemos ver com mais clareza o porquê das soluções

tipo *kink* não serem consideradas sólitons. Se um *kink* vem da direita em direção a um *anti-kink*, após a colisão teremos o setor $(-a, -a)$, ou seja, não mantém suas formas.

Agora, podemos definir uma quantidade que se fará bastante útil mais adiante, chamada *carga topológica* como sendo [37]

$$N = \frac{1}{2a} [\phi(x \rightarrow \infty) - \phi(x \rightarrow -\infty)]. \quad (2.18)$$

Se imaginarmos que essa carga está associada a alguma densidade de cargas, podemos escrever

$$\rho(\phi) = \frac{1}{2a} \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.19)$$

de modo que a integral em todo o espaço forneça justamente à carga topológica. Em analogia as cargas de Noether, a toda carga conservada podemos associar uma corrente conservada e vice versa, de modo que obedeça a

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.20)$$

que é uma equação de continuidade, onde $j^\mu = (\rho, \vec{j})$. Assumindo que o nosso modelo tem apenas uma dimensão espacial, teremos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^x}{\partial x} = 0. \quad (2.21)$$

Agora, substituindo a densidade (2.19) na equação acima, obteremos

$$j^x = -\frac{1}{2a} \frac{\partial \phi}{\partial x^0}. \quad (2.22)$$

Podemos voltar a uma forma covariante juntando a expressão acima com a equação (2.19), fazendo

$$j^\mu = \frac{1}{2a} \epsilon^{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \quad (2.23)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o pseudo-tensor completamente antissimétrico de segunda ordem, ou símbolo de *Levi-Civita*, que é definido como

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$, são as linhas e colunas, respectivamente. De fato, a equação da continuidade é satisfeita, pois

$$\frac{1}{a} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0. \quad (2.24)$$

Soluções solitônicas com $N \neq 0$ são ditas *soluções topológicas*, enquanto que soluções com $N = 0$ são ditas *soluções não-topológicas*.

É importante ressaltar que, diferentemente da carga e corrente conservada de Noether - energia, carga elétrica, momento linear, angular, etc. - (Apêndice A.1), as cargas e correntes topológicas não dependem da dinâmica dos campos, ou seja, não fizemos nenhuma menção as simetrias contínuas na lagrangeana[41]. Na verdade, tais cargas se conservam devido a exigência de uma energia finita na teoria, sendo assim, dependem apenas das condições de contorno assintóticas dos campos. Geralmente soluções topológicas estão intimamente ligadas ao fenômeno chamado de *quebra espontânea de simetria* [37], que será

o assunto de uma sessão desse trabalho.

2.3 Método de Bogomol'nyi

Nessa sessão veremos um modo alternativo de buscar soluções de campo estáticas que minimizam a energia sem a necessidade de resolver as equações de Euler-Lagrange. Daqui em diante, usaremos a notação explicitamente covariante. Mostraremos o método para um potencial qualquer, ainda em $(1 + 1)$ dimensões, em seguida reproduziremos as soluções kink.

Começemos pela lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.25)$$

As equações de movimento são

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.26)$$

As energia cinética do sistema é

$$T = \int dx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2, \quad (2.27)$$

em que o ponto é a derivada com relação ao tempo. A energia potencial

$$V = \int dx \left[\frac{1}{2} (\phi')^2 + V(\phi) \right], \quad (2.28)$$

onde a energia total é $E = T + U$. Seja U_0 o mínimo do potencial, então a configuração de vácuo \mathcal{V} é

$$\mathcal{V} = \{ \phi_0, \text{ onde } \phi'_0 = \dot{\phi}_0 = 0, \text{ tal que } V(\phi_0) = V_0 \}. \quad (2.29)$$

Veremos adiante que a existência de sólitos topológicos depende da escolha do potencial, mais especificamente, eles devem possuir um vácuo degenerado. Em outras palavras, assintoticamente o campo ϕ deve tomar valores constantes diferentes, isto é

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \phi_\pm. \quad (2.30)$$

Desse modo, podemos classificar as configurações de energia finita num par (ϕ_-, ϕ_+) , obviamente em $(1 + 1)$ dimensões. Assim, as soluções que formam os pares (ϕ_\pm, ϕ_\mp) são justamente os *kinks*. Se $\phi_- = \phi_+$ então podemos deformar o campo numa configuração constante $\phi(x) = \phi_+ = \phi_-$, tal que a energia é nula.

A principal ideia do método de Bogomol'nyi consiste em reescrever o funcional da energia para um campo estático, ϕ_0 , como

$$E = \int dx \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \phi'(x) \mp \sqrt{V(\phi)} \right]^2 \pm \int dx \phi' \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.31)$$

Certamente o primeiro termo é sempre positivo, e o segundo, nas situações de interesse é sempre diferente de zero. Com isso, podemos definir um limite para a energia, conhecido como *limite de Bogomol'nyi*, que é justamente quando o primeiro termo se anula. Logo, a seguinte equação é satisfeita

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.32)$$

Essas equações de primeira ordem são conhecidas como *equações de Bogomol'nyi*, e suas soluções no caso unidimensional, se existirem, são os *kink* e *anti-kink* e possuem energia

$$E = \int dx \phi' \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.33)$$

Resolver (2.32) é equivalente a resolver as equações de movimento obtidas a partir de Euler-Lagrange (2.26). De fato, derivando (2.32), obtemos

$$\phi'' = \pm \frac{1}{\sqrt{2V}} \frac{dV}{d\phi} \phi' = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.34)$$

que é justamente a equação (2.26) para o caso estático.

Nessa perspectiva, não é de nos surpreender que se substituirmos o potencial (2.1) na equação de Bogomol'nyi obteremos explicitamente as mesmas soluções *kink/anti-kink* da primeira sessão. De fato, é isso que ocorre, pois claramente ao usarmos o potencial caímos na equação (2.8) que fornece as soluções.

2.4 Quebra Espontânea de Simetria

Geralmente, há uma conexão bastante íntima entre a existência de um potencial com mínimo degenerado e o fenômeno conhecido como *Quebra Espontânea de Simetria* (*SSB-Spontaneous Symmetry Breaking*) [37]. Tal mecanismo é de primordial importância para a consistência do *Modelo Padrão das Partículas Elementares* (SM - *Standard Model*), pois é através do mecanismo de Higgs - uma SSB local - que os bósons de *gauge* ganham massa.

Ora, sabemos que simetrias de calibre (*gauge*) impedem termos de massa na lagrangeana, porém a experiência mostra que bósons como W^+, W^- e Z são consideravelmente massivos, entre aproximadamente 80 e $90 GeV/c^2$ [42]. É nessa perspectiva que o mecanismo de Higgs atua permitindo a geração de massa quebrando explicitamente a simetria eletrofraca.

A distinção entre uma SSB e uma quebra de simetria explícita é que na primeira, a lagrangeana permanece invariante sob a simetria, entretanto o estado fundamental - configuração de menor energia classicamente falando - não [43]. Já a quebra explícita, está associada a adição de um termo no lagrangeano que simplesmente viola a simetria do sistema.

Cabe aqui, diferenciar sucintamente os conceitos de simetrias globais e locais. Basicamente, dizemos que na primeira os parâmetros que caracterizam o grupo de simetria pertinente do sistema é constante, enquanto que na segunda os parâmetros dependem de cada ponto do espaço tempo. Nesta, tal fato está intimamente ligado as teorias de calibre, que é o caso das teorias do eletromagnetismo e da gravitação.

De fato, o cerne desse trabalho é devido aos modelos-sigma não-lineares que apresentam características de uma quebra espontânea de simetria, como veremos adiante, então faz-se necessário uma sessão dedicada a SSB.

2.4.1 Simetrias Globais

Primeiramente, consideremos a lagrangeana de um campo escalar real com um termo de interação quártico

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4, \quad (2.35)$$

donde $x^\mu \equiv x \equiv (x^0, x^1, x^2, \dots, x^D)$, e o potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (2.36)$$

Observe que essa lagrangeana é invariante sob a simetria discreta

$$\phi \rightarrow -\phi. \quad (2.37)$$

O funcional da energia será

$$E = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \right]. \quad (2.38)$$

Evidentemente, para a energia ser limitada por baixo é necessário que $\lambda > 0$. De fato, a configuração de campo que minimiza a energia é quando $\phi = \text{constante}$. Para determinar o valor dessa constante devemos, através do cálculo ordinário, encontrar o mínimo do potencial (2.36), uma vez que os termos derivativos da lagrangeana não contribuirão para a análise, ou seja, o campo é estático e homogêneo no espaço. Nesse caso, nossa análise se restringe a dois casos, para (i) $m \geq 0$ e (ii) $m < 0$.

(i) Obviamente, nesse caso, o mínimo do potencial é quando $\phi = 0$. Desse modo, se fizermos uma perturbação no estado de menor energia, a lagrangeana será igual a original. Consequentemente, o sistema continua invariante sob a transformação (2.37). Portanto, dizemos que para essa condição não há quebra de simetria.

(ii) Aqui devemos ter mais cautela. Primeiro façamos a mudança de variáveis $-m^2 = \mu > 0$. Agora, podemos computar o mínimo, vejamos

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{4}\lambda\phi^4 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 \right) = 0. \quad (2.39)$$

Logo,

$$b = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.40)$$

Para este caso, temos dois estados fundamentais, o que não é tão surpresa uma vez que vimos essa propriedade no caso do *kink*. Contudo, é importante refletirmos o que está acontecendo. Ao "tirar" toda a energia dos campos, o sistema se encontrará em uma das configurações encontradas acima, de modo que para passarmos de uma configuração de mínimo para outra é necessário "dar" energia aos campos [39].

Note que, se acrescentarmos uma constante à lagrangeana (2.35), já considerando a situação (ii), de modo que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}. \quad (2.41)$$

Obteremos exatamente o sistema (2.2), ou seja

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - b^2)^2 \quad (2.42)$$

onde

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - b^2)^2 \quad (2.43)$$

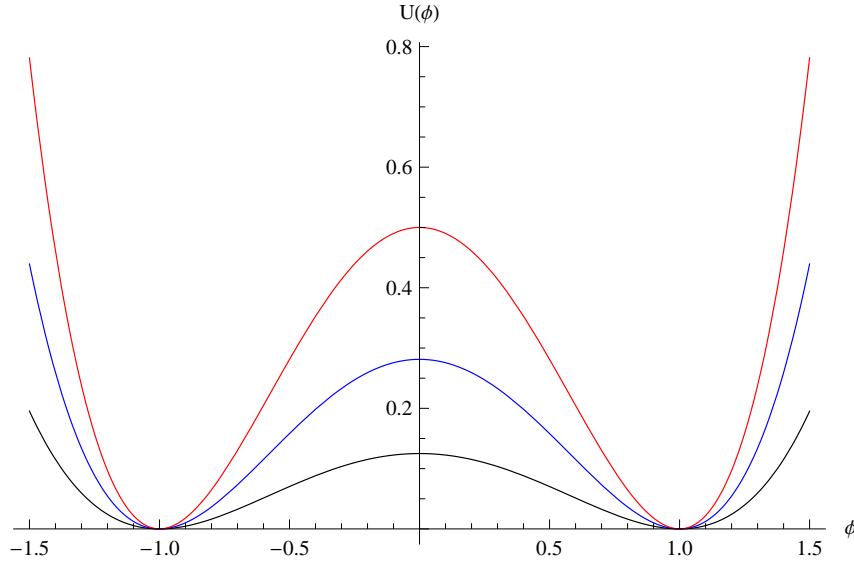


Figura 4: Potencial em função do campo com mínimo degenerado (caso $m < 0$). Por conveniência tomamos $b=1$. Curva preta para $\lambda = 1$, azul para $\lambda = 1.5$ e vermelha para $\lambda = 2$

Suponha, que ao retirarmos toda a energia do sistema, ele "escolha" a configuração $\phi = +b$. Façamos agora uma perturbação no estado fundamental $\phi(x) = b + \psi(x)$ de modo que a lagrangeana (2.35) se tornará

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2} \partial_\mu [b + \psi(x)] \partial^\mu [b + \psi(x)] - \frac{\lambda}{4} [(b + \psi(x))^2 - b^2]^2 \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{\lambda \psi^4}{4} - \lambda b \psi^3 - \lambda b^2 \psi^3 \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi)^2 - \mu^2 \psi^2 - \sqrt{\lambda} \mu \psi^3 - \frac{\lambda \psi^4}{4}, \quad (2.46)$$

onde na última passagem, usamos (2.40). Agora, perceba que esse estado não é mais um invariante sob a transformação (2.37). Portanto, é nesse sentido que dizemos que a simetria foi espontaneamente quebrada (observe o gráfico do potencial 4).

Fica claro que as soluções tipo *kink*, de fato, quebram espontaneamente a simetria discreta $\phi \rightarrow -\phi$. Além disso, a ideia de que sistemas que gozam de configurações de mínimo degenerados estão fortemente ligados a SSB fica mais sólida.

2.4.1.1 Bósons de Nambu-Goldstone - Quebra Espontânea da Simetria Global $U(1)$

Consideremos a lagrangeana de um campo escalar complexo

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2, \quad (2.47)$$

em que

$$\phi \equiv \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (2.48)$$

O funcional da energia nesse sistema será

$$E = \int d^4x \left[\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_i \phi^* \partial_i \phi + V(\phi^*, \phi) \right], \quad (2.49)$$

no qual, o potencial é

$$V(\phi^*, \phi) = m^2 \phi \phi^* + \lambda (\phi \phi^*)^2. \quad (2.50)$$

Claramente, o mínimo desse potencial ocorre quando o campo é uma constante. Para $m^2 \geq 0$, o mínimo é justamente quando $\phi = 0$. Fazendo uma perturbação nesse estado, teremos dois campos ϕ_1 e ϕ_2 de mesma massa com uma interação $(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$. Nesse caso, a lagrangeana permanece invariante sob a simetria $U(1)$.

Já para $m^2 = -\mu^2 < 0$ o potencial é um sólido de revolução (figura obtida pela rotação do plano $\phi_1 \times \phi_2$ em torno do eixo $V(\phi_1, \phi_2)$) do tipo "chapéu mexicano" (5). O potencial em termos dos campos ϕ_1 e ϕ_2 será

$$V(\phi^*, \phi) = \lambda (\phi \phi^*)^2 - \mu^2 \phi \phi^*, \quad (2.51)$$

ou ainda

$$V(\phi) = \lambda |\phi|^4 - \mu^2 |\phi|^2, \quad (2.52)$$

onde

$$|\phi| = \sqrt{\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2}}. \quad (2.53)$$

As configurações de campo que minimizam esse potencial são obtidas através de

$$\frac{dV}{d|\phi|} = 4\lambda |\phi|^3 - \mu^2 |\phi| = 0. \quad (2.54)$$

Logo,

$$\phi = e^{i\alpha} \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} = e^{i\alpha} \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (2.55)$$

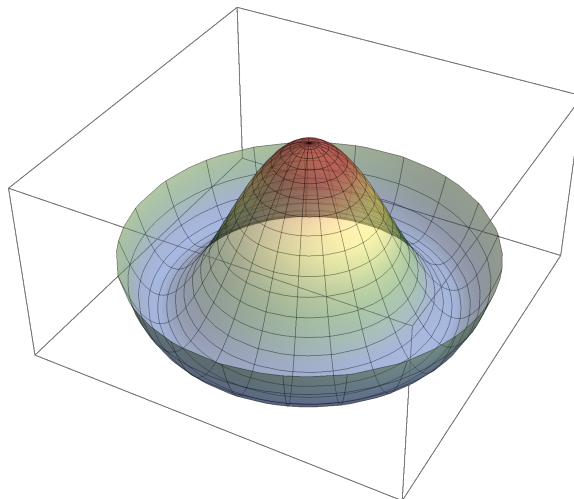


Figura 5: Potencial tipo "chapéu mexicano" em função dos campos ϕ_1 e ϕ_2 com mínimo degenerado continuamente, onde tomamos $\lambda = 1$ e $\mu = 5$

Igualmente ao caso anterior, suponha que possamos retirar toda a energia contida no campo de modo que o sistema se encontre no estado de menor energia, e escolha o

mínimo como sendo

$$\phi = \frac{b}{\sqrt{2}}. \quad (2.56)$$

Comparando com a definição do campo ϕ (equação (2.48)), teremos que $\phi_1 = b$ e $\phi_2 = 0$. Analogamente, consideremos pequenas perturbações nessas configurações de campo do tipo

$$\phi_1(x) = b + \psi(x) \quad (2.57)$$

e

$$\phi_2(x) = \eta(x). \quad (2.58)$$

Substituindo essas perturbações em (2.47), a parte cinética será

$$\mathcal{L}_{\psi,\eta}^{cin} = \frac{1}{2} \partial_\mu [(b + \psi) + i\eta] \partial^\mu [(b + \psi) - i\eta] \quad (2.59)$$

$$\mathcal{L}_{\psi,\eta}^{cin} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2. \quad (2.60)$$

Já o potencial será

$$V(\psi, \eta) = \frac{\lambda}{4} \left\{ [(b + \psi) + i\eta] [(b + \psi) - i\eta] \right\}^2 - \frac{\mu}{2} [(b + \psi) + i\eta] [(b + \psi) - i\eta]. \quad (2.61)$$

Como as perturbações são pequenas, os termos acima de segunda ordem em ψ e η podem ser desprezados. Observe também que os termos quadráticos em ψ e η representam as curvaturas de $V(\phi_1, \phi_2)$ ao longo das direções ϕ_1 e ϕ_2 . Contudo, a curvatura do potencial no ponto ($\phi_1 = b, \phi_2 = 0$) é zero devido a simetria $U(1)$ (ver figura (5)). Então, desenvolvendo a expressão acima, o único termo que contribuirá para o potencial é

$$V = \lambda b^2 \psi^2 = \mu^2 \psi^2. \quad (2.62)$$

Portanto, a lagrangeana será

$$\mathcal{L}_{\psi,\eta} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \mu^2 \psi^2. \quad (2.63)$$

Como a forma geral de uma termo de massa na lagrangeana é do tipo

$$\frac{M\Phi^2}{2},$$

o campo ψ tem massa de $m_\psi = \sqrt{2}\mu$. Por outro lado, η é um campo não massivo que está diretamente relacionado ao fato da simetria $U(1)$ que continua presente na lagrangeana, bem como a escolha da configuração de campo assimétrica [39].

Esse campo não massivo é conhecido como *campo de Nambu-Goldstone* que está associado aos *bósons de Nambu-Goldstone* [44]. Fizemos aqui um tratamento específico numa abordagem de campos clássicos, que resumidamente, buscamos o *ground-state* de um modelo e fazemos pequenas perturbações nesse estado. Entretanto, há um teorema geral, provado por Goldstone [45] que afirma que toda quebra espontânea de simetria global implica na existência de partículas não-massivas.

Nas interações fortes, a quebra espontânea da simetria quiral da *Cromodinâmica Quântica (QCD)* gera os mésons π^\pm e π^0 . Contudo, a experiência mostra que tais partículas tem massa [42], isso é explicado devido a pequenos termos na lagrangeana que quebram

explicitamente a simetria quiral [46].

Embora as SSB-globais tenham sua importância, na verdade o que fizemos nesse tratamento é uma preparação para o caso das SSB-locais, que é o mecanismo que está no cerne na fenomenologia do modelo padrão, explicando a geração de massa das partículas de *gauge*.

2.4.2 Simetrias Locais

Vimos que uma transformação de simetria global, por exemplo, do grupo $U(1)$ é do tipo

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x), \quad (2.64)$$

onde o parâmetro α é uma constante. Para o caso de uma transformação local, o parâmetro do grupo dependerá de cada ponto do espaço-tempo, ou seja,

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \phi(x) \quad (2.65)$$

2.4.2.1 Mecanismo de Higgs

Apesar desse mecanismo ter ganhado o nome de Peter Higgs, outros pesquisadores também o desenvolveram independentemente, o próprio Higgs [47], F. Englert e R. Brout [48] e G. Guralik e T. Kibble [49]. Inicialmente, consideremos a lagrangeana do campo eletromagnético ou de Maxwell

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.66)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.67)$$

é o tensor do campo eletromagnético, em que $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$ é o 1-potencial, ou mais restritamente 4-potencial para $l = 4$. A lagrangeana é claramente invariante sob a transformação local (pois A_μ depende de cada ponto do espaço-tempo)

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.68)$$

Tal transformação é dita *transformação de gauge* ou *calibre* local para um campo vetorial. Se ao invés de (2.66) tivéssemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m^2 \frac{1}{2} A_\mu A^\mu, \quad (2.69)$$

certamente o sistema não seria mais invariante sob a transformação de calibre (2.68). Em outras palavras, uma transformação de *gauge* local impede o fóton ter massa.

