UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MARIA LUZIANA OLIVEIRA LIMA

PRODUTO EDUCACIONAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO) SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS AMPARADAS PELO SOFTWARE GEOGEBRA

FORTALEZA
2019

MARIA LUZIANA OLIVEIRA LIMA

PRODUTO EDUCACIONAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO) SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS AMPARADAS PELO SOFTWARE GEOGEBRA

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

FORTALEZA

2019

SUMÁRIO

1 O PRODUTO EDUCACIONAL (PE)

Os cursos de Mestrado Profissional vêm ganhando destaque e sendo muito procurados, especialmente por professores. De acordo com Gomes (2013, p. 564), os cursos de mestrado profissional em ensino surgiram como uma alternativa para auxiliar nas urgentes transformações no processo de ensino e aprendizagem de Ciências e Matemática. Através de pesquisas voltadas ao aperfeiçoamento profissional do mestrando, ele se diferencia do mestrado acadêmico por ter seu foco em intervenções nas práticas de sala de aula.

Nesse sentido, o Mestrado Profissional e o Mestrado Acadêmico se diferem pelo foco em que atuam. Segundo Bisognin (2013, p. 270), "o mestrado acadêmico tem como propósito a formação de pesquisadores, enquanto o mestrado profissional qualifica para o mercado de trabalho".

Moreira e Nardi (2009, p.2) acreditam que o Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática "é uma nova proposta de pós-graduação strictu sensu. Não é adaptação, ou variante, de propostas já existentes. Não é um mestrado mais simples; é diferente, isso sim". Dessa forma, os mestrados acadêmicos têm como foco a pesquisa e preparação para o doutorado, já os mestrados profissionais visam o aperfeiçoamento de práticas pedagógicas dos profissionais para atuar em sala de aula.

Preferencialmente, os mestrandos devem ser professores em exercício e não devem se afastar para cursar o mestrado. Esses professores mestrandos que buscam uma formação continuada encontram nesses cursos uma possibilidade de, além de aprimorar seus conhecimentos, contribuir com novas estratégias de ensino, visto que ao final do curso devem apresentar um produto educacional. Sobre esse produto, Moreira e Nardi (2009, p.4), afirmam:

> O mestrando deve desenvolver, por exemplo, uma nova estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino para determinados conteúdos, um aplicativo, um ambiente virtual, um texto, enfim, um processo ou produto, de natureza educacional, e implementá-lo em condições reais de sala de aula, ou de espaços não formais ou informais de ensino, relatando os resultados dessa experiência.

O material produzido pode ser disponibilizado na *internet* através dos *sites* de buscas ou das universidades que oferecem esses cursos de Mestrado, ficando assim disponíveis para outros professores que desejem utilizar as ideias propostas. No Mestrado Profissional, o foco está na aplicação do conhecimento, novas estratégias de ensino são defendidas e outras são atualizadas.

Sobre o produto educacional, a Capes afirma que “trata-se de um relato de experiência de implementação de estratégias ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino em uma área específica do conhecimento” (CAPES, 2012, p. 2).

Tendo em vista que os cursos de Mestrado Profissional devem gerar um produto educacional a ser disseminado para profissionais da área, nesse caso professores de Matemática, o presente trabalho produziu um material didático de apoio a professores do Ensino Médio. Trata-se de um caderno de atividades com dez Situações Didáticas Olímpicas (SDOs) envolvendo problemas da OBMEP, dos três níveis, referentes ao conteúdo Sequências Numéricas.

Com o intuito de trazer uma estratégia diferenciada de abordagem do conteúdo “Sequências Numéricas” no contexto da OBMEP, o produto educacional aqui elaborado teve como metodologia de ensino a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, em suas quatro fases, a saber, ação, formulação, validação e institucionalização e o Geogebra foi utilizado como ferramenta auxiliar para a construção das SDOs.

O caderno de atividades que constitui o produto educacional da presente pesquisa ficará disponível para os professores no portal do professor do Ministério da Educação (MEC).

1. 1 Apresentação do Produto Educacional (PE)

O presente produto educacional aqui apresentado é resultado da utilização da Teoria das Situações Didáticas (TSD), como metodologia de ensino, em problemas da primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) dos níveis 1, 2 e 3, bem como do seu Banco de Questões, referentes ao conteúdo Sequências Numéricas. O *software* Geogebra foi utilizado como recurso tecnológico auxiliar, objetivando contribuir para o estudo de problemas similares e facilitar a aprendizagem dos discentes.

Entendendo que um dos objetivos das Olimpíadas de Matemática é melhorar o ensino de Matemática, este trabalho apresenta SDOs com o intuito de proporcionar aos professores de Matemática do ensino básico um novo olhar sobre problemas olímpicos, possibilitando que sejam trabalhados de forma diferenciada, ativa e instigante.

Outro ponto importante é que esse trabalho busca incentivar professores de Matemática a, através das tecnologias, que é um recurso utilizado em diversos setores da sociedade, alcançarem todos ou pelo menos a maioria dos alunos, inclusive aqueles menos interessados, que com uso dessa ferramenta poderá se sentir mais motivado pelos estudos.

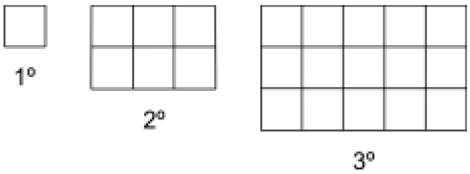
Dessa forma, estarão presentes nesse produto 10 (dez) situações envolvendo problemas (oito nesse apêndice e duas no corpo do trabalho) da OBMEP, que contemplarão a TSD e o uso do software Geogebra.

1.1.1 Situação Didática Olímpica 1

Conhecimentos Prévios: Perímetro, Termo Geral da PA.

Problema Olímpico (Prova OBMEP 2008 – 1ª fase - Nível 3 – questão 4 - adaptada)

Com quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do 50º retângulo dessa sequência?

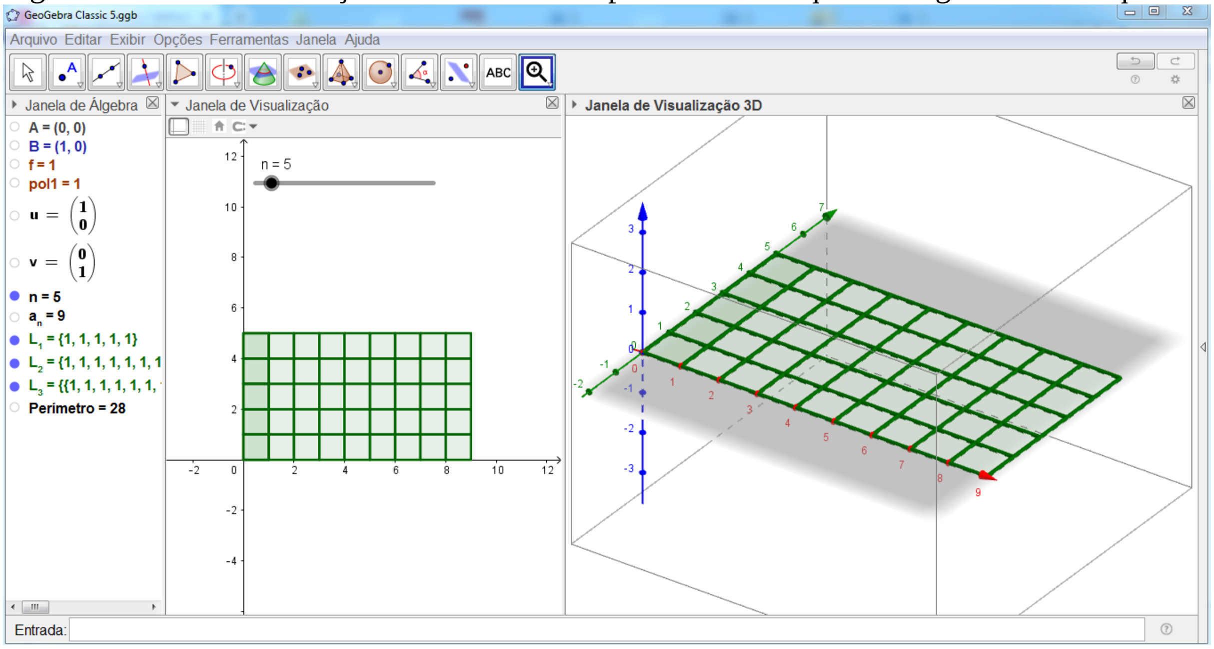


Dialética da Ação – Nesse problema, o professor apresentará a construção da sequência de figuras no *software* Geogebra para que os alunos comecem a analisar as características e informações que poderão ser importantes para a sua resolução. Através da movimentação do controle deslizante, o aluno poderá observar o aumento da base e da altura de cada retângulo da sequência. A exploração visual através do recurso computacional possibilitará que o educando analise a sequência a nível local e mais geral. Assim, esperamos que o aluno perceba, inicialmente, que as alturas dos retângulos irão, no decorrer de cada etapa, aumentar 1 cm, visto que no primeiro retângulo a altura mede 1 cm, no segundo, 2 cm e no terceiro, 3 cm, já que os lados de cada quadradinho que compõe os retângulos medem 1 cm. Dessa forma, o aluno poderá inferir que o 50º retângulo da sequência terá 50 cm de altura.

Também esperamos que esse aluno perceba que a base do primeiro retângulo é 1 cm, do segundo retângulo, 3 cm e do terceiro retângulo, 5 cm e assim, o aluno começará a refletir sobre o padrão existente para a base dos retângulos. Analisando a diferença que há entre a medida das bases do primeiro e do segundo, do segundo e do terceiro retângulos, assim como em quaisquer dois retângulos consecutivos da sequência, perceberá que essa diferença é de 2 cm.

Então, ele irá notar que para a base do retângulo há um padrão diferente do padrão da altura. O aluno estará, portanto, tomando suas primeiras decisões acerca do problema, em consonância com o que afirma Almouloud (2007, p.38), que nessa fase “as interações estão centralizadas na tomada de decisões”. A base e a altura do quinto retângulo, por exemplo, estão representados em duas dimensões e em três dimensões na figura 1.

Figura 1 – Visualização 2D/3D correspondente à quinta figura da sequência



Fonte: Os autores.

Dialética da Formulação – De acordo com Almouloud (2007, p. 38), nessa fase "o aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais". Assim, com essa troca de informações e

o desenvolvimento de suas ideias, o aluno poderá chegar à conclusão de que como a sequência prevalecerá para o enésimo retângulo, essa diferença será a razão de uma progressão aritmética.

Ainda segundo o autor, "essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas" (p.38). Daí, o aluno deverá estabelecer um modelo, através do qual, seja possível calcular a medida da base de qualquer figura que esteja nessa sequência, para depois calcular o perímetro do 50º retângulo. Utilizando seus conhecimentos prévios sobre progressão aritmética e seu termo geral, o aprendiz observará que para calcular a medida da base do enésimo retângulo será válida a igualdade:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \; n \in N.$$

Sabendo que o termo a_n corresponde à quantidade de quadradinhos da base do retângulo que está na posição n, a igualdade que representará a base do enésimo retângulo será dada por:

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2,$$

já que a primeira figura é composta por um quadradinho e o acréscimo entre uma figura e outra é de 2 quadradinhos. Essa igualdade também poderá ser escrita como $a_n = 1 + 2 \cdot n - 2$, que resultará em $a_n = 2 \cdot n - 1$. Como trata-se de uma progressão aritmética, o aluno poderá utilizar essa fórmula para encontrar o 50º termo da progressão, que corresponde ao comprimento do 50º retângulo.

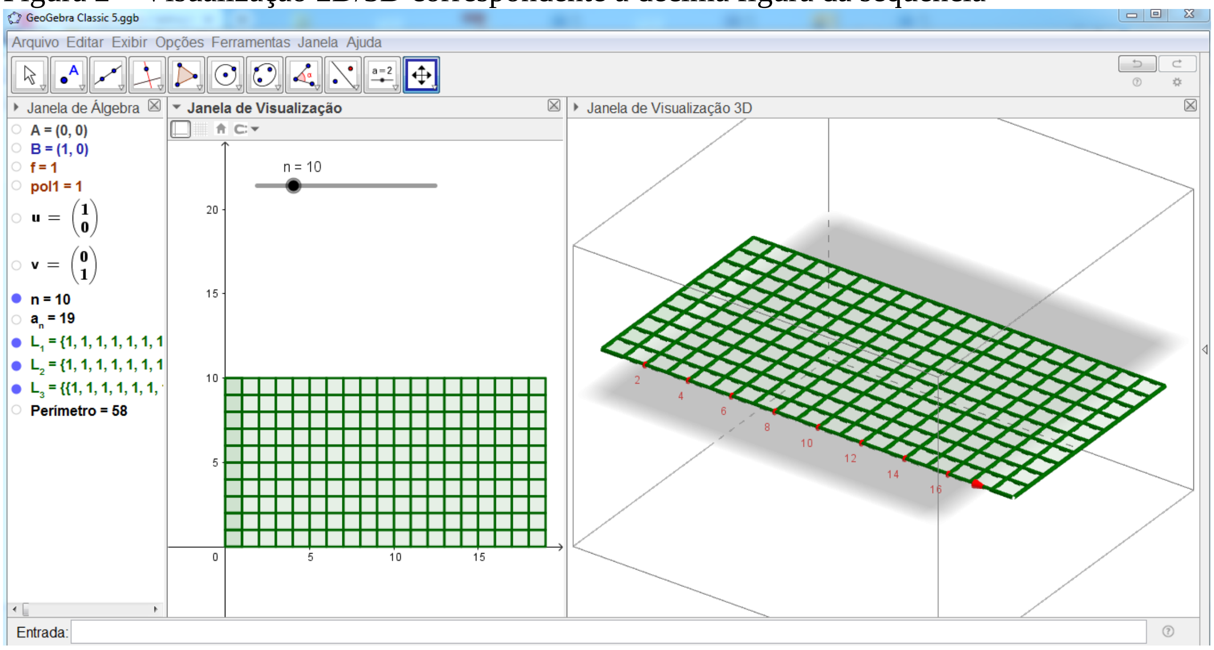
Logo, $a_{50} = 2 \cdot 50 - 1$, e teremos, $a_{50} = 100 - 1 = 99$.

Isso levará o aluno a concluir que a base do 50º retângulo mede 99 cm. Daí, para calcular o perímetro do 50º retângulo da sequência, ele observará que deve somar as medidas dos quatro lados do retângulo, ou ainda, multiplicar as medidas da altura e da base por 2 e somar os resultados. Assim, o perímetro será igual a:

$2 \cdot (50 + 99) = 2 \cdot 149 = 298$ cm (Ver Janela de Álgebra da figura 9).

Dialética da Validação - Essa "é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor" (ALMOULOUD, 2007, p.39). É nessa etapa que o aluno deverá mostrar que suas ideias são válidas. Assim poderá haver debates e o aluno (ou grupo de alunos) irá/irão argumentar a fim de convencer os colegas e o professor da validade de suas afirmações. O Geogebra será um auxiliar no processo de visualização e o "controle deslizante" será essencial para mostrar o resultado para diferentes retângulos da sequência. A figura 2, por exemplo, representa a décima figura da sequência em duas e em três dimensões.

Figura 2 – Visualização 2D/3D correspondente à décima figura da sequência



Fonte: Os autores.

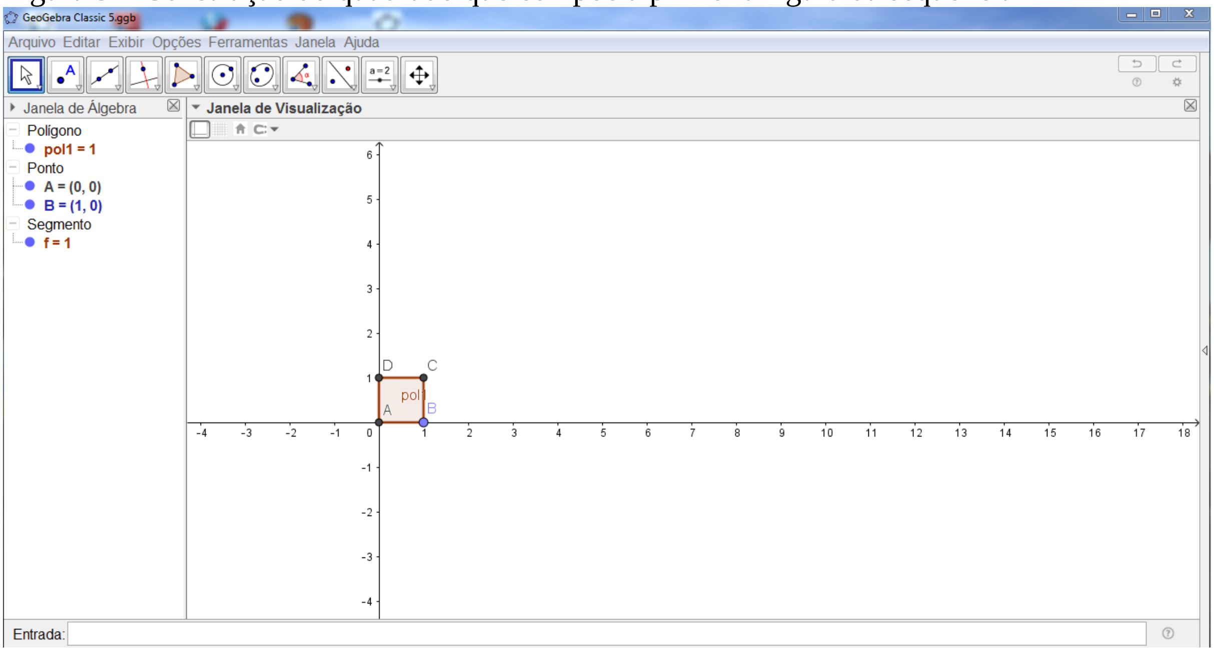
Dialética da Institucionalização – Nessa etapa o professor retomará a responsabilidade da situação e mostrará que para qualquer retângulo dessa sequência, bastará utilizará o mesmo raciocínio. É o momento de fazer uma revisão do problema e tirar possíveis dúvidas apresentadas pelos aprendizes.

É oportuno observar que o professor deve conduzir os alunos a comparar os dados observados na Janela de Álgebra com os dados da Janela de Visualização do Geogebra, o que Alves (2016b, p.93) considera um "cenário de aprendizagem" a fim de analisar o comportamento da sequência de figuras através de dois pontos de vista distintos, o algébrico e o geométrico. Assim, "o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos" (ALMOULOUD, 2007, p.40).

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Inicialmente, criamos um quadrado a partir de dois vértices. Para isso, utilizamos o comando "Polígono Regular" no quinto ícone (da esquerda para a direita) da barra de ferramentas, e determinamos os vértices da base do quadrado e a quantidade de lados da figura a ser construída (quadrado). Aqui, utilizamos os pontos (0,0) e (1,0) e determinamos a quantidade de lados será igual a quatro.

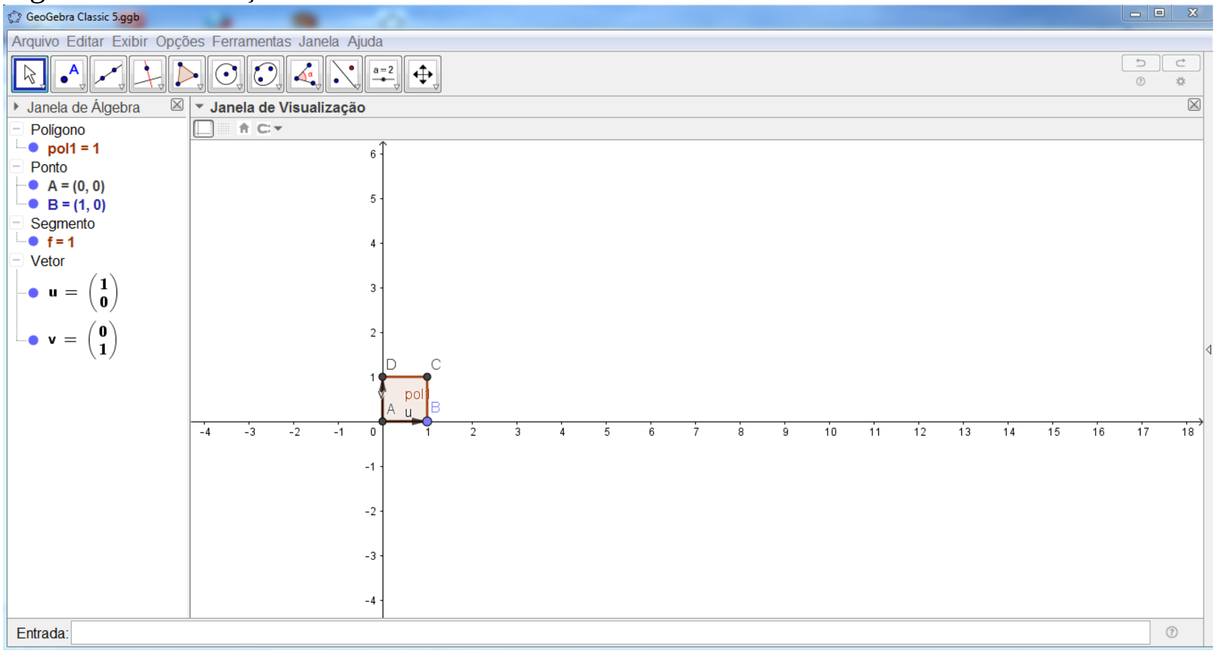
Figura 3 – Construção do quadrado que compõe a primeira figura da sequência



Fonte: Os autores.

A seguir, determinamos os vetores u = (1,0) e v = (0,1). Para isso, digitaremos os comandos “u = (1,0)” e “v= (0,1)” na Caixa de Entrada.