Voltemos aqui para a motivação dada no início da sessão com o seguinte questionamento "por quê os bósons da teoria eletrofraca W^\pm e Z são massivos, uma vez que são bósons de *gauge*?" Para entender esse problema, façamos um *mixing* da lagrangeana de Maxwell com o campo complexo

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2, \quad (2.70)$$

onde D_μ é conhecida como *derivada covariante* é definida como

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (2.71)$$

Essa definição se faz necessária, pois o termo $(\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi)$ não é invariante sob transformações de calibre locais $U(1)$, já com a adição de um termo na derivada, garantimos a invariância.

Novamente, buscaremos o ground-state do sistema, através do tensor energia-momento. O funcional da energia $E[A^\mu, \phi]$ desse sistema que será

$$E = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 + (D_0\phi)(D_0\phi)^* + (D_0\phi)(D_0\phi)^* - \mu^2\phi\phi^* + \lambda(\phi\phi^*)^2 \right]. \quad (2.72)$$

Observe que devido as transformações (2.65) e (2.68), existe uma liberdade na escolha do estado de menor energia, pois se (A_μ^0, ϕ^0) é o mínimo da energia, então $(A_\mu^0 - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), e^{i\alpha(x)}\phi^0)$ também será. De (2.67), para os termos que envolvem o tensor do campo eletromagnético a energia será mínima quando

$$A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (2.73)$$

ou seja, podemos dizer que o termo de divergência total que não contribui para a equação de movimento é responsável por uma configuração de campo nulo, tal configuração é conhecida como *gauge puro*. Com isso, os termos derivativos envolvendo derivadas covariantes são mínimos (usando o resultado obtido acima) quando

$$(\partial_\mu - i\partial_\mu\alpha(x))\phi = 0. \quad (2.74)$$

A solução dessa equação diferencial é

$$\phi(x) = \phi_0 e^{i\alpha(x)}, \quad (2.75)$$

onde ϕ_0 é uma configuração de campo constante que é determinada minimizando o potencial, contudo já fizemos isso, pois o potencial é o mesmo do caso Nambu-Goldstone, ou seja, a equação (2.55). Agora escolheremos novamente uma configuração de mínimo das contínuas possibilidades e fazemos pequenas perturbações em torno da mesma. Obviamente, podemos escolher $\alpha = 0$, de modo que, os campos serão

$$A_\mu^0 = 0 \quad (2.76)$$

e

$$\phi^0 = \frac{b}{\sqrt{2}}. \quad (2.77)$$

como b é constante, adicionamos convenientemente o termo da raiz devido a familiaridade com o sistema anterior. Assim, fazendo a análise da perturbação já vimos no caso da simetria global $U(1)$ que surgirá um campo $\psi(x)$ massivo e o de $\eta(x)$ não-massivo (campo de nambu-goldstone)[50]. A sutileza surge quando consideramos as perturbações (2.57) e (2.58), assim teremos

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\partial_\mu - ieA_\mu(x)] [b + \psi(x) + i\eta(x)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\partial_\mu\psi(x) + i\partial_\mu\eta(x) - iebA_\mu], \end{aligned} \quad (2.78)$$

em que na passagem desprezamos os termos quadráticos nos campos. Portanto, a lagrangeana será

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|\partial_\mu\psi(x) + i\partial_\mu\eta(x) - iebA_\mu|^2 - \mu^2\psi^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{1}{2}\mu^2\psi^2 + \frac{e^2b^2}{2}\left(A_\mu - \frac{1}{eb}\partial_\mu\eta\right)^2\end{aligned}\quad (2.79)$$

O fato intrigante acima, é que surge um termo do tipo massivo $A_\mu A^\mu$ para o campo vetorial. Para deixar essa lagrangeana de uma forma mais usual fazendo uma definição de campo

$$B_\mu \equiv A_\mu - \frac{1}{eb}\partial_\mu\eta, \quad (2.80)$$

de modo que podemos criar um tensor tal que

$$\begin{aligned}B_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{eb}\partial_\mu\partial_\nu\eta - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{eb}\partial_\nu\partial_\mu\eta \\ &= F_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.81)$$

Agora podemos reescrever a lagrangeana como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi + \frac{e^2b^2}{2}B_\mu B^\mu - \mu^2\psi^2 \quad (2.82)$$

Então, o campo B_μ tem massa

$$m_B = eb = \frac{e\mu}{\sqrt{2}} \quad (2.83)$$

Podemos notar que a definição de campo faz o campo $\eta(x)$ - que é o campo de Nambu-Goldstone para uma teoria com invariância global - sumir, e então surgindo um campo vetorial massivo [51]. De um modo mais informal, é como se o campo B_μ "comesse" o campo de Nambu-Goldstone e "adquirisse" massa. Esse fenômeno é o cerne do mecanismo de Higgs [39]. Nesse caso, um campo vetorial ganhou massa a partir de um campo escalar, tal escalar é chamado de *campo de Higgs*, e sua quantização fornece o *bóson de Higgs* [52].

3 TERMO DE CHERN-SIMONS

Teorias de Chern-Simons (CS) são de grande interesse em eletrodinâmica planar e possuem características distintas quando comparadas a eletrodinâmica maxwelliana. Tais teorias desempenham um papel de grande importância na tentativa de descrever diversos problemas teóricos de altas energias, tais como a busca de uma gravitação renormalizável bem como investigações em teorias de cordas [53]. Além disso, teorias tipo (CS) são promissoras em física da matéria condensada, como por exemplo, no estudo do efeito Hall quântico fracionário [54].

A lagrangeana de Chern-Simons é dada por

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda - A_\mu J^\mu, \quad (3.1)$$

em que $\mu = 0, 1, 2$, e J_μ é um termo de corrente genérico. Observe que a lagrangeana (3.1) permanece invariante através de uma transformação de calibre do tipo

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Sigma \quad (3.2)$$

a menos de uma divergência, que é

$$\mathcal{L}_{CS} \rightarrow \mathcal{L}'_{CS} = \mathcal{L}_{CS} + \frac{\kappa}{2} \partial_\mu (\Sigma \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda), \quad (3.3)$$

onde Σ é uma função arbitrária das coordenadas do espaço tempo. Desse modo, quando integrado espacialmente, podemos usar o teorema de Gauss e desprezar os termos de superfície. Assim a ação de CS é invariante sob transformações de calibre.

Podemos facilmente calcular as equações de movimento do modelo de Chern-Simons é

$$J^\mu = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}, \quad (3.4)$$

onde, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

É importante notar que em $(2+1)$ dimensões $F_{\mu\nu}$ é uma matriz anti-simétrica 3×3 que contém três elementos independentes, sendo as duas componentes planares do campo elétrico, e uma componente do campo magnético que é curiosamente um escalar. Nesse sentido, podemos reescrever equação (3.4) explicitamente como

$$J_i = \kappa \epsilon_{ij} E^j \quad (3.5)$$

$$\rho = \kappa B. \quad (3.6)$$

Nas equações acima podemos observar claramente uma característica forte das teorias de CS, a densidade de carga é proporcional ao campo magnético, ou seja, carga elétrica e campo magnético estão "amarrados" através da constante de κ .

Outro fato importante é que através de uma transformação de paridade do tipo

$$x^0 \rightarrow x^0, \quad x^1 \rightarrow -x^1, \quad x^2 \rightarrow x^2 \quad (3.7)$$

$$A^0 \rightarrow A^0, \quad A^1 \rightarrow -A^1, \quad A^2 \rightarrow A^2, \quad (3.8)$$

o termo de CS não permanece invariante. Assim, as teorias de Chern-Simons descrevem sistemas que quebram a paridade, como o efeito Hall quântico que quebra a paridade devido

a um campo magnético de fundo.

É importante enfatizar que uma teoria de Chern-Simons, a primeira vista, pode parecer trivial, uma vez que soluções da equação (3.4) sem fonte implicam em $F_{\mu\nu} = 0$, que são soluções chamadas de *gauge puro* ou *conexão flat* (se tratado das estruturas de fibrado). Então, para obter uma teoria de CS não-trivial devemos considerar algumas possibilidades, que são [55]:

- acoplamento com matéria (férmions);
- acoplamento com um termo de Maxwell;
- acoplamento com gravidade;
- acoplamento com campos de gauge não-abelianos (teorias de Yang-Mills);
- tomar uma topologia não-trivial do espaço-tempo.

Nessa perspectiva, usaremos o termo de Chern-Simons em sistemas envolvendo outros termos, e nunca isolado. Com isso, investigaremos suas consequências.

4 MODELO SIGMA $O(N)$ NÃO-LINEAR

Buscaremos nesta sessão tratar de sistemas solitônicos mais realistas, uma vez que o sistema *kink* da sessão (2.1) é descrito em $(1 + 1)$ dimensões. Então, o passo natural seria estender a ideia da seção anterior para dimensões mais altas. Entretanto, existe um teorema restringe os valores das dimensões espaciais D ao buscarmos soluções solitônicas não-triviais para campos escalares.

4.1 Teorema de Derrick

Esse teorema restringe a possibilidade de termos soluções solitônicas estáticas não-triviais para campos escalares em sistemas com mais de duas dimensões espaciais. Tal resultado foi obtido por Hobart [56] e Derrick [16]. Primeiramente, consideremos a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(x), \quad (4.1)$$

em que μ é o índice do espaço-tempo com D dimensões espaciais, e $\phi \equiv \phi_i$ um multipletto de campos escalares, onde $i = 1, \dots, N$, é o índice interno. A equação de movimento para campos estáticos é simplesmente

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (4.2)$$

em que $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_D^2}$ é o operador laplaciano em D dimensões. O funcional da energia estática é dado por

$$E[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + U[\phi] \right], \quad (4.3)$$

escrevendo de modo mais compacto

$$E[\phi] = \Gamma_2[\phi] + \Gamma_0[\phi], \quad (4.4)$$

em que,

$$\Gamma_2[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \nabla \phi \nabla \phi \quad e \quad \Gamma_0[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x U[\phi] \quad (4.5)$$

Observe que E , bem como Γ_2 e Γ_0 , que são as integrais dos dois termos do lado direito da igualdade, devem ser positivos, e os índices de Γ_2 e Γ_0 são referentes ao grau polinomial nos termos de derivadas espaciais.

Como soluções solitônicas são configurações localizadas de campo, elas possuem um tamanho característico R , de modo que deformações de escala do tipo $x \rightarrow \alpha x$, com $\alpha > 0$, não afetam o mínimo do funcional da energia. Fisicamente, tal deformação muda o tamanho do sóliton de $R \rightarrow \alpha^{-1} R$, uma vez que os termos cinéticos dependem de termos derivativos espaciais que tem dimensão de inverso de comprimento. Assim, as transformações são do tipo

$$x \rightarrow x' = \alpha x \quad e \quad \partial_\mu \phi(x) \rightarrow \alpha \partial_{x'} \phi(x'), \quad (4.6)$$

com isso, os elementos de integração se transformam como

$$d^D x \rightarrow d^D(\alpha x) \alpha^{-D} = \alpha^{-D} d^D x'. \quad (4.7)$$

Seja $\phi_0(x)$ uma solução estática, então consideremos a família de configurações de um parâmetro que são obtidas deformando essa solução, tal que

$$\phi_\alpha(x) = \phi_0(\alpha x). \quad (4.8)$$

Substituindo essas transformações de escala no funcional da energia, obteremos

$$E[\phi_\alpha] = \Gamma_2[\phi_\alpha] + \Gamma_0[\phi_\alpha] = \alpha^{2-D}\Gamma_2[\phi_0] + \alpha^{-D}\Gamma_0[\phi_0]. \quad (4.9)$$

Com essas configurações de campos o funcional da energia se torna

$$E(\alpha) = E[\phi_\alpha] \quad (4.10)$$

Como ϕ_0 é um ponto crítico do funcional E , vamos exigir que a derivada do funcional em relação ao parâmetro α tomado igual a unidade seja nula, isto é

$$\left. \frac{d}{d\alpha} E[\phi_\alpha] \right|_{\alpha=1} = 0. \quad (4.11)$$

Efetuada a derivação, teremos

$$\frac{dE(\alpha)}{d\alpha} = (2-D)\alpha^{1-D}\Gamma_2 - D\alpha^{-D-1}\Gamma_0. \quad (4.12)$$

Tomando $\alpha = 1$ ganhamos

$$(2-D)\Gamma_2[\phi_0] = D\Gamma_0[\phi_0]. \quad (4.13)$$

Uma vez que Γ_2 e Γ_0 são positivas, concluímos que:

- não há soluções estacionárias não-triviais de campos escalares para $D \geq 3$;
- $D=1$ caímos nas soluções tipo kink presentes em modelos como sine-gordon e o modelo estudado na introdução desse trabalho com o ponto estacionário $\alpha_0 = \sqrt{\Gamma_0/\Gamma_2}$;
- $D=2$ implica que $\Gamma_0 = 0$ e ϕ deve estar apenas em seu estado fundamental isto é ϕ_0 , porém com uma escolha adequada das condições de contorno assintóticas, é possível obter soluções não triviais, que é justamente o modelo Sigma- $O(3)$ não-linear contido no capítulo 3 desse trabalho.

Também podemos analisar o comportamento das derivadas segundas do funcional $E(\alpha)$. Para $D = 1$, temos que $E''(\alpha) \Big|_{\alpha=1} = 2E_0 > 0$, e para $D = 2$, $E''(\alpha) \Big|_{\alpha=1} = 0$. Isto é, no primeiro caso, $D = 1$, a configuração solitônica corresponde ao mínimo do funcional da energia. Além disso, essas soluções são estáveis uma vez que mudam de tamanho quando sofre deformações. Contudo, no segundo caso, $D = 2$, não há escala definida para o tamanho do sóliton, e há sempre um modo zero no espectro das flutuações radiais da solução. Já para $D > 2$, temos que $E''(\alpha) \Big|_{\alpha=1} < 0$, ou seja, a energia das configurações de energia localizadas diminui medida que tende a zero.

O teorema de Derrick diz que não é possível ter soluções estáticas, de energia finita para a lagrangeana (4.1) no caso $D > 2$, uma vez que nesse caso $E'(\alpha) \Big|_{\alpha=1} < 0$

Nesse sentido, há diversas maneiras de quebrar as restrições impostas pelo teorema [3], uma delas é o acoplamento com um campo de *Gauge* através de uma derivada

covariante da forma

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} = \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + g A_\mu (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}), \quad (4.14)$$

em que sob uma transformação de escala temos

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} \rightarrow \alpha D'_\mu \boldsymbol{\phi}(x'), \quad (4.15)$$

onde D'_μ indica que a derivação é feita na coordenada x' . O campo de gauge A_μ muda sob uma transformação de escala como

$$A_\mu(x) \rightarrow \alpha A_\mu(x'). \quad (4.16)$$

Conseqüentemente, o tensor $F_{\mu\nu}$ se transforma como

$$F_{\mu\nu}(x) = \alpha^2 F_{\mu\nu}(x'). \quad (4.17)$$

Desse ponto de vista, na nossa análise, a energia total do campo eletromagnético é do tipo

$$\Gamma_4 = \frac{1}{4} \int d^D \mathbf{x} F_{\mu\nu}^2, \quad (4.18)$$

Assim, a energia sob a transformação de escala se torna

$$E[\phi_\alpha] = \Gamma_4[\phi_\alpha] + \Gamma_2[\phi_\alpha] + \Gamma_0[\phi_\alpha] = \alpha^{4-D} \Gamma_4[\boldsymbol{\phi}_0] + \alpha^{2-D} \Gamma_2 + \alpha^{-D} \Gamma_0[\boldsymbol{\phi}_0]. \quad (4.19)$$

Escolhendo $D = 2$ e extremizando o funcional $E(\alpha)$ concluímos que para haver configurações de sólitons estáveis em um sistema acoplado, necessariamente, devemos ter $\Gamma_4 = \Gamma_0$. Essas relações devido a considerações de escala são conhecidas como relações viriais [3].

Por curiosidade, em $D = 3$ encontramos uma relação do tipo $\Gamma_4 = \Gamma_2 + 3\Gamma_0$. Essa relação abrange os conhecidos *monopolos de 't Hooft-Polyakov*. Já em $D = 4$, voltamos novamente com a invariância de escala, pois $\Gamma_2 = \Gamma_0 = 0$. Além disso, somente soluções triviais, isto é, puro gauge, são permitidas. É importante observar que tais relações não dizem nada a respeito do tipo das soluções, apenas dizem que elas existem.

Contudo, há outra maneira de contornar as restrição do teorema de Derrick usando campos escalares, para isso devemos buscar um novo termo que contenha derivadas superiores. É nesse ponto que entra o termo de Skyrme. Sabemos que

$$\mathcal{L}_S = \frac{\theta^2}{4} (\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi})^2, \quad (4.20)$$

de modo que em uma transformação de escala teremos $\Gamma_4 \rightarrow \alpha^{4-D} \Gamma_4$. Com isso, um sistema contendo termos de Klein-Gordon, Skyrme e um potencial garante soluções estáveis para $D = 2$ e $D = 3$.

4.2 Modelo Sigma $O(3)$ Não-Linear

Para $D = 2$, da Equação (4.13) implica que $\Gamma_0[\phi_0] = 0$. Como $U[\phi]$ é positivo, podemos afirmar que $\phi_0(x)$ é o mínimo de $U[\phi]$. Desse modo, o caso mais simples que podemos ter é quando $U[\phi] = 0$. Assim, a lagrangeana de interesse é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a, \quad (4.21)$$

onde ϕ_a é um multipletto de N campos escalares reais, de modo que ϕ_a pode ser visto como um vetor N -dimensional num *espaço interno* dos campos, e $\mu = 0, 1, 2$ é o índice espaço-temporal. As vezes será conveniente escrever $\phi_a \equiv \boldsymbol{\phi}$. A equação de movimento, nesse caso, é simplesmente

$$\square\phi_a = 0. \quad (4.22)$$

A única solução desse sistema é a trivial, onde todas as soluções não-singulares são constantes. Contudo, se introduzirmos o vínculo

$$\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = \phi_a \phi_a = 1 \quad (4.23)$$

e usarmos na lagrangeana através dos multiplicadores de Lagrange, obteremos um modelo não-linear que aceita soluções não-triviais. A lagrangeana (4.21) sujeita ao vínculo (4.23) descreve o chamado *modelo Sigma $O(N)$ não-linear* [34].

Nesse trabalho, nos restringiremos ao caso $N = 3$ [7], de modo que $a = 1, 2, 3$. Nesse sentido, a lagrangeana com o vínculo será dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + \lambda(x) (\phi_a \phi_a - 1). \quad (4.24)$$

Assim, obtemos obter a equação de movimento

$$(\square + \lambda)\phi_a = 0. \quad (4.25)$$

Se tivermos interessados em soluções estáticas, eliminamos a dependência temporal, de modo que

$$(\nabla^2 + \lambda)\phi_a = 0. \quad (4.26)$$

Podemos usar o vínculo (4.23) para eliminar λ da equação acima, assim

$$\lambda = -\phi_a \square \phi_a. \quad (4.27)$$

Portanto, a equação de movimento se tornará

$$\nabla^2 \phi_a - (\phi_a \nabla^2 \phi_a) \phi_a = 0. \quad (4.28)$$

Observe que, a expressão acima é não-linear e fornecerá soluções diferentes da (4.22). Primeiramente, olhemos para o funcional da energia do sistema trivial (4.21), visando soluções estáticas

$$E[\phi_a] = \int d^2 x \frac{1}{2} (\partial_i \phi_a)^2, \quad (4.29)$$

onde $i = 1, 2$ se refere as componentes espaciais. Obviamente a energia será minimizada quando o campo for homogêneo no espaço, ou seja, uma constante $\phi_a^{(0)} \equiv \boldsymbol{\phi}^{(0)}$. Entretanto, devido a restrição (4.23), $\phi_a^{(0)}$ pode tomar um contínuo de valores no espaço interno, em que todos minimizam a energia.

Vimos que o modelo *kink* quebra espontaneamente a simetria de paridade $\phi \rightarrow -\phi$, e que o mecanismo de Higgs quebra a simetria $U(1)$ local. Aqui, a quebra espontânea de simetria é devido as rotações $O(3)$ do espaço interno. Pois se fixarmos um ponto do espaço interno e fizermos perturbações sobre ele, certamente a lagrangeana resultante desse processo não será mais invariante sob tais rotações.

Busquemos agora soluções solitônicas desse sistema. Por análises feitas em seções anteriores, queremos que assintoticamente, o campo tome valores finitos para a fini-

tude da energia. Matematicamente

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}^{(0)}. \quad (4.30)$$

Agora, é conveniente usarmos coordenadas polares (ρ, θ) no espaço das coordenadas. O funcional da energia nesse caso será

$$E[\phi_a] = \frac{1}{2} \int |\nabla \phi_a|^2 \rho d\rho d\theta. \quad (4.31)$$

Nesse sistema de coordenadas, a relação (4.30) se traduz da forma

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho |\phi_a(\rho, \theta)|^2 = 0. \quad (4.32)$$

É importante ressaltar que ϕ_a dependerá da parte angular no limite $\rho \rightarrow \infty$ de modo que a parte angular do gradiente não é satisfeita pela equação acima.

Pela condição (4.30), isto é, no infinito, as configurações de campo $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ tendem ao mesmo valor $\boldsymbol{\phi}_a^{(0)}$, topologicamente falando, o que estamos fazendo é um mapeamento estereográfico das coordenadas do plano \mathbb{R}^2 numa superfície esférica S^2 [57]. Ou seja

$$\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2.$$

Informalmente, é como se estivéssemos dobrando todo o plano real em uma superfície, em que todos os valores no infinito corresponderão a um polo da esfera[37].

Cabe acrescentar que, devido ao vínculo (4.23), há espaço interno representado pelos campos ϕ_a , nos quais fazem papel de variáveis cartesianas que localizam os pontos de uma superfície esférica que denotaremos por S_{int}^2 . Tal espaço é frequentemente chamado na literatura de *target space*. Desse modo, o que temos é um mapeamento π entre duas superfícies esféricas. Matematicamente, representamos esse procedimento por

$$\sigma : S^2 \rightarrow S_{\text{int}}^2 \quad (4.33)$$

Em topologia, podemos classificar todos os mapeamentos de uma superfície esférica em outra em setores de homotopia. Tais classificações permitirão a introdução do conceito de carga topológica nesse modelo. Em virtude disso, dedicamos uma (muito) breve discussão (localizada no apêndice) - abrindo mão de provas matemáticas rigorosas- sobre a teoria da homotopia. Acresce lembrar que algumas definições contidas lá são de fundamental importância para a obtenção e classificação das soluções obtidas nesse trabalho.

4.2.1 Soluções Exatas e Equações BPS

Voltando ao modelo Sigma, a conexão com a homotopia entra quando buscamos classificar as configurações de campo estáticas $\boldsymbol{\phi}$ de energia finita em setores de homotopia. Lembremos que, enquanto $\phi_a^{(0)}$ deve ser o mesmo em todos os pontos no infinito espacial, pode assumir qualquer valor no espaço interno S_{int}^2 pelo vínculo (4.23). Nesse sentido, podemos obter configurações de campo em diferentes direções de $\phi_a^{(0)}$ através de rotações - que são transformações contínuas - no espaço alvo. Para o modelo sigma $O(3)$ o *winding number* é dado por [37]

$$\text{deg}[\boldsymbol{\phi}] = N = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}), \quad (4.34)$$

onde \deg se refere ao termo *topological degree* que significa *grau topológico*. Por motivos de clareza adotamos a notação $\boldsymbol{\phi} \equiv \phi_a$ e voltaremos a usá-la em breve. Então, os produtos interno e vetorial se referem ao espaço interno dos campos. Vejamos como essa expressão realmente fornece a carga topológica definida anteriormente.

Podemos usar duas variáveis $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, ao invés de usar as variáveis ϕ_a , para descrever a esfera S_{int}^2 . Expressamos o elemento de superfície dS_a^{int} em termos de ϕ_a e γ pela expressão

$$dS_a^{int} = d^2\gamma \left[\frac{1}{2} \epsilon_{mn} \epsilon_{abc} \frac{\phi_a}{\gamma_m} \frac{\phi_b}{\gamma_n} \right]. \quad (4.35)$$

Agora, voltemos para a notação indicial escrevendo a equação (4.34) como

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi_b}{\partial x^\nu} \\ N &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_a}{\partial \gamma_m} \frac{\partial \gamma_m}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi_b}{\partial \gamma_n} \frac{\partial \gamma_n}{\partial x^\nu}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Podemos mudar a variável de integração com o uso do jacobiano da transformação das variáveis x para γ . Assim,

$$N = \frac{1}{8\pi} \int d^2\gamma \epsilon_{mn} \epsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_a}{\partial \gamma_m} \frac{\partial \phi_b}{\partial \gamma_n}. \quad (4.37)$$

Pela expressão (4.35) podemos reescrever a equação acima como

$$N = \frac{1}{4\pi} \int dS_a^{int} \phi_a, \quad (4.38)$$

ou ainda,

$$N = \frac{1}{4\pi} \int dS^{int} \cdot \boldsymbol{\phi}. \quad (4.39)$$

Porém, sabemos que $\boldsymbol{\phi}$ é um vetor unitário normal a superfície S_{int}^2 . Então, podemos escrever

$$N = \frac{1}{4\pi} \int dS^{int}. \quad (4.40)$$

Recordemos que, devido ao vínculo (4.23), a superfície tem área 4π , pois tem raio unitário. Nesse sentido, N fornece o número de vezes que a esfera S^{int} é percorrida quando compactamos o espaço dos reais mapeado na esfera S^2 . Para encontrar soluções em qualquer setor N usamos a identidade

$$\int d^2x [(\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \pm \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \pm \epsilon_{\mu\lambda} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\lambda \boldsymbol{\phi})] \geq 0. \quad (4.41)$$

Desenvolvendo a expressão

$$\int [\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\lambda} (\boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\boldsymbol{\phi} \times \partial_\lambda \boldsymbol{\phi}) \pm 2\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi})] \geq 0, \quad (4.42)$$

fazendo uma integração por partes, teremos

$$\int [\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + \delta_{\nu\lambda} (\boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\boldsymbol{\phi} \times \partial_\lambda \boldsymbol{\phi})] \geq \pm 2 \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \quad (4.43)$$

Analisemos o segundo termo. Podemos usar a identidade vetorial

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \delta_{\nu\lambda}(\boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\boldsymbol{\phi} \times \partial_\lambda \boldsymbol{\phi}) &= \delta_{\nu\lambda} [(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi})(\partial_\nu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\lambda \boldsymbol{\phi}) - (\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\lambda \boldsymbol{\phi})(\partial_\nu \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi})] \\ &= \delta_{\nu\lambda}(\partial_\nu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\lambda \boldsymbol{\phi}) \\ &= \partial_\nu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi} \\ \delta_{\nu\lambda}(\boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\boldsymbol{\phi} \times \partial_\lambda \boldsymbol{\phi}) &= \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde na primeira passagem usamos o vínculo (4.23) diretamente, e no segundo termos usamos sua derivada obtendo $\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\lambda \boldsymbol{\phi} = 0$. Então, substituindo a relação acima na equação (4.43), teremos

$$2 \int d^2x \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \geq \pm 2 \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}). \quad (4.45)$$

Aqui, podemos usar definições de energia e carga topológica das equações (4.29) e (4.34), respectivamente. Logo,

$$E \geq 4\pi|N|. \quad (4.46)$$

Essa equação é frequentemente chamada de *limite de Bogomol'nyi* ou *limite BPS*¹ [58]. Quando a igualdade é satisfeita dizemos que o limite foi saturado. Assim, esse método, fornece um limite inferior para a energia de qualquer configuração estática de um determinado setor. Certamente, a igualdade da equação (4.41) é satisfeita quando

$$\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \pm \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi} = 0. \quad (4.47)$$

Essas, são as chamadas *equações de BPS* (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld) ou *equações auto-duais* [59], são tais que qualquer configuração de campo que a satisfaça, bem como a condição $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}$, minimizará o funcional $E[\boldsymbol{\phi}]$ em algum setor N , e conseqüentemente satisfará a equação de campo (4.28). Podemos verificar essa afirmação, fazendo

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{\phi} &= \partial_\mu \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \\ &= \mp \partial_\mu (\epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \\ &= \mp (\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi} + \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\mu \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \\ &= \mp \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}, \end{aligned}$$

na ultima passagem consideramos que o segundo termo é zero devido a antissimetria do termo de Levi-Civita. Usando novamente a (4.47),

$$\nabla^2 \boldsymbol{\phi} = \mp \epsilon_{\mu\nu} (\mp \epsilon_{\mu\lambda} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\lambda \boldsymbol{\phi}) \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}. \quad (4.48)$$

Usando a notação indicial,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\mu \phi_e &= \delta_{\nu\lambda} \epsilon_{cde} (\epsilon_{abc} \phi_a \partial_\lambda \phi_b) \partial_\nu \phi_d \\ &= \delta_{\nu\lambda} (\delta_{ad} \delta_{be} - \delta_{ae} \delta_{bd}) \phi_a \partial_\lambda \phi_b \partial_\nu \phi_d \\ &= \delta_{\nu\lambda} (\phi_a \partial_\lambda \phi_e \partial_\nu \phi_a - \phi_e \partial_\lambda \phi_b \partial_\nu \phi_b), \end{aligned} \quad (4.49)$$

¹ Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield

onde nas passagens usamos a propriedade do símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{abc}\epsilon_{cde} = \delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd}$. Voltando para a notação compacta,

$$\nabla^2 \boldsymbol{\phi} = \delta_{\nu\lambda} [\partial_\lambda \boldsymbol{\phi} (\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) - \boldsymbol{\phi} (\partial_\lambda \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi})], \quad (4.50)$$

entretanto já vimos que $\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi} = 0$, então

$$\nabla^2 \boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{\phi} (\partial_\nu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi}). \quad (4.51)$$

Derivando duas vezes o vínculo (4.23),

$$\partial_\nu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi} \nabla^2 \boldsymbol{\phi} = 0, \quad (4.52)$$

substituindo na equação (4.51), realmente obtemos a equação de campo (4.28), isto é

$$\nabla^2 \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi} (\boldsymbol{\phi} \nabla^2 \boldsymbol{\phi}). \quad (4.53)$$

Em suma, ao invés de resolvermos a equação de campo (4.28) que é uma equação diferencial de segunda ordem, resolvemos (4.47) que é uma equação diferencial de primeira ordem. Nesse sentido, o formalismo BPS fornece uma engenhosa maneira de buscar soluções solitônicas sem precisarmos resolver a equação de campo do sistema [60].

É importante ressaltar que nem sempre o método de obter as equações BPS através do multiplicador de Lagrange será vantajoso, já que modelos mais realistas envolvem outras interações e conseqüentemente outros termos. Conseqüentemente manipular a expressão (4.41) poderá ser um trabalho bastante árduo. O que se faz, veremos nas próximas sessões, é reescrever o funcional da energia em quadraturas de modo que apareça a carga topológica e assim poderemos usar o limite BPS e obter as equações auto-duais.

Nosso próximo passo será resolver as equações de BPS. Podemos simplificá-las fazendo uma projeção estereográfica das variáveis cartesianas ϕ_a que compõem a esfera S_{int}^2 num plano de coordenadas (u_1, u_2) . podemos relacionar as variáveis pelas expressões

$$u_1 = \frac{2\phi_1}{1 - \phi_3} \quad (4.54)$$

e

$$u_2 = \frac{2\phi_2}{1 - \phi_3}. \quad (4.55)$$

Aqui, é conveniente definirmos duas quantidades complexas

$$\boldsymbol{\phi} \equiv \phi_1 + i\phi_2, \quad (4.56)$$

$$u \equiv u_1 + iu_2 = \frac{2\boldsymbol{\phi}}{1 - \phi_3}. \quad (4.57)$$

De (4.47), temos as duas equações

$$\partial_1 \boldsymbol{\phi} \pm \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (4.58)$$

$$\partial_2 \boldsymbol{\phi} \mp \boldsymbol{\phi} \times \partial_1 \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (4.59)$$

Cada uma das duas expressões acima contém três equações referentes ao produto vetorial,

explicitamente:

$$\begin{aligned}
\partial_1\phi_1 &= \mp(\phi_2\partial_2\phi_3 - \phi_3\partial_2\phi_2) \\
\partial_1\phi_2 &= \mp(\phi_3\partial_2\phi_1 - \phi_1\partial_2\phi_2) \\
\partial_1\phi_3 &= \mp(\phi_1\partial_2\phi_2 - \phi_2\partial_2\phi_1) \\
\partial_2\phi_1 &= \pm(\phi_2\partial_1\phi_3 - \phi_3\partial_1\phi_2) \\
\partial_2\phi_2 &= \pm(\phi_3\partial_1\phi_1 - \phi_1\partial_1\phi_3) \\
\partial_2\phi_3 &= \pm(\phi_1\partial_1\phi_2 - \phi_2\partial_1\phi_1)
\end{aligned}
\tag{4.60}$$

Com isso, vejamos

$$\begin{aligned}
\partial_1\phi &= \partial_1\phi_1 + i\partial_1\phi_2 \\
&= \mp(\phi_2\partial_2\phi_3 - \phi_3\partial_2\phi_2 + i\phi_3\partial_2\phi_1 - i\phi_1\partial_2\phi_3) \\
&= \pm i(\phi_1\partial_2\phi_3 - \phi_3\partial_2\phi_1 + i\phi_2\partial_2\phi_3 - i\phi_3\partial_2\phi_2) \\
&= \pm i(\phi\partial_2\phi_3 - \phi_3\partial_2\phi)
\end{aligned}
\tag{4.61}$$

Podemos usar a notação $\vec{\phi}\partial\phi_3 \equiv \phi\partial\phi_3 - \phi_3\partial\phi$ para compactar a expressão. Assim

$$\partial_1\phi = \pm i\vec{\phi}\partial_2\phi_3. \tag{4.62}$$

Analogamente, podemos obter

$$\partial_2\phi = \mp i\vec{\phi}\partial_2\phi_3. \tag{4.63}$$

Observe que, de (5.64) e (4.55) podemos definir a derivada $\partial_1 u \equiv \partial u / \partial x_1$ onde

$$\begin{aligned}
\partial_1 u &= \frac{2}{(1-\phi_3)^2} \phi \partial_1\phi_3 + \frac{2}{(1-\phi_3)} \partial_1\phi \\
&= \frac{2}{(1-\phi_3)^2} [(1-\phi_3)\partial_1\phi + \phi\partial_1\phi_3] \\
&= \frac{2}{(1-\phi_3)^2} (\partial_1\phi + \phi\partial_1\phi_3 - \phi_3\partial_1\phi) \\
&= \frac{2}{(1-\phi_3)^2} (\partial_1\phi + \vec{\phi}\partial_1\phi_3).
\end{aligned}
\tag{4.64}$$

Substituindo (4.62) e (4.63) em (4.64), teremos

$$\partial_1 u = \pm i\partial_2 u. \tag{4.65}$$

Explicitando em termos de u_1 e u_2 , curiosamente obteremos

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \mp \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{4.66}$$

e

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \pm \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tag{4.67}$$

que são as conhecidas relações de Cauchy-Riemann para $u = u(z)$, com $z = x_1 + ix_2$, sendo uma função analítica complexa, sendo $u(z)$ para o sinal de cima e $u(\bar{z})$ para o de baixo [61].

Logo, qualquer função analítica $u(z)$ ou $u(\bar{z})$ satisfaz as equações BPS (4.47), e consequentemente as equações de campo (4.28).

Podemos expressar a energia em termos da função analítica $u(z)$

$$E = \int d^2x \frac{|\frac{du}{dz}|^2}{\left(1 + \frac{|u|^2}{4}\right)^2}, \quad (4.68)$$

no limite da energia

$$E = 4\pi|N|. \quad (4.69)$$

Um protótipo dessa solução é do tipo [37]

$$u(z) = \left[\frac{z - z_0}{\lambda} \right]^n \quad (4.70)$$

onde n é um inteiro positivo, λ é um real e z_0 é um complexo, ambos arbitrários. A condição que $u(z)$ é uma função analítica nos garante que será uma solução estática para a equação de campo (4.28). O fato de que as soluções existam para λ e z_0 arbitrários reflete a invariância do sistema sob transformações de escala e translações, respectivamente.

Para $n = 1$, obteremos as configurações de campo

$$\phi_1 = \frac{4\lambda x_1}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad \phi_2 = \frac{4\lambda x_2}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad \phi_3 = \frac{r^2 - 4\lambda^2}{r^2 + 4\lambda^2} \quad (4.71)$$

onde λ faz o papel da escala da excitação. Assim como fizemos no modelo *kink* podemos obter uma solução dependente do tempo através de um *boost* de Lorentz.

Note que z denota pontos nas coordenadas espaciais, enquanto que u representa o espaço interno S_{int}^2 dos campos projetado em um plano de coordenadas (u_1, u_2) .

Os modelos $O(3)$ e suas soluções são de grande importância para descrever para descrever a mecânica estatística de um material ferromagnético isotrópico [7].

Ressaltamos que, dificilmente conseguimos resolver as equações BPS analiticamente como fizemos nesse caso do modelo Sigma $O(3)$ não-linear. As soluções quase sempre são obtidas numericamente.

5 SÓLITONS EM TEORIAS DE GAUGE

Se olharmos para as soluções exatas do modelo sigma $O(3)$ não-linear (4.70) encontradas no capítulo anterior, podemos perceber uma desvantagem no que diz respeito a associação dessas soluções a partículas. Tais soluções expressas em termos de funções racionais de grau arbitrário resultam em uma invariância de escala no tamanho dos sólitons. Em outras palavras, esses sólitons podem crescer ou decair infinitamente durante uma evolução temporal sem que a energia varie, de modo que as soluções tornam-se inadequadas sobre uma quantização, isto é, sua interpretação como partícula [62].

Nesse contexto, existem algumas possibilidades de resolver esse problema de estabilidade. Uma dessas é o acoplamento com um campo de *gauge* acrescido de algum potencial. Essa combinação pode quebrar a invariância de escala, dando estabilidade ao modelo [10]. Além disso, é bastante razoável adicionar um campo de *gauge* ao modelo simplesmente por exigir que haja uma interação eletromagnética no modelo, uma vez que é de grande importância e aplicabilidade o estudo de uma eletrodinâmica planar.

Portanto, nesse capítulo veremos algumas possibilidades de gaugeamento utilizando termos de Maxwell e Chern-Simons, bem como ambos juntos. Além disso será enfatizado a importância da escolha de um potencial adequado de modo a garantir a existência das equações BPS. Então, discutiremos as escolhas mais comuns na literatura. Finalmente, para cada modelo obteremos as equações de BPS, que são equivalentes a obter as equações Euler-Lagrange.

Nosso objetivo é fazer um acoplamento entre o tripleto de campos $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ restrito ao vínculo $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$ e um campo de calibre A^μ . Para isso é conveniente escrever $\boldsymbol{\phi}$ como $\boldsymbol{\phi} = (\phi, \phi_3)$, em que - como vimos no capítulo anterior -

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2.$$

Pode-se verificar que tanto a lagrangeana quanto a energia permanece invariante sob isorotações em torno de ϕ_3 . Desse modo, as transformações de calibre serão do tipo

$$D^\mu(\phi_1 + i\phi_2) = (\partial^\mu + igA^\mu)(\phi_1 + i\phi_2) \quad (5.1)$$

$$D^\mu\phi_3 = \partial^\mu\phi_3. \quad (5.2)$$

Desacoplando ϕ_1 e ϕ_2 , teremos

$$D^\mu\phi_1 = \partial^\mu\phi_1 - gA^\mu\phi_2 \quad (5.3)$$

$$D^\mu\phi_2 = \partial^\mu\phi_2 + gA^\mu\phi_1 \quad (5.4)$$

$$D^\mu\phi_3 = \partial^\mu\phi_3. \quad (5.5)$$

Note que, podemos escrever as três equações acima compactadas na forma

$$D^\mu\boldsymbol{\phi} = \partial^\mu\boldsymbol{\phi} + gA^\mu\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}, \quad (5.6)$$

em que

$$\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1). \quad (5.7)$$

Para que consigamos obter as equações de BPS é de fundamental importância que a escolha

do potencial seja adequada. Tal potencial deve ser invariante sobre uma transformação de calibre e possua uma configuração de mínimo não-trivial. Na literatura, existem uma certa quantidade de potenciais convenientes. Uma escolha interessante é um potencial tipo Higgs [60]

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \mu^2(|\boldsymbol{\phi}|^2 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}). \quad (5.8)$$

Usando a restrição $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$, e que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi} = \phi_3$, a expressão acima se reduz a

$$V(\phi_3) = \mu^2(1 - \phi_3). \quad (5.9)$$

Esse potencial é análogo ao termo extra que é incluso no modelo original de *Skyrme* que gera a massa dos píons, de modo que μ^{-1} é interpretado como o comprimento de onda Compton dos mésons do modelo [30].