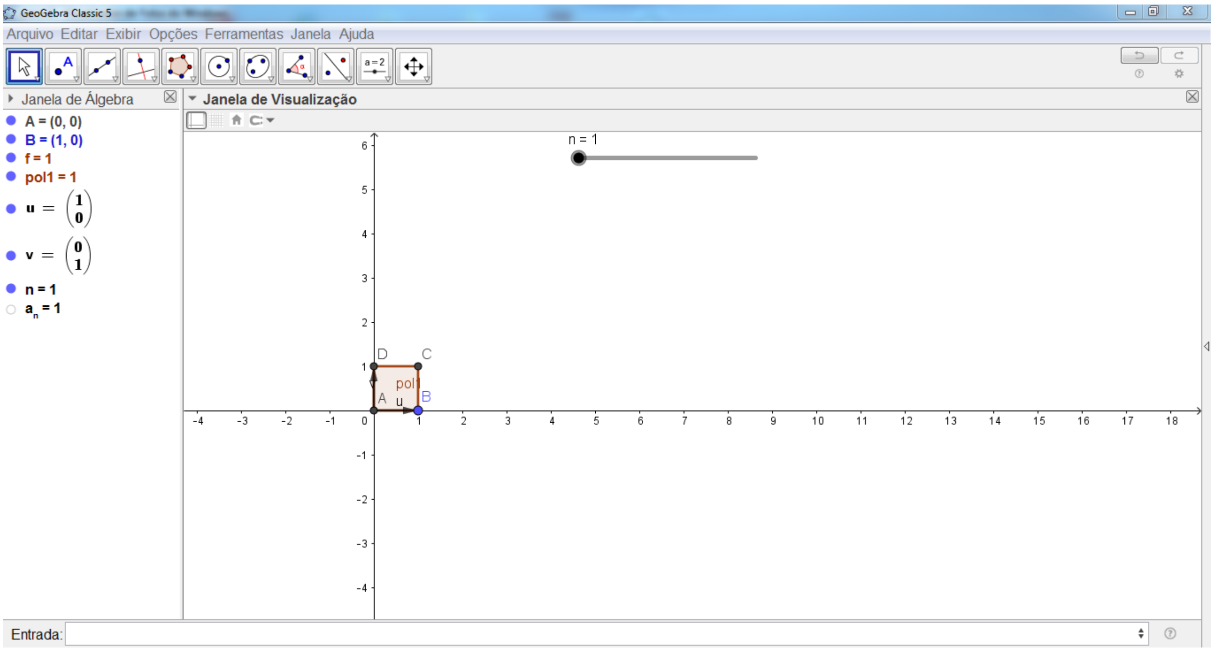
Figura 4 – Construção dos vetores “u” e “v”



Fonte: Os autores.

Depois disso, criamos o controle deslizante “n”, no penúltimo ícone da barra de ferramentas, com valor mínimo 1 e valor máximo 50, com incremento igual a 1. Além disso, também digitaremos na Caixa de Entrada o comando “a_n = 2*n – 1” que equivale à quantidade de quadrados da base de cada retângulo. Isso será feito para que o valor correspondente a cada retângulo seja representado na Janela de Álgebra. Obteremos a figura 5.

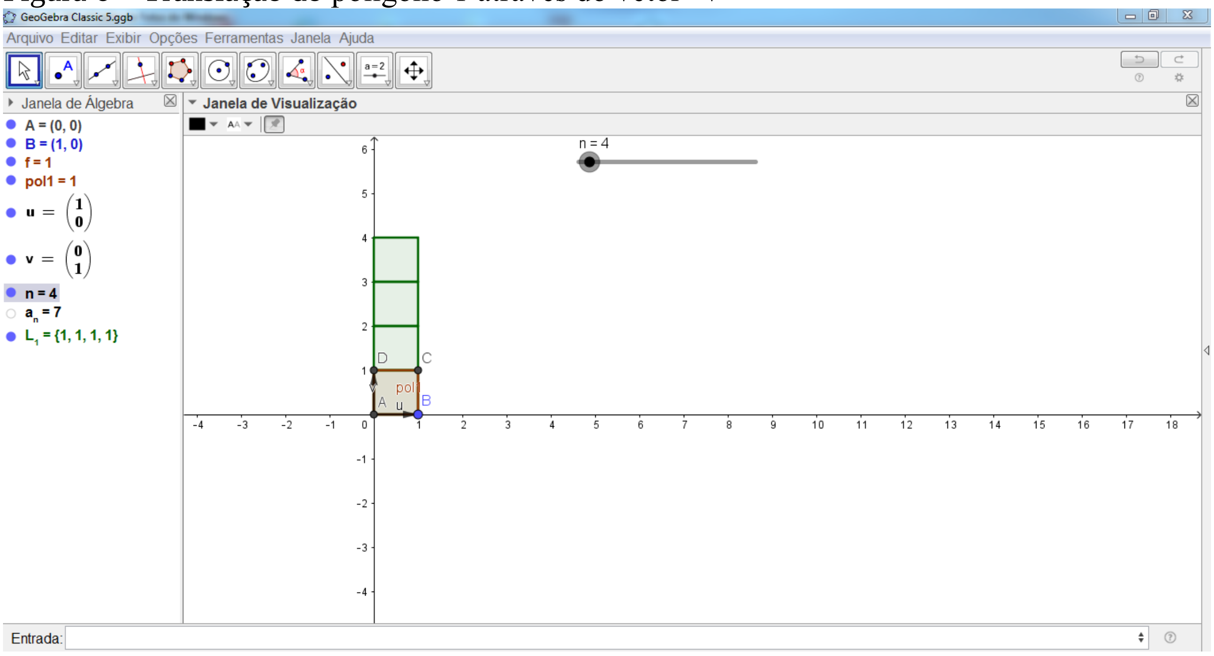
Figura 5 – Representação do controle deslizante “n”



Fonte: Os autores.

Em seguida, criamos uma lista de quadradinhos com o comando “L_1= Sequência(Transladar(pol1, Vetor(j*v)), j, 0, n - 1)” e teremos a seguinte imagem quando n for igual a 4. Isso significa que estamos transladando o polígono 1 através do vetor “v” e movimentando o controle deslizante, obteremos a translação desejada, que corresponde à altura do retângulo.

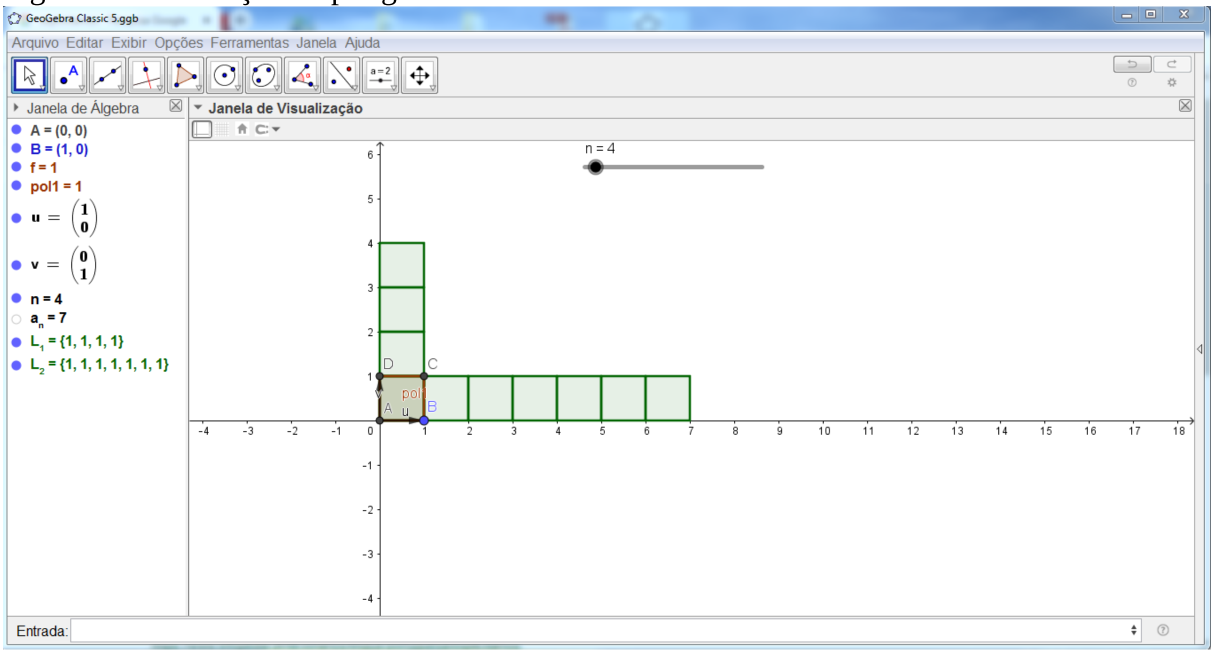
Figura 6 – Translação do polígono 1 através do vetor “v”



Fonte: Os autores.

Construiremos, agora, a base do retângulo. Assim, digitaremos na Caixa de Entrada o comando “L_2=Sequência(Transladar(pol1, Vetor(u *i)), i, 0, a_n - 1)”. Na figura 7, temos a construção esperada.

Figura 7 – Translação do polígono 1 através dos vetores “u” e “v”

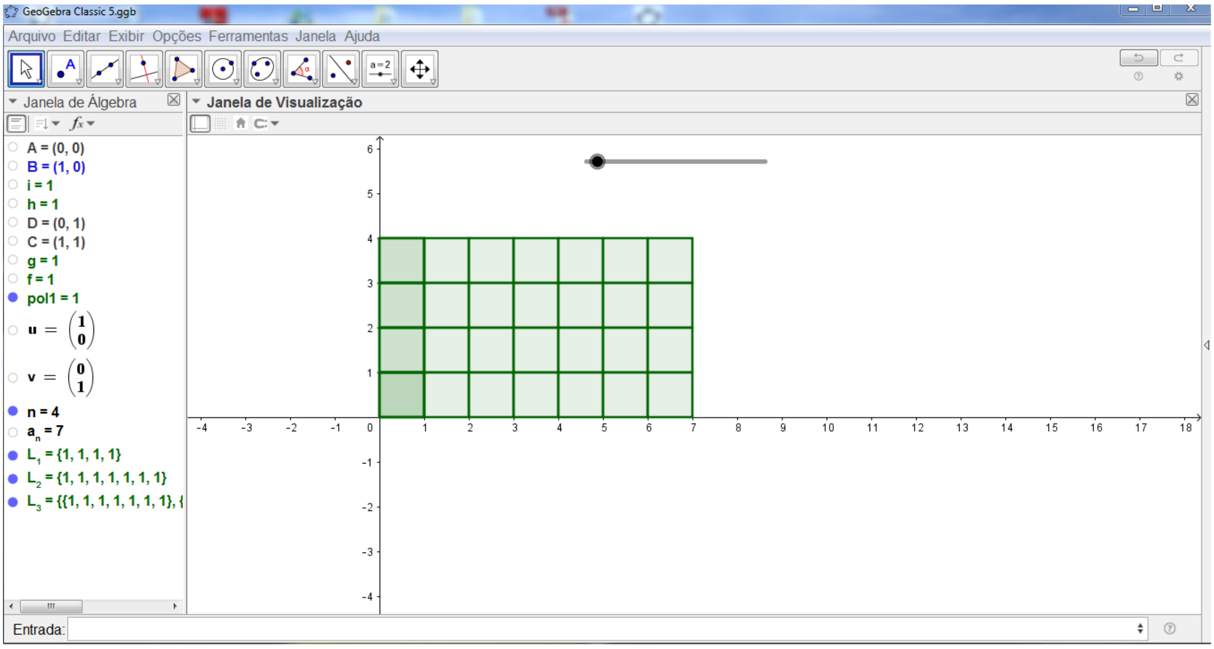


Fonte: Os autores.

Agora, construiremos um dos retângulos da sequência, a quarta figura, transladando a “lista 2” através do vetor “v”. Para isso, digitaremos na Caixa de Entrada o comando “L_3= Sequência(Transladar(L_2, Vetor(v j)), j, 1, n - 1)”. Além disso, iremos esconder os rótulos, ativando “Selecionar Tudo” e em seguida “Exibir/Esconder Rótulos” em “Editar” na Barra de Tarefas. Faremos isso, apenas para que a imagem fique mais “limpa”, ficando a critério de quem esteja fazendo.

Se mesmo assim, algum rótulo permanecer, bastar clicar com o botão direito sobre ele e ativar “Exibir Rótulo” ou ainda clicando sobre a representação algébrica correspondente na Janela de Álgebra. Também ativamos a cor verde, para o primeiro polígono construído, apenas para que o retângulo fique na mesma cor. No final dessa etapa, teremos a figura 8, que corresponde à quarta figura da sequência.

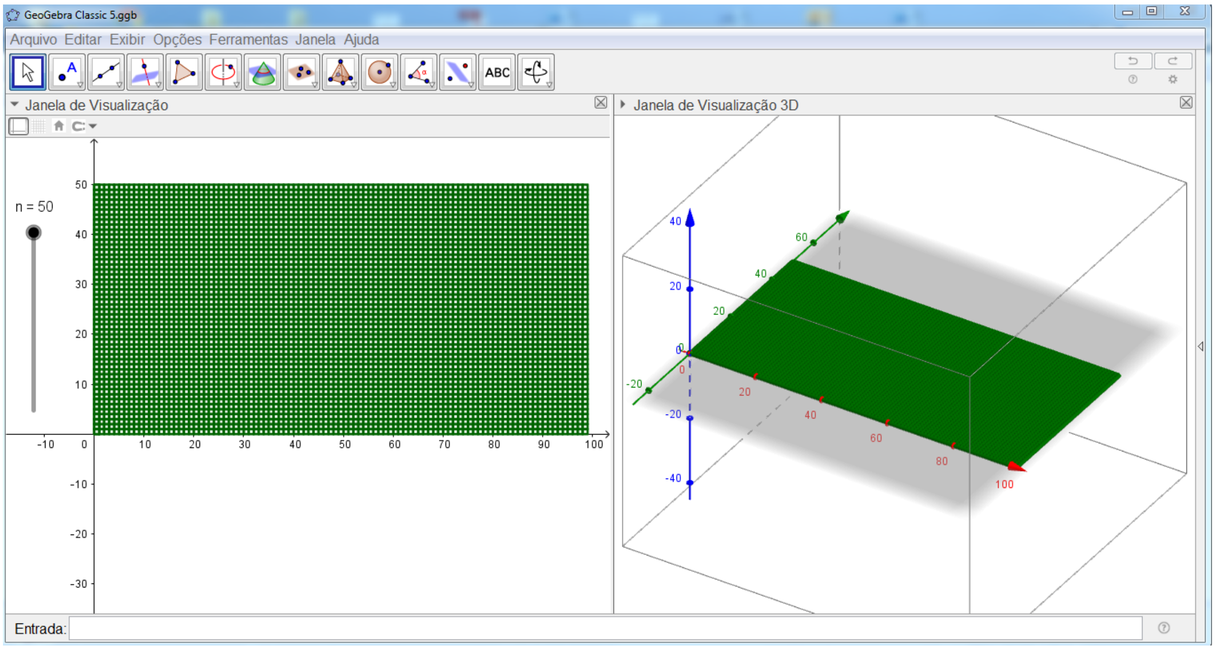
Figura 8 – Representação da quarta figura da sequência



Fonte: Os autores.

Para obtermos o perímetro de qualquer retângulo da sequência na Janela de Álgebra, digitaremos na Caixa de Entrada o comando “Perímetro= 2*(n + a_n)”, já que a altura é formada por “n”quadrados e a base por “a_n=2· (n-1)” retângulos. Assim, movimentando o controle deslizante “n” veremos na Janela de Álgebra o perímetro de cada retângulo. Agora, para uma melhor visualização das medidas da altura e da base do retângulo procurado, utilizamos o último ícone da barra de ferramentas para “Mover a Janela de Visualização”, “Ampliar” ou “Reduzir” a imagem. Podemos observar, então, a medida da base e a altura do retângulo na janela de visualização, bem como as medidas da altura e da base e o perímetro dos retângulos da sequência na Janela de Álgebra, como o 50º retângulo mostrado na figura 9. Para exibir a construção em três dimensões, basta clicar em “Janela de Visualização 3D” no ícone “Exibir” da Barra de Ferramentas e fazer ajustes como Ampliar, Reduzir ou Mover a Janela de Visualização 3D.

Figura 9 – Visualização 2D/3D correspondente à quinquagésima figura da sequência



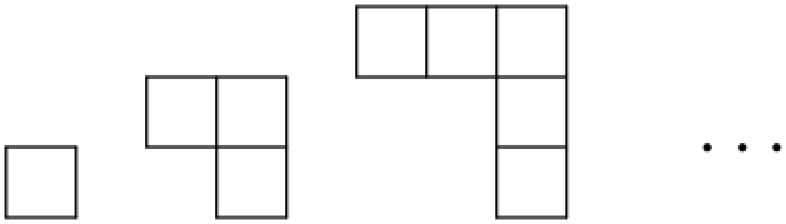
Fonte: Os autores.

1.1.2 Situação Didática Olímpica 2

Conhecimentos Prévios: Noções de Padrão

Problema Olímpico (Banco de Questões 2016 – página 14 – Nível 1 – questão 16 - adaptada)

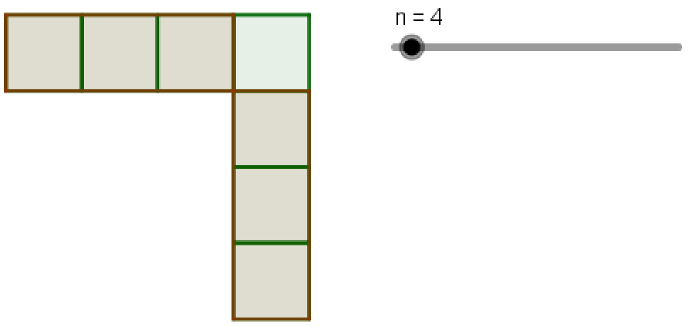
Somando pecinhas – Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho. Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?



Dialética da Ação – Nessa fase faz parte do papel do aluno "a descoberta/identificação de um problema relevante", segundo Alves (2016a). Assim, esperamos que eles comecem a analisar a sequência a partir da construção no Geogebra para descobrir algum padrão entre as figuras. É um momento de agir sobre o problema. Pais (2002, p.72) afirma que esse é o momento em que o aluno age de forma mais imediata, produzindo um conhecimento mais experimental e intuitivo do que teórico.

Assim, é possível observar que a cada figura da sequência é aumentado um quadradinho à esquerda e um abaixo da figura anterior. O professor deve instigar os alunos a perceberem esse aumento caso eles apresentem alguma resistência, sempre com o cuidado de não dar respostas. O Geogebra será importante nesse momento, pois os alunos poderão visualizar cada figura da sequência. Na imagem abaixo, temos a quarta figura da sequência, com destaque para os quadradinhos acrescentados ao primeiro quadradinho da sequência.

Figura 10 - Acréscimo de três quadradinhos à esquerda e abaixo do primeiro quadrado da sequência

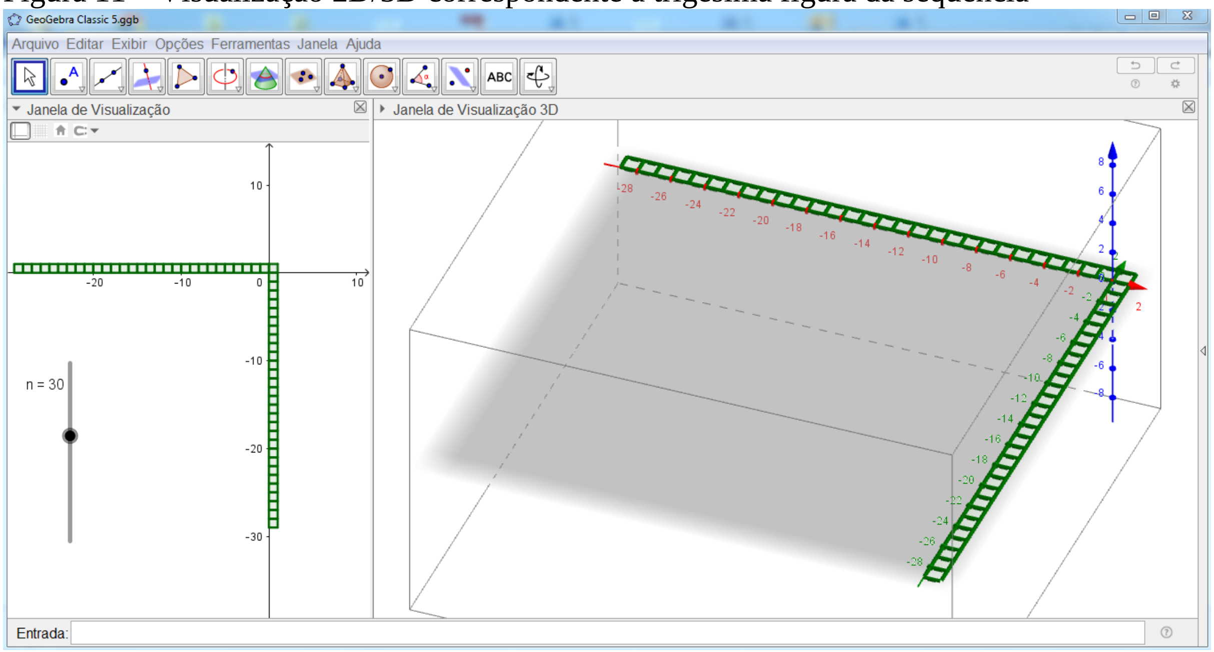


Fonte: Os autores.

Dialética da Formulação – Através de trocas de informações com os colegas e da interação com o problema, o aluno deverá observar que inicialmente há apenas um quadradinho. Na segunda peça são $1 + 2 \cdot 1 = 3$ quadradinhos, na terceira figura, $1+ 2 \cdot 2 = 5$ quadradinhos e deverá prever que, sendo assim, na enésima figura serão $1 + 2 \cdot n$ quadradinhos.