Há também outras variações desse potencial que podem gerar equações auto-duais, é do tipo

$$V(\phi_3) = \mu^2(1 - \phi_3)^2. \quad (5.10)$$

Outra escolha interessante, que também usaremos mais adiante é o potencial de vácuo duplo [63]

$$V(\phi_3) = \mu^2(1 - \phi_3^2), \quad (5.11)$$

que tem mínimo degenerado em $\phi_3 = \pm 1$. Podemos observar que esse potencial surge de uma dependência explícita com o termo $(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi})^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 = 1 - \phi_3^2$.

5.1 Gaugeamento $U(1)$ com Termo de Maxwell

O caso mais simples de gaugeamento no modelo $O(3)$ é o caso onde a dinâmica dos campos de gauge é gerada exclusivamente por um termo de Maxwell. A lagrangeana desse sistema é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \mu^2(1 - \phi_3)^2, \quad (5.12)$$

onde escolhemos o potencial tipo Higgs enfatizado em (5.10), e a derivada covariante é dada por (5.6).

As equações de movimento são

$$D_\mu D^\mu \boldsymbol{\phi} = -\mu^2(1 - \phi_3) \hat{\mathbf{n}} \quad (5.13)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = g(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi}, \quad (5.14)$$

onde podemos definir

$$\mathbf{J}^\mu \equiv \boldsymbol{\phi} \times D^\mu \boldsymbol{\phi}. \quad (5.15)$$

Assim, podemos construir o funcional da energia dado por $\int d^2\mathbf{x} T^{00}$, que será

$$E = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \left[(D_0 \boldsymbol{\phi})^2 + (D_i \boldsymbol{\phi})^2 + \mu^2(1 - \phi_3)^2 + F_{0i}^2 + F_{12}^2 \right]. \quad (5.16)$$

Escolheremos aqui o gauge de campo nulo

$$A_\mu = (A_0 = 0, A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x})), \quad E_i = 0, \quad B = F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1. \quad (5.17)$$

Se isso ocorre, então no caso estático, teremos

$$D_0\boldsymbol{\phi} = \partial_0\boldsymbol{\phi} + gA_0(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) = 0. \quad (5.18)$$

Desse modo, o funcional estático da energia se torna

$$E[A_0 = 0, A_1, A_2, \boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{2} \int d^2x [(D_i\boldsymbol{\phi})^2 + \mu^2(1 - \phi_3)^2 + F_{12}^2]. \quad (5.19)$$

Assim como no modelo sigma não-gaugeado, afim de obter configurações de energia finita, exigimos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \boldsymbol{\phi}(t, x) = \hat{\mathbf{n}}. \quad (5.20)$$

Como vimos anteriormente, essa condição permite que o plano \mathbb{R}^2 seja compactificado em uma esfera topológica S^2 . De modo que as soluções estáticas de energia finita são um mapeamento de S^2 no espaço interno dos campos S_{int}^2 , sendo que tais soluções podem ser classificadas em setores de homotopia.

Podemos reescrever o funcional da energia, completando quadrados, como

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ (D_1\boldsymbol{\phi} \pm \boldsymbol{\phi} \times D_2\boldsymbol{\phi})^2 + [F_{12} \mp (1 - \phi_3)]^2 \right\} + \pm \int d^2x \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D_1\boldsymbol{\phi} \times D_2\boldsymbol{\phi}) + F_{12}(1 - \phi_3) \right], \quad (5.21)$$

onde consideramos, por simplicidade, $g = 1$. Podemos reescrever,

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ (D_1\boldsymbol{\phi} \pm \boldsymbol{\phi} \times D_2\boldsymbol{\phi})^2 + [F_{12} \mp (1 - \phi_3)]^2 \right\} \pm 4\pi \int d^2x j'_0, \quad (5.22)$$

em que j'_0 é a componente zero da corrente topológica

$$j'_\mu = \frac{1}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} \boldsymbol{\phi} \cdot [D^\nu\boldsymbol{\phi} \times D^\rho\boldsymbol{\phi} + gF^{\nu\rho}(1 - \phi_3)\boldsymbol{\phi}]. \quad (5.23)$$

Essa é conhecida como *corrente de Schroers* e é necessária para a obtenção do formalismo BPS. Além disso, difere da corrente topológica do sigma-model por

$$j'_\mu = j_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\nu [(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) A^\rho]. \quad (5.24)$$

Certamente, a corrente acima se conserva, pois é de imediato que $\partial_\mu j'^\mu = 0$. Então o *winding number* é obtido por

$$N' = \int d^2x j'_0 = \frac{1}{4\pi} \int d^2x [\boldsymbol{\phi} \cdot (D_1\boldsymbol{\phi} \times D_2\boldsymbol{\phi}) + F_{12}(1 - \phi_3)]. \quad (5.25)$$

Por construção, a expressão (5.22) tem um limite inferior de $E \geq 4\pi N$. de modo que a igualdade é válida no limite BPS. Desse modo, encontramos as equações auto-duais, que são

$$D_1\boldsymbol{\phi} = \mp \boldsymbol{\phi} \times D_2\boldsymbol{\phi} \quad (5.26)$$

$$F_{12} = \pm(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}). \quad (5.27)$$

Analogamente ao caso não-gaugeado, para resolvermos as equações acima fazendo uma projeção estereográfica das variáveis cartesianas $\boldsymbol{\phi}$ num plano de coordenadas

(u_1, u_2) . Então,

$$u_1 = \frac{\phi_1}{1 + \phi_3} \quad u_2 = \frac{\phi_2}{1 + \phi_3}. \quad (5.28)$$

Substituindo as equações acima em (5.26), obtemos

$$D_1 u = \mp i D_2 u \quad (5.29)$$

$$F_{12} = \pm \frac{2|u|^2}{1 + |u|^2}, \quad (5.30)$$

em que $u = u_1 + i u_2$. Fazendo a substituição de variáveis $\psi = \ln u$, teremos

$$\nabla^2(\psi + \bar{\psi}) = \frac{4}{1 + \exp[-(\psi + \bar{\psi})]}. \quad (5.31)$$

A equação acima é uma equação de Laplace não-linear e não tem soluções exatas na literatura, de modo que é necessário um tratamento numérico no qual não abordaremos nesse trabalho e deixaremos como uma perspectiva. Contudo, mostraremos a forma final de reescrever as equações BPS para tal tratamento.

5.1.1 Resolvendo as equações BPS

Para resolver as equações (5.26), devemos observar que o campo ϕ é invariante sobre iso-rotações $SO(2)_{\text{ISO}}$ - dizemos iso-rotações para não confundirmos com as rotações do espaço físico - no espaço interno S_{int}^2 em torno de \hat{n} fixo. De modo que os elementos de $SO(2)_{\text{ISO}}$ podem ser parametrizados por um ângulo η , de modo que

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \rightarrow (\cos \eta \phi_1 + \sin \eta \phi_2, -\sin \eta \phi_1 + \cos \eta \phi_2, \phi_3). \quad (5.32)$$

A energia também é invariante sob reflexões P combinadas, tanto nos campos como no espaço físico do tipo

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \rightarrow (\phi_1, -\phi_2, \phi_3) \quad \text{e} \quad (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, -x_2). \quad (5.33)$$

Nesse sentido, dizemos que o funcional da energia do sistema é invariante sobre o grupo de simetria

$$G = SO(2)_{\text{ISO}} \times E_2 \times P, \quad (5.34)$$

onde E_2 são as rotações espaciais euclidianas. Estamos interessados em configurações estacionárias ditas topológicas, isto é, com $N \neq 0$. Campos que são invariantes sob o grupo G podem ter a forma [17]

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos(N\theta - \eta) \\ \sin f(r) \sin(N\theta - \eta) \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

onde (r, θ) são coordenadas polares no plano- \mathbf{x} e $f(r)$ é uma função satisfazendo algumas condições de contorno, esse formato para campo ϕ é frequentemente chamado de *hedgehog ansatz*. Podemos observar que o parâmetro η da iso-rotação é arbitrário, de modo que campos com diferentes ângulos estão associados a estados de energia degenerados. Nesse sentido, podemos nos restringir, sem perda de generalidade, a campos cujo $\eta = 0$. Então, a

equação (5.35) se torna

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos(N\theta) \\ \sin f(r) \sin(N\theta) \\ \cos f(r) \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Por questão de simplicidade assumimos que o campo de *gauge* tem apenas uma componente, de modo que podemos chutar que sua forma seja

$$A_\theta = na(r). \quad (5.37)$$

Assim, o campo magnético $B \equiv F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$, tem a forma

$$F_{12} = n \frac{a'(r)}{r}, \quad (5.38)$$

onde o termo no denominador surge devido a transformação de coordenadas $(x_1, x_2) \rightarrow (r, \theta)$.

Vejamos agora quais condições de contorno devemos esperar de $f(r)$. O primeiro critério é que devemos obter soluções regulares na origem, então podemos esperar que

$$f(0) = \pi \quad \text{e} \quad a(0) = 0. \quad (5.39)$$

Além disso, para a energia ser finita, certamente devemos ter

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a'(r) = 0. \quad (5.40)$$

Então, as equações de autoduais (5.26) com o *ansatz* (5.36) se tornam

$$\begin{aligned} f' &= -|n| \frac{1+a}{r} \sin f \\ a' &= -\frac{r}{|n|} (1 - \cos f). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Estas são equações acopladas de primeira ordem para f e a . Observe que absorvemos os sinais das equações BPS nos módulos. Para obter as equações acima, basta escolher uma componente do campo no espaço interno e saber que a derivada covariante com as restrições impostas, em componentes, é do tipo

$$D_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \partial_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + g A_1(-\phi_2, \phi_1, 0) \quad (5.42)$$

$$D_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \partial_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + g A_2(-\phi_2, \phi_1, 0). \quad (5.43)$$

Na referência [60] por meio de um tratamento numérico que as equações (5.41) possuem soluções solitônicas. Foi mostrado os sólitons são estáveis quando se leva em conta transformações de escala. Em outras palavras, a adição de uma teoria de *gauge* num sistema de modelo sigma, pode resolver o problema da invariância de escala. Além disso, transportam fluxo magnético que pode assumir valores arbitrários em algum intervalo finito.

5.2 Gaugeamento $U(1)$ com Termo de Chern-Simons

Também é possível obter soluções solitônicas para o modelo sigma $O(3)$ gaugeado com a dinâmica do campo de *gauge* governada por um termo de Chern-Simons ao invés do de Maxwell, desde que seja feita uma escolha adequada para o potencial. É interessante

ressaltar que tais soluções quebram a invariância de escala dos sólitons.

Mostraremos aqui como obter essas soluções, que foram encontradas em [62]. Primeiramente, consideremos a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda} - \frac{1}{2\kappa^2}(1 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^3. \quad (5.44)$$

Observe que, adotamos o sistema de unidades naturais, o coeficiente de Chern-Simons tem dimensão de comprimento ou inverso de massa. O termo da frente do potencial da lagrangeana foi escolhido de modo a satisfazer o limite BPS. Certamente, como mudamos apenas a dinâmica do campo de gauge, a derivada covariante continua sendo dada por (5.6). Outro fato importante é que o potencial acima possui dois mínimos, semelhante ao (5.11), em $\phi_3 = \pm 1$

De fato, a lagrangeana (5.44) é invariante sob iso-rotações $SO(2)$ ou $U(1)$ em torno de $\hat{\mathbf{n}}$. Podemos ver isso facilmente fazendo

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi} = |(\partial_\mu + iA_\mu)(\phi_1 + i\phi_2)|^2 + \partial_\mu \phi_3 \partial^\mu \phi_3. \quad (5.45)$$

As equação de movimento para $\boldsymbol{\phi}$, variando (5.44) é

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= D_\mu \delta \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi} - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \boldsymbol{\phi}}{2\kappa^2} (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^3 - \frac{3(-\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \boldsymbol{\phi})}{2\kappa^2} (1 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^2 \\ &= -D_\mu D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \boldsymbol{\phi} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \boldsymbol{\phi}}{2\kappa^2} (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^2 (-1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi} + 3 + 3\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) \\ &= -D_\mu D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \boldsymbol{\phi} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \boldsymbol{\phi}}{\kappa^2} (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^2 (1 - 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}), \end{aligned}$$

onde na segunda passagem usamos uma integração por partes e desprezamos o termo de superfície. Como vimos, funcionalmente, a equação de Euler-Lagrange se traduz em $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} = 0$, onde Φ é qualquer campo, logo fazendo $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \boldsymbol{\phi}} = 0$, teremos,

$$D_\mu D^\mu \boldsymbol{\phi} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\kappa^2} (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^2 (1 - 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) \quad (5.46)$$

Do mesmo modo obtemos as equações para o campo de *gauge* A_μ , vejamos,

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta(D_\mu \boldsymbol{\phi})}{\delta A_\rho} \delta A_\rho \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi} + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda} \delta A_\mu F_{\nu\lambda} + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \delta F_{\nu\lambda}, \quad (5.47)$$

desenvolvendo o terceiro termo, teremos

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \delta F_{\nu\lambda} &= \epsilon^{\mu\nu\lambda} [A_\mu \partial_\nu \delta A_\lambda - A_\mu \partial_\lambda \delta A_\nu] \\ &= -\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\mu \delta A_\lambda + \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda A_\mu \delta A_\nu \\ &= \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda \delta A_\mu - \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda A_\nu \delta A_\mu \\ &= \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \delta A_\mu, \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde na segunda passagem fizemos novamente a integração por partes e desprezamos os termos de derivada total, já na terceira passagem fizemos uma troca de índices e usamos as propriedades do simbolo de Levi-Civita. Assim, substituindo (5.48) em (5.47), e impondo a

condição $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = 0$, obteremos

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} = -(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi}, \quad (5.49)$$

ou ainda

$$D_\mu \left(\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \right) = -(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot D_\mu D^\mu \boldsymbol{\phi}. \quad (5.50)$$

Substituindo (5.46) em (5.50), obtemos as equações de movimento

$$D_\mu \mathbf{J}^\mu = -\frac{1}{\kappa^2} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) (1 + 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^2 \quad (5.51)$$

$$\mathbf{j}^\mu = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}, \quad (5.52)$$

em que a corrente conservada

$$\mathbf{J}^\mu = -\boldsymbol{\phi} \times D^\mu \boldsymbol{\phi} \quad (5.53)$$

está relacionada a corrente $U(1)$ por

$$\mathbf{j}^\mu = \mathbf{J}^\mu \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (5.54)$$

Vejamos aqui uma das características mais importantes que diferenciam as teorias de Maxwell e de Chern-Simons. A integral espacial da componente $j^0 = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{0ij} F_{ij} = cB$ fornece a carga conservada, isto é

$$Q = \int d^2x \kappa B, \quad (5.55)$$

ou ainda

$$Q = \kappa \Phi_B, \quad (5.56)$$

que é justamente o que foi visto no capítulo 2, ou seja, configurações de campo com fluxo magnético obrigatoriamente tem uma carga elétrica associada e vice-versa, onde κ é a constante de proporcionalidade.

Agora calcularemos o funcional da energia para configurações de campo estáticas, isto é $D_0 \boldsymbol{\phi} = 0$, através do tensor energia momento usando a equação, (A.50). Observe que o termo de CS não contribui, pois o simbolo de Levi-Civita se anula quando contraído com a métrica que é simétrica. Assim, teremos

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left[(D_i \boldsymbol{\phi})^2 - \kappa A_0 F_{12} + \frac{1}{\kappa^2} (1 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^3 \right]. \quad (5.57)$$

Através de (5.52) e (5.53), podemos encontrar que

$$A_0 = -\frac{k}{\phi_1^2 + \phi_2^2} F_{12}, \quad (5.58)$$

onde usamos o vínculo $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$. Logo, o funcional da energia será

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left[(D_i \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{\kappa F_{12}^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} + \frac{1}{\kappa^2} (1 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^3 \right]. \quad (5.59)$$

Agora, podemos reescrever a expressão acima, completando quadrados acrescentando o

termo da corrente conservada, como

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ (D_i \boldsymbol{\phi} \pm \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{\kappa^2}{1 - \phi_3^2} \left[F_{12} \mp \frac{1}{\kappa^2} (1 + \phi_3)(1 - \phi_3)^2 \right]^2 \right\} + \pm 4\pi \int d^2x K_0, \quad (5.60)$$

em que K_0 é a componente zero da corrente topológica definida por

$$K_\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} [\boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi} \times D^\lambda \boldsymbol{\phi} + F^{\nu\lambda} (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})]. \quad (5.61)$$

Como fizemos nos casos anteriores, no limite BPS as seguintes equações são satisfeitas

$$D_i \boldsymbol{\phi} \pm \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (5.62)$$

$$F_{12} \mp \frac{1}{\kappa^2} (1 + \phi_3)(1 - \phi_3)^2 = 0. \quad (5.63)$$

Fazendo a projeção esferográfica

$$u_1 = \frac{\phi_1}{1 + \phi_3} \quad e \quad u_2 = \frac{\phi_2}{1 + \phi_3}, \quad (5.64)$$

obtemos as seguintes equações auto-duais

$$(\partial_1 + iA_1)u = \mp i(\partial_2 + iA_2)u \quad (5.65)$$

$$F_{12} = \pm \frac{8|u|^4}{(1 + |u|^2)^3}. \quad (5.66)$$

Foi mostrado em [62] por meio de um tratamento numérico que as equações acima possuem soluções solitônicas tanto topológicas quanto não-topológicas.

6 MODELO BABY SKYRME

Recordemos que o modelo Skyrme é uma extensão do modelo sigma $O(3)$ não-linear, e é bem conhecido que o último possui um problema de invariância de escala, isto é, suas soluções (4.70), expressas em termos de funções racionais de grau arbitrário resultam em uma invariância de escala no tamanho dos sólitons. Em outras palavras, tais sólitons podem crescer ou decair infinitamente durante uma evolução temporal sem que a energia varie, de modo que as soluções tornam-se inadequadas sobre uma quantização, isto é, sua interpretação como partícula [62]. Nesse contexto, com o Teorema de Derrick mostramos que a adição do termo de Skyrme na lagrangeana do modelo sigma $O(3)$ acrescido de algum potencial podem quebrar a invariância de escala, dando estabilidade ao modelo [10].

Mostraremos brevemente a origem e influencia do modelo Skyrme da forma que é usada na literatura em modelos topológicos. Originalmente, o modelo Skyrme como uma teoria efetiva para a QCD é dado pela lagrangeana [19]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} \left([\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger] [\partial^\mu U U^\dagger, \partial^\nu U U^\dagger] \right), \quad (6.1)$$

em que F_π e e são parâmetros livres que devem concordar com os dados experimentais. Fazendo as redefinições $R_\mu = \partial_\mu U U^\dagger$, e fazendo o reescalonamento das unidades de comprimento e energia em $2/eF_\pi$ e $F_\pi/4e$ respectivamente, obteremos

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(R_\mu R^\mu \right) + \frac{1}{16} \text{Tr} \left([R_\mu, R_\nu] [R^\mu, R^\nu] \right). \quad (6.2)$$

Em teorias de Yang-Mills, os campos de gauge A^μ são matrizes e se relacionam com os campos físicos A_a^μ por meio geradores de algum grupo de simetria, que satisfazem uma certa álgebra. Por exemplo [64],

$$A^\mu = G_a A_a^\mu,$$

em que $a = 1, \dots, N$ e G_a são os geradores que satisfazem a relação

$$[G_a, G_b] = i f_{abc} G_c.$$

No caso dos Skyrmons R_μ está relacionado com a álgebra de $SU(3)$. Se u e v são elementos de alguma álgebra, é intuitivo pensar que o comutador $= [u, v]$ está associado um "produto vetorial" $u \times v$.

Portanto, a lagrangeana que descreve esse modelo no caso abeliano é

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{4} \left(\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi} \right)^2 - V(\boldsymbol{\phi}). \quad (6.3)$$

Então, dizemos que o modelo *Baby-Skyrme completo* é composto de um termo devido ao modelo sigma e outro de derivadas de ordem superior. Contudo, frequentemente na literatura é comum investigações no modelo skyrme sem o termo do modelo sigma. Tal modelo é chamado de *Modelo Baby-Skyrme restrito* e é dado simplesmente por

$$\mathcal{L}'_S = -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi} \right)^2 - V(\boldsymbol{\phi}). \quad (6.4)$$

6.1 Formalismo BPS no modelo Baby Skyrme

A implementação do formalismo BPS em teorias de Skyrmons tem sido um grande desafio. Somente em 2012 [36] foram obtidas equações auto-duais através do formalismo BPS para um modelo de Baby-Skyrme restrito gaugeado com a dinâmica do campo de *gauge* governada por um termo de Maxwell, porém foi necessário a adição de um potencial Super-simétrico para a existência das soluções, como veremos nessa sessão.

Recentemente, em 2019, Casana [65] mostrou que também é possível aplicar o formalismo BPS para um modelo Skyrme-Chern-Simons não restrito, isto é, com um termo de sigma-model, porém este último é proporcional ao superpotencial definido. Outra consequência da implementação BPS é que se ganha outro termo que modifica a dinâmica do campo de Skyrme.

6.1.1 Formalismo BPS no modelo Baby Skyrme não-gaugeado

Antes de tratarmos os modelos mais realistas envolvendo interações com campos de *gauge*, observemos como implementar o formalismo BPS para um modelo Skyrme restrito não-gaugeado. Podemos reescrever a lagrangeana como

$$\mathcal{L}_S = -\frac{\lambda^2}{4} (\partial^\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial^\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\partial^\alpha \boldsymbol{\phi} \times \partial^\beta \boldsymbol{\phi}) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \mu^2 V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}). \quad (6.5)$$

Substituindo na (A.50), obtemos o tensor energia momento

$$T^{\gamma\delta} = -\frac{\lambda^2}{2} (\partial^\gamma \boldsymbol{\phi} \times \partial_\beta \boldsymbol{\phi}) \cdot (\partial^\delta \boldsymbol{\phi} \times \partial^\beta \boldsymbol{\phi}) + \frac{\lambda^2}{4} (\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial^\nu \boldsymbol{\phi}) g^{\gamma\delta} + \mu^2 V g^{\gamma\delta}. \quad (6.6)$$

Então, a densidade de energia $T_{00} = \mathcal{E}$ se torna

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2}{2} (\partial_0 \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{\lambda^2}{4} (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 + \mu^2 V. \quad (6.7)$$

para o caso estático é, $\partial_0 \boldsymbol{\phi} = 0$, então teremos

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2}{4} (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 + \mu^2 V. \quad (6.8)$$

Aqui podemos definir a grandeza

$$q \equiv \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}), \quad (6.9)$$

que é 4π vezes a densidade de carga topológica. Desse modo, podemos escrever

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2}{2} q^2 + \mu^2 V. \quad (6.10)$$

Então para prosseguir com o formalismo BPS devemos reescrever a densidade energia como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\lambda q \pm \mu \sqrt{2V})^2 \mp \lambda \mu q \sqrt{2V}. \quad (6.11)$$

Então, a possível energia BPS será

$$E = \lambda \mu \int d^2x q \sqrt{2V} \quad (6.12)$$

com a seguinte equação auto-dual associada

$$q = \mp \frac{\mu}{\lambda} \sqrt{2V}. \quad (6.13)$$

Nos resta provar que a equação (6.12) de fato fornece o limite topológico da energia, em outras palavras, não deve depender da configuração de campo ϕ . Seguiremos com os argumentos de [36, 66, 67].

Já sabemos que o campo ϕ define um mapeamento do espaço \mathbb{R}^2 num *target space* S^2 . O termo $\int d^2x$ é um pullback sob esse mapeamento da área Ω no *target space*. Denominamos essa operação por

$$\int d^2x q = \Phi^*(\omega). \quad (6.14)$$

Nesse sentido, esse produto é igual 4π vezes o valor médio de $\sqrt{2V} r t$, ainda devemos multiplicar pelo número de vezes que ϕ cobre o espaço interno, ou seja, o *Winding Number*. Então

$$\int d^2x q = 4\pi \deg[\phi] \langle \sqrt{2V} \rangle_{S^2}. \quad (6.15)$$

Essa grandeza, de fato, não depende de ϕ nem de termos dinâmicos. Logo, uma estrutura BPS deve satisfazer o limite de energia

$$E \geq 4\pi \lambda \mu \deg[\phi] \langle \sqrt{2V} \rangle_{S^2}. \quad (6.16)$$

6.1.2 Formalismo BPS para Skyrme-Maxwell Restrito

Mostraremos aqui o método de obter as equações de BPS numa teoria de Skyrmions em interação com um campo eletromagnético com a dinâmica governada por um termo de Maxwell [36].

Consideremos a lagrangeana do modelo, dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} \left(D_\mu \phi \times D_\nu \phi \right)^2 - V(\mathbf{n} \cdot \phi). \quad (6.17)$$

Como de costume, o acoplamento mínimo da forma

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + g A_\mu (\mathbf{n} \times \phi). \quad (6.18)$$

Um fato importante é que mesmo sem considerarmos explicitamente o termo de Sigma-model, a restrição $\phi \cdot \phi = 1$ continua presente para os campos escalares, cujo podemos chamar de *campo de Skyrme*. As equações de Movimento são

$$D_\mu \mathbf{J}^\mu = -\mu^2 \hat{\mathbf{n}} \times \phi \frac{\partial V}{\partial \phi_3}, \quad (6.19)$$

e para o campo de gauge

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = g^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^\nu, \quad (6.20)$$

em que

$$\mathbf{J}^\mu = \lambda^2 D_\nu [\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi})]. \quad (6.21)$$

A densidade de energia (A.50) será

$$\epsilon = \frac{1}{2g^2} (E^2 + B^2) + \frac{\lambda^2}{4} (D_0 \boldsymbol{\phi} \times D_i \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{\lambda^2}{2} (D_1 \boldsymbol{\phi} \times D_2 \boldsymbol{\phi})^2 + 2\mu^2 V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}). \quad (6.22)$$

Já foi mostrado em [60] que soluções estáticas de energia finita contendo um termo de Maxwell deve ter campo elétrico nulo. Além disso, continuaremos com a escolha do gauge estático

$$A_\mu = (0, A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x})).$$

Desse modo o funcional da energia se reduz a

$$\epsilon = \frac{1}{2g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{2} (D_1 \boldsymbol{\phi} \times D_2 \boldsymbol{\phi})^2 + \mu^2 V. \quad (6.23)$$

Aqui podemos definir a grandeza *densidade de carga topológica*

$$q \equiv \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}), \quad (6.24)$$

e consequentemente,

$$Q \equiv \boldsymbol{\phi} \cdot (D_1 \boldsymbol{\phi} \times D_2 \boldsymbol{\phi}) = q + \epsilon_{ij} A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}). \quad (6.25)$$

Assim podemos reescrever a densidade de energia como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \mu^2 V. \quad (6.26)$$

Passemos agora para a implementação do formalismo BPS. Introduziremos duas funções $a(\phi_3)$ e $b(\phi_3)$ que serão determinadas *a posteriori* de modo que o formalismo BPS seja implementado. Começemos fazendo

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2g^2} (B + b(\phi_3))^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q - a(\phi_3))^2 + \mu^2 V - \frac{1}{2g^2} b^2 - \frac{1}{g^2} Bb - \frac{\lambda^2}{2} a^2 + \lambda^2 Qa. \quad (6.27)$$

Escrevendo Q explicitamente e o campo magnético como $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2g^2} (B + b(\phi_3))^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q - a(\phi_3))^2 + \mu^2 V - \frac{1}{2g^2} b^2 - \frac{\lambda^2}{2} a^2 + \lambda^2 qa + \\ & + \epsilon_{ij} \left[\lambda^2 a A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{g^2} b \partial_j A_i \right]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

O ultimo termo pode ser escrito como uma derivada total se escolhermos

$$b = \lambda^2 g^2 \int_{\phi_3^0}^{\phi_3} d\phi_3' a(\phi_3') = \lambda^2 g^2 W(\phi_3). \quad (6.29)$$

Assim,

$$a(\phi_3) = \frac{\partial W}{\partial \phi_3} = W' \quad (6.30)$$

Desse modo, podemos reescrever o modelo substituindo os campos a e b por um único campo W . Então, a energia associada ao termo da derivada total

$$\lambda^2 g^2 \epsilon_{ij} \int d^2x \partial_j (A_i W) \quad (6.31)$$

será zero, uma vez que, por construção, $W(\phi_3 = \phi_3^0 = 1) = 0$. Logo, a energia em termos de W será

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2g^2} (B + \lambda^2 g^2 W)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q - W')^2 + \mu^2 V - \frac{\lambda^4 g^2}{2} W^2 - \frac{\lambda^2}{2} (W')^2 + \lambda^2 W' q. \quad (6.32)$$

De fato para continuar com a implementação BPS, o potencial deve ter a forma

$$V = \frac{\lambda^4 g^2}{2\mu^2} W^2 + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} (W')^2. \quad (6.33)$$

Então o limite BPS para a energia é

$$E_{BPS} = \int d^2x q W' = 4\pi |N| \langle W' \rangle_{S^2}. \quad (6.34)$$

De modo que as equações BPS são

$$Q = W' \quad (6.35)$$

$$B = -g^2 \lambda^2 W \quad (6.36)$$

Foi mostrado em [36] que as equações BPS acima possuem soluções solitônicas.

6.1.3 Formalismo BPS para Skyrme-Chern-Simons

Agora veremos como obter as equações de BPS numa teoria de Skyrmons em interação com um campo eletromagnético com a dinâmica governada por um termo de Chern-Simons [65] Consideremos a lagrangeana desse modelo, dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4} \epsilon_{\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi})^2 - V(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi}), \quad (6.37)$$

onde usamos uma constante de acoplamento no termo de Skyrme. Novamente, o acoplamento mínimo é feito da forma usual

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} = \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + g A_\mu (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\phi}). \quad (6.38)$$

Vamos obter as equações de movimento do modelo fazendo variações funcionais. Assim, para o termo de CS já vimos pelas (3.4) e (5.50) que

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{CS}}{\delta A_\mu} = -\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (6.39)$$

Nos resta calcular a contribuição do termo de Skyrme. Observe que podemos reescrevê-lo como

$$\mathcal{L}_S = -\frac{\lambda^2}{4} \left[(D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi})^2 - (D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi})^2 \right] = -\frac{\lambda}{4} [A - B]. \quad (6.40)$$

Então, fazendo as variações separadamente para o primeiro termo

$$\delta A = 4(D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi}) \left[\delta(D_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi} \right] \quad (6.41)$$

$$= 4g(D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi} \right] \delta A_\nu, \quad (6.42)$$

onde usamos o fato que $\delta(D_\nu \boldsymbol{\phi}) = g(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \delta A_\nu$. Para o segundo termo, temos que

$$\begin{aligned} \delta B &= \delta(D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi})(D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D_\nu \boldsymbol{\phi}) + (D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi}) \delta(D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D_\nu \boldsymbol{\phi}) \\ &= 2(D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi}) \left[\delta(D^\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot D_\nu \boldsymbol{\phi} + D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \delta(D_\nu \boldsymbol{\phi}) \right] \\ &= 2g(D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot D_\nu \boldsymbol{\phi} \delta A^\mu + D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \delta A_\nu \right] \\ &= 2g(D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot D_\nu \boldsymbol{\phi} \right] \delta A_\mu + 2g(D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi}) \left[D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \right] \delta A_\nu \\ &= 4g(D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi}) \left[D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \right] \delta A_\nu, \end{aligned} \quad (6.43)$$

onde na quarta passagem fizemos mudanças adequadas de índice e aproveitamos da propriedade de simetria do produto escalar, isto é, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. Então, a variação do termo de Skyrme será

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_S &= -\frac{\lambda^2}{4} (\delta A - \delta B) \\ &= -\lambda^2 g \left\{ (D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi} \right] - (D^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi}) \left[D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \right] \right\} \delta A_\nu \\ &= \lambda^2 g (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot \left[(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \times D_\mu \boldsymbol{\phi} \right] A_\nu, \end{aligned} \quad (6.44)$$

no ultimo passo utilizamos a identidade

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Podemos reescrever a expressão (6.44) utilizando a propriedade do produto vetorial triplo de modo que

$$\frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta A_\nu} = \lambda^2 g (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot \left[\boldsymbol{\phi} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}) \right]. \quad (6.45)$$

Já vimos anteriormente que o segundo termo entre colchetes é zero como consequência do vínculo $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$. Já o primeiro termo pode ser escrito como

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\partial_\mu \boldsymbol{\phi}_g A_\mu (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (6.46)$$

pois $(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \boldsymbol{\phi} = 0$. Logo, a equação (6.45) se tornará

$$\frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta A_\nu} = \lambda^2 g \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi}) \right] (\mathbf{n} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi}). \quad (6.47)$$

Fazendo uma mudança de índices e mudando a ordem do produto vetorial, podemos escrever

$$\frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta A_\mu} = -\lambda^2 g \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\alpha \boldsymbol{\phi}) \right] (\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{\phi}). \quad (6.48)$$

A equação de movimento será dada pela condição

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\alpha} = \frac{\delta (\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{CS})}{\delta A_\alpha} = 0. \quad (6.49)$$

Finalmente a equação de movimento para o campo de *gauge* é

$$-\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = J^\mu, \quad (6.50)$$

em que a corrente é dada por

$$J^\mu = \lambda^2 g \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\alpha \boldsymbol{\phi}) \right] (\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{\phi}). \quad (6.51)$$

Podemos desmembrar a equação acima na lei de Gauss fazendo $\mu = 0$ e na lei de ampere $\mu = i$ para caso estacionário, ou seja, $\partial_0 \boldsymbol{\phi} = 0$. A primeira será

$$\begin{aligned} J^0 &= \lambda^2 g \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^0 \boldsymbol{\phi} \times D^\alpha \boldsymbol{\phi}) \right] (\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{\phi}) \\ &= \lambda^2 g^2 A_0 \left\{ \boldsymbol{\phi} \cdot [(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \times (\partial^j \boldsymbol{\phi} + g A^j (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}))] \right\} (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \\ &= \lambda^2 g^2 A_0 \left\{ \boldsymbol{\phi} \cdot [(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \times \partial^j \boldsymbol{\phi}] \right\} (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \\ &= \lambda^2 g^2 A_0 \left\{ \boldsymbol{\phi} \cdot [\boldsymbol{\phi} (\partial^j \boldsymbol{\phi} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \hat{\mathbf{n}} (\partial^j \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi})] \right\} (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \\ &= \lambda^2 g^2 A_0 (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2, \end{aligned} \quad (6.52)$$

onde utilizarmos os argumentos já conhecidos que $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$. Recordando que $B = F_{12}$, a lei de gauss se torna

$$\kappa B = \lambda^2 g^2 A_0 (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2. \quad (6.53)$$

Do mesmo modo podemos obter a lei de Ampere

$$\kappa \partial_j A_0 = -\lambda^2 g (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) Q, \quad (6.54)$$

onde Q é a já como

$$Q = \boldsymbol{\phi} \cdot (D_1 \boldsymbol{\phi} \times D_2 \boldsymbol{\phi}), \quad (6.55)$$

e claramente está associada ao *winding number* (4.34). Analogamente, podemos obter a equação para o campo escalar (campo de Skyrme) que será

$$\lambda^2 D_\mu \left\{ D_\alpha \boldsymbol{\phi} \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\alpha \boldsymbol{\phi}) \right] \right\} + (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\phi}_n} = 0. \quad (6.56)$$

A partir daqui tentaremos impor o formalismo BPS, que é tentar escrever o funcional da energia em forma de quadraturas de modo que consigamos determinar o mínimo da energia em função da carga topológica. Desse modo, passemos a determinar a energia através da equação (A.50). Já sabemos que o termo de CS não contribui para a energia do sistema de modo, assim podemos trabalhar apenas com o termo de Skyrme. Então podemos

reescrevê-lo como

$$\mathcal{L}_S = -\frac{\lambda^2}{4} (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^\alpha \boldsymbol{\phi} \times D^\beta \boldsymbol{\phi}) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}. \quad (6.57)$$

Substituindo na (A.50), obtemos o tensor energia momento

$$T^{\gamma\delta} = -\frac{\lambda^2}{2} (D^\gamma \boldsymbol{\phi} \times D_\beta \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^\delta \boldsymbol{\phi} \times D^\beta \boldsymbol{\phi}) + \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi}) g^{\gamma\delta}. \quad (6.58)$$

Então, a densidade de energia $T_{00} = \epsilon$ para o caso estático é facilmente obtida. Vejamos

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2}{2} (D_0 \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{\lambda^2}{4} (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2. \quad (6.59)$$

Desenvolvendo o primeiro termo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{2} (D_0 \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2 &= \frac{\lambda^2 g^2}{2} A_0^2 \left[(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \times D_j \boldsymbol{\phi} \right]^2 \\ &= \frac{\lambda^2 g^2}{2} A_0^2 \left[\boldsymbol{\phi} (D_j \boldsymbol{\phi} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - n (D_j \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}) \right]^2 \\ &= \frac{\lambda^2 g^2}{2} A_0^2 \left[\boldsymbol{\phi} (\partial_j + g A_j (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi})) \cdot \mathbf{n} \right]^2 \\ &= \frac{\lambda^2 g^2}{2} A_0^2 (\partial_j \cdot \hat{\mathbf{n}})^2, \end{aligned} \quad (6.60)$$

onde utilizamos novamente o vínculo do campo escalar e o fato que $(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \boldsymbol{\phi} = 0$. Portanto, a densidade de energia é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2 g^2}{2} A_0^2 (\partial_j \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{\lambda^2}{4} (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2 + V. \quad (6.61)$$

Se observarmos que

$$Q^2 = \frac{1}{2} (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2, \quad (6.62)$$

podemos escrever a energia da forma mais compacta

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2 g^2}{2} A_0^2 (\partial_j \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + V. \quad (6.63)$$

6.1.4 Tentativa de Implementação do Formalismo BPS

Passemos a expressar a o potencial A_0 da densidade de energia (6.61) em termos do campo magnético através da lei de Gauss (6.53). Assim,

$$\mathcal{E} = \frac{\kappa^2}{2\lambda^2 g^2} \frac{B^2}{(\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + V. \quad (6.64)$$

O próximo passo é introduzir duas funções (ou campos) $W(\phi_3)$ e $Y(\phi_3)$ a serem determinadas *a posteriori* tal que garantam uma estrutura BPS no sistema [65]. Assim, por meio de quadraturas podemos inserir essas funções na densidade de energia, desse modo

teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{\left[B \pm (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W \right]^2}{(\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp Y)^2 \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} B W \pm \lambda^2 Q Y + \\ & - \frac{\lambda^2}{2} Y^2 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W^2 + V. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Podemos escrever a grandeza Q explicitamente como

$$Q = \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}) + g \epsilon_{ij} A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \quad (6.66)$$

e o campo magnético como $B = -\epsilon_{ij} \partial_j A_i$ e expressar a densidade de energia como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{\left[B \pm (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W \right]^2}{(\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp Y)^2 \pm \lambda^2 Y \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}) \\ & \pm \epsilon_{ij} \left[\frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\partial_j A_i) W + \lambda^2 g A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) Y \right] - \frac{\lambda^2}{2} Y^2 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W^2 + V. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Sabemos que o terceiro termo está associado ao *winding number*. Então, para a energia ser mínima no formalismo BPS é necessário impormos que o quarto termo seja uma derivada total e os três últimos termos sejam nulos.