O aprendiz deverá perceber que sempre o acréscimo de quadradinhos é um múltiplo de 2 porque está sendo acrescentado quadradinhos à esquerda e abaixo da figura anterior. Segundo Almouloud (2007, p. 38), é nessa fase que o aprendiz comunica, de forma escrita ou oral, qual a solução encontrada e como chegou a esse resultado. Logo, deverá concluir que a pecinha 50 terá $1 + 2 \cdot 49 = 99$ quadradinhos. Na figura 11 está representada a trigésima figura da sequência.

Figura 11 – Visualização 2D/3D correspondente à trigésima figura da sequência



Fonte: Os autores.

Dialética da Validação – Nessa etapa, o aluno irá validar o modelo por ele criado. Pais (2002, p. 73) destaca que nessa fase "o aluno já utiliza mecanismos de provas e o saber já elaborado por ele passa a ser usado com uma finalidade de natureza essencialmente teórica".

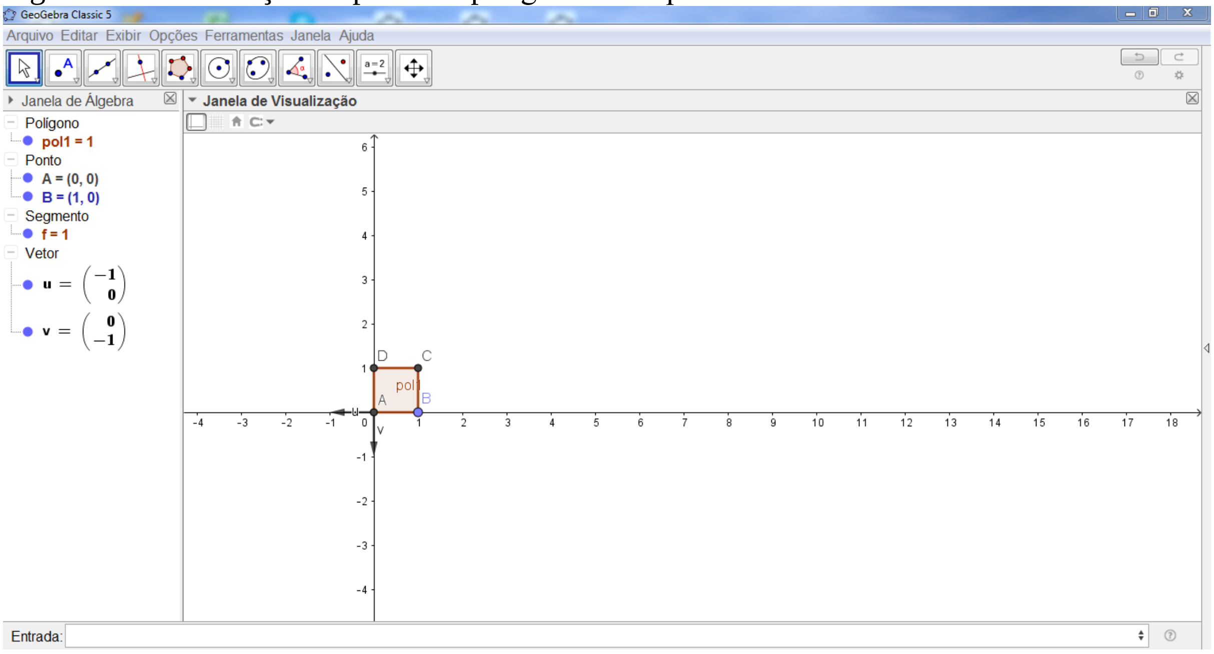
Assim, espera-se que ele use argumentos convincentes para que seus interlocutores concordem e os aceitem. O Geogebra poderá ser utilizado, especialmente a movimentação do controle deslizante, para que os alunos vejam o acréscimo de figuras e que à medida que se acrescenta um quadradinho à esquerda do primeiro, acrescenta-se também um abaixo e, portanto, o acréscimo é um múltiplo de 2.

Dialética da Institucionalização – O professor organizará todas as informações apresentadas pelos estudantes e abordará erros e acertos. Ele deverá tirar possíveis dúvidas e se algum aluno precisar de mais explicações, esse deve ser o momento de serem feitas. Esse problema requer principalmente capacidade de interpretação, raciocínio e poderá também ser resolvido a partir do conceito de PA. Segundo Almouloud (2007, p.40), "depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos".

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Inicialmente, construímos um quadrado com o comando "Polígono Regular" na Barra de Ferramentas. Determinaremos esse quadrado pelos pontos "(0,0)", "(1,0)". Criamos os vetores u=(-1,0) e v=(0,-1) de forma que esse quadrado possa ser transladado para a esquerda e para baixo.

Figura 12 – Construção do primeiro polígono da sequência e dos vetores “u” e “v”



Fonte: Os autores.

Depois disso, criamos um controle deslizante “n” com valores máximo e mínimo 1 e 50, respectivamente e incremento 1 e, em seguida, translada-se o polígono 1 através dos vetores “u” e “v”, utilizando os comandos “L_1=Sequência(Transladar(pol1, u*i), i, 1,n)” e “L_2=Sequência(Transladar(pol1, v*i), i, 1, n-1)”. Depois de escondermos os rótulos e os pontos e colorirmos o polígono de verde, teremos a imagem representada na figura 11, para n =30.

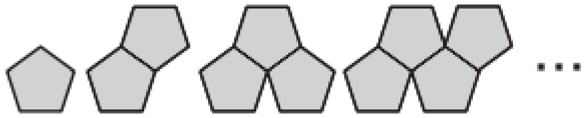
1.1.3 Situação Didática Olímpica 3

Conhecimentos Prévios: Perímetro, Progressão Aritmética.

Problema Olímpico (Prova OBMEP 2017 – 1ª fase – Nível 2 – questão 7)

Com pentágonos regulares com 1 cm de lado, formamos uma sequência de polígonos como na figura. O perímetro do primeiro polígono é 5 cm, o perímetro segundo é 8 cm, e assim por diante. Quantos pentágonos são necessários para formar um polígono com perímetro igual a 1736 cm?

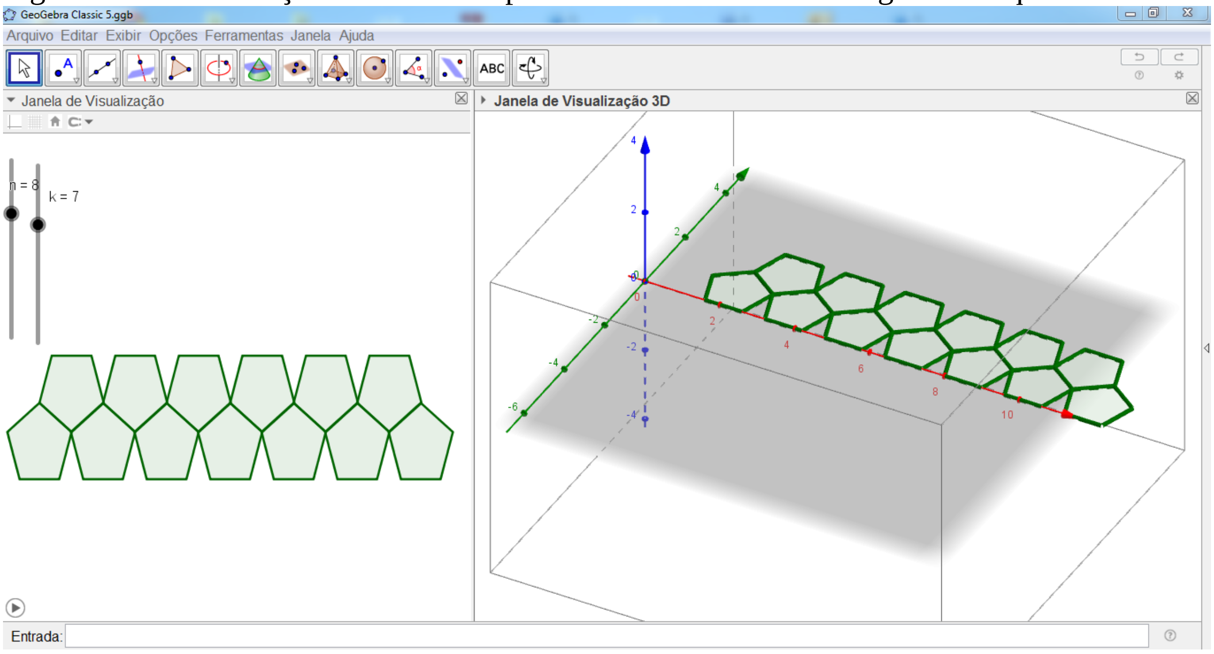
A) 570 cm B) 572 cm C) 574 cm D) 576 cm E) 578 cm



Dialética da Ação – De acordo com Almouloud (2007, p. 38), "essa fase é essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações do *milieu*". Alves, Dias e Lima (2018, p. 135) explicam que "nesse momento preliminar, devem ser estimuladas a formulação de conjecturas intuitivas, apoiadas e mobilizadas a partir da visualização e sem o controle total do professor". Sendo assim, esperamos que o aluno analise os dados do problema visando identificar pormenores que o conduza à elucidação do problema. Eles poderão perceber que a cada nova figura, está sendo acrescentado um pentágono, sendo que esse pentágono acrescentado tem um lado justaposto a um lado da figura anterior.

Logo, esperamos que percebam que se um dos lados dos novos pentágonos coincidirá com um lado da figura anterior, o perímetro da nova figura não poderá ser o dobro do perímetro da figura anterior. A construção das figuras da sequência pode ser visualizada e analisada no Geogebra, através da movimentação do controle deslizante. Podemos visualizar, por exemplo, a 13ª figura da sequência na figura 13.

Figura 13 – Visualização 2D/3D correspondente à décima terceira figura da sequência

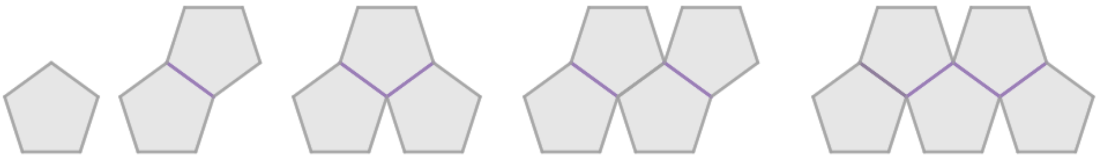


Fonte: Os autores.

Dialética da Formulação – Nessa etapa, os alunos passarão a conjecturar e testar hipóteses, visando encontrar a solução do problema. Eles poderão compartilhar suas ideias com os colegas a fim de chegar a um senso comum. Logo, poderão ver que o perímetro do primeiro pentágono é 5 cm, já que cada lado mede 1 cm.

Na segunda figura, formada por dois pentágonos, dois lados não deverão ser somados, já que eles não farão parte do perímetro. Assim, serão acrescentados apenas 3 cm ao perímetro da primeira figura: 5 cm + 3 cm = 8 cm. Para descobrir o perímetro da terceira figura, da mesma forma, não deverão ser somados os lados justapostos e, assim, serão somados apenas 3 cm ao perímetro da segunda figura 8 cm + 3 cm = 11 cm. O mesmo raciocínio deverá ser aplicado para calcular o perímetro da quarta figura: 11 cm + 3 cm = 14 cm. Logo, o aluno deverá concluir que isso ocorrerá para todas as figuras dessa sequência. Na figura 14, temos os segmentos justapostos das 5 primeiras figuras, o que pode ser melhor observado quando utiliza-se o software Geogebra.

Figura 14 – Representação dos segmentos justapostos das figuras 2 a 5 da sequência



Fonte: Os autores.

Como o aluno deverá já ter estudado o conteúdo progressão aritmética, ele perceberá que o perímetro de cada figura está sendo acrescido em 3 cm, portanto, sendo a razão da progressão aritmética, cujo primeiro termo é o perímetro da primeira figura, que é igual a 5 cm.

Assim, poderão identificar a sequência $a_n = (5, 8, 11, 14, ...)$, onde $n \in N$, refere-se à posição da figura na sequência. Logo, a razão dos elementos dessa PA é $r = 3$. Almouloud (2007, p. 38) afirma que "essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas". Então, o aprendiz deverá encontrar um modelo que estabeleça o perímetro de qualquer figura da sequência.

A partir da fórmula do termo geral de uma PA, o aluno concluirá que para encontrar a solução do problema utiliza-se: $a_n= a_1+ (n-1) \cdot r$, onde a_n é o perímetro do enésimo termo da sequência, a_1 é o primeiro termo, n é a posição da figura na sequência e r, a razão da PA. Como o problema requer saber quantos pentágonos terá a figura que tem perímetro igual a 1736 cm, os alunos deverão encontrar o valor de "n", utilizando o modelo matemático a seguir.

$$1736 = 5 + (n - 1) \cdot 3$$
$$1736 = 5 + 3n - 3$$
$$1736 = 3n + 2$$
$$3n = 1734$$
$$n= 578.$$

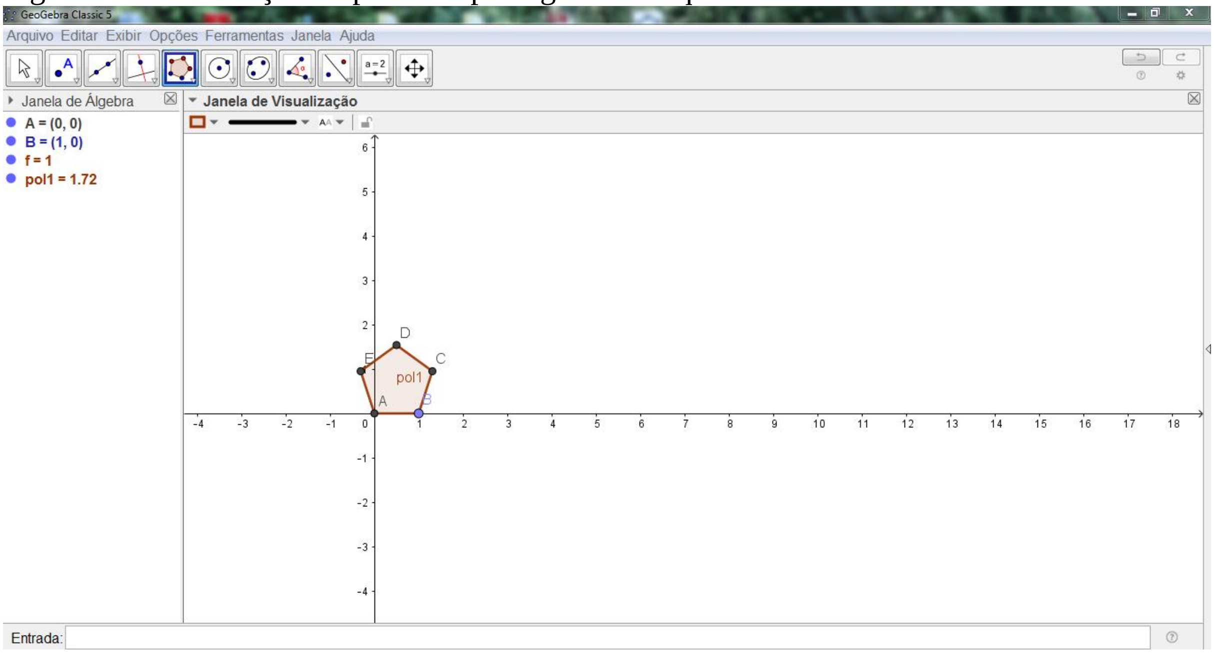
Dialética da Validação – Essa é a etapa que o aluno deverá validar o modelo matemático obtido na etapa anterior. Almouloud (2007, p. 39) enfatiza que os colegas poderão discordar do modelo criado. Caso isso ocorra, deverão ocorrer discussões a fim de chegar a uma conclusão. O *software* Geogebra pode ser utilizado como meio para analisar cada figura da sequência, a fim de que seja explicitada para colegas e professor a construção da ideia da Sequência Numérica.

Dialética da Institucionalização – Nessa fase, o professor finalizará a resolução do problema, destacando os pontos principais e tirando possíveis dúvidas. Se algum estudante continuar sem entender algum conceito, como o de progressão aritmética, o professor buscará retomar e sanar todas as dúvidas. Então, segundo Almouloud (2007, p. 40), "uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe”.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Para essa construção, utilizamos, inicialmente, o comando “Polígono Regular” na barra de ferramentas. Escolhemos dois pontos para os vértices e em seguida a quantidade de vértices, que deve ser 5. Aqui escolhemos os pontos (0,0) e (0,1) como vértices do primeiro polígono a ser construído em cada figura.

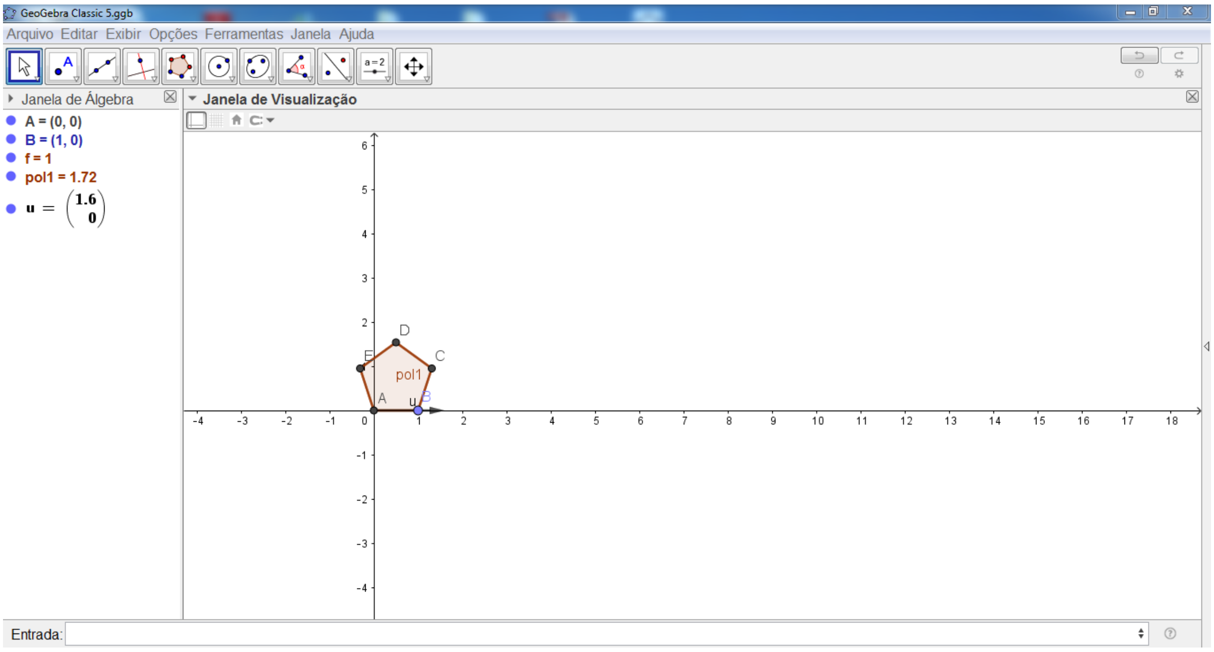
Figura 15 – Construção do primeiro pentágono da sequência



Fonte: Os autores.

Agora, criamos o vetor “u”, digitando na Caixa de Entrada o comando “u=(1.6,0)” e obteremos a figura seguinte.

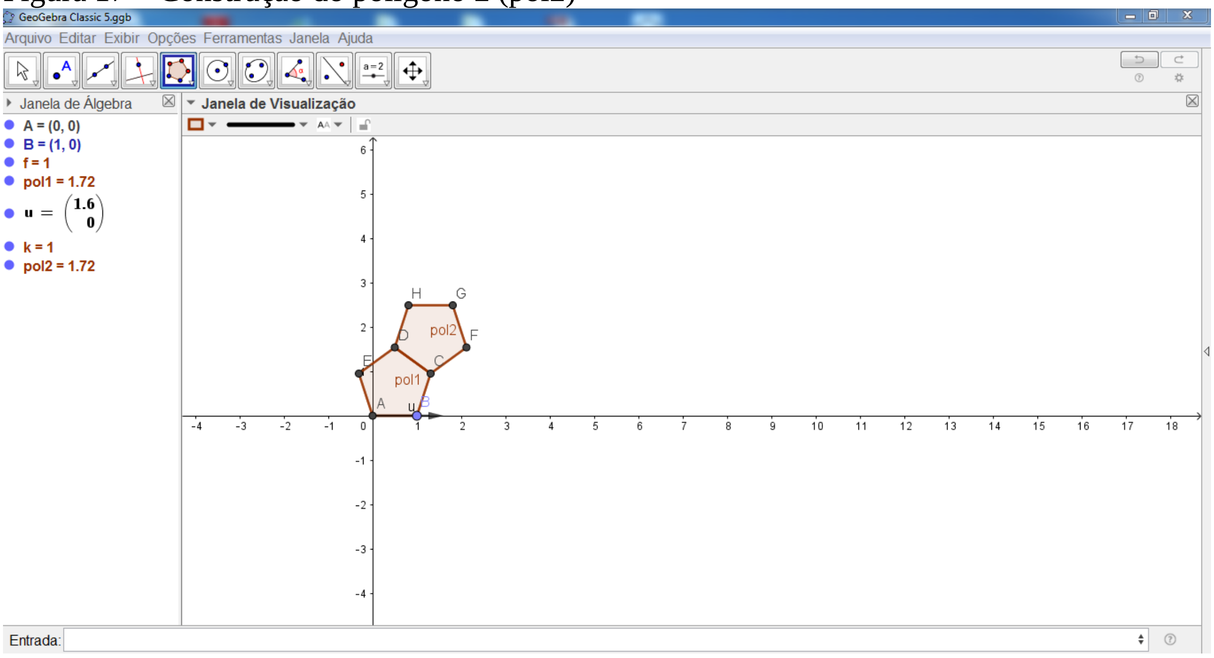
Figura 16 – Construção do vetor “u”



Fonte: Os autores.

Em seguida, criaremos novamente um pentágono regular, utilizando o comando “Pentágono Regular” da barra de ferramentas, tendo como vértices os pontos “D” e “C” do polígono construído anteriormente. Teremos a figura a 17.

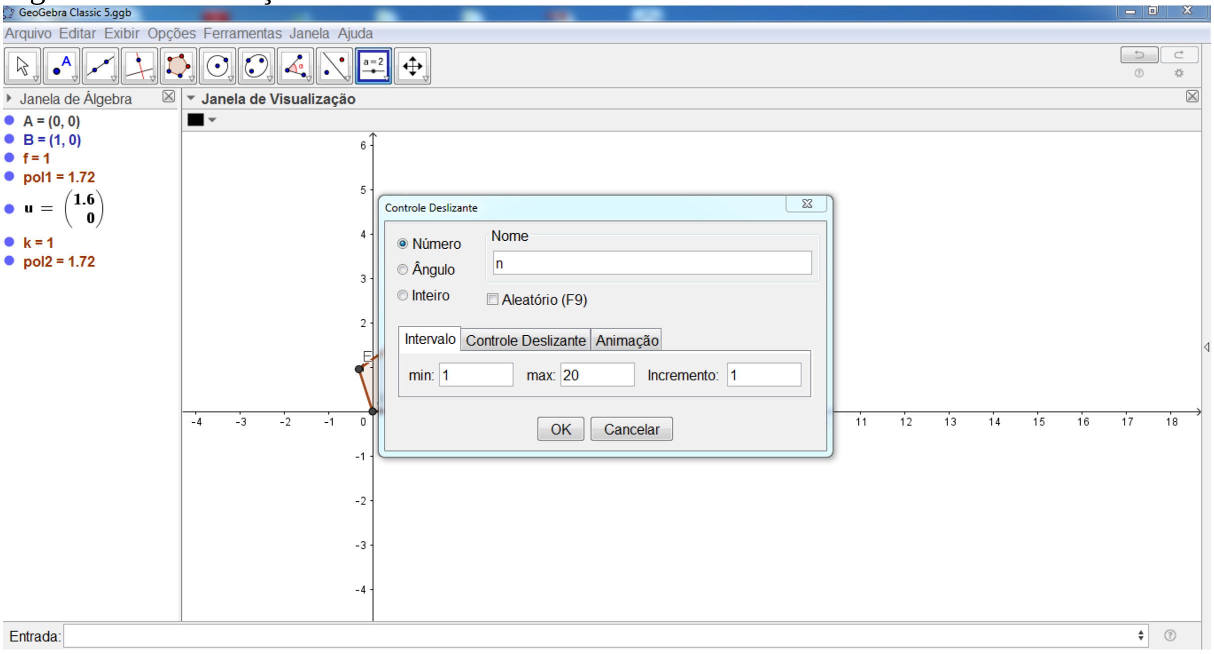
Figura 17 – Construção do polígono 2 (pol2)



Fonte: Os autores.

Agora, criaremos os controles deslizantes que denominaremos por “n” e “k”, cada um com valor inicial 1, valor final 20 e incremento igual a 1. Para isso, selecionamos o comando "Controle Deslizante" no penúltimo ícone da barra de ferramentas e delimitamos esses valores. Temos um exemplo, na figura 17 da construção do controle deslizante "n".

Figura 18 – Construção do controle deslizante "n"

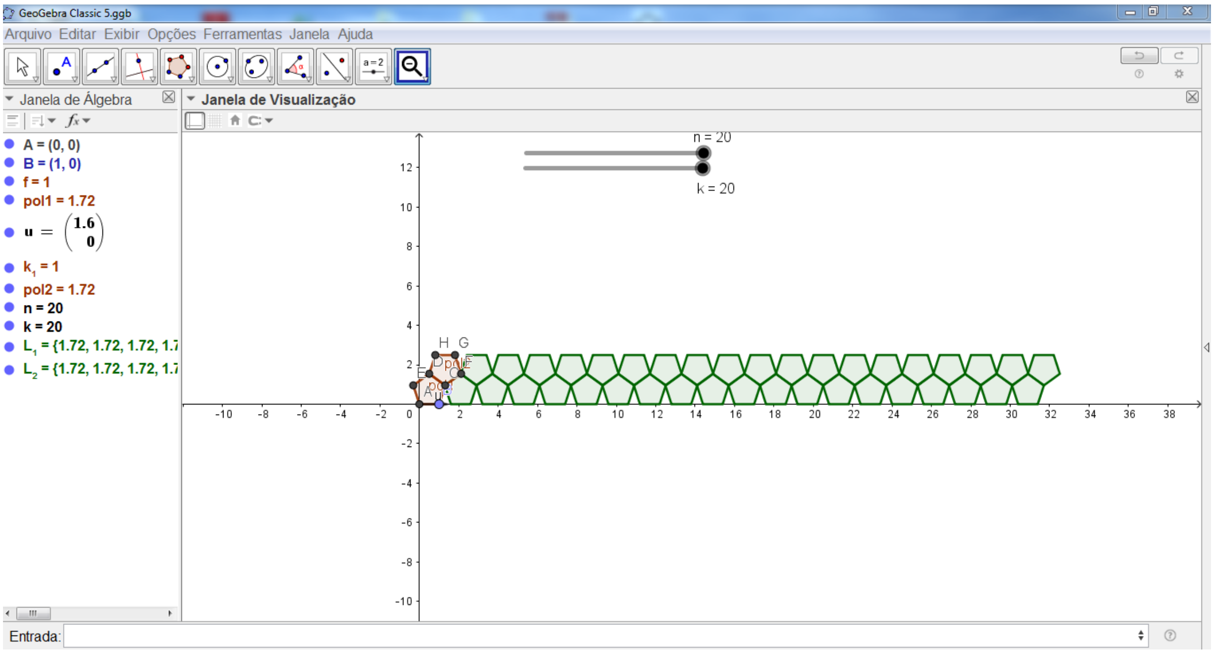


Fonte: Os autores.

Depois dessa etapa, construiremos uma sequência de pentágonos, a partir do polígono 1, utilizando na Caixa de Entrada o comando "L_1=Sequência(Transladar(pol1, Vetor(i u)), i, 1, n - 1)" e uma sequência de polígonos a partir do polígono 2, com o comando "L_2= Sequência(Transladar(pol2, Vetor(i u)), i, 1, k - 1)". Para visualizarmos o acréscimo de pentágonos na figura utilizaremos a função "Animar" do controle deslizante.

Animamos um controle deslizante "n" e em seguida o controle deslizante "k" para que as figuras apareçam de forma alternada (uma de cada lista de figuras). Dessa forma, se n= 2 e k = 2, por exemplo, estamos tratando da figura 4 da sequência, já que o número associado ao controle deslizante n, corresponde à quantidade de pentágonos da lista 1 e o número associado ao controle deslizante k, corresponde à quantidade de pentágonos da lista 2.

Figura 19 – Construção da 40ª figura da sequência



Fonte: Os autores.

Para uma aparência melhor da imagem, excluiremos os rótulos dos elementos presentes, assim como o eixo, clicando em “Editar” e em seguida “Selecionar Tudo” e “Exibir/Esconder Rótulos”. Pode ser que alguns rótulos continuem nas figuras, então clicando sobre cada um com o botão direito e depois em “Exibir Rótulo”.

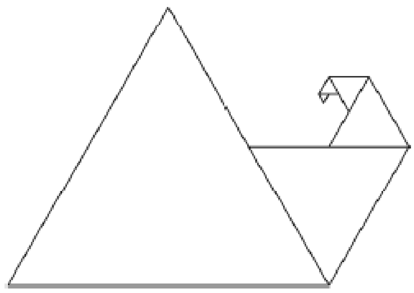
Poderemos também aproximar mais a figura, reduzir ou mover a janela de visualização, através dos comandos, respectivamente, “Ampliar”, “Reduzir” e “Mover Janela de Visualização” no último ícone da barra de ferramentas. Também podemos escolher as cores que quisermos para as figuras. Lembramos que os valores finais estabelecidos para o controle deslizante são definidos a critério do professor e que essa construção possibilita o desenvolvimento do pensamento intuitivo do estudante, facilitando a compreensão do problema. Na figura 13, apresentamos a 13ª figura da sequência.

1.1.4 Situação Didática Olímpica 4

Conhecimentos Prévios – Perímetro, Progressão Geométrica, Mínimo Múltiplo Comum.

Problema Olímpico (Banco de Questões – 2010- p. 33, Nível 1 - questão 219)

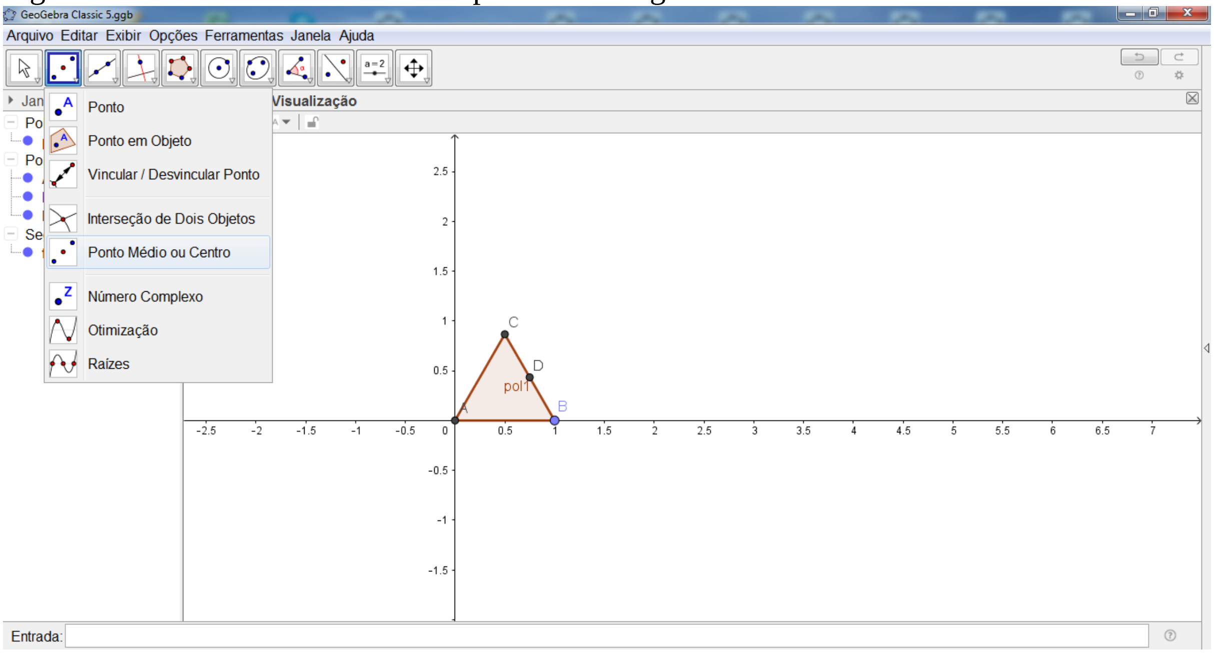
Colando seis triângulos - Construa uma figura com seis triângulos equiláteros adjacentes, o primeiro com lado de comprimento 1 cm e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triângulo anterior, como indicado na figura dada. Qual é o perímetro dessa figura?



Dialética da Ação – A partir da figura dada e do enunciado do problema, o aluno começará a analisá-lo e a fazer suas conjecturas iniciais e, assim, poderá identificar que há uma sequência de triângulos em que o lado do segundo triângulo é a metade do lado do primeiro, o lado do terceiro triângulo é a metade do lado do segundo e assim consecutivamente até o último triângulo da sequência. É o momento de tomada de decisões, no qual o aluno deverá buscar o melhor caminho para chegar à solução do problema.

Nem sempre o aprendiz fará a melhor escolha desse caminho, podendo ter dificuldades no início. Almouloud (2007, p. 37) afirma que essa etapa “deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*”. Nessa etapa, o professor poderá instigar os alunos a construir os triângulos no Geogebra e a partir das construções esperamos que o aluno identifique mais facilmente, que para calcular o perímetro, deverão ser somadas as medidas dos treze segmentos que compõem esse perímetro. A figura 20 apresenta uma possível construção inicial do aprendiz.

Figura 20 – Ponto médio do lado do primeiro triângulo



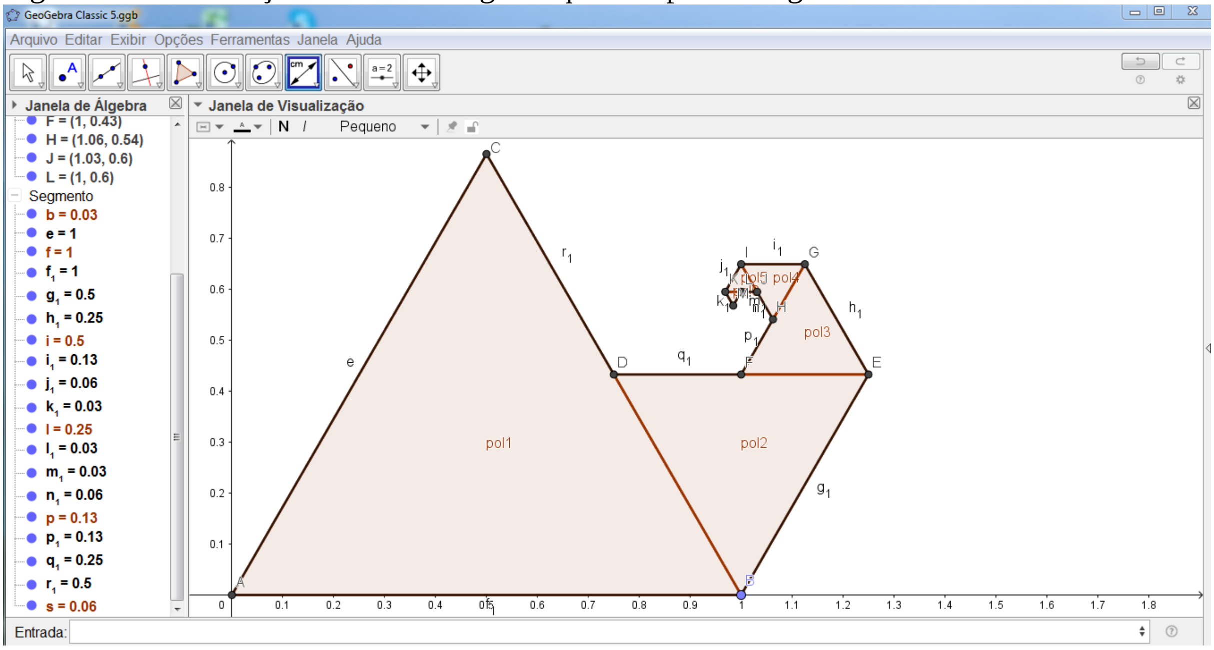
Fonte: Os autores.

Dialética da Formulação – Nessa etapa, o aluno começará a interagir com o problema em busca de um conhecimento mais formal. Assim, o professor pode mostrar as figuras seguintes da sequência, a fim de que as ideias sobre o problema fiquem mais claras, ou ainda, pode instigar os alunos a construírem, no Geogebra, cada um dos triângulos. Assim podem observar que o a medida do perímetro a ser descoberto é a soma das medidas dos segmentos abaixo:

- 2 segmentos de 1 cm e 1 segmento de 1/2 cm no pol 1;
- 1 segmento de 1/2 cm e 1 segmento de 1/4 cm no pol 2;
- 1 segmento de 1/4 cm e 1 segmento de 1/8 cm no pol 3;
- 1 segmento de 1/8 cm e 1 segmento de 1/16 cm no pol 4;
- 1 segmento de 1/16 cm e 1 segmento de 1/32 cm no pol 5 e
- 2 segmentos de 1/32 cm no pol 6.

Esses segmentos e suas medidas (em números decimais) podem ser observados nas janelas de Visualização e de Álgebra da figura 21. O termo “pol” citado acima refere-se a polígono no Geogebra, neste caso, o triângulo.

Figura 21 – Construção dos seis triângulos que compõem a figura com "rótulos"



Fonte: Os autores.

Assim, observando a figura e fazendo a soma das medidas do seu "contorno", o que equivale ao perímetro procurado, esperamos que o aluno chegue à soma 1 + 1 + 1/2 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/32 + 1/32 + 1/32, que resulta em:

2 + (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 +1/16 +1/32).

Um dos caminhos pra resolução desse problema é utilizar o conceito de Progressão Geométrica. Conhecendo esse conceito, o aluno verá que a soma "1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 +1/16 +1/32" é uma progressão geométrica de razão q = 1/2 e primeiro termo a_1= 1/2. De acordo com Almouloud (2007, p. 38) "essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas". Assim, como o aluno já deve ter o conhecimento prévio da soma dos termos da Progressão Geométrica, deverá perceber que para calcular a soma "1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 +1/16 +1/32" basta utilizar a fórmula para a soma dos termos de uma PG finita que é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

com n ϵ N, onde S_n é a soma dos n primeiros termos da sequência. Observando que a sequência tem 6 termos, devem calcular a soma dos termos, a partir da seguinte igualdade:

$$S_6 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}$$

Essa igualdade resulta em:

$$S_6 = \frac{\left(\frac{1}{64} - 1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}$$

Donde, terão:

$$S_6 = \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}}$$

E, finalmente:

$$S_6 = \frac{126}{64} = \frac{63}{32}$$

Lembrando que os alunos devem somar esse valor a 2 para resultar no perímetro da figura, o resultado será :

$$2 + \frac{63}{32}$$

$$= \frac{127}{32}\ \text{cm}$$

Dialética da Validação – Nessa etapa o aprendiz deverá validar o modelo matemático obtido na etapa anterior e submeter esse modelo ao julgamento de um interlocutor, segundo Almouloud (2007, p. 39). Então, ele poderá utilizar o Geogebra para comparar os resultados obtidos, argumentar e mostrar que seu modelo realmente é válido. Utilizando os comandos "Ampliar", "Reduzir" e "Distância, Comprimento ou Perímetro" do Geogebra, o aluno poderá confrontar o resultado encontrado com a soma dos segmentos no Geogebra.

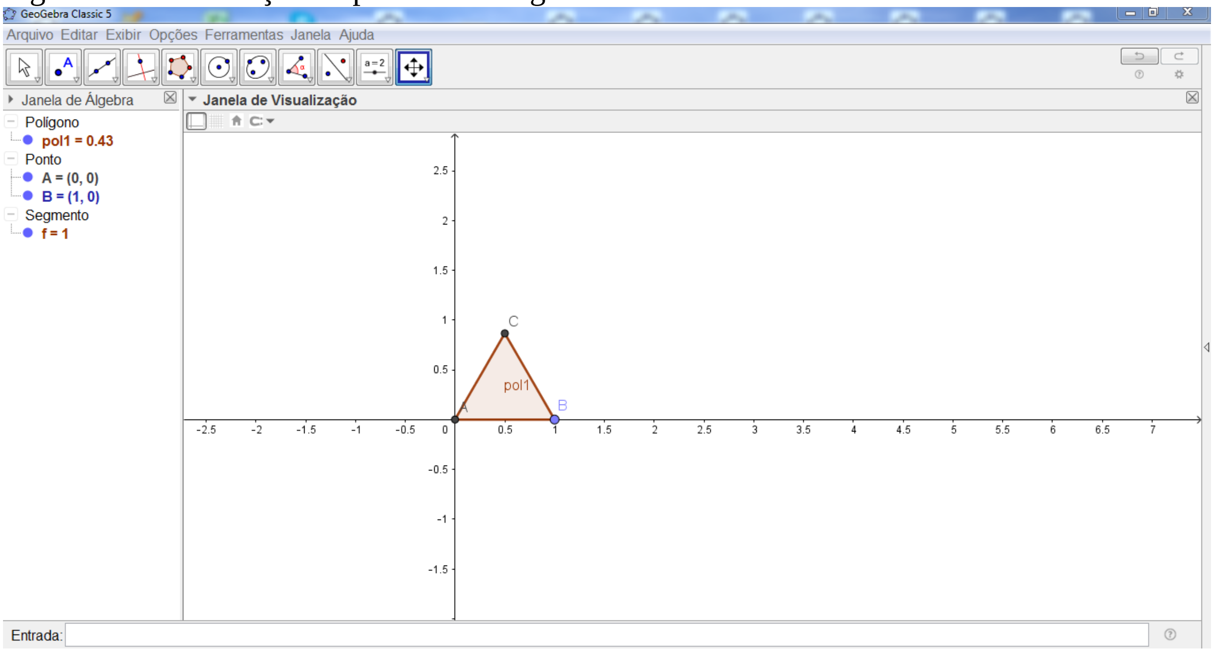
Dialética da Institucionalização – Nessa fase, o professor retoma o controle da situação e faz um fechamento das ideias. É o momento onde o professor tira possíveis dúvidas que os alunos provavelmente tenham em relação a frações. Almouloud (2007, p. 40) afirma que nessa fase "o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber".

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Inicialmente, utilizaremos o comando "Polígono Regular" e determinaremos dois pontos com distância de 1 unidade, que representará o lado do triângulo equilátero.

Utilizaremos (0,0) e (1,0) que serão vértices do triângulo equilátero que queremos construir e para gerar o triângulo pretendido, digitamos “3” para a quantidade de vértices. Na figura 22 temos a imagem obtida depois de ajustada ampliando e movendo a janela de visualização do Geogebra, a fim de que ficasse em um tamanho maior. As opções “Ampliar” e “Mover Janela de Visualização” estão no último ícone da Barra de Ferramentas do Geogebra.