Com uma simples integração por partes podemos desenvolver o terceiro termo como

$$(\partial_j A_i) W = \partial_j (A_i W) - A_i \partial_j W, \quad (6.68)$$

de modo que para resultar exclusivamente numa derivada total devemos ter

$$\frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} A_i \partial_j W = \lambda^2 g A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) Y. \quad (6.69)$$

Esse resultado permite eliminar um dos campos em função do outro. Logo,

$$Y = \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^3} \frac{\partial W}{\partial \phi_3}. \quad (6.70)$$

Já para os três últimos termos serem nulos, automaticamente determinamos o potencial

$$V = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W^2 + \frac{\kappa^2}{2 g^6 \lambda^6} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_3} \right)^2. \quad (6.71)$$

Frequentemente na literatura funções do tipo W são chamadas de "superpotencial" [31, 68, 3] devido a argumentos de supersimetria. Portanto, a densidade de energia se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{\left[B \pm (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W \right]^2}{(\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} \left[Q \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{\partial W}{\partial (\phi_3)} \right]^2 + \\ & \pm \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^3} \frac{\partial W}{\partial \phi_3} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}). \end{aligned} \quad (6.72)$$

Fica nítido a estrutura BPS, pois ganhamos um limite inferior para a energia uma vez que o terceiro termo está associado ao *winding number* (4.34)

$$N = \pm \frac{1}{4\pi} \int d^2x \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}). \quad (6.73)$$

Além disso, é razoável supor que

$$\lim_{\phi_3 \rightarrow 1} W(\phi_3) = \lim_{x \rightarrow \infty} W(\phi_3) = 0. \quad (6.74)$$

Apesar da implementação do formalismo BPS parecer um sucesso até aqui, surge claramente uma contradição no modelo, já que o potencial que *a priori* deveria ser uma função apenas do campo de Skyrme, mas vemos surge uma dependência de termos derivativos. Portanto, o modelo descrito não é satisfatório uma vez que as equações BPS não reproduzirão as equações de movimento que calculamos funcionalmente.

Contudo, o procedimento realizado como tentativa de implementação do formalismo BPS nos dá uma pista de como deve ser um modelo satisfatório capaz de produzir equações auto-duais satisfatórias, isto é, tal que sejam equivalentes as equações de movimentos obtidas pelo método funcional (ou Euler-Lagrange). Nesse sentido, veremos a seguir como obter um modelo que garanta tal equivalência.

6.1.5 Um modelo Chern-Simons-Baby-Skyrme BPS

Pela experiência da sessão anterior, devemos modificar a lagrangeana (6.37) de maneira que o termo derivativo do potencial (6.71) não contribua para a energia. Desse modo, devemos adicionar na lagrangeana o termo que contenha o termo derivativo. Porém devemos levar em conta a derivada covariante, uma vez que estamos investigando um modelo gaugeado. Nesse sentido, a lagrangeana modificada será

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4} \epsilon_{\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\mathbf{n} \cdot D_j \boldsymbol{\phi})^2 W^2 - \mathcal{V}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi}), \quad (6.75)$$

de modo que o termo adicionado anule a contribuição do termo derivativo do potencial e consigamos reproduzir as equações de movimento estáticas no limite BPS. Em contrapartida, o termo adicionado modifica a dinâmica do campo de Skyrme, pois contém termos derivativos. Podemos ver com mais clareza escrevendo o termo $(\mathbf{n} \cdot D_j \boldsymbol{\phi})^2$ como

$$(\mathbf{n} \cdot D_j \boldsymbol{\phi})^2 = D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi} - (\mathbf{n} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2. \quad (6.76)$$

Então, a lagrangeana (6.75) se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\kappa}{4} \epsilon_{\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} W^2 D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi} + \\ & - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\mathbf{n} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2 W^2 - \mathcal{V}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi}) \end{aligned} \quad (6.77)$$

Podemos perceber que o terceiro termo é um tipo de modelo Sigma generalizado devido a função supersimétrica W . É fácil ver que a equação do campo de gauge gerada pela lagrangeana modificada (6.75) é a mesma obtida em (6.136), ou seja, a introdução do campo W não modifica a equação de movimento do campo de *gauge*.

Em contrapartida, como vimos a modificação da lagrangeana altera a dinâmica do campo de Skyrme. Como consequência teremos uma equação de movimento diferente que será

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \left\{ \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \partial_\mu [(\mathbf{n} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi}) W^2] + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi_3} - \frac{\kappa^2}{2\lambda^2 g^2} (\mathbf{n} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi})^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_3} \right)^2 \right\} + \lambda^2 D_\mu \left\{ (D_\alpha \boldsymbol{\phi}) [\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \times D^\alpha \boldsymbol{\phi})] \right\} = 0. \quad (6.78)$$

O funcional da energia para a lagrangiana modificada será diferente do (6.64) apenas por um termo, isto é

$$\epsilon = \frac{\lambda^2 g^2}{2} A_0^2 (\partial_j \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{\lambda^2}{4} (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\mathbf{n} \cdot D_j \boldsymbol{\phi})^2 W^2 + \mathcal{V}. \quad (6.79)$$

Novamente, aqui devemos manipular a expressão acima de modo a obter a estrutura BPS. Assim, podemos reescrevê-la como

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{[B \pm (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W]^2}{(\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} \left(Q \mp \frac{\sqrt{2\mathcal{V}}}{\lambda} \right) \pm \lambda \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}) \sqrt{2\mathcal{V}} + \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \epsilon_{ij} \left[(\partial_i A_j) W + \frac{\lambda^3 g^3}{\kappa^2} (\mathbf{n} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) \sqrt{2\mathcal{V}} A_j \right]. \quad (6.80)$$

Observe que o mesmo procedimento da sessão anterior deve ser tomado, isto é, o ultimo termo deve ser transformado em uma derivada total. Desse modo, podemos reescrever o termo $(\partial_i A_j) W$ com o mesma manipulação (6.68). Então, para termos apenas um termo de derivada total é necessário que

$$\frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} A_j (\partial_i W) = \lambda g (\mathbf{n} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) \sqrt{2\mathcal{V}} A_j. \quad (6.81)$$

Logo ganhamos a forma do potencial

$$\mathcal{V}(\phi_3) = \frac{\kappa^4}{2(\lambda g)^6} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_3} \right)^2. \quad (6.82)$$

Portanto, podemos escrever a densidade da energia como

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{[B \pm (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W]^2}{(\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} \left(Q \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{\partial W}{\partial \phi_3} \right) \pm \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial \phi_3} + \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \epsilon_{ij} \partial_i (A_j W). \quad (6.83)$$

Como sabemos, termos de derivada total não contribuem para a ação ou energia do sistema. Outro fato importante é que para garantir a finitude da energia devemos ter condições de contorno

$$\lim_{\phi_3 \rightarrow 1} W(\phi_3) = \lim_{x \rightarrow \infty} W(\phi_3) = 0 \quad (6.84)$$

e para as derivadas

$$\lim_{\phi_3 \rightarrow 1} \frac{\partial W}{\partial \phi_3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial \phi_3} = 0. \quad (6.85)$$

Finalmente, podemos definir o limite inferior da energia, ou limite BPS que é justamente quando a energia é proporcional a carga topológica, assim

$$\mathcal{E}_{BPS} = \int d^2x \mathbf{x} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial \phi_3}. \quad (6.86)$$

Nesse limite obtemos as equações BPS

$$B = \mp (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W \quad (6.87)$$

e

$$Q = \pm \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{\partial W}{\partial \phi_3}. \quad (6.88)$$

As configurações BPS podem ser consideradas como as soluções clássicas de uma extensão supersimétrica do modelo (6.75).

É importante ressaltar que pode ser mostrado que as equações acima necessariamente reproduzem as equações de Euler-Lagrange para o caso estático.

6.2 Baby-Skyrme e Corrente de Schroers - Uma Possível Generalização

Quando abordamos o primeiro modelo sigma gaugeado, vimos que esse sistema possui formalismo BPS se a carga topológica for tal que é gerada por uma corrente modificada invariante de gauge da forma

$$j'_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} \boldsymbol{\phi} \cdot [D^\nu \boldsymbol{\phi} \times D^\rho \boldsymbol{\phi} + g F^{\nu\rho} (1 - \phi_3)], \quad (6.89)$$

em que a derivada covariante tem a forma já familiar

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} = \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + A_\mu (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}), \quad (6.90)$$

onde tomamos $g = 1$ por simplicidade. A corrente define o *winding number*

$$\text{deg}[\boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x j_0. \quad (6.91)$$

Nesse sentido, baseado nos modelos anteriores podemos convenientemente definir a notação

$$Q_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} \boldsymbol{\phi} \cdot [D^\nu \boldsymbol{\phi} \times D^\rho \boldsymbol{\phi}], \quad (6.92)$$

de modo que

$$Q_0 \equiv Q = \boldsymbol{\phi} \cdot (D_1 \boldsymbol{\phi} \times D_2 \boldsymbol{\phi}). \quad (6.93)$$

Então, podemos reescrever a componente zero da *corrente de Schroers* como

$$j'_0 \equiv j = Q + B(1 - \phi_3). \quad (6.94)$$

A ideia da generalização do modelo Skyrme [69] é escrever a lagrangeana como

$$\mathcal{E} = -\frac{\lambda^2}{2} j_\mu j^\mu - \mu^2 V. \quad (6.95)$$

Basicamente deixamos de escrever termo cinético do campo de *gauge* explicitamente, deixando essa função para a corrente de Schroers ao quadrado, que naturalmente já contém o termo de Skyrme. Além disso, temos um termo que também será quadrático em $F^{\mu\nu}$ gerando uma dinâmica para o campo de gauge. A sutileza surge nos termos adicionais que fornecem uma outra análise para a estrutura BPS do sistema.

Vejam os funcional da energia estacionário que será de modo bastante semelhante ao calculado nas seções anteriores

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\lambda^2}{2} j^2 + \mu^2 V \\ &= \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \lambda^2 QB(1 - \phi_3) + \frac{\lambda^2}{2} B^2(1 - \phi_3)^2 + \mu^2 V. \end{aligned} \quad (6.96)$$

com uma pequena manipulação, podemos deixar a expressão acima de uma forma mais interessante para nossa análise. Assim,

$$\mathcal{E} = \left[\frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \frac{\lambda^2}{2} B^2 + \mu^2 V \right] + \left[\frac{\lambda^2}{2} B^2 \phi_3 (\phi_3 - 2) + QB(1 - \phi_3) \right]. \quad (6.97)$$

Então, fica claro o caráter da generalização, em que reproduzimos a energia do Modelo Skyrme-Maxell (primeiros colchetes) com uma relação entre as constantes de acoplamento sendo $g = \lambda^{-1}$. Consequentemente, novos termos foram induzidos, onde um deles é o campo magnético (ao quadrado) acoplado ao campo de Skyrme, na literatura chamamos de um *termo tipo dielétrico*, também é interpretado como um acoplamento não mínimo. O segundo termo trata-se de um acoplamento da carga topológica com o campo magnético. Entretanto, no vácuo, isto é, quando $\phi_3 \rightarrow 1$ esse termo se anula.

Agora, nos resta fazer o mesmo procedimento das quadraturas, que inclusive será bem semelhante aos dois anteriores. Então, a partir de (6.96), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\lambda^2}{2} [Q \mp a(\phi_3)] + \frac{\lambda^2}{2} [(1 - \phi_3)B \pm b(\phi_3)] + \mu^2 V - \frac{\lambda^2}{2} a^2 - \frac{\lambda^2}{2} b^2 + \\ &+ \lambda^2 QB(1 - \phi_3) + \lambda^2(1 - \phi_3)Bb \pm \lambda^2 Qa \mp \lambda^2(1 - \phi_3)Bb \end{aligned} \quad (6.98)$$

Explicitando, Q e $B = -\epsilon_{ij} \partial_j A_i$, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\lambda^2}{2} [Q \mp a(\phi_3)] + \frac{\lambda^2}{2} [(1 - \phi_3)B \pm b(\phi_3)] + \mu^2 V - \frac{\lambda^2}{2} a^2 - \frac{\lambda^2}{2} b^2 \pm \lambda^2 qa + \\ &+ \lambda^2 QB(1 - \phi_3) + \lambda^2(1 - \phi_3)Bb \pm \lambda^2 \epsilon_{ij} [aA_i \partial_j \phi_3 + (1 - \phi_3)b \partial_j A_i]. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Os dois últimos termos se tornam uma divergência total se

$$b(1 - \phi_3) = W = \int_{\phi_3=1}^{\phi_3} d\phi'_3 a(\phi'_3), \quad (6.100)$$

ou seja,

$$W' = \frac{\partial W}{\partial \phi_3} = a \quad e \quad b = \frac{W}{(1 - \phi_3)} \quad (6.101)$$

Por construção o termo devido a devida total, como já vimos, se anula quando integrado. Então, prosseguindo com a aplicação do formalismo BPS, ganhamos o potencial da forma

$$\mu^2 V + \lambda^2 QB(1 - \phi_3) = \frac{\lambda^2}{2} (W')^2 + \frac{\lambda^2}{2} \frac{W^2}{(1 - \phi_3)^2}. \quad (6.102)$$

Então, no limite BPS, a energia será

$$E = \lambda^2 \int d^2x q W', \quad (6.103)$$

nesse limite as equações auto-duais serão

$$Q = W' \quad (6.104)$$

$$B = -\frac{W}{(1 - \phi_3)^2}. \quad (6.105)$$

Em [69], ainda é feita uma generalização para a corrente de Schroers da forma

$$j_\mu'' = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} \boldsymbol{\phi} \cdot [D^\nu \boldsymbol{\phi} \times D^\rho \boldsymbol{\phi} + F^{\nu\rho} (\kappa - \phi_3)]. \quad (6.106)$$

Nesse caso, as equações BPS mudam apenas por um termo

$$Q = W' \quad (6.107)$$

$$B = -\frac{W}{(\kappa - \phi_3)^2}. \quad (6.108)$$

Quando $\kappa = 1$ voltamos ao caso anterior. Interessantemente, foi mostrado que o fluxo magnético é quantizado.

6.3 Modelo Mawell-Skyrme-Sigma-Model generalizado

Nesta seção, mostraremos um resultado original desse trabalho. Obtivemos as equações BPS para o modelo Mawell-Skyrme com um termo de modelo sigma generalizado induzido. A lagrangeana do modelo é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi})^2 - V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}). \quad (6.109)$$

A densidade de energia estacionária é

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \frac{B^2}{2} + V(\phi_3). \quad (6.110)$$

Introduzindo os campos $W = W(\phi_3)$ e $b = b(\phi_3)$, podemos reescrever

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp b)^2 + \frac{1}{2} (B \pm W) + V - \frac{\lambda^2 b^2}{2} - \frac{1}{2} W^2 \pm \lambda^2 bQ + \mp BW. \quad (6.111)$$

Explicitando,

$$Q = \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}) + g \epsilon_{ij} A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})$$

e $B = -\epsilon_{ij} \partial_j A_i$, teremos

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp b)^2 + \frac{1}{2} (B \pm W) + V(\phi_3) - \frac{\lambda^2 b^2}{2} - \frac{1}{2} W^2 \pm \lambda^2 b q + V \pm \epsilon_{ij} \left[\lambda^2 b A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) + W \partial_j A_i \right]. \quad (6.112)$$

Podemos tratar o termo entre colchetes como uma divergência total se

$$b = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial \phi_3} \equiv \frac{1}{\lambda^2} W'. \quad (6.113)$$

Com esse raciocínio eliminamos uma das funções definidas. Então, a parcela da energia associada ao termo entre colchetes

$$E = \int d^2 x \epsilon_{ij} \partial_j (A_i W) \quad (6.114)$$

se anula uma vez que as condições de contorno para essas funções são tais que

$$\lim_{\phi_3 \rightarrow 1} W(\phi_3) = \lim_{x \rightarrow \infty} W(\phi_3) = 0 \quad (6.115)$$

e

$$\lim_{\phi_3 \rightarrow 1} \frac{\partial W}{\partial \phi_3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial \phi_3} = 0. \quad (6.116)$$

Desse modo, para prosseguir com a implementação BPS o potencial deve ser

$$V = \frac{1}{2\lambda^2} (W')^2 + \frac{1}{2} W^2. \quad (6.117)$$

Se fizermos uma redefinição de campo

$$W \rightarrow \omega(\phi_3) \equiv W - \kappa (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2, \quad (6.118)$$

em que $\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi} = \partial_j \phi_3$ e κ é uma constante para evitar ambiguidades de dimensão. Nesse sentido,

$$W' = \omega' \quad (6.119)$$

e

$$W^2 = \omega^2 + \kappa^2 (\partial_j \phi_3)^4 + 2\kappa \omega (\partial_j \phi_3)^2. \quad (6.120)$$

Logo, o potencial em termos do campo ω será

$$V = \frac{1}{\lambda^2} (\omega')^2 + \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{\kappa^2}{2} (\partial_j \phi_3)^4 + \kappa \omega (\partial_j \phi_3)^2. \quad (6.121)$$

E as equações auto-duais serão

$$Q = \pm \frac{1}{\lambda^2} \omega' \quad (6.122)$$

$$B = \omega + \kappa (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2. \quad (6.123)$$

Como sabemos, para haver a quebra espontânea da simetria de rotação $SO(3)$ o potencial deve depender apenas de $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi} = \phi_3$. Portanto há uma ambiguidade no potencial encontrado acima em (6.121), uma vez que depende não apenas de ϕ_3 , mas de duas derivadas, isto é, $\partial_j \phi_3$.

Nessa perspectiva, o que podemos fazer é adicionar termos na lagrangeana tais que, quando calculada a energia do sistema, os termos adicionados "cancelem" os termos que geram a ambiguidade do potencial. Dessa forma, por tentativa e erro, a lagrangeana deverá ser

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi})^2 - \mathcal{V} + \kappa\omega (\mathbf{n} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 - \kappa^2 [(\mathbf{n} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2]^2. \quad (6.124)$$

O termo quadrático pode ser escrito como

$$(\mathbf{n} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 = D_\nu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\nu \boldsymbol{\phi} - (\mathbf{n} \times D_\mu \boldsymbol{\phi})^2. \quad (6.125)$$

Então, podemos reescrever a lagrangeana como

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi})^2 + \kappa\omega (D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi}) - V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) + \mathcal{L}_G, \quad (6.126)$$

em que

$$\mathcal{L}_G = -\kappa^2 [(\mathbf{n} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2]^2 - \kappa\omega (\mathbf{n} \times D_\mu \boldsymbol{\phi})^2. \quad (6.127)$$

Novamente, aqui ganhamos modelo Sigma generalizado, como consequência ganhamos dois termos extras que modificam a dinâmica do campo de Skyrme, sendo um deles contendo termos derivadas de ordem superior. Contudo, eliminamos a ambiguidade do potencial contida na equação (6.121), e garantimos as equações BPS para um modelo generalizado Skyrme-Maxwell-Sigma-Model.

6.4 Termo de Pauli e Acoplamento não-mínimo

Uma das possibilidades interessantes em uma teoria de Chern-Simons planar é a inclusão natural de um termo de *acoplamento não-mínimo* ou *acoplamento de Pauli*. Algumas motivações justificam tal inclusão, uma delas é que tanto o termo de CS quanto o termo de Pauli são induzidos por correções radiativas na QED planar [55, 70]. Além disso, ao assumirmos um acoplamento não-mínimo numa lagrangeana de uma teoria escalar, um termo de CS é gerado por quebra espontânea de simetria [71].

Classicamente, o momento magnético de uma partícula de massa m , carga Q , movendo-se com velocidade \mathbf{v} , e momento angular \mathbf{L} , é proporcional a um momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ dado por,

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{Q}{2m} \mathbf{L}, \quad (6.128)$$

onde g é o *fator giromagnético*, que nesse caso, é tomado igual a unidade. No caso do elétron, através da equação de Dirac, pode-se mostrar que $g = 2$. Contudo, cálculos em QED e posteriormente resultados experimentais apontaram que esse fator possui uma pequena variação. Tal correção é atribuída ao momento magnético anômalo [72]. Por correções radiativas em um loop, a correção é dada pelo fator [73]

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011614, \quad (6.129)$$

em que α é a constante de estrutura fina. Cálculos recentes determinaram a contribuição do momento magnético anômalo em quinta ordem, foi obtido que $a_e \approx 0.001159652181643(764)$ [74]. Esse resultado caracteriza umas das previsões mais precisas de toda a física, mostrando que a teoria quântica de campos, e seus métodos de renormalização são confiáveis. A correção obtida experimentalmente é de $a_e = 0.00115965218073(28)$ [75].

Nesse sentido, podemos incorporar, classicamente, o momento magnético anômalo em algum sistema acrescentando um termo de Pauli na derivada covariante [76], resultando em mais termos na lagrangeana e conseqüentemente nas equações de movimento. Portanto, a derivada covariante terá da forma,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu + ihF_\mu, \quad (6.130)$$

onde $F_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}F^{\nu\lambda}$. Quando $h = 0$, retornamos ao caso do acoplamento mínimo.

Nesse contexto, buscamos, como perspectiva futura, incluir nesse trabalho um acoplamento não-mínimo no modelo Maxwell-Chern-Simons-Skyrme, e buscar soluções de vórtice topológicas e não-topológicas. A derivada covariante *gaugeada* pelo subgrupo $U(1)$, nesse caso será [34]

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} = \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + (gA_\mu + hF_\mu) (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{n}) \quad (6.131)$$

6.4.1 Modelo BPS com acoplamento não-mínimo

Nesta seção, mostraremos alguns cálculos feitos que não existem na literatura que são essenciais para uma implementação BPS num modelo baby-skyrme com acoplamento não-mínimo. Nos modelos com acoplamento mínimo, tínhamos definido a grandeza associada ao termo de skyrme e a carga topológica

$$Q = \boldsymbol{\phi} \cdot (D_1 \boldsymbol{\phi} \times D_2 \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}) + g\epsilon_{ij} A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}), \quad (6.132)$$

Para o caso do acoplamento não mínimo, ganhamos mais um termo. Assim, teremos

$$\tilde{Q} = \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_1 \boldsymbol{\phi} \times \partial_2 \boldsymbol{\phi}) + g\epsilon_{ij} A_i (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) - h\partial_j A_0 (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}), \quad (6.133)$$

Ou seja,

$$\tilde{Q} - Q = -h\partial_j A_0 (\mathbf{n} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}). \quad (6.134)$$

Se tivermos uma lagrangeana de Skyrme acoplada não-minimamente com a dinâmica do campo de *gauge* governada por um termo de Chern-Simons

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon_{\lambda\mu\nu}A^\lambda F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4}(D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi})^2 + V(\phi_3) \quad (6.135)$$

A equação de movimento para o campo de *gauge* será

$$-\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = J^\mu, \quad (6.136)$$

em que a corrente é dada por

$$J^\mu = \lambda^2 g \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\alpha \boldsymbol{\phi}) \right] (\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{\phi}) + \lambda^2 h \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D_\alpha \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi}) (\mathbf{n} \cdot \partial^\alpha \boldsymbol{\phi}) \right]. \quad (6.137)$$

Se a dinâmica do campo de *gauge* for governada por um termo de Maxwell, as equações de movimento serão

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = J^\mu. \quad (6.138)$$

Ou seja, as leis de Maxwell e Ampere serão modificadas. Não conseguimos obter uma estrutura BPS para um acoplamento não mínimo tipo Pauli.

7 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho, vimos como obter o formalismo BPS em teorias com Skyrmons, e pudemos ver a importância de uma teoria que permita tal formalismo, uma vez que o mínimo da energia do sistema é garantido. Assim, obtivemos as equações BPS para um modelo Skyrme-Maxwell não-restrito ainda não existente na literatura.

No geral, uma revisão dos aspectos gerais das equações não-lineares em teorias clássicas de campos e das soluções associadas a esses modelos chamadas *soluções solitônicas*. Tais soluções são de grande interesse pelo fato de serem localizadas e possuírem uma energia finita, tendo assim, uma semelhança com um objeto corpuscular.

No primeiro capítulo, vimos o modelo *kink*, que é o mais simples de um modelo solitônico, e constatamos sua relação com uma degenerescência na configuração de campo de menor energia. Enfatizamos que essas soluções podem ser classificadas em setores caracterizados por dois índices que são os valores assintóticos no campo, ou seja ($\phi(x \rightarrow -\infty), \phi(x \rightarrow \infty)$).

Nesse sentido, pudemos definir grandezas ditas topológicas, como a carga e corrente topológica, com o intuito de classificar as soluções topológicas e não-topológicas. Com isso, apontamos que soluções topológicas estão intimamente ligadas ao fenômeno da quebra espontânea de simetria. Em seguida, discutimos classicamente a quebra da simetria $U(1)$ global (associada aos bósons de Nambu-Goldstone) e local (associada ao mecanismo de Higgs). Assim, mostramos como funciona a geração de massa para as teorias de *gauge* através desse mecanismo.

No segundo capítulo, vimos os principais aspectos de uma teoria de Chern-Simons, bem como as implicações de um acoplamento com campos de matéria e um termo de Maxwell. Já no terceiro capítulo, introduzimos o sigma $O(N)$ não-linear, que consiste da adição de um vínculo na lagrangeana de um sistema composto por campos escalares acoplados, permitindo assim soluções de campo estáticas não-triviais. Através do método de Bogomol'nyi pudemos encontrar essas soluções sem resolver a equação de movimento, trocando o problema de resolver uma equação diferencial de segunda ordem por duas de primeira ordem. Dedicamos uma sessão para uma breve discussão de alguns conceitos básicos da teoria da homotopia, fundamental para a classificação das soluções do modelo.

No quarto capítulo, enfatizamos um problema ao considerar as soluções obtidas do modelo sigma $O(3)$ planar, elas possuem o problema da invariância de escala, isto é, elas podem crescer infinitamente sem mudar a energia, invalidando uma quantização. Nessa perspectiva, apontamos que a adição de outros campos, (de outra natureza, bem como campos escalares de ordem superior) acompanhados de um potencial adequado pode quebrar essa invariância. Além disso, existe uma motivação intrínseca para adicionar outros campos, uma vez que sistemas planares de interesse envolvem interações, como a eletromagnética.

No quinto capítulo introduzimos o modelo Skyrme e sua redução planar, mostramos sua origem como uma teoria efetiva para bárions em baixas energias bem como fenômenos da matéria. Enfatizamos as vastas aplicações de Skyrmons em matéria condensada como por exemplo, o efeito Hall quântico fracionário e estruturas de vórtices em materiais magnéticos, que é de fundamental importância para a spintrônica, sendo promissores principalmente para serem os futuros armazenadores de dados. Em seguida, mostramos todos os modelos BPS de Skyrmons recém obtidos na literatura. Logo, abordamos as consequências de usar um acoplamento não-mínimo e a sua relação com o momento magnético anômalo. Finalmente, como perspectiva futura, investigaremos um modelo Skyrme gaugeado

com um acoplamento não-mínimo, buscaremos uma estrutura BPS e buscaremos as soluções, caso existam. Tal modelo ainda não existe na literatura e pode fornecer resultados interessantes.

APÊNDICE A – TEOREMA DE NOETHER

O teorema de Noether (1918) [77] fornece uma conexão sistematizada entre simetrias e leis de conservação. Será feito um tratamento geral fortemente apoiado na referência [78]. Aproveitaremos aqui para demonstrar a derivação das equações de movimento pelo princípio variacional, método usado frequentemente nesse trabalho.

Consideremos um conjunto de campos $\{\phi_i(x)\}$ cujo a densidade de lagrangiana é um funcional da forma

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)], \quad (\text{A.1})$$

em que $\phi(x) = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \dots, \phi_n(x)\}$. A ação para esse sistema é

$$S[\phi] = \int d^l x \mathcal{L}(x), \quad (\text{A.2})$$

no qual $l = D + 1$ é a dimensão do espaço tempo. O princípio de Hamilton diz que para uma variação arbitrária nos graus de liberdade do sistema a ação permanece estacionária. Obtemos a equação de movimento quando a ação é mínima, isto é

$$\delta S[\phi] = 0, \quad (\text{A.3})$$

observe que como a integral é sobre x , o funcional S não dependerá de x , mas sim da forma funcional dos campos. Tomando a variação funcional de S , nesse caso, é o mesmo que fazer uma diferenciação do funcional em relação as coordenadas ϕ e suas derivadas, assim teremos

$$\delta S[\phi] = \int d^l x \delta \mathcal{L}(x) = \int d^l x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta (\partial_\mu \phi_i) \right], \quad (\text{A.4})$$

usando o argumento heurístico que $[\delta, \partial_\mu] = 0$ e fazendo uma integração por partes no segundo termo, teremos

$$\int d^l x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (\delta \phi_i) = \int d^l x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] - \int d^l x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] \delta \phi_i. \quad (\text{A.5})$$

Usando o teorema de Stokes 1-dimensional [79], o termo da derivada total se tornará

$$\int d^l x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] = \int d\sigma^D \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i, \quad (\text{A.6})$$

em que $d\sigma^D$ é o elemento de superfície de D dimensões espaciais. Esse termo é a integral numa hiper-superfície D -dimensional que contorna o sistema como um todo. Mas, analogamente à mecânica do discreto onde os extremos das coordenadas são fixos [80], a variação dos campos na região de contorno é tomada como zero, ou seja $\delta \phi_i = 0$ em $\phi_i \in \sigma$. Logo, a equação A.4, já impondo o princípio de Hamilton, será

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] \delta \phi_i = 0. \quad (\text{A.7})$$

Como os $\delta\phi_i$ são variações arbitrárias, chegamos as *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Na prática, quando vamos calcular as equações de movimento partir de uma dada lagrangeana, não usamos diretamente as equações acima, o que se faz é usar uma definição do calculo funcional, que é o conceito de derivada funcional, definida como

$$\delta S = \int d^l x \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_i} \delta \phi_i \quad (\text{A.9})$$

ou seja,

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Veremos agora como o funcional da ação se comporta sob transformações infinitesimais arbitrárias do tipo

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x \quad (\text{A.11})$$

e

$$\phi'_i(x') = \phi_i(x) + \delta \phi_i(x). \quad (\text{A.12})$$

Logo, com essas variações teremos mudanças tanto na densidade de lagrangeana quanto no elemento de volume. Assim, podemos escrever

$$\delta S = \int [\delta(d^l x) \mathcal{L} + d^l x \delta \mathcal{L}] \quad (\text{A.13})$$

O elemento de volume se transforma como:

$$d^l x' = J d^l x, \quad (\text{A.14})$$

no qual J é o jacobiano da transformação, que em primeira ordem pode ser escrito como $J \approx 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$, substituindo na equação acima

$$\delta(d^l x) = \partial_\mu(\delta x^\mu) d^l x. \quad (\text{A.15})$$

Vamos definir a variação funcional de $\phi_i(x)$, de modo a não mudar a variável x , assim como fizemos em A.4. Ou seja,

$$\delta_0 \phi_i(x) = \phi'_i(x) - \phi_i(x). \quad (\text{A.16})$$

Agora vamos relacionar essa variação funcional com a variação arbitrária da equação A.12, considerando

$$\phi'_i(x') = \phi'_i(x + \delta x) \approx \phi'_i(x) + \partial_\mu \phi'_i(x) \delta x^\mu \quad (\text{A.17})$$

em primeira ordem $\partial_\mu \phi'_i(x) \delta x^\mu \approx \partial_\mu \phi_i(x) \delta x^\mu$, isso pode ser facilmente visto usando A.16. Desse modo,

$$\phi'_i(x') = \phi'_i(x) + \partial_\mu \phi_i(x) \delta x^\mu. \quad (\text{A.18})$$

Isolando o primeiro termo da equação acima e substituindo em A.16, obtermos uma relação

entre a variação geral e a funcional

$$\delta\phi_i(x) = \delta_0\phi_i(x) + \partial_\mu\phi_i(x)\delta x^\mu. \quad (\text{A.19})$$

O segundo termo é chamado de *termo de transporte*. podemos fazer o mesmo para a variação da densidade de lagrangeana, isto é

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu. \quad (\text{A.20})$$

Em outras palavras, isso nos traduz que temos dois termos que contribuem na variação total da lagrangeana, um da variação das variáveis do espaço-tempo e o outro na própria dependência funcional dos campos. A variação funcional é

$$\delta_0\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta_0\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta_0(\partial_\mu\phi_i) \quad (\text{A.21})$$

$$\delta_0\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta_0\phi_i - \left[\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta_0\phi_i + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta_0\phi_i \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\delta_0\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\delta_0\phi_i + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta_0\phi_i \right]. \quad (\text{A.23})$$

Na primeira passagem usamos novamente o fato que $[\delta, \partial_\mu] = 0$ e na segunda passagem usamos a definição da derivada funcional, ver equação A.9. finalmente, a ação será

$$\delta S[\phi] = \int \left[\delta(d^l x)\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}d^l x \right] \quad (\text{A.24})$$

$$= \int d^l x \left[\partial_\mu(\delta x^\mu)\mathcal{L} + \delta_0\mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \right] \quad (\text{A.25})$$

$$= \int d^l x \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\delta_0\phi_i + \partial_\mu \left(\mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta_0\phi_i \right) \right\}, \quad (\text{A.26})$$

Essa equação é a variação mais geral possível devido a um *shift* no espaço-tempo e nos campos, vejamos agora como explorar simetrias e leis de conservação a partir dela. Primeiramente, consideremos uma transformação dos campos que é uma representação de algum grupo compacto cujo os geradores são Σ_m que satisfazem as relações de comutação

$$[\Sigma_m, \Sigma_n] = if_{mnp}\Sigma_p, \quad (\text{A.27})$$

em que $m = 0, 1, 2, \dots, N$ é a dimensão do grupo e f_{mnp} são as constantes de estrutura do grupo. Seja também θ^m os parâmetros de tal grupo. Nesse sentido, podemos escrever

$$\phi'_i(x') = [\exp(\theta_m \Sigma^m)]_{ij} \phi_j(x). \quad (\text{A.28})$$

Como o parâmetro θ é contínuo, podemos fazer uma transformação infinitesimal $\delta\theta^a$ preservando o formato do grupo, ora

$$\phi'_i(x') = [\delta_{ij} + \delta\theta^m(\Sigma_m)_{ij}] \phi_j(x) \quad (\text{A.29})$$

$$\phi'_i(x') = \phi_i(x) + \delta\theta^m(\Sigma_m)_{ij} \phi_j(x). \quad (\text{A.30})$$

Observe que de A.30, temos

$$\frac{\delta\phi_i(x)}{\delta\theta^m} = (\Sigma_m)_{ij} \phi_j(x). \quad (\text{A.31})$$

Escrevendo as variações do espaço-tempo e dos campos em termos parâmetros do grupo, teremos

$$\delta x^\mu = \frac{\delta x^\mu}{\delta \theta^m} \delta \theta^m \quad (\text{A.32})$$

bem como,

$$\delta \phi_i = \frac{\delta \phi_i}{\delta \theta^m} \delta \theta^m. \quad (\text{A.33})$$

Substituindo as equações A.31, A.32, A.33 e A.18 e na definição da variação funcional do campo A.16,

$$\delta_0 \phi_i = \left[\frac{\delta \phi_i}{\delta \theta^m} - \frac{\delta x^\mu}{\delta \theta^m} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \right] \delta \theta^m. \quad (\text{A.34})$$

Finalmente, podemos reescrever a ação em sua forma geral com as definições feitas acima, desse modo a ação será

$$\delta S[\phi] = \int d^l x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \frac{\delta_0 \phi_i}{\delta \theta^m} + \partial_\mu \left[\mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta \theta^m} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \frac{\delta_0 \phi_i}{\delta \theta^m} \right] \right\} \delta \theta^m. \quad (\text{A.35})$$

Se estamos fazendo uma transformação de simetria na ação é razoável que $\delta S = 0$. Como os $\delta \theta$ são arbitrários, implica que o integrando deve se anular, logo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \frac{\delta_0 \phi_i}{\delta \theta^m} = -\partial_\mu \left[\mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta \theta^m} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \frac{\delta_0 \phi_i}{\delta \theta^m} \right] \quad (\text{A.36})$$

Observe como esse formalismo é geral, pois ainda não impomos que os campos ϕ obedecem as equações de *Euler-Lagrange* A.10. Fazendo isso, agora, obteremos

$$-\partial_\mu \left[\mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta \theta^m} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \frac{\delta_0 \phi_i}{\delta \theta^m} \right] = 0, \quad (\text{A.37})$$

ou ainda

$$\partial_\mu J_m^\mu = 0, \quad (\text{A.38})$$

em que

$$J_m^\mu \equiv -\partial_\mu \left[\mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta \theta^m} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \frac{\delta_0 \phi_i}{\delta \theta^m} \right] \quad (\text{A.39})$$

é a famosa *corrente de Noether* que é a grandeza conservada devido a alguma transformação de simetria. Em analogia ao eletromagnetismo clássico, podemos definir uma carga conservada associada a essa corrente

$$Q_m = \int d^D x J_m^0 \quad (\text{A.40})$$

que também deve ser conservada, isto é

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (\text{A.41})$$

A.1 Tensor Energia-Momento

Primeiramente, consideremos um *shift* no espaço tempo

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}. \quad (\text{A.42})$$

Podemos inserir um parâmetro de simetria genérico na equação acima

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{\delta x^{\mu}}{\delta a^{\lambda}} \delta a^{\lambda}. \quad (\text{A.43})$$

Se considerarmos o parâmetro como o próprio espaço tempo, podemos analisar qual a corrente que se conserva devido a translações. Desse modo, $\frac{\delta a^{\mu}}{\delta a^{\lambda}} = \delta_{\lambda}^{\mu}$. Observe que os campos são invariantes devido a translações, ou seja, $\frac{\delta \phi_i}{\delta a^{\lambda}} = 0$. Então, podemos escrever a equação A.34 como

$$\delta_0 \phi_i = -\partial_{\lambda} \phi_i \delta a^{\lambda}. \quad (\text{A.44})$$

Logo, a corrente será

$$T_{\lambda}^{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_i)} \partial_{\lambda} \phi_i - \delta_{\lambda}^{\mu} \mathcal{L}, \quad (\text{A.45})$$

ou ainda,

$$T^{\sigma\mu} = \eta^{\sigma\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_i)} \partial^{\sigma} \phi_i - \eta^{\sigma\mu} \mathcal{L}. \quad (\text{A.46})$$

Renomeando os índices,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi_i)} \partial^{\mu} \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (\text{A.47})$$

Esse é o conhecido *tensor energia-momento*. A carga associada

$$P^{\sigma} = \int d^D x T^{\sigma 0} \quad (\text{A.48})$$

não é nada mais que o l -momentum, ou o mais conhecido 4-momentum para $l = 4$. Com isso, o hamiltoniano será

$$H \equiv P^0 = \int d^D x T^{00}, \quad (\text{A.49})$$

com $\mathcal{H} = T^{00}$.

Por fim, também é bastante conveniente expressar o tensor energia-momento em termos da métrica. Para isso, basta observar em (A.46) que $\frac{\partial_{\mu} \phi}{\partial \sigma^{\mu} \phi} = \delta_{\mu\sigma}$. Assim, podemos escrever

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (\text{A.50})$$

Então, podemos dizer que a invariância global¹ da ação por transformações, que podem ser translações espaciais, temporais, rotações, transformações de fase, etc. levam a uma grandeza conservada, essa é uma das formas de enunciar o teorema de Noether. Esse método apesar de ser um pouco mais sutil do que em outras referências como [81] entre outros, é bem mais elegante e geral pois não usamos as equações de movimento *a priori*. Optamos por usá-lo, pois o mesmo fornece uma familiaridade e clareza com a parte operacional do formalismo dos campos.

¹o parâmetro do grupo não depende do espaço-tempo

APÊNDICE B – UMA BREVE DISCUSSÃO DA TEORIA DA HOMOTOPIA

Esta seção, terá uma dinâmica diferente de todas as outras contidas nesse trabalho, pois daremos algumas definições de topologia e homotopia que se fazem necessárias para a classificação das soluções solitônicas bem como o entendimento de sua estabilidade.

Primeiramente, definamos a noção de espaço topológico.

Definição 1 *Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção de sub-conjuntos τ de X é uma topologia sobre o conjunto X , se e somente se, satisfaz as condições*

1. $X \in \tau$
2. $\emptyset \in \tau$
3. Se $O_1, O_2, \dots, O_n \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in \tau$
4. $O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n \in \tau$

O par de objetos (X, τ) é chamado de **espaço topológico**. Os sub-conjuntos O_i são chamados de conjuntos abertos [82].