Figura 22 – Construção do primeiro triângulo

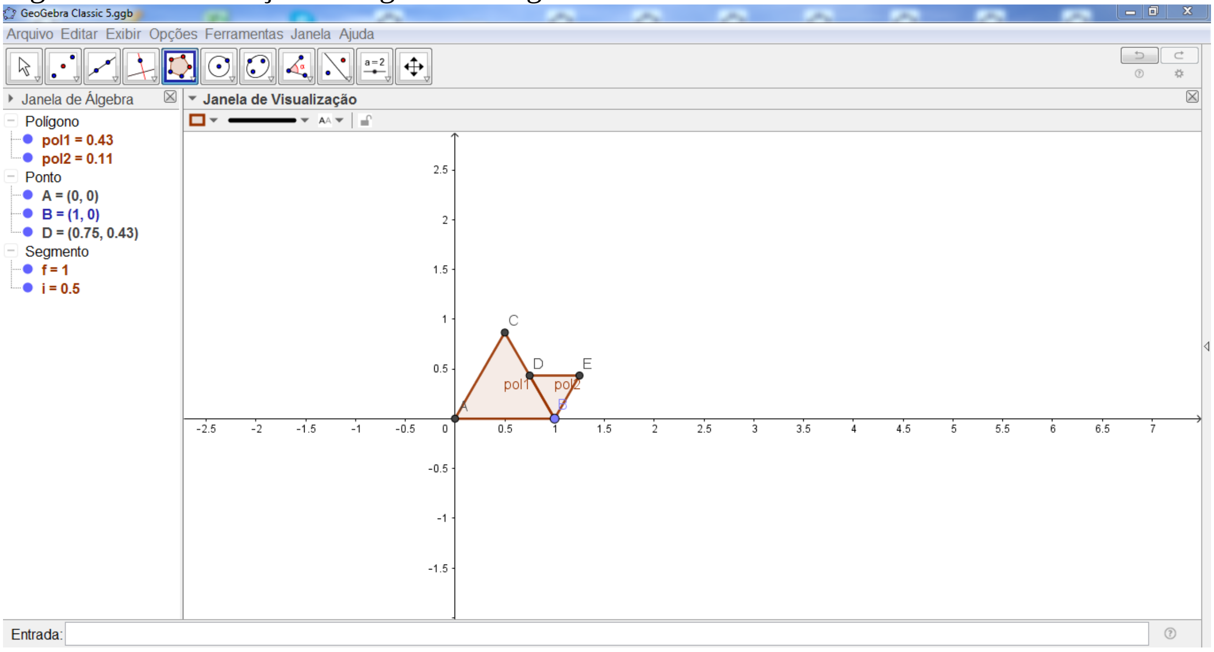


Fonte: Os autores.

Em seguida, iremos determinar o ponto médio de um dos lados do triângulo para dar início à construção da sequência de triângulos. Assim, na Barra de Ferramentas, clicaremos em “Ponto Médio ou Centro”, determinaremos o segmento BC e calculamos seu ponto médio (Ver figura 23).

Construiremos o próximo triângulo com o lado medindo a metade do lado do polígono 1. Assim, na barra de ferramentas, comando “Polígono Regular” e determinamos os pontos D e B, nessa ordem, como vértices do novo triângulo e 3 como quantidade de vértices.

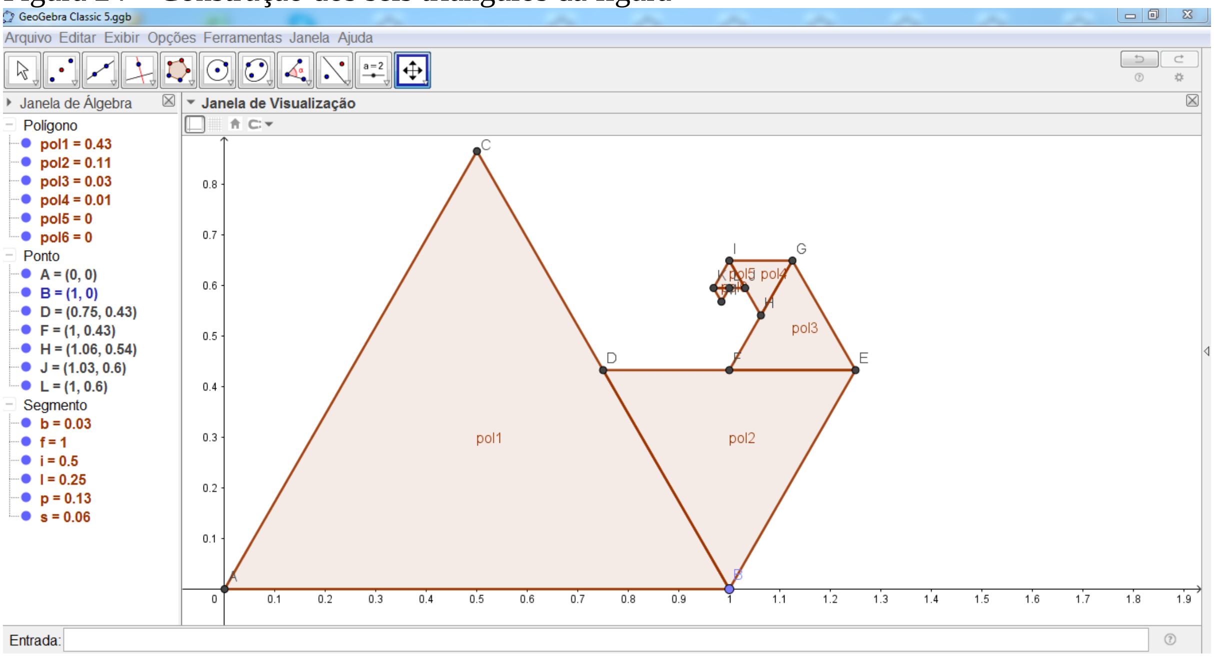
Figura 23 – Construção do segundo triângulo



Fonte: Os autores.

Da mesma forma, prosseguiremos para construir o terceiro triângulo. Determinamos o ponto médio do segmento DE, os vértices do novo triângulo e finalizamos a construção, utilizando os mesmos comandos até completar 6 triângulos, como podemos ver na figura 24. Para melhorar a visualização, podemos ampliar a figura utilizando a opção “Ampliar” no último ícone da Barra de Ferramentas.

Figura 24 – Construção dos seis triângulos da figura



Fonte: Os autores.

Depois, para visualizar a medida de cada segmento que compõe o contorno da figura utilizaremos, na Caixa de Entrada, os comandos “Segmento(C, A)”, “Segmento(A, B)”, “Segmento(B, E)”, “Segmento(E, G)”, “Segmento(G, I)”, “Segmento(I, K)”, “Segmento(K, M)”, “Segmento(M, L)”, “Segmento(L, J)”, “Segmento(J, H)”, “Segmento(H, F)”, “Segmento(F, D)”, “Segmento(D, C)” e poderemos observar suas medidas na Janela de Álgebra (Ver figura 21).

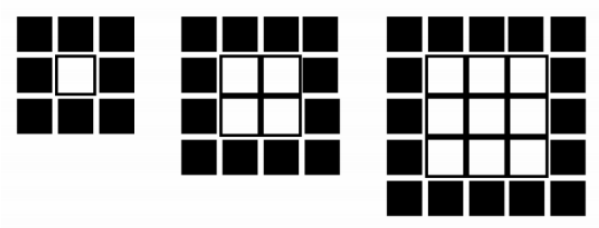
1.1.5 Situação Didática Olímpica 5

Conhecimentos Prévios: Sequências Numéricas, Perímetro.

Problema Olímpico (Banco de Questões 2006, 4ª lista – p.23 - Nível 1 – questão 8)

Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos; e assim sucessivamente, como indica a figura. Se numa sequência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?

A) 55 B) 65 C) 75 D) 85 E) 100



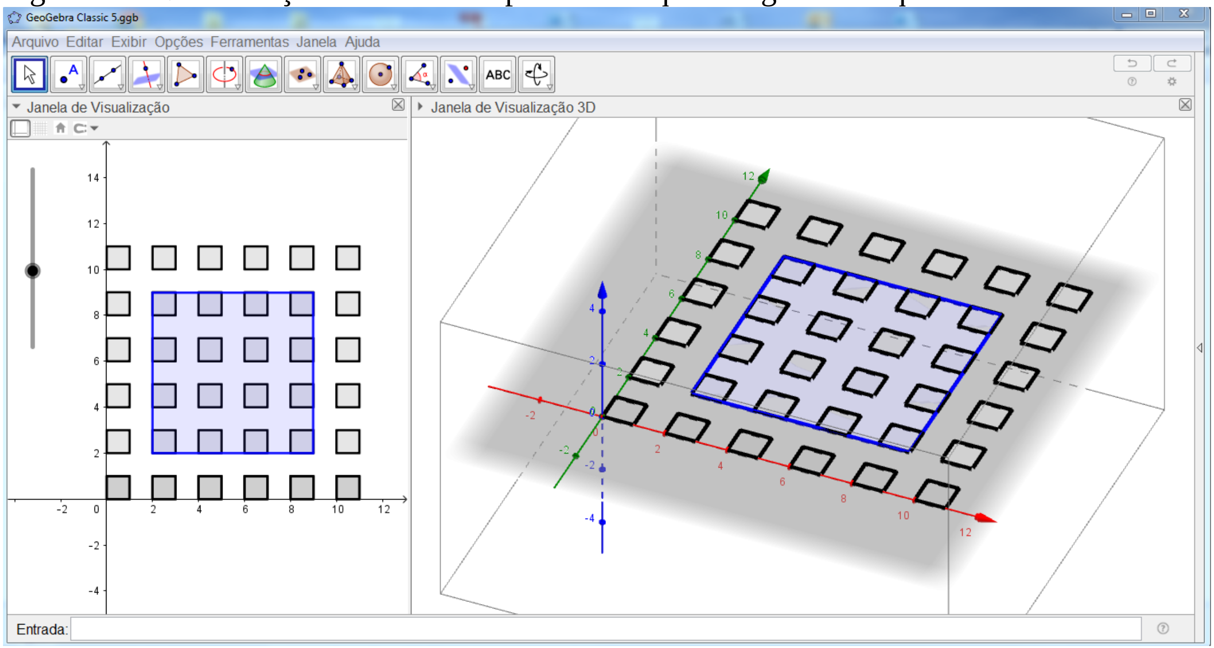
Dialética da Ação – Nessa etapa, caracterizada pela tomada de decisões e pelas primeiras impressões que o aluno tem do problema, espera-se que ele busque relações entre as três figuras apresentadas, já que seu objetivo é encontrar a quantidade de azulejos brancos. Sendo assim, analisando o problema, é possível verificar que na primeira figura há apenas um azulejo branco, na segunda, quatro, e na terceira, nove azulejos brancos. Ele também pode observar que os azulejos pretos estão distribuídos em torno dos brancos, assim há uma relação entre a quantidade de azulejos.

Pais (2002, p. 72) afirma que é nessa fase que “o aluno realiza procedimentos mais imediatos para a resolução de um problema, resultando na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica”. É o momento que o aprendiz busca as primeiras informações acerca do problema.

Dialética da Formulação – Nessa fase há troca de informações do aluno com os outros, de forma mais intensa segundo Almouloud (2007). Dessa forma, o aluno começará a observar a quantidade de azulejos pretos em cada figura para saber quantas figuras serão necessárias para a sequência ter 80 azulejos pretos. Na primeira figura é fácil perceber que há 3 + 3 + 1 + 1 = 8 azulejos pretos, na segunda figura há 4 + 4 + 2 + 2 = 12 azulejos pretos, na terceira figura há 5 + 5 + 3 + 3 = 16 azulejos pretos e, seguindo esse raciocínio, será possível deduzir que na quarta figura serão 6 + 6 + 4 + 4 = 20 azulejos pretos e na quinta figura 7 + 7 + 5 + 5 = 24 azulejos pretos.

Mesmo sem colorir as figuras, eles poderão perceber que na sequência, os quadradinhos pretos compõem as "bordas" das imagens. Então, basta observar a sua quantidade à medida que o número do controle deslizante aumenta ou diminui. Na figura 25, é possível notar que a quantidade de quadradinhos correspondentes aos quadradinhos pretos (os externos ao quadrado azul) é 6 + 6 + 4 + 4 = 20, que equivale à quarta figura dessa sequência.

Figura 25 – Visualização 2D/3D correspondente à quarta figura da sequência



Fonte: Os autores.

Utilizando os comandos do Geogebra é possível acompanhar a quantidade de quadradinhos de cada figura da sequência. Nessa fase, os alunos poderão dialogar com seus colegas, a fim de tirar possíveis dúvidas e entender melhor o problema No decorrer dessa fase, o aluno somará a quantidade de azulejos pretos de cada figura (que são os quadradinhos mais externos, nas bordas, da figura), assim obterá que com 5 figuras obterá o total de 80 azulejos, pois 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 80.

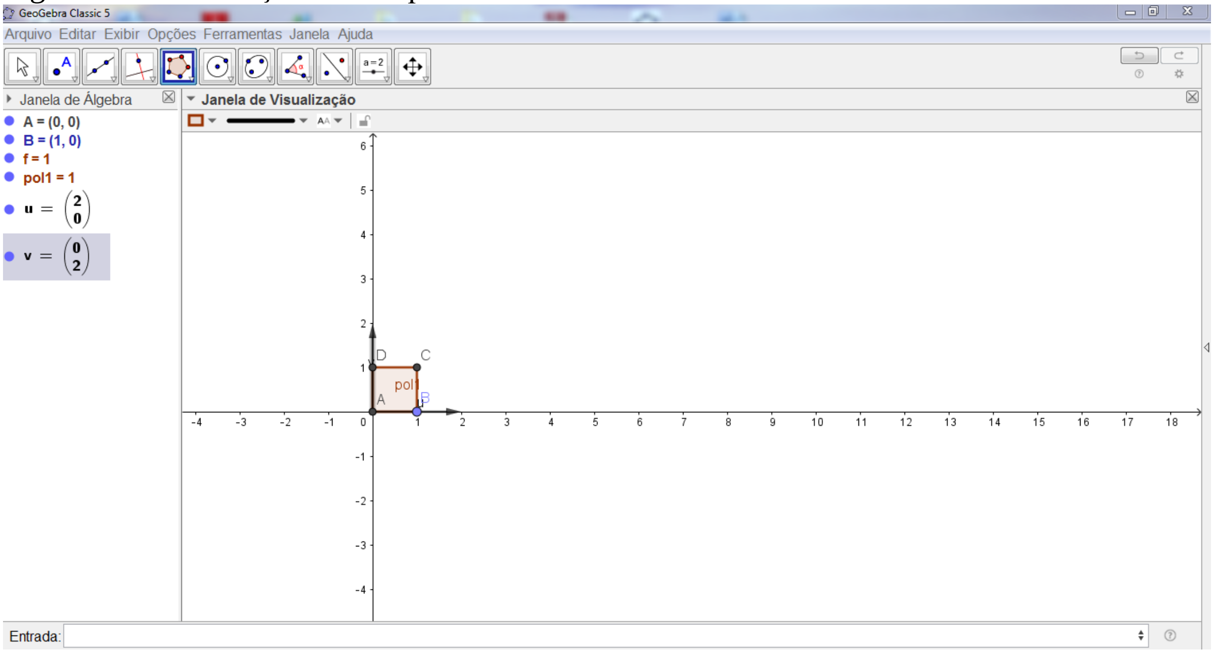
Dialética da Validação – Essa é a etapa que o aluno deve validar o modelo estabelecido para resolver o problema. Segundo Almouloud (2007, p. 40) nessa fase "o objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação". Assim, a partir das informações que já foram obtidas nas fases anteriores, o aluno irá relacioná-las e perceber que a soma de azulejos brancos das figuras 1 a 5 é a soma dos quadrados dos números naturais de 1 a 5, já que na primeira figura há, $1^2 = 1$ azulejo branco, na segunda figura há $2^2 = 4$ azulejos brancos, na terceira figura há $3^2 = 9$ azulejos branco e usando o mesmo raciocínio, na quarta figura serão $4^2 = 16$ azulejos branco e na quinta figura, $5^2 = 25$ azulejos brancos, resultando em um total de $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ azulejos brancos. Essas conclusões devem ser feitas com a mediação do professor e com a utilização do Geogebra.

Dialética da Institucionalização – Nessa etapa, o professor assume o comando da atividade e "fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber" segundo Almouloud (2007, p. 40). O docente fará um fechamento das ideias, tirando possíveis dúvidas dos alunos. Utilizando o Geogebra, ele poderá fazer uma revisão do problema, confrontando os dados obtidos pelos aprendizes com os apresentados no software. A visualização de diferentes figuras da sequência no software poderá facilitar a compreensão do problema.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Para a construção no Geogebra, inicialmente criamos um quadrado clicando em dois pontos (aqui clicamos no ponto (0,0) e (1,0)) e, em seguida, utilizando o comando "Polígono Regular", determinamos quatro lados. Também criamos os vetores "u=(2,0)" e "v=(0,2)", digitando esses comandos na Caixa de Entrada.

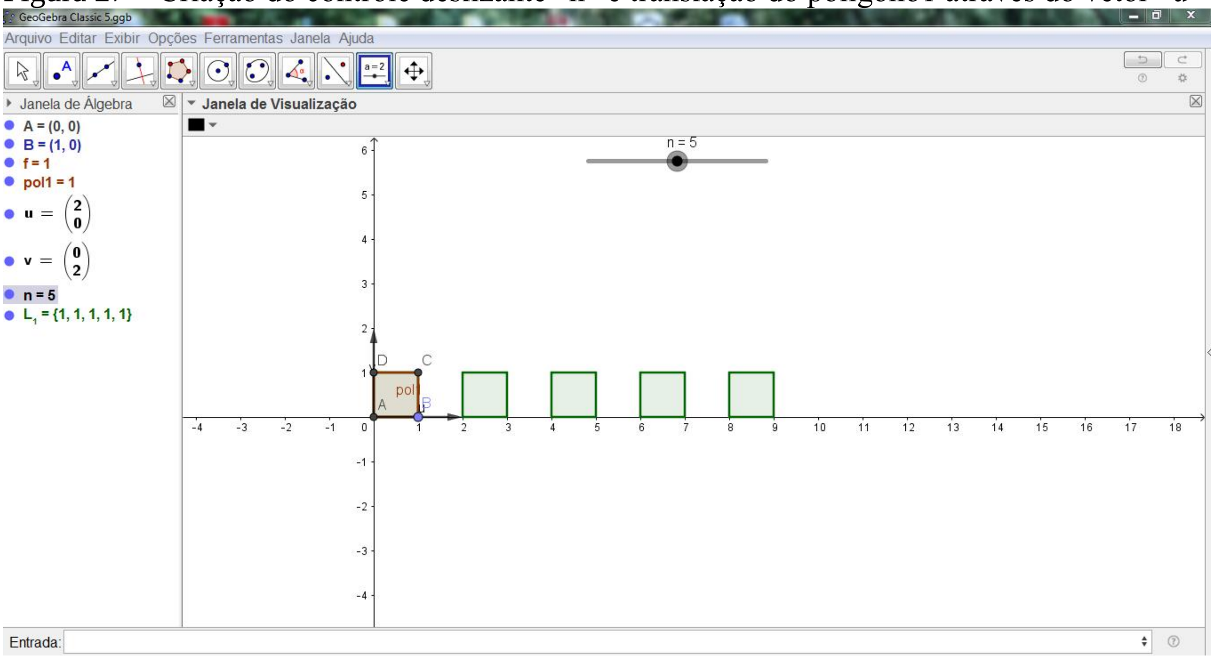
Figura 26 – Construção de um quadrado e dos vetores “u” e “v”



Fonte: Os autores.

Em seguida, criamos um controle deslizante “n”, com valores mínimo e máximo iguais a 3 e 7, respectivamente e incremento igual a 1. Como começamos com n=3, quantidade de quadrados da base da primeira figura, o número “n” será 2 unidades a mais que a ordem da figura. Depois, na Caixa de Entrada, digitamos “L_1=Sequência(Transladar(pol1, Vetor(u i)), i, 0, n - 1)”. Aqui, vemos a imagem quando n=5, base da terceira figura.

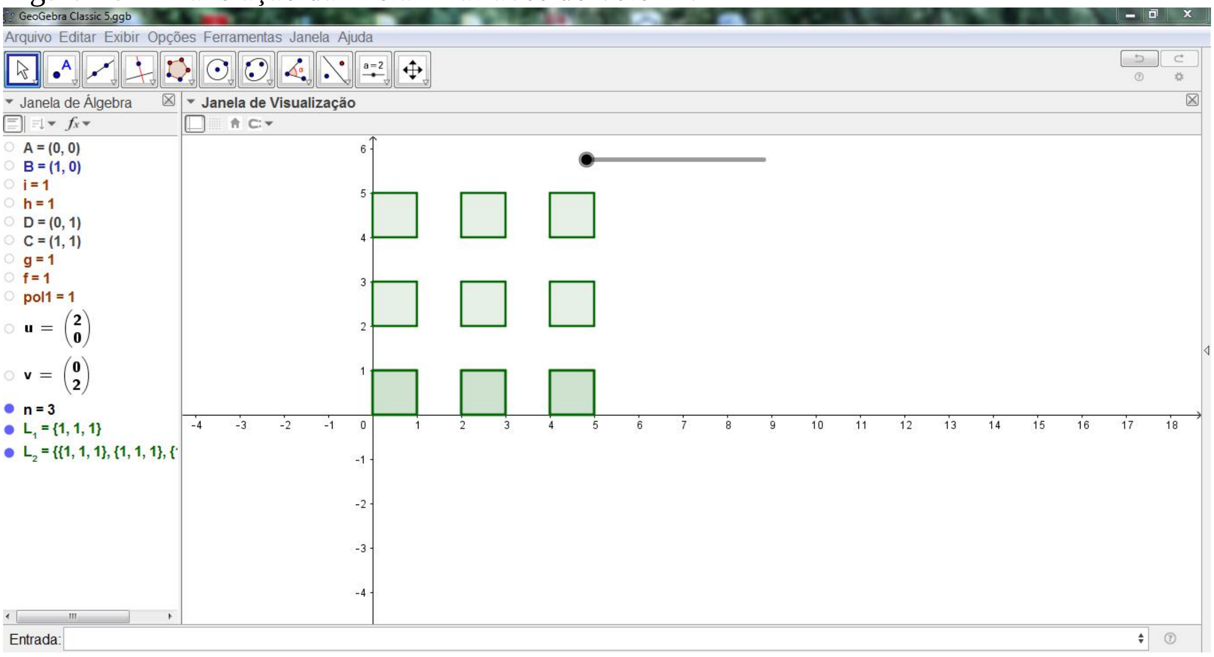
Figura 27 – Criação do controle deslizante “n” e translação do polígono1 através do vetor “u”



Fonte: Os autores.