Geralmente, essa definição de Espaço é bastante interessante, pois podemos dar uma noção mais fundamental de espaço sem necessariamente ter uma métrica definida. Isso é possível devido a noção de Vizinhança.

Definição 2 *Dado um espaço topológico (X, τ) , um subconjunto V de X é dito uma vizinhança de um ponto $a \in X$ se existir um conjunto aberto A tal que $a \in X \subseteq V$. Isto é, dizemos que V é uma **vizinhança** de a se a estiver contido em V .*

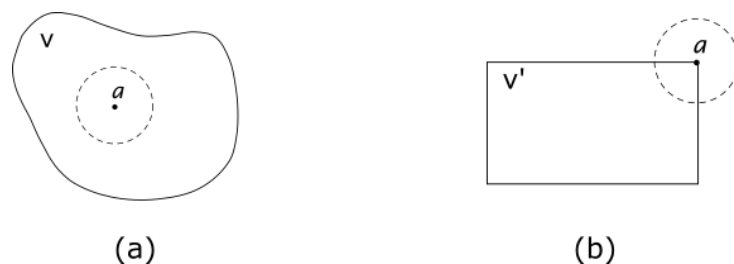


Figura 6: Em (a) dizemos que o conjunto V é uma vizinhança do ponto a . Já em (b), por menor que seja o aberto, o retângulo não pode ser uma vizinhança dos vértices.

Em topologia, dizemos que duas figuras (espaços) são equivalentes se podemos deformar uma na outra através de uma deformação contínua. Isso nos leva ao conceito de *homeomorfismo*. Muito embora o conceito de continuidade seja intuitivo para físicos, é relevante enfatizarmos a noção de uma função contínua num espaço topológico. Para dois espaços topológicos X e Y , uma função é $f : X \rightarrow Y$ é dita *contínua* se para cada aberto $V \in Y$ exista uma inversa $f^{-1}(V)$ que é um aberto $\in X$ [57].

Definição 3 Sejam X e Y dois espaços topológicos, um mapeamento $f : X \rightarrow Y$ é um **homeomorfismo** se é contínuo e exista a inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também contínua. Caso exista, dizemos que X é homeomórfico a Y e vice-versa.

O exemplo clássico de um homeomorfismo é a deformação contínua de uma rosquinha em uma caneca (figura (7)), observe que a caneca preserva o furo da rosquinha, não havendo nenhuma abertura ou torção. Nesse sentido, dizemos que a rosquinha é homeomórfica à caneca e vice-versa. Em outras palavras, os dois objetos são topologicamente equivalentes. Passemos agora para uma definição que diz respeito a classificação de mapeamentos devido alguma deformação contínua.

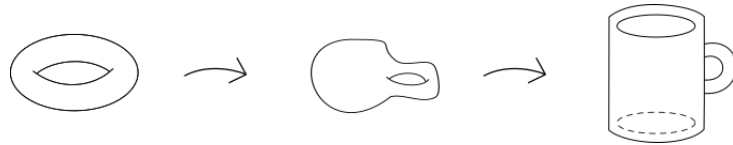


Figura 7: Deformação contínua de uma rosquinha em uma caneca

Definição 4 Sejam dois espaços X e Y , os mapeamentos $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ são ditos **homotópicos** se f pode ser deformado continuamente em g , ou vice-versa. Desse modo, existe uma família de mapeamentos h_t parametrizados continuamente por $t \in [0, 1]$, tais que $h_0 = f$ e $h_1 = g$.

Desse modo, o que temos é um mapeamento contínuo

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

onde $H(x, 0) = f$ e $H(x, 1) = h$, e um mapeamento arbitrário entre esse intervalo é

$$H(x, t) \equiv h_t, \quad \forall x \in X$$

É de nosso interesse investigar mapeamentos envolvendo superfícies esféricas, pois topologicamente, o modelo sigma não-linear é um mapeamento de uma superfície S^2 contendo as coordenadas do espaço-tempo num *target space* S_{int}^2 referente aos campos ϕ_a como coordenadas cartesianas. Todos os mapeamentos de uma superfície esférica em outra podem ser classificados por setores de homotopia. É conhecido que mapeamentos de um mesmo setor podem ser deformados continuamente um no outro, enquanto que mapeamentos de setores diferentes não podem ser deformados continuamente um no outro. Tais classes são caracterizadas pelo conjunto dos inteiros, positivos, negativos e zero. Essas classes de homotopia formam um grupo que é isomórfico - uma correspondência entre grupos que preserva as operações dos mesmos - ao grupo dos inteiros. Para uma variedade $p + 1$ -dimensional mapeada em outra $q + 1$ -dimensional, representamos esses mapeamentos por

$$\pi_p(S^q) = \mathbb{Z},$$

onde $\pi_p(S^q)$ é o grupo de homotopia associado ao mapeamento $S^p \rightarrow S^q$ e \mathbb{Z} é o grupo dos inteiros, a prova pode ser encontrada em [83].

Para exemplificar, consideremos mapeamentos entre círculos. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ é um mapeamento de um círculo em outro, ou seja, $\pi : S^1 \rightarrow S^1$. Podemos defini-lo por uma função contínua $f(\theta)$ num intervalo $[0, 2\pi]$ onde $f(\theta)$ é o ângulo no espaço mapeado. A condição de continuidade desse mapeamento requer que $f(2\pi) = 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$ é chamado

de *winding number* ou *número topológico*. Basicamente o *winding number* fornece o número de vezes que a imagem $f(\theta)$ contorna o espaço mapeado quando θ passa uma vez pelo domínio [2]. Se dois mapeamentos f e g possuem o mesmo n , eles são ditos homotópicos. Afirmamos aqui que as classes de homotopia de $\pi_1(S^1)$, são classificadas por inteiros.

Vejam os mapeamentos, ainda de círculos

$$\sigma_0(\theta) = 0, \quad \forall \theta \quad (\text{B.1})$$

$$\bar{\sigma}_0(\theta) = \begin{cases} t\theta, & 0 \leq x < \pi, \\ t(2\pi - \theta), & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}, \quad (\text{B.2})$$

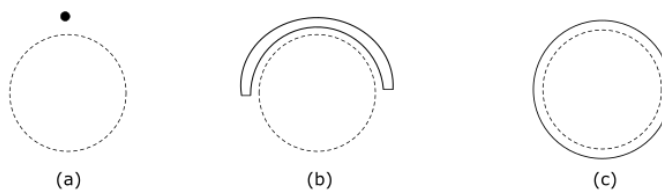


Figura 8: (a): mapeamento trivial (B.1) do círculo em um ponto. (b): mapeamento não-trivial (B.2) homotópico ao (B.1). (c): mapeamento (B.3), este não pode ser deformado nos anteriores.

onde t é um parâmetro dentro do intervalo $[0, 1]$. Observe que variando continuamente o parâmetro t para tender a 0, o mapeamento (B.2) pode ser deformado continuamente no (B.1). Nesse sentido, eles pertencem a mesma classe de homotopia. Porém, o mapeamento

$$\sigma(\theta) = \theta, \quad \forall \theta \quad (\text{B.3})$$

não pode ser deformado continuamente nos anteriores. Em (B.1) e (B.2), o círculo mapeado dá zero voltas ao redor do círculo que é o domínio, enquanto que em (B.3) o círculo mapeado dá uma volta no círculo domínio, observe a figura (8) (c). Essa classificação é justamente o *winding number* definido anteriormente. Nessa perspectiva, uma maneira de computá-lo é

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta. \quad (\text{B.4})$$

Desse modo, para (B.1) e (B.2) obtemos $N = 0$ e para (B.3), $N = 1$. Para um número M de voltas, podemos escrever

$$\sigma_M(\theta) = M\theta, \quad \forall \theta. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, podemos ter um arbitrário número de voltas no círculo domínio, resultando em infinitas classes de homotopia.

REFERÊNCIAS

- 1 FERT, A.; CROS, V.; SAMPAIO, J. Skyrmions on the track. *Nature nanotechnology*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 3, p. 152, 2013.
- 2 MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- 3 SHNIR, Y. M. *Topological and non-topological solitons in scalar field theories*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018.
- 4 BISHOP, A.; KRUMHANS, J.; TRULLINGER, S. Solitons in condensed matter: a paradigm. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 1–44, 1980.
- 5 BISHOP, A. R.; SCHNEIDER, T. *Solitons and Condensed Matter Physics: Proceedings of the Symposium on Nonlinear (Soliton) Structure and Dynamics in Condensed Matter, Oxford, England, June 27–29, 1978*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 8.
- 6 VERAS, D. F. d. S. *Sólitos em Macromoléculas Poliméricas Helicoidais*. Repositório Institucional UFC, 2012. v. 1. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/13678>>.
- 7 BELAVIN, A.; POLYAKOV, A. Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets. *JETP lett*, v. 22, n. 10, p. 245–248, 1975.
- 8 DURHUUS, B.; FRÖHLICH, J. A connection between ν -dimensional yang-mills theory and $(\nu - 1)$ -dimensional, non-linear σ -models. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 75, n. 2, p. 103–151, 1980.
- 9 KAFIEV, Y. The four-dimensional-model as yang-mills theory. *Physics Letters B*, v. 96, n. 3, p. 337 – 339, 1980. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380907819>>.
- 10 LEESE, R. A.; PEYRARD, M.; ZAKRZEWSKI, W. J. Soliton stability in the $o(3)$ sigma-model in $(2+1)$ dimensions. *Nonlinearity*, v. 3, n. 2, p. 387, 1990. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0951-7715/3/i=2/a=007>>.
- 11 TSEYTLIN, A. A. Sigma model approach to string theory. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 4, n. 06, p. 1257–1318, 1989.
- 12 RAYCHAUDHURI, S.; SRIDHAR, K. *Particle physics of brane worlds and extra dimensions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016.
- 13 HULL, C.; WITTEN, E. Supersymmetric sigma models and the heterotic string. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 160, n. 6, p. 398–402, 1985.
- 14 LEVY, M. G.-M. M. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento Series 10*, Società Italiana di Fisica, v. 16, 05 1960.
- 15 SCHWINGER, J. A theory of the fundamental interactions. *Annals of Physics*, Elsevier Science, v. 2, 1957.

- 16 DERRICK, G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 5, 1964.
- 17 PIETTE, B. M. A. G.; SCHROERS, B. J.; ZAKRZEWSKI, W. J. Multisolitons in a two-dimensional skyrme model. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, v. 65, n. 1, p. 165–174, Mar 1995. ISSN 1431-5858. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01571317>>.
- 18 LEESE, R. A.; PEYRARD, M.; ZAKRZEWSKI, W. J. Soliton scatterings in some relativistic models in (2+ 1) dimensions. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 3, n. 3, p. 773, 1990.
- 19 SKYRME, T. H. R. A non-linear field theory. *Proceedings Mathematical Physical Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 260, 1961. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.1098/rspa.1961.0018>>.
- 20 WITTEN, E. Current algebra, baryons, and quark confinement. *Nuclear Physics B*, v. 223, n. 2, p. 433 – 444, 1983. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383900640>>.
- 21 BOLOGNESI, S.; SUTCLIFFE, P. A low-dimensional analogue of holographic baryons. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 47, n. 13, p. 135401, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/47/i=13/a=135401>>.
- 22 ELLIOT-RIPLEY, M.; WINYARD, T. Baby skyrmions in ads. *Journal of High Energy Physics*, v. 2015, n. 9, p. 9, Sep 2015. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2015\)009](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)009)>.
- 23 YU, X. et al. Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 465, n. 7300, p. 901, 2010.
- 24 HAN JUNG HOON; ZANG, J. Y. Z. P. J.-H. N. N. Skyrmion lattice in a two-dimensional chiral magnet. *Physical Review B*, The American Physical Society, v. 82, 9 2010. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.1103/PhysRevB.82.094429>>.
- 25 MÜHLBAUER, S. et al. Skyrmion lattice in a chiral magnet. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 323, n. 5916, p. 915–919, 2009.
- 26 MÜNZER, W. et al. Skyrmion lattice in the doped semiconductor fe 1- x co x si. *Physical Review B*, APS, v. 81, n. 4, p. 041203, 2010.
- 27 YU, X. et al. Near room-temperature formation of a skyrmion crystal in thin-films of the helimagnet fege. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 10, n. 2, p. 106, 2011.
- 28 SONDHI, S. L. et al. Skyrmions and the crossover from the integer to fractional quantum hall effect at small zeeman energies. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 47, p. 16419–16426, Jun 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.47.16419>>.
- 29 NEUBAUER, A. et al. Topological hall effect in the *a* phase of mnsi. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 102, p. 186602, May 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.186602>>.
- 30 GLADIKOWSKI, J.; PIETTE, B. M. A. G.; SCHROERS, B. J. Skyrme-maxwell solitons in 2+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 53, p. 844–851, Jan 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.844>>.

- 31 SAMOILENKA, A.; SHNIR, Y. Gauged baby skyrme model with a chern-simons term. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 95, p. 045002, Feb 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.045002>>.
- 32 LOGINOV, A. Y. Rotating skyrmions of the (2 + 1)-dimensional skyrme gauge model with a chern-simons term. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, v. 118, n. 2, p. 217–226, Feb 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1134/S1063776114020150>>.
- 33 WARD, R. Planar skyrmions at high and low density. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 17, n. 3, p. 1033, 2004.
- 34 CUNHA, M. S.; LANDIM, R. R.; ALMEIDA, C. A. S. Nonminimal maxwell-chern-simons-O(3)– σ vortices: Asymmetric potential case. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 067701, Sep 2006.
- 35 GHOSH, P. K. Bogomol’nyi equations of maxwell-chern-simons vortices from a generalized abelian higgs model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 49, p. 5458–5468, May 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.5458>>.
- 36 ADAM, C. et al. Gauged bps baby skyrme model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 045010, Aug 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.045010>>.
- 37 RAJARAMAN, R. *Solitons and instantons*. 2nd ed. 1989. ed. [S.l.]: North Holland, 1987. (North-Holland Personal Library).
- 38 LEMOS, N. *Mecânica Analítica*. [S.l.]: LIVRARIA DA FISICA, 2007.
- 39 RUBAKOV, V. *Classical theory of gauge fields*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009.
- 40 WEINBERG, E. J. *Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- 41 CUNHA, M. S. *Supersimetrização do Modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com Interações de Momento Magnético Anômalo*. [S.l.]: Universidade Federal do Ceará, 1995.
- 42 TANABASHI, M. et al. Aps: Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, v. 98, p. 030001, 2018.
- 43 SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- 44 NAMBU, Y. Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 117, p. 648–663, Feb 1960.
- 45 GOLDSTONE, J. Field theories with «superconductor» solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 19, n. 1, p. 154–164, 1961.
- 46 SCHERER, S.; SCHINDLER, M. R. *A Chiral perturbation theory primer*. 2005.
- 47 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 508–509, Oct 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>>.

- 48 ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 321–323, Aug 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.321>>.
- 49 GURALNIK, G. S.; HAGEN, C. R.; KIBBLE, T. W. B. Global conservation laws and massless particles. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 585–587, Nov 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.585>>.
- 50 DAM, S. V. Spontaneous symmetry breaking in the higgs mechanism. 2011.
- 51 BERNSTEIN, J. Spontaneous symmetry breaking, gauge theories, the higgs mechanism and all that. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 46, p. 7–48, Jan 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.46.7>>.
- 52 AAD, G. et al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 716, n. 1, p. 1–29, 2012.
- 53 WITTEN, E. Chern-simons gauge theory as a string theory. In: *The Floer memorial volume*. [S.l.]: Springer, 1995. p. 637–678.
- 54 ZHANG, S. C.; HANSSON, T. H.; KIVELSON, S. Effective-field-theory model for the fractional quantum hall effect. *Physical review letters*, APS, v. 62, n. 1, p. 82, 1989.
- 55 DUNNE, G. V. Aspects of chern-simons theory. In: *Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems*. [S.l.]: Springer, 1999. p. 177–263.
- 56 HOBART, R. H. On the instability of a class of unitary field models. *Proceedings of the Physical Society*, Institute of Physics, v. 82, 1963.
- 57 MUNKRES, J. *Topology*. 2nd ed. ed. Prentice Hall, Inc, 2000. ISBN 9780131816299,0131816292. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=4CFF34259F76071BD3B49E19318DEA19>>.
- 58 BOGOMOL'NYI, E. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys. (Engl. Transl.); (United States)*.
- 59 LEESE, R. Discrete bogomolny equations for the nonlinear $o(3)$ σ model in 2+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 40, p. 2004–2013, Sep 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.2004>>.
- 60 SCHROERS, B. Bogomol'nyi solitons in a gauged $o(3)$ sigma model. *Physics Letters B*, Elsevier Science, v. 356, 1995.
- 61 CHURCHILL, R. V. Introduction to complex variables and applications. McGraw-Hill, 1948.
- 62 GHOSH, P. K.; GHOSH, S. K. Topological and nontopological solitons in a gauged $o(3)$ sigma model with chern-simons term. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 366, n. 1-4, p. 199–204, 1996.
- 63 WEIDIG, T. The baby skyrme models and their multi-skyrmions. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 12, n. 6, p. 1489, 1999.

- 64 WEINBERG, S. *The quantum theory of fields*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 2.
- 65 CASANA, R. et al. Self-dual solitons in the restricted baby skyrme model gauged with the chern-simons term. *arXiv preprint arXiv:1901.00655*, 2019.
- 66 ADAM, C. et al. Investigation of restricted baby skyrme models. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 81, p. 085007, Apr 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.085007>>.
- 67 SPEIGHT, J. M. Compactons and semi-compactons in the extreme baby skyrme model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 43, n. 40, p. 405201, sep 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1751-8113%2F43%2F40%2F405201>>.
- 68 ADAM, C. et al. Nonlinear field theory with topological solitons: Skyrme models. In: *Proceedings, Barcelona Postgrad Encounters on Fundamental Physics*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 81–92.
- 69 ADAM, C.; WERESZCZYNSKI, A. Gauged bps baby skyrmions with quantized magnetic flux. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 95, p. 116006, Jun 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.116006>>.
- 70 OLIVEIRA, D. M. d. A proposal to the teaching of quantum field theory in the undergraduation level: the maxwell-chern-simons electrodynamics as motivation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 33, n. 3, p. 1–9, 2011.
- 71 PAUL, S. K.; KHARE, A. Chern-simons term by spontaneous symmetry breaking in an abelian higgs model. *Physics Letters B*, v. 191, n. 4, p. 389 – 392, 1987. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269387906277>>.
- 72 BRODSKY, S. J.; DRELL, S. D. Anomalous magnetic moment and limits on fermion substructure. *Physical Review D*, APS, v. 22, n. 9, p. 2236, 1980.
- 73 PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- 74 AOYAMA, T. et al. Tenth-order qed contribution to the electron $g-2$ and an improved value of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 111807, Sep 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.111807>>.
- 75 ODOM, B. et al. New measurement of the electron magnetic moment using a one-electron quantum cyclotron. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 97, p. 030801, Jul 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.030801>>.
- 76 PASCHOAL, R. C.; HELAYËL-NETO, J. A. Non-minimal maxwell-chern-simons theory and the composite fermion model. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 313, n. 5-6, p. 412–417, 2003.
- 77 NOETHER, E. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, Taylor and Francis Group, v. 1, 01 1971. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.1080/00411457108231446>>.
- 78 ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. *Classical fields*. São Paulo, 2004.

- 79 L.D., L. E. L. *The classical theory of fields*. 4. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann, 1980. Volume 2. ISBN 0750627689,9780750627689.
- 80 LANDAU, E. L. L. D. *Mechanics*. 3. ed. Butterworth-Heinemann, 1976. v. 1. (Course of Theoretical Physics, v. 1). ISBN 9780750628969,0-7506-2896-0. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=D95482E8EFA48DA5A0F1F4A37D767D52>>.
- 81 RYDER, L. H. *Quantum field theory*. 2nd ed. ed. Cambridge University Press, 1996. ISBN 0521478146,9780521478144,0521472423. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=1D09385681FF9AC4A0BB6CD733678AAE>>.
- 82 NAKAHARA, M. *Geometry, topology, and physics*. 2nd ed. ed. Institute of Physics Publishing, 2003. (Graduate student series in physics). ISBN 0750306068,9780750306065. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=D8A229B3A90C803764004B69CBB457F6>>.
- 83 STEENROD, N. E. *The topology of fibre bundles*. [S.l.]: Princeton University Press, 1999. v. 14.