Logo em seguida, digitamos “L_2= Sequência(Transladar(L_1, Vetor(v i)), i, 0, n - 1)” na Caixa de Entrada. Escondemos os rótulos, clicando em “Editar”, “Selecionar Tudo” e “Exibir/Esconder rótulos” ou clicando em cada objeto (os pontos destacados, o polígono 1 e os vetores) com o botão direito do mouse e ativando “Exibir rótulo”. Abaixo está representada a primeira figura da sequência.

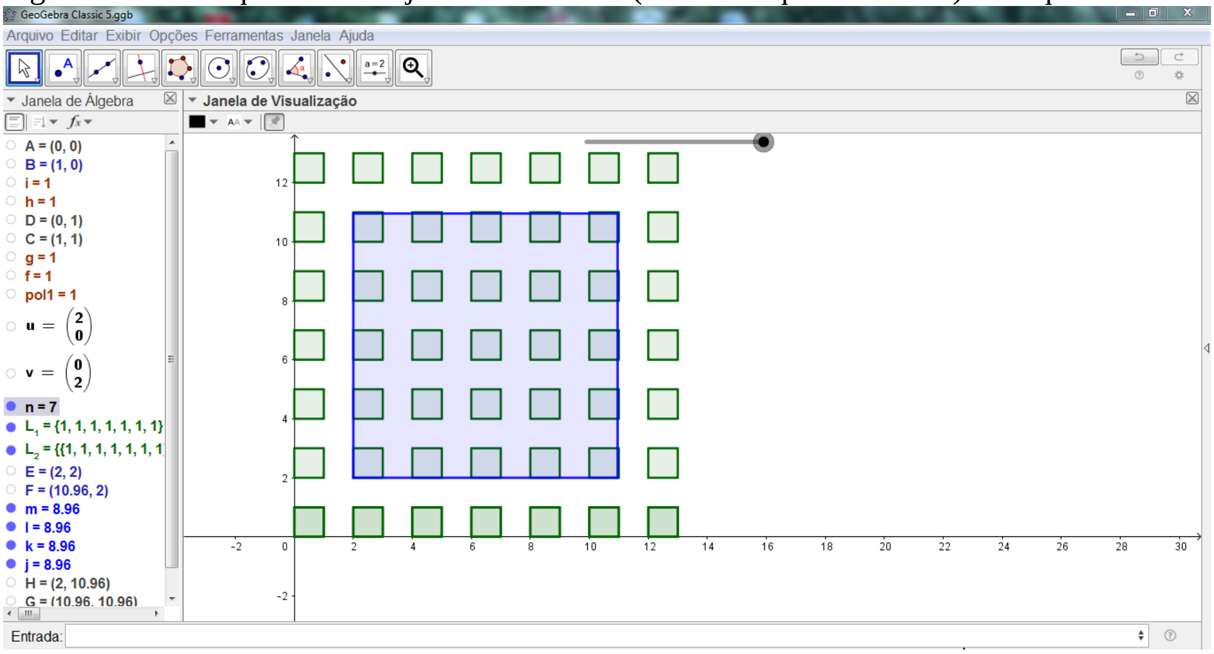
Figura 28 – Translação da “lista 1” através do vetor “v”



Fonte: Os autores.

Movimentando o controle deslizante é fácil verificar quantos quadradinhos representam os quadradinhos brancos em cada figura. Podemos evidenciar isso criando um quadrado (utilizando o comando “Polígono Regular”) em torno desses quadradinhos. Podemos a qualquer momento, ampliar ou reduzir a construção, assim como mover a janela de visualização, utilizando os ícones “Ampliar”, “Reduzir” e “Mover a Janela de Visualização”, respectivamente, no último ícone (da esquerda para a direita) da barra de ferramentas. Na imagem abaixo podemos observar a quinta figura dessa sequência.

Figura 29 – Destaque dos azulejos de cor branca (dentro do quadrado azul) da sequência



Fonte: Os autores.

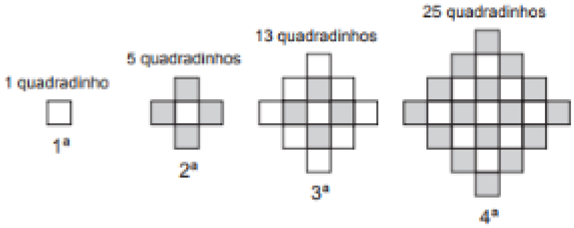
1.1.6 Situação Didática Olímpica 6

Conhecimentos Prévios: Quadrado de um número, inequação do 2º grau.

Problema Olímpico (Prova OBMEP 2009 – 1ª fase – Nível 3 – questão 16)

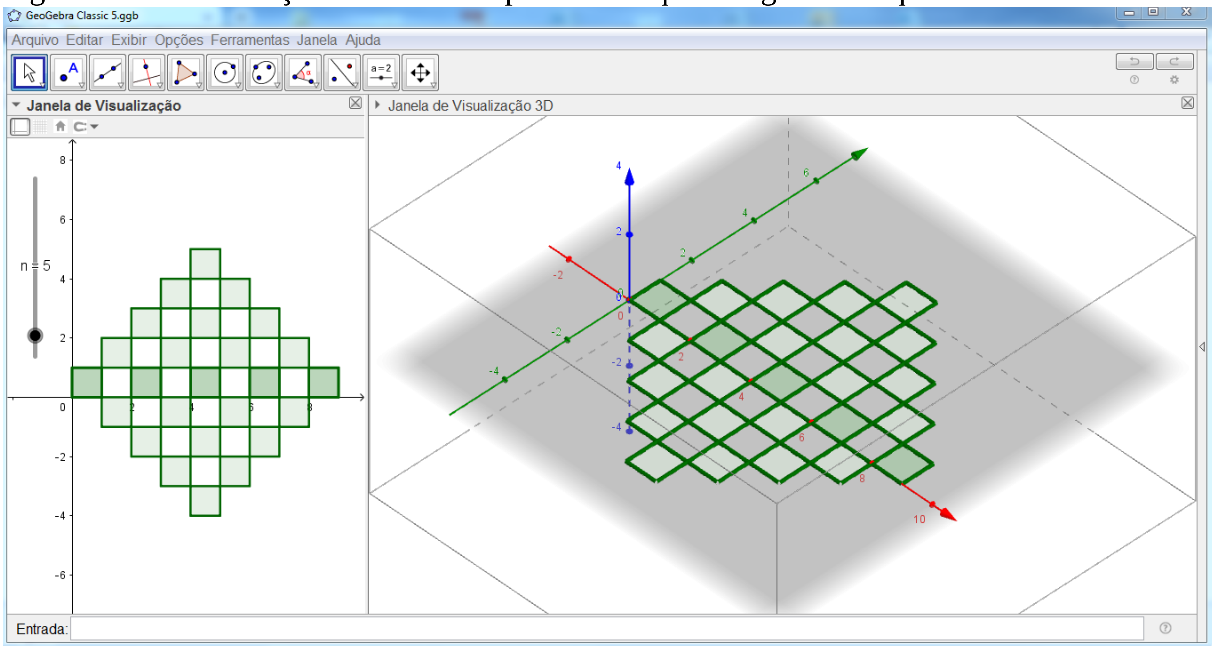
Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?

A) A 30ª B) A 31ª C) A 32ª D) A 33ª E) A 34ª



Dialética da Ação – Diante desse problema, o aluno inicialmente irá tentar descobrir algum padrão e analisando a situação poderá identificar que há quadradinhos de duas cores, se alternando, uma cor mais central e a outra mais externa. Na construção do Geogebra, em três dimensões, a figura poderá ser girada e uma representação da décima figura da sequência pode ser vista na figura 30. Lembrando que, variando o controle deslizante é possível visualizar desde a primeira.

Figura 30 – Visualização 2D/3D correspondente à quinta figura da sequência



Fonte: Os autores.

Analisando a quantidade de quadradinhos das figuras, na posição apresentada na figura 30, o professor poderá instigar os alunos a analisar cada figura separadamente a fim de que relacionem a quantidade de quadradinhos. Assim, eles obterão os resultados da tabela 1.

Tabela 1 – Quantidade de quadradinhos das cinco primeiras figuras da sequência

Figura	**Total de quadradinhos**
1ª	1
2 ª	$1 + 2 \cdot 2 = 5$
3 ª	$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$
4 ª	$3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$
5 ª	$4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 41$

Fonte: Os autores.

A partir dessas figuras e de outras que o aluno pode ver dinamicamente no Geogebra ele terá as primeiras impressões do problema.

Dialética da Formulação – Nessa etapa os alunos deverão começar a formular conjecturas, testar hipóteses e trocar informações com seus colegas e interagir mais com o meio a fim de obter um conhecimento mais formal. Assim, poderá perceber que o total de quadradinhos de cada figura é a soma do quadrado de dois números consecutivos, sendo que o maior desses números é a ordem da figura. Formalizando o resultado de suas conjecturas, esperamos que ele entenda que a quantidade de quadradinhos da figura n, será:

$$(n-1) \cdot (n-1) + n \cdot n = (n - 1)^{2} + n^{2.}$$

O questionamento do problema, no entanto, é “qual a primeira figura tem mais de 2009 quadradinhos?”. Ou seja, “em qual figura, a soma da quantidade de quadradinhos supera ou é igual a 2009?”, que traduzindo para a Matemática pode ser escrita como $n^2 + (n - 1)^2 \geq 2009$. É possível que o aluno não saiba resolver o problema, mas através da troca de informações, esperamos que ele apresente um raciocínio parecido com o que mostraremos.

Sabemos que $n^2 \geq (n - 1)^2$ para $n \geq 1$. Então da desigualdade $n^2 + (n - 1)^2 \geq 2009$, decorre que $n^2 + n^2 > 2009$, ou seja, $2n^2 > 2009$. Então, $n^2 > 1004{,}5$. Consideraremos $n^2 > 1005$, pois estamos considerando números inteiros positivos (que representa a quantidade de quadradinhos). Assim, $n > 31$. Se $n = 32$, teremos que $n^2 + (n - 1)^2 = 32^2 + 31^2 = 1024 + 961 = 1985$, que não é igual ou superior a 2009. Mas, se $n = 33$, teremos $33^2 + 32^2 = 1089 + 1024 = 2113$, que satisfaz a pergunta do problema. Logo, o aluno deverá concluir que a figura está na 33ª posição da sequência.

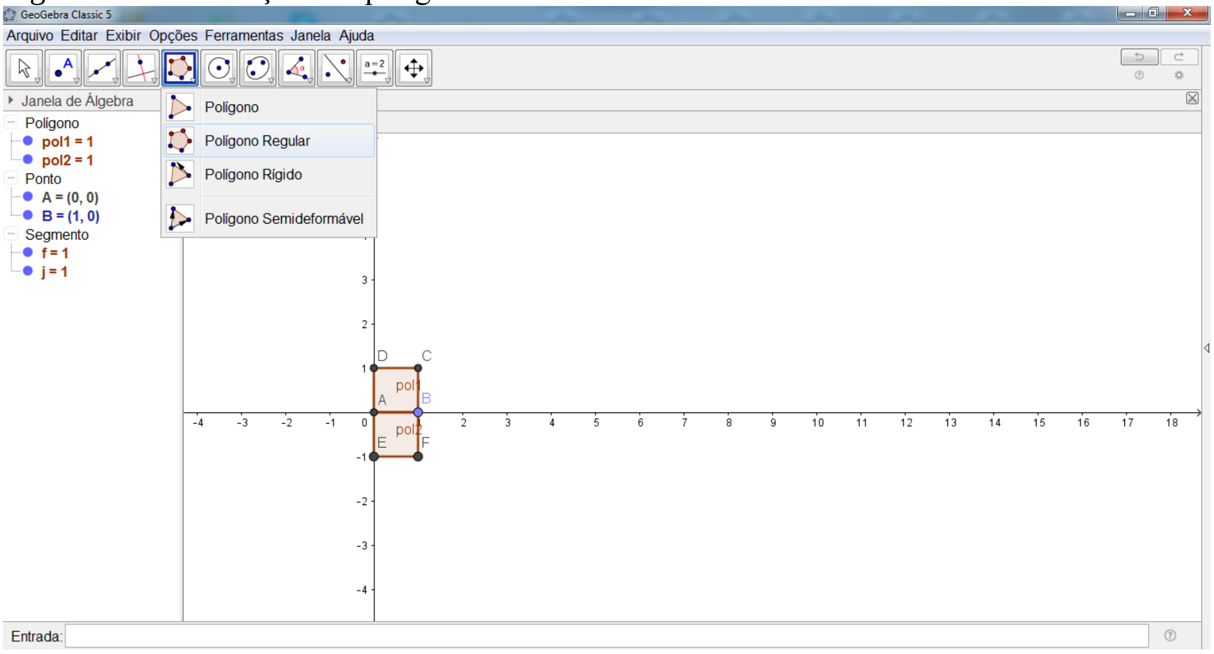
Dialética da Validação – O aluno deverá, nessa etapa, validar o resultado encontrado na etapa anterior. O Geogebra poderá corroborar para isso. Muitas dúvidas poderão surgir e segundo Almouloud (2007, p. 39), o emissor deverá justificar a veracidade do seu modelo, comparando, por exemplo, dados o resultado obtido através do modelo matemático com os dados obtidos a partir da construção no Geogebra. A 33ª figura da sequência está apresentada na Figura 35, onde também pode ser observado o número de quadradinhos na Janela de Álgebra, para qualquer figura da sequência.

Dialética da Institucionalização – O professor retomará a condução das atividades e fará o fechamento das ideias. Poderão surgir dúvidas acerca de alguns passos, como na desigualdade apresentada, o que deve ser esclarecido pelo professor. Almouloud (2007, p. 40) declara que “depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-se assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos”.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

A construção se iniciará através da construção de dois quadrados utilizando o comando “Polígono Regular” na Barra de Ferramentas. Utilizaremos os pontos (0,0) e (1,0) para o primeiro quadrado e em seguida, (1,0) e (0,0) de forma que tenham um lado comum.

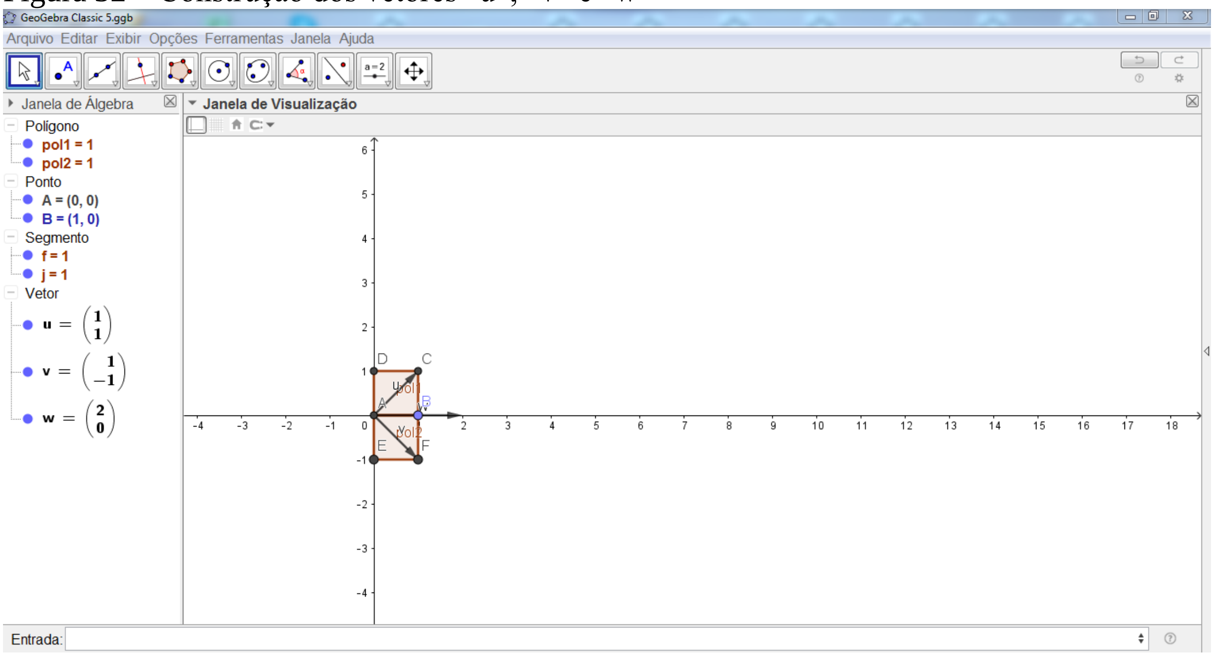
Figura 31 – Construção dos polígonos “1” e “2”



Fonte: Os autores.

Depois disso, digitaremos “u= (1,1)” e, em seguida “v= (1, -1)” e “w= (2,0)” para criar os vetores “u”, “v” e “w”, que podemos ver na figura 32.

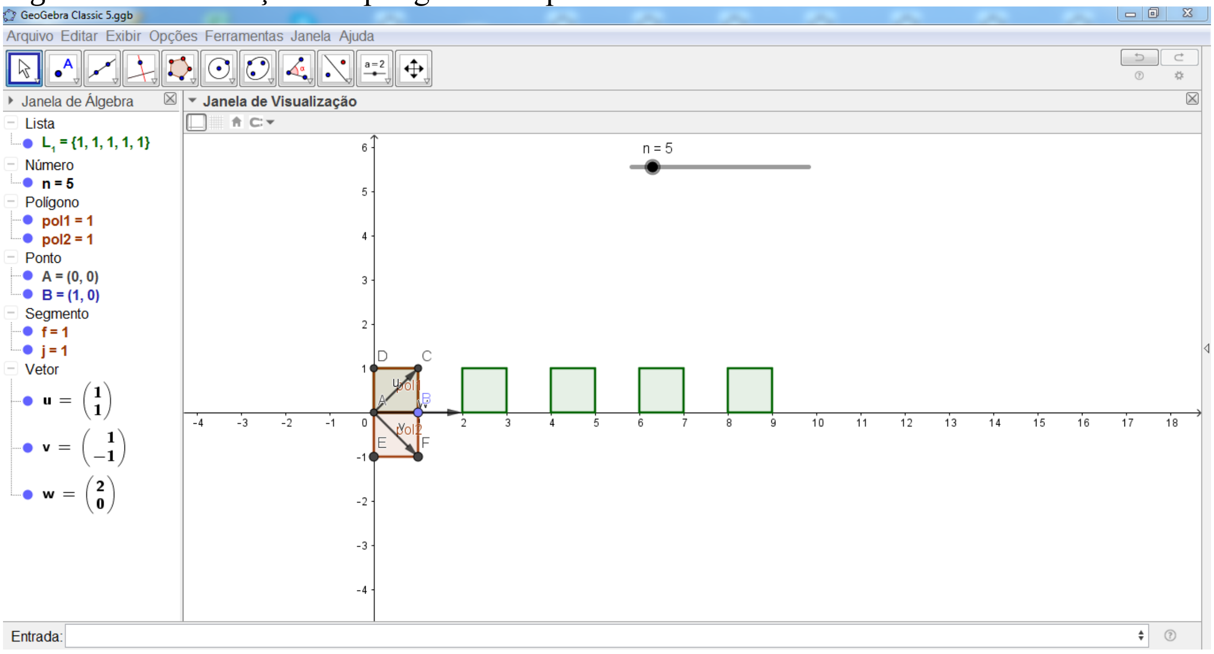
Figura 32 – Construção dos vetores “u”, “v” e “w”



Fonte: Os autores.

Agora, criaremos um controle deslizante "n" com valores mínimo e máximo iguais a 1 e 35 respectivamente e incremento igual a 1. Logo depois, criamos uma lista de quadrados a partir do comando "L_1=Sequência(Transladar(pol1, Vetor(w*i)), i, 0, n - 1)". Teremos a seguinte imagem quando n=5.

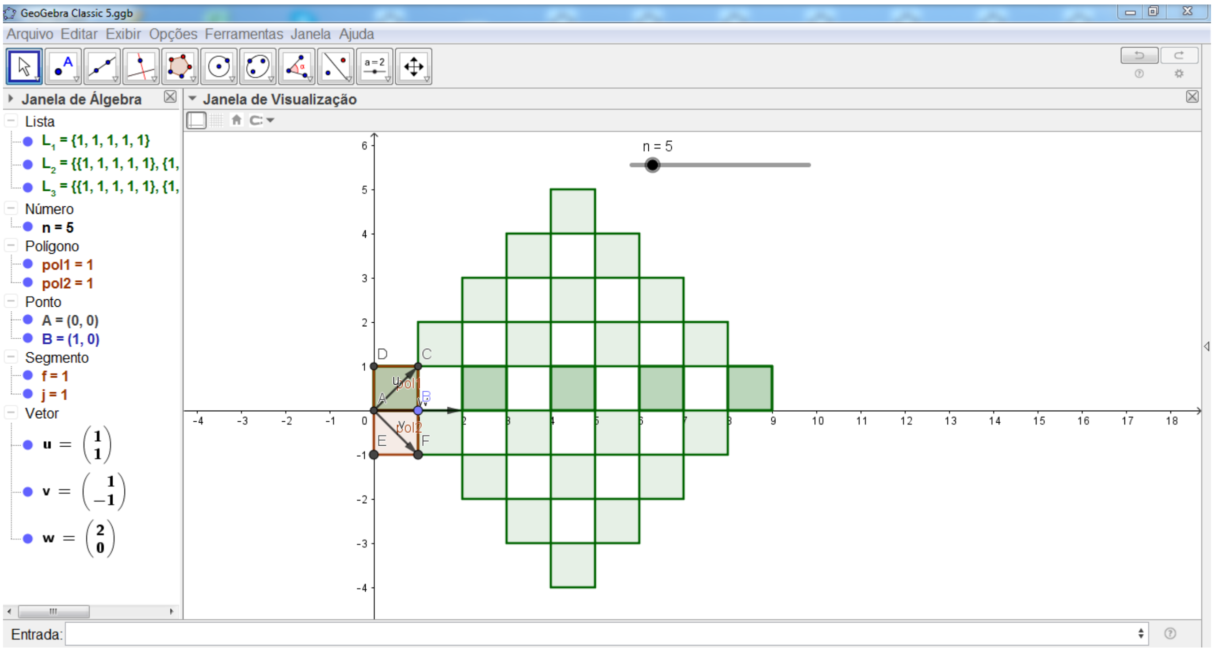
Figura 33 - Translação do "polígono 1" a partir do vetor "w"



Fonte: Os autores.

Em seguida, utilizamos os comandos "L_2=Sequência(Transladar(ParteDaLista(L_1, 1, n - i), Vetor(u*i)), i, 0, n - 1)" e "L_3=Sequência(Transladar(ParteDaLista(L_1, 1, n - i), Vetor(v*i)), i, 0, n - 1)" para obtermos as translações da lista 1, através dos vetores "u" e "v", respectivamente. A seguir, temos a 5ª figura da sequência. Movimentando o controle deslizante, obteremos todas as figuras dessa sequência.

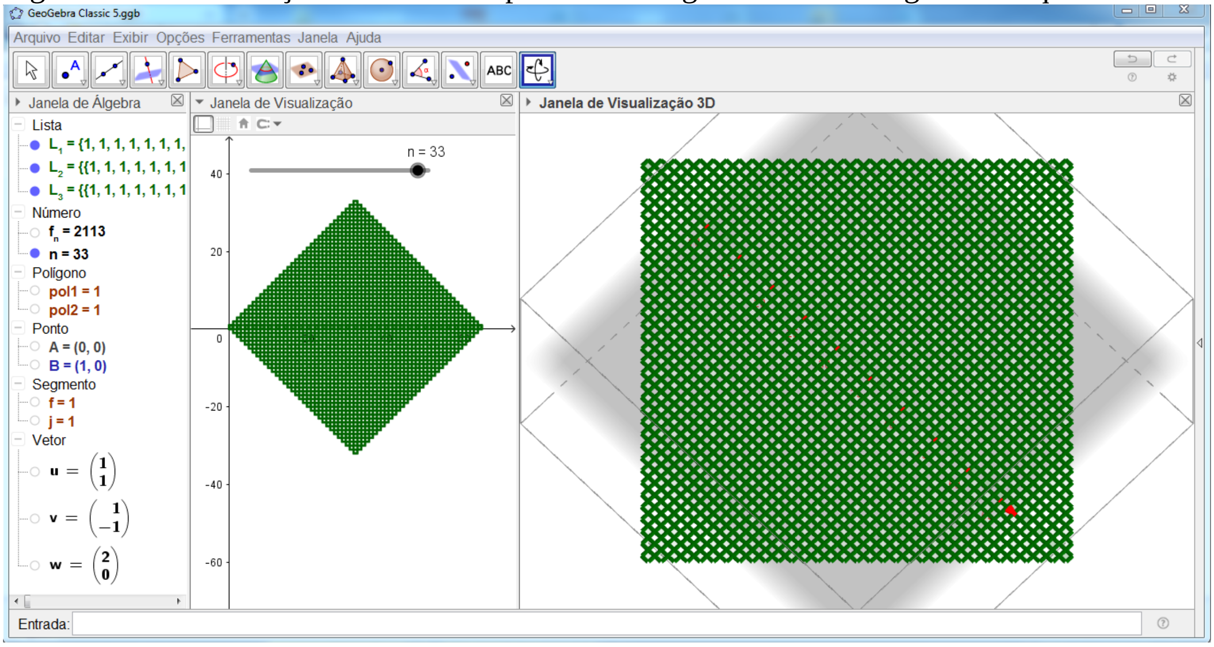
Figura 34 – Translação de parte da "lista 1" através do vetor "u" e de parte da "lista 1" através do vetor "v"



Fonte: Os autores.

Agora iremos ocultar os vetores, os pontos que estão destacados, bem como o polígono 2, clicando o botão direito do mouse em cada um deles e ativando a opção "Exibir Objeto" ou clicando em "Editar", Selecionar Tudo" e em seguida "Exibir/Esconder rótulos". Também desativaremos os rótulos "pol1" e "pol2" utilizando uma dessas opções. Além disso, iremos escrever a função que determina a soma de quadradinhos brancos e cinzas, digitando na Caixa de Entrada o comando "f_n= n^2 +(n-1)^2". Movimentando o controle deslizante, veremos a quantidade de quadradinhos na Janela de Álgebra. É importante perceber que as cores representadas no Geogebra não correspondem às cores da sequência. A figura está representando apenas a quantidade de quadradinhos. A seguir, temos a 33ª figura da sequência.

Figura 35 – Visualização 2D/3D correspondente à trigésima terceira figura da sequência



Fonte: Os autores

1.1.7 Situação Didática Olímpica 7

Conhecimentos Prévios – Progressão Geométrica

Problema Olímpico (Banco de Questões 2007 – p. 99 - Lista 1 - Nível 3 – questão 4)

O caminho da pulga – Para percorrer um caminho reto de 10 metros de comprimento, uma pulga usa a seguinte estratégia: a cada dia ela percorre a metade do caminho que faltava no dia anterior. Portanto, no primeiro dia ela percorre 5 metros, no segundo 2,5 metros e assim por diante (o tamanho da pulga é desprezível). Quantos metros ela terá percorrido ao final do sétimo dia? E do décimo?

Dialética da Ação – Inicialmente, o aprendiz analisa os dados que o problema oferece a fim de buscar o melhor caminho para chegar à solução do problema. Segundo Almouloud (2007, p.38), "essa fase é essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações sobre o *milieu*". Assim, ele poderá observar que no primeiro dia a formiga percorrerá 5 = 10/2 metros, ou seja, 10 · 1/2 metros. No segundo dia, ela percorrerá 2,5 = 10/4 metros, o que resulta em 10 ·1/4 metros. Esse é um dos caminhos que o aluno pode encontrar para buscar a solução do problema.

Nessa fase, o estudante está conhecendo o problema, portanto suas decisões ao longo do processo poderão ser ajustadas. Almouloud (2007, p.37) destaca que o aluno aprende por adaptação e durante o processo poderá criar um novo modelo matemático ou melhorar o seu.

Dialética da Formulação – De acordo com Almouloud (2007, p. 38), "essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas". A partir dos dados que ele já tem, o estudante deverá notar que no terceiro pulo, a formiga se deslocará 1,25=10/8 metros, no quarto pulo será 0,625 = 10/16 metros. Caso o aluno não entenda, o professor deve intervir para que o aluno desenvolva suas ideias. Assim, uma das possibilidades é que o estudante desenvolva a ideia de que o intervalo percorrido pela formiga depois de n dias será de:

$\left(\frac{10}{2}+\frac{10}{4}+\frac{10}{8}+\cdots+\frac{10}{n}\right)$, n ϵ N, que poderá ser escrito como:

$$10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$, ou ainda,

$$10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Como o aluno já deve conhecer o conceito de progressão geométrica e da soma dos seus termos, ele deverá perceber que $\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$ se trata de uma sequência, nesse caso uma progressão geométrica, onde o primeiro termo "a_1" é 1/2 e a razão "q" também é 1/2. Logo a soma dos termos dessa sequência será:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Então, para descobrir quantos metros a formiga percorrerá em 7 e 10 dias, basta substituir "n" por esses números. Então, que a_1= 1/2 e q = 1/2, para n = 7, teremos:

$$S_7 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

Que resulta em:

$$S_7 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{128} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

Donde segue que:

$$S_7 = \frac{\left(\frac{1}{256} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

E terão o seguinte resultado:

$$S_7 = \frac{254}{256} = \frac{127}{128}$$

Logo, depois de 7 pulos a formiga terá percorrido:

$$10 \cdot \frac{127}{128} \text{ m}$$

Que corresponde a aproximadamente 9,92 m, como pode ser observado na figura 34, quando n=7. Procederão da mesma forma, para o décimo dia, e terão:

$$S_{10} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

Donde segue que:

$$S_{10} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

E terão:

$$S_{10} = \frac{\left(\frac{1}{2048} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

O resultado será igual a:

$$S_{10} = \frac{2046}{2048} = \frac{1023}{1024}$$

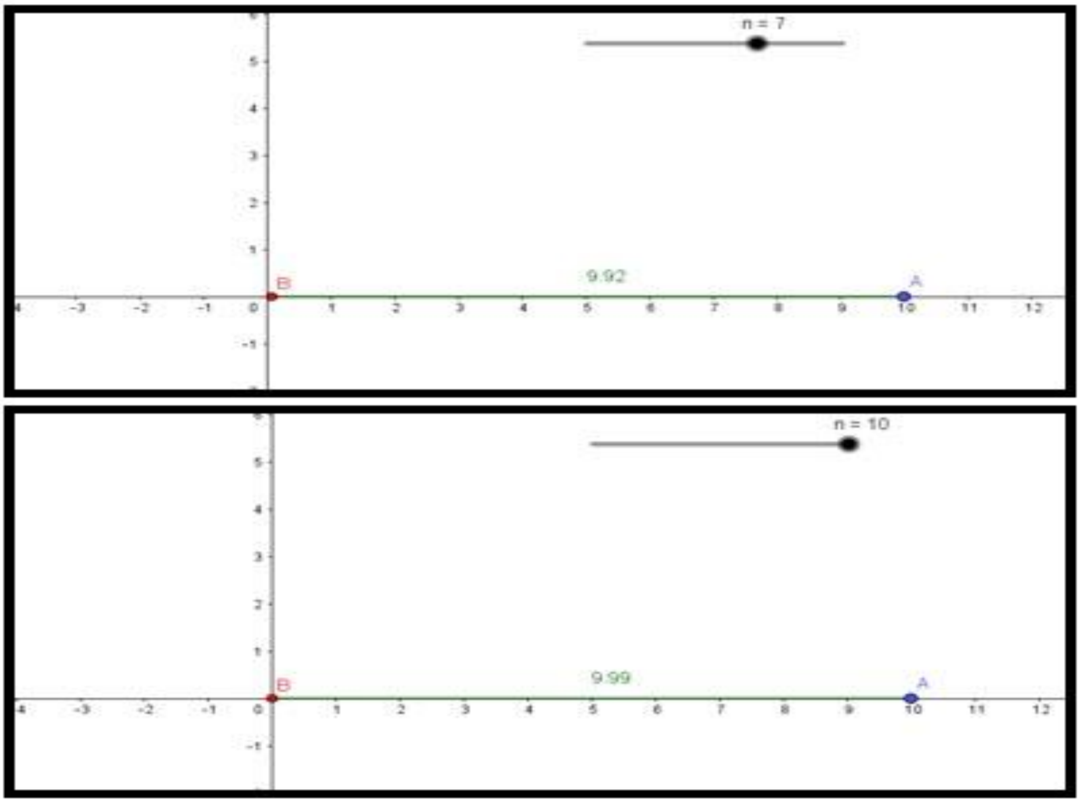
Assim, depois de 10 dias, a formiga terá percorrido:

$$10 \cdot \frac{1023}{1024} \text{ m}$$

Esse valor corresponde a aproximadamente 9,99 m, que podemos observar na figura 36.

Dialética da Validação – Nessa etapa, o aprendiz deverá validar o modelo matemático obtido na etapa anterior. Como afirma Almouloud (2007, p. 39), “de um lado o emissor, deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática”. Ainda segundo o autor, se o receptor não concordar com o modelo apresentado poderá pedir mais explicações ou rejeitá-las, justificando os motivos da rejeição. Assim, ele poderá comparar dados obtidos através do modelo matemático e utilizando o software para argumentar e perceber que, realmente, os dados estão corretos.

Figura 36 – Representação da quantidade de metros percorridos pela formiga depois de 7 e 10 dias, respectivamente



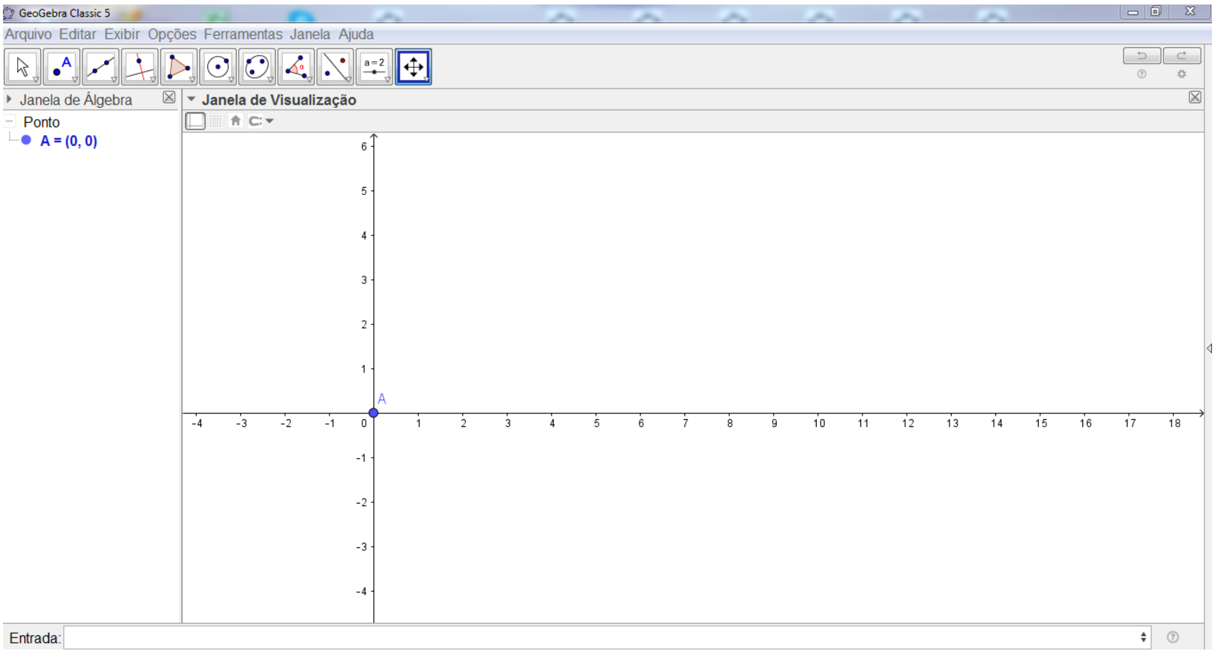
Fonte: Os autores.

Dialética da Institucionalização – O professor retoma o controle da situação didática e “fixa convencionalmente o estatuto cognitivo do saber” (ALMOULOUD, 2007, p. 40). O professor poderá rever o conceito de soma dos termos dos termos de uma PG, pois provavelmente algum aluno não lembre. O Geogebra será muito importante para que o aluno visualize cada “pulo da formiga” e possa comparar com seus resultados. Depois dessa etapa, segundo Almouloud (2007, p. 40), “o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos”.

COMANDOS NO GEOGEBRA

Inicialmente iremos representar a origem do percurso a ser percorrido pela formiga pelo ponto (0,0), digitando o comando “A= (0,0)” na Caixa de Entrada, como mostra a figura 37.

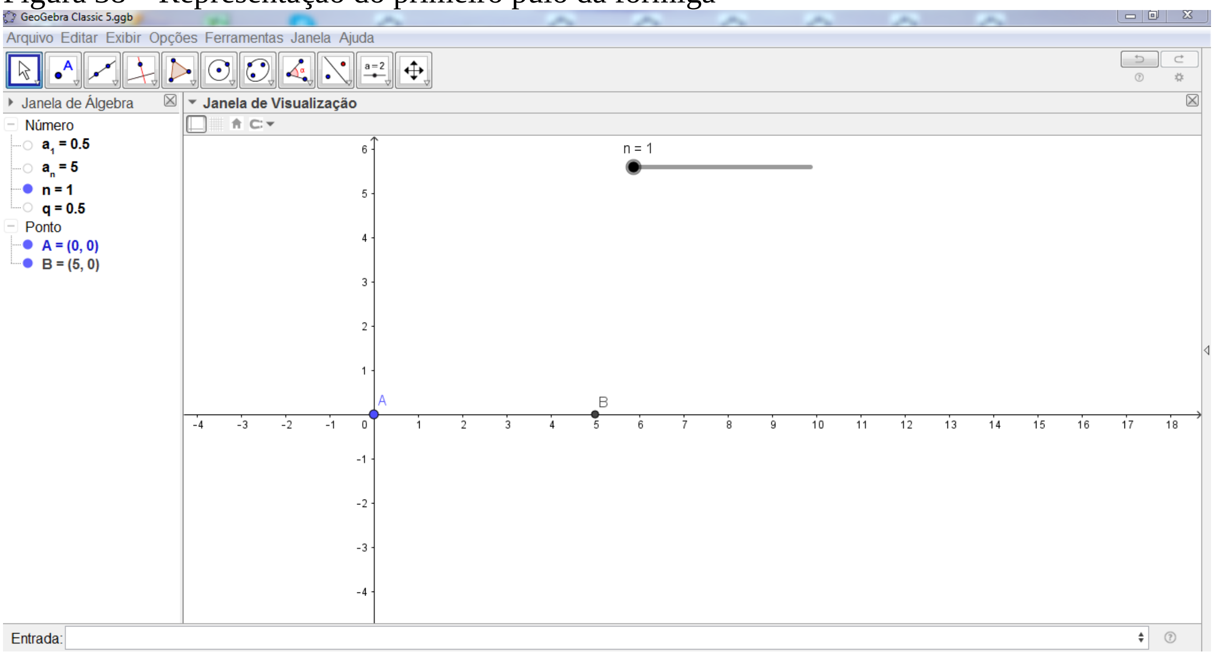
Figura 37 – Determinação do ponto “A= (0,0)”



Fonte: Os autores.

Agora, criaremos um controle deslizante “n”, com valores mínimo e máximo respectivamente iguais a 1 e 10 e incremento igual a 1. Esse número representará a quantidade de pulos da formiga. Também na Caixa de Entrada, digitaremos os comandos “a_1= 1/2”, “q=1/2” e “a_n= 10* (1 - 1 / 2^n)”, que representam, respectivamente, o primeiro termo da PG, a razão da PG e a medida percorrida em n pulos. Representaremos a medida percorrida por um segmento de reta e para isso criaremos um ponto com coordenadas cartesianas (a_n,0), digitando “B = (a_n,0)” na Caixa de Entrada.

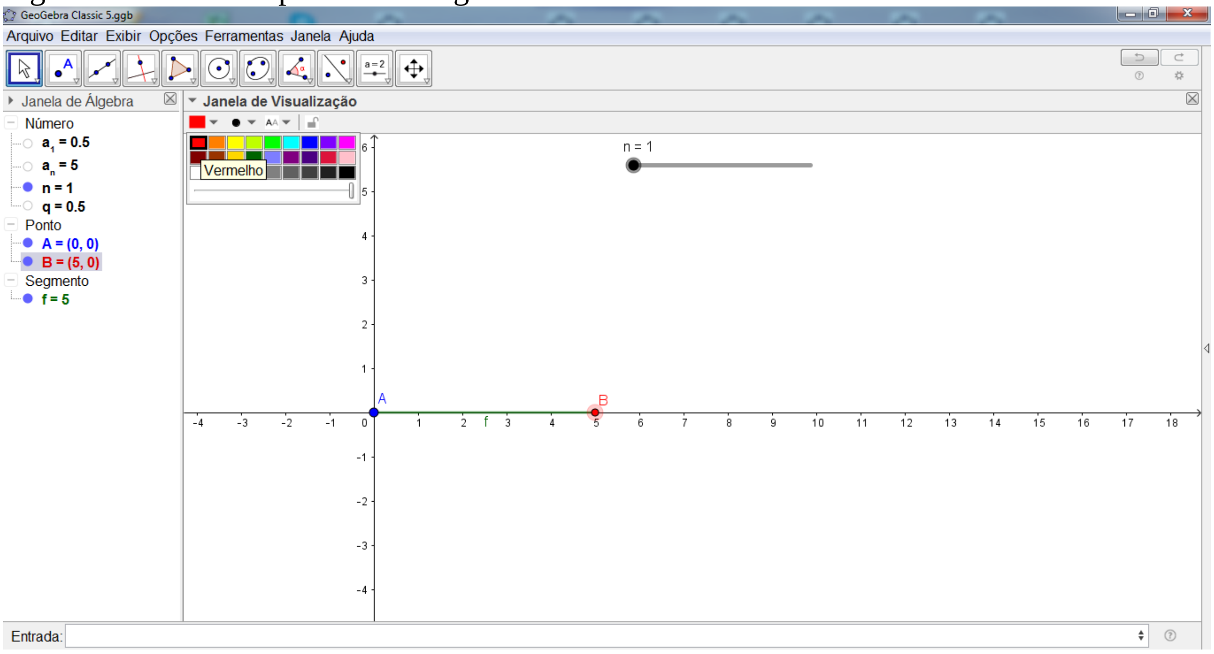
Figura 38 – Representação do primeiro pulo da formiga



Fonte: Os autores.

Agora, criamos o segmento de extremidades A e B, utilizando o comando “Segmento(A,B)” na Caixa de Entrada e em seguida colorimos cada objeto com cores diferentes para identificarmos melhor, a saber, “Ponto A” – azul, “Ponto B” – vermelho e “Segmento AB” – verde. Para colorir bastar clicar no objeto na janela visualização e depois na cor desejada, como na figura 39.

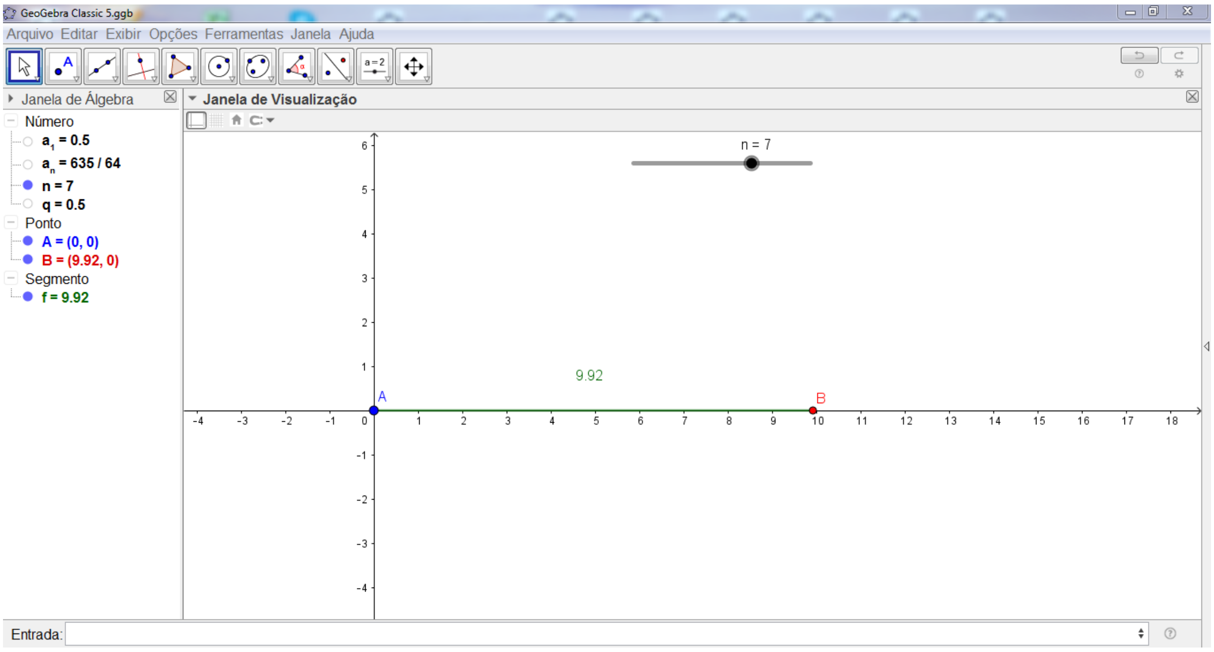
Figura 39 – Primeiro pulo da formiga destacado em cores diferentes



Os autores.

Determinaremos o perímetro do segmento ativando a opção “Distância, Comprimento ou Perímetro” na Barra de Ferramentas” e clicando no segmento AB. Movimentamos o controle deslizante para obtermos a medida percorrida em cada pulo da formiga. Também desativaremos o rótulo “f” do segmento AB, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento e, em seguida, ativando a opção “Exibir Rótulo”. Caso queira deixar a medida do perímetro mais visível podemos mover o número corresponde, utilizando a opção “Mover” no primeiro ícone da Barra de Ferramentas. Teremos, na figura 40, a representação dos 7 pulos da formiga.

Figura 40 – Representação do segmento que corresponde a 7 pulos da formiga



Fonte: Os autores.

Na Janela de Visualização, movimentando o controle deslizante, é possível observar a medida que a formiga irá alcançar a cada pulo e na Janela de Álgebra, a variação de todos os valores à medida que “n” for mudado.

1.1.8 Situação Didática Olímpica 8

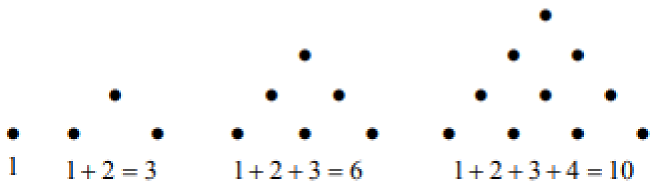
Conhecimentos Prévios – Sequências Numéricas.

Problema Olímpico (Banco de Questões 2006 – Lista 3 – p. 16 - Nível 1 – questão 1)

O famoso matemático grego Pitágoras chamou de *números triangulares* os números obtidos pela soma dos primeiros números obtidos pela soma dos primeiros números inteiros maiores que 0. Por exemplo, 1, 3, 6 e 10 são números triangulares:

$$1=1$$
$$3=1 + 2$$
$$6=1 + 2 + 3$$
$$10 = 1+ 2 + 3 + 4$$

A figura ilustra a motivação para o nome *números triangulares*.

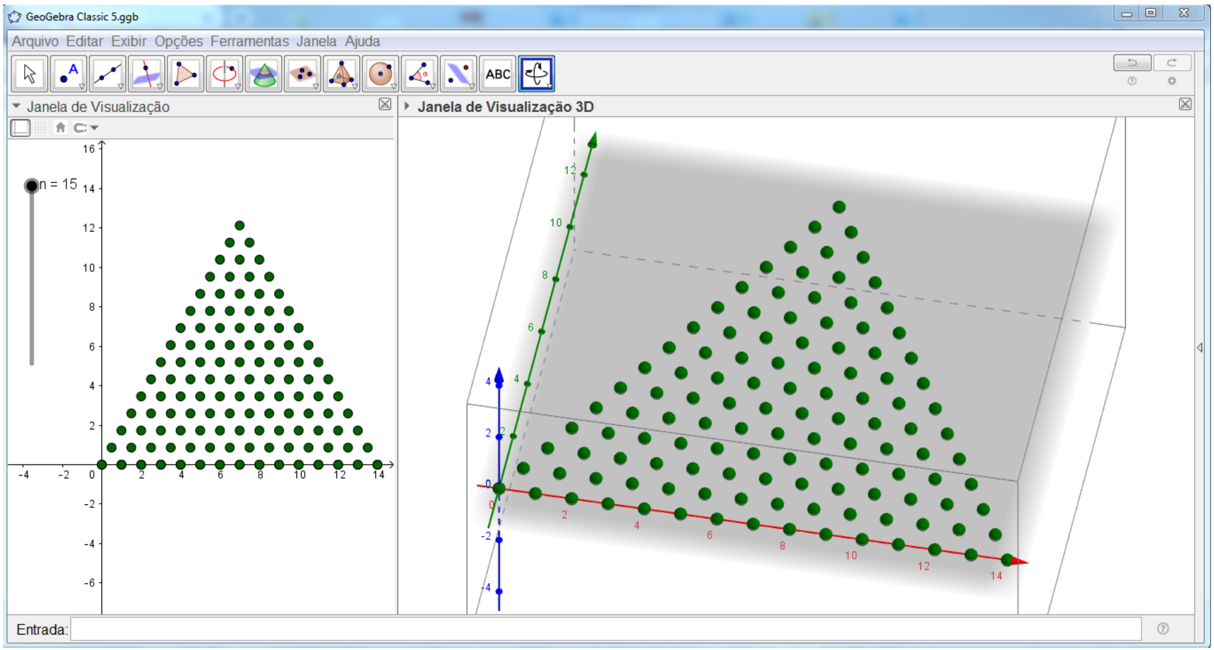


A sequência de números triangulares continua com 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, etc. Quantos são os números triangulares menores do que 100?

Dialética da Ação – Segundo Pais (2002, p. 72), essa fase "é aquela em que o aluno realiza procedimentos mais imediatos para a resolução de um problema, resultando na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica".

Dessa forma, os alunos irão, motivados pelo enunciado do problema, tentar encontrar um padrão, o que esperamos que facilmente eles percebam que o segundo número triangular é o primeiro somado a 2, o terceiro é a soma do segundo a 3, o quarto é a soma do terceiro a 4, seguindo sempre esse padrão. O professor poderá, para facilitar o entendimento da sequência, explorar a figura no Geogebra, movimentando o controle deslizante. Por exemplo, o décimo quinto número triangular, está apresentado na figura 41.

Figura 41 – Visualização 2D/3D correspondente ao décimo quinto número triangular da sequência



Fonte: Os autores

Dialética da Formulação – Nessa etapa, os alunos poderão utilizar o Geogebra para visualizar a sequência e verificar os números triangulares. Poderão debater com os colegas a fim de observar valores cuja soma ultrapasse 100. Movimentando o controle deslizante, facilmente ele observará a quantidade de “pontinhos” que é acrescentada a cada figura. Assim, observará que os números triangulares menores que 100 são: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 e 91, resultando, portanto, em treze números triangulares menores que 100.

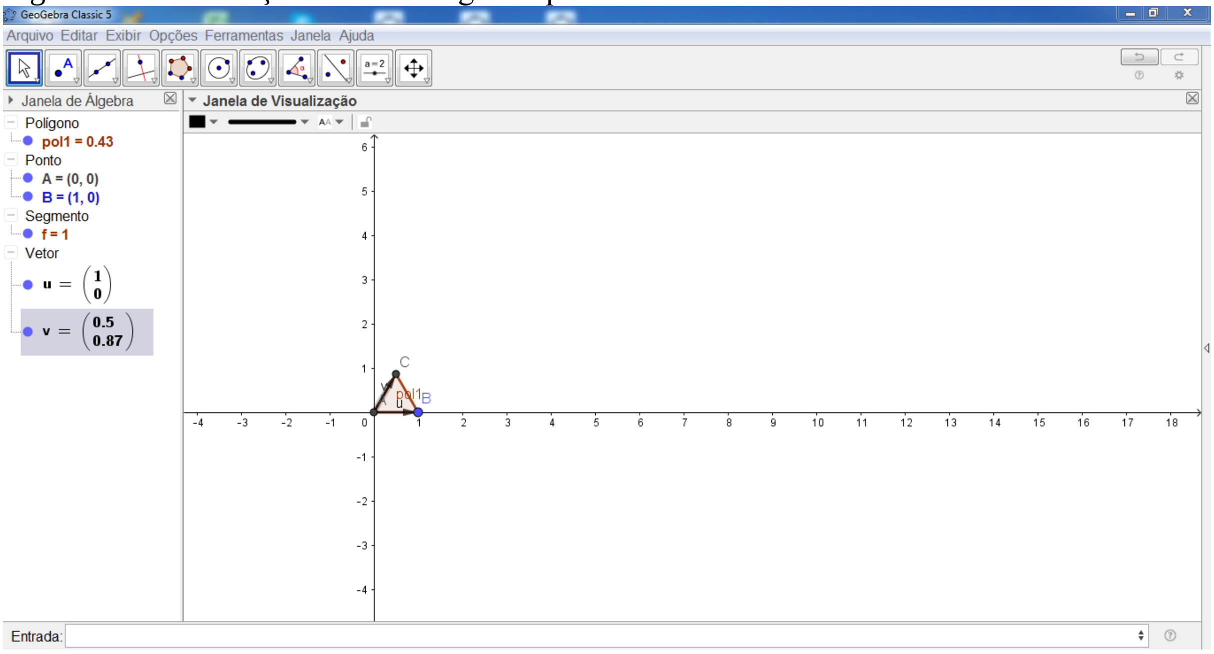
Dialética da Validação – Os alunos irão validar suas ideias da etapa anterior. Assim, debaterão, podendo ser que todos concordem com o resultado ou não. De acordo com Pais (2002, p. 73), “esse tipo de situação está relacionado ao plano de argumentação racional e, portanto, está voltada para a questão da veracidade do conhecimento”. Logo, é o momento do aluno atestar se seus argumentos serão aceitos.

Dialética da Institucionalização – O professor retoma o controle da situação e tira possíveis dúvidas e faz o fechamento das ideias, podendo fazer uma revisão de números triangulares. Pais (2002, p. 74) afirma que “sob o controle do professor, é o momento onde se tenta proceder a passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico".

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Inicialmente, construímos um triângulo regular utilizando o comando "Polígono Regular", determinando dois dos seus vértices (0,0) e (1,0). Também construímos os vetores u =(A,B) e (A,C).

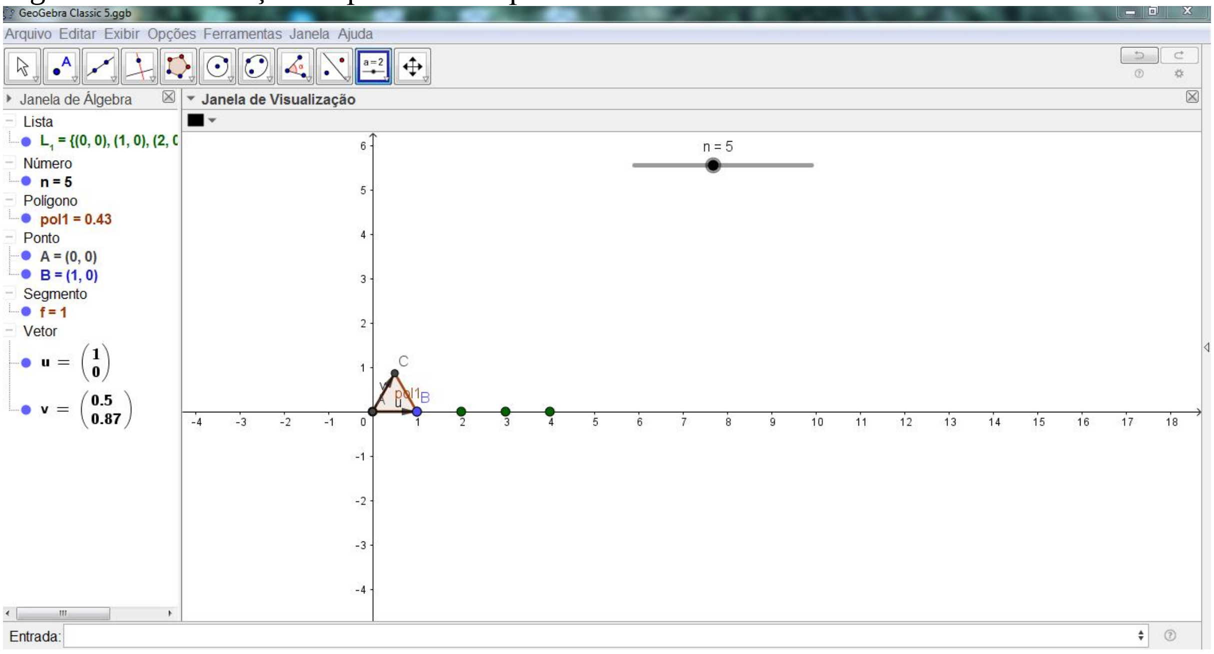
Figura 42 – Construção de um triângulo equilátero e dod vetores "u" e "v"



Fonte: Os autores

Feito isso, criamos o controle deslizante "n" com valores mínimo e máximo iguais a 1 e 15, respectivamente e incremento igual a 1 e criamos uma lista de pontos, determinada por "L_1=Sequência(Transladar(A, Vetor(u i)), i, 0, n - 1)". Abaixo temos a imagem para n = 5.

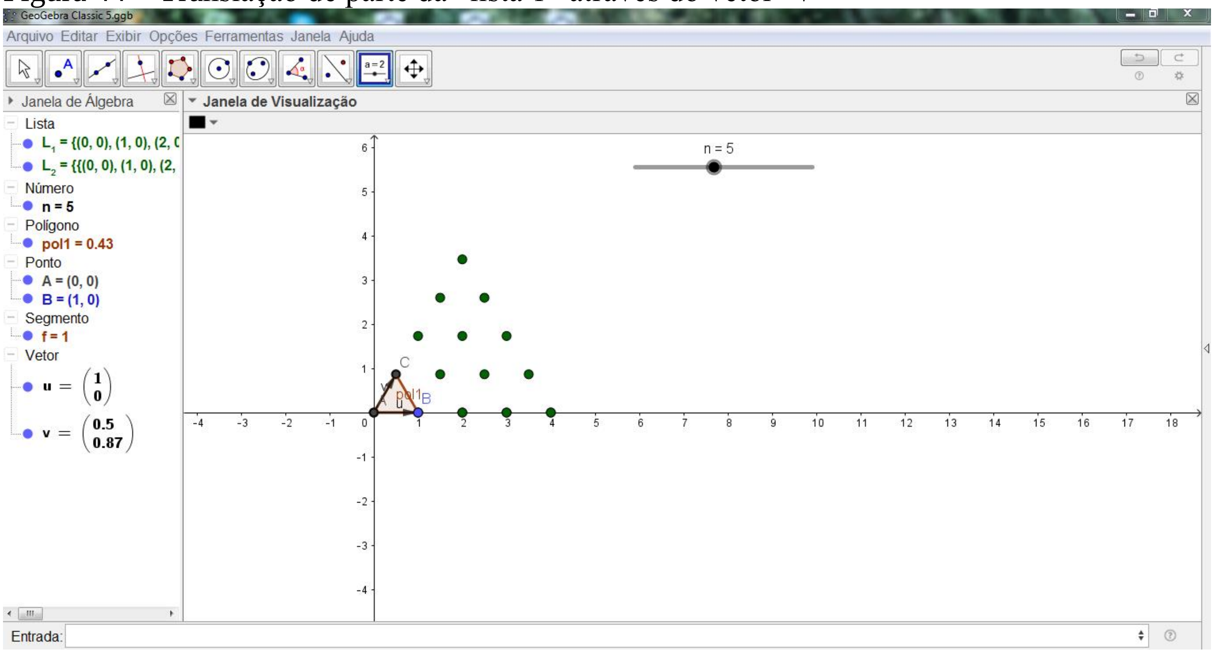
Figura 43 – Translação do ponto "A" a partir do vetor "u"



Fonte: Os autores

Em seguida transladamos essa lista de pontos através do comando "L_2=Sequência(Transladar(ParteDaLista(L_1, 1, n - i), Vetor(v i)), i, 0, n - 1)".

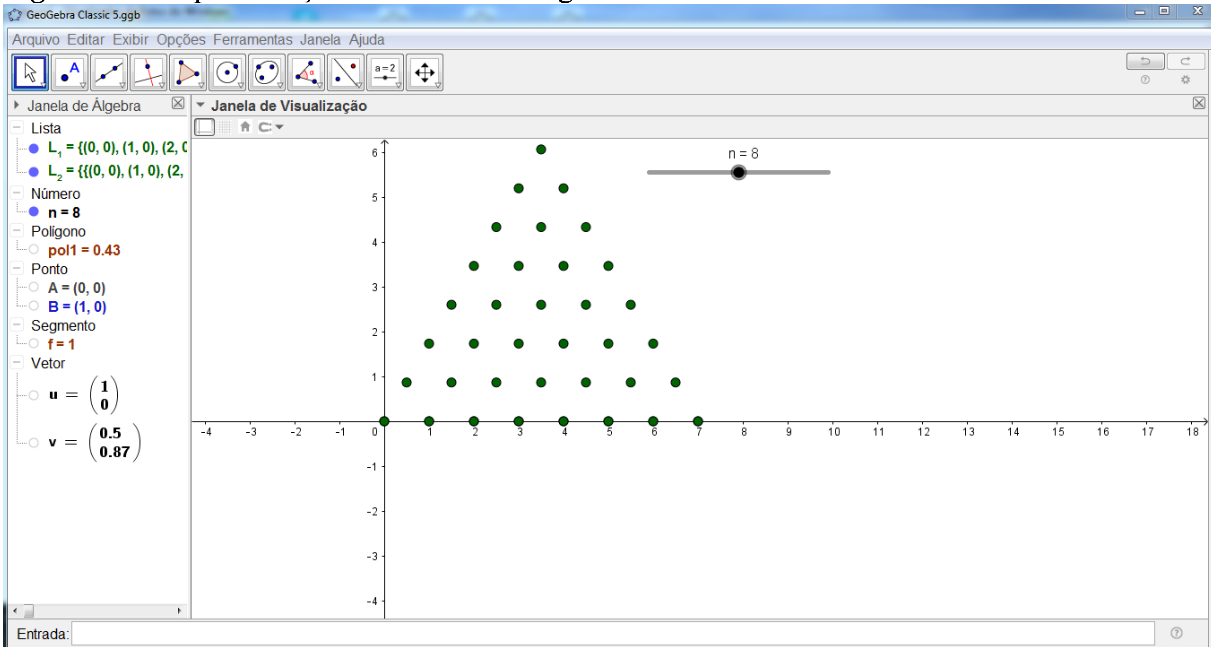
Figura 44 – Translação de parte da "lista 1" através do vetor "v"



Fonte: Os autores

Agora, ocultamos o rótulo "pol1", os pontos destacados e o polígono 1. Isso pode ser feito clicando com o botão direito do mouse em cada um e ativando "Exibir Rótulo" para "pol1" e "Exibir Objeto" para os pontos e para o polígono. Movimentando o controle deslizante, poderemos observar o comportamento de todos os números triangulares de 1 a 15.

Figura 45 – Representação do número triangular “8”



Fonte: Os autores

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Editora UFPR. São Paulo: Brasil. 2007.

ALVES, Francisco Régis Vieira; DIAS, Marlene Alves; LIMA, Maria Vanísia Mendonça de. Sobre o Ensino de Integrais Generalizadas (IG): um contributo da Engenharia Didática. **JIEEM**, v. 11, n. 2, p. 130-144, 2018.

ALVES, Francisco Régis Vieira. Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de Licenciatura. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 18, n.1, p. 61-93, 2016a.

ALVES, Francisco Régis Vieira. Transição Complexa do Cálculo TCC: Engenharia Didática para as noções de Sequências, Séries e Séries de Potências. **Educação Matemática em Revista**, RS, v.1, n.17, p.83-97, 2016b.

CAPES. **Relação de Cursos Recomendados e Reconhecidos. 2012**. Página 72.

BISOGNIN, Eleni. Produtos educacionais: análise da produção do Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. **Polyphonía**, Santa Maria, v. 24/2, p. 269-284, jul./dez. 2013.

GOMES, Severino Carlos. Ensino de Trigonometria numa abordagem histórica: um produto educacional. **Bolema**, v.27, n.46, p. 563-577, ago.2013.

MOREIRA, Marco A.; NARDI, Roberto. O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos. **R.B.E.C.T.**, v. 2, n.3, p. 1-9, set./dez. 2009.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** Uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